



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO - CE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA

JOSÉ EDIVAM BRAZ SANTANA

**CONTRATO DIDÁTICO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA:
inter-relações no ensino da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio**

Recife
2022

JOSÉ EDIVAM BRAZ SANTANA

**CONTRATO DIDÁTICO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA:
inter-relações no ensino da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Anaíse de Santana Santos, CRB-4/2329

S232c

Santana, José Edivam Braz.

Contrato didático e registros de representação Semiótica: inter-relações no ensino da função afim no 1º ano do ensino médio. / José Edivam Braz Santana. – Recife, 2022.

366 f.: il.

Orientadora: Rosinalda Aurora de Melo Teles.

Coorientador: Marcelo Câmara dos Santos.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2022.

Inclui Referências.

1. Função afim. 2. Contrato didático. 3. Ensino médio. 4. Representação semiótica. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo. (Orientadora). II. Santos, Marcelo Câmara dos. (Coorientador). III. Título.

370 (23. ed.)

UFPE (CE2023-032)

JOSÉ EDIVAM BRAZ SANTANA

**CONTRATO DIDÁTICO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA:
inter-relações no ensino da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovada em: 16/12/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Rosinalda Aurora de Melo Teles (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos (Coorientador)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof^a. Dr^a. Iranete Maria da Silva Lima (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof^a. Dr^a. Kátia Maria de Medeiros (Examinadora Interna)
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Prof^a. Dr^a. Anna Paula de Avelar Brito Lima (Examinadora Externa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof^a. Dr^a. Veridiana Rezende (Examinadora Externa)
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR

DEDICATÓRIA

À minha esposa (Andreane), aos meus filhos (Leonardo, Guilherme e Camila), aos meus pais (Jorge – *In Memoriam*, e Margarida) e aos meus irmãos (Maria, Goretti, Joseane, Pedro e Cícero), dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido a graça de concluir esta etapa tão importante em minha vida, me dando coragem a cada dia para enfrentar e superar as adversidades. Gratidão, meu Deus!

À minha esposa (Andreane) e filhos (Leonardo, Guilherme, Camila) por compartilharem esse sonho comigo, estando ao meu lado em cada passo dessa trajetória e suportando as ausências necessárias nos momentos de dedicação ao curso.

Aos meus pais, Jorge – *In Memoriam*, e Margarida, pelo exemplo, dedicação e apoio dados aos filhos ao longo das nossas vidas.

Aos meus orientadores, professores Rosinalda Teles e Marcelo Câmara, com quem aprendi tanto. Cada um, à sua forma, me propiciou momentos de muita aprendizagem ao longo do curso. Minha gratidão especial à professora Rosinalda por ter me acolhido já na metade do curso (e da pesquisa). Sou grato a vocês por todo o apoio, confiança e incentivo dados.

Às professoras que fizeram parte das bancas de qualificação e defesa: Anna Paula Avelar, Veridiana Rezende, Iranete Lima e Kátia Medeiros; pelas valiosas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

Aos professores e colegas de curso, pelos momentos de discussão e aprendizagens construídas e compartilhadas.

Aos profissionais do EDUMATEC/UFPE pelo acolhimento e presteza nos serviços prestados aos estudantes. Meu agradecimento especial ao professor Sérgio Abranches, então coordenador do PPGEDUMATEC, pela acolhida quanto ao acesso a esse programa.

Aos colegas de trabalho da Gerência Regional de Educação Sertão do Alto Pajeú e Escola Municipal Ana Melo, pelo apoio e incentivo. Meu agradecimento especial à colega Nívea Cléa (*In Memoriam*) que sempre me incentivou, apoiou e se orgulhou das minhas conquistas. Sei que deves estar feliz com a minha vitória, onde quer que estejas.

Aos professores e aos colegas dos grupos de pesquisa: AL-JABR (Grupo de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra), GEPeDiMa (Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática), Fenômenos Didáticos na Classe

de Matemática e SEMEAR (Grupo de Pesquisa em Ciências e Educação Matemática), pelas aprendizagens construídas e pela contribuição na minha trajetória de pesquisador.

Aos participantes da pesquisa empírica, professora “Rita” e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, pela acolhida em sua sala de aula e contribuições importantíssimas para o desenvolvimento dessa pesquisa. Igualmente, agradeço à gestora da escola por ter “aberto suas portas” para receber esse pesquisador ao longo de mais de 30 dias.

Aos amigos queridos que o curso de doutorado me deu: Diego, Jéssica, Josias e Rayssa, colegas da “Equipe Didática”, pelo companheirismo e cumplicidade compartilhados ao longo desses anos de estudo.

“Sabedoria é saber o que fazer; habilidade é saber como fazer; virtude é fazer”
(JORDAN, [18--?]).

RESUMO

Este estudo teve por objetivo geral analisar inter-relações entre o contrato didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim. Dois aspectos motivaram a opção pelo objeto de conhecimento Função Afim: as dificuldades de aprendizagem amplamente evidenciadas em pesquisas, resultados de avaliações externas e na própria prática profissional do pesquisador; e necessidade de repensar o modo como tem se dado o ensino do tema. Adota como referencial teórico o contrato de didático – CD e a teoria dos registros de representação semiótica – TRRS. O contrato didático, importante pilar da teoria das Situações Didáticas, foi estudado inicialmente por Guy Brousseau e diz respeito à divisão de responsabilidades na sala de aula entre professor e estudante, na gestão de um saber. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, por sua vez, foi desenvolvida por Raymond Duval e defende, quando do ensino dos objetos matemáticos, a importância da exploração de diferentes registros de representação, os quais exercem papel importante na aprendizagem da matemática e se configuram como elementos essenciais para a compreensão de conceitos, a argumentação e raciocínio. Utiliza abordagem qualitativa para o estudo empírico, desenvolvido em uma escola pública estadual da cidade de Afogados da Ingazeira – PE. Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados: entrevista prévia (semiestruturada) com a professora participante; observação, com videogravação de 20 (vinte) aulas por ela ministradas sobre a Função Afim; e diário de bordo do investigador. As transcrições da entrevista e das aulas videogravadas, assim como os registros do diário de bordo do investigador, se constituíram em fontes de dados para as análises, que foram realizadas a partir de categorias que emergiram dos referenciais teóricos adotados, colocadas em inter-relação. Essas categorias foram: caracterização/tipologia de CD estabelecido, expectativas, negociações, regras, rupturas, renegociações (elementos do CD); e representações da Função Afim e coordenação, transformações semióticas, variação de congruência ou não congruência semântica (elementos da TRRS). Os resultados obtidos sugerem que a maneira como o professor gerencia o saber em cena, as situações propostas, as expectativas em relação aos estudantes, a divisão de responsabilidades, as regras instituídas na relação didática, é influenciada e ao mesmo tempo influencia os registros de representação semiótica do objeto

matemático em estudo – em nosso caso, a Função Afim; mobilizados em sua prática. Por outro lado, os tipos de registros de representação semiótica mobilizados, a coordenação entre esses registros, suas transformações, as variações de congruência ou não congruência semântica, favorecidos na relação didática sugerem que determinado tipo de contrato didático seja estabelecido. Assim, consideramos que existem inter-relações de estreita aproximação, ou seja, relações mútuas, entre o contrato didático estabelecido e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática.

Palavras-chave: Função afim; Contrato didático; Ensino médio; Representação semiótica.

ABSTRACT

This research had as main objective to analyze inter-relations between the didactic contract, established by a Mathematics teacher and her students from the first year of High School, and records of semiotic representations mobilized on the didactic relation during the teaching of Affine Function. Two aspects motivated the choice of the affine function object of knowledge: the learning difficulties widely evidenced in researches, in the results of external evaluations, and in the professional practice of the researcher; and the need to rethink the way in which the teaching of the subject has been carried out. It carries out as theoretical reference the didactic contract – DC and the theory of records of semiotic representation – TRSR. The didactic contract, relevant pillar of the theory of didactic situations, was studied initially by Guy Brousseau and it discusses the sharing of responsibilities on the classroom between teacher and student on the management of knowledge. The theory of semiotic representation records, furthermore, was developed by Raymond Duval and it defends, on the teaching of mathematical objects, the relevance of the exploration of different records of representation, which conduct crucial roles on the Mathematics learning process and presents themselves as essential elements for the comprehension of concepts, discussion, and reasoning. It applies the qualitative approach for the empiric study, developed on a public school of the city of Afogados da Ingazeira – PE. As data gathering tools it carried out: previous interviews (semi-structured) with the participant teacher; observation, with video recording of 20 (twenty) classes ministered about Affine Function, and; a board journal of the investigator. The interview transcripts and the videotaped classes, as well as the investigator's logbook records, were sources of data for the analyses, which were performed based on categories that emerged from the adopted theoretical frameworks, placed in interrelation. These categories were: characterization/typology of DC established, expectations, negotiations, rules, ruptures, renegotiations (DC elements), and; representations of Affine Function and coordination, semiotic transformations, congruence variations or not semantic congruence (elements of the TRSR). The obtained results suggest the way the teacher manages the knowledge in-scene, the proposed situations, the expectations concerning the students, the sharing of responsibilities, the rules stated on the didactic relation is influenced and at the same time influences the records of semiotic representation of the mathematical object studied – in the research case, the Affine

Function; mobilized on the practice. On the other hand, the types of records of semiotic representations, the coordination between these records, their transformations, the congruence or not semantic congruence variations, favored on the didactic relation suggest that a determined type of didactic contract is established. In addition, we consider the existence of inter-relation of narrow approach, such as a mutuals relations, between the didactic contract established and the records of semiotic representations mobilized on the didactic relation.

Keywords: Affine function; Didactic contract; High school; Semiotic representation.

RESUMÉ

Cette étude a eu comme objectif général d'analyser les interrelations entre le contrat didactique, établi par une professeure de mathématiques et ses étudiants de classe de seconde de lycée, et les registres de représentation sémiotique mobilisés dans la relation didactique pendant l'enseignement de la fonction affine. Deux aspects ont motivé l'option pour la fonction affine comme l'objet de connaissance: les difficultés d'apprentissage largement mises en évidence dans les recherches, les résultats des évaluations externes et dans la propre pratique professionnelle du chercheur et; la nécessité de repenser la façon dont l'enseignement du sujet a été donné. Le cadre théorique adopté consiste du contrat didactique – CD et; la théorie de registres de représentation sémiotique – TRRS. Le contrat didactique, premièrement étudié par Guy Brousseau, est un repère important de la théorie des situations didactiques, il concerne le partage de responsabilités en classe entre professeur et étudiant dans la gestion d'un savoir. À son tour, la théorie de registres de représentation sémiotique a été développée par Raymond Duval et défend, lors de l'enseignement des objets mathématiques, l'importance d'exploration de différents registres de représentation, lesquels jouent un rôle important dans l'apprentissage des mathématiques et se montrent comme des éléments essentiels pour la compréhension de concepts, l'argumentation et le raisonnement. On emploie une approche qualitative de nature ethnographique pour l'étude empirique développée dans une école publique d'État dans la ville d'Afogados da Ingazeira – PE. Comme instruments de collecte de données, on a employé: entretien préalable (semi-structuré) avec la professeure participante; observation, avec enregistrement vidéo de 20 (vingt) cours sur la fonction affine et; carnet de l'enquêteur. Les transcriptions de l'entretien et des leçons enregistrement vidéo, ainsi que les registres dans le carnet de l'enquêteur, ont constitué des sources de données pour les analyses, on a employé des catégories qui ont apparues à partir des référentiels théoriques, placées en interrelation. Ces catégories étaient les suivantes: caractérisation/typologie de CD établi, attentes, négociations, règles, ruptures, renégociations (éléments du CD) et; représentations de la fonction affine et coordination, transformations sémiotiques, variations de congruence ou non-congruence sémantique (éléments de la TRRS). Les résultats obtenus suggèrent que la manière dont la professeure gère le savoir mis en place, les situations proposées, les attentes par rapport aux étudiants, le partage de responsabilités, les règles

instituées dans de la relation didactique, sont influencés et en même temps influencent les registres de représentation sémiotique de l'objet mathématique en étude – dans ce cas, la fonction affine; mobilisés dans sa pratique. D'autre part, les types de registres de représentation sémiotique mobilisés, la coordination entre ces registres, ses transformations et les variations de congruence ou non-congruence sémantique, favorisés dans la relation didactique, suggèrent qu'un type de contrat didactique déterminé soit établi. Alors, on considère qu'il y a des interrelations de rapprochement étroites, c'est-à-dire, relations mutuelles, entre le contrat didactique établi et les registres de représentation sémiotique mobilisés dans la relation didactique.

Mots-clés: Fonction affine; Contrat didactique; Lycée; Représentation sémiotique.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 –	Triângulo didático	32
Figura 02 –	Modelos de contratos didáticos	48
Figura 03 –	Exemplo de transformações semióticas: tratamento e conversão	54
Figura 04 –	Exemplo de mobilização das operações discursivas da língua natural no ensino da Função Afim	70
Figura 05 –	Elementos fundamentais de análise das inter-relações entre o CD e os RRS na sala de aula	81
Figura 06 –	As inter-relações entre o CD e os RRS, quando das negociações de um saber em jogo	87
Figura 07 –	Esquema do currículo em Espiral de Bruner	95
Figura 08 –	Percentual de acertos dos estudantes (descritores D22 e D23) no período 2015 – 2018	97
Figura 09 –	Variáveis visuais e unidades simbólicas significativas correspondentes (Função Afim $f(x)=ax+b$)	104
Figura 10 –	Identificação e integração, com exemplos, de representações de variáveis visuais	106
Figura 11 –	Esquema de análise dos dados	144
Figura 12 –	Representação gráfica para um problema similar àquele proposto no quadro 18	162
Figura 13 –	Registro tabular dado na situação proposta na questão 5, trabalhada pela professora “Rita”	177
Figura 14 –	Atividade desenvolvida na sala de aula no dia 27 de ago. de 2021	184
Figura 15 –	Um dos exercícios resolvidos apresentados no LD adota e discutidos em sala de aula	189
Figura 16 –	Exemplo de representação gráfica em que os “elementos notáveis” do gráfico não são expressos	196

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 –	Tipos de registros de representação semiótica	52
Quadro 02 –	Exemplo de variação de congruência ou de não congruência semântica de uma conversão	59
Quadro 03 –	Exemplo de enunciado com baixo grau de não congruência semântica	60
Quadro 04 –	Exemplo de enunciado com médio grau de não congruência semântica	61
Quadro 05 –	Exemplo de enunciado com alto grau de não congruência semântica	61
Quadro 06 –	Exemplo referente ao fenômeno da heterogeneidade de sentidos de conversão	63
Quadro 07 –	Definições de funções ao longo dos séculos	98
Quadro 08 –	Representação gráfica de uma Função Afim genérica	102
Quadro 09 –	Exemplo de conversão $RA \rightarrow RG$, considerando as abordagens “ponto a ponto” e “interpretação global das propriedades figurais”	104
Quadro 10 –	Exemplos de variação das unidades significantes no RA e correspondente modificação visual no RG	107
Quadro 11 –	Estudo do sinal da Função Afim	109
Quadro 12 –	Periódicos consultados na revisão de literatura em ordem de conceito obtido na avaliação Qualis CAPES, quadriênio 2013-2016	113
Quadro 13 –	Trabalhos que pesquisaram sobre a Função Afim utilizando o CD como referencial teórico	115
Quadro 14 –	Trabalhos que pesquisaram sobre a Função Afim utilizando a TRRS como referencial teórico	117
Quadro 15 –	Trabalho que pesquisou sobre a Função Afim utilizando o CD (TSD) e a TRRS como referencial teórico	129
Quadro 16 –	Categorias e critérios de análise do CD	145
Quadro 17 –	Categorias e critérios de análise dos elementos da TRRS	145

Quadro 18 –	Primeiro problema proposto pela professora “Rita” ao introduzir o conceito de Função Afim	160
Quadro 19 –	Item nº 01 da primeira atividade proposta pela professora “Rita”	171
Quadro 20 –	Item nº 5 da primeira lista de atividades proposta pela professora “Rita”	175
Quadro 21 –	Situação inicial proposta pela professora “Rita” para introduzir o estudo das inequações e estudo do sinal da Função Afim	186
Quadro 22 –	Duas possíveis configurações de gráfico da Função Afim em que não aparece uma das intersecções com os eixos coordenados	193
Quadro 23 –	Síntese das regras contratuais que emergiram na relação didática à luz das representações semióticas da Função Afim mobilizadas	203

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior
CD	Contrato Didático
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
LD	Livro Didático
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OMS	Organização Mundial da Saúde
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBIC-Jr	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Junior
PISA	<i>Programme for International Student Assessment</i> (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em tradução livre)
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPP	Projeto Político Pedagógico
RA	Registro algébrico
RG	Registro gráfico
RG	Registro tabular
RLN	Registro em língua/linguagem natural
RRS	Registros de Representação Semiótica
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SAEPE	Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SD	Situação didática (ou situações didáticas)
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
TSD	Teoria das Situações Didáticas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	OBJETIVOS	28
1.1.1	Objetivo geral	28
1.1.2	Objetivos específicos	28
2	O CONTRATO DIDÁTICO	31
2.1	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	31
2.2	O CONTRATO DIDÁTICO	37
2.2.1	Os efeitos do Contrato Didático	41
2.2.1.1	Efeito Pigmalião – ou fenômeno das expectativas	41
2.2.1.2	Efeito Topázio	42
2.2.1.3	Efeito Jourdain	42
2.2.1.4	Deslize (ou deslizamento) metacognitivo	43
2.2.1.5	Utilização abusiva da analogia	43
2.2.1.6	Efeito Dienes	44
2.2.2	Caracterizando alguns tipos de contrato	45
3	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	50
3.1	ALGUNS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	50
3.2	A MATEMÁTICA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	64
3.2.1	Representação língua natural	67
3.2.2	Representação algébrica	71
3.2.3	Representação gráfica	75
3.2.4	Representação tabular	77
3.3	INTER-RELAÇÕES ENTRE O CONTRATO DIDÁTICO E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	79
4	A FUNÇÃO AFIM COMO SABER MATEMÁTICO EM JOGO	90
4.1	A FUNÇÃO AFIM EM DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR	90

4.2	O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: ELEMENTOS MATEMÁTICOS	98
4.2.1	Definição matemática da Função Afim	100
4.2.2	Taxa de Variação e Declividade da Função Afim	100
4.2.3	Casos particulares de Função Afim	101
4.2.4	Zero da Função Afim	101
4.2.5	Gráfico da Função Afim	102
4.2.6	Estudo do sinal da Função Afim	108
5	REVISÃO DE LITERATURA	111
5.1	O CENÁRIO DAS PESQUISAS SOBRE FUNÇÃO AFIM: UM RECORTE	111
5.1.1	Análise dos aspectos metodológicos de pesquisas relacionadas à Função Afim com aporte teórico no CD/TSD	114
5.1.2	Análise dos aspectos metodológicos de pesquisas relacionadas à Função Afim com aporte teórico na TRRS	117
5.1.3	Análise dos aspectos metodológicos de pesquisas relacionadas à Função Afim com aporte teórico no CD/TSD e na TRRS	129
6	PERCURSO METODOLÓGICO	133
6.1	NATUREZA E ABORDAGEM DA PESQUISA	133
6.2	CONTEXTUALIZAÇÃO DO ESTUDO EMPÍRICO	134
6.3	CAMPO DA PESQUISA E PARTICIPANTES	137
6.4	CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA E DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA	138
6.4.1	Caracterização da escola	138
6.4.2	Caracterização dos participantes	140
6.5	OS INSTRUMENTOS DE COLETA DOS DADOS E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA	141
6.6	ORGANIZAÇÃO DOS DADOS E CATEGORIAS ANALÍTICAS	143
7	ABORDAGEM ANALÍTICA E INTERPRETATIVA DOS DADOS	148
7.1	ANÁLISE DA ENTREVISTA: ELEMENTOS DO CONTRATO DIDÁTICO E DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS IDENTIFICADOS <i>A PRIORI</i>	148

7.2	ANÁLISE DO CONTRATO DIDÁTICO ESTABELECIDO E REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DA FUNÇÃO AFIM MOBILIZADAS NA RELAÇÃO DIDÁTICA	157
7.2.1	Caracterização/tipologia de CD estabelecido na relação didática analisada	158
7.2.2	Expectativas e negociações	159
7.2.3	Regras, rupturas e renegociações do Contrato Didático estabelecido	191
7.3	SÍNTESE DAS INTER-RELAÇÕES ENTRE O CONTRATO DIDÁTICO E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA MOBILIZADOS NA RELAÇÃO DIDÁTICA DURANTE O ENSINO DA FUNÇÃO AFIM	201
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	206
	REFERÊNCIAS	216
	APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL	228
	APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO I	229
	APÊNDICE C – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO II	231
	APÊNDICE D – ROTEIRO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA	233
	APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA “RITA”	237
	APÊNDICE F – TRANSCRIÇÕES DAS OBSERVAÇÕES DAS AULAS DA PROFESSORA “RITA” (GRAVADAS EM ÁUDIO/VÍDEO)	245
	ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA DO SAEPE	349
	ANEXO B – FASCÍCULO ADOTADO PELA PROFESSORA “RITA” PARA USO NAS AULAS	352

1 INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem da matemática nas diferentes etapas e níveis educacionais têm sido foco de investigações, tanto no Brasil quanto em outros países. Dentre as principais inquietações dessas investigações, destacam-se aquelas relacionadas às dificuldades de aprendizagem no que se refere a determinados objetos de conhecimento, dentre eles as funções. Desde os primeiros anos de escolaridade, estendendo-se por toda a educação básica e também pelo ensino superior, a matemática se configura como uma disciplina que suscita dificuldades e se constitui em obstáculos e desafios a serem superados pelos estudantes.

Parte desses obstáculos e desafios, de acordo com a perspectiva histórica do ensino da Matemática no Brasil, advêm dos métodos tradicionais de ensino. Tais métodos privilegiam o uso exacerbado do simbolismo, procedimentos estanques e exercícios exaustivos, práticas que favorecem a reprodução “mecânica” de cálculos por parte dos estudantes, sem que haja compreensão das relações e conceitos “por trás” de tais procedimentos. No entanto, a sociedade atual tem exigido dos sujeitos, capacidades para além da memorização: interpretação, argumentação, reflexão, resolução de problemas do cotidiano, utilização de modelos matemáticos em situações diversas e conhecimentos sobre diferentes tecnologias são algumas delas (BRASIL, 2019).

Nesse sentido, é dever da área de Matemática e suas Tecnologias e, por conseguinte, daquele responsável pelas situações de ensino – o professor,

promover ações que estimulem e provoquem [nos estudantes] seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum (BRASIL, 2019, p. 519).

Neste trabalho, adotamos a Função Afim como objeto matemático de estudo justamente por nos inquietarmos com as premissas postas anteriormente: as dificuldades de aprendizagem dos estudantes e a necessidade de se repensar as formas de ensino utilizadas no contexto desse objeto matemático, de forma particular. A nossa experiência pessoal, enquanto professor de matemática do Ensino Médio, revela dificuldades dos estudantes dessa etapa de ensino em lidar com esse objeto matemático em quaisquer de suas representações: conjuntos de pares ordenados, tabelas, gráficos cartesianos, expressões algébricas, sequências, língua natural,

dentre outras. Outro aspecto que nos chama a atenção são os resultados obtidos pelos estudantes ao final do Ensino Médio quando submetidos às avaliações em larga escala, em particular aquela do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE.

Uma análise sistemática dos resultados das avaliações do SAEPE desde o período em que estas passaram a ser aplicadas anualmente e seus resultados amplamente divulgados e discutidos nas escolas (a partir do ano de 2008), pudemos observar que todos os anos os estudantes avaliados apresentam baixo desempenho nos descritores¹ que se referem à Função Afim. A título de ilustração, dados da Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco (obtidos via e-mail) apontam que apenas 9% dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio, avaliados no SAEPE 2017, conseguiu “reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes”, enquanto que em 2018 aproximadamente 31% conseguiu “reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico ou vice-versa”.

Embora os dados sugiram uma melhoria nos índices de desempenho, ainda há um número considerável de estudantes que concluem o Ensino Médio sem desenvolver as habilidades avaliadas, em torno de 70% deles. Esses dados sugerem, ainda, que o modo como a ação didática do professor, o ensino, tem sido desenvolvida em sala de aula não tem surtido o efeito esperado, isto é, a aprendizagem dos estudantes. O fato de a Função Afim ser considerada a mais elementar dentre os tipos de funções matemáticas estudadas no Ensino Médio (afim, quadrática, exponencial, logarítmicas, trigonométricas) e ainda assim essas dificuldades persistirem, nos inquieta.

Além dessa nossa justificativa pessoal, pesquisas como as de Delgado (2010), Lucas (2010), Cardoso *et al.* (2013), Lenartovicz (2013), Fonseca *et al.* (2013), Meneses (2014), Batista (2015) e Tozo (2016) mostram dificuldades dos estudantes de diferentes níveis e etapas de ensino em relação à aprendizagem desse objeto de ensino. Essas dificuldades podem acarretar outras, posteriores, sejam diretamente

¹ Aqui entendidos como um “recorte” do Currículo de Matemática do Estado de Pernambuco, ou seja, podemos considerar os descritores como sendo algumas expectativas do currículo, tomadas como básicas e/ou essenciais para aquela etapa de ensino, as quais são apresentadas na Matriz de Referência para o SAEPE (Anexo A). No caso particular da Função Afim, três descritores são destacados na Matriz de Referência: **D19** – Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau; **D22** – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes e **D23** – Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico ou vice-versa.

relacionadas ao objeto matemático Função Afim ou a outros objetos, dentro e fora da matemática, fato que parece ratificar a necessidade de novas pesquisas.

Nesse sentido, nos propomos a analisar inter-relações entre o contrato didático – CD² e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática, entendida como uma relação dinâmica e complexa, instituída entre professor e estudante com vistas à apropriação de um saber em jogo.

Adotamos como referencial teórico de pesquisa o Contrato Didático – CD e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica – TRRS. O contrato didático, pode ser definido como o conjunto de comportamentos tanto do professor que é esperado pelo estudante, quanto o conjunto dos comportamentos do estudante que é esperado pelo professor. Esse fenômeno didático regula a divisão de responsabilidades na sala de aula entre professor e estudante, na gestão de um saber, instituindo regras, em parte explícitas, mas, implícitas na sua maioria. Foi inicialmente estudado por Guy Brousseau e seus colaboradores, a partir da Teoria das Situações Didáticas – TSD (BROUSSEAU, 1986), na França.

Naquele momento histórico, o interesse das pesquisas desenvolvidas por esse grupo de pesquisadores focava, para além do processo de transmissão e aquisição de conhecimentos matemáticos, o entendimento e elaboração de modelos explicativos para os fenômenos que emergiam na sala de aula de matemática, os fenômenos didáticos.

Com esses estudos esperava-se que os resultados obtidos permitissem compreender o funcionamento do sistema didático. A respeito disso, entende-se que “um sistema didático se forma cada vez que algumas pessoas se deparam com uma questão cuja resposta não seja evidente e decidem fazer algo para resolvê-la” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 195). Em outros termos, podemos considerá-lo como aquele sistema instituído entre os três elementos da relação didática: professor, estudante e saber.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, por sua vez, foi desenvolvida por Raymond Duval (DUVAL, 2004) e defende, quando do ensino dos objetos matemáticos, a importância da exploração de diferentes registros de representação, os quais exercem papel importante na aprendizagem da matemática e se configuram como elementos para a compreensão de conceitos, argumentação e

² Uma vez que estaremos sempre nos referindo a esse fenômeno didático, utilizaremos, vez por outra, essa abreviação.

raciocínio. Tal teoria se constitui em uma abordagem semiocognitiva que analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da Matemática e o funcionamento cognitivo “peculiar dessa ciência, levando em consideração o modo de acesso aos seus objetos, a variedade de sistemas semióticos que permitem representá-los e a necessária distinção entre o objeto matemático e a sua representação” (DENARDI, 2017, n. p).

Nossa escolha por esses aportes teóricos se deu pelo fato de, inicialmente, percebermos que o debate sobre as questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da matemática tem ocupado lugar de destaque em pesquisas na área da Educação Matemática e em eventos científicos, tanto nacionais quanto internacionais; e essas duas teorias têm dado sustentação a diversos trabalhos publicados. Posteriormente, a participação em grupos de estudo e pesquisa como o grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática – FDCM, grupo de pesquisa em Ciências e Educação Matemática – SEMEAR e o grupo de estudos e pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa, dos quais sou membro, endossou essa nossa escolha por nos propiciar enxergarmos a contribuição da nossa tese para a área da Educação Matemática e, mais particularmente, para a Didática da Matemática.

Embora entendamos que essas teorias têm, em sua gênese, naturezas epistemológicas distintas, pois a teoria das Situações Didáticas, da qual o CD é um dos seus pilares, é uma “teoria didática” e a TRRS, semiocognitiva; acreditamos e defendemos que, no contexto da sala de aula, elas não se excluem mutuamente, ao contrário, podem ser entendidas de forma complementar. Para a Teoria das Situações Didáticas – TSD a aprendizagem do estudante ocorre por meio da adaptação, no sentido Piagetiano da palavra, deste estudante às situações didáticas apropriadas, no confronto com uma situação problema (ALMOULOU, 2007).

Para Piaget, a adaptação é o processo que ocorre quando o indivíduo possui os esquemas³ mentais necessários e suficientes para “resolver” determinados problemas, daí dizemos que ele está em “equilíbrio”, ou seja, adaptado ao meio. Neste sentido, a aprendizagem advém da proposição de uma situação didática adequada

³ Para Piaget (1896-1980), os esquemas são estruturas mentais por meio das quais o indivíduo é capaz de assimilar, reconhecer, interpretar e classificar elementos do ambiente, ou seja, se referem aos conhecimentos adquiridos, que utilizamos para interpretar e organizar as informações que recebemos.

que seja capaz de mobilizar o estudante a buscar os recursos no meio (*Milieu*)⁴ para solucioná-la e, assim, construir o conhecimento (BROUSSEAU, 1986). Dessa forma, a TSD não se interessa pelo pensamento cognitivo do estudante, mas em como esse estudante e o professor devem agir diante de um saber para transformá-lo em conhecimento.

Por outro lado, a TRRS defende que a apreensão conceitual, ou seja, a aprendizagem do estudante, depende do modo de funcionamento cognitivo desse estudante. Para Duval (2004), as dificuldades de aprendizagem dos estudantes seriam de ordem cognitiva, e não de ordem didática. Assim,

Apesar de cada teoria analisar e modelar o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos de maneiras diferentes, a articulação entre elas promove condições de desenvolver e analisar situações que favorecem um ensino e uma aprendizagem significativos. A articulação dessas teorias permite empreender uma reflexão aprofundada sobre os fatores que interferem no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos e desenvolver situações (contratos e *milieu*) que permitem ao aprendiz ganhar o jogo, ou seja, aprender a aprender (ALMOULOU, 2007, p. 207).

Nessa perspectiva, considerando que no seio de uma relação didática as relações com os saberes são pessoais, particulares (JONNAERT, 1996), e sofrem influências não apenas do meio, didáticas, mas também de ordem cognitiva, a articulação entre essas teorias, em particular além do justificado por Almouloud (2007) na citação acima, permite uma contribuição para a própria constituição da Didática da Matemática como área de investigação, com toda a complexidade das questões estudadas nesta área (ALMOULOU, 2007), como a proposta dessa tese.

Assim, tendo em vista que a atividade matemática envolve os processos cognitivos do sujeito humano (DUVAL, 1996) faz-se necessário levar em conta o cognitivo na didática (DUVAL, 1996), ou seja, nas situações propostas aos estudantes deve ser levado em consideração, por um lado, a distinção entre a tarefa puramente matemática e a tarefa cognitiva e, por outro lado, “examinar a implicação real da tarefa matemática na tarefa cognitiva. Isto significa que estes dois tipos de tarefas não são de fato separáveis, mas podem ser analisados a partir de dois pontos de vista diferentes” (DUVAL, 1996, p. 375): o didático e o cognitivo.

⁴ Brousseau (1986) define de *Milieu* o meio em que a relação didática acontece. Esse termo será melhor discutido no próximo capítulo dessa tese – “O Contrato Didático”.

Dessa forma, entendemos que analisar inter-relações entre o contrato didático e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática trará uma importante contribuição teórica para o campo da Didática da Matemática. Outros autores também já se interessaram em estabelecer relações/inter-relações entre o CD e outros aportes teóricos, no entanto, diferentes da TRRS. Dentre eles destacamos: Brito Menezes (2006); Araújo (2009); Almeida (2016); Lima Borba (2018) e Ferreira da Silva (2021).

A pesquisa de Brito Menezes (2006) analisou as inter-relações entre o contrato didático e a transposição didática⁵ quando do ensino da álgebra elementar, na 6ª série do Ensino Fundamental (atual 7º ano) de uma escola da rede particular de ensino do Recife - PE. Como resultados, a pesquisa aponta que os fenômenos didáticos, contato didático e transposição didática se relacionam de maneira estreita, sendo, na perspectiva da autora, a relação ao saber do professor um elemento central na relação didática, influenciando, de maneira direta, tanto o fenômeno do CD, quanto o da transposição didática e a construção do conhecimento pelo estudante.

Já Araújo (2009) analisou as relações entre o contrato didático e metacognição na resolução de problemas algébricos, particularmente envolvendo equações e sistemas de equações em pesquisa desenvolvida com um professor de Matemática e seus respectivos estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, também de uma escola da rede particular de ensino do Recife – PE. Os resultados da pesquisa revelaram que, apesar da tentativa do professor em promover estratégias metacognitivas, essas apenas surgiram mais evidentemente após ruptura do contrato didático estabelecido por esse professor.

Almeida (2016), por sua vez, analisou as relações entre o contrato didático e as organizações matemáticas – OM e didáticas – OD, no ensino das equações do segundo grau com uma incógnita. Participaram da pesquisa dois professores de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental de duas escolas localizadas na cidade de Pesqueira – PE, sendo uma pública e outra privada, e seus respectivos estudantes. Os resultados encontrados apontaram que em algumas situações observadas nas aulas dos dois professores as regras contratuais “cristalizam” as ideias relacionadas à resolução das equações do 2º grau com uma incógnita, mais especificamente ao

⁵ Processo de deformação de um saber, no sentido de que lhe seja dada uma **nova forma**, ou seja, um processo de **didatização** para que ele possa se transformar em um saber a ser ensinado. Para saber mais, consultar Brito Menezes (2006).

que o autor chama de **movimentos** entre incógnitas e coeficientes numéricos e os membros da equação.

Lima Borba (2018) desenvolveu um estudo que teve por objetivo propor uma tipologia de contrato didático, considerando elementos da Didática, da Psicanálise e da Relação ao Saber do professor de matemática no contexto da sala de aula de matemática do Ensino Superior. Os resultados revelaram que existem diferentes tipos de contrato didático em sala de aula (como aqueles indicados pela autora), sendo esses subordinados à relação ao saber (matemático) do professor, às representações acerca dos estudantes, e questões inerentes à (inter)subjetividade que se configura no cenário didático.

Por fim, Ferreira da Silva (2021) se debruçou sobre as inter-relações entre o CD e as Decisões Didáticas do professor em pesquisa desenvolvida com um professor de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada no Cariri Ocidental, estado da Paraíba, e seus estudantes, tendo como saber em jogo as expressões algébricas e os polinômios. Os resultados apontaram que as decisões didáticas que foram tomadas no momento de planejamento do professor se relacionaram **intimamente** com as expectativas do contrato didático por ele negociado com seus estudantes. No que se refere à prática de ensino do professor, concluiu-se que as situações didáticas evidenciaram a coexistência e a inter-relação entre as decisões didáticas e o contrato didático.

Os trabalhos ora mencionados parecem sugerir o quão **fértil** pode ser o campo de investigação que busca analisar relações/inter-relações entre o contrato didático e outras perspectivas teóricas. Além disso, não identificamos nessa busca nenhum trabalho que articulasse o contrato didático e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Nessa direção, o nosso trabalho se constitui em mais uma contribuição teórica no campo da Didática da Matemática que aborda essa “perspectiva relacional”. Mas, afinal, no que difere a nossa pesquisa e as apontadas nos parágrafos anteriores? Todas as pesquisas anteriormente apresentadas trabalharam com teorias didáticas, isto é, que “olham” diretamente para o sistema didático, enquanto que a nossa olha “essencialmente” para o saber, estabelecendo uma relação entre o didático e o cognitivo.

Dessa forma, considerando a problemática anteriormente apresentada, nesse estudo nos propomos a responder à seguinte questão norteadora: Que inter-relações podem ser evidenciadas entre o contrato didático e os registros de representação

semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática? A partir dessa questão de pesquisa, formulamos os objetivos apresentados a seguir.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Analisar inter-relações entre o contrato didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim.

1.1.2 Objetivos específicos

A) Caracterizar o contrato didático estabelecido entre professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio durante o ensino da função afim.

B) Identificar os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados no seio do CD estabelecido entre professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

C) Caracterizar inter-relações entre o contrato didático e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim.

Nossa opção por estudantes do 1º ano do Ensino Médio se deu pelo fato de ser nesse ano de escolaridade em que a Função Afim é objeto de estudo de forma mais aprofundada⁶, o que pode facilitar a melhor identificação e compreensão das regras contratuais que emergem, assim como as representações semióticas desse objeto matemático mobilizadas na relação didática e, por conseguinte, inter-relações entre esses dois.

Nesse contexto, temos por hipótese que existem inter-relações de estreita aproximação, ou seja, relações mútuas entre o contrato didático estabelecido e os

⁶ Ressalta-se que com a implementação do Novo Ensino Médio, em andamento durante o decurso da escrita dessa tese e posterior à etapa de coleta de dados da pesquisa, outras configurações de ensino para a função afim possam ser consideradas a depender de cada rede de ensino, devido à flexibilidade curricular apontada pela Lei nº 13.415/2017 que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio.

registros de representação semiótica mobilizados na relação didática. A maneira como o professor gerencia o saber em cena, as situações propostas, as expectativas em relação aos estudantes, a divisão de responsabilidades, as regras instituídas na relação didática é influenciada e ao mesmo tempo influencia os registros de representação semiótica do objeto matemático em estudo – em nosso caso, a Função Afim; mobilizados em sua prática.

Por outro lado, os tipos de registros de representação semiótica mobilizados, a coordenação entre esses registros, suas transformações, as variações de congruência ou não congruência semântica, favorecidos na relação didática sugerem que determinado tipo de contrato didático seja estabelecido.

Participaram da pesquisa uma professora de matemática de uma escola pública estadual localizada na cidade de Afogados da Ingazeira – PE e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio. É necessário esclarecer que a pesquisa ora apresentada foi desenvolvida no contexto então atual de pandemia de COVID-19 deflagrada desde o início do ano de 2020. As medidas restritivas decorrentes desse contexto impõem mudanças no contrato escolar (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001) e, em certa medida, mudanças no CD que poderia ser instituído em tempos anteriores e/ou posteriores à pandemia. No capítulo 6, que trata do percurso metodológico da pesquisa, traremos uma contextualização que esclarecerá o leitor sobre o contexto aqui mencionado.

Em termos metodológicos, optamos por uma abordagem qualitativa, desenvolvida por meio da realização de uma entrevista semiestruturada com a professora da turma e a gravação em vídeo das aulas dessa professora quando esta trabalhou com seus estudantes a Função Afim. No capítulo 6 (Percurso Metodológico) essas etapas são detalhadas, assim como é apresentado o esquema de análise dos dados, com categorias e critérios adotados.

Para direcionar o leitor, apontamos a seguir a organização desse texto de tese, que foi estruturado em 8 capítulos. Essa Introdução constitui o capítulo 1 e se dedica às nossas considerações iniciais a respeito do trabalho. No capítulo 2 discutimos sobre o contrato didático, situando-o em relação à Teoria das Situações Didáticas e apresentando algumas noções essenciais inerentes a esse fenômeno didático como: efeitos do contrato didático e a caracterização de alguns tipos de contrato.

No capítulo 3 discorreremos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, apontando alguns pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino e

a aprendizagem da Matemática centrados nessa teoria. Ainda nesse capítulo, tecemos algumas considerações teóricas acerca das inter-relações instituídas entre o contrato didático e os registros de representação semiótica mobilizados durante o ensino da Função Afim.

Na sequência do texto trazemos algumas reflexões acerca do saber em jogo, o objeto matemático Função Afim – o capítulo 4, no qual apresentamos uma discussão sobre a abordagem da Função Afim proposta nos documentos de orientação curricular vigentes e; sobre as representações semióticas desse objeto matemático comumente exploradas no ensino (representação em língua natural⁷, representação algébrica, representação gráfica e representação tabular). Também discutimos nesse capítulo elementos matemáticos considerados essenciais para a compreensão dos conceitos da Função Afim, dentre outros: definição, taxa de variação e casos particulares.

Dedicamos o capítulo 5, nesse sentido, à revisão sistemática de literatura. Nesse capítulo discutimos sobre pesquisas desenvolvidas e publicadas, tanto no Brasil quanto em outros países, que adotaram a Função Afim como objeto matemático de estudo, em três frentes: primeiro, pesquisas relacionadas à Função Afim que utilizaram o CD, ou a TSD de maneira mais ampla mas trazendo elementos do CD como aporte teórico; segundo, pesquisas relacionadas à Função Afim que utilizaram a TRRS como aporte teórico e; terceiro, pesquisas relacionadas à Função Afim que utilizaram o CD/TSD e a TRRS, simultaneamente, como aportes teóricos para discussão.

O capítulo 6 foi destinado ao percurso metodológico. Nele delineamos a nossa pesquisa quanto à sua natureza e abordagem, situamos o leitor quanto ao contexto em que foi realizada (contexto de pandemia de COVID-19), apresentamos uma caracterização dos participantes assim como os instrumentos de coleta dos dados, procedimentos adotados para coleta, análise e discussão desses dados.

No capítulo 7, consequentemente, adentramos na discussão e análise dos dados, procurando responder à questão e objetivos de pesquisa apontados na Introdução. E no capítulo 8 finalizamos esse trabalho e tecemos nossas considerações finais acerca do estudo realizado. Na sequência desse texto discute-se sobre o nosso referencial teórico, nos capítulos 2 e 3, conforme mencionado.

⁷ Nesta tese, os termos “língua natural”, “língua materna”, “linguagem natural” e “linguagem materna” são considerados sinônimos.

2 O CONTRATO DIDÁTICO

Nesse capítulo discorreremos sobre o Contrato Didático (BROUSSEAU, 1982, 1986, 2008), situando-o em relação à Teoria das Situações Didáticas, apresentando algumas noções essenciais inerentes a esse fenômeno didático, como efeitos do contrato didático e a caracterização de alguns tipos de contrato. Alguns dos elementos aqui discutidos foram adotados como categorias e critérios de análise dos dados, conforme explicitado no Percurso Metodológico, capítulo 6 dessa tese.

2.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

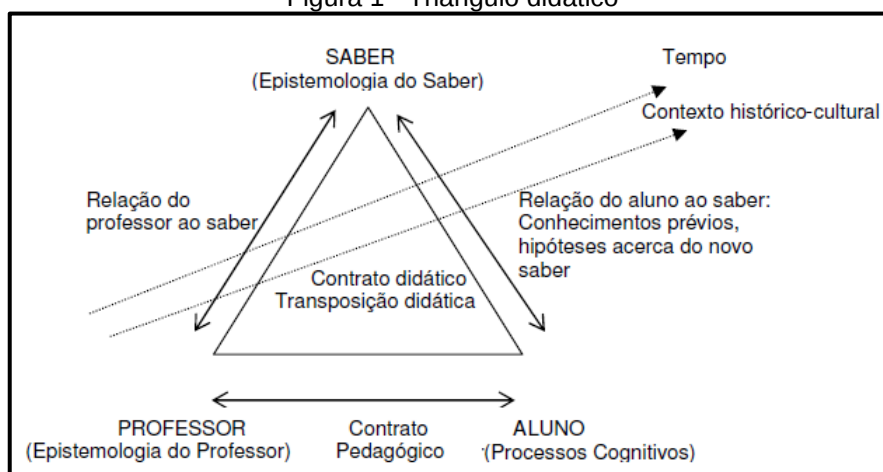
A teoria das situações didáticas – TSD proposta por Brousseau (1986, 2008), se assenta no princípio de que cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação, entendida como uma ação entre duas ou mais pessoas, e uma intencionalidade de ensino. Para Brousseau (1982), a situação didática pode ser entendida como

um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um estudante ou um grupo de estudantes, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes estudantes se apropriem de um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, 1982, p. 39).

Essas relações, por vezes conflituosas e assimétricas, são estabelecidas por meio de negociações entre professor e estudantes acerca do saber em jogo, o Contrato Didático, o qual “mantém características da situação didática – os componentes explícitos e implícitos da relação – e, [...] define regras para o seu funcionamento” (ALMEIDA, 2016, p. 49). No contexto da TSD, o sistema didático comporta esses três elementos-chave que se inter-relacionam: dois elementos humanos (o professor e o estudante) e um elemento não-humano (do ponto de vista existencial), o saber.

Brito Menezes (2006) ilustra, simplificadaamente, este sistema conforme a figura 1:

Figura 1 - Triângulo didático



Fonte: Brito Menezes (2006, p. 26).

Como a figura 1 sugere, no triângulo didático cada um dos seus vértices estabelece relações: professor e estudante, professor e saber, estudante e saber. E, segundo Souza e Brito Lima (2014, p. 35), “embora o triângulo se apresente como equilátero, essas relações são conflituosas e assimétricas” e sofrem influências de fatores como o tempo e contexto histórico-cultural dos sujeitos envolvidos nessa relação.

No momento histórico de criação da teoria, final da década de 1960, durante o Movimento da Matemática Moderna⁸, na França, a visão dominante no campo da Educação era essencialmente cognitivista devido a forte influência e contribuição de Jean Piaget (1896-1980) e seus colaboradores. Assim, de acordo com Gálvez (1996), a teoria de Brousseau esclarece a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, permitindo compreender as interações sociais que ocorrem na sala de aula entre estudantes e professores, as condições e a forma como o conhecimento matemático pode ser aprendido, sendo que o controle destas condições permitiria reproduzir e otimizar os processos de aquisição de conhecimento matemático escolar.

Portanto, na TSD, o objeto central de estudo não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, por meio da qual podem ser identificadas as interações entre professor, estudante e saber. No contexto dessa teoria, cada conhecimento ou saber matemático pode ser determinado por uma situação, isto é, por uma ação entre duas ou mais pessoas, com vistas à apropriação de um saber. A situação pode ser

⁸ O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento internacional do ensino da matemática, surgido na década de 1960 que se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem dessa ciência.

entendida como um modelo que descreve as atividades do professor e do estudante, ou seja, é todo contexto que circunda o estudante, nele incluídos o professor e o sistema educacional (SOUZA; BRITO LIMA, 2014).

Para Brousseau (1986), é importante na relação didática que o professor busque aproximar o trabalho do estudante ao trabalho de um pesquisador, que deve testar conjecturas, formular hipóteses, provar estas hipóteses, construir modelos, conceitos, teorias e socializar os resultados. Cabe, ainda ao professor, a tarefa de mediar os processos de ensino e de aprendizagem, por meio da proposição de situações favoráveis para que o estudante possa **agir** sobre o saber, transformando-o em conhecimento.

O processo em que o estudante **age** sobre o saber em cena favorece a sua aprendizagem, que, para Brousseau (1986), pode ser definida conforme Piaget como fruto da **equilibração** do indivíduo frente ao saber. De acordo com Piaget, quando possuímos os esquemas mentais necessários e suficientes para **resolver** determinado problema, estamos em **equilíbrio**, isto é, adaptados ao meio. Quando nos deparamos com uma situação nova, para a qual estes esquemas não são suficientes, então entramos em um conflito cognitivo, que Piaget denominou de **desequilíbrio**. Este tende a ser superado, dando início a um novo estado de equilíbrio, mais sofisticado que o anterior. Esse esquema se mantém até que um novo conflito surja e o processo comece novamente.

Assim, buscando esclarecer a distinção entre conhecimento e saber, poder-se-ia dizer que o saber é mais associado a um contexto científico, histórico e cultural, podendo quase sempre ser caracterizado como relativamente descontextualizado, despersonificado. Por outro lado, o conhecimento poder-se-ia ser caracterizado como mais individual e subjetivo, pessoal, isto é, “o conhecimento é mais associado à experiência individual, ou seja, o conhecimento é construído através da relação entre o sujeito e o saber” (BESSA DE MENEZES, 2010, p. 25).

Nesse contexto de construção de conhecimento, Brousseau (1986) defende que tão importante quanto a situação didática é a situação **adidática**, que pode ser considerada como parte essencial da própria situação didática, e pode ser entendida, segundo Almouloud (2007, p. 33), como “uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar”.

Dessa forma, a situação adidática ilustra as decisões tomadas pelo estudante sem intervenção do professor, mas que resultam da prática dos conhecimentos ou do saber anteriormente aprendidos. Isto é, para Brousseau (1986), a situação adidática é representada na relação didática pelo esforço independente do estudante, em certos momentos de aprendizagem, quando esse indivíduo passa a construir seu conhecimento autonomamente. Entretanto, se no decurso desse processo o estudante encontrar dificuldades na resolução de uma situação adidática, “o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática. Portanto, toda situação adidática pode tornar-se um tipo de situação didática” (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 164).

De acordo com Almouloud (2007), a Teoria das Situações Didáticas se apoia em três hipóteses:

- [1] O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem [...];
- [2] O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz [...];
- [3] [...] esse *milieu* e suas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem (ALMOULOU, 2007, p. 32-33, **grifo nosso**).

Brousseau (1986) define por *Milieu* o meio em que a relação didática acontece. Para esse autor, o *Milieu* seria um subsistema autônomo, antagônico ao sujeito e preparado intencionalmente pelo professor para a construção do conhecimento, isto é, um ambiente criado pelo professor de modo que ele (o professor) tenha controle para produzir uma aprendizagem. Assim, o *Milieu*, concebido e sustentado por uma intencionalidade didática pode ser considerado como todos os ambientes que produzem essa aprendizagem. Um *Milieu* sem intenções didáticas é insuficiente para levar o estudante à construção do conhecimento cultural que se deseja que ele adquira (BROUSSEAU, 2002).

Dessa forma, o *Milieu* é extremamente importante no processo de construção de conhecimento pelo estudante, sendo o professor o responsável por favorecer as condições, ou seja, estruturar esse *Milieu* para que as aprendizagens aconteçam. Cabe ao professor, por meio das situações didáticas propostas, deixar que o estudante possa, por si só, investigar, conjecturar, levantar/testar hipóteses, em vez de explicitar diretamente os conceitos, definições e procedimentos para resolução dos problemas propostos em sala de aula. Nesse sentido, Brousseau (2008) estabelece

uma tipologia de situações didáticas, categorizadas de acordo com a relação que se estabelece com o saber. São elas: situações de ação, situações de formulação, situações de validação e situações de institucionalização.

As situações de ação são aquelas que favorecem ao estudante, em interação com o *Milieu*, o uso de procedimentos mais imediatos para a resolução de um problema. As situações de formulação favorecem a troca de informação entre os estudantes e o *Milieu*, de modo que, para que essa troca de informação aconteça, eles terão que adequar a linguagem que utilizam habitualmente ao que precisam comunicar. As situações de validação são aquelas em que há necessidade de validar o conhecimento, por meio da utilização da linguagem matemática apropriada, ou seja, os estudantes precisam elaborar “provas” para demonstrar a veracidade do conhecimento.

Por fim, as situações de institucionalização são aquelas que têm a finalidade de estabelecer as convenções formais dos conhecimentos trabalhados em sala de aula. O conhecimento deve sair da esfera “particular e individual” para uma dimensão histórica e cultural do saber científico. Após a institucionalização, feita pelo professor, “o saber torna-se oficial e os estudantes devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos” (ALMOULOU, 2007, p. 40).

Entretanto, “se for feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos” (ALMOULOU, 2007, p. 40); por outro lado, “quando for feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações” (ALMOULOU, 2007, p. 40). Assim, Brousseau (2008) defende que propor situações de ação e, posteriormente, a formulação, a validação e somente após essas, a institucionalização, seria uma ordem “razoável” para a construção do conhecimento. No entanto, ainda segundo esse autor, essa ordem parece ir contra aquela que costuma ser vivenciada em sala de aula.

As situações de ação, formulação e validação são, por excelência, situações que podem evidenciar a situação adidática, na qual o professor evoca a autonomia do estudante permitindo que ele desenvolva seus próprios mecanismos para a resolução dos problemas propostos. Nesse processo, o professor assume o papel de mediador, sem revelar sua intenção didática. Já nas situações do tipo institucionalização, o professor retoma a sua parte da responsabilidade, propiciando que o estudante adote

o significado social estabelecido para o saber que foi por ele vivenciado nas situações de ação, formulação e validação.

Assim, “É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto [matemático] é claramente oferecido ao aluno” (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 164), ou seja, o momento da institucionalização é o momento de “prover sentido de um saber” (BROUSSEAU, 2008, p. 21). Segundo Pommer (2008), Brousseau enfatiza que as situações de ensino devem ser criadas pelo professor, de modo a aproximar o estudante do saber do qual ele deve se apropriar. Para isso, cabe ao docente fazer um duplo papel cíclico:

[a)] procurar situações onde os alunos possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pelo aluno. [b)] ajudar seus alunos no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, como fazem os matemáticos, de modo a tornar as produções dos alunos fatos universais e reutilizáveis (POMMER, 2008, p. 04, **grifo nosso**).

“É justamente este ciclo contextualizar/descontextualizar que permite ao aluno avançar em conhecimentos por meio de sucessivos desequilíbrios (conforme Piaget)” (POMMER, 2008, p. 04). Entretanto, “para o professor, é grande a tentação de pular estas duas fases e ensinar diretamente o saber como objeto cultural, evitando este duplo movimento. Neste caso, apresenta-se o saber e o estudante se apropria dele como puder” (BROUSSEAU, 1986, p. 49).

Dessa forma, o professor tem um papel muito importante no que se refere às estratégias utilizadas para favorecer a aprendizagem do estudante. Assim, a forma como transforma o conhecimento científico em conhecimento escolar, para que possa ser aprendido pelos estudantes e as negociações realizadas em sala de aula – o Contrato Didático (tema de discussão do tópico 2.2), são essenciais para a aprendizagem dos estudantes.

No que se refere, de maneira particular ao ensino da Função Afim, conforme já explicitado neste texto, várias pesquisas têm apontado dificuldades de aprendizagem dos estudantes quanto aos conceitos estudados. Dessa forma, analisar a relação didática por meio das situações didáticas propostas pelo professor, do Contrato Didático estabelecido e o *Milieu* em que as interações acontecem pode revelar aspectos importantes inerentes a essa relação. A análise desses aspectos pode levar o professor a refletir sobre o seu papel, de forma a favorecer ao estudante a oportunidade de “tornar-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele

mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor” (BROUSSEAU, 1986, p. 297), como nas avaliações em larga escala, por exemplo (particularmente na avaliação do SAEPE).

No tópico 2.2 discutiremos sobre o CD, **pilar** da TSD que regula as negociações na relação didática. Além das regras, negociações, rupturas, renegociações, os tipos de situações didáticas e o *Milieu* em que a relação didática ocorre, também sofrem influência do CD estabelecido.

2.2 O CONTRATO DIDÁTICO

Conforme já discutimos nesse texto, o sistema didático é um sistema dinâmico e permeado por complexas relações. Em parte, essas relações são reguladas pelo Contrato Didático estabelecido em sala de aula entre professor e estudantes. De acordo com Brousseau (1986), chama-se Contrato Didático o conjunto de comportamentos do professor que é esperado pelo estudante e o conjunto de comportamentos do estudante que é esperado pelo professor. Segundo esse autor, o contrato didático pode ser caracterizado como

uma relação que determina, - explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente, - a cada parceiro, professor e estudante, a responsabilidade de gerir aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar contas perante o outro. Esse sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, ou seja, a parte deste contrato que é específica do conteúdo (BROUSSEAU, 1986, p. 51).

Ou seja, no contexto da sala de aula existe um conjunto de expectativas dos participantes da relação didática (nem sempre definidas de modo explícito e quase sempre definidas *a priori*) que se traduzem como cláusulas do Contrato Didático estabelecido. Desse modo, o Contrato Didático **administra** o conjunto de relações estabelecidas entre a tríade professor – estudante – saber, e expressa as expectativas do professor em relação aos estudantes e destes em relação ao professor, incluindo-se também nessa relação o próprio saber e as formas como esse saber é tratado por ambas as partes na sala de aula. Portanto, o Contrato Didático define as regras de funcionamento da relação didática.

Em geral, fazem parte das expectativas do estudante em relação ao professor, por exemplo, o modo de articular os conceitos, os tipos de tarefas que propõe e as exigências que faz no dia a dia escolar. Por outro lado, esperar que o estudante aprenda, que realize as tarefas propostas, são algumas das expectativas do professor em relação ao estudante.

De acordo com Jonnaert (2002, p. 178) três elementos importantes caracterizam o Contrato Didático:

1) A ideia de compartilhar responsabilidades: a relação didática não está sob controle excessivo do professor, pois a responsabilidade do aprendiz é levada em conta: ele deverá aceitar realizar seu ofício de aluno; 2) Levar em conta o implícito: a relação didática funciona tanto, se não mais, sobre os não ditos do que sobre regras formuladas explicitamente: o contrato didático se inquieta com esses não ditos e, mais do que isso, atribui-lhe um valor tão importante quanto as regras formuladas explicitamente e pelas quais o professor e os alunos estão ligados; e 3) A relação assimétrica do professor e do aluno em relação ao saber: o que é específico do contrato é levar em conta a relação que cada um dos parceiros mantém com o saber; o contrato didático considera a assimetria das relações do saber em jogo na relação didática.

Sempre existe um Contrato Didático estabelecido no interior de um sistema didático, no entanto, como não existem duas turmas idênticas, cada uma tem suas peculiaridades e especificidades, o que as torna únicas, também não podem existir dois contratos iguais, não havendo um “modelo prescrito” de contrato didático. “Além disso, o contrato evolui, muda, se adapta sem cessar aos caprichos da personalidade sempre instável e imprevisível da classe” (ARAÚJO; BRITO LIMA; CÂMARA DOS SANTOS, 2011, p. 742).

Nessa perspectiva, os elementos da tríade professor-estudantes-saber interagem entre si por meio de regras e convenções e o Contrato Didático joga com os paradoxos da relação didática: implícito e explícito, unilateral e negociado, interno ao ambiente de sala de aula e externo a este, espontâneo e imposto. Além dos paradoxos citados, outro surge como essencialmente importante para a aprendizagem: a devolução didática.

No paradoxo da devolução, o professor deve transferir para o estudante a responsabilidade pela construção do conhecimento, no entanto, ele (o professor) tem a obrigação social de ensinar ao estudante que, por outro lado, deve por si só, construir seu conhecimento, não devendo, ao mesmo tempo, recusar as orientações do professor sob pena de fracasso da relação didática. Dessa forma, se o professor

diz o que quer diretamente ao estudante, não mais poderá obter a resposta, nisso reside o paradoxo.

A devolução didática pode ser considerada uma ação diferenciada conduzida pelo professor na relação didática no sentido de fazer com que o estudante assuma para si a responsabilidade de se engajar no processo de construção do seu próprio conhecimento. Aí reside o desafio, porque esse não é o tipo de ação “típica” das práticas pedagógicas usuais em nossos sistemas de ensino. Nem o professor, nem o estudante, costumam desenvolver tal ação no cotidiano escolar. O primeiro costuma assumir a responsabilidade de “transferir” conhecimentos por meio das aulas expositivas; o segundo costuma esperar que o professor assim o faça e, “aceitar” assumir a responsabilidade pela construção do seu próprio conhecimento requer certo grau de maturidade.

Dessa forma, torna-se imprescindível a persistência do professor para incentivar cada vez mais a interação qualitativa do estudante com o objeto matemático de estudo para que ele possa, cada vez mais, se tornar responsável pelo seu processo de aprendizagem, “aceitando” a devolução didática como parte integrante do cotidiano escolar. De acordo com Sarrazy (1995, p. 95):

para aprender, o estudante deve sublimar o desconforto das incertezas ligadas à incompletude de seus conhecimentos, aceitando correr riscos na busca dos meios deste domínio. Este risco é tanto a base quanto a condição para o funcionamento do processo de ensino/aprendizagem.

Assim, o professor deve agir na sala de aula de maneira a não deixar tudo explícito ao estudante para não colocar em risco a sua aprendizagem; por outro lado, se ele não fizer a mediação necessária entre o estudante e o saber em jogo poderá comprometer a aprendizagem. O estudante, por sua vez, precisa aceitar o desafio imposto pelo professor e entrar no jogo didático, pois se aceitar que o professor lhe diga exatamente o que deve ser feito não obterá êxito em seu aprendizado. Assim, “é nisso que reside o interesse do conceito de Contrato Didático: jogar com os paradoxos da relação didática” (JONNAERT, 2002, p. 173).

Há uma tendência natural em se manter **estável** o Contrato Didático, ou seja, cada parceiro dessa relação procura cumprir seu papel diante do outro, afinal, há uma expectativa recíproca entre professor e estudantes. Entretanto, poderão ocorrer momentos em que as regras negociadas sejam “transgredidas” por qualquer um dos parceiros da relação didática e, daí, teremos uma ruptura do Contrato Didático. A

ruptura pode ser verificada no momento em que o sistema de obrigações recíprocas é desrespeitado por uma das partes e a confiança entre estas se desestabiliza. As rupturas são necessárias “para permitir a cada uma das partes, professor e alunos, modificar sem cessar sua relação com o saber. A aprendizagem escolar é sempre fruto dessas rupturas” (ARAÚJO; BRITO LIMA; CÂMARA DOS SANTOS, 2011, p. 743).

Uma possível ruptura de CD pode ser dada, por exemplo, quando da “passagem” entre as aulas expositivas e uma abordagem por meio da resolução de problemas. Nesse caso, o CD estabelecido seria aquele em que, costumeiramente, o professor em sala de aula segue uma sequência tradicional de ensino por meio da exposição do conteúdo, seguida de uma série de exemplos e exercícios e, posteriormente, “avalia” a aprendizagem do estudante acerca dos conceitos estudados, seguindo exatamente o modelo dos exemplos trabalhados em sala de aula.

Se o professor muda essa configuração, ou seja, se propõe inicialmente um problema para ser resolvido pelos estudantes, antes da apresentação direta do objeto matemático em estudo (a institucionalização), esses ficarão confusos e, por vezes, se recusarão a entrar no jogo didático porque houve uma quebra do CD estabelecido, ou seja, aquele em que inicialmente o professor fornece uma série de dados – definições, conceitos, exemplos – que seriam aproveitados pelos estudantes para a resolução de exercícios posteriores. De acordo com Ricardo, Slongo e Pietrocola (2003, p. 157), “em geral, os momentos de ruptura são aqueles em que o contrato vigente no sistema didático se explicita”.

Para Almeida (2016), as rupturas de Contrato Didático têm um papel fundamental na aprendizagem do estudante. Segundo este autor, a “recusa” do contrato, da suposta estabilidade a ele relacionada, confere ao estudante a possibilidade de elaborar, levantar hipóteses, construir seu próprio conhecimento, uma vez que quando o professor estrutura a cena didática, organiza o meio (*Milieu*), o faz quase sempre sob a ótica da lógica de alguém que já tem uma relação “mais estreita” com aquele saber em jogo. Assim, “o ato de aprender implica para o aluno recusar o contrato (recusar uma negociação), mas, aceitar a responsabilidade do problema, o que caracteriza uma situação de devolução” (ALMEIDA, 2016, p. 48).

Considerando que é nesse contexto de rupturas do Contrato Didático que o estudante efetivamente aprende, pois, “o conhecimento será justamente o que

resolverá as crises que surgem das rupturas” (ARAÚJO; BRITO LIMA; CÂMARA DOS SANTOS, 2011, p. 742), ocorre que o professor tem papel fundamental na relação didática. Entretanto, algumas vezes, o desejo de que seus estudantes tenham sucesso pode levá-lo a facilitar a tarefa de diferentes maneiras, gerando muitas vezes práticas pedagógicas frequentemente inevitáveis no funcionamento da sala de aula, práticas essas designadas por Brousseau (1986) como efeitos do Contrato Didático.

Esses efeitos aparecem, quase sempre, de maneira não consciente, como uma tentativa do professor de não deixar a relação didática fracassar, uma vez que o seu desejo, via de regra, é que o contrato se cumpra, permaneça estável. Alguns desses efeitos do Contrato Didático serão mencionados no subtópico 2.2.1.

2.2.1 Os efeitos do Contrato Didático

É comum, no contexto da sala de aula, o professor facilitar a tarefa de variadas maneiras para o estudante. Fornecer-lhe explicações abundantes, ensinar-lhe pequenos truques, algoritmos e técnicas de memorização ou mesmo indicar pequenos passos dos problemas a serem resolvidos são alguns dos possíveis exemplos (SILVA, 1999). Entretanto, ao contrário das pretensões do professor, as explicações excessivas podem, na realidade, prejudicar a compreensão do estudante acerca do saber em jogo. “Tais práticas, movidas pela sensação de que o esforço exigido dos alunos esteja sendo grande demais, podem propiciar uma revisão dos objetivos da aprendizagem, ocasionando um rebaixamento dos mesmos” (SILVA, 1999, p. 55).

Portanto, parte considerável das dificuldades dos estudantes é causada pelos efeitos do contrato didático mal colocado ou mal-entendido (SILVA, 1999). Alguns desses efeitos, mencionamos a seguir.

2.2.1.1 Efeito Pigmalião – ou fenômeno das expectativas

De acordo com Brousseau (1986), esse não seria propriamente um efeito “perverso” uma vez que a questão da expectativa de um parceiro em relação ao outro é um dos elementos centrais do Contrato Didático. Nesse efeito, as expectativas de um dos membros da relação didática podem influenciar de forma favorável ou desfavorável no rendimento do outro. Entretanto, Silva (1999) aponta que, por exemplo, este fato pode levar a um acordo tácito entre professor e estudantes: o

professor limita sua exigência à imagem que faz da capacidade do estudante e este, por sua vez, limita seu trabalho à imagem de si próprio que o professor lhe refletir.

Ou seja, se o professor tem preferência por determinado estudante, ele “manipula”, quase sempre de maneira não consciente, a situação para que pareça sempre que esse estudante tenha sucesso, mesmo que ele fracasse. Do contrário, se ele tem uma relação “ruim” com determinado estudante, buscará constantemente pelo seu fracasso mesmo quando há seu sucesso. É o que Schubauer-Leoni e Perret-Clermont (1997) chamaram de Contrato Didático Diferencial, melhor discutido no subtópico 2.2.2 dessa tese (caracterizando alguns tipos de contrato).

2.2.1.2 Efeito Topázio

Nesse efeito, o professor, diante da possibilidade de erro do estudante, sugere a resposta por meio de códigos didáticos que a deixam transparecer. Pais (2002) ressalta que em diversas situações de ensino o professor, percebendo a dificuldade do estudante, fornece-lhe a resposta precipitadamente. Por exemplo: o professor de matemática propõe ao estudante do Ensino Médio que construa o gráfico da função afim “ $f(x) = 3x - 6$ ” (definida em R). Diante da dificuldade do estudante em realizar a tarefa, o professor começa a dar pistas como: atribua valores a “ x ” e encontre os valores de “ y ”; construa uma tabela, ou “quais são as variáveis importantes nessa função (coeficiente angular, coeficiente linear, zero)?” a depender da abordagem costumeiramente utilizada pelo professor.

2.2.1.3 Efeito Jourdain

Pode ser considerado uma variação do Efeito Topázio, uma vez que aparece na relação didática quando o professor, pela vontade de identificar o saber escolar ou científico, valoriza indevidamente uma manifestação superficial do estudante como sendo o saber escolarizado. De acordo com Pais (2002), o Efeito Jourdain pode ser considerado uma degeneração do Efeito Topázio por ir além da antecipação de uma resposta: dar a uma resposta simples, o valor de um saber científico.

Podemos citar, como exemplo desse efeito, o caso do professor de matemática que afirma que o estudante compreendeu o conceito de função apenas pelo fato de o estudante mostrar ter compreendido que a quantidade de combustível gasta por um

veículo depende da distância percorrida. Entretanto, o estudante pode ter essa compreensão pela sua vivência cotidiana, sendo que para uma compreensão efetiva do conceito, outros elementos são importantes como a compreensão das diversas representações, algumas ideias relevantes como: domínio, contradomínio, imagem, zero da função, dentre outros.

2.2.1.4 Deslize (ou deslizamento) metacognitivo

É caracterizado pela percepção que o professor tem de sua dificuldade em gerenciar o saber em cena, seja por sua dificuldade em organizar didaticamente a situação, sejam pelas dificuldades próprias dos estudantes. Reconhecendo essas dificuldades, ele abandona o discurso científico e o substitui por um outro discurso elaborado com base em seu saber cotidiano. O estudante, em geral, não tem a percepção sobre a mudança do discurso científico para o senso comum, o que pode levá-lo a confundir o saber científico com o saber cotidiano. Um exemplo simples que pode ser considerado, referente ao ensino das funções, diz respeito ao uso dos diagramas de Venn-Euler. É comum o professor “deslizar” da noção de função para se concentrar nas “setinhas” entre os diagramas, propondo a ideia de “pode uma seta para dois pontos, mas não podem duas setas para um ponto”.

2.2.1.5 Utilização abusiva da analogia

Para Brousseau (1986), a analogia pode ser um ótimo recurso didático, desde que seja usada de maneira adequada. Entretanto, a sua utilização abusiva pode refletir na redução de significados de um determinado conceito e ainda pode conduzir a um caminho que leva ao Efeito Topázio que, por sua vez, poderá se degenerar em um Efeito Jourdain. No caso da matemática, particularmente no ensino das funções, é comum, por vezes, o professor abordar esse saber matemático em sala de aula por meio da ideia de “máquina de transformação”. A comunicação desse conceito por meio dessa metáfora se torna mais simples, segundo o professor que a utiliza, por utilizar uma linguagem supostamente mais próxima do cotidiano dos estudantes. No entanto, segundo Brousseau (1986), o uso inadequado dessa estratégia (uso da analogia) pode limitar o conceito em questão e conduzir ao Efeito Topázio.

2.2.1.6 Efeito Dienes

Este efeito é ilustrado por Brousseau (1986), a partir do contexto do Movimento da Matemática Moderna, em referência à influência dos trabalhos do educador húngaro Zoltan Paul Dienes. Dienes utilizava um processo, ao qual chamou de processo psicodinâmico, que consistia em um modelo de aprendizagem predominantemente tecnicista, que associava o ensino da matemática à teoria dos jogos estruturados.

Neste modelo, o educador propunha sistematizar certos procedimentos de ensino, envolvendo a repetição de problemas com o intuito de induzir a respostas padronizadas. A sua proposta era construir um modelo que fosse independente do conteúdo estudado. Entretanto, o modelo proposto por ele acabou gerando confusões entre o saber científico em si e as especificidades de seus valores educacionais. De forma simplificada, neste efeito, o professor com suas concepções (epistemológicas) tenta aproximar o saber científico do saber ensinado.

De acordo com Pais (2002, p. 98) “o mestre tem a convicção de que os resultados de uma situação didática seriam relativamente independentes de seu próprio esforço pedagógico”. Como exemplo ilustrativo desse efeito, podemos citar o caso do professor que, ao trabalhar com gráfico de funções, para que o estudante reconheça se determinado gráfico representa ou não uma função, considera que o estudante aprendeu o conceito na medida em que incorpora que “para ver se um gráfico representa uma função, basta traçar retas verticais: se essas retas interceptam o gráfico em um único ponto, é função; do contrário, não é função”.

Os efeitos do Contrato Didático estão ligados aos fenômenos didáticos existentes na sala de aula e podem trazer consequências indesejáveis para a relação didática, porque, em certa medida, desvirtuam o objetivo principal da relação didática: a aprendizagem do estudante (e, por consequência, a modificação da sua relação ao saber). Assim, refletir sobre o surgimento desses efeitos na sala de aula pode contribuir para que os professores repensem suas práticas e possam desenvolver suas ações de forma a evitar que isso aconteça.

Não que haja efetivamente “controle” dos professores em relação ao surgimento de tais efeitos, que surgem quase sempre espontaneamente como tentativa para não deixar fracassar a situação didática, mas refletir sobre esses efeitos pode propiciar um olhar constante para o (re)direcionamento do processo de ensino

com vistas à melhoria da aprendizagem do estudante. Minimizar as consequências indesejáveis dos efeitos de um Contrato Didático mal colocado ou mal-entendido, depende tanto do professor quanto do estudante, considerando a divisão de responsabilidades entre cada um desses elementos no gerenciamento do saber em jogo. No subtópico 2.2.2, discutiremos sobre a caracterização de alguns tipos de contrato de acordo com a literatura.

2.2.2 Caracterizando alguns tipos de contrato

Embora considerando que o Contrato Didático pode ser influenciado pelos contextos epistemológico e histórico-social (conforme aqui já mencionado), ele pode ser alterado em função das demandas cognitivas dos estudantes e de fatores internos e externos que influenciam os processos de ensino e de aprendizagem. No entanto, é comum o Contrato Didático apresentar uma espécie de “núcleo duro” que permanece inalterado em função da assimetria existente entre os papéis que professor e estudante desempenham numa relação didática frente ao saber em jogo. Joshua (1996, p. 156) salienta que “o professor tem pelo contrato responsabilidades diferentes daquelas do aluno em relação aos objetos tratados em classe”.

Dessa forma, para desempenhar o seu papel, o professor se depara com problemas como o gerenciamento dos paradoxos que aparecem na relação didática, de forma a não incorrer nos efeitos “perversos” do Contrato Didático. De acordo com Almeida (2016), a relação didática é uma relação complexa, pois é motivada por uma série de componentes que se encontram em constante interação, que são essenciais nesta relação e que não devem ser entendidos de forma hierárquica. De acordo com este autor, estes componentes são:

- 1) A presença de um ou mais alunos: parte constitutiva de uma relação didática e componente importante, além de construtor do próprio conhecimento;
- 2) A presença de um ou mais professores: parte constitutiva de uma relação didática e componente importante no processo de ensino-aprendizagem, além de responsável pelas situações didáticas;
- 3) A definição das intenções do encontro: o verdadeiro propósito, que é entender, por exemplo, o conceito de equivalência nas equações de 1º grau;
- 4) Um conteúdo ou objeto da relação didática: saber matemático que, *a priori*, é de interesse do professor e do aluno;
- 5) Relações entre o professor e o aluno (contrato pedagógico); o professor e o saber; o aluno e o saber: determinantes na apropriação do conhecimento;
- 6) Um tempo: a ser gerido de modo que exista um equilíbrio entre atividades;
- 7) Um espaço: a sala de aula; e
- 8) Um Contrato Didático: necessário pelo fato de que é a partir dele que se dá

início ao processo de ensino e aprendizagem de acordo com a divisão de tarefas e as expectativas que os professores e alunos têm uns em relação aos outros a respeito dessas tarefas (ALMEIDA, 2016, p. 56).

Ainda de acordo com esse autor, dentre os componentes citados, dois são tidos como indispensáveis numa relação didática, que são: o conteúdo da relação – o saber, “porque não pode estar ausente, uma vez que define a identidade da relação” (ALMEIDA, 2016, p. 56); e o Contrato Didático, “porque define a dinâmica da relação e estabelece as regras do jogo” (ALMEIDA, 2016, p. 56-57).

Cabe destacar que a natureza da relação didática e as características do Contrato Didático não são definidas apenas a partir da natureza da área ou especificamente pelo objeto de estudo, mas, também, em função das concepções do professor, sejam elas de mundo, de ciência, de ensino desta ciência, dentre outras. Em geral, essas concepções emergem no contexto da sala de aula, influenciando os objetivos de ensino e as decisões didáticas tomadas pelo professor.

Ricardo, Slongo e Pietrocola (2003) sugerem alguns exemplos de relações didáticas influenciadas pelas concepções dos professores: i) situações em que o ensino é concebido como mera transmissão-recepção de conhecimentos, predominante nas aulas expositivas, caracterizadas pela clássica sequência “definições-exemplos-exercícios”, na qual fica evidenciada a “dogmatização” dos papéis do professor e do estudante no processo de apropriação do conhecimento. Nesse tipo de relação didática, cabe ao professor “a função unilateral de selecionar o saber e torná-lo ‘ensinável’; ao estudante, cabe a pré-disposição para assimilá-lo” (RICARDO; SLONGO; PIETROCOLA, 2003, p. 156); ii) situações em que o ensino é concebido como mediação, sendo favorecido o trabalho ativo dos estudantes, geralmente motivados por situações desafiadoras e interessantes. Daí, criatividade, tomada de decisão e o exercício da autonomia “têm lugar garantido e se desenvolvem no decorrer do processo de aprendizagem. Essa perspectiva epistemológica e pedagógica pauta o contrato didático na interação professor-aluno-saber, dialetizando seus papéis” (RICARDO; SLONGO; PIETROCOLA, 2003. p. 156).

De i) e ii) podemos inferir a existência/predominância de modelos de CD distintos, os quais podem ser estabelecidos a partir da postura do professor frente ao estudante e ao saber em jogo. Nessa perspectiva, Pais (2002) apresenta três modelos de Contratos Didáticos propostos por Brousseau: o primeiro, enfatiza a relevância do conteúdo; o segundo, a relação entre estudante e saber, com o professor entrando

em cena apenas para o acompanhamento da situação didática; e o terceiro, por sua vez, enfatiza a relação do estudante com o saber, porém o professor procura intervir de maneira mais compromissada considerando a aprendizagem nas dimensões individual e coletiva.

No primeiro modelo proposto, evidencia-se o papel do professor enquanto “detentor único do conhecimento”, que gerencia sozinho o saber em cena. Esse modelo é bastante comum nas metodologias tradicionais de ensino em que o professor toma o estudante como uma tábula rasa⁹, defendendo que ele deve se esvaziar do conhecimento não-científico acumulado se quiser ter sucesso na aprendizagem dos conhecimentos científicos. Este modelo assemelha-se ao primeiro exemplo de relação didática proposto por Ricardo, Slongo e Pietrocola (2003).

Para o segundo modelo de Contrato Didático, o princípio norteador da relação didática é o de que o estudante é quem deve empenhar-se em aprender e o professor não tem o poder de transmitir os conhecimentos, uma interpretação equivocada do paradoxo da devolução. Neste caso, o professor, tendo por concepção que o saber escolar flui espontaneamente, intervém minimamente na relação do estudante ao saber, fato que pode gerar o insucesso desse estudante.

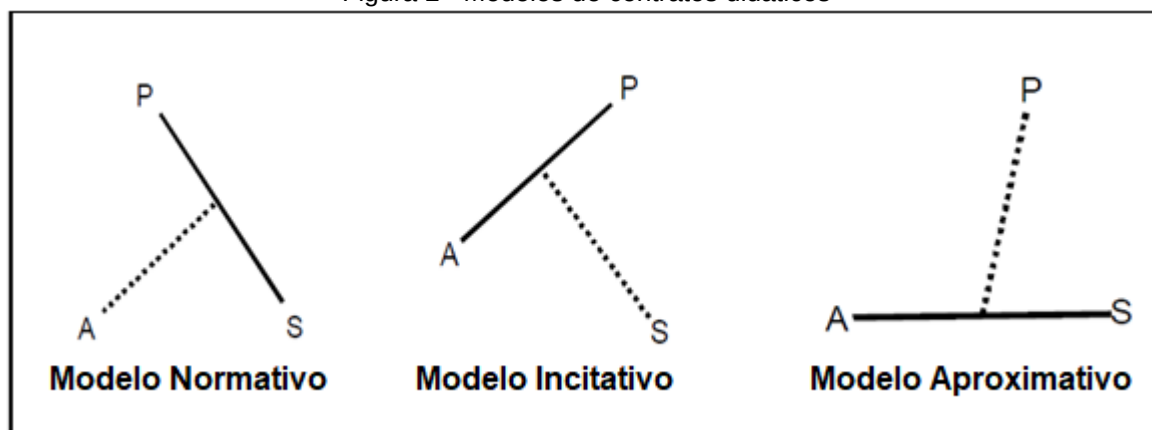
Por fim, no terceiro modelo, que se assemelha ao segundo exemplo de relação didática proposto por Ricardo, Slongo e Pietrocola (2003), há uma ênfase na relação do estudante com o saber, entretanto, o professor faz as intervenções necessárias, considerando suas responsabilidades e as dos estudantes perante o saber em jogo. Assim, considera a aprendizagem tanto nas suas dimensões individual quanto coletiva. Nesse modelo, o professor não se apresenta como “detentor” do saber, mas também não se destitui de sua responsabilidade docente e acompanha as etapas da aprendizagem, planejando as situações didáticas de modo a propor situações desafiadoras, de acordo com o nível cognitivo do estudante e espera que ele assuma a devolução da situação para que a construção do conhecimento ocorra ativamente.

Cada um desses três modelos de CD foi categorizado anteriormente por Charnay (1996), quando o autor trabalhou no contexto da resolução de problemas. Ele denominou, simplificadamente, cada um desses tipos de Contrato Didático de:

⁹ De acordo com o Dicio – Dicionário *Online* de Português, o termo significa “Mente desprovida de ideias, de saberes, de conhecimentos, que necessita de instrução para aprender o mais básico de um assunto; tábula rasa. [Filosofia] Condição mental caracterizada pelo vazio completo; mente vazia. Qualquer superfície que esteja preparada para um desenho, pintura etc.”. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/tabula-rasa/>. Acesso em: 03 set. 2020.

normativo, aquele centrado no conteúdo; incitativo, aquele centrado no estudante; e aproximativo, aquele centrado na construção do saber pelo estudante. Esquemáticamente, a figura 2, montada a partir de Charnay (1996, p. 39-42), ilustra os modelos apresentados.

Figura 2 - Modelos de contratos didáticos



Fonte: Charnay (1996, p. 39-40).

Conforme vimos, os modelos sugeridos permitem-nos refletir sobre as regras do jogo didático (negociações, rupturas, renegociações, efeitos) negociadas no âmbito da relação didática e suas possíveis influências na aprendizagem. Para além dos modelos discutidos anteriormente, também existe na literatura a discussão em relação ao Contrato Didático Diferencial (BRITO MENEZES, 2006; SCHUBAUER-LEONI; PERRET-CLERMONT, 1997), que não consiste em um modelo específico de Contrato Didático, mas que permeia todos eles, uma vez que a própria natureza do CD é ser diferencial.

Na perspectiva do Contrato Didático Diferencial, o professor não negocia o Contrato Didático de maneira “unificada” para cada grupo de estudantes ou até mesmo para cada estudante individualmente, mas, que tende a escolher, embora que quase sempre inconscientemente, certos estudantes que supõe que serão “bem-sucedidos”, que aprenderão com mais facilidade, enquanto que os demais terão o fracasso escolar como iminente (isso se manifesta por meio do Efeito Pigmalião discutido anteriormente), daí a ideia de diferencial.

Eloi (2019) propõe a existência de um Contrato Didático Potencial, entendido como aquele presente na abordagem proposta pelo livro didático (LD) adotado e utilizado na relação didática. Segundo essa autora, as relações estabelecidas entre os elementos do livro didático definem um Contrato Didático para professor e

estudantes hipotéticos, acreditando que há nesse material (o LD) intenções, isto é, expectativas, do que deverá ser negociado em sala de aula.

Também emergem no contexto escolar outras modalidades de contrato que, por vezes, são confundidas com a noção de Contrato Didático, como o Contrato Pedagógico e o Contrato Escolar, por exemplo. O Contrato Pedagógico regula as interações entre professor e estudante, no entanto, sem vinculação com algum saber. Já o Contrato Escolar, por sua vez, pode ser entendido como aquele vigente nas instituições escolares. Assim, podemos entender esses contratos sob diferentes níveis: o Contrato Escolar é mais amplo e rege a relação estudante-escola; o Pedagógico, por outro lado, pode ser considerado mais restrito pois refere-se à relação professor-estudante, tomada independentemente de qualquer saber em jogo.

Por fim, “a passagem do Contrato Pedagógico para o Contrato Didático acontece quando a relação entre dois (professor e aluno) se transforma realmente na relação entre três: o aluno, a obra a ser estudada [o saber] e o professor como coordenador de estudo” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 205). “Sem esquecer que a interdependência entre os três níveis (o escolar, o pedagógico e o didático), cabe lembrar que o Contrato Didático é a pedra de toque de toda a organização escolar” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 206). Dessa forma, conhecer o Contrato Didático estabelecido em sala de aula pode propiciar reflexões, não somente do professor quanto à sua prática, mas também aos estudantes quanto à devolução empreendida para avançar sua relação ao saber.

No próximo capítulo discutiremos sobre o segundo aporte teórico utilizado nesse trabalho, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e alguns dos seus pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino e a aprendizagem da matemática escolar.

3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesse capítulo discorreremos sobre o segundo referencial teórico utilizado nesse trabalho, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e alguns dos seus pressupostos teóricos e metodológicos para o ensino e a aprendizagem da matemática escolar. Ainda, tecemos algumas considerações teóricas acerca das inter-relações instituídas entre ambos os referenciais teóricos adotados: o Contrato Didático e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica; tendo a Função Afim como saber matemático em jogo.

3.1 ALGUNS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

O trabalho com a matemática, seja do ponto de vista do ensino e/ou da aprendizagem, seja do ponto de vista da pesquisa, tanto em matemática quanto em Educação Matemática, requer que a comunicação estabelecida entre quem ensina e/ou aprende e quem pesquisa ocorra com base em representações dos objetos matemáticos em questão, pois estes objetos de estudo não são manipuláveis, palpáveis ou fisicamente observáveis. Segundo Nehring (1996, p. 49), “os objetos matemáticos são estruturas, relações, que podem expressar diferentes situações/fatos, logo, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas que podemos representar este objeto matemático”.

Assim, a atividade cognitiva requerida para a aprendizagem da matemática, em particular apresenta duas características: a importância primordial das representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas utilizadas (DUVAL, 2003a). A primeira característica refere-se ao objeto matemático, ao qual, conforme já referido, a única forma de acesso a ele se dá por meio de sua representação, diferentemente de outras ciências. Já a segunda diz respeito às diversas formas de se representar um mesmo objeto matemático: números, figuras geométricas, escritas algébricas, gráficos, língua natural.

Neste contexto, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida pelo psicólogo e pesquisador francês Raymond Duval (DUVAL, 2003a, 2004, 2009, 2011a, 2011b, 2012a, 2012b) a partir dos estudos sobre semiótica desenvolvidos por Charles Sanders Peirce, Gottlob Frege e Ferdinand de Saussure.

Para Duval (2012a, p. 270), “o funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação”, chamando de “*semioses*” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e de “*noesis*” a apreensão conceitual de um objeto (DUVAL, 2012a, p. 270). Para este autor, a *noesis* é inseparável da *semioses*.

De acordo com Duval (2012a, p. 269), as representações semióticas,

são produções constituídas pelo emprego de signos¹⁰ pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico, são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. [...] As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento.

Segundo Duval (2012a), sendo os objetos matemáticos não perceptíveis de imediato, diferentemente do que ocorre em outras áreas do conhecimento, como a Física ou a Química, por exemplo, o acesso a esses objetos passa pela produção de representações semióticas que não devem, jamais, ser confundidas com os objetos que elas representam. Este fato leva ao que Duval (2012a) chamou de **paradoxo cognitivo do pensamento matemático**, pois, por um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser feita se não por uma apreensão conceitual e, por outro, a atividade sobre os objetos matemáticos somente se torna possível por meio de representações semióticas, isso pode se constituir num grande impasse para a aprendizagem. “Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?” (DUVAL, 2012a, p. 268).

Para Duval (2012a), este paradoxo é tão mais forte quando se identifica a atividade matemática e atividade conceitual, e que se considera as representações semióticas como secundárias ou extrínsecas, sendo despercebido no ensino, simplesmente pela maior importância dada às representações mentais em detrimento das representações semióticas. Essas últimas, conforme já definidas anteriormente,

¹⁰ Duval (2012a) defende uma definição de “signo” para além daquela defendida por Pierce (segundo o qual “signo” é algo que está no lugar de alguma coisa). Para Duval (2012a, p. 9-10, **grifo nosso**), quando se fala em signos e semiótica, três ideias centrais devem ser consideradas: [i] “Os signos só são signos por suas relações de oposição a outros signos no interior de um sistema de oposição; [ii] “Os sistemas de signos permitem que se efetue uma operação que se mostra cognitivamente poderosa: **substituir signos ou agrupamento de signos** independentemente dos objetos mencionados e **unicamente em função de regras**; [e iii] Ao contrário das representações não semióticas, o conteúdo das representações semióticas é analisado **em unidades de sentido e que se articulam em diversos patamares de organização**, as unidades de sentido mudam de um patamar de organização a outro.

enquanto que as primeiras, compreendidas como um “conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado” (DUVAL, 2012a, p. 269).

Duval (2003a) identifica quatro tipos diferentes de registros semióticos importantes, não somente para a exteriorização de representações mentais, para fins de comunicação, mas essenciais à atividade cognitiva do pensamento, constituindo-se em sistemas semióticos diferentes. Esses quatro tipos de registros podem ser divididos quanto à forma em dois grupos: os registros monofuncionais e os registros multifuncionais. Os primeiros, compreendidos como aqueles que possuem algoritmos próprios em sua estrutura, tendo como representação discursiva os sistemas de escritas numéricas, algébricas e simbólicas, bem como o cálculo; e como representação não-discursiva: os gráficos cartesianos com as mudanças de sistemas de coordenadas, interpolação, extrapolação.

Os segundos são aqueles não algoritmizáveis, tendo como representação discursiva a língua natural, a qual se manifesta por meio de associações verbais entre conceitos; pelas formas de raciocínio argumentativo, baseado em observações, crenças, entre outros; e dedutivo, que se baseia em definições, propriedades, teoremas etc. Estes últimos tipos de representação semiótica se apresentam, ainda, na forma não-discursiva, como as figuras geométricas planas e espaciais. O quadro 1 ilustra simplificada e essa classificação dos registros de representação semiótica, segundo o autor.

Quadro 1 - Tipos de registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
Registros Multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: Argumentação a partir de observações; de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais	Sistemas de escritas Numérica (binária, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas	Gráficos cartesianos Mudanças de sistemas de coordenadas; interpolação,

Os tratamentos são, principalmente, algoritmos.	(línguas formais); Cálculo.	extrapolação.
---	---------------------------------------	---------------

Fonte: Duval (2003a, p. 14).

De acordo com Duval (2012a), as representações semióticas desempenham papel primordial no desenvolvimento das representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas, como as funções de tratamento e conversão (explicitadas mais adiante) e na produção de conhecimentos. Segundo esse autor, para que um sistema de representação semiótica seja considerado um registro de representação, três atividades cognitivas ligadas à *semiose* são necessárias: a formação de uma representação identificável, os tratamentos e as conversões.

Na perspectiva desse autor, uma representação será considerada identificável quando, partindo de um registro de representação, sabe-se qual é o objeto matemático que está sendo representado, o que poderia ser comparado à realização de uma tarefa de descrição (DUVAL, 2012a), sendo necessário para essa formação o respeito às regras inerentes àquele sistema. “A função destas regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos” (DUVAL, 2012a, p. 271).

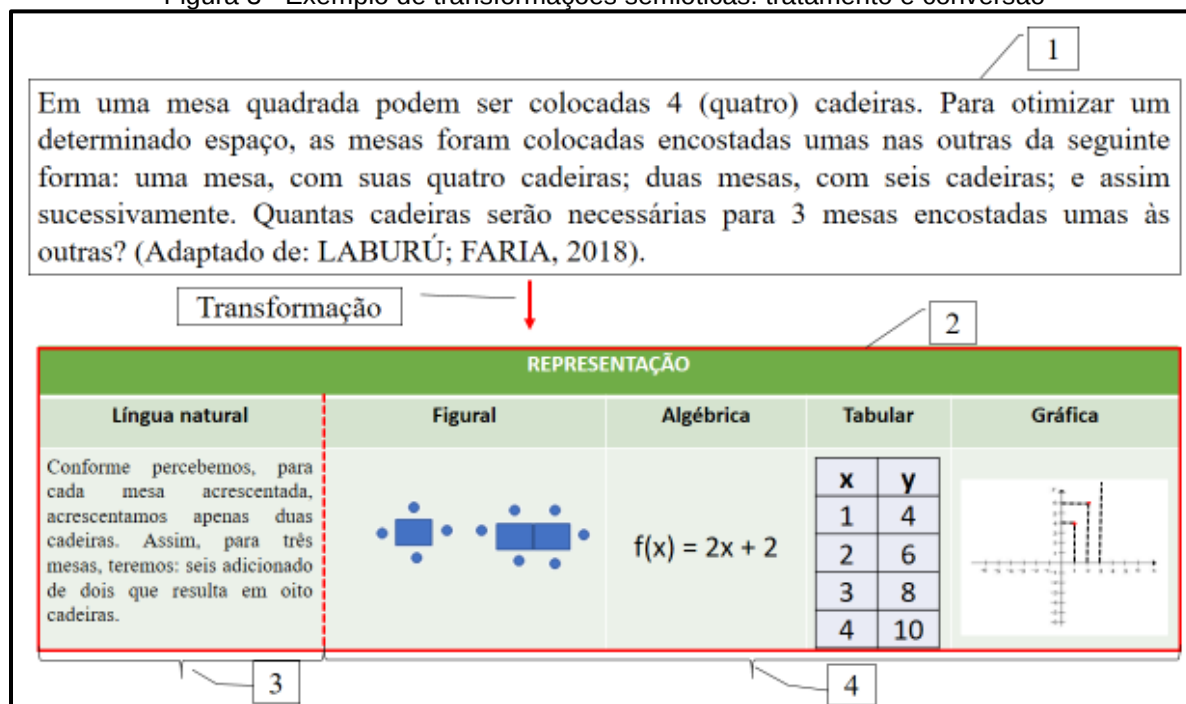
O tratamento de uma representação é a transformação desta representação em outra de mesma natureza, uma transformação interna a um registro de representação. Há regras de tratamento próprias para cada registro e, a natureza e o número desses tratamentos variam consideravelmente de um registro a outro (DUVAL, 2012a). Considerando o caso particular do objeto matemático Função Afim, encontrar o zero da função genérica $f(x) = ax + b$, definida no conjunto dos números reais, na representação algébrica, transformando-a na equação polinomial de primeiro grau $ax + b = 0$ e encontrando o valor da incógnita “ x ”, temos um exemplo de tratamento.

A conversão de uma representação é a transformação desta representação em outro sistema semiótico, conservando a totalidade ou somente parte do conteúdo da representação inicial, ou seja, a conversão é uma transformação externa ao registro inicial. Portanto, converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada, em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação, num outro registro (DUVAL, 2012a).

Por exemplo, consideremos o caso da Função Afim genérica, definida no conjunto dos números reais, dada no registro algébrico (RA) por $f(x) = ax + b$. A representação dessa função no registro gráfico (RG), ilustra uma transformação por conversão.

Na figura 3, mais um exemplo, para melhor compreensão, das transformações semióticas: tratamento e conversão.

Figura 3 - Exemplo de transformações semióticas: tratamento e conversão



Fonte: O autor (2022).

No exemplo acima, figura 3, temos que: 1) apresenta o registro de partida, ou seja, aquele em que o problema foi dado inicialmente (nesse caso, a língua natural); em 2), os registros de chegada (língua natural, figural, simbólico-algébrico, tabular e gráfico), correspondem a uma representação modificada do registro de partida. Por sua vez, 3) e 4) correspondem, respectivamente, às transformações de tratamento e conversão.

Observemos que, em 3), embora tenha ocorrido uma transformação na representação de partida, a representação de chegada permanece no mesmo sistema semiótico do registro de partida (a língua natural), daí, temos uma transformação que é interna ao registro, ou seja, um tratamento. Para qualquer um dos demais registros (à direita da linha tracejada, 4), observa-se que a representação de chegada ocorre em um sistema semiótico diferente daquele de partida, portanto, uma transformação externa a ele, isto é, uma conversão.

De acordo com Duval (2012a), eventualmente, podemos recorrer a registros intermediários, chamados de registros de representação auxiliares de transição, para a transformação de conversão. Esses registros se configuram como intermediários, porque estão entre o registro de partida, em geral, enunciados em língua natural, e o registro de chegada. Esses registros são chamados de auxiliares, porque ajudam na conversão entre representações e são de transição, no sentido de que, uma vez cumprido o seu papel de fazer compreender registros menos transparentes¹¹, poderão ser substituídos por outros, em geral mais econômicos.

Por exemplo: tomemos o problema dado na figura 3. Eventualmente, ao fazer a conversão da representação no registro em língua natural (RLN) para os registros gráfico ou algébrico, o estudante poderia utilizar o registro tabular (RT) como registro auxiliar para facilitar a compreensão da questão e, por consequência, a conversão.

“Transitar” espontaneamente entre as diversas representações é o que Duval (2003a) chamou de coordenação de registros. Segundo esse autor, a atividade de coordenação consiste em utilizar adequadamente as diversas representações de um mesmo objeto matemático, não as confundindo com o referido objeto e escolhendo aquela mais adequada e mais “econômica” para a atividade ou problema proposto. Assim, “a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (DUVAL, 2012a, p. 282).

Ou seja, a atividade de coordenação “é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto” (DUVAL, 2003a, p. 22). A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente da atividade de tratamento, não devendo ser confundida com duas atividades próximas a esta: a codificação e a interpretação (DUVAL, 2012a). Sobre essas duas atividades, Duval (2012a) defende:

O que é geralmente chamado de “interpretação” requer uma mudança de quadro teórico ou uma mudança de contexto. Esta mudança não implica mudança de registro. A “codificação” é a “transcrição” de uma representação em outro sistema semiótico diferente daquele em que é dado inicialmente. Esta transcrição é efetuada “em meio a uma série de substituições”, aplicando regras de correspondência ou utilizando listas de substituições inicialmente

¹¹ De acordo com Duval, o conteúdo de uma conversão será transparente quão mais congruentes forem as representações dos registros de partida e chegada. Nesse caso, “as unidades de sentido de ambos os registros se correspondem de forma objetiva, ou seja, a conversão inversa estará na mesma distância cognitiva que a conversão direta” (SILVA, 2018, p. 51).

estabelecidas [...]. Estas substituições são efetuadas diretamente sobre os significantes que compõem a representação, sem considerar a organização da representação, nem o que ela representa (DUVAL, 2012a, p. 273).

Para Duval (2012a, p. 276), “a conversão entre diferentes registros de representação semiótica é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática”, salientando que não é suficiente organizar as sequências de atividades em sala de aula, mas é necessário tornar os estudantes capazes de resolver problemas, quaisquer que sejam as situações e quaisquer que sejam os objetos matemáticos estudados.

Entretanto, de acordo com Duval (2009, p. 18),

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e estudantes. Estes, frequentemente não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes.

Portanto, para minimizar os problemas de aprendizagem da matemática, deve-se atentar para o funcionamento cognitivo do pensamento humano, o qual, segundo Duval (2012a, p. 270) “se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação”. Além disso, converter uma representação de um dado registro para outro não significa somente mudar de modo de tratamento, mas também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto nesses diferentes sistemas semióticos. Assim, “duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo” (DUVAL. 2003a, p. 22).

Dessa forma, o reconhecimento de um mesmo objeto nas diferentes representações se configura um problema cognitivo ligado ao fato de que representações diferentes exigirão “heurísticas de pensamento” distintas (BRANDT; MORETTI, 2005). De acordo com Duval (1993, p. 18), “cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado”, por isso a importância de se diversificar os registros de representação durante o processo escolar dos estudantes.

Afinal “tendo mais registros, há um aumento potencial de possibilidades de trocas e, por conseguinte, há um aumento também na escolha mais econômica”

(MORETTI, 2002, p. 346). Não existem regras previamente definidas para a realização de transformações por conversão, pois nessa transformação estão envolvidos dois registros de representação com características próprias e que atendem regras distintas de funcionamento.

Nesse contexto, a discriminação das unidades de sentido¹² pertinentes aos dois registros envolvidos na conversão se faz necessária, pois, “o reconhecimento de um mesmo objeto representado por duas representações A e B repousa sobre a correspondência das unidades de sentido de suas representações” (DUVAL, 2011b, p. 49). Segundo Duval (2011b), as unidades de sentido das representações semióticas, são dados ou informações matematicamente pertinentes a cada registro. Cada representação semiótica traz em seu conteúdo unidades de sentido que lhe são próprias e colocá-las em correspondência com as unidades de sentido de uma outra representação do mesmo objeto é a condição cognitiva para identificar se ambas as representações são formas distintas de representá-lo (DUVAL, 2011b).

Assim, não há outra possibilidade de reconhecimento de que duas representações se referem ao mesmo objeto matemático e que, dessa forma, podem ser substituídas uma pela outra, respeitando o princípio de equivalência semântica, que não seja por meio de uma correspondência, termo a termo, entre os conteúdos dessas representações dadas em dois registros diferentes (DUVAL, 2018), por isso, a importância das conversões.

Duval (2018, p. 09) nos coloca os seguintes exemplos sobre as unidades de sentido e sua importância no momento de realização das transformações por conversão:

Se a língua e as figuras geométricas são os registros utilizados, é preciso reconhecer a correspondência entre certas unidades discursivas de sentido de um enunciado (definição, teorema) e certas unidades figurais da configuração geométrica; Se a expressão simbólica de relações e a língua são os registros utilizados, é preciso reconhecer a correspondência entre certas unidades de sentido do enunciado e as unidades simbólicas da equação (letras, sinais de operações e de relação); Se a expressão simbólica de relações e os gráficos cartesianos são os registros utilizados, será preciso reconhecer a correspondência entre cada uma das unidades de sentido da equação ou inequação e os diferentes valores visuais de uma reta, de uma curva etc.

¹² Nessa tese, os termos “unidade significativa”, “unidade de sentido” e “elemento significativo” são tomados como sinônimos.

Dessa forma, na atividade de substituição, essencial para a transformação de conversão, é necessário manter o sentido no pensamento natural, ou seja, a continuidade semântica e associativa entre as expressões substituídas, conservando a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica.

Segundo Duval (2011a), dois tipos de fenômenos devem ser considerados em relação à transformação de conversão. São eles: as variações de congruência e não congruência semântica e a heterogeneidade de sentidos. As variações de congruência e não congruência semântica existentes entre conversões de duas representações de dois registros de representação diferentes “dizem respeito à proximidade ou distanciamento entre o registro de partida e o de chegada” (SOUSA; BARRETO, 2008, p. 09).

O grau de dificuldades inerente à conversão é diferente quando se convertem representações entre registros de mesma natureza (monofuncional → monofuncional; por exemplo: registro algébrico → registro gráfico) ou na passagem de representações de registros de naturezas distintas (monofuncional → multifuncional; como por exemplo: registro algébrico → língua natural), pois, “cada registro possui um complexo conjunto de operações a ser analisado, bem como elementos imprescindíveis que os compõem” (CARDOSO, 2015, p. 41-42).

Duval (2009, 2012a) propõe três critérios para estabelecer o nível de congruência semântica na conversão entre dois registros, os quais permitem, igualmente, determinar um grau de não congruência. São eles:

1) **correspondência “semântica” de elementos significantes**: possibilidade de se estabelecer uma relação de sentido entre cada unidade significativa simples presente nas representações dadas em dois registros que estão sendo colocados em correspondência; 2) **univocidade “semântica” terminal**: cada unidade significativa elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significativa elementar da representação no registro de chegada; e 3) **conservação da ordem das unidades significantes**: conservação da sequência de aparecimento e utilização das unidades significativas nas representações nos dois registros de representação presentes no processo de conversão.

Resumidamente, os três critérios acima apresentados, podem ser assim entendidos, respectivamente: 1) refere-se ao significado de cada unidade significativa, isto é, as unidades significantes das representações do registro de chegada devem corresponder ao mesmo significado daquelas do registro de partida; 2) os termos

matematicamente pertinentes nas representações no registro de partida devem ter apenas um símbolo associado a eles nas representações do registro de chegada; e 3) fazendo-se a leitura das representações do registro de partida, da esquerda para direita, corresponde à mesma ordem na organização das unidades significantes no registro de chegada.

No quadro 2, extraído de Duval (2009), apresentamos um exemplo que ilustra a variação de congruência ou de não congruência de uma conversão.

Quadro 2 - Exemplo de variação de congruência ou de não congruência semântica de uma conversão

	Correspondência semântica das unidades de significado	A unicidade semântica terminal	Conservação da ordem das unidades
O conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa $y > x$	Sim	Sim	Sim
O conjunto dos pontos que tem uma abscissa positiva $x > 0$	Não “Maior que zero” é uma perífrase (um só significado para várias palavras)	Sim	Sim
O conjunto dos pontos cuja abscissa e cuja ordenada têm o mesmo sinal $x \cdot y > 0$ O produto da abscissa e da ordenada é maior que zero	Não	Não	Não Globalização descritiva (dois casos)

Fonte: Duval (2003, p. 19).

Do quadro 2 percebemos que os graus de não congruência semântica dependem da quantidade de critérios de congruência semântica não satisfeitos na conversão. Assim, teremos:

1) **baixo grau de não congruência semântica**: quando apenas um dos critérios definidos por Duval (2009, 2012a) não é satisfeito; 2) **médio grau de não congruência semântica**: quando dois dos critérios estabelecidos por Duval (2009, 2012a) não são satisfeitos; e 3) **alto grau de não congruência semântica**: quando nenhum dos critérios elencados por Duval (2009, 2012a) é respeitado.

Os exemplos seguintes (quadros 3, 4 e 5), relacionados à Função Afim (objeto matemático de estudo desse trabalho), ilustram, respectivamente, os três diferentes graus de não congruência semântica. No quadro 3, exemplo de conversão com baixo grau de não congruência semântica.

Quadro 3 - Exemplo de enunciado com baixo grau de não congruência semântica

Uma pessoa obesa, com massa corporal de 196kg num certo momento, recolhe-se a um SPA onde se anunciam perdas de massa de até 2,5kg por semana. Supondo que isso realmente ocorra, encontre uma fórmula matemática que expresse a massa mínima, M , que essa pessoa poderá atingir após n semanas no SPA.

Fonte: O autor (2022).

A fórmula matemática procurada no problema (quadro 3) corresponde à seguinte expressão (Função Afim): $M(n) = 196 - 2,5 \cdot n$. Analisando a conversão realizada, em termos dos critérios de congruência semântica, temos que: o critério (1) **é satisfeito**, haja vista que unidades significantes no registro de partida mantêm o seu significado no de chegada, a palavra “perdas” associada à operação de subtração, por exemplo, mantendo assim, a correspondência semântica dos elementos significantes; o critério (2) **não é atendido**, pois a expressão em língua natural “por semana” é substituída pelo símbolo da operação de multiplicação, portanto, duas palavras correspondendo a um único símbolo (“.”), dessa forma, não mantém a univocidade semântica terminal; finalmente, o critério (3) **é atendido**, pois a conversão conserva a ordem das unidades significantes: “massa corporal inicial”; “perdas”; “2,5kg por semana” $\Rightarrow M(n) = 196 - 2,5 \cdot n$.

Assim, como apenas um dos critérios propostos por Duval (2009, 2012a) não foi satisfeito, dizemos que esse é um problema com **baixo grau de não congruência**

semântica. No próximo exemplo (quadro 4), exploramos um caso de conversão com médio grau de não congruência semântica.

Quadro 4 - Exemplo de enunciado com médio grau de não congruência semântica

(UEG–GO Adaptado) Uma estudante oferece serviços de tradução de textos em língua inglesa. O preço a ser pago pela tradução inclui uma parcela fixa de R\$ 20,00 mais R\$ 3,00 por página traduzida. Qual expressão algébrica ilustra essa situação?

Fonte: O autor (2022).

A conversão do problema (quadro 4) para o registro algébrico corresponde à seguinte expressão (Função Afim): $P(x) = 20,00 + 3 \cdot x$, onde “ P ” corresponde ao preço total pago e “ x ” corresponde à quantidade de páginas traduzidas. Analisando essa conversão em termos dos critérios de congruência semântica, temos que: o critério (1) **não é satisfeito**, haja vista a palavra “inclui”, que tem o sentido de inclusão, de adição, está associada ao símbolo de igualdade, ou seja, não mantém a correspondência semântica; o critério (2) também **não é atendido**, pois a expressão em língua natural “por página traduzida” é substituída pelo símbolo da operação de multiplicação, ou seja, três palavras correspondendo a um único símbolo (“ $\cdot$ ”), dessa forma, perde-se a univocidade semântica terminal; o critério (3) é o **único critério de congruência semântica atendido** na conversão, pois conserva a ordem das unidades significantes: “preço a ser pago”; “parcela fixa de R\$ 20,00”; “mais”; “R\$ 3,00 por página traduzida” $\Rightarrow P(x) = 20,00 + 3 \cdot x$.

Dizemos, portanto, que esse é um problema de **médio grau de não congruência semântica**. Por fim, no quadro 5, discutimos um exemplo de conversão com alto grau de não congruência semântica.

Quadro 5 - Exemplo de enunciado com alto grau de não congruência semântica

(UFPR – Adaptado) Numa expedição arqueológica em busca de artefatos indígenas, um arqueólogo e seu assistente encontraram um úmero, um dos ossos do braço humano. Sabe-se que o comprimento desse osso permite calcular a altura aproximada de uma pessoa por meio de uma Função Afim. Determine a expressão algébrica dessa função, sabendo que o úmero do arqueólogo media 40cm e sua altura era 1,90m, e o úmero de seu assistente media 30cm e sua altura era 1,60m.

Fonte: O autor (2022).

Observemos que as unidades significantes no registro de partida, em língua natural, presentes no exemplo dado no quadro 5, são as correspondências: 40cm

correspondendo-se com 1,90m e 30cm com 1,60m. Como o problema já deixa explícito que se trata de uma Função Afim, sabemos que esses pares de números correspondem a pares ordenados (40; 1,90) e (30; 1,60), entretanto, esse fato não é transparente em uma primeira leitura, fato pelo qual consideramos que não há a correspondência semântica entre esses elementos significantes, logo, o critério (1) **não é satisfeito**.

Para obter a expressão que define tal função solicitada, é necessário que se utilizem os dois pontos dados pelos pares ordenados e a definição de Função Afim, por meio de sua representação algébrica " $f(x) = ax + b$ ", para essa descoberta. Dessa forma, não temos uma univocidade semântica terminal entre esses elementos significantes (pares ordenados/expressão algébrica da Função Afim), logo, o critério (2) **também não é satisfeito** nessa conversão. Finalmente, a ordem de tomada dos pares ordenados dados no problema, para utilização da definição de Função Afim, não interfere na obtenção da expressão algébrica (Função Afim) e, assim, o critério (3) **também não é satisfeito**. Portanto, o problema dado nesse exemplo (quadro 5) é um problema com **alto grau de não congruência semântica**.

A partir dos três exemplos apresentados, percebemos que quanto maior o grau de não congruência semântica "não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente" (DUVAL, 2012a, p. 284). Segundo Duval (2011b, p. 121) "a variação de congruência ou de não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos".

De acordo com esse autor, isso acontece porque "duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes" (DUVAL, 2012b, p. 99). Dessa forma,

um dos obstáculos encontrados por muitos alunos na aprendizagem de matemática está ligado ao fato de que **a equivalência referencial se destaca da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica** (DUVAL, 2012b, p. 101, grifo nosso).

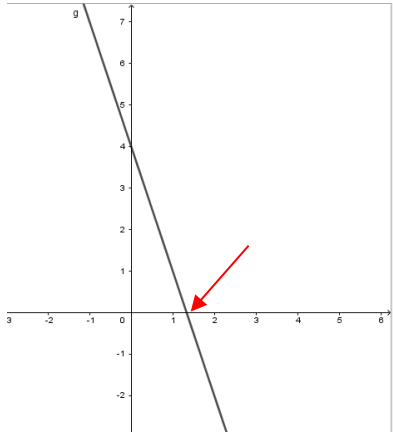
Daí, as conversões não congruentes serem muito mais complexas de serem realizadas pelos estudantes não somente quando o registro de partida é a linguagem

natural, mas também outros registros, principalmente o registro gráfico (para esse último registro, o item “3” dos critérios de não congruência semântica, definidos por Duval (2009, 2012a) não deve ser considerado na análise).

No que tange ao fenômeno da heterogeneidade de sentidos da conversão, Duval (2003a) defende que a conversão entre representações de um registro A para um registro B pode ter um custo cognitivo diferente de se converter do registro B para o registro A. Assim, a conversão entre representações de um registro em linguagem algébrica para outro em linguagem gráfica tem um custo cognitivo diferente do percurso inverso: registro gráfico $\rightarrow$ registro algébrico. Por exemplo, a conversão do registro algébrico da função afim “ $f(x) = -3x + 4$ ” para o registro gráfico requer um custo cognitivo diferente da conversão inversa (RG $\rightarrow$ RA).

Observe o quadro 6:

Quadro 6 - Exemplo referente ao fenômeno da heterogeneidade de sentidos de conversão

Registro algébrico	Registro gráfico
$f(x) = -3x + 4$	
A	B

Fonte: O autor (2022).

Nesse exemplo (quadro 6), podemos perceber conteúdos diferentes do mesmo objeto matemático (Função Afim) nas duas representações. O zero da função, indicado na ilustração pela seta vermelha na representação “B”, por exemplo, não aparece no conteúdo da primeira representação (A). Para fazer a conversão no sentido “A $\rightarrow$ B”, o estudante pode lançar mão da opção de atribuir valores arbitrários para “x” e encontrar os valores correspondentes para “y” por meio da substituição desses valores na expressão dada, obtendo pares ordenados pertencentes à reta que representa a função.

Para a conversão “ $B \rightarrow A$ ” essa estratégia não é útil, pois é necessária uma interpretação global das propriedades figurais (essa abordagem será melhor discutida no tópico 3.2), ou seja, identificar no gráfico as unidades significantes como: sentido da inclinação, intersecção com os eixos coordenados etc., que possam ser colocadas em correspondência com os elementos correspondentes na sua representação algébrica. Dessa forma, faz-se necessária a conversão nos dois sentidos, tanto “ $A \rightarrow B$ ” quanto “ $B \rightarrow A$ ”, para que se evidencie a natureza diferente dos conteúdos de cada representação, propiciando assim a coordenação dessas representações formuladas em registros distintos.

Cabe destacar que, segundo Duval (2003a, p. 20) “geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado pela ideia de que o treinamento efetuado em um sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”.

3.2 A MATEMÁTICA E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Diversos são os estudos que apontam dificuldades em relação à aprendizagem de conceitos matemáticos nas diversas etapas de ensino, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Estas dificuldades podem ser evidenciadas, dentre outras, por meio dos resultados obtidos pelos estudantes nas avaliações em larga escala como aquelas realizadas pelo SAEPE, SAEB¹³ e PISA¹⁴. De acordo com Duval (2009), uma das causas do insucesso da aprendizagem matemática está relacionada à dificuldade que os estudantes têm em diferenciar o objeto matemático estudado da sua representação, assim como, à não coordenação de, pelo menos, duas representações do objeto matemático formuladas em registros distintos, sendo esta coordenação essencial para a compreensão de conceitos.

Particularmente falando da Função Afim, alguns autores (DELGADO, 2010; DELGADO; FRIEDMANN; LIMA, 2010; LUCAS, 2010; CARDOSO *et al.*, 2013;

¹³ O Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB é composto por um conjunto de avaliações externas em larga escala, aplicado a cada dois anos na rede pública e em uma amostra da rede privada. Participam da avaliação de conhecimentos em Língua Portuguesa e Matemática, estudantes do 2º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e do 3º ano (ou equivalente) do Ensino Médio.

¹⁴ O *Programme for International Student Assessment* (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em tradução livre) – PISA é um programa internacional de avaliação desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE, tendo por objetivo produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico. É aplicado a estudantes na faixa etária dos 15 anos, avaliando a proficiência desses estudantes em letramento em Leitura, Matemática e Ciências.

LENARTOVICZ, 2013; MENESES, 2014; BATISTA, 2015; TOZO, 2016; FONSECA *et al.*, 2013) apontam dificuldades dos estudantes em relação à aprendizagem de tal objeto. O objeto matemático “função”, particularmente a Função Afim, é um dos que comportam uma diversidade de representações, por meio de registros diversos: língua natural, gráfico, algébrico, figural.

No entanto, como evidenciam os estudos citados, ao que parece, os estudantes não têm coordenado, ao menos duas das representações formuladas em diferentes registros, fato gerador das dificuldades apresentadas. No que tange aos documentos de orientação curricular, alguns destes documentos sinalizam a importância dos registros de representação, assim como a necessidade de o estudante coordenar representações em ao menos dois desses registros.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC, por exemplo, defende que o ensino da matemática deve propiciar o desenvolvimento de habilidades relacionadas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas por meio da mobilização de métodos próprios de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2019). Segundo esse documento,

podemos verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio (BRASIL, 2019, p. 519).

A BNCC (BRASIL, 2019) traz, ainda, na 4^a competência específica da matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio que o estudante deve, ao consolidar esta etapa de ensino, ser capaz de

compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (BRASIL, 2019, p. 523).

Analogamente, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012a, p. 19) defendem que “A Matemática comporta uma diversidade de formas simbólicas, presentes em seu corpo de conhecimento”, como: língua natural, linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, ícones, entre outros;

salientando que a utilização destes registros “desempenham papel central, não só para representar os conceitos, relações e procedimentos, como também para a própria formação deles” (PERNAMBUCO, 2012a, p. 20).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000, n. p.) trazem, dentre outras habilidades importantes para o desenvolvimento do estudante em termos de aprendizagem matemática, a habilidade de “ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.)” como uma habilidade inerente à competência geral de “representação e comunicação”. Essas ideias são ratificadas pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (BRASIL, 2002, p. 114), as quais também defendem a importância dos registros de representação para a aprendizagem matemática estabelecendo que “reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática” é essencial para o desenvolvimento da competência geral de **representação e comunicação**.

Particularmente, no que se refere ao ensino de função, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012a) recomendam que o pensamento funcional deve ser valorizado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental por meio da noção de proporcionalidade, particularmente, utilizando situações ligadas ao cotidiano do estudante. Nos anos finais do Ensino Fundamental essa noção deve ser aprofundada sem, no entanto, envolver uma sistematização precoce, o que deve ser realizado na etapa seguinte (o Ensino Médio) considerando, principalmente, o seu papel de modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas em fenômenos do mundo natural ou social e as suas múltiplas representações.

Concordando com estas ideias, a BNCC (BRASIL, 2017) também defende a introdução da noção intuitiva do conceito de função desde os anos iniciais do Ensino Fundamental por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas; nos anos finais desta mesma etapa de ensino, espera-se que os estudantes estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação, sendo uma habilidade esperada no 9º ano, que o estudante seja capaz de “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2017, p. 317).

Em se tratando especificamente dos registros de representação desse objeto matemático, apresentaremos a seguir algumas considerações a respeito das representações: língua natural, algébrica, gráfica, tabular; considerando os grandes sistemas de registros de representação semiótica propostos por Duval (2003a).

3.2.1 Representação língua natural

Se expressar matematicamente em língua natural, assim como fazer a conversão desta para outra linguagem, ou vice-versa, se configura um desafio considerável para os estudantes dos diversos níveis e etapas de ensino. Segundo Boero, Douek e Ferrari (2008), os estudantes somente conseguirão êxito na aprendizagem matemática quando atingirem um nível suficiente de familiaridade com o uso da linguagem natural nas atividades propostas.

Estes autores fazem uma análise das funções específicas da linguagem natural e a sua relação com a linguagem simbólica, destacando como funções cruciais no trabalho com a matemática: (i) a linguagem natural como ferramenta de mediação entre processos mentais, expressões simbólicas específicas e organizações lógicas nas atividades matemáticas; (ii) como ferramenta flexível, cujo domínio facilita o uso e gerenciamento de linguagens específicas; (iii) como mediadora da dialética entre a experiência, o surgimento de objetos matemáticos e propriedades (ou seja, conceitos); e (iv) como ferramenta de validação de conjecturas (encontrar contraexemplos, produzir e gerir argumentos aceitáveis para validação etc.).

Para esses autores, “a linguagem natural desempenha uma função importante em todos os registros que estão significativamente envolvidos no fazer, ensinar e aprender matemática” (BOERO; DOUEK; FERRARI, 2008, p. 265), defendendo ainda que os estudantes preferem argumentos apresentados em palavras, haja vista que, justificar e explicar procedimentos de resolução de problemas algebricamente, os argumentos são mais difíceis. Entretanto, Duval (2012a) defende que é mais simples a compreensão dos estudantes por meio do uso das fórmulas literais do que por meio do uso de frases devido ao elevado número de regras de conformidade existentes no registro em língua natural.

Duval (2003a) aponta a língua natural como um dos quatro grandes registros de representação semiótica da atividade matemática. Segundo esse autor a língua natural se constitui no primeiro registro de representação semiótica e essencial para

o funcionamento do pensamento. Dessa forma, a língua natural cumpre as três atividades cognitivas ligadas à *semiose*, já explicitadas anteriormente nesse texto: a formação de uma representação identificável, os tratamentos e as conversões (DUVAL, 2012a).

Como exemplo da primeira atividade podemos apontar a “enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada)” (DUVAL, 2012a, p. 271). Por sua vez, “a paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural” (DUVAL, 2012a, p. 272). Na paráfrase reescreve-se o texto, deixando-o mais objetivo, sem, no entanto, mudar o seu sentido original (DUVAL, 2009); a inferência pode ser considerada uma “dedução” feita a partir de informações dadas, uma conclusão baseada em outras percepções ou na análise de um ou mais argumentos.

Já como exemplos de conversões, temos: a ilustração, a tradução e a descrição. A ilustração, em primeiro lugar, é a conversão de uma representação linguística em uma figural; a tradução, conseqüentemente, é a conversão de uma representação linguística de uma determinada língua em outra representação linguística de outra língua ou de outro tipo de linguagem; e a descrição, por sua vez, é a conversão de uma representação não verbal (esquema, diagrama, figura, gráfico) em uma representação linguística.

Segundo Duval (2011b), a língua não é um código, mas um registro de representação semiótica que cumpre as funções cognitivas que todo ato de expressão e de compreensão de um discurso produz, por meio de três operações discursivas: a enunciação, a designação e a expansão do conteúdo proposicional de uma frase.

A operação discursiva de enunciação é aquela que determina uma frase, ou seja, um enunciado completo (DUVAL, 2011b). Essa enunciação pode ter um valor social (de pergunta, de ordem, de desejo, de promessa etc.); epistêmico (de certeza, de necessidade, de verossimilhança, de possibilidade ou de absurdo) ou lógico (de verdade ou de falsidade). De acordo com Duval (2004), o sentido de um enunciado completo está nesses valores, assim como no conteúdo e na sua referência aos objetos. Esses valores dependem do contexto do ato discursivo e do universo cognitivo, representacional e relacional dos interlocutores.

Segundo Duval (2011b), a enunciação implica outra operação discursiva, que é a designação. Para esse autor, “as unidades de sentido correspondentes à designação dos objetos não são palavras, mas as expressões que combinam pelo menos duas palavras” (DUVAL, 2011b, p. 78). Assim, a designação de um objeto ou

a referência a esse objeto é uma operação que pode ser mais ou menos complexa, a depender de todos os objetos a que sejamos levados a designar, em razão da insuficiência do número de palavras em relação a todos os objetos de uma língua (DUVAL, 2011b).

A operação de expansão discursiva de um enunciado completo consiste em relatar, descrever, explicar, comentar, argumentar, deduzir, calcular etc. formas de progressão do discurso que podem ocorrer de dois modos: lógico ou natural, este último no sentido de ser mais espontâneo (DUVAL, 2004). Além disso, a expansão de enunciado completo pode ser elaborada por substituição ou por acumulação (DUVAL, 2004).

No primeiro caso, como o próprio nome sugere, ocorre por meio da substituição de uma proposição anterior por novas inferências. É o que acontece em um cálculo ou na dedução, por exemplo (DUVAL, 2004). No segundo, ocorre pela junção de novas características ou informações a um discurso. É o que ocorre em um relato, numa descrição ou numa explicação, quando frases novas são acrescentadas às frases anteriores, ou ainda nas tabelas ou composição de uma tabela, por exemplo (DUVAL, 2004). De acordo com Duval (2011b, p. 79) “é somente no nível da expansão discursiva que as proposições têm um *status* e que esse *status* constitui uma nova dimensão de seu sentido”.

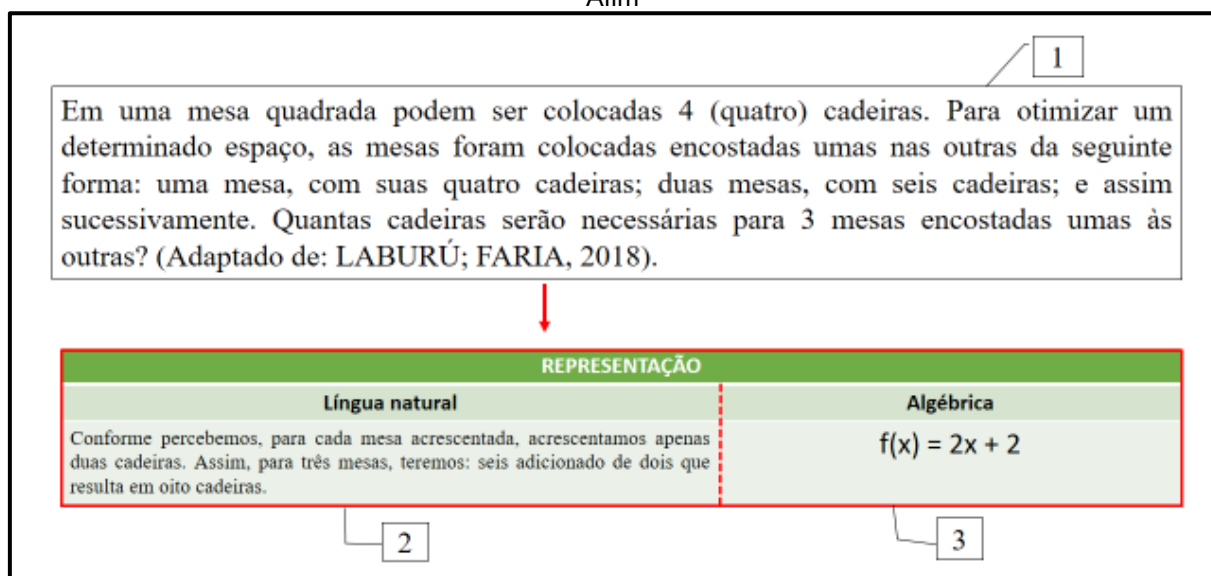
Sem dúvida, a língua natural desempenha um papel fundamental para a comunicação e o ensino da matemática, haja vista a necessidade de uso desse tipo de representação para a compreensão de enunciados de problemas, definições, axiomas e teoremas enunciados durante as aulas, assim como para o desenvolvimento do raciocínio matemático por meio da argumentação e da dedução. Particularmente, no que se refere ao ensino e aprendizagem da Função Afim, esse tipo de representação é bastante comum por ser a Função Afim o modelo matemático próprio para modelar situações do cotidiano que envolvam a ideia de proporcionalidade.

Dessa forma, o registro em língua natural costuma ser bastante focado pelo professor, principalmente nos enunciados de problemas propostos e nas explicações dadas durante o ensino. Por outro lado, o uso da língua natural também pode ser requerido para os estudantes durante os processos de argumentação, seja de forma oral ou escrita, para revelarem suas aprendizagens em relação ao objeto matemático em estudo, em nosso caso, a Função Afim.

Conforme Duval (2012a) explicita, a argumentação não pode ser desvinculada da língua natural, entretanto, em geral, existe um custo de tratamento maior nessa representação do que nas representações algébricas e numéricas. Esse fato deve-se ao elevado número de regras de conformidade existentes no registro em língua natural em contraposição às poucas regras de tratamento para a expansão discursiva, o que, de certa forma, justifica que seja mais simples a compreensão dos estudantes por meio do uso das fórmulas literais do que por meio do uso de frases, por exemplo, contrariando aquilo defendido por Boero, Douek e Ferrari (2008).

Dessa forma, “a organização de um discurso depende sempre das funções discursivas que cumpre e das operações discursivas selecionadas para cumprir tais funções” (DUVAL, 2004, p. 93). Tomemos como exemplo ilustrativo dessas operações discursivas, conforme anteriormente definidas, a figura 4, adaptada a partir da figura 3 apresentada no tópico 3.1.

Figura 4 - Exemplo de mobilização das operações discursivas da língua natural no ensino da Função Afim



Fonte: O autor (2022).

Nesse exemplo, temos representado um problema de Função Afim cujo registro de partida é a língua natural (1). A partir desse registro de partida, podemos identificar as três operações discursivas mobilizadas para a comunicação do objeto matemático em estudo. A operação discursiva de enunciação aparece na forma de enunciado do problema, que tem um valor social de pergunta e um valor epistêmico de certeza. Além da operação discursiva de enunciação, a designação surge também no enunciado do problema por meio das diferentes formas de designação da relação funcional

estabelecida, para as quais poderão ou não ser utilizadas letras, ou seja, uma representação algébrica.

A partir dessa operação discursiva de designação os estudantes poderão designar a relação funcional existente entre o número de cadeiras e o número mesas, seja por meio do tratamento em língua natural (2), seja por meio da conversão da representação para o registro algébrico (3). Por fim, ainda considerando o registro de partida (1), a operação de expansão discursiva de um enunciado completo também entra em cena por meio da descrição do problema, a partir de um discurso natural.

Do ponto de vista do suposto estudante que resolveria tal problema, partindo de (1), também é possível analisar, dentre as soluções por ele apontadas, as operações discursivas mobilizadas. Para o tratamento representado (2), a operação discursiva de enunciação evidencia um valor epistêmico de certeza e um valor lógico de verdade. A função discursiva de designação aparece, particularmente, na conversão para a representação no registro algébrico (3), quando o estudante poderá designar o número de cadeiras e o número de mesas por $f(x)$ e x , respectivamente.

A partir dessa designação, monta a lei da função na sua forma algébrica e, em seguida, calcula o valor de $f(3)$. Nesse contexto, a língua natural é utilizada para designação da relação funcional estabelecida entre o número de cadeiras e o número de mesas a partir da disposição dessas últimas. A operação de expansão discursiva também entra no discurso apontado quando do tratamento (2), visto que o suposto estudante descreve o que vê, ao mesmo tempo em que explica o raciocínio utilizado para estabelecer a relação funcional exigida.

Para Duval (2011b), o registro em linguagem natural não é um registro puramente matemático, fato que acentua a distância cognitiva existente entre ele e os demais registros, dificultando assim a conversão dos enunciados da língua natural para outros registros. Para esse autor, a utilização da língua natural não se assemelha ao funcionamento de um sistema formal, mas deve cumprir todas as funções discursivas, que “são as funções cognitivas que um sistema semiótico deve cumprir para que seja possível um discurso” (DUVAL, 2004, p. 88).

3.2.2 Representação algébrica

A linguagem algébrica é comumente a linguagem na qual os estudantes apresentam bastante dificuldades na aprendizagem matemática devido ao seu maior

grau de abstração (o qual expressa o formalismo matemático), podendo ser considerada como uma construção necessária para descrever simbolicamente regularidades, padrões e facilitar na simplificação de cálculos. Diversas pesquisas apontam para o fracasso do ensino da álgebra no Brasil e no mundo, como a de Lins e Gimenez (1997), por exemplo.

Segundo esses autores, os professores não percebem que ocorre uma ruptura de significados na passagem do raciocínio aritmético para o raciocínio algébrico exigindo, do ponto de vista cognitivo do estudante, a introdução de uma nova linguagem e forma de raciocínio lógico-matemático.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apontam as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras no contexto da matemática: i) aritmética generalizada (registro aritmético), na qual a linguagem algébrica é utilizada para expressar ou traduzir padrões numéricos e geométricos; ii) registro funcional, expressa relações e variáveis; iii) registro de equações, onde as letras são entendidas como incógnitas; e iv) registro estrutural, no qual as letras assumem uma dimensão de símbolo abstrato.

Nesse contexto, as interpretações e características anteriores aparecem fortemente ligadas a outras formas de registro matemático, como o registro em língua materna; o registro figural; o registro gráfico e o registro numérico. Documentos de orientação curricular mais recentes (BRASIL, 2017, 2019; PERNAMBUCO, 2012a, 2019) defendem o trabalho com a álgebra nas salas de aula desde os anos iniciais do Ensino Fundamental por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico, estimulado, dentre outras, por atividades como as de descoberta de padrões em sequências numéricas, de cores e de imagens.

O uso da representação algébrica se faz importante no estudo das funções uma vez que é essa a linguagem que revela a capacidade de descrever diferentes situações por meio do processo de generalização. Para uso dessa linguagem, o estudante necessitará escolher os símbolos matemáticos adequados e manipulá-los, de acordo com o contexto apresentado. No que se refere ao ensino da Função Afim, é essencial que o estudante seja levado a compreender a distinção entre variável e incógnita uma vez que essa distinção revela não apenas uma mudança de nomenclatura, mas uma mudança quanto ao papel desempenhado pelas unidades algébricas constituintes da expressão.

Enquanto a incógnita está associada à ideia de valor desconhecido, que precisa ser encontrado; a variável está associada à relação de dependência entre duas grandezas. Nesse sentido, é importante que haja a compreensão do que sejam e como se distinguem o parâmetro, termos dependente e independente, na expressão algébrica da Função Afim uma vez que essa compreensão/distinção favorece a diferenciação entre equação e Função Assim como favorece a transformação de conversão entre a representação algébrica e outras representações possíveis como a representação gráfica, em língua natural e outras.

Diversas pesquisas apontam para dificuldades de compreensão por parte dos estudantes em relação ao conceito de função, particularmente quando representado por meio da representação algébrica. Pais e Saraiva (2011), citando outros autores, salientam que estas dificuldades relacionam-se à ambiguidade que a definição algébrica desse conceito costuma suscitar. Como exemplo, usam o caso da função $f(x) = 2x + 3$ que, segundo esses autores, significa duas coisas ao mesmo tempo:

i) como calcular o valor da função para um determinado argumento (evocando o processo) e ii) o conceito de função como um todo para qualquer argumento (representando o objeto). Ou seja, $f(x)$ tanto representa o valor da função f como o nome da própria função, dependendo do contexto, o que pode confundir os alunos (PAIS; SARAIVA, 2011, p. 18).

Para Saraiva e Teixeira (2009), é comum os estudantes associarem o conceito de função à expressão algébrica que a representa, assim como associarem o processo de representação gráfica ao conceito de função, sendo a expressão algébrica necessária para a efetivação desse processo. Para esses autores, os estudantes não demonstram capacidade para manipular símbolos, nem para operar com eles, o que se revela insuficiente para o desenvolvimento de uma compreensão estrutural do conceito de função (SARAIVA; TEIXEIRA, 2009).

Em se tratando particularmente da Função Afim, objeto de estudo desta tese, a linguagem algébrica é bastante importante e seu uso pode ser associado a cada uma das demais formas de representação (linguagem natural, representação gráfica e representação tabular) por meio da transformação de conversão. Essa linguagem pode aparecer tanto no registro de partida (linguagem algébrica → linguagem natural; representação gráfica; representação tabular) quanto como registro de chegada (linguagem natural; representação gráfica; representação tabular → linguagem algébrica), embora Duval (2003a) defenda a importância da conversão nos dois sentidos, conforme já visto nesse texto.

Lidar com a representação algébrica da Função Afim, seja enquanto registro de partida ou como registro de chegada também suscita dificuldades para os estudantes, como evidenciam algumas pesquisas, a exemplo das anteriormente citadas (PAIS; SARAIVA, 2011; SARAIVA; TEIXEIRA, 2009). Essas dificuldades devem-se, dentre outros, ao fato de que as conversões entre esses registros requerem a compreensão das unidades significativas em cada um desses registros e a correspondência entre essas e as unidades simbólicas correspondentes no registro algébrico.

Como exemplo, Duval (2011a) aponta dificuldades dos estudantes para converter uma representação da Função Afim dada no registro gráfico para o registro algébrico. Segundo esse autor, “a razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à Função Afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica” (DUVAL, 2011a, p. 97).

Ainda, segundo esse autor, é comum o ensino e mesmo certos estudos didáticos deterem-se à conversão entre a expressão algébrica da Função Afim e sua representação gráfica, sobretudo por meio da abordagem ponto a ponto (melhor explicitada na próxima seção), esquecendo-se de que **“é a passagem inversa que traz problema”** (DUVAL, 2011a, p. 97, **grifo do autor**).

O grau de dificuldade em relação à conversão entre as representações dadas no registro algébrico e representações em outros registros, nos dois sentidos, como: o registro em língua natural, o registro gráfico, dentre outros; vai depender da variação de congruência ou não congruência semântica entre os registros envolvidos. Existem conversões que são mais congruentes, como aquela entre as representações dadas no registro algébrico para outra, dada no registro gráfico, por exemplo; enquanto outras são menos congruentes, como a conversão inversa, conforme já defendida por Duval (2011a).

Assim, é necessário, quando do estudo da Função Afim, levar em consideração a conversão entre outras representações e não limitar o ensino apenas à conversão entre a representação algébrica e a representação gráfica, como geralmente ocorre (DUVAL, 2011a), o que pode levar os estudantes a interpretar a função unicamente como sendo a fórmula algébrica que a representa.

3.2.3 Representação gráfica

“Muitos estudos apontam dificuldades de leitura e de interpretação das representações gráficas cartesianas” (DUVAL, 2011a, p. 67). Este tipo de representação, embora bastante comum, tanto no cotidiano (tratamento da informação) quanto nas salas de aula, suscita dificuldades cognitivas que “incluem, entre outras coisas, a discussão cuja versão simplista seria lida como segue: “visual é mais fácil ou mais difícil?” (ARCAVI, 2003, p. 227), no entanto, na visão de Arcavi (2003, p. 277),

Quando a visualização age sobre imagens conceitualmente ricas [...], a demanda cognitiva é certamente alta. Além disso, raciocínio com conceitos em configurações visuais pode implicar que nem sempre existem rotinas processualmente “seguras” nas quais se apoiem (como pode ser o caso de abordagens simbólicas mais formais). [...] Outra dificuldade cognitiva surge da necessidade de alcançar uma tradução flexível e competente para a frente e para trás [ou seja, uma conversão “nos dois sentidos” conforme Duval (2003a)] entre representações visuais e analíticas da mesma situação, que está no cerne da compreensão de grande parte da matemática (ARCAVI, 2003, p. 227).

Nessa perspectiva, Arcavi (2003) identifica três papéis importantes que a visualização pode desempenhar no processo de aprendizagem matemática: visualização como (i) suporte e ilustração de resultados essencialmente simbólicos (e possivelmente fornecer uma prova desses resultados); (ii) possível estratégia para resolver conflitos entre soluções (corretas) simbólicas e intuições (incorretas); e (iii) maneira de ajudar a recuperar fundamentos conceituais que podem ser facilmente contornados por soluções formais para os problemas.

Assim, a representação visual “já não está relacionada apenas com propósitos ilustrativos, mas é também reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e até do processo de prova” (ARCAVI, 2003, p. 37), a qual pode ser considerada “como um processo que não se destina a excluir a verbalização (ou símbolos, ou qualquer outra coisa), pelo contrário, pode muito bem complementá-lo” (ARCAVI, 2003, p. 32).

Stylianou (2011, p. 267) salienta que os “indivíduos competentes na resolução de problemas apoiam-se em representações visuais como ferramentas que adicionam informação neste processo”. De acordo com essa autora, as representações gráficas desempenham quatro funções no processo de resolução de problemas, que são: (i) compreensão, ao passo que, quando nem todos os aspectos do problema são

imediatamente óbvios, a representação é utilizada para combinar diferentes aspectos do problema e para ver como estes interagem; (ii) registro, permitindo a combinação de toda a informação fornecida em vez de apenas mantê-la em memória; (iii) exploração, haja vista que o uso flexível da representação permite a manipulação de conceitos revelando mais informação e implicações; e (iv) verificação e avaliação, quando a representação é utilizada na tomada de decisões, na resolução de problemas.

A autora acrescenta ainda que, para além dos papéis anteriores, “as representações gráficas também são utilizadas como ferramentas computacionais e de apresentação de resultados” (STYLIANOU, 2011, p. 267).

Duval (2011a) apresenta três tratamentos das representações gráficas, especificamente da Função Afim: (i) a abordagem ponto a ponto; (ii) a abordagem de extensão do traçado efetuado; e (iii) abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

De acordo com o autor, é por meio da abordagem ponto a ponto “que são introduzidas e definidas as representações gráficas” (DUVAL, 2011a, p. 98), no entanto, esta abordagem dificulta a percepção da articulação entre os registros, particularmente quando a representação gráfica é o registro de partida. É considerada, ainda, uma abordagem reducionista, no sentido de não propiciar uma interpretação das propriedades do gráfico, mas apenas a visualização (associativa) de alguns valores particulares e dos pontos marcados no plano cartesiano. Esta abordagem

favorece quando se quer **TRAÇAR** o gráfico correspondente de uma equação do primeiro grau ou o gráfico de uma equação do segundo grau. Favorece ainda quando se quer **LER** as coordenadas de algum ponto interessante (porque é ponto de intersecção com os eixos ou com alguma reta, porque é máximo etc.) (DUVAL, 2011a, p. 98, **grifo nosso**).

Conforme já mencionado, essa abordagem não favorece a associação das variáveis visuais da representação gráfica e as unidades significantes da expressão algébrica, principalmente quando esta última representação constitui o registro de chegada. Segundo Duval (2011a, p. 102), para passar da representação algébrica à gráfica, “é possível se contentar com a abordagem ponto a ponto: atribuem-se valores particulares a “ x ”, sem se preocupar com quaisquer propriedades, para encontrar pares de números, quer dizer, pontos”. Entretanto, para passar da representação gráfica para a algébrica, “isto não é possível: é preciso identificar cada um dos valores

das variáveis visuais e integrá-las” (DUVAL, 2011a, p. 102), o que requer uma interpretação global de propriedades figurais (abordagem vista mais adiante).

Quanto à abordagem de extensão do traçado efetuado, esta não se vincula a um conjunto de pontos marcados, como no caso anterior, mas se apoia em um conjunto infinito de pontos marcados, isto é, nos intervalos dos pontos marcados. No entanto, essa abordagem, à semelhança da anterior, não leva em conta as variações visuais concernentes à representação gráfica, mas apenas o traçado do gráfico.

Por sua vez, na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, é analisada toda modificação visível “sofrida” no traçado do gráfico quando são modificados os seus parâmetros, observando o impacto dessas modificações nas representações (tanto algébrica quanto gráfica), pois, “ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação” (DUVAL, 2011a, p. 99).

Essa abordagem, conforme visto anteriormente, favorece sobremaneira a transformação “representação gráfica → representação algébrica (equação)”, fato pouco evidente nas duas abordagens anteriores, sendo exatamente neste sentido de conversão (gráfico → equação) que o grau de não congruência semântica aumenta e, por consequência, as dificuldades dos estudantes. Assim, “com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação ‘um ponto – um par de números’, mas na presença da associação ‘variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica’**” (DUVAL, 2011a, p. 99, grifo nosso).

3.2.4 Representação tabular

Utilizada frequentemente na abordagem ponto a ponto como uma representação auxiliar na qual se estabelece uma coluna da tabela para representar “ x ” e outra coluna para representar a função (y ou $f(x)$), a representação tabular pode ser utilizada para além desta função e das situações de comunicação. Segundo Flores e Moretti (2005) este tipo de representação preenche as quatro funções cognitivas do pensamento: comunicação, tratamento, objetivação e identificação.

Essas funções, referentes às representações semióticas, foram discutidas por Duval (1993). Segundo este autor, a primeira função (comunicação), refere-se à função de transmissão de uma mensagem ou de uma informação entre indivíduos,

requerendo a utilização de um código comum. A segunda (tratamento), transforma uma representação em uma outra, de mesma natureza, conforme já visto. A terceira (objetivação), permite a um sujeito a tomada de consciência daquilo que até então ainda não o tinha feito – exteriorização. Por fim, a função de identificação permite a recuperação da memória, concerne à organização das informações da memória.

De acordo com Flores e Moretti (2005), o ensino de matemática com o uso de tabelas deve possibilitar e privilegiar a sua construção, a sua interpretação e preenchimento ou a compilação de dados ou informações para serem organizados em outra tabela. Para esses autores, existem dois grandes grupos para a análise semiótica e cognitiva das tabelas: (i) as que se constituem como “banco de dados”, as quais servem apenas para uma consulta rápida e, portanto, um custo cognitivo bastante baixo; e (ii) as que permitem o aparecimento de novos dados, permitindo fazer inferências sobre a existência de relações ou de elementos ainda não conhecidos ou mostrar a necessidade de distinções que até então não haviam sido levadas em conta (que sugerem um custo cognitivo mais expressivo).

Dessa forma, segundo Duval (2003b), para analisar a contribuição cognitiva das tabelas e suas diferentes utilizações é necessário distinguir entre dois importantes pontos: (i) a própria organização representacional, isto é, a composição semiótica das tabelas; e (ii) as funções cognitivas que elas ocupam. Quanto ao primeiro item, destaca-se a visível disposição dos dados, ou informações, em linhas e em colunas. No entanto, esta não é uma característica exclusiva das tabelas, a utilização de formas quadriculadas aparece, igualmente, nas representações cartesianas e histogramas-gráficos de barra.

Logo, é necessário discernir a especificidade das tabelas em relação às outras representações gráficas, ir além de uma simples abordagem pontual (geralmente visual) e, segundo Duval (2003b), buscar uma abordagem de “apreensão global”. **“A passagem de uma abordagem pontual para uma abordagem de interpretação global na ‘leitura’ das tabelas representa um salto do ponto de vista cognitivo” (DUVAL, 2003b, p. 10, grifo nosso).**

Portanto, o uso das tabelas, enquanto forma de representação, deve ir além da abordagem ponto a ponto, quando da conversão entre representações dos registros algébrico e gráfico, nesse sentido. Segundo Duval (2011a, p. 99) esse tipo de abordagem “é totalmente inoperante uma vez que tira a atenção das variáveis visuais”. Além disso, ainda de acordo com esse autor, “a prática sistemática da abordagem

ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado no ensino uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica” (DUVAL, 2011a, p. 99).

Em síntese, coordenar adequadamente as representações dadas em diferentes registros de representação semiótica se constitui um desafio tanto para o estudante (aprender) quanto para o professor (ensinar). A coordenação “aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis” (DUVAL, 2012a, p. 270). Cada registro apresenta especificidades e a conversão entre as representações possíveis nesses registros não significa apenas uma modificação do modo de tratamento do objeto matemático, mas explicar propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto em um sistema semiótico diferente daquele inicial.

Conforme visto, algumas conversões se mostram mais problemáticas e requerem um custo cognitivo maior, como por exemplo aquelas que envolvem a passagem do registro gráfico para o registro algébrico, salientando a necessidade do estudo da representação gráfica das funções por meio da abordagem de interpretação global de propriedades figurais em vez de uma abordagem ponto a ponto. Uma adequada coordenação entre as representações pertencentes aos diversos registros de representação semiótica, atividade imprescindível para a transformação de conversão, “está longe de ser natural [...] [não podendo] realizar-se no quadro de um ensino, principalmente determinado por conteúdos conceituais. Pode-se observar, em todos os níveis de ensino, na grande maioria dos estudantes, um isolamento de registros de representação” (DUVAL, 2012a, p. 283).

3.3 INTER-RELAÇÕES ENTRE O CONTRATO DIDÁTICO E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Conforme apresentado na Introdução desse trabalho, adotamos a hipótese de que existem inter-relações de estreita aproximação, ou seja, uma relação mútua entre o Contrato Didático estabelecido e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática. Ao que parece, o fenômeno do CD não pode “se materializar” na relação didática se não por meio dos registros de representação semiótica do objeto matemático estudado. Ou seja, todas as negociações,

características do CD, que emergem na sala de aula, ocorrem em termos de registros de representação semiótica dos objetos matemáticos estudados, em nosso caso, a Função Afim.

Segundo Brito Menezes (2006, p. 48, **grifo nosso**),

Um elemento fundamental a ser considerado, quando tomamos em conta tal relação [a relação didática], é que ela acontece em um contexto onde há uma **intencionalidade de ensino**. Ou seja, o professor, na qualidade de um dos parceiros da relação didática quer, intencionalmente, ensinar algo ao outro parceiro: o aluno. Para isto, é necessário que sejam criadas **situações de ensino**, envolvendo os três polos fundamentais da relação ternária: **o professor, o aluno e o saber**.

Na perspectiva da TRRS essas situações de ensino devem ser permeadas pela diversidade de registros de representação semiótica, sendo o professor o responsável por favorecer a diversidade de registros possível de um dado objeto matemático e o estudante, por sua vez, precisará reconhecer tais objetos por meio desses registros de representação. Diremos que a relação didática teve êxito, ou seja, que o estudante aprendeu, quando ele conseguir mobilizar a diversidade de representações dadas por meio de registros distintos (ao menos dois deles) e coordená-las.

Embora sejam consideradas as expectativas de cada parceiro da relação didática, “a entrada no Contrato Didático, na visão de Brousseau e outros pesquisadores, dá-se pelo polo do **SABER**” (BRITO MENEZES, 2006, p. 49, **grifo nosso**) e, conforme Duval (2003a, 2011b, 2012a), a única forma de acesso a um saber/objeto matemático é por meio dos registros de representação semiótica.

Dessa forma, o que pretendemos aqui, por meio desse trabalho, é trazer uma contribuição teórica para a compreensão de como o fenômeno do CD e os RRS se articulam, ou seja, como ocorrem as inter-relações entre esses dois aportes teóricos no seio da relação didática. Na figura 5 ilustramos, sucintamente, como se configura o nosso interesse de análise, considerando ambos os aportes teóricos na sala de aula. A partir dos elementos desse esquema (figura 5) elencamos nossas categorias e critérios de análise, melhores definidos no capítulo 6 (percurso metodológico).

o estudante não permite que o professor lhe diga diretamente aquilo que espera que seja feito por ele, sob pena de fracasso da relação didática.

Por sua vez, o paradoxo cognitivo do pensamento matemático aponta que o estudante não deve confundir o objeto matemático em estudo com a sua representação. Assim, ao que parece, esses dois paradoxos trazem uma importante relação que pode ser estudada, ou seja, à medida que o estudante toma para si a responsabilidade pela construção do seu conhecimento, tenderá, cada vez mais, a não confundir o objeto matemático com a sua representação. Por outro lado, não confundir o objetivo matemático com a sua representação poderá levar o estudante à devolução da situação proposta uma vez que tenderá a se sentir melhor motivado para isso.

Por fim, entendemos que a “materialização” do CD na relação didática não pode ocorrer se não por meio das representações semióticas dos objetos matemáticos em estudo. A coordenação dessas representações, por parte do estudante, pode favorecer a distinção entre representante e representado, isto é, entre representação e objeto matemático estudado. Esse último aspecto foi representado na figura 5 pela dupla “conceito, objeto representado”.

Aprofundando um pouco mais as discussões quanto às inter-relações defendidas nessa tese, apresentamos a seguir uma reflexão teórica acerca de possíveis inter-relações existentes entre o CD e os RRS da Função Afim, considerando os elementos de ambos os aportes teóricos tomados a partir da figura 5, anteriormente apresentada.

Uma primeira inter-relação a ser apontada diz respeito às negociações e caracterização/tipologia de CD estabelecido na relação didática. Quanto a esse quesito, as negociações empreendidas na sala de aula costumam estar relacionadas ao tipo de CD estabelecido entre professor e estudantes, e as representações semióticas mobilizadas também dependem dessa relação. Assim, podemos antever nos parágrafos seguintes as seguintes negociações, relacionadas aos RRS mobilizados, a depender do tipo de CD estabelecido:

CD Normativo: nesse tipo de CD, o professor toma para si toda a ação didática, ou seja, ele “apresenta” aos estudantes as diversas representações do objeto matemático de estudo (a Função Afim, em nosso caso), seus tratamentos e conversões. Também é ele quem faz a coordenação dos registros mostrando aos estudantes o “passo a passo” de como proceder para tal. Quanto à abordagem para

construção do gráfico da função, conversão $RA \rightarrow RG$, é bastante comum nesse tipo de CD que o professor utilize a abordagem ponto a ponto por ser mais “rápida” de realizar, além de ser mais metódica. Basicamente, na visão do professor que negocia tal tipo de CD, basta seguir o passo a passo seguinte: constrói-se uma tabela; atribuem-se valores para a variável independente “ x ”, geralmente valores inteiros entre três negativo e três positivo; substituem-se esses valores na expressão algébrica da função obtendo-se o valor de “ y ”; por fim, utilizam-se os pares ordenados encontrados para montar o gráfico da função. Também é mais comum nesse tipo de CD que o professor utilize atividades (problemas) com baixo grau de não congruência semântica por serem de mais fácil resolução por parte dos estudantes, embora a utilização de atividades com alto grau de não congruência semântica também seja possível uma vez que é o próprio professor quem “conduz” todo o trabalho didático.

CD Incitativo: nesse tipo de CD, o professor “transfere” para o estudante a responsabilidade pelo seu processo de aprendizagem, não no sentido da devolução didática, mas no sentido de deixar o estudante “se virar”, por si só, para realizar as atividades propostas, com pouca intervenção da sua parte. Propõe algumas situações de ensino, mas deixa o estudante bastante “à vontade” para o desenvolvimento delas, sem intervir no processo. Caberá ao estudante, portando, “descobrir” as diversas representações do objeto matemático de estudo, seus tratamentos e conversões, sem a intervenção do professor. Também é do estudante a responsabilidade de fazer a coordenação das representações mobilizadas. Para a abordagem de construção do gráfico da função, conversão $RA \rightarrow RG$, é bastante comum que o estudante utilize a abordagem ponto a ponto por ser aquela mais evidente em seus esquemas mentais, haja vista a ideia de pares ordenados já construída em anos escolares anteriores. Poderão ser utilizadas atividades (problemas) com baixo, médio ou alto grau de não congruência semântica, a depender “da bagagem” dos estudantes. Nesse tipo de CD, a estrutura própria do saber é colocada em segundo plano.

CD Aproximativo: nesse tipo de CD o professor “transfere” para o estudante a responsabilidade pelo seu processo de aprendizagem, entretanto, o faz no sentido da devolução didática, em que ele e o estudante compartilham essa responsabilidade. Ele, o professor, terá a obrigação de estruturar o meio (*Milieu*) adequado para que o estudante possa compreender e utilizar as diversas representações do objeto matemático de estudo, seus tratamentos e conversões, com a sua mediação didática, quando favorecerá a coordenação entre as representações mobilizadas. Para a

abordagem de construção do gráfico da função, conversão $RA \rightarrow RG$, poderá utilizar a abordagem global das propriedades figurais por ser uma abordagem mais “ampla” e de compreensão mais duradora, no entanto, também poderá ser utilizada a abordagem ponto a ponto ou a abordagem de extensão do traçado, mostrando ao estudante as possibilidades de cada uma dessas abordagens. Quanto aos graus de não congruência semântica das atividades (problemas) utilizadas, é comum que sejam desenvolvidas atividades com baixo, médio e alto grau de não congruência semântica, geralmente nessa ordem, por dar a ideia de sequencialidade e aprofundamento de estudo.

De acordo com Charnay (1996) nenhum professor utiliza exclusivamente um desses modelos. Toda a complexidade do fazer pedagógico exige a utilização de elementos de cada um deles, entretanto, “apesar de tudo, cada professor faz uma escolha, consciente ou não e de maneira privilegiada, de um deles” (CHARNAY, 1996, p. 40). Nessa tese, defendemos a negociação, pelo menos na maior parte do tempo didático, desse último tipo de CD, entendendo que as negociações instituídas devem privilegiar tratamentos diversos do objeto matemático de ensino, as conversões em ambos os sentidos, ou seja, a heterogeneidade dos sentidos da conversão, o uso de atividades com baixo, médio e alto graus de não congruência semântica e a abordagem global das propriedades figurais para a conversão entre os registros algébrico e gráfico (em ambos os sentidos) com a devida divisão de responsabilidades entre os parceiros da relação didática.

Uma segunda inter-relação possível de ser apontada se refere às expectativas tanto do professor quanto do estudante no que se refere ao saber em jogo. As expectativas constituem um fenômeno indissociável da relação didática, tanto por parte do professor quanto por parte do estudante. No que tange ao nosso objeto de estudo, a Função Afim, podemos apontar algumas dessas expectativas por parte de cada um desses parceiros do triângulo didático, relacionando-as às representações semióticas mobilizadas, como seguem descrições nos parágrafos a seguir:

Professor: no caso da nossa investigação, por se tratar de estudantes do Ensino Médio, quando do ensino da Função Afim, o professor tem a expectativa de que esses já tenham dominado o conceito de função (relação funcional) formalizado no 9º ano do Ensino Fundamental e retomado no Ensino Médio anteriormente ao ensino da Função Afim. Ele costuma esperar também que os estudantes saibam lidar com os tratamentos relacionados às equações do 1º grau; saibam fazer conversões,

ainda que “simples”, ou seja, com baixo grau de não congruência semântica, pelo menos entre os registros dados em LN e o RA (nesse sentido) por serem aqueles mais utilizados quando estudam as equações do 1º grau e saibam coordenar, ao menos, duas representações desses registros. Geralmente, também fazem parte das expectativas do professor, quando do ensino da Função Afim, esperar que os estudantes saibam proceder ao registro gráfico utilizando, pelo menos, a abordagem ponto a ponto.

Estudante: ao se anunciar o ensino de um conteúdo novo, geralmente o estudante se enche de expectativas em relação a esse conteúdo: será de fácil compreensão? Será “útil” no seu dia a dia? Quais conhecimentos “antigos” serão necessários retomar para a aprendizagem desse “novo”? No contexto do ensino da Função Afim não é diferente. Por se tratar de um conteúdo com forte teor algébrico, haja vista situar-se nesse campo da matemática, é comum que os estudantes tenham por expectativa que só lidarão com representações desse tipo. Além das expectativas em relação ao conteúdo de ensino, também há aquelas acerca do papel do professor. Nesse quesito, o estudante supõe que o professor organizará a cena didática, fornecerá informações a respeito do objeto de ensino e concederá explicações que auxiliem a lidar com as diversas representações de tal objeto, a coordenação entre essas representações e suas transformações.

Como terceira inter-relação entre o CD e os RRS do objeto matemático Função Afim se enaltecem às regras do CD estabelecido. Estas, em sua maioria implícitas, poderão ser instituídas pelo professor ou negociadas entre ele e o estudante. Dentre as possíveis regras estabelecidas quando do ensino da Função Afim, tomando os RRS desse objeto matemático, podemos destacar aquelas que instituem: a) sempre utilizar valores inteiros e positivos para os parâmetros da função uma vez que o uso de valores inteiros e positivos facilita as conversões entre as representações mobilizadas; b) para converter um problema cuja representação de partida é dada no registro em LN para outra no RA, devemos partir da definição: encontramos no problema os respectivos valores correspondentes aos coeficientes “ a ” e “ b ”, e montamos a expressão algébrica desejada; c) para identificar a declividade da Função Afim, a partir do RA, devemos considerar o coeficiente “ a ” dessa função; se $a > 0$, a Função Afim será crescente e se $a < 0$, a Função Afim será decrescente; d) para identificar a declividade da Função Afim, quando do registro gráfico, considerando o ângulo formado pela reta representada e o eixo “ x ” do plano cartesiano temos que: se

esse ângulo for menor que 90° , a Função Afim será crescente; se for maior que 90° , a Função Afim será decrescente.

Essas, dentre outras regras possíveis de surgir quando das negociações do CD, dizem respeito aos diversos elementos da TRRS, como: aquelas relacionadas às representações mobilizadas e à coordenação dessas representações; aquelas inerentes ao procedimento adotado para a construção do gráfico da função, conversão $RA \rightarrow RG$, e aquelas voltadas aos graus de não congruência semântica adotados nas atividades de conversão propostas pelo professor.

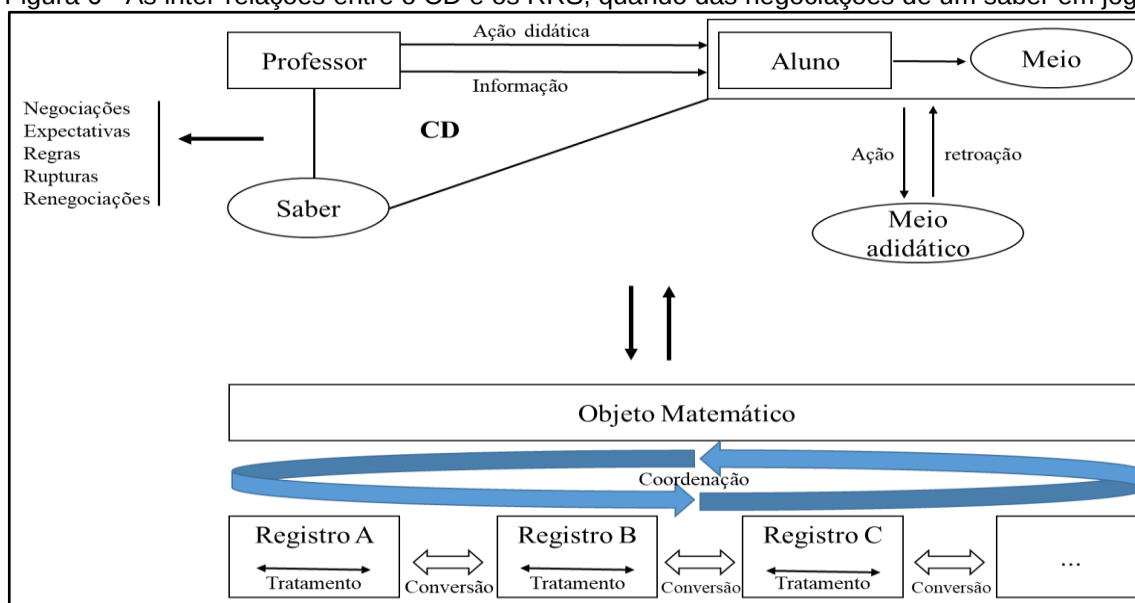
Uma quarta inter-relação passível de ser apontada entre o CD e os RRS refere-se às (possíveis) rupturas e renegociações do CD estabelecido. No que se refere às rupturas do CD, essas nem sempre ocorrerão na relação didática, tendo em vista a tendência de o CD permanecer sempre estável, haja vista o seu “núcleo duro”. No entanto, uma ruptura possível de ser apontada diz respeito à mudança do CD “tradicional” tomado no sentido do ensino tradicional, CD normativo; para um CD mais construtivista, o CD aproximativo.

Para isso, o professor deixa de adotar a sequência de ensino baseada em “definição-exemplos-exercícios” e passa a adotar uma sequência que parte de um problema, similar àqueles do cotidiano do estudante, para somente após várias reflexões, levantamento de hipóteses e conjecturas, é que o professor faz a institucionalização do conceito que se deseja trabalhar, nesse caso, a Função Afim. Essa ação do professor gera inquietações nos estudantes, que se manifestam por meio de questionamentos como: qual a fórmula que devemos utilizar? Que regra utilizar? O professor ou professora pode ajudar?

Tal situação, sugere uma ruptura de CD e, nesse momento, o CD até então estabelecido é evidenciado. A partir dessa nova “reconfiguração” do CD, após a ruptura instituída, novas negociações, ou sejam, as renegociações, se fazem necessárias com vistas à devida “conformidade” ao novo CD estabelecido.

Como uma síntese das reflexões aqui apontadas, elaboramos a figura 6, que destaca as inter-relações que ocorrem entre o CD e os RRS, quando das negociações de um saber em jogo, aqui tomado em sentido genérico.

Figura 6 - As inter-relações entre o CD e os RRS, quando das negociações de um saber em jogo



Fonte: Adaptado a partir de Brousseau (2008) e Duval (2011a, 2012a).

A partir da construção apresentada (figura 6), podemos observar que todas as interações que ocorrem na relação didática, ou seja, as negociações, as expectativas, as regras, as rupturas e as renegociações são regidas pelo Contrato Didático e instituídas em termos de representações semióticas do objeto matemático mobilizadas. Dessa forma, é possível refletir sobre a possibilidade de que as negociações do CD e demais elementos que circundam esse fenômeno didático ocorrem em termos de representações semióticas do objeto matemático mobilizadas na relação didática. Por outro lado, acreditamos que as representações semióticas do objeto matemático mobilizadas na relação didática ocorrem de acordo com o CD estabelecido na sala de aula.

Observamos ainda, de acordo com a figura 6, que o professor, diante de um saber em jogo, realiza a ação didática e fornece as informações ao estudante, que por sua vez, interage com o meio (*Milieu*), num movimento de ação/retroação em relação ao meio adidático. Com a retroação, a informação é recebida pelo estudante como uma resposta à sua ação, o que o leva a uma reflexão sobre a ação, bem como a possíveis ajustes dessa ação, configurando-se, dessa forma, a interação entre o estudante e o meio (BESSOT, 2003).

Essas interações entre os polos “humanos” do triângulo didático são regidas/reguladas pelo CD estabelecido que acaba por regular, em grande medida, as interações que ocorrem na sala de aula. Nesse movimento de interações, de ação/retroação, os RRS do objeto matemático de estudo são essenciais para

apropriação do saber, haja vista, ser essa a única forma de “acesso” aos objetos matemáticos (DUVAL, 2011a, 2012a). Daí a necessidade de estruturação do meio (*Milieu*) por parte do professor, sobretudo, quando do trabalho com atividades de ensino (problemas) envolvendo maior grau de não congruência semântica.

Nesse tipo de situação, “não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente” (DUVAL, 2012a, p. 284). Aqui, podemos sugerir mais uma inter-relação entre o CD e as representações semióticas mobilizadas, tendo como referência a estruturação do meio (*Milieu*) pelo professor, a devolução didática e a transformação de conversão, atividade cognitiva mais custosa de ser desenvolvida pelos estudantes (DUVAL, 2012a).

O papel do professor na estruturação do meio (*Milieu*) se constitui em peça fundamental para que a atividade de conversão aconteça. Segundo Duval (2012a, p. 276), “a conversão entre diferentes registros de representação semiótica é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática”, destacando que não é suficiente organizar as sequências de atividades em sala de aula, mas é necessário tornar os estudantes capazes de resolver problemas, quaisquer que sejam as situações e quaisquer que sejam os objetos matemáticos estudados, daí a importância da devolução didática.

Dessa forma, “modelar” a situação didática (BROUSSEAU, 1986, 2008) considerando a importância do “meio” (*Milieu*) como um subsistema antagônico, faz o estudante se tornar um sujeito autônomo na construção do saber em jogo, a partir das ações e retroações existentes na interação entre ambos. Tal fato nos remete a outra possível inter-relação instituída entre o CD e as representações semióticas e se refere à relação entre o paradoxo da devolução (BROUSSEAU, 1986) e o paradoxo cognitivo do pensamento matemático (DUVAL, 2012a). Ou seja, a partir do momento em que o estudante toma para si (também) a responsabilidade pela construção do seu conhecimento, tende, cada vez mais, a não confundir o objeto matemático com a sua representação.

De acordo com Brousseau (1986), o Contrato Didático é o fenômeno didático responsável por toda a dinâmica da relação didática, a “pedra de toque” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001), sendo a situação didática a “regra do jogo”. Para nós, esse fenômeno é o elemento central nas interações existentes em busca do saber que está sendo estudado, em nosso caso, a Função Afim e, analisar

as suas inter-relações com os RRS parece-nos se configurar como importante aporte para as discussões acerca do ensino de tal saber/objeto.

Assim, acreditamos que analisar o Contrato Didático oportunizará uma melhor compreensão acerca das inter-relações existentes entre este e as representações semióticas do objeto matemático Função Afim mobilizadas na relação didática. No capítulo 6 trazemos todo o delineamento metodológico previsto para a pesquisa empírica, inclusive as categorias de análise que serão objeto de investigação na sala de aula.

4 A FUNÇÃO AFIM COMO SABER MATEMÁTICO EM JOGO

Nesse capítulo são apontadas algumas considerações sobre o estudo da Função Afim considerando aspectos referentes à abordagem didática em sala de aula, dificuldades de aprendizagem dos estudantes e algumas representações semióticas utilizadas no ensino. Apontamos também a definição formal do conceito e alguns dos seus elementos estruturadores (elementos matemáticos do conceito).

4.1 A FUNÇÃO AFIM EM DOCUMENTOS DE ORIENTAÇÃO CURRICULAR

Ao longo dos anos, o ensino da matemática tem passado por diversas reformulações, sejam elas em âmbito do currículo, de estratégias de ensino ou de avaliação. Durante muito tempo, principalmente no advento do Movimento da Matemática Moderna, essa disciplina foi estudada de forma descontextualizada, fundamentada em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc., deixando de considerar que o que se propunha estava fora do alcance dos estudantes.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), discussões no âmbito da Educação Matemática, sejam no Brasil ou em outros países, apontam para a necessidade de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da matemática em diversos campos da atividade humana. Essas discussões têm influenciado análises e revisões nos currículos de matemática da Educação Básica com vistas a propiciar um ensino que deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o “pensar matematicamente”.

Nesse sentido, o ensino da matemática deve propiciar ao estudante um “fazer matemático’ por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento” (BRASIL, 2006, p. 70). De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), considerando a ampliação do letramento matemático iniciado no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, etapa esta que interessa nessa pesquisa,

os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas,

aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2017, p. 529).

Dessa forma, ressalta-se a importância de um ensino da matemática que seja voltado à realidade do estudante, que assegure, sobretudo, os três requisitos defendidos por Câmara dos Santos e Lima (2010) no que se refere à formação matemática no Ensino Fundamental (defendemos que também se aplicam ao Ensino Médio) de um ensino da matemática com as seguintes características: relevância, pertinência e equidade.

De acordo com esses autores,

Relevância: diz respeito aos elementos que compõem uma formação matemática que contribua para a plena inclusão de todos na vida social, em suas múltiplas dimensões. **Pertinência:** refere-se à compreensão da complexidade e da diversidade dos fenômenos educacionais para a conquista de uma efetiva formação matemática. **Equidade:** trata do que é preciso fazer para, respeitadas as diferenças humanas e as especificidades dos contextos, oferecer a todos oportunidades iguais para usufruir o saber matemático, como um dos mais importantes bens culturalmente construídos pelo homem (CÂMARA DOS SANTOS; LIMA, 2010, p. 01, **grifo nosso**).

No caso particular do ensino das funções, devemos ter em vista que o conceito de função possui bastantes aplicações, tanto em contextos sociais como dentro da própria matemática, o que torna essencial a sua aprendizagem pelos estudantes.

Caraça (1984) defende que o conceito de função está relacionado a duas características essenciais da Realidade (assim grafado pelo autor) em que vivemos, que são: a interdependência e a fluência. Essas características estão relacionadas à relação de dependência e à variação dos elementos envolvidos, respectivamente. De acordo com esse autor, a primeira característica significa que todas as coisas estão relacionadas entre si, enquanto que a segunda destaca que o mundo está em permanente evolução: tudo muda o tempo todo. Caraça (1984) destaca ainda que o conceito de função nasceu do conceito de leis naturais.

Para esse autor, a “correspondência” é uma importante operação mental na formação do conceito de função, sendo o cerne do próprio conceito de função presente na correspondência unívoca entre as variáveis envolvidas na relação, e que permitem traduzir a interdependência e a fluência presentes na Realidade (CARAÇA, 1984). As Orientações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006) defendem que

o estudo de Funções seja iniciado a partir da exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações, como: idade e altura;

área do círculo e seu raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras (BRASIL, 2006, p. 72).

Esse documento defende, ainda, que o professor deve “provocar” os estudantes para que eles apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esboquem qualitativamente os gráficos que representem essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). Ainda, de acordo com o documento, é conveniente solicitar aos estudantes que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades.

Dessa forma, facilita-se a identificação, por parte do estudante, “da ideia de função em outras situações, como no estudo da cinemática, em Física” (BRASIL, 2006, p. 72). Ou seja, que eles sejam levados a converter as representações algébricas (RA) em linguagem natural (RLN) e não somente a realizar a conversão inversa (RLN $\rightarrow$ RA). Outro aspecto a considerar refere-se à importância de “destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos os seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes” (BRASIL, 2006, p. 72).

Por meio dessa abordagem o estudante passa a ter uma compreensão global das propriedades visuais do gráfico, o que favorece a conversão registro gráfico $\rightarrow$ registro algébrico, o que não é favorecido por meio da abordagem que utiliza a associação um ponto, um par de números, chamada por Duval (2011a) de abordagem ponto a ponto. No subtópico 3.2.3 deste texto discorreremos tanto sobre a abordagem ponto a ponto quanto sobre a abordagem global das propriedades visuais.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000),

além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (BRASIL, 2000, p. 43-44).

De acordo com esse documento, os conceitos relacionados às funções devem ser ensinados com a finalidade de desenvolver a compreensão dos fenômenos do cotidiano do estudante e de outras ciências, buscando relações entre variáveis e suas representações.

De forma restrita, a Função Afim pode ser considerada um dos meios mais simples de descrever fenômenos das ciências e um dos modelos matemáticos utilizados para o estudo de relações entre grandezas, tanto no próprio campo da matemática como em outras áreas do conhecimento. Dessa forma, é necessário que o estudante, quando do estudo dessas funções, seja levado a perceber que o conceito de Função Afim aparece nas mais diversas situações do seu dia a dia, como na hora de encher o tanque do carro, de acordo com a distância até o seu destino, ou no valor pago pela compra de determinado produto, que depende da quantidade de produtos comprada.

Entretanto, observações empíricas, especialmente em minha¹⁵ prática profissional como professor de matemática, mostram, sobretudo na abordagem dos LD, que o ensino dessas funções costuma ocorrer com foco na sua definição: “uma função definida por $f: R \rightarrow R$ chama-se Afim quando existem constantes a, b que pertencem ao conjunto dos números reais tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$ ”; sem considerar situações contextualizadas, seja em situações da vida real, em situações de outras ciências ou outras situações da própria matemática. Esse fato tem suscitado nos estudantes uma não compreensão e dificuldades de aprendizagem. Não que a compreensão da definição formal não seja importante para o estudante, mas que ele seja levado a compreendê-la, e se possível depreendê-la, a partir de situações que tenham significado para ele, para, somente posteriormente, ser formalmente institucionalizada.

A noção de declividade, por exemplo, associada ao sinal da taxa de variação “ a ” dessa função, comumente chamada de coeficiente angular nos LD; se $a > 0$, a função será crescente e se $a < 0$, a função será decrescente; é um dos tópicos pouco compreendido pelos estudantes. Assim, propiciá-los conhecer apenas estas características não assegura a identificação correta quanto a esse quesito quando eles analisam situações do cotidiano ou a representação gráfica de uma Função Afim.

¹⁵ O uso da primeira pessoa do singular justifica-se por se tratar de uma experiência particular do pesquisador, não necessariamente comungada por seus orientadores.

Portanto, é importante levar os estudantes a perceberem que existe uma relação entre a taxa de variação “ a ” e a declividade da Função Afim. Entretanto, isso deve ser feito de forma que eles percebam que, dada uma situação que possa ser modelada pela função afim, da forma $f(x) = ax + b$, quando aumentamos o valor de x , os correspondentes valores de y também aumentam, estamos caracterizando uma função crescente; e que, quando aumentamos o valor de x os correspondentes valores de y diminuem, estamos caracterizando uma função decrescente.

A utilização dessa estratégia de ensino levará o estudante a perceber a relação existente entre a taxa de variação “ a ” e o aspecto do gráfico (ascendente/descendente), uma das variáveis visuais importantes no registro gráfico, favorecendo assim as transformações por conversão entre as representações dos registros algébrico e gráfico (nos dois sentidos) mas, principalmente no sentido registro gráfico → registro algébrico.

De acordo com os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012a),

O estudo das funções é essencial nesta etapa de escolaridade [o Ensino Médio], principalmente por seu papel de modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas em fenômenos do mundo natural ou social. Esse aspecto das funções deve ser priorizado, em lugar de uma abordagem essencialmente simbólica e de difícil compreensão por parte dos alunos. Em particular, a definição de função baseada na ideia de produto cartesiano de dois conjuntos aparece como bastante desaconselhável, tanto do ponto de vista matemático, como do ponto de vista didático (PERNAMBUCO, 2012a, p. 129).

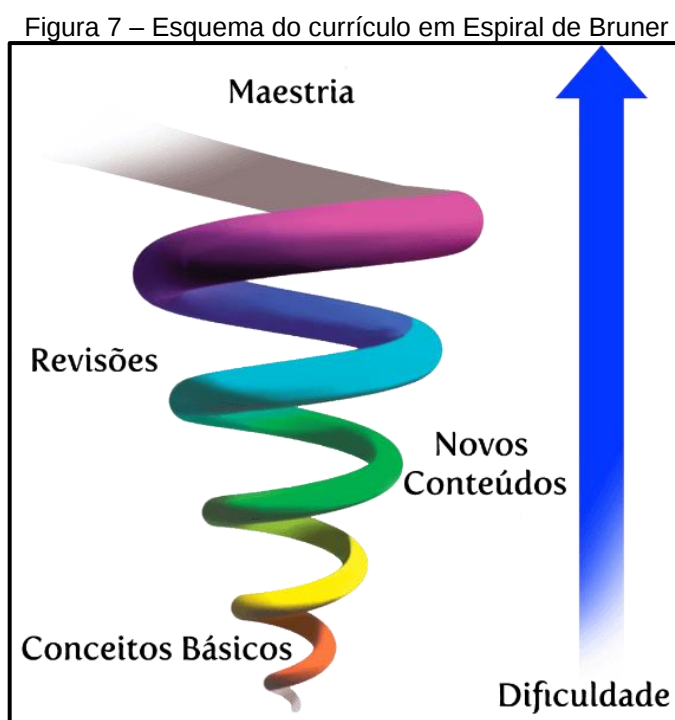
Dessa forma, o conceito de função não deve ser encarado como uma simples manipulação simbólica, mas como o estabelecimento de relações, levando o estudante a consolidar a noção de variável (PERNAMBUCO, 2012a).

Estritamente, o ensino da Função Afim aparece em todo o currículo do Ensino Médio (PERNAMBUCO, 2012a), embora, com maior intensidade no 1º ano desta etapa de ensino. Cabe ressaltar que nos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012b, p. 23), “o currículo – stricto sensu – foi tomado como sendo um conjunto de conhecimentos, habilidades e competências, traduzido em expectativas de aprendizagem¹⁶”.

¹⁶ Com a homologação da nova Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2019) esta nomenclatura foi modificada para o termo “habilidades”, entretanto, até o momento da escrita desse capítulo – março de 2021, o currículo do Ensino Médio do estado de Pernambuco ainda não havia sido atualizado, mantendo a nomenclatura aqui utilizada.

Implicitamente, esse documento concebe o currículo em sua forma espiral, conforme concebido pelo psicólogo Jerome S. Bruner (com influência piagetiana), a partir da década de 1960, nos Estados Unidos da América – EUA, segundo o qual é possível ensinar qualquer assunto, de uma maneira honesta, a qualquer indivíduo, em qualquer estágio de desenvolvimento, desde que se leve em consideração suas diversas etapas de desenvolvimento intelectual.

Esse modelo espiral consiste na apresentação de conceitos básicos que são ensinados em um primeiro momento e depois retomados, no mesmo ano ou em diferentes anos de escolaridade, sempre aumentando o nível de aprofundamento, complexidade e modos de representação. De acordo com esse modelo de ensino, os estudantes primeiramente aprendem “o básico” sobre um conteúdo, e depois passam a revisá-lo e incorporar outros conhecimentos mais complexos sobre esse conteúdo, como em uma espiral, conforme ilustrado na figura 7.



Fonte: Psicologia Explicada (2022)¹⁷.

Segundo essa lógica, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012a) estabelecem as expectativas de aprendizagem para os estudantes, ano a ano, em todas as etapas da Educação Básica: anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e modalidade de Educação de Jovens e

¹⁷ Disponível em: <<http://www.psicologiaexplica.com.br/jerome-bruner>>. Acesso em: 05 fev. 2022.

Adultos. Para esclarecer o sentido da expressão expectativas de aprendizagem, este documento apresenta três argumentos relevantemente significativos a favor da adoção da expressão:

(i) ressignificação da perspectiva de currículo ainda vigente, de uma lista de conteúdos, habilidades e competências; (ii) compreensão de currículo como percurso formativo que implica tempos necessários para aprendizagens significativas; (iii) expectativas de aprendizagem como expectativas de “direito à aprendizagem”, em termos de “capital” cultural, científico, histórico, tecnológico, estético, moral (PERNAMBUCO, 2012b, p. 27).

Nessa perspectiva, as expectativas de aprendizagem referentes ao estudo da Função Afim estão distribuídas no currículo ao longo dos três anos dessa etapa de ensino, de forma que o conceito é visto, revisitado e aprofundado a cada ano do Ensino Médio, defendendo ainda que seu ensino ocorra de forma a não privilegiar “algebrismos”, mas de forma que leve o estudante a estabelecer relações qualitativas entre aspectos do seu cotidiano e outras áreas de conhecimento, como a Física, a Biologia e a Química.

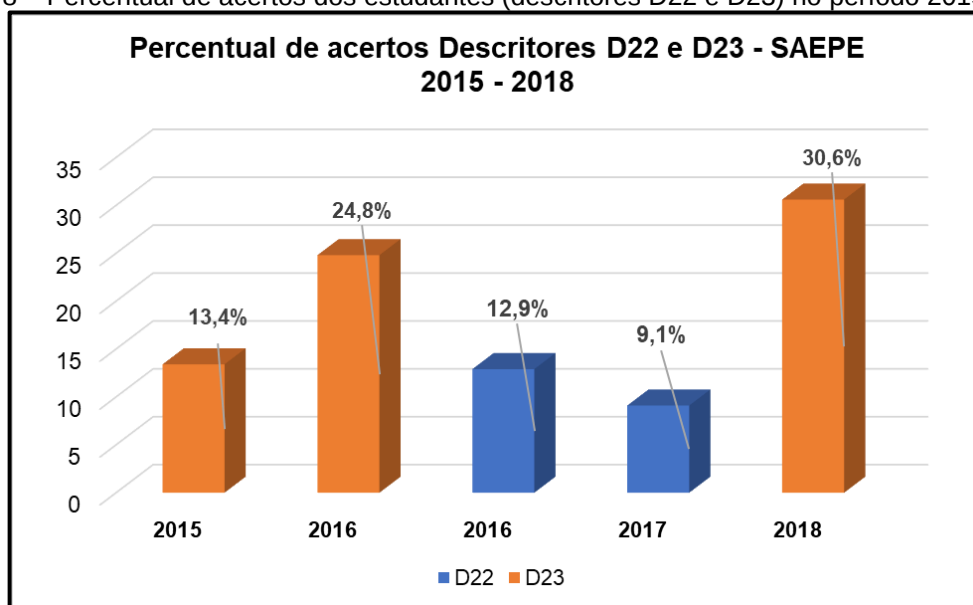
Considerando as avaliações em larga escala, tanto o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, do Governo Federal, quanto o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE, agrupam os conteúdos da matriz curricular ou da Base Nacional Comum Curricular (no caso atual do SAEB) em descritores, os quais compõem a denominada Matriz de Referência. De forma simplificada, podemos dizer que os descritores associam o conteúdo curricular às operações cognitivas, indicando quais as habilidades que serão avaliadas em cada item da avaliação. A Matriz de Referência traz o conjunto de todos os descritores que poderão ser avaliados nestas avaliações por meio dos seus itens.

No caso específico da matemática do 3º ano do Ensino Médio, ambas as matrizes contemplam um total de 35 descritores os quais divergem apenas em termos da ordem em que aparecem em uma e outra matriz. Particularmente, o SAEPE avalia as habilidades desenvolvidas pelos estudantes no tocante ao conceito de Função Afim em 03 descritores (conforme Anexo A), os quais contemplam um conjunto de habilidades que são esperadas que os estudantes desta etapa de ensino tenham consolidado quando da realização da avaliação. Entretanto, os resultados dessa avaliação têm mostrado que, embora haja uma melhora significativa no desempenho apresentado pelos estudantes do 3º ano do Ensino Médio em termos gerais, esses

ainda apresentam dificuldades em alguns dos descritores que abordam o estudo das funções e, particularmente da Função Afim.

Os resultados apresentados pelos estudantes do 3º ano do Ensino Médio da rede estadual de ensino de Pernambuco, nas avaliações do SAEPE, matemática, têm apresentado um avanço em termos de proficiência média a cada ano. Entretanto, ainda encontramos um percentual elevado de estudantes que não consolidaram alguns dos conhecimentos acerca do conceito de Função Afim. Dados da Secretaria Estadual de Educação (obtidos via e-mail, conforme já mencionado), compreendidos no período de 2015 a 2018 (período ao qual tivemos acesso a esses dados), apresentam uma oscilação em relação ao percentual de acerto dos estudantes avaliados neste período em relação aos descritores D22 – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes e D23 – Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico ou vice-versa, que avaliam habilidades inerentes ao estudo da Função Afim. A figura 8 apresenta os referidos percentuais.

Figura 8 – Percentual de acertos dos estudantes (descritores D22 e D23) no período 2015 – 2018



Fonte: Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco¹⁸.

Pelos dados da figura 8, percebemos que o percentual de acertos em relação ao descritor D23 aumentou gradualmente em relação aos anos de 2015, 2016 e 2018. Entretanto, ainda é um percentual que suscita preocupação haja vista que, mesmo

¹⁸ No ano de 2016, a avaliação do SAEPE foi realizada em dois momentos, com provas distintas (por isso aparece duplamente no gráfico desta figura), pois, naquele ano, um movimento de protestos e ocupação de escolas da rede estadual impediram a aplicação da prova em um único dia.

quando do maior percentual (pouco mais de 30%), ainda revela um percentual bastante elevado (quase 70%) de estudantes que não consolidaram as habilidades avaliadas neste descritor, fato que nos inquieta e nos instiga a pesquisar sobre o tema.

É pertinente destacar que, não necessariamente, ambos os descritores são avaliados todos os anos conforme mostra o gráfico da figura 8: em 2015, 2016 e 2018 foram avaliadas situações inerentes ao descritor D23; enquanto que nos anos de 2016 (2ª edição da prova realizada) e 2017 foram avaliadas situações referentes ao descritor D22.

4.2 O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: ELEMENTOS MATEMÁTICOS

O conceito de função passou por diversas modificações ao longo da história da humanidade. É uma concepção importante para o desenvolvimento tanto de outras ciências como de outras áreas da própria matemática, como o cálculo e a análise, por exemplo, daí “considerado um dos mais importantes de toda a Matemática” (PONTE, 1990, p. 03). Esse conceito tem aplicações em várias áreas do conhecimento, mas foi nas ciências naturais que teve sua origem, sendo pois o modelo próprio para o estudo das leis naturais (CARAÇA, 1984). Assim, conforme já visto anteriormente, o conceito de função está relacionado a duas características essenciais da Realidade: a interdependência e a fluência; e o cerne desse conceito está na correspondência unívoca entre as variáveis envolvidas na relação, e que permitem traduzir a interdependência e a fluência presentes na Realidade (CARAÇA, 1984).

Vazquez, Rey e Boubée (2008), em estudo bibliográfico que buscou analisar os processos históricos do desenvolvimento do conceito de função, apresentam um panorama do desenvolvimento desse conceito ao longo dos séculos, em três períodos históricos: Tempos Antigos, Idade Média e Período Moderno. O quadro 7 apresenta um pequeno resumo sobre as definições desse conceito, apontadas pelos autores, entre os séculos XVII e XIX.

Quadro 7 – Definições de funções ao longo dos séculos

Época	Definição
Século XVII	Qualquer relação entre variáveis.
	Uma quantidade obtida de outras quantidades mediante operações algébricas ou qualquer outra operação imaginável.

	Qualquer quantidade que varia de um ponto a outro em uma curva.
	Quantidades formadas usando expressões algébricas e transcendentais de variáveis e constantes.
Século XVIII	Quantidades que dependem de uma variável.
	Função de algumas variáveis, como quantidade, que é composta, de alguma forma, de variáveis e constantes.
	Qualquer expressão útil para calcular.
Século XIX	Correspondência entre variáveis.
	Correspondência entre um conjunto A e os números reais.
	Correspondência entre os conjuntos.

Fonte: Vazquez; Rey; Boubée, (2008, p. 153).

O quadro 7 apresenta uma síntese das definições que o conceito de função recebeu ao longo dos séculos, segundo transformações sofridas de acordo com as necessidades de cada época, mostrando que o desenvolvimento histórico desse conceito se constituiu num processo longo e delicado (PONTE, 1990).

Nos subtópicos 4.2.1 a 4.2.6, apresentamos a definição de Função Afim e alguns conceitos básicos diretamente ligados a esse tipo de função. Apoiamo-nos em autores como: Ávila (2007); Lima *et al.* (2012); Dante (2013, 2016); Iezzi e Murakami (2013); Iezzi *et al.* (2016); Souza e Garcia (2016); e Smole e Diniz (2016) para fundamentar a nossa discussão.

Esses autores, escolhidos para embasar tais subtópicos, possuem consolidado papel no contexto de produção de livros didáticos brasileiros. Dentre eles, uns dedicados ao ensino de matemática na etapa do Ensino Médio (DANTE, 2013, 2016; IEZZI *et al.*, 2016; SOUZA; GARCIA, 2016; SMOLE; DINIZ, 2016) e outros, no Ensino Superior (ÁVILA, 2007; LIMA *et al.*, 2012; IEZZI; MURAKAMI, 2013). Dessas obras, aquelas direcionadas ao Ensino Médio são todas participantes do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, edições 2015 (DANTE, 2013; IEZZI *et al.*, 2016) e 2018 (DANTE, 2016; SOUZA; GARCIA, 2016; SMOLE; DINIZ, 2016) e foram/são bastante utilizadas em diversas redes públicas de ensino do país.

Aquelas dedicadas ao Ensino Superior, também são frequentemente utilizadas como referência básica para o ensino de matemática elementar em cursos de licenciatura em matemática de instituições públicas e privadas de Ensino Superior do Brasil.

4.2.1 Definição matemática da Função Afim

Nesse trabalho, adotamos a definição de Função Afim proposta por Souza e Garcia (2016) que se coaduna com a de Lima *et al.* (2012). Para Souza e Garcia (2016, p. 75):

Uma função $f: R \rightarrow R$, que a todo número $x \in R$ associa o número $ax + b$, com a e b reais, é chamada de Função Afim.

$$x \rightarrow ax + b$$

$$f(x) = ax + b$$

Dizemos que a e b são os coeficientes da função.

Dizendo de outra maneira, Lima *et al.* (2012, p. 101) apresentam a seguinte definição para a função afim: “Uma função $f: R \rightarrow R$ chama-se Afim quando existem constantes a e $b \in R$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in R$ ”. Ou seja, a Função Afim é uma função real, isto é, tem domínio e contradomínio no conjunto dos números reais (R). O domínio é o conjunto de todas as entradas possíveis da função, ou seja, é o conjunto dos valores da variável independente “ x ” para os quais a função é definida; o contradomínio é o conjunto dos valores que a variável dependente “ $y = f(x)$ ” pode assumir.

Ao conjunto de todos os valores assumidos pela função “ f ” para todos os possíveis valores de “ x ”, é chamado de conjunto imagem de f , e está contido em seu contradomínio. Os coeficientes “ a ” e “ b ” são chamados costumeiramente nos LD do Ensino Médio de “coeficiente angular” e “coeficiente linear”, respectivamente.

O coeficiente angular, nessa perspectiva, é associado à inclinação da reta que representa o gráfico da função, em relação ao eixo “ x ” do plano cartesiano, e o coeficiente linear corresponde ao ponto de intersecção do gráfico dessa função com o eixo “ y ”, ou seja, ao par $(0, b)$. Entretanto, conforme Lima *et al.* (2012), é mais correto denominar o coeficiente “ a ” de taxa de variação da função, ou taxa de crescimento, haja vista que “não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado” (LIMA *et al.*, 2012, p. 106) e o coeficiente “ b ” de termo constante da função.

4.2.2 Taxa de Variação e Declividade da Função Afim

Sobre a taxa de variação da Função Afim, Dante (2016, p. 76) assim a define:

Dados x e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, e a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, sua taxa de variação média em relação a x é dada pelo número:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ax+ah+b-ax-b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Portanto, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$.

Assim, a taxa de variação da Função Afim não depende do intervalo escolhido, ela é constante para qualquer intervalo do domínio e, numericamente, igual ao coeficiente “ a ”. O fato de a taxa de variação da Função Afim ser constante, significa que, para acréscimos iguais na variável “ x ” correspondem acréscimos iguais na variável $f(x)$. Desse fato decorre que uma Função Afim será **crescente**, ou seja, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, quando sua taxa de variação “ a ” for positiva ($a > 0$); **decrescente**, isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, quando a taxa de variação “ a ” for negativa ($a < 0$) e **constante** quando a taxa de variação for nula ($a = 0$).

4.2.3 Casos particulares de Função Afim

De acordo com os valores reais assumidos pelos termos a e b , podemos classificar a Função Afim em casos particulares. Assim, quando uma Função Afim possui o termo “ b ” igual a zero, dizemos que ela é uma **função linear**, e será do tipo $f(x) = ax$. A função linear é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade pois, os problemas que envolvem proporcionalidade, em geral, podem ser resolvidos por meio de uma função linear (DANTE, 2013, 2016; LIMA et al., 2012). Em particular, uma função linear será chamada de **função identidade** quando o coeficiente “ a ” for igual a 1, ou seja, $a = 1; b = 0 \Rightarrow f(x) = x$.

Quando tivermos uma Função Afim em que o coeficiente “ a ” seja igual a zero, essa será chamada de **função constante** e será do tipo $f(x) = b$, com “ b ” real.

4.2.4 Zero da Função Afim

O zero da Função Afim é obtido, algebricamente, por meio de tratamentos adequados realizados na expressão algébrica que representa essa função. Dessa forma, sendo “ $f(x) = ax + b$ ” uma Função Afim genérica, determinar o zero dessa função consiste em encontrar o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Daí, temos: $f(x) =$

$0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Logo, o valor $x = -\frac{b}{a}$ corresponde ao zero dessa função. Por exemplo: sendo $f(x) = -5x + 12$ uma Função Afim ($f: R \rightarrow R$), o zero dessa função será:

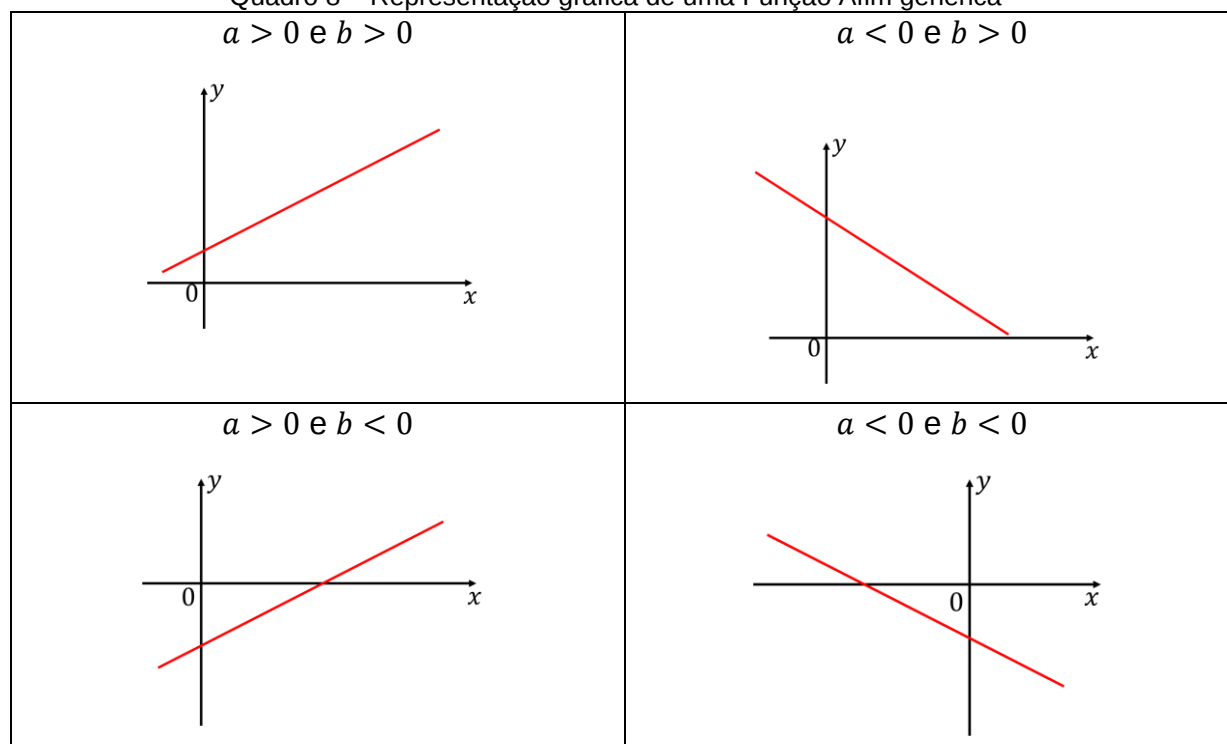
$$f(x) = 0 \Rightarrow -5x + 12 = 0 \Rightarrow -5x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-5} \Rightarrow x = 2,4.$$

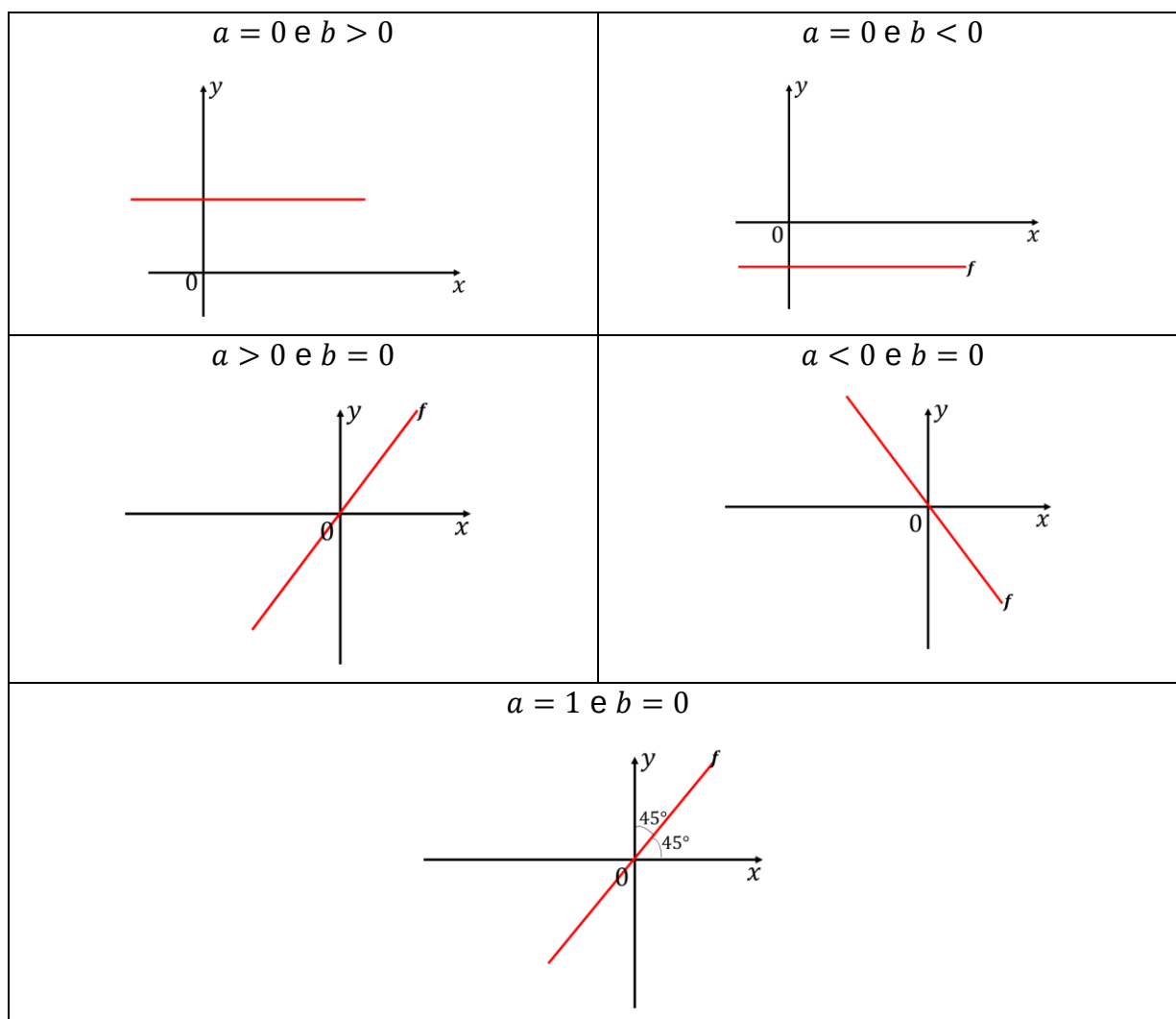
Ou seja, “2,4” é o zero da função e corresponde ao par (2,4; 0) no plano cartesiano. Costuma-se tratar em sala de aula, assim como em diversos livros didáticos, o zero da Função Afim como raiz dessa função, no entanto, conforme Lima *et al.* (2012), quem tem raiz é equação, função tem zero.

4.2.5 Gráfico da Função Afim

O gráfico de uma Função Afim, $f: R \rightarrow R$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in R$, isto é, a representação dessa função no registro gráfico, é uma reta oblíqua aos eixos x (eixo das abscissas) e y (eixo das ordenadas). O aspecto dessa reta será ascendente (no sentido esquerda – direita) quando a função for crescente; uma reta descendente (no sentido esquerda – direita) quando a função for decrescente e uma reta paralela ao eixo x quando a função for constante. No quadro 8, exemplos de representações gráficas da Função Afim tomada genericamente.

Quadro 8 – Representação gráfica de uma Função Afim genérica





Fonte: O autor (2022).

Como sabemos da geometria plana, dois pontos distintos determinam uma única reta passando por eles, assim, para construir o gráfico de uma Função Afim podemos utilizar apenas dois de seus pontos pois, basta conhecermos “os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, que a função afim $f: R \rightarrow R$ assume em dois números $x_1 \neq x_2$ (escolhidos arbitrariamente) para que f fique inteiramente determinada” (LIMA *et al.*, 2012, p. 104). Podemos pensar nessa proposição sob dois pontos de vista. Primeiro, utilizando a abordagem ponto a ponto (DUVAL, 2011a): atribuem-se valores arbitrários para a variável x , encontrando os valores de $f(x)$ e, portanto, os pontos da reta. Essa abordagem não permite uma compreensão global das propriedades figurais, conforme já visto, mas pode ser útil na construção do gráfico em algumas situações.

Segundo, fazendo uma interpretação global das propriedades figurais: analisam-se as unidades significantes da representação algébrica (como declividade, ponto de intersecção com o eixo y , zero da função) e relaciona-as aos pontos do

gráfico. Essa última é a abordagem defendida por Duval (2011a) como a mais adequada para as conversões entre representações dos registros algébrico e gráfico. De acordo com esse autor, essa abordagem favorece a compreensão global dos elementos significantes do registro algébrico e as correspondentes variáveis visuais no registro gráfico, facilitando, assim, a conversão registro gráfico → registro algébrico, não muito evidente na abordagem ponto a ponto.

Particularmente, no que se refere à conversão entre representações do registro gráfico para o algébrico, essa requer do estudante uma interpretação global das propriedades figurais por meio da correspondência entre as variáveis visuais com seus respectivos valores e as unidades simbólicas correspondentes. Duval (2011a) destaca essas variáveis visuais e as unidades simbólicas significativas correspondentes, para a Função Afim $f(x) = ax + b$, definida em R , conforme figura 9.

Figura 9 – Variáveis visuais e unidades simbólicas significativas correspondentes (Função Afim $f(x) = ax + b$)

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval (2011a, p. 101).

No exemplo a seguir, quadro 9, propomos a construção do gráfico da função $f: R \rightarrow R$ dada no registro algébrico pela expressão $f(x) = 2x - 9$, ou seja, a conversão RA → RG, considerando as duas abordagens mencionadas.

Quadro 9 – Exemplo de conversão RA → RG, considerando as abordagens “ponto a ponto” e “interpretação global das propriedades figurais”

Abordagem ponto a ponto	Abordagem global
$f(x) = 2x - 9$ - Para $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1) - 9 = -11$. - Para $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot 0 - 9 = -9$. - Para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot (1) - 9 = -7$. Ou, utilizando uma tabela como registro auxiliar:	$f(x) = 2x - 9$ Fazendo a análise a partir do registro algébrico (identificando as unidades significantes nesse registro):

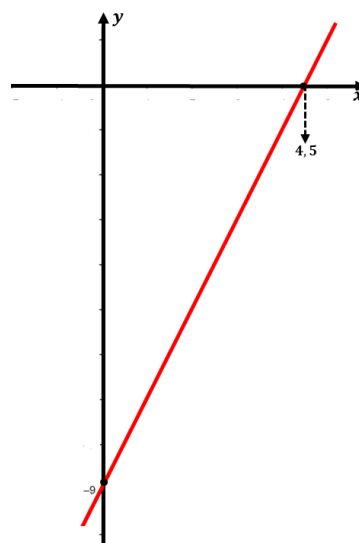
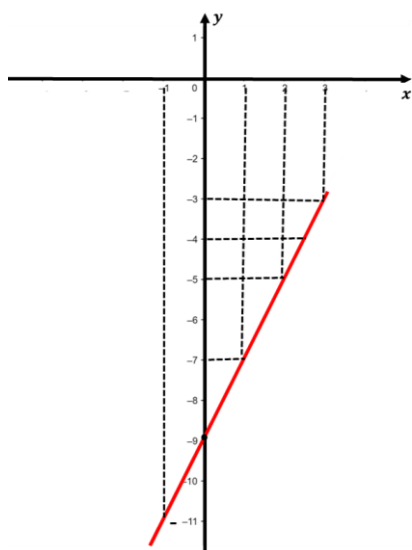
x	$y = f(x) = 2x - 9$	Par ordenado
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) - 9 = -11$	$(-1, -11)$
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 9 = -9$	$(0, -9)$
1	$y = f(1) = 2 \cdot (1) - 9 = -7$	$(1, -7)$

(1) O gráfico será ascendente pois, a taxa de variação é positiva ($a = 2 > 0$);

(2) O gráfico intercepta o eixo y na região negativa do plano cartesiano no ponto $(0, -9)$, correspondente à constante b da função dada;

(3) Para descobrir o ponto em que o gráfico intercepta o eixo x , basta determinar o zero da função:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 9 = 0 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow x = 4,5$$



Fonte: O autor (2022).

Do quadro 9, podemos observar que um dos inconvenientes da utilização da abordagem ponto a ponto pode ser a necessidade de atribuição de uma quantidade relativamente grande de pares ordenados para descobrir os dois pontos em que o gráfico intercepta os eixos coordenados. Como vimos, da geometria plana, temos que dois pontos distintos constituem uma reta, daí apenas dois seriam suficientes para a construção do gráfico. Além disso, fazer a conversão inversa ($RG \rightarrow RA$) é praticamente impossível utilizando essa abordagem pois, **“é preciso identificar cada**

um dos valores das variáveis visuais e integrá-las” (DUVAL, 2011a, p. 102, **grifo nosso**).

Segundo Duval (2011a, p. 102), para as retas não paralelas aos eixos coordenados, existem 18 representações gráficas “que são visualmente diferentes de modo significativo”, como ilustrado na figura 10.

Figura 10 – Identificação e integração, com exemplos, de 18 representações de variáveis visuais

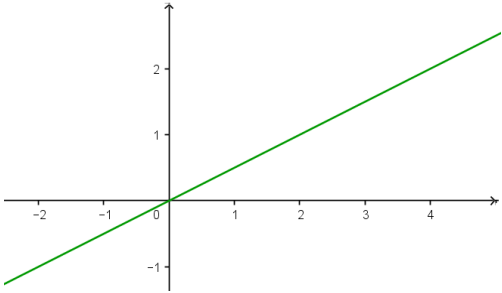
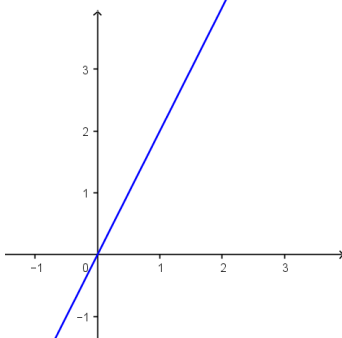
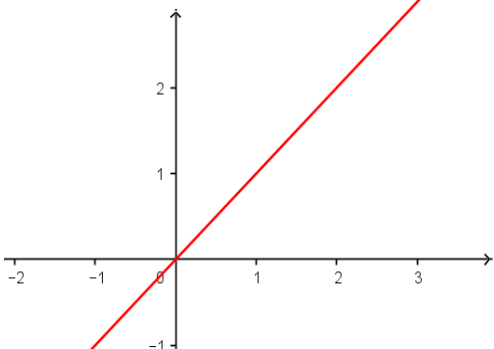
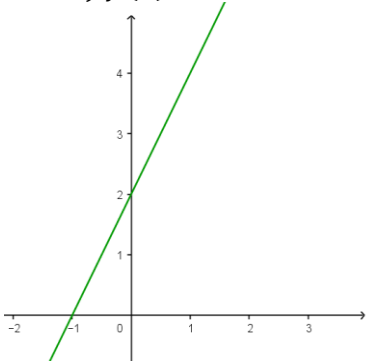
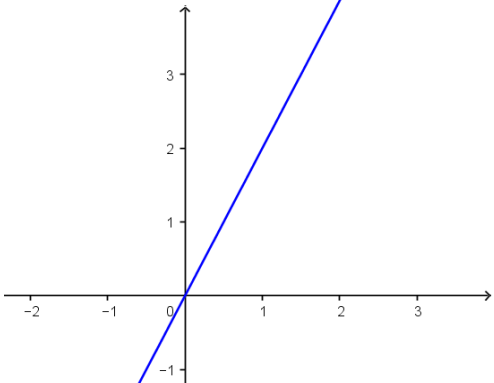
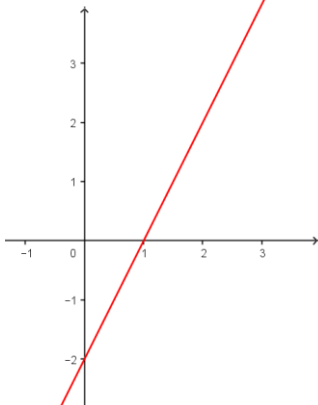
Sentido da inclinação	ângulo	Posição (da reta)	Exemplos
> 0	$= 1$	(na origem)	$y = x$
		+ (acima da origem)	$y = x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = x - 1$
	> 1	(na origem)	$y = 2x$
		+ (acima da origem)	$y = 2x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = 2x - 1$
	< 1	(na origem)	$y = (1/2)x$
		+ (acima da origem)	$y = (1/2)x + 1$
		- (abaixo da origem)	$y = (1/2)x - 1$
< 0			

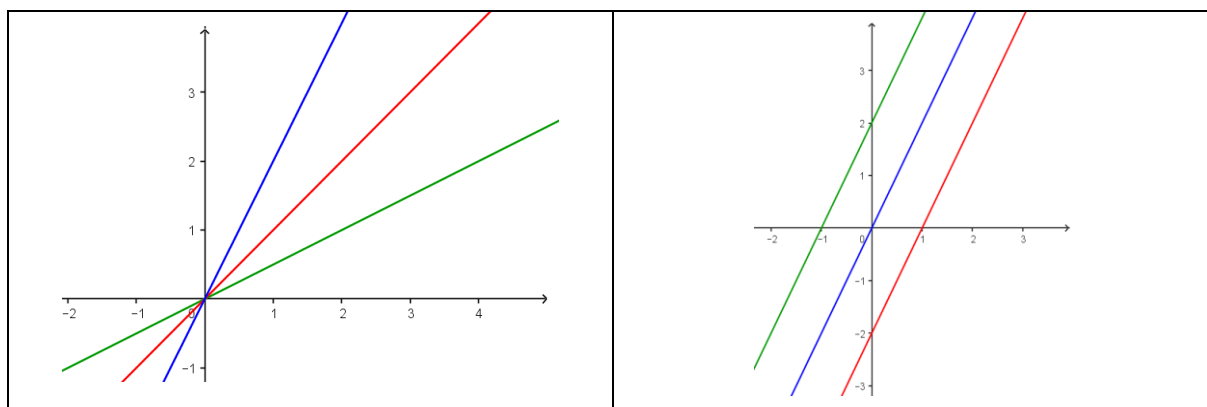
Fonte: Duval (2011a, p. 102).

A compreensão, por parte do estudante, da relação entre as unidades significantes do registro algébrico e a correspondente variável visual no registro gráfico é de suma importância para que ele possa realizar as transformações por conversão entre esses dois registros, principalmente no sentido RG $\rightarrow$ RA. De acordo com Duval (2011a, p. 103, **grifo nosso**) “**variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro** (ou mudar uma variável visual mantendo as duas outras constantes e ver as modificações que acontecem na expressão)” é uma das possibilidades de ensino que favorece tal compreensão.

Como exemplos dessa perspectiva didática, sugerimos o quadro 10 no qual consideramos apenas o caso $a > 0$ (o caso $a < 0$ é análogo). A leitura do quadro 10 deve ser feita na vertical, ou seja, em colunas.

Quadro 10 – Exemplos de variação das unidades significativas no RA e correspondente modificação visual no RG

Mantemos $b = 0$ e modificamos o coeficiente a	Mantemos a constante (nesse exemplo, tomamos $a = 2$) e modificamos o coeficiente b
I) $f(x) = \frac{1}{2}x$  A Cartesian coordinate system showing a green line passing through the origin (0,0). The x-axis is labeled from -2 to 4, and the y-axis is labeled from -1 to 2. The line has a positive slope of 0.5.	I) $f(x) = 2x$  A Cartesian coordinate system showing a blue line passing through the origin (0,0). The x-axis is labeled from -1 to 3, and the y-axis is labeled from -1 to 3. The line has a positive slope of 2.
II) $f(x) = x$  A Cartesian coordinate system showing a red line passing through the origin (0,0). The x-axis is labeled from -2 to 3, and the y-axis is labeled from -1 to 2. The line has a positive slope of 1.	II) $f(x) = 2x + 2$  A Cartesian coordinate system showing a green line with a positive slope of 2. The line intersects the y-axis at (0, 2) and the x-axis at (-1, 0). The x-axis is labeled from -2 to 3, and the y-axis is labeled from 1 to 4.
III) $f(x) = 2x$  A Cartesian coordinate system showing a blue line passing through the origin (0,0). The x-axis is labeled from -2 to 3, and the y-axis is labeled from -1 to 3. The line has a positive slope of 2.	III) $f(x) = 2x - 2$  A Cartesian coordinate system showing a red line with a positive slope of 2. The line intersects the y-axis at (0, -2) and the x-axis at (1, 0). The x-axis is labeled from -1 to 3, and the y-axis is labeled from -2 to 3.
I, II e III no mesmo plano cartesiano	I, II e III no mesmo plano cartesiano



Fonte: O autor (2022).

No quadro 10 não existe relação entre as cores nas linhas, mas apenas nas colunas, as quais foram utilizadas para facilitar a visualização das modificações sofridas no registro gráfico quando alteradas as unidades significativas no registro algébrico. Analisando o quadro 10, podemos observar que o coeficiente a recobre duas unidades significativas diferentes no registro algébrico (DUVAL, 2011a), uma definida em relação ao sinal e a outra em relação ao inteiro 1, que correspondem a duas variáveis visuais importantes no registro gráfico, que são, respectivamente, o sentido da inclinação e o ângulo formado entre a reta e o eixo x .

Essa conversão tem um custo cognitivo maior haja vista que não existe congruência entre as unidades significativas no registro algébrico e as variáveis visuais no registro gráfico, “uma vez que para qualquer valor do coeficiente dado [...] é necessário destacar duas propriedades distintas relativamente ao 0 e ao 1” (DUVAL, 2011a, p. 102).

No que se refere à unidade significativa “ b ” (intercepto da reta representativa da função no registro gráfico com o eixo y), essa corresponde à translação do gráfico da função linear $f(x) = ax$, no eixo y . Assim, o gráfico da Função Afim $f(x) = ax + b$, corresponde ao gráfico da função linear $f(x) = ax$, transladado b unidades para cima, no eixo y , se $b > 0$ (+2, duas unidades para cima no caso II do quadro 10) e b unidades para baixo, em valores absolutos, se $b < 0$ (2, duas unidades para baixo no caso III do quadro 10).

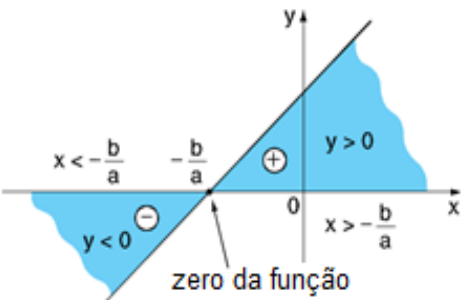
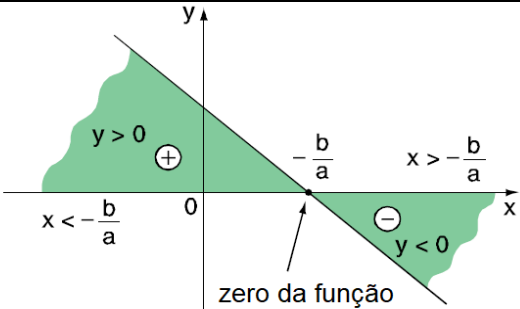
4.2.6 Estudo do sinal da Função Afim

Fazer o **estudo do sinal** da Função Afim significa descobrir os valores de x para os quais $ax + b < 0$ ou $ax + b > 0$ num dado intervalo. Quando as abscissas x_0

determinam $f(x_0) > 0$, dizemos que a função f é positiva nesse intervalo; quando as abscissas x_0 determinam $f(x_0) < 0$, dizemos que a função f é negativa nesse intervalo.

Graficamente, fazer o estudo do sinal da Função Afim corresponde a identificar os pontos do gráfico situados acima do eixo x e, nesse caso, dizemos que a função f é positiva nesse intervalo; e os pontos do gráfico situados abaixo do eixo x e, nesse caso, dizemos que a função f é negativa nesse intervalo. No quadro 11 ilustramos o estudo do sinal da Função Afim genérica, tanto no registro algébrico quanto no registro gráfico.

Quadro 11 – Estudo do sinal da Função Afim

i) $a > 0$ (função crescente)	ii) $a < 0$ (função decrescente)
	

Fonte: Adaptado de lezzi et al. (2016).

De acordo com o quadro 11, temos que: no caso i), $y > 0$ quando $x > -\frac{b}{a}$, $y < 0$ quando $x < -\frac{b}{a}$; no caso ii), $y > 0$ quando $x < -\frac{b}{a}$, $y < 0$ quando $x > -\frac{b}{a}$. Em ambos os casos, conforme já visto, $y = 0$ quando $x = -\frac{b}{a}$ (o zero da função). Graficamente, o estudo do sinal da Função Afim $f(x) = ax + b$ é representado pelas regiões hachuradas em cada caso (quadro 11).

Além de todas as características apresentadas ao longo desse subtópico, destacamos ainda que a Função Afim é uma função **bijetiva ou uma correspondência biunívoca**, isto é, ela é injetiva, ou seja, a valores distintos do domínio correspondem valores também distintos na imagem; e sobrejetiva, isto é, o conjunto imagem é igual ao contradomínio; simultaneamente. Por ser uma função bijetiva, a Função Afim também é uma função invertível, isto é, admite uma **função inversa**. Dessa forma, sendo f uma função afim, $f^{-1} = g$ será a sua inversa se, para todo $x \in D(f)$ e $y \in Im(f)$ tal que $f(x) = y$, tivermos $g(y) = x$.

Concordamos com Lima *et al.* (2012) ao defenderem o inconveniente de se trabalhar o conceito de função (aqui, de forma particular a Função Afim) a partir da definição que toma esse conceito como relação de um produto cartesiano $X \times Y$. De acordo com esses autores “essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a ideia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de um movimento” (LIMA *et al.*, 2012, p. 95).

Concordamos também com esses autores no que se refere à incorreção da nomenclatura que trata a Função Afim como “função do primeiro grau”. Para eles, “essa nomenclatura sugere a pergunta: o que é o grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio. (Quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau.)” (LIMA *et al.*, 2012, p. 117). O uso adequado de terminologias se constitui como necessário aos contextos da sala de aula de matemática para a compreensão dos conceitos estudados.

O próximo capítulo dedica-se à revisão sistemática de literatura sobre a Função Afim, em pesquisas desenvolvidas entre os anos de 2010 e 2020, que utilizaram como aportes teóricos o CD (ou a TSD, com ênfase no CD), a TRRS ou ambas as teorias.

5 REVISÃO DE LITERATURA

Esse capítulo dedica-se à revisão sistemática de literatura realizada em um banco de teses e dissertações brasileiro, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD; em revistas *online* de considerável impacto na área de ensino (Qualis A1, A2 e B1); na plataforma *Springer Link* e nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM e do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM. Nessa revisão, traçamos um panorama das pesquisas que investigaram sobre o ensino e a aprendizagem da Função Afim, tendo como aporte teórico o Contrato Didático (ou a teoria das Situações Didáticas com foco nesse fenômeno), a teoria dos Registros de Representação Semiótica ou ambas as teorias.

5.1 O CENÁRIO DAS PESQUISAS SOBRE FUNÇÃO AFIM: UM RECORTE

Com o objetivo de identificar algumas pesquisas já realizadas, tanto no Brasil quanto em outros países, sobre o ensino e a aprendizagem da Função Afim e a maneira como estas pesquisas abordaram a temática, realizamos uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD; em revistas *online* de considerável impacto na área de ensino, segundo a avaliação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior – CAPES (Qualis, quadriênio 2013-2016)¹⁹, na plataforma *Springer Link* e em anais de dois dos principais eventos de pesquisas em Educação Matemática no Brasil: o ENEM e o SIPEM.

Os critérios observados para a escolha dos bancos de dados consultados foram: i) no caso da BDTD; integrar os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e pesquisa do Brasil; ii) para os periódicos, pertencer à área de Educação Matemática, ter classificação na última avaliação Qualis periódicos CAPES A1, A2 ou B1 e, possuir acesso *online*; iii) para a *Springer Link*;

¹⁹ O Qualis CAPES é um sistema de classificação da produção científica brasileira, segundo critérios de impacto no meio acadêmico. Até essa edição, a classificação foi dividida nos seguintes conceitos, em ordem decrescente de relevância: A1 e A2 (periódicos de excelência internacional); B1 e B2 (periódicos de excelência nacional); B3, B4 e B5 (periódicos de média relevância) e C (periódicos considerados não científicos e, portanto, não avaliados). Esse sistema de avaliação está em processo de atualização, entretanto, até a escrita desse texto (set./2022) ainda não havia sido publicada essa atualização na Plataforma Sucupira, sistema de coleta de informações, análises e avaliações a serem utilizadas como base padronizadora do Sistema Nacional de Pós-Graduação brasileira.

fornecer acesso a muitos documentos científicos de forma *online*, integrando livros, periódicos, dentre outros, em vários idiomas; iv) para os eventos; pertencer à área de Educação Matemática, ser organizados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM.

A BDTD integra, em um único portal, os sistemas de informação de teses e dissertações existentes no Brasil, disponibilizando-as em um catálogo nacional cuja coleta e disponibilização dos metadados (título, autor, resumo, palavra-chave etc.) é organizada pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia – IBICT, entretanto, o documento original permanece na instituição de defesa. A plataforma *Springer Link* oferece acesso a uma gama de publicações científicas em formato digital: livros, revistas, manuais, dentre outros; em vários idiomas. O acesso a essa plataforma pode se dar por meio do pacote de serviços institucionais ofertados pela instituição de ensino superior, em nosso caso, a Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (essa foi a forma por nós utilizada).

O ENEM é um evento de Educação Matemática em âmbito nacional cuja primeira edição foi realizada em 1987, organizado pela SBEM, e agrega o universo dos segmentos envolvidos com a Educação Matemática: professores da educação básica, professores e estudantes das licenciaturas em matemática e em pedagogia, professores e estudantes da Pós-Graduação e pesquisadores.

O SIPEM é um evento que busca promover o intercâmbio entre grupos de diferentes países que se dedicam às pesquisas na área da Educação Matemática, divulgando as pesquisas brasileiras e promovendo a discussão entre os pesquisadores que a elas se dedicam. Este evento também é organizado pela SBEM e teve sua primeira edição realizada no ano 2000.

Quanto ao conjunto de periódicos consultados, devido à sua quantidade, sintetizamos seus dados no quadro 12, ordenados por ordem decrescente de Qualis, com: nome/sigla do periódico, ano de criação/primeira publicação e Qualis CAPES atual.

Quadro 12 – Periódicos consultados na revisão de literatura em ordem de conceito obtido na avaliação Qualis CAPES, quadriênio 2013-2016

Nome do Periódico/sigla	Ano de criação/ primeira publicação	Qualis CAPES atual (avaliação 2013-2016)
Boletim de Educação Matemática – BOLEMA	1985	A1
For the Learning of Mathematics	1981	A1
Zetetiké	1993	A2
Revista de Educação, Ciências e Matemática – RECM	2011	A2
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas – AMAZÔNIA	2005	A2
Educação Matemática Pesquisa – EMP	1999	A2
Educação Matemática em Revista – EMR	1993	A2
Educação Matemática em Revista SP	1993	A2
Educação Matemática em Revista RS	1999	A2
Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM	2009	A2
Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática – PNA	2006	A2
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME	2003	A2
Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT	2006	A2
Praxis & Saber – Revista de Investigación y Pedagogía	2010	A2
Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática	2005	B1
Revista Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias	2006	B1
Perspectivas da Educação Matemática	2008	B1
Revista Paranaense de Educação	2012	B1

Matemática – RPEM		
Boletim <i>online</i> de Educação Matemática – BoEM	2013	B1
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – EM TEIA	2010	B1
Journal of Humanistic Mathematics	2011	B1

Fonte: O autor (2022).

Inicialmente, utilizamos como parâmetro de busca os termos “semiótica” e “contrato didático”, nos idiomas: língua portuguesa, espanhol, inglês e francês; considerando o período de 2010 a 2020, década anterior ao início de escrita dessa tese. Como o nosso intuito era identificar as pesquisas que abordaram o objeto matemático Função Afim como objeto de pesquisa, restringimo-nos a identificar, dentre os resultados apontados pelas plataformas, aqueles trabalhos que abordaram tal objeto. No total, vinte e cinco (25) trabalhos foram selecionados sendo: 21 cujo aporte teórico utilizado foi a TRRS (12 deles identificados na BDTD; um na REVEMAT; um na RPEM; um na Unión; seis nos Anais do ENEM); três cujo aporte teórico foi o CD/TSD (dois identificados na BDTD e um nos Anais do ENEM) e um que utilizou a TRRS e o CD/TSD (identificado na BDTD).

Os próximos três subtópicos (5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3), apresentam um detalhamento maior acerca dos trabalhos identificados, segundo a fundamentação teórica utilizada, com uma breve discussão sobre cada um deles. Iniciaremos cada um desses subtópicos apresentando um quadro (quadros 13, 14 e 15, respectivamente) no qual listamos todos os trabalhos correspondentes, ordenados em ordem decrescente de ano de publicação (e alfabeticamente por sobrenome do autor (primeiro autor, quando múltiplos) no caso em que há mais de um trabalho por ano), contendo: Autor/es, título e ano de publicação.

5.1.1 Análise dos aspectos metodológicos de pesquisas relacionadas à Função Afim com aporte teórico no CD/TSD

Nesse subtópico, apresentamos uma discussão acerca dos três trabalhos identificados que utilizaram o CD (ou a TSD, tendo o CD como um dos elementos de análise) como fundamentação teórica. No quadro 13 listamos esses trabalhos,

ordenados em ordem decrescente de ano de publicação e, alfabeticamente por sobrenome do autor (primeiro autor, quando múltiplos) no caso em que há mais de um trabalho por ano.

Quadro 13 - Trabalhos que pesquisaram sobre a Função Afim utilizando o CD como referencial teórico

Autor/es	Título	Ano
ELOI, Quércia Carvalho.	Relações entre o Contrato Didático potencial (CDP) proposto na abordagem do livro didático e o Contrato Didático estabelecido entre professor e alunos quando se tem o saber Função Afim em cena em uma turma de 1º ano do Ensino Médio	2019
MATOS FILHO, Maurício Ademir Saraiva de.	Análise de uma sequência didática para o ensino de funções polinomiais do 1º e 2º graus instrumentalizada por uma ferramenta computacional: possibilidades e dificuldades	2010
MATOS FILHO, Maurício Ademir Saraiva de; MENEZES, Josinalva Estácio.	Como os alunos do Ensino Médio estão construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus	2010

Fonte: O autor (2022).

Dentre os trabalhos que utilizaram o CD como aporte teórico (quadro 13), dois foram dissertações publicadas na BDTD (ELOI, 2019; MATOS FILHO, 2010) e um artigo publicado nos anais do X ENEM (MATOS FILHO; MENEZES, 2010). Esses trabalhos são resultados de pesquisas desenvolvidas no Ensino Médio, mais especificamente no 1º ano dessa etapa de ensino, sendo que um deles (ELOI, 2019) também utilizou análise de livros didáticos e outro (MATOS FILHO, 2010) utilizou um software educacional como ferramenta pedagógica de apoio.

Destes trabalhos, apenas Eloi (2019) utilizou de forma direta o CD como referencial teórico para discussão e análise dos dados. Matos Filho (2010) e Matos Filho e Menezes (2010) utilizaram como referencial teórico a TSD, sendo o CD discutido de forma secundária. Enquanto Eloi (2019) buscou analisar as relações entre o Contrato Didático potencial, entendido pela autora como aquele “prescrito” pelo livro didático e cuja definição compreende os elementos contratuais já discutidos na

literatura; Matos Filho (2010) e Matos Filho e Menezes (2010) analisaram sequências didáticas destinadas ao ensino de funções polinomiais de 1º e 2º graus.

Em suas análises, Eloi (2019) destaca que foi identificada uma relação de aproximação entre o Contrato Didático negociado em sala de aula e o Contrato Didático potencial. Segundo a autora, esse fato foi evidenciado por meio das expectativas quanto ao trabalho com a Função Afim e a existência de regras explícitas e implícitas potenciais, indícios de efeitos de contrato e indícios de rupturas, presentes tanto no livro didático quanto no Contrato Didático estabelecido em sala de aula. Ainda segundo esta autora, embora haja essa relação de aproximação, o quantitativo de elementos de contrato potencial reproduzidos no sistema didático e evidenciados na sala de aula observada representam apenas uma pequena parcela em relação aos demais elementos contratuais, o que sugere que o Contrato Didático se institui “além” daquilo que é proposto no Contrato Didático potencial.

Por sua vez, Matos Filho (2010) analisou uma sequência didática mediada pelo uso do software *Winplot* com estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Como resultados, aponta que, ao tentar desenvolver as atividades da sequência didática, os estudantes tendem a utilizar estratégias e procedimentos com cálculos, mesmo em questões em que tal procedimento não foi solicitado, como naquelas relacionadas à interpretação gráfica, sugerindo que, para esses estudantes, o cálculo seria a única, ou mais relevante via para encontrar soluções aos problemas matemáticos.

Segundo este autor, “tal atitude parece ser resultado do Contrato Didático, firmado em situações de ensino anteriores, em que ‘um bom problema de matemática’ requer ‘um bom algoritmo’ como solução” (MATOS FILHO, 2010, p. 114). Analogamente, Matos Filho e Menezes (2010) buscaram identificar os procedimentos utilizados pelos estudantes do 1º ano do Ensino Médio na construção e na interpretação de gráficos das funções polinomiais de 1º e 2º graus utilizando lápis e papel, chegando às mesmas conclusões.

Dos três trabalhos relacionados e discutidos, constatamos que o LD tem papel fundamental no planejamento e desenvolvimento das aulas de matemática, e embora o CD não fique atrelado exclusivamente às cláusulas “prescritas” pelo Contrato Didático potencial, e que o Contrato Didático estabelecido em sala de aula tende a favorecer aspectos voltados aos algoritmos numéricos, mesmo quando a atividade proposta pelo professor não exigia isso.

5.1.2 Análise dos aspectos metodológicos de pesquisas relacionadas à Função Afim com aporte teórico na TRRS

O quadro 14 apresenta os 21 (vinte e um) trabalhos identificados que discutiram sobre a Função Afim utilizando a TRRS como aporte teórico.

Quadro 14 - Trabalhos que pesquisaram sobre a Função Afim utilizando a TRRS como referencial teórico

Autor/es	Título	Ano
LORENCINI, Pricila Basilio Marçal.	Possibilidades inclusivas do diálogo entre videntes e alunos com deficiência visual em uma sequência didática sobre Função Afim	2019
SOTO, Marina; HERRERA, Carlos Gabriel; PEREYRA, Nora Elisa.	Coordinación de Registros de representación en el aprendizaje de la función lineal.	2019
LABURÚ, Carlos Eduardo; FARIA, Renata Aparecida de.	Coordenação e multiplicidade representacional em uma atividade de função do 1º grau.	2018
FARIA, Renata Aparecida de.	Integração multimodal e coordenação de representações semióticas em atividades de função do 1º grau.	2017
MOSSI, Shayene Vieira.	Análise discursiva das representações semióticas mobilizadas por licenciandos em matemática no ensino e na aprendizagem de funções.	2016
TOZO, Fábio Luiz Dias.	Tarefas exploratórias-investigativas para a aprendizagem de Função Afim.	2016
BATISTA, Rogério Cardoso.	Um estudo de representação de Função Afim em uma perspectiva de articulação entre matemática e física.	2015
CARDOSO, Mikaelle Barboza.	Múltiplas representações semióticas no ensino de Função Afim: enfoque na formação inicial de professores de matemática.	2015

MENESES, Leonel Ricardo Machado.	Representações mobilizadas nas turmas de 1º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe no ensino de Função Afim e quadrática.	2014
SALIN, Eliana Bevilacqua.	Matemática dinâmica: uma abordagem para o ensino de Funções Afim e quadrática a partir de situações geométricas.	2014
ALMEIDA, Dionara Freire de.	representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem da Função Afim com uso do software GeoGebra.	2013
BRANDL, Eduardo; RAMOS, Elenita Eliete de Lima.	As funções polinomiais do 1º e 2º graus sob a perspectiva da teoria das representações semióticas de Raymond Duval.	2013
CARDOSO, Mikaelle Barboza; SANTANA, Larissa Elfisia de Lima; SILVA, Silvana Holanda da; FERREIRA, Maria Ariadla de Souza.	Função Afim: uma análise dos procedimentos de conversão de alunos do 2º ano do Ensino Médio.	2013
FONSECA, Vilmar Gomes da; NUNES, Wallace Vallory; SILVA, André Luiz Souza; DIONYSIO, Renata Barbosa.	Função Afim: um estudo das representações semióticas das soluções de questões por alunos da 1ª série do Ensino Médio.	2013
FREIRE, Bruno Luiz; PIRES, Rogério Fernando.	O conceito de função nos cadernos do professor e do aluno da rede estadual de ensino de São Paulo: uma análise à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.	2013
LENARTOVICZ, Ilizete	Aplicação da Teoria dos Registros de	

Gonçalves.	Representação Semiótica de Raymond Duval no estudo de funções polinomiais do 1º grau no curso de administração.	2013
MAGGIO, Deise Pedroso; SOARES, Maria Arlita da Silveira; NEHRING, Cátia Maria.	Registros de Representação Semiótica da Função Afim: análise de livros didáticos de matemática do Ensino Médio.	2010
REIS, Adinilson Marques	Uma proposta dinâmica para o ensino de Função Afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do Ensino Médio.	2011
DELGADO, Carlos José Borges.	O ensino da Função Afim a partir dos Registros de Representação Semiótica.	2010
DELGADO, Carlos José Borges; FRIEDMANN, Clícia Valladares Peixoto; LIMA, Jacqueline de Cassia Pinheiro.	As dificuldades apresentadas por alunos do 1º ano do Ensino Médio em relação às diferentes representações da Função Afim.	2010
LUCAS, Anderson Barros	Equações e funções: descontinuidades conceituais.	2010

Fonte: O autor (2022).

Dentre os trabalhos que utilizaram a TRRS como aporte teórico (quadro 14), 12 (doze) foram dissertações publicadas na BDTD (LORENCINI, 2019; FARIA, 2017; MOSSI, 2016; TOZO, 2016; BATISTA, 2015; CARDOSO, 2015; MENESES, 2014; SALIN, 2014; ALMEIDA, 2013; LENARTOVICZ, 2013; REIS, 2011; DELGADO, 2010); 04 (quatro) foram artigos publicados nos Anais do XI ENEM (BRANDL; RAMOS, 2013; CARDOSO *et al.*, 2013; FONSECA *et al.*, 2013; FREIRE; PIRES, 2013); 02 (dois) artigos publicados nos Anais do X ENEM (DELGADO; FRIEDMANN; LIMA, 2010; LUCAS, 2010); um artigo publicado na revista Unión (SOTO; HERRERA; PEREYRA, 2019), um artigo publicado na revista RPEM (LABURÚ; FARIA, 2018) e um artigo publicado na revista REVEMAT (MAGGIO; SOARES; NEHRING, 2010).

Em análise realizada, particularmente na metodologia e resultados encontrados, identificamos que desses 21 trabalhos, 18 foram originados de pesquisas desenvolvidas em salas de aula. Dentre eles, 15 realizadas em turmas do

Ensino Médio ou equivalente; e três em turmas do Ensino Superior, duas destas últimas desenvolvidas em cursos de licenciatura em matemática e uma em um curso de administração. Três realizaram a análise de LD.

Dos 18 trabalhos desenvolvidos em sala de aula, 14 deles utilizaram intervenção didática por meio de sequências didáticas ou sequências de atividades, com ou sem o uso de softwares educacionais (LORENCINI, 2019; LABURÚ; FARIA, 2018; FARIA, 2017; MOSSI, 2016; TOZO, 2016; BATISTA, 2015; SALIN, 2014; MENESES, 2014; ALMEIDA, 2013; LENARTOVICZ, 2013; REIS, 2011; LUCAS, 2010; DELGADO, 2010; DELGADO; FRIEDMANN; LIMA, 2010); três, utilizaram testes ou questionários (SOTO; HERRERA; PEREYRA, 2019; CARDOSO *et al.*, 2013; FONSECA *et al.*, 2013) e um foi desenvolvido por meio de um curso de formação em formato de extensão (CARDOSO, 2015).

Quanto às abordagens utilizadas, categorizamos esses trabalhos em três grupos: i) investigaram sobre as diferentes representações da Função Afim, a coordenação dessas representações e suas transformações (SOTO; HERRERA; PEREYRA, 2019; LORENCINI, 2019; TOZO, 2016; BATISTA, 2015; CARDOSO, 2015; MENESES, 2014; SALIN, 2014; ALMEIDA, 2013; CARDOSO *et al.*, 2013; FONSECA *et al.*, 2013; LENARTOVICZ, 2013; REIS, 2011; DELGADO, 2010; DELGADO; FRIEDMANN; LIMA, 2010; LUCAS, 2010;); ii) investigaram sobre as diferentes representações da Função Afim, a coordenação dos registros e suas transformações, identificando as funções pedagógicas das múltiplas representações (LABURÚ; FARIA, 2018; FARIA, 2017); iii) investigou a expansão discursiva dos registros de representação mobilizados (MOSSI, 2016).

Dos trabalhos que originaram de pesquisas que realizaram análise de livros didáticos, duas delas (FREIRE; PIRES, 2013; MAGGIO; SOARES; NEHRING, 2010) o fizeram em livros de matemática do Ensino Médio e uma (BRANDL; RAMOS, 2013) analisou um livro de matemática do Ensino Fundamental e outro do Ensino Médio. Basicamente, nestes três trabalhos, os autores investigaram de que forma os LD analisados propiciam as diferentes representações da Função Afim, a coordenação dessas representações e suas transformações.

Dentre os trabalhos desenvolvidos em sala de aula e que investigaram sobre as diferentes representações da Função Afim, a coordenação dessas representações e suas transformações; os resultados apontaram para dificuldades de aprendizagem em relação ao objeto matemático Função Afim, fato observado tendo em face as

dificuldades apresentadas pelos sujeitos pesquisados em representar semioticamente o objeto matemático em, pelo menos, dois registros de representação. Tais resultados apontam para dificuldades particularmente relacionadas ao registro algébrico (SOTO; HERRERA; PEREYRA, 2019; BATISTA, 2015; TOZO, 2016; CARDOSO, 2015; MENESES, 2014; SALIN, 2014; CARDOSO *et al.*, 2013; LENARTOVICZ, 2013; REIS, 2011; DELGADO, 2010; DELGADO; FRIEDMANN; LIMA, 2010; LUCAS, 2010) e ao registro gráfico (LORENCINI, 2019; BATISTA, 2015; CARDOSO, 2015; MENESES, 2014; ALMEIDA, 2013; CARDOSO *et al.*, 2013; DELGADO; FRIEDMANN; LIMA, 2010), seja como registros de partida ou como registros de chegada.

Considerando os trabalhos cujas pesquisas foram desenvolvidas em sala de aula e que investigaram sobre as diferentes representações da Função Afim, a coordenação dessas representações e suas transformações, a pesquisa de Delgado (2010) teve por objetivo verificar quais transformações por conversão entre os diferentes registros de representação da Função Afim (língua natural, expressões algébricas, tabelas de valores e forma gráfica) os estudantes possuíam maiores dificuldades e facilidades.

Esse autor concluiu que as maiores dificuldades apresentadas pelos estudantes (embora outras tenham sido evidenciadas) estão relacionadas às conversões que envolvem a forma algébrica, sejam nas atividades de conversão da língua natural para expressão algébrica ou naquelas que envolvem a conversão da forma tabular para a algébrica. Segundo o autor, “difícilmente os alunos observam que a língua natural e a forma algébrica representam o mesmo objeto matemático” (DELGADO, 2010, p. 88).

Reis (2011) investigou as dificuldades apresentadas por estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública de São José dos Campos – SP, em relação aos conceitos de Função Afim, por meio de duas sequências de atividades, sendo uma diagnóstica inicial, seguida de outra intermediada pelo uso do software GeoGebra, baseada nos erros cometidos pelos estudantes nas atividades desenvolvidas na primeira sequência. O autor aponta que os estudantes apresentaram dificuldades de conversão para o registro algébrico partindo de qualquer dos outros registros disponíveis (língua materna, registro gráfico, registro tabular), acrescentando que algumas dessas dificuldades são advindas de outros conceitos, para além dos conceitos da Função Afim. O trabalho ainda aponta que o

uso do software imprime dinamicidade aos processos de ensino e de aprendizagem o que pode favorecer avanços nos processos cognitivos dos estudantes.

Meneses (2014) analisou as representações matemáticas mobilizadas pelos estudantes do 1º ano do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe durante o ensino das Funções Afim e quadrática. O estudo utilizou como ferramentas de levantamento de dados: uma análise no livro didático de matemática utilizado pelos estudantes; os registros dos cadernos de 04 (quatro) estudantes participantes e os protocolos de uma sequência de atividades desenvolvida com esses estudantes. De acordo com o autor, a grande maioria dos sujeitos pesquisados demonstrou não saber identificar e usar as variáveis visuais pertinentes para realizar as conversões que envolviam o registro gráfico.

Percebeu-se pela análise nos cadernos dos estudantes raras conversões do registro algébrico para o registro gráfico (apenas 6,01% delas), bem como do registro gráfico para o registro algébrico (apenas 1,20%). No trabalho com a sequência didática destacaram-se o baixo uso do registro gráfico e o processo pontual e algoritmizado para a conversão envolvendo esse tipo de registro e a abordagem mecânica do conceito de função por meio do registro algébrico. Segundo o autor, tanto as atividades propostas pelo livro didático quanto as contidas nos cadernos dos estudantes não priorizavam a característica de “ida e volta” de representações entre as conversões, assim como, observou que, em conversões em que eram necessários os registros gráficos, praticamente não foram apresentadas, prejudicando o processo de aprendizagem do conceito de função.

Salin (2014) investigou sobre o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, em particular daquelas dos tipos Afim e quadrática, por estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre – RS. A autora também investigou de que forma o uso do software GeoGebra poderia ajudar no processo de aprendizagem destes conceitos. Como resultados, observou que os estudantes apresentaram dificuldades em relação a temas como área e perímetro, o que dificultou o trabalho com as Funções Afim e quadrática.

Nos momentos do estudo em que a autora tratou especificamente sobre a Função Afim, concluiu que mesmo os estudantes tendo realizado as tarefas satisfatoriamente, tiveram dificuldades em expressar algebricamente a função representada pela situação problema proposta. Após a intervenção didática, em tarefa

análoga, os estudantes já não tiveram dificuldades em representar algebricamente a situação apresentada, o que pode ter ocorrido porque sanaram esta dificuldade no momento anterior. A autora concluiu que a observação de relações entre variáveis, a partir da manipulação de pontos em uma construção no GeoGebra, propiciou a compreensão do conceito de função e gráfico, por meio de constante processo de conversão entre representações semióticas.

Batista (2015) investigou sobre estratégias e dificuldades de mobilização e interpretação de representações semióticas diante de situações-problema que interrelacionaram matemática e física, com estudantes do 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Mato Grosso do Sul, apontando que os estudantes apresentaram dificuldades particularmente nos registros algébrico e gráfico (principalmente por utilizarem como registro de partida o registro tabular). Para este autor, a proposição de situações adidáticas que favoreçam a diversificação de representações semióticas permite tratamentos e conversões adequadas.

A pesquisa de Tozo (2016), desenvolvida com estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade Sorocaba – SP teve por objetivo verificar as dificuldades de tratamento e conversão, particularmente da língua natural para as representações algébrica, tabular e gráfica. O autor aponta dificuldades em relação às conversões que envolvem a forma gráfica, tanto como registro de partida, quanto como registro de chegada. Segundo ele, muitos estudantes conseguiram fazer as conversões da forma algébrica ou tabular para a gráfica com alguma facilidade, mas no caminho inverso as dificuldades foram muito maiores.

Delgado, Friedmann e Lima (2010) investigaram como os estudantes de uma turma de 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro – RJ lidava com as diversas representações da Função Afim, por meio da realização de algumas atividades, que sugeriam, pelo menos, duas representações diferentes dessa função. Os resultados apontaram que as maiores dificuldades encontradas pelos estudantes estavam relacionadas às conversões que envolviam a forma algébrica (seja da língua natural para expressão algébrica ou da forma tabular para a algébrica). Para estes autores, os estudantes dificilmente observavam que a língua natural e a forma algébrica representavam o mesmo objeto matemático, observando também que muitos estudantes conseguiam fazer a conversão da forma tabular para a gráfica com alguma facilidade, entretanto, o inverso não ocorria da mesma maneira.

Mencionando o grande número de pesquisas envolvendo os temas equações e funções, Lucas (2010) salienta a necessidade de se observar as inter-relações entre esses conceitos e possíveis descontinuidades conceituais ao longo das etapas escolares. O autor analisou como doze estudantes do 2º ano do Ensino Médio responderam a um instrumento por ele elaborado, com foco nas equações de 1º e 2º graus e nas Funções Afim e quadrática. Os resultados apontaram, dentre outros, que, mesmo os estudantes conseguindo descrever, no registro em língua natural, diferenças conceituais entre equações e funções, eles não realizaram de forma adequada esta distinção ao lidarem com esses objetos no registro algébrico.

Os resultados apontaram que houve clara associação entre a expressão algébrica de uma função (Afim ou quadrática) e uma equação (de 1º ou 2º graus), mostrando que, para encontrar a raiz (ou as raízes) de uma função, os sujeitos recorreram quase que exclusivamente ao tratamento no registro algébrico, mesmo quando solicitados a verificar se dados valores numéricos eram ou não raízes de funções não-familiares (por exemplo, de 3º ou de 4º graus). Esse fato, segundo o autor, sugere uma relação de descontinuidade conceitual entre funções e equações.

Em pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio da rede estadual do Ceará, que já haviam passado por um processo de instrução formal acerca do conteúdo de Função Afim, Cardoso *et al.* (2013) analisaram as competências desses estudantes no que se refere à transformação de conversão de registros de representação desse objeto. Os resultados indicaram que os estudantes apresentam dificuldades em lidar, principalmente, com os registros gráfico e algébrico e que eles tendem a utilizar tratamentos mesmo quando uma conversão se fazia necessária. Segundo os autores, “Este fato evidencia a mecanização dos procedimentos de tratamento, bem como a falta de interpretação dos dados da questão” (CARDOSO *et al.* 2013, p. 13), o que pode revelar lacunas conceituais quanto ao conceito explorado, haja vista que, elementos importantes do conceito como a relação de dependência, não foram considerados em vários dos registros elaborados pelos sujeitos pesquisados.

A pesquisa de Fonseca *et al.* (2013) foi desenvolvida com estudantes de duas turmas do 1º ano do Ensino Médio de uma escola da Baixada Fluminense – RJ, na qual, em uma das turmas, denominada de turma A, o ensino da Função Afim se deu a partir de aulas dinâmicas e interativas, com o auxílio de um software educacional

(não especificado) e; na outra, denominada de turma B, o ensino se deu por meio de uma abordagem que não utilizava nenhuma ferramenta computacional.

Os resultados sugerem que os estudantes, particularmente os da turma B, apresentaram dificuldades em algumas questões do teste utilizado, dentre elas algumas cujo registro mobilizado era o registro algébrico. De acordo com os autores, os estudantes da turma A desenvolveram maior visão intuitiva sobre o conceito de variável e dependência do que os estudantes da turma B; o que sugere que as atividades realizadas em sala de aula previamente preparadas para serem desenvolvidas com o auxílio de um software educacional contribuíram para o enriquecimento da imagem conceitual dos estudantes, levando-os a desenvolver a capacidade de realizar transformações entre as representações dadas nos diversos registros do objeto matemático estudado.

Soto, Herrera e Pereyra (2019), em pesquisa desenvolvida com nove estudantes do terceiro ano da escola Secundária (equivalente ao Ensino Médio brasileiro), na cidade de Catamarca, na Argentina, cujo objetivo foi analisar a coordenação entre as representações semióticas da função linear obtiveram como resultados de que nessa etapa os estudantes têm dificuldades para realizar alguns tipos de conversões, especialmente entre o registro gráfico e o registro algébrico, nesse sentido. Dificuldades de interpretação, quando a situação é proposta no registro em língua natural, também foram observadas pelos autores. Segundo eles, isso se deve à falta de utilização de problemas desse tipo no cotidiano escolar.

Outro achado da pesquisa aponta que os estudantes participantes não coordenaram espontaneamente as diferentes representações semióticas do conceito estudado, a função linear, fato justificado pelos autores pelo fato de estes estudantes encontrarem-se em uma fase inicial do estudo das funções. De acordo com esses autores, a atividade de coordenação pode ser reforçada no dia a dia escolar por meio do uso de diferentes ferramentas tecnológicas durante o processo de ensino, pois o uso de um software de geometria dinâmica, por exemplo, pode propiciar o trabalho em uma estrutura algébrica e uma estrutura geométrica simultaneamente.

Direcionada a um público diferenciado daquele estudado pelos demais trabalhos, Lorencini (2019) investigou as possibilidades inclusivas de uma sequência didática sobre Função Afim, considerando as ideias base desse objeto (variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização) e suas diferentes representações, com duplas de estudantes de uma turma do 2º ano do Ensino Médio

de um colégio da rede pública de ensino do Paraná, onde uma das duplas contava com uma estudante com baixa visão grave. Percebendo algumas fragilidades no livro didático transcrito em braile, dentre elas, a ausência das representações gráficas da Função Afim, a autora propôs a realização da descrição (oral ou escrita) desses registros pelos estudantes “videntes” da turma.

Os resultados apontaram que a descrição oral das representações gráficas, contribuiu para a interpretação e compreensão das tarefas pelo estudante “vidente” pois, ao fazer a transcrição do gráfico em língua materna, este acaba fazendo um tipo de conversão. A estudante com baixa visão grave apresentou um pouco mais de dificuldades em compreender o gráfico porque ela precisava construir a imagem mental dessa representação. Segundo a autora, também com esta estudante foi importante o trabalho com as várias representações semióticas, inclusive com aquela do tipo gráfico.

O trabalho de Almeida (2013), que propôs uma intervenção pedagógica em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual do município de Gaspar – SC, analisou a mobilização das representações semióticas da Função Afim, utilizando o software GeoGebra. Segundo a autora, os estudantes manifestaram resistência em relação à utilização do registro gráfico, fato amenizado durante o desenvolvimento da sequência didática. Ainda segundo ela, foi possível perceber que os estudantes conseguiram reconhecer a Função Afim nos registros em linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica; compreenderam os procedimentos de tratamento nos diferentes registros e realizaram o procedimento de conversão entre os diferentes registros. Assim, segundo ela, o uso do GeoGebra contribuiu para o aprendizado do conceito estudado.

Lenartovicz (2013) investigou como estudantes ingressantes em um curso de administração de uma instituição de Ensino Superior de Blumenau – SC compreendem os conceitos pertinentes a funções polinomiais do 1º grau, concluindo que, quando da verbalização em língua natural, os estudantes confundiram função com equação; apresentaram dificuldades em obter o valor da função em um ponto dado; e, particularmente e em nível mais elevado, dificuldades na conversão entre representações do registro gráfico para o registro algébrico e vice-versa.

Cardoso (2015), por sua vez, investigou sobre o uso de diferentes representações semióticas por licenciandos em matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), por meio de um curso de formação/extensão com duração de 40

horas/aula. De acordo com esta autora, o trabalho com o registro em língua materna não se apresentou como uma tarefa fácil para os graduandos, os quais não apresentaram dificuldades no tratamento com o registro algébrico, fato atribuído por ela à utilização mais frequente da linguagem simbólica/matemática na licenciatura. Mesmo após a intervenção, os licenciandos permaneceram com dificuldades em tratar e converter as diversas representações semióticas da Função Afim. As conversões representaram obstáculos significativos, principalmente quando se consideram os registros algébrico e gráfico.

Considerando os trabalhos cujas pesquisas investigaram sobre as diferentes representações da Função Afim, a coordenação dessas representações e suas transformações, identificando as funções pedagógicas das múltiplas representações, os trabalhos de Faria (2017) e Laburú e Faria (2018) analisaram uma atividade desenvolvida em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Cambé – norte do Paraná.

Como resultados, apontam que a escolha entre representações possíveis dentro de uma representação em um determinado registro não é imparcial; que a preferência por um dado registro pode variar no universo de uma sala de aula; que alguns estudantes demonstraram mais facilidade em determinada representação semiótica, como o uso da tabela, por exemplo, pois, sendo um registro de natureza multifuncional, “este registro de representação semiótica ao ser coordenado com outras representações semióticas apresentou a finalidade de complementar ou restringir o entendimento de outras representações” (LABURÚ; FARIA, 2018, p. 83).

Por fim, Mossi (2016) investigou a expansão discursiva dos registros de representação mobilizados por licenciandos em matemática da Universidade Federal de Santa Maria a partir de atividades envolvendo criptografia ao caracterizar Funções Afim, quadrática e exponencial. Dentre outros aspectos, a autora concluiu que ao solicitar atividades que tomassem como ponto de partida a análise da representação algébrica, obteve-se maior articulação de representações na língua natural, algébrica, simbólica e/ou numérica. Entretanto, quando se fez necessário partir da representação gráfica as respostas ficaram mais limitadas à representação na língua natural.

Dos trabalhos que originaram de pesquisas que realizaram análise de livros didáticos, Maggio, Soares e Nehring (2010) o fizeram em dois livros didáticos de matemática do Ensino Médio no que concerne às atividades referentes ao conceito

de Função Afim propostas nestes livros e, que reflexos estas podem ter na prática pedagógica do professor. A pesquisa aponta que, enquanto um dos livros enfatiza, em sua maioria, problemas “fechados” que geralmente não exigem o raciocínio matemático; propicia conversões no sentido algébrico $\rightarrow$ gráfico; enquanto que o outro, prioriza situações-problema contextualizadas, potencializando a coordenação entre representações de vários registros.

Este último prioriza conversões no sentido língua natural $\rightarrow$ linguagem algébrica. A pesquisa aponta ainda que conversões no sentido registro gráfico $\rightarrow$ registro algébrico, assim como o tratamento gráfico que exige procedimentos globais, não foram priorizados em nenhum dos dois livros analisados. De acordo com as autoras, esses fatos podem acarretar prejuízos aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de Função Afim, haja vista que os livros didáticos são utilizados pela maioria dos professores como a principal fonte na organização e condução de suas aulas.

Freire e Pires (2013), ao analisarem os cadernos (apostilas) do estudante e do professor de matemática dos três anos do Ensino Médio do estado de São Paulo, no que se refere ao conceito de função, identificaram que os cadernos de todos os anos evidenciam tal conceito. Os resultados apontam que estes materiais abordam de maneira equilibrada os registros na língua natural, algébrico, gráfico e tabular, havendo uma grande incidência da transformação do tipo conversão e uma predominância do fenômeno de não congruência.

No que se refere especificamente à Função Afim, o estudo desse objeto é evidenciado nos cadernos destinados ao 1º ano do Ensino Médio, onde foram encontradas 43 atividades referentes ao tema. Nessas atividades, o principal registro de partida é a língua materna, e o de chegada, o registro algébrico. De acordo com os autores, menos de 2% das atividades constantes no caderno do 1º ano do Ensino Médio (dentre as quais, aquelas referentes à Função Afim) exigiam apenas um tratamento no registro de partida para sua realização, fato que sugere a prevalência da conversão (FREIRE; PIRES, 2013).

Por sua vez, Brandl e Ramos (2013) analisaram como dois livros didáticos de matemática, um do Ensino Fundamental e outro do Ensino Médio, utilizados na rede pública de ensino de uma cidade do Paraná, abordam os conceitos de função polinomial do 1º e do 2º graus. Os autores observaram que os livros apresentam poucas situações contextualizadas, se sobressaindo entre eles a prevalência dos

exercícios. No que se refere às funções do 1º grau, perceberam que os livros apresentam certo equilíbrio entre tratamentos e conversões, fato não observado em relação às funções do 2º grau, em que prevaleceram os tratamentos. De acordo com estes autores, os livros didáticos apresentaram certa ênfase no registro algébrico e a crescente presença da representação gráfica ainda atrelada à abordagem ponto a ponto, fato que pode dificultar a compreensão global de todos os elementos importantes que compõem tal objeto de estudo.

5.1.3 Análise dos aspectos metodológicos de pesquisas relacionadas à Função Afim com aporte teórico no CD/TSD e na TRRS

No quadro 15, destacamos o único trabalho identificado na revisão de literatura que utilizou, respectivamente, o CD (mais especificamente a TSD) e a TRRS como referenciais teóricos de análise dos dados.

Quadro 15 – Trabalho que pesquisou sobre a Função Afim utilizando o CD (TSD) e a TRRS como referencial teórico

AUTOR/ES	TÍTULO	ANO	BANCO DE DADOS	TIPO
SANTOS, Vivia Dayana Gomes dos.	Esboço de gráficos nos ambientes papel e lápis e GeoGebra: Funções Afins e funções quadráticas	2012	BDTD	D

Fonte: O autor (2022).

Conforme apresentado anteriormente, apenas um trabalho encontrado (SANTOS, 2012) teve seus resultados discutidos à luz do CD e da TRRS simultaneamente e trata-se de uma dissertação publicada na BDTD. Embora a teoria utilizada não tenha sido especificamente o CD, mas a TSD, Santos (2012) teve por objetivo verificar a eficiência de um roteiro produzido em forma de cartilha explicativa e metodológica acerca do traçado dos gráficos de funções polinomiais do 1º e 2º graus com o papel e o lápis, e também com o software GeoGebra. Desenvolvida com um grupo de estudantes do Ensino Médio de escolas públicas de Maceió – AL, participantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Junior (PIBIC-Jr), por meio da utilização de questionários e de uma intervenção de ensino realizada pela própria pesquisadora. A pesquisa evidenciou a existência de um CD

tradicional e que a mudança para um novo contrato propiciou a participação e interação dos estudantes, o que melhorou sua aprendizagem.

Na intervenção pedagógica, focou-se nos registros algébrico, tabular e gráfico, tanto como registros de partida quanto como registros de chegada, com destaque para os elementos importantes da reta e da parábola (como a intersecção com os eixos coordenados) com lápis e papel e com GeoGebra. Apesar dos avanços apontados, foi constatado que os estudantes avançaram pouco no que se refere à percepção das modificações sofridas pelo gráfico quando se modificam os coeficientes da função. Para a autora, a utilização do software GeoGebra, além de tornar o esboço de gráficos mais rápido, tornou compreensíveis as modificações gráficas sofridas quando se alteram os coeficientes das funções (ainda que de forma insípida).

O levantamento realizado e discutido nesse capítulo aponta que a maior parte das pesquisas foram desenvolvidas em salas de aula, desde o Ensino Fundamental – anos finais, passando pelo Ensino Médio, se estendendo até o Ensino Superior e utilizaram intervenções didáticas, com ou sem o uso de softwares educacionais. Este fato sinaliza preocupação, por parte dos pesquisadores, com aspectos relativos aos processos de ensino e aprendizagem da Função Afim nas diferentes etapas de ensino, diretamente relacionados à dinâmica da sala de aula, à relação didática.

Revela ainda que existe um quantitativo mais elevado de pesquisas que discutem sobre a Função Afim, ancoradas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, em comparação com aquelas ancoradas no Contrato Didático, embora esse quantitativo ainda seja considerado pequeno em relação ao lapso temporal utilizado na busca. Em resumo, essas pesquisas indicam dificuldades dos estudantes no que se refere à aprendizagem da Função Afim nas diversas etapas de ensino, sendo essas dificuldades, em parte, relacionadas ao Contrato Didático estabelecido na relação didática e à mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático, bem como, suas transformações.

Quanto ao Contrato Didático, percebemos que poucas pesquisas sobre a Função Afim, tomadas no decurso dos onze anos considerados nessa revisão de literatura, adotam esse referencial teórico como sustentação para a discussão e análise dos dados. Os resultados das pesquisas que utilizaram tal aporte teórico revelam que o Contrato Didático se institui “além” daquele prescrito pelo livro didático adotado e utilizado pelo professor. Revelam ainda que os estudantes tendem a buscar dados numéricos para solucionar os problemas matemáticos propostos em sala de

aula, mesmo quando não solicitado pelos problemas em questão. Esse fato sugere, dentre outros, a existência de um “núcleo duro” do Contrato Didático, o que torna difícil o rompimento do contrato estabelecido pelo professor, haja vista que uma ruptura de contrato, de certa forma, o “desestabiliza”, ou seja, o retira da sua “zona de conforto”.

No que concerne à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os dados da revisão de literatura apontam que a maioria das pesquisas que utilizou esse aporte teórico se baseou no desenvolvimento, aplicação e análise de sequências didáticas, ou sequências de ensino, voltadas a analisar a mobilização por parte dos estudantes de diferentes etapas de ensino, das representações semióticas do objeto matemático em estudo, em nosso caso a Função Afim, a coordenação dessas representações e suas transformações. Os resultados apresentados nessas pesquisas ratificam o fato de que mobilizar, converter e coordenar diferentes representações da Função Afim, de maneira particular, contribui para o aprendizado dos conceitos envolvidos.

Os resultados dessa revisão de literatura também sugerem o pouco uso de ambientes informatizados para explorar os diferentes registros de representação semiótica da Função Afim, particularmente no que se refere ao uso dos softwares educacionais. O uso desses tipos de softwares, dentre outras possibilidades, pode potencializar a compreensão dos estudantes acerca das conversões entre representações dos registros algébrico e gráfico, nos dois sentidos, favorecendo a interpretação global das propriedades figurais.

Ressalte-se que foram identificadas poucas pesquisas que discutiram sobre a formação, seja inicial ou continuada, de professores, especificamente utilizando a TRRS como referencial teórico de apoio e nenhuma utilizando o CD. Este dado nos chama atenção uma vez que a formação dos professores (inicial e/ou continuada) proporcionará, *a priori*, as reflexões necessárias ao fazer pedagógico necessário à sua atuação docente e os “impactos” desse fazer na aprendizagem do estudante. Práticas que levem em conta a mobilização de diferentes representações do objeto matemático em estudo, a coordenação dessas representações e sua coordenação, assim como a necessária ruptura do contrato didático “tradicional”, precisam ser mais discutidas e desenvolvidas.

Outros aspectos da TRRS também parecem carentes de discussão por parte das pesquisas envolvendo a Função Afim, como aqueles relacionados às funções discursivas da linguagem natural enquanto funções necessárias à resolução de

problemas. Analogamente, aspectos voltados à estruturação do meio (*Milieu*) e à devolução didática precisam ser melhor enfocados nas pesquisas que utilizem o CD como referencial teórico de apoio, haja vista ser esses elementos preponderantes para a ruptura do Contrato Didático então estabelecido na relação didática.

Embora os resultados dessa revisão de literatura não retratem todo o cenário das pesquisas brasileiras e internacionais que discutiram sobre a Função Afim tendo como aportes teóricos o Contrato Didático e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, apontam para algumas direções que podem ser utilizadas como ponto de partida para trabalhos futuros.

Não identificamos nessa busca nenhuma pesquisa que inter-relacionasse o CD e a TRRS. Além disso, as dificuldades, tanto em termos de ensino quanto de aprendizagem da Função Afim, apontadas pelas pesquisas discutidas nesse capítulo da tese, nos inquieta e nos motiva a pesquisar sobre essa problemática. Assim, propor uma pesquisa que busque analisar inter-relações entre o Contrato Didático, estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim, poderá contribuir com essas discussões, sobretudo por inter-relacionar duas perspectivas teóricas com origens epistemológicas diferentes: uma didática e outra cognitiva, respectivamente.

No próximo capítulo apresentamos o percurso metodológico utilizado na pesquisa empírica.

6 PERCURSO METODOLÓGICO

No capítulo que segue, delineamos o percurso metodológico utilizado na pesquisa para atender aos objetivos traçados, que foram: analisar inter-relações entre o Contrato Didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim (objetivo geral); caracterizar o Contrato Didático estabelecido entre professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio durante o ensino da Função Afim; identificar a mobilização de diferentes registros de representação semiótica da Função Afim no seio do CD estabelecido entre professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio e caracterizar inter-relações entre o Contrato Didático e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim (esses três últimos, objetivos específicos).

Assim, apontamos: tipo da pesquisa, abordagem metodológica, instrumentos utilizados na coleta dos dados, categorias e critérios de análise, dentre outros.

6.1 NATUREZA E ABORDAGEM DA PESQUISA

Para responder à questão de pesquisa e alcançar os objetivos propostos, adotamos procedimentos metodológicos de natureza qualitativa. Segundo Stake (2011, p. 21) “o raciocínio da pesquisa qualitativa se baseia principalmente na percepção e na compreensão humana” e “o próprio pesquisador é um instrumento ao observar ações e contextos e, com frequência, ao desempenhar intencionalmente uma função subjetiva no estudo, utilizando sua experiência pessoal em fazer interpretações” (STAKE, 2011, p. 30).

Para Flick (2009, p. 16), esse tipo de pesquisa “usa o texto como material empírico (em vez de números), parte da noção da construção social das realidades em estudo, está interessada nas perspectivas dos participantes, em suas práticas do dia a dia e em seu conhecimento cotidiano relativo à questão em estudo”. De forma mais ampla, Denzin e Lincoln (2006, p. 03) definem a pesquisa qualitativa como

uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas,

fotografias, gravações e anotações pessoais. [...] a pesquisa qualitativa envolve uma postura interpretativa e naturalística diante do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem.

Nesse sentido, em nossa pesquisa, buscamos analisar inter-relações entre o Contrato Didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim. Uma descrição detalhada dessas inter-relações poderá contribuir para uma melhor compreensão dos elementos envolvidos.

Assim, nos termos da pesquisa qualitativa, propor uma descrição “densa”, no sentido de demonstrar a riqueza do que acontece na relação didática e enfatizar a forma como isso envolve as intenções e estratégias das pessoas pode contribuir para oferecer uma explicação para o que está acontecendo no contexto estudado (GIBBS, 2009).

6.2 CONTEXTUALIZAÇÃO DO ESTUDO EMPÍRICO

Este estudo teve início no primeiro semestre do ano de 2019 com as primeiras leituras e delineamento dos objetivos de pesquisa, os quais têm o propósito de “adentrar” no universo de uma sala de aula e analisar a dinâmica da relação didática, buscando identificar inter-relações entre o CD e a TRRS. No entanto, ainda no final daquele ano, começaram a surgir nos noticiários e redes sociais notícias de uma doença respiratória causada por um vírus, até então desconhecido, que circulava, até então, na China. Tratava-se de uma nova cepa (tipo) de coronavírus que não havia sido identificada antes em seres humanos. Os coronavírus “estão por toda parte. Eles são a segunda principal causa de resfriado comum (após rinovírus) e, até as últimas décadas, raramente causavam doenças mais graves em humanos do que o resfriado comum” (OPAS, 2021, n. p.).

O novo coronavírus, inicialmente nomeado de 2019-nCoV, passou a ser chamado de SARS-CoV-2 a partir de 11 de fevereiro de 2020. Esse novo coronavírus é responsável por causar a doença chamada de COVID-19 (OPAS, 2021) e tem causado preocupação em autoridades de saúde de todo o mundo. Em 20 de janeiro de 2020, a Organização Mundial da Saúde – OMS classificou o surto de COVID-19

como “Emergência de Saúde Pública de Âmbito Internacional” e, em 11 de março de 2020, como “pandemia”, que é uma epidemia que ganha escala global.

No Brasil, em fevereiro de 2020, foi detectado o primeiro caso suspeito de infecção pelo novo coronavírus, em São Paulo e, em 17 de março de 2020 foi notificada a primeira morte de brasileiro por COVID-19. A partir de então, começaram a surgir os casos de transmissão comunitária (quando não é possível identificar o início da cadeia de transmissão), sendo o primeiro registro na cidade de Belo Horizonte – MG. Então, diversos estados, inclusive Pernambuco, começaram a decretar situação de emergência e definir medidas temporárias para prevenir o contágio pelo novo coronavírus, sendo as principais delas: uso obrigatório de máscara, higienização das mãos e distanciamento social. Nesse contexto, Portaria do Governo Federal torna crime contra a saúde pública a recusa ao isolamento social e à quarentena que fosse determinada pelas autoridades em caráter emergencial (SANAR SAÚDE, 2021).

A previsão inicial do estado de quarentena era de 90 dias, com fechamento total de alguns segmentos: alguns tipos de comércio tidos como não essenciais, escolas, parques de laser e outros; e parcial de outros: serviços essenciais, como farmácias e supermercados, por exemplo. Entretanto, mais de 430 dias já se passaram²⁰ e a retomada das atividades ainda não atingiu a sua totalidade. Por que trazer essa problemática ao texto dessa tese? Porque, considerando esse contexto, algumas preocupações em relação à pesquisa até então em andamento pareciam inevitáveis.

As escolas de todas as esferas, até esse momento²¹, ainda não retomaram as atividades presenciais na sua totalidade, fato que afetou o andamento da pesquisa. A retomada das escolas estaduais, das quais uma delas foi campo da nossa pesquisa, acontecia de forma gradativa e escalonada com número reduzido de estudantes por turma. Devido às medidas de distanciamento social, cada sala de aula só poderia comportar, no máximo, metade dos estudantes da turma, de acordo com a área da sala.

Particularmente, falando da escola na qual a pesquisa foi realizada, o atendimento aos estudantes até esse momento de desenvolvimento da tese (julho/2021) ocorria de duas maneiras: de forma remota, com o uso de tecnologias,

²⁰ Até o momento da escrita desse tópico da tese: julho/2021.

²¹ Julho/2021.

para aqueles cujos pais ou responsáveis não autorizaram seu retorno presencial à escola e àqueles portadores de alguma comorbidade²² comprovada, e; de forma presencial escalonada. Nesse último caso, as turmas foram divididas em dois grupos com uma média de 20 estudantes cada. Dessa forma, cada professor ministrava “a mesma” aula duas vezes de forma presencial e ainda fazia o atendimento remoto aos estudantes que não voltaram ao ensino presencial (não temos interesse, nesse momento, nesse grupo de estudantes).

É salutar esclarecer que nessa pesquisa discutimos os resultados da análise do CD estabelecido considerando o contexto apresentado (pandemia de COVID-19), tendo como participantes os estudantes que estavam assistindo aulas, presencialmente. Embora tenhamos gravação em vídeo de todas as aulas ministradas para os dois grupos de estudantes, denominados pela escola de “grupo 1” e “grupo 2”, que se intercalavam nas aulas presenciais semanalmente, em nossas análises nos detemos ao grupo 1. A escolha por esse grupo de estudantes se deu pelo fato de ter ocorrido uma disparidade em relação ao número de aulas presenciais ministradas para cada um dos grupos: 20 aulas para o grupo 1; e 12 aulas para o grupo 2.

Essa disparidade se deu por alguns eventos que levaram à suspensão das aulas presenciais, como: feriados, realização de uma gincana interdisciplinar de conhecimentos com todas as turmas da escola, aumento nos casos de COVID-19 no município, greve de professores; e que afetaram em maior grau o grupo 2. Nos momentos de suspensão, à exceção dos feriados, gincana de conhecimentos e greve dos professores, os estudantes do grupo atingido continuavam recebendo aulas remotas.

É necessário destacar que, as escolas, nesse momento de retomada das atividades presenciais, deveriam garantir algumas medidas restritivas para evitar o contágio dos estudantes e demais envolvidos no ambiente escolar, pelo SARS-CoV-2, conforme orientações das autoridades sanitárias e de saúde, implicando assim em mudança no contrato escolar (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001) o que, por sua vez, poderia implicar também em mudanças no CD estabelecido em sala de aula.

²² “Comorbidade é toda doença, condição ou estado físico e mental que, em razão da gravidade, pode potencializar os riscos à saúde caso o portador venha a se infectar com algum agente patogênico”. (MORSCH, 2022). Referência retirada do Blog Morsch Telemedicina. Disponível em: <<https://telemedicinamorsch.com.br/blog/comorbididades>>. Acesso em: 29 jun. 2022.

Algumas das medidas instituídas foram, no caso das salas de aula, manter o distanciamento mínimo de 1,5 metros entre os estudantes e, entre esses e o professor, restringir ao mínimo possível as estratégias de trabalhos em grupos (mantendo-se o mesmo distanciamento já mencionado e os mesmos grupos de estudantes); não compartilhamento de materiais pessoais como cadernos, lápis, livros didáticos; o professor deve evitar a utilização de atividades impressas, para evitar a circulação de material. A adoção dessas medidas restritivas impõe, em certa medida, mudanças no CD que seria estabelecido em tempos “normais”, antes da pandemia.

6.3 CAMPO DA PESQUISA E PARTICIPANTES

A pesquisa foi desenvolvida entre os meses de julho e setembro de 2021 em uma escola pública da rede estadual de ensino de Pernambuco, localizada na cidade de Afogados da Ingazeira – PE, e envolveu uma professora de matemática e seus respectivos estudantes do 1º ano do Ensino Médio (conforme caracterização no próximo tópico). A opção por uma escola da rede pública se deu pelo fato de que, como professor da rede pública de ensino, acreditamos na qualidade do ensino ofertado por esse segmento de escolas. Ademais, porque as escolas públicas são em maior número (três no total, e apenas uma da rede privada) na cidade escolhida como locus da pesquisa, o que abriria o leque para uma maior quantidade de professores possíveis.

A escolha por uma professora e estudantes do 1º ano do Ensino Médio se deu pelo fato de ser nesse ano de escolaridade em que o estudo das funções, em particular da Função Afim, é formalizado e intensificado nas escolas²³ (considerando os documentos de orientação curricular vigentes: PCPE (PERNAMBUCO 2012a) e BNCC (BRASIL, 2020)). A escolha da professora participante levou em consideração o interesse e a disponibilidade em participar da pesquisa.

Antes da definição dessa professora, outros professores da mesma cidade e que lecionavam em turmas do 1º ano do Ensino Médio foram consultados, no entanto, por motivos diversos como: não retorno ao ensino presencial por serem portadores de comorbidades, motivos de saúde, desconforto em ter suas aulas gravadas em vídeos, dentre outros; não aceitaram participar da pesquisa.

²³ Conforme justificado na “Nota 6”, esse fato pode ser modificado a partir do ano de 2022 devido à implementação do Novo Ensino Médio.

Definidos o campo da pesquisa e os participantes, fizemos o contato inicial com a gestora escolar para apresentar a pesquisa e pedir a sua autorização para realização dessa nas dependências da escola (o Modelo do Termo de Autorização encontra-se disponível no Apêndice A dessa tese).

Após o seu consentimento, providenciamos os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Apêndices B e C) para que os envolvidos na pesquisa, tanto os estudantes ou seus responsáveis quanto a professora, pudessem assinar, dando ciência de sua participação espontânea. Para garantia do anonimato dos participantes da pesquisa, pseudônimos foram utilizados para os identificar: “Rita” foi o pseudônimo atribuído à professora. Tais medidas foram adotadas com vistas à garantia dos preceitos éticos na pesquisa haja vista que, à época de realização, não havia a exigência, por parte do Programa de Pós-graduação, de aprovação pelo Conselho de Ética. No próximo tópico, segue uma breve caracterização da escola e dos participantes envolvidos na pesquisa.

6.4 CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA E DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Com o objetivo de situar o leitor quanto ao contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, nesse tópico nos propomos a fazer uma breve caracterização da escola e dos participantes envolvidos, por meio da apresentação de informações referentes à estrutura física e pedagógica da escola, nível de formação da professora participante e faixa etária dos estudantes; assim como do contexto histórico vivenciado: pandemia de COVID-19.

6.4.1 Caracterização da escola

A escola²⁴ na qual a pesquisa foi desenvolvida fica localizada na cidade de Afogados da Ingazeira – PE, pertence à rede estadual de ensino e atendia, à época da pesquisa (ano letivo de 2021), um total de 565 estudantes distribuídos em três turnos. Oferta Atendimento Educacional Especializado (AEE) aos educandos com deficiência, Educação de Jovens e Adultos em Nível Médio, Ensino Médio em tempo integral e PROEJA (EJA Médio com qualificação profissional em Panificação e

²⁴ Essa caracterização foi baseada no Projeto Político Pedagógico – PPP da escola, disponibilizado pela gestora escolar.

Confeitaria – parceria com o Instituto Federal de Pernambuco). Desses 565 estudantes, 463 eram estudantes do Ensino Médio integral, dos quais 44 deles do 1º ano do Ensino Médio da turma participante da pesquisa (embora, considerando o contexto já salientado, apenas em torno de 28 deles estivessem participando das atividades presenciais na escola).

A escola tem como “missão”, conforme seu Projeto Político Pedagógico – PPP, promover a construção do exercício da cidadania, através de aprendizagens significativas favorecendo o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias ao estudante para atuar com autonomia, flexibilidade e responsabilidade na sociedade local e globalizada.

Por fazer parte do Programa de Educação Integral de Pernambuco, a escola procura realizar um trabalho pautado na filosofia da educação interdimensional, que reconhece o homem na sua completude, buscando a superação de práticas pedagógicas arraigadas na repetição de conceitos e, pautada na inovação do fazer pedagógico, dando oportunidade para os estudantes desenvolverem sua autonomia, liderança e criatividade, essenciais para a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Na infraestrutura física, dispõe de 15 (quinze) salas de aula, uma sala de coordenação pedagógica, uma secretaria escolar, uma diretoria, uma sala de professores, uma sala de troféus, uma sala de reunião, uma sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE), um refeitório, 02 (duas) cozinhas, banheiros adaptados, uma quadra descoberta, pátio interno coberto e descoberto, auditório com capacidade para 150 pessoas, uma biblioteca, um Laboratório de Informática com 10 computadores conectados à internet e um Laboratório Móvel com 20 *laptops* e 20 *tablets* para utilização em sala de aula, um Laboratório de Física, um Laboratório de Química, um Laboratório de Biologia, um Laboratório de Matemática, uma sala de projeção multimídia e rede *wi-fi* em diversos espaços.

A equipe técnico-pedagógica é composta por uma gestora escolar, uma assistente de gestão (equivalente ao Gestor Adjunto nas escolas de ensino regular), uma secretária escolar, 32 professores regentes, 06 (seis) professores readaptados, sendo que 5 (cinco) coordenam a biblioteca e um realiza serviços na secretaria, uma coordenadora pedagógica, 05 (cinco) funcionários terceirizados que prestam serviços na limpeza da escola, 04 (quatro) merendeiras, 05 (cinco) assistentes administrativos,

um auxiliar administrativo, 02 (dois) analistas educacionais, 02 (dois) porteiros e 04 (quatro) vigilantes, perfazendo um total de 65 funcionários em efetivo exercício.

Devido ao período de pandemia, conforme já explicitado, a escola funcionava²⁵ presencialmente em sistema de rodízio de estudantes, sendo cada turma dividida em duas e cada grupo assistia às aulas em dias alternados: em uma semana um grupo assistia as aulas nas segundas, quartas e sextas e o outro nas terças e quintas e, na semana seguinte invertia-se essa ordem (por exemplo: em uma semana; o grupo 1 assistia as aulas nas segundas, quartas e sextas; e o grupo 2, nas terças e quintas; na semana seguinte, o grupo 2 nas segundas, quartas e sextas; e o grupo 1, nas terças e quintas).

Também houve uma redução no tempo de aulas: de 9 (nove) tempos de aulas de 50 minutos para 9 (nove) tempos de aulas de 40 minutos, diariamente. No caso particular da disciplina de matemática, na turma de 1º ano participante da pesquisa, a escola ofertava um total de 7 (sete) aulas semanais de 40 minutos cada, sendo 5 (cinco) no turno da manhã e 2 (duas) no turno da tarde. Essas aulas eram geminadas, sendo duas aulas na terça-feira, no turno da tarde; duas aulas na quarta-feira, no turno da manhã e três aulas na sexta-feira, também no turno da manhã.

6.4.2 Caracterização dos participantes

A professora participante da pesquisa estava na faixa etária dos 21 aos 30 anos, possuía licenciatura em Ciências Exatas e especialização em Ensino da Matemática. Tinha experiência docente de 6 anos, sendo 4 desses na escola na qual a pesquisa foi desenvolvida. Possuía vínculo efetivo com a rede estadual de ensino de Pernambuco e não acumulava outro vínculo empregatício. Lecionava o componente curricular de matemática em uma turma de 1º ano do Ensino Médio (a turma participante da pesquisa), uma turma de 2º ano e uma turma de 3º ano. Além dessas, lecionava “Estudo Dirigido de Geometria” em duas turmas do 2º ano (uma delas a que leciona também matemática). Nessa pesquisa foi chamada pelo pseudônimo “Rita”.

Os estudantes, por sua vez, eram do 1º ano do Ensino Médio em tempo integral, tinham 45 tempos de aulas semanais distribuídos em 9 tempos diários (até

²⁵ Até o momento da escrita desse subtópico da tese (julho de 2021).

então de 40 minutos cada, conforme já referido) sendo desses, 7 tempos de aulas de matemática. Estavam na faixa etária dos 15 aos 17 anos, com exceção de um estudante, que tinha 18 anos completos. Eram oriundos de diversos bairros da cidade e também da zona rural. A maioria deles concluiu o Ensino Fundamental na mesma escola da rede municipal de ensino (localizada em um dos bairros da cidade) e só tiveram aulas presenciais no 9º ano do Ensino Fundamental até o dia 17 de março 2020, antes do início da pandemia.

Eles estudaram, anteriormente aos conceitos da Função Afim, no 1º ano do Ensino Médio: noções de conjuntos numéricos; introdução ao estudo das funções, revisão dos conceitos de equações polinomiais do 1º grau, inequações do 1º grau e sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.

6.5 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DOS DADOS E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Para a coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: entrevista prévia (semiestruturada), observação das aulas ministradas e diário de bordo do investigador. A **entrevista prévia (semiestruturada)** foi realizada com a professora participante e teve por objetivo levantar seu perfil e evidenciar as suas expectativas em relação aos estudantes no que se refere ao saber Função Afim. Também buscou identificar, *a priori*, vestígios da prática pedagógica dessa professora e os RRS que ela mobiliza na relação didática. A entrevista é considerada uma fonte essencial de evidências na pesquisa qualitativa (GIBBS, 2009).

A **observação, com gravação em vídeo**, das aulas ministradas teve o objetivo de verificar se aquilo revelado na entrevista prévia se materializava no contexto da sala de aula. Por meio desse instrumento buscamos evidências do Contrato Didático estabelecido (regras, negociações, rupturas, renegociações) e dos registros de representação semiótica mobilizados no decurso da relação didática, quando do ensino da Função Afim. Não tivemos por intenção fazer qualquer juízo de valor sobre as aulas ministradas pela professora, ou seja, não nos interessava analisar se as aulas dessa professora eram “boas” ou “ruins”, se a sequência de ensino por ela adotada foi ou não adequada.

As observações das aulas iniciaram uma semana antes do início da unidade didática destinada ao ensino da Função Afim (embora esses dados não sejam

considerados para efeito dessa pesquisa) para que os estudantes já pudessem começar a se acostumar com a presença do pesquisador na sala de aula. O intuito era de que essa presença interferisse o mínimo possível nos resultados da pesquisa.

Por fim, o **diário de bordo** do investigador, instrumento complementar de pesquisa, constituiu-se em importante fonte de notas de campo, por permitir registrar “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia, e pensa no decurso da recolha [dos dados]” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 150). Na investigação empírica buscamos responder à nossa questão de pesquisa e atender aos objetivos traçados com vistas a evidenciar, no tocante ao polo do saber, quais aspectos do conceito são considerados importantes e abordados pela professora, assim como as representações semióticas mobilizadas na relação didática. Quanto ao polo do professor, evidenciamos as suas escolhas em relação ao saber em jogo e, quanto ao aluno, como ele assume a divisão de responsabilidades perante o saber em cena.

Os procedimentos da nossa pesquisa foram organizados em quatro etapas, conforme segue: na **primeira etapa**, foi realizado o contato inicial com a escola e os participantes para apresentação da pesquisa e assinatura dos devidos termos de autorização e consentimento (modelos disponíveis nos Apêndices A, B e C, respectivamente). Conforme já mencionado, em um primeiro momento a gestora escolar foi contatada para autorizar a participação da escola na referida pesquisa. Posteriormente, foram contatados a professora da turma e os estudantes para, após a apresentação da pesquisa, assinarem o TCLE e para combinar, nesse caso, com a professora a data de início das atividades de pesquisa.

A **segunda etapa** diz respeito à realização da entrevista semiestruturada com a professora da turma. Para essa etapa, foi combinado com ela um horário, no qual pudesse receber esse pesquisador, de acordo com a sua disponibilidade e conveniência. No dia marcado, nos dirigimos ao espaço do laboratório de matemática por ser um local silencioso, sem tráfego de pessoas, com boa luminosidade, para que essa etapa fosse realizada. A escolha desse local favoreceu tanto a captação do som (áudio) como de imagem.

A **terceira etapa** consistiu no momento de observação das aulas da professora “Rita”. Nesse momento, foram realizadas gravações em vídeo de todas as aulas referentes ao saber Função Afim ministradas ao grupo 1, conforme justificado no tópico 6.2, em um total de 20 aulas. Para essa etapa, utilizamos como instrumento de coleta de dados um celular com câmera de vídeo e áudio de 13 *megapixels*, que tem

capacidade para gravar vídeos em alta definição (*Full HD*) com uma resolução de 1920 x 1080 *pixels*. Para garantia da captação de som mesmo nos momentos de maiores ruídos na aula, utilizamos também um gravador e reproduzidor digital de áudio, *display LCD*, 4GB de memória interna, microfone (unidirecional) e alto falante integrados, com autonomia para gravação por até 32 horas, compatível com o sistema operacional *Windows*. A escolha pela gravação das aulas em vídeo justifica-se pelo fato de essa opção metodológica permitir uma análise mais completa dos elementos do CD que emergiram na relação didática, possibilitando também a identificação das representações semióticas mobilizadas tanto pela professora quanto pelos estudantes. O conteúdo das gravações em vídeo foi transcrito para compor as fontes de evidência do estudo realizado.

E, por fim, a **quarta etapa** consistiu na análise dos dados, ou seja, na análise dos elementos do CD que emergiram na relação didática e das representações semióticas mobilizadas no seio desse CD, analisados simultaneamente (ou seja, suas inter-relações). Inicialmente foram analisados os elementos do contrato didático e dos registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados, *a priori*, por meio da entrevista semiestruturada realizada com a professora. Posteriormente, analisamos o contrato didático e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática. Os recortes das transcrições da fala da professora e seus estudantes revelaram elementos importantes para evidenciar inter-relações entre os referenciais estudados, conforme apresentados no próximo capítulo – “Abordagem Analítica e Interpretativa dos Dados”.

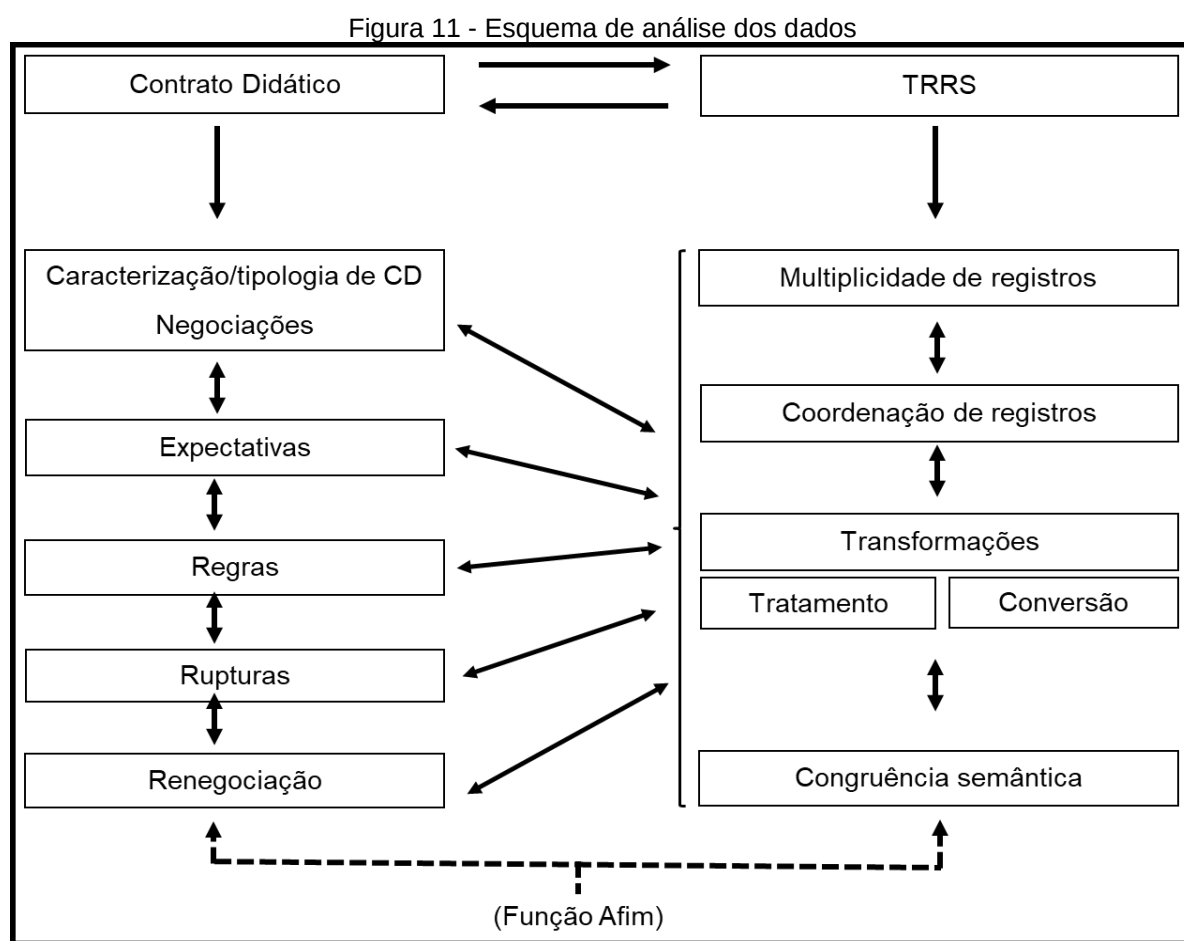
Acreditamos que a execução dessas etapas nos propiciou captarmos elementos suficientes para evidenciar inter-relações entre o CD e os RRS da Função Afim mobilizados na relação didática. Para efeito de análise dos dados, foi elaborado um esquema (figura 11) com categorias e critérios de análise elencados a partir de alguns dos elementos dos referenciais estudados. Esse esquema é apresentado no tópico 6.6, no qual também as categorias e os critérios de análise dos dados adotados são detalhados.

6.6 ORGANIZAÇÃO DOS DADOS E CATEGORIAS ANALÍTICAS

O momento das análises é de crucial importância para a investigação uma vez que envolve o trabalho com os dados, sua organização em categorias, busca por

padrões, descoberta de aspectos importantes acerca do objeto de pesquisa e a decisão sobre aquilo que será comunicado aos outros (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Dessa forma, apresentamos a seguir o esquema (figura 11) que embasou a nossa análise de dados, elaborado a partir da discussão apresentada nos capítulos 2 e 3. As categorias e critérios de análise considerados no esquema constituem elementos dos dois referenciais teóricos adotados: o Contrato Didático e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.



Fonte: O autor (2022).

Os elementos apresentados no esquema acima (figura 11) já foram discutidos nos capítulos 2 e 3 dessa tese, entretanto, apresentamos nos quadros 16 e 17, respectivamente, os critérios adotados para cada categoria apresentada. Embora os quadros sinalizem um olhar "separado" entre os dois aportes teóricos, os consideramos de forma inter-relacionada no decurso das análises, como sugere o

esquema anterior (figura 11). No quadro 16, apresentamos as categorias e critérios relacionados aos elementos do contrato didático, objetos de análise nesse estudo.

Quadro 16 – Categorias e critérios de análise do CD

Categorias	Crítérios
Caracterização/tipologia de CD estabelecido	É possível identificar tendência a um dado tipo de CD (normativo, incitativo, aproximativo)?
Expectativas	O que cada parceiro da relação didática espera do outro, em relação ao trabalho na sala de aula (considerando o saber em jogo)?
Negociações	Como acontece a divisão de responsabilidades entre professora e estudantes em relação ao saber em jogo?
Regras	Quais regras definem o CD estabelecido (explícitas, implícitas, unilaterais, negociadas)?
Rupturas	São evidenciados momentos de ruptura do CD estabelecido?
Renegociações	Como ocorrem as renegociações, caso haja rupturas?

Fonte: O autor (2022).

No quadro 17, conseqüentemente, apresentamos as categorias e critérios de análise para o segundo referencial teórico utilizado nessa pesquisa, a TRRS, embora, no momento das análises dos dados, esses elementos sejam considerados de forma inter-relacionada àqueles referentes ao CD (quadro 16).

Quadro 17 – Categorias e critérios de análise dos elementos da TRRS

Categorias	Crítérios	
	Professor	Estudantes
Representações da Função Afim (multiplicidade de registros) e coordenação	Quais tipos de representações utiliza para o ensino da Função Afim (algébrica, tabular, gráfica, linguagem natural)? Favorece a coordenação dessas representações?	Quais representações da Função Afim conseguem mobilizar no desenvolvimento das atividades propostas pelo professor? Conseguem coordenar essas

	Alguma representação é mais priorizada?	representações?
Transformações por tratamento	Quais tratamentos referentes à Função Afim são propiciados? Como ocorre a abordagem desses tratamentos? Se sobressaem às conversões?	Conseguem utilizar os tratamentos da Função Afim de forma adequada? Como abordam esses tratamentos?
Transformações por conversão	Explora as transformações por conversão? Entre quais representações favorece esse tipo de transformação (RA, RG, RT, RLN)? Em quais sentidos propicia as conversões (RA→RG, RG→RA, RLN→RA, RLN→RG, RA→RT, dentre outros)? Algum tipo de conversão é mais priorizado na sala de aula? Favorece a heterogeneidade dos sentidos das conversões? Nas conversões que utilizam o RG como registro de chegada, qual procedimento costuma adotar (a abordagem ponto a ponto, extensão do traçado ou a interpretação global das propriedades figurais)? E as conversões inversas (ou seja, aquelas que têm o RG como registro de partida) são	Conseguem mobilizar as transformações por conversão? Entre quais representações conseguem essa mobilização (RA, RG, RT, RLN)? Em quais sentidos conseguem mobilizar as conversões (RA→RG, RG→RA, RLN→RA, RLN→RG, RA→RT, dentre outros)? Manifestam preferência por algum tipo de conversão em específico? Conseguem coordenar a heterogeneidade dos sentidos das conversões? Nas conversões que utilizam o RG como registro de chegada, qual procedimento costumam utilizar para a realização das atividades propostas pelo professor (a abordagem ponto a ponto, extensão do traçado ou a interpretação

	propiciadas na relação didática?	global das propriedades figurais)? Conseguem mobilizar as conversões inversas (RG→RA)?
Variação de congruência ou não congruência semântica	Utiliza mais atividades que possuem ou não congruência semântica? Quais graus de não congruência semântica costumam prevalecer nas atividades escolhidas para serem vivenciadas na sala de aula?	Conseguem desenvolver as atividades não congruentes? Como se comportam diante de atividades com alto grau de não congruência semântica?

Fonte: O autor (2022).

Conforme já salientado, a opção por colocar primeiramente os elementos referentes ao CD no esquema da figura 11 não diminui a importância e o valor dado à TRRS em nossa tese. Optamos por essa “sequência” nos apoiando no pensamento de Chevallard, Bosch e Gascón (2001) que veem o CD como a “pedra de toque” de toda a organização didática. Assim, entendemos que todas as negociações referentes ao CD acontecem em termos de RRS. Não queremos aqui atribuir maior ou menor importância a qualquer um dos referenciais ou mensurar o grau de amplitude de algum deles, o que entendemos e queremos deixar claro é que todos os elementos do CD (expectativas, negociações, regras, rupturas, renegociações e efeitos) somente emergem na relação didática via representações semióticas mobilizadas pelos sujeitos dessa relação, haja vista que a única forma de acesso aos objetos matemáticos é por meio das suas representações semióticas (DUVAL, 2012).

Assim, não queremos passar a ideia de que o CD se sobressai à TRRS ou que os elementos dessa última teoria são considerados “inferiores” em relação aos do CD, mas que os RRS permeiam todas as manifestações, implícitas ou explícitas, do CD na relação didática e, compreender inter-relações entre esses dois referenciais, pode ser por demais importante para os processos de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos aqui, mais particularmente, da Função Afim. Em nossas análises tomaremos esses elementos de forma inter-relacionada e não unidirecional, conforme sugerem as setas duplas entre os elementos considerados na figura 11.

7 ABORDAGEM ANALÍTICA E INTERPRETATIVA DOS DADOS

Nesse capítulo apresentamos a abordagem analítica e interpretativa dos dados, dividida em três tópicos: no tópico 7.1, analisamos a entrevista realizada com a professora “Rita” com o intuito de identificar as suas expectativas em relação aos estudantes e ao saber em jogo, assim como identificar, *a priori*, indícios do Contrato Didático por ela estabelecido e as representações semióticas da Função Afim por ela mobilizadas na relação didática.

No tópico 7.2, analisamos, de acordo com o esquema da figura 11, a gravação em vídeo das 20 (vinte) aulas ministradas presencialmente (conforme transcrições²⁶ disponíveis no Apêndice F) pela professora “Rita” sobre a Função Afim, para 22 (vinte e dois) estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Cabe destacar que, no momento de realização da pesquisa, a escola estava atendendo aos estudantes presencialmente em sistema de rodízio, conforme Protocolo Setorial da Educação de Pernambuco para o enfrentamento da pandemia de COVID-19, por isso esse quantitativo de estudantes.

No tópico 7.3, apresentamos uma síntese das inter-relações discutidas nos tópicos 7.1 e 7.2. Na transcrição da gravação em vídeo das aulas, quando o nome do(a) estudante não é citado utilizamos o termo “aluno” e suas variações em gênero e número para facilitar a distinção entre o gênero e número do(s) estudante(s) participante(s) do trecho transcrito.

A seguir, iniciamos nossa discussão sobre a entrevista, realizada antes da gravação em vídeo das aulas ministradas pela professora “Rita”. Nessa análise, não discorreremos sobre cada pergunta realizada (conforme roteiro disponível no Apêndice D e transcrições disponíveis no Apêndice E), mas utilizamos apenas os recortes dessa entrevista considerados necessários para ilustrar as inter-relações em estudo.

7.1 ANÁLISE DA ENTREVISTA: ELEMENTOS DO CONTRATO DIDÁTICO E DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS IDENTIFICADOS *A PRIORI*

Iniciaremos nossas considerações a partir da entrevista realizada pois, por meio das narrativas da professora “Rita”, pudemos identificar, *a priori*, elementos

²⁶ Essas transcrições foram escritas tal qual foram as falas dos interlocutores, respeitando a linguagem de cada um deles. Optamos por omitir o uso da palavra “*sic*” nas citações diretas que aparecem no texto.

importantes do Contrato Didático estabelecido por ela, como o tipo e o fenômeno das expectativas, e as representações semióticas da Função Afim por ela mobilizadas na relação didática. Dessa análise inicial, identificamos a presença de pelo menos dois tipos de CD que parecem ser por ela estabelecidos na sala de aula. Um CD do tipo aproximativo (CHARNAY, 1996) e outro do tipo “tradicional”, normativo (CHARNAY, 1996). No primeiro caso, o professor assume a postura de mediador dos processos de ensino e de aprendizagem e atribui mais responsabilidade aos estudantes em relação à sua aprendizagem.

De acordo com a professora “Rita”, essa é a sua postura quando em contextos fora da pandemia, como evidencia o extrato seguinte, no qual ela fala do planejamento coletivo (com os outros professores de matemática da escola): “[...] no nosso planejamento coletivo, pensamos em oficinas, como fazemos todos os anos, mas, descartamos devido à pandemia. Todos os anos trabalhamos com oficinas, jogos, mas, esse ano, tivemos que descartar”²⁷.

A proposição de metodologias de ensino que utilizem oficinas e/ou jogos dentre outras dinâmicas de grupo evidencia o papel mediador do professor uma vez que promove a ruptura com a ideia de que ensinar é transferir conhecimentos, passando a provocar o estudante à construção desse conhecimento. Além disso, tal postura pode favorecer a aprendizagem e motivar a entrada no jogo didático, entretanto, o contexto de pandemia parece ter limitado esse tipo de abordagem na sala de aula.

Para esse período de pandemia, “Rita” tenta implementar as estratégias de Ensino Híbrido, ou seja, aliar métodos de aprendizado *online* e presencial, embora a aceitação dos estudantes não tenha sido a esperada. No extrato seguinte, apontamos o diálogo entre “Rita” e o pesquisador, no qual ela fala sobre as restrições impostas pela pandemia e as estratégias por ela adotadas para acompanhar os estudantes que apresentam mais dificuldades.

Rita: Bom, atualmente, dou o assunto na sala e, como não posso me deter muito, e ficar voltando, por causa do tempo, porque se não atrasa muito o currículo, que precisamos cumprir... tem a sugestão de videoaulas, pego muitas no canal do “Educa PE”, quando as do “Educa PE” são poucas, busco em outros canais do *YouTube* alguns vídeos mais assim, para a linguagem deles. Mando slides, outros exercícios resolvidos, mando [ênfase na voz] mas só que, quando chega na sala que você pergunta: olharam o material que foi enviado, ou no grupo do *WhatsApp* ou no *Google Sala de Aula*? A resposta sempre é: não! Está bastante difícil!

²⁷ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

Pesquisador: Nesse caso, a proposta de Ensino Híbrido não tem funcionado bem?

Rita: Não! Porque não há retorno do aluno²⁸.

O extrato acima, além de ilustrar a tentativa da professora “Rita” em manter o jogo didático por meio de estratégias que coloquem o estudante como centro desse jogo, evidencia também a falta de devolução didática (BROUSSEAU, 1986) por parte dos estudantes. À luz do CD, para que o estudante possa construir a sua aprendizagem ele precisa aceitar entrar no jogo didático e assumir o seu papel de aprendiz (devolução). A tarefa do professor consiste em garantir os “meios” para que isso aconteça, ou seja, estruturar o meio (*Milieu*) que leve o estudante a agir sobre o saber em cena, transformando-o em conhecimento.

Como fica claro, no contexto ilustrado, o estudante não entra no jogo didático, o que pode levar a professora a reorganizar o CD estabelecido. A ideia de reorganização do Contrato Didático foi uma contribuição teórica apontada por Almeida (2016), para o qual “a reorganização seria resultado de uma ‘ruptura branda’ ou do esforço do professor para evitar a ruptura, ‘ajustando’ o jogo didático” (ALMEIDA, 2016, p. 204).

As duas últimas sentenças do extrato em citação acima ilustram bem isso (“**Pesquisador:** Nesse caso, a proposta de Ensino Híbrido não tem funcionado bem? **Rita:** Não! Porque não há retorno do aluno”). Esse aspecto pode fazer com que a professora acabe tendo que renegociar o CD para que o jogo didático não pare, o que pode levá-la a instituir um CD mais “tradicional” (CD normativo) na relação didática, segundo tipo de CD identificado no discurso da professora “Rita”.

Nesse segundo caso, do Contrato Didático “tradicional” – normativo (CHARNAY, 1996), o professor toma para si a tarefa de “transferir” conhecimentos, fato evidenciado também no extrato acima quando revela a preocupação da professora em relação ao cumprimento do currículo instituído e ao tempo necessário para isso. Segundo Câmara dos Santos (1997, p. 105), “o vocabulário do professor de matemática está impregnado pela palavra tempo”, sobretudo num “quadro formado por limitações de ordem institucional e ligadas à questão do avanço do programa escolar, em que a preocupação principal pode ser resumida no sucesso ou fracasso em cumprir o programa estabelecido pela autoridade escolar”.

²⁸ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

Entretanto, ainda de acordo com esse autor, “ao contrário do tempo de ensino, que influencia o sistema didático em sua totalidade, o tempo de aprendizagem apresenta-se como um tempo localizado, próprio ao estudante, e que regula o ritmo de aprendizagem de cada um” (CÂMARA DOS SANTOS, 1997, p. 112). Assim, além da preocupação com o tempo para cumprimento do currículo, o professor precisa pensar no tempo de aprendizagem do estudante e na necessidade de um “ajuste” no contrato didático para que haja maior articulação entre o tempo de ensino e o tempo de aprendizagem.

Outro aspecto evidenciado na entrevista realizada com a professora “Rita” nos leva à reflexão sobre o Contrato Didático diferencial (BRITO MENEZES, 2006; SCHUBAUER-LEONI; PERRET-CLERMONT, 1997). Esse não consiste, necessariamente, em um modelo específico de Contrato Didático, mas permeia todos eles uma vez que a própria natureza do Contrato Didático é ser diferencial, ou seja, para qualquer contrato estabelecido pelo professor em sala de aula, em alguns momentos da relação didática, emergirá um CD diferencial.

Esse CD é bastante comum na relação didática, entretanto, o professor precisa ter o cuidado para não supervalorizar um estudante (ou grupo de estudantes) pelo qual ele tenha expectativas positivas e subvalorizar aquele pelo qual tenha expectativas negativas. Alguns trechos da entrevista sugerem a negociação desse tipo de CD, como o seguinte, em que a professora fala sobre o fato de considerar alguns estudantes “mais capazes” que outros e da forma como lida com eles: “[...] Embora, na hora da explicação eu tente tratar de modo igual, mas, na hora das atividades, eu tento trazer mais atividades para eles, já que eles terminam as atividades antes dos outros, eu sempre trago “um extra” porque eles têm condições de avançar mais que os outros²⁹”.

Considerando a perspectiva apontada acima pela professora, dois aspectos podem ser considerados: um, do ponto de vista “positivo” e outro do ponto de vista “negativo”. O ponto de vista positivo diz respeito ao fato de os estudantes considerados “mais avançados” em termos de aprendizagem poderem avançar com as atividades “extras” propostas pela professora, o que evita que sejam “nivelados por baixo” e que acabem se desmotivando em participar de uma aula em que será trabalhado algo de que eles já sabem. Entretanto, e esse é o ponto negativo, aqueles

²⁹ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

estudantes considerados “menos capazes” acabam perdendo esse tipo de atividade “mais avançada” e sendo sempre “nivelados por baixo”, como se não fossem capazes de avançar na aprendizagem.

Esse mesmo aspecto “reducionista” da capacidade do estudante, que compõe uma expectativa negativa da professora, também pode ser presenciado em outros momentos. Primeiro, quando se refere ao LD adotado e utilizado na escola, que não é o que ela escolheria, porque segundo ela “ele é um livro de uma linguagem bem complicada [...]”. Para os estudantes que nós temos, **que vêm bem fraquinhos da base**, esse não era o livro ideal...³⁰. Segundo, no momento em que “antecipa” as dificuldades enfrentadas pelos estudantes quando do estudo da Função Afim, conforme extrato abaixo.

no meu planejamento, peguei um *slide*, com a intenção de utilizá-lo, mas, depois de analisá-lo percebi que não daria certo porque a linguagem era difícil, muita álgebra. Peguei também um resumo de um módulo que utilizamos em outra turma, mas também tinha muita álgebra, até para a construção do gráfico, então, percebi que para essa turma também não daria certo, então descartei também. Foi quando peguei o fascículo e achei mais de acordo com a linguagem deles, por isso, vou utilizá-lo³¹.

Percebemos, pelos trechos acima, que a expectativa negativa do professor em relação a um estudante ou grupo de estudantes pode levá-lo subverter o seu planejamento didático e a fazer, conforme já mencionado, um “nivelamento por baixo” dos estudantes, o que pode levar a diversos reflexos negativos em sala de aula. Como exemplo disso, podemos citar os efeitos do CD e a proposição de apenas alguns registros de representação semiótica do objeto matemático de estudo (no nosso caso, a Função Afim), considerados pelo professor como aqueles que os estudantes são capazes de aprender. Esse fato poderá desencadear em um processo de aprendizagem não condizente com a faixa etária (ou ano/escolaridade) do estudante.

De acordo com Duval (2012a) não há *noesis* sem *semioses*, portanto, se faz necessário, no ensino da matemática, a exploração de diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático em sala de aula, uma vez que a apreensão conceitual desse objeto se dará pela mobilização e coordenação de pelo menos dois desses registros de representação (DUVAL, 2012a). Assim, as

³⁰ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021, com **grifo nosso**.

³¹ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

expectativas do professor em relação ao estudante podem afetar o resultado e as atitudes desses estudantes frente ao saber em jogo.

Ainda no que se refere ao fenômeno das expectativas, foi possível também evidenciar aqueles referentes ao estudante, segundo a ótica da professora entrevistada. Quando fala do desafio de tentar engajar a metade da turma considerada por ela como desmotivada, que não costuma participar da aula, ela aponta que “eles falam que nunca aprenderam matemática, que não sabem como chegaram no primeiro ano e que não é agora que eu vou fazer eles aprenderem”³². Esse fato, pode ser reflexo de CD anteriores, nos quais os estudantes não foram motivados a construir o conhecimento matemático, mas, apenas a reproduzir algoritmos e fórmulas propostas pelos professores.

Quanto às expectativas em relação ao saber em jogo, a Função Afim, a professora “Rita” as revela quando questionada sobre suas experiências anteriores em turmas do 1º ano do Ensino Médio e sobre as dificuldades mais comuns apresentadas pelos estudantes, conforme ilustra o recorte seguinte.

Rita: As [dificuldades] mais comuns estão relacionadas à álgebra mesmo. Eles sempre perguntam porque misturar tanta letra com números. Eles não conseguem diferenciar o que são as variáveis e o que são os coeficientes. Eles sempre acham que o coeficiente angular é o x . O b , eu acho que é o que sempre fica mais claro para eles, por conta do valor fixo. Eles sempre confundem o a com o x . Você pergunta: o que é o coeficiente angular? Geralmente a resposta que vem é: x . Ou então você pergunta o que é o x e eles respondem que é o coeficiente angular. Eles fazem essa confusão³³.

Segundo “Rita”, os estudantes costumam trazer bastante dificuldades do Ensino Fundamental, principalmente aquelas relacionadas à álgebra, como nas equações do 1º grau. Para ela, uma compreensão ampla das equações do 1º grau é um pré-requisito para a compreensão da Função Afim. Nas palavras da professora, “[...] eu acho que lá da base, ele tem que vir muito bem, com a equação do 1º grau... acho que se ele não tiver nenhuma dúvida com equação do 1º grau, ele vai ter muita facilidade com a Função Afim”³⁴.

Os recortes acima nos remetem às dificuldades já apontadas na literatura no que concerne ao ensino da álgebra. Particularmente no que se refere ao ensino da Função Afim, diversos estudos discutidos nesse trabalho apontam para as

³² Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

³³ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

³⁴ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

dificuldades dos estudantes em lidar com o registro algébrico. Além disso, o recorte acima ilustra, ainda, a ênfase dada pela professora “Rita” ao registro algébrico, aspecto intimamente relacionado ao Contrato Didático por ela estabelecido em sala de sala.

No que tange às representações semióticas da Função Afim mobilizadas e propiciadas na relação didática, os dados da entrevista revelam que a professora participante da pesquisa sugere mobilizar aquelas apontadas na literatura: linguagem natural, linguagem algébrica, representação tabular e representação gráfica. No excerto que segue, no qual ela fala sobre a forma com que costuma introduzir o ensino da Função Afim em sala de aula e como considera que o professor deve ensinar Função Afim para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, destaca:

Rita: Sempre trago um problema, para contextualizar. Costumo ler o problema e dou um tempo para que eles possam observar as relações e montar a lei de formação. [...] Começando pela definição. Depois domínio, imagem, contradomínio, o gráfico, o zero da função, os coeficientes, seguido de problemas com a Função Afim, depois, como encontrar o coeficiente angular³⁵.

Conforme o trecho acima ilustra, ela sugere utilizar a linguagem natural (ao propor problemas contextualizados), a linguagem algébrica (ao trabalhar com a definição de Função Afim e a lei de formação, dentre outros) e a representação gráfica (ao sugerir a construção de gráficos pelos estudantes). Sobre esse último registro (o gráfico), a professora sugere que prefere trabalhar o esboço do gráfico com os estudantes por meio de uma abordagem que se aproxima da abordagem global de propriedades figurais proposta por Duval (2011a), embora, em alguns momentos utiliza também a abordagem ponto a ponto.

Sob a ótica da TRRS, a fala da professora endossa aquilo defendido por Duval, (2012a) no que se refere à necessidade, quando do ensino dos objetos matemáticos, da exploração das múltiplas representações desses objetos. Do ponto de vista do Contrato Didático, esse fato revela a preocupação da professora em estruturar o meio (*Milieu*) para que o estudante possa, em interação com esse meio e o saber em jogo, construir conhecimento. No trecho seguinte, trazemos um recorte no qual a professora “Rita” fala sobre como costuma proceder ao realizar a construção do gráfico da Função Afim.

³⁵ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

Rita: Geralmente, eu costumo trabalhar com as propriedades dos coeficientes. Começo com as propriedades dos coeficientes, depois, proponho também a construção por meio da atribuição de valores para x e y , para ir esboçando o gráfico, mas, eu prefiro utilizar as propriedades dos coeficientes porque fica mais amplo. Eles precisam saber porque são aqueles valores, porque aquele ponto de x tem que ser aquele valor, porque o de b fica lá no eixo y ... fica mais claro na mente deles do que só ir ligando os valores, por tabela³⁶.

Podemos perceber ainda, no trecho acima, além da opção apontada pela professora por utilizar uma abordagem que se aproxima da abordagem de interpretação global de propriedades figurais, que ela também utiliza as tabelas, outro RRS da Função Afim bastante utilizado nas salas de aulas, sobretudo quando da utilização da abordagem ponto a ponto para o esboço do gráfico da função. Nesse quesito, Araújo (2021) constatou que a abordagem ponto a ponto, com tratamentos na expressão algébrica, e a abordagem ponto a ponto apoiada no registro tabular e tratamento na expressão algébrica, foram as principais estratégias utilizadas por alguns dos estudantes ao realizarem as transformações por conversão.

De acordo com esse autor, nas atividades de reconhecimento da Função Afim dada em seu registro algébrico ou gráfico e vice-versa, pôde-se constatar que a maioria dos estudantes o fazem de maneira inadequada, por meio da correspondência entre as intersecções do traçado do RG com os eixos coordenados e as unidades simbólicas do RA, o que, segundo ele, pode ser caracterizado como um falso reconhecimento das unidades significativas a serem postas em correspondência. Para esse autor, esses resultados revelam a necessidade de se trabalhar em situações de ensino, quando das conversões entre esses dois registros, a abordagem de interpretação global de propriedades.

Conforme Duval (2011a), a abordagem ponto a ponto não favorece a compreensão do estudante no que se refere à interpretação global de propriedades figurais, entretanto, a utilização dessa abordagem pode ser útil “quando se quer **LER** as coordenadas de algum ponto interessante (porque é ponto de intersecção com os eixos ou com alguma reta, porque é máximo etc.)” (DUVAL, 2011a, p. 98, **grifo nosso**).

Sobre o registro gráfico, a professora “Rita” aponta,

Rita: [os estudantes] sentem dificuldades [em lidar com esse registro]. Inclusive percebemos isso em turmas do terceiro ano. Em outros anos, L... [nome de outra professora de matemática da escola] tinha uma turma de

³⁶ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

terceiro ano e ela sempre se reclamava que Função Afim nunca entrava na cabeça deles. Ela sempre levava aulões, muitas atividades, simulados, outros professores [para trabalhar o conteúdo] mas, mesmo assim, eles não conseguiam entender³⁷.

De acordo com a professora “Rita”, é bastante comum os estudantes não avançarem no ensino da Função Afim, por apresentarem dificuldades em outros conteúdos matemáticos, como nas equações do 1º grau. É importante salientar que, conforme já visto nessa tese, diversas pesquisas (DELGADO; FRIEDMANN; LIMA, 2010; DELGADO, 2010; REIS, 2011; CARDOSO *et al.*, 2013; CARDOSO, 2015; ARAÚJO, 2021, dentre outras) trazem em seus resultados, debates sobre as dificuldades dos estudantes em relação ao conceito de Função Afim, principalmente no que se refere aos seus registros algébrico e gráfico.

Cardoso (2015), por exemplo, em pesquisa com graduandos dos 6º e 7º semestres do curso presencial de licenciatura em matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), destaca que os graduandos revelaram diversas lacunas conceituais em relação à compreensão acerca do conceito de Função Afim, com percepções fragmentadas das propriedades que envolvem esse conteúdo. Dentre outras falhas, a autora aponta a dificuldade de distinção clara entre função, equação e expressão algébrica; e a dificuldade em realizar as conversões, principalmente quando se consideram os registros algébrico e gráfico. De acordo com a autora, essas dificuldades podem estar ligadas principalmente ao desconhecimento das variáveis visuais pertinentes a cada registro e à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre esses dois registros de representação.

Araújo (2021), em pesquisa que analisou a conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da Função Afim, realizada com estudantes do Ensino Médio de duas escolas públicas estaduais de Garanhuns – PE, constatou que a maioria dos estudantes faz de maneira inadequada o reconhecimento desse tipo de função dada nesses registros. Segundo ele, isso ocorre porque os estudantes fazem um falso reconhecimento das unidades significativas a serem postas em correspondência, o que contribui para que a conversão entre essas representações semióticas se apresente como um obstáculo à aprendizagem matemática.

Com o objetivo de verificar a aproximação ou distanciamento entre o que foi revelado, previamente, na entrevista realizada e a prática da professora “Rita”,

³⁷ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

entendemos que adentrar no universo da sala de aula, e analisar a gravação em vídeo das 20 (vinte) aulas sobre Função Afim, por ela ministradas, foi crucial não somente para a constatação, ou não, desses aspectos evidenciados, no que se refere aos elementos do CD e às representações semióticas mobilizadas, mas também para a identificação de outros elementos da relação didática importantes para a elucidação das inter-relações objeto de estudo nessa tese. No tópico 7.2 trazemos a discussão referente aos aspectos identificados na gravação em vídeo das aulas da professora “Rita”.

7.2 ANÁLISE DO CONTRATO DIDÁTICO ESTABELECIDO E REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DA FUNÇÃO AFIM MOBILIZADAS NA RELAÇÃO DIDÁTICA

Nesse tópico, trazemos a análise da gravação em vídeo das 20 (vinte) aulas da professora “Rita” em que ela trabalhou com os estudantes os conceitos da Função Afim, buscando identificar, de forma inter-relacionada, os elementos do Contrato Didático estabelecido e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados. Embora o foco desse tópico seja a análise da gravação em vídeo das aulas, traremos também, sempre que necessário para implementar a discussão realizada, recortes da entrevista.

Conforme explicitado no capítulo 6 (percurso metodológico), nossa intenção aqui não é analisar se as aulas da professora “Rita” foram “boas” ou “ruins”, se a sequência de ensino por ela adotada foi ou não adequada; não faremos qualquer avaliação dessa natureza ou qualquer juízo de valor sobre as aulas gravadas em vídeo. Somente nos deteremos aos aspectos da entrevista e das aulas que possam nos ajudar a elucidar o objetivo geral desse estudo, que é “analisar inter-relações entre o Contrato Didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim”, conforme esquema apresentado na figura 11.

Importante salientar que, embora não seja a nossa intenção analisar, separadamente, os elementos inerentes a cada uma das teorias estudadas, mas sim colocá-los em constante diálogo o que, ao nosso ver, realçará inter-relações entre essas teorias; iniciamos nossas considerações a partir dos elementos do Contrato Didático. Essa escolha se deu, como já dissemos antes, não porque consideramos

esse fenômeno mais importante ou que se sobressaia à TRRS. Essa opção se deu porque entendemos e concebemos o CD conforme Brousseau (1986) e outros autores, como Chevallard, Bosh e Gascón (2001), que consideram esse fenômeno como a “regra do jogo”, a “pedra de toque” de toda relação didática.

Com isso, partimos dos elementos do CD, colocando-os em inter-relação com os elementos pertinentes da TRRS, conforme sugere o esquema da figura 11, segundo os seguintes subtópicos (que compreendem um agrupamento de categorias): 7.2.1 Caracterização/tipologia de CD estabelecido na relação didática; 7.2.2 Expectativas e negociações; e 7.2.3 Regras, rupturas e renegociações do CD estabelecido.

7.2.1 Caracterização/tipologia de CD estabelecido na relação didática analisada

Iniciando a análise das gravações em vídeo das aulas com foco em identificar o tipo de Contrato Didático estabelecido, evidenciamos a prevalência de um Contrato Didático eminentemente “tradicional” (ao longo dos subtópicos 7.2.2 e 7.2.3 trazemos recortes que ratificam essas análises), nos termos da abordagem tradicional de ensino, ou seja, um Contrato Didático normativo (CHARNAY, 1996). Embora seja perceptível, a partir da análise realizada, o esforço da professora “Rita” na tentativa por estabelecer um CD mais aproximativo (CHARNAY, 1996), se materializa na relação didática forte viés do CD tradicional.

Nesse tipo de contrato o professor traz definições, seguidas de uma série de exemplos, depois propõe algumas atividades baseadas nesses exemplos e, por fim, uma avaliação, nos mesmos moldes das atividades propostas, também chamado de CD normativo (CHARNAY, 1996). Segundo Brito Menezes (2006, p. 117), “o professor de matemática quase sempre tende a valorizar mais a etapa operacional”, no entanto, de acordo com Câmara dos Santos e Lima (2010), por vezes, a predominância desse tipo de ensino torna-se uma das causas de sérias dificuldades de aprendizagem por parte dos estudantes.

Quando da sua entrevista, a professora “Rita” salienta que costumava (antes da pandemia) vivenciar atividades com jogos e oficinas, nas quais ela assumia uma postura mais de mediadora dos processos de ensino e de aprendizagem, colocando o estudante como responsável pelo seu processo de aprendizagem, o que evidenciaria um CD do tipo aproximativo (CHARNAY, 1996). Entretanto, a dinâmica

atual, decorrente das restrições impostas pela pandemia de COVID-19 acaba influenciando o CD estabelecido em sala de aula.

A interface diferencial do CD, aqui entendida não como um tipo específico de CD, conforme já discutido, mas como uma de suas particularidades, pôde ser evidenciada em alguns momentos, inclusive manifestada pelos próprios estudantes, como quando no momento do estudo da identificação da declividade da Função Afim, por meio dos gráficos propostos pela professora no quadro (conforme discussões seguintes), ao indagar “Quem vai ser a primeira pessoa que vai vir responder?”³⁸ e os estudantes respondem “Maria! (estudante)”³⁹ pode sugerir que os estudantes consideram essa colega um diferencial na sala e que ela poderá resolver o problema proposto pela professora.

Esse fato pode decorrer de comportamentos do dia a dia, quando, possivelmente, a professora se dirige a essa estudante para desenvolver atividades por ela propostas com mais frequência que outros. Isso leva os demais estudantes a endossarem essas “altas” expectativas que a professora faz da estudante, o que pode, segundo Brito Menezes (2006) e Schubauer-Leoni e Perret-Clermont (1997), levar os demais estudantes a duvidarem da sua própria capacidade de aprendizagem. Nos subtópicos que seguem (7.2.2 e 7.2.3), trazemos a descrição e análise daquilo que foi evidenciado em sala de aula, no que se refere ao CD estabelecido, os registros de representação semiótica mobilizados e inter-relações entre esses dois. O subtópico 7.2.2, a seguir, aponta aspectos inerentes às expectativas e negociações instituídas ao longo do CD estabelecido.

7.2.2 Expectativas e negociações

Iniciando a sua aula, a professora “Rita” cumprimenta a turma e entrega uma “apostila” impressa aos estudantes (o fascículo por ela adotado, disponível no Anexo B). Em seguida, ela faz referência ao conteúdo estudado anteriormente, funções, e começa a introduzir a ideia de Função Afim para os estudantes. A professora inicia seu diálogo, negociação do saber em cena, por meio da apresentação da definição formal de Função Afim. Posteriormente a essa introdução, ela propõe a leitura do problema apresentado no quadro 18, constante no fascículo entregue aos estudantes:

³⁸ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021.

³⁹ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021.

Quadro 18 – Primeiro problema proposto pela professora “Rita” ao introduzir o conceito de Função Afim

Em certa cidade, o valor pago por uma corrida de táxi é igual a um valor fixo, chamado de bandeirada, no valor de R\$ 15,00, acrescido de R\$ 2,00 para cada quilômetro percorrido. Denominando y o valor total da corrida e x a distância percorrida, em quilômetros, escreva uma expressão algébrica que represente essa situação.

Fonte: Dados da pesquisa.

O objetivo da professora “Rita” ao propor tal problema foi fazer a conversão entre as representações dos registros em linguagem natural e o algébrico. O trecho seguinte ilustra parte dessa negociação.

Professora: Dando continuidade ao assunto que a gente começou naquele dia, funções... A gente já viu essas noções de funções, então a gente vai começar, Função Afim. O que é uma Função Afim? Alguém já ouviu falar em Função Afim? [Ninguém responde]. Função Afim é uma função polinomial do primeiro grau (anota no quadro). Vocês lembram de quando estudaram equação do primeiro grau? Lembram?

Alunos: Não!

Professora: Lembram qual a fórmula algébrica de uma equação do primeiro grau? [Ninguém responde] Bom, a Função Afim ela é definida como $f(x) = ax + b$ [anota no quadro]. A equação do primeiro grau a gente tinha: “ $ax + b = 0$ ”. Na função a gente tem “ $f(x) = ax + b$ ” ou o $f(x)$ a gente chama ele de y ; “ $y = ax + b$ ” [anota no quadro]. A gente sabe que o y e o x eles são par ordenado no plano cartesiano. Mas, o que é o “ a ” e o “ b ” na Função Afim? Alguém sabe? [Ninguém responde] O “ a ” e o “ b ” são coeficientes. O “ a ” é o coeficiente angular... E o b ? O que seria o b ? [Ninguém responde] O “ b ” é o coeficiente linear. Mais à frente a gente vai ver o que se trata cada um. Primeiro a gente vai começar na folha que entreguei a vocês. A gente tem um probleminha pra gente começar. Lembra quando a gente viu no assunto de funções, que eu trazia tabela e algumas funções e vocês montavam a lei de formação? A partir desse problema [ao apontar para o problema descrito na folha], que eu vou ler para vocês, a gente vai fazer a mesma coisa. ‘Em certa cidade, o valor pago por uma corrida de táxi é igual a um valor fixo, chamado de bandeirada, de 15 reais, acrescido de 2 reais, a cada quilômetro percorrido. Denominando y como o valor total da corrida e x a distância percorrida em km, escreva uma expressão algébrica que representa essa situação’. Então, a partir desse probleminha, a gente vai determinar qual a lei de formação⁴⁰.

A ação didática da professora nesse início de negociações acerca do “novo” saber em jogo, parece evidenciar a necessidade de uma associação, pelo menos em termos de linguagem algébrica, entre as equações do primeiro grau e a Função Afim. Essa negociação explícita surge porque a professora entende que as equações do primeiro grau são pré-requisitos para a compreensão da Função Afim, conforme evidenciado na entrevista realizada. Entretanto, relacionar a forma geral da Função

⁴⁰ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021.

Afim à forma geral da equação do primeiro grau pode evidenciar descontinuidades conceituais, como as apontadas por Lucas (2010), no que se refere aos significados das letras em um e em outro desses objetos matemáticos: incógnita, na equação e; variável, na função.

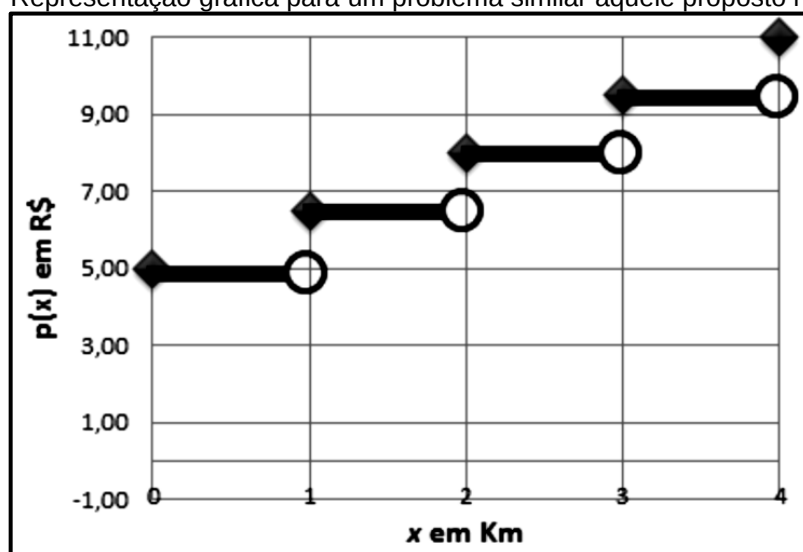
Sobre esse problema inicial (quadro 18) proposto pela professora “Rita”, cabe destacar a necessidade de o professor se manter alerta em relação a situações desse tipo quando trabalhadas em sala de aula. Autores como Chaquiam e Cabral (2019) e Machado da Silva (2020) chamam a atenção para dois aspectos importantes a serem considerados quando problemas dessa natureza, tidos como típicos no ensino da Função Afim, são propostos na sala de aula: o primeiro refere-se ao domínio de validade da função representada e o segundo à sua representação gráfica.

Sobre o primeiro aspecto, os autores destacam que, na maioria das vezes, fica subentendido que se trata de uma função real de variáveis reais. No entanto, esse fato precisa ser criteriosamente avaliado inicialmente pelo professor (antes de propor tais situações) e, posteriormente, pelo estudante, para poder analisar criticamente tal situação proposta. Quanto ao segundo aspecto, os autores destacam a necessidade de verificação se, de fato, as variáveis envolvidas no problema são contínuas ou discretas para não incorrer no erro de traçar uma reta quando se tratar de variáveis discretas.

No caso desse exemplo (quadro 18) trabalhado pela professora “Rita”, trata-se de um problema que envolve variáveis contínuas, no entanto, Machado da Silva (2020) chama a atenção ao fato de que, nos contextos reais, o taxímetro registra o valor a ser pago contabilizado em termos de quilômetros inteiros, ou seja, $\{0,1,2,3,4, \dots\} \in \mathbb{Z}$, enquanto que o gráfico contínuo sugere que $]0, +\infty[\in \mathbb{R}$, o que pode gerar incorreções conceituais por parte dos estudantes.

Sobre a representação gráfica para essa situação, os autores acima mencionados questionam se, verdadeiramente, essa é uma situação que ilustra uma Função Afim. De acordo com Machado da Silva (2020), considerando o fato de que, conforme mencionado acima, nos contextos reais, o taxímetro registra o valor a ser pago contabilizado em termos de quilômetros inteiros, a representação gráfica da situação proposta teria uma configuração similar à seguinte (figura 12).

Figura 12 - Representação gráfica para um problema similar àquele proposto no quadro 18



Fonte: Machado da Silva (2020, p. 79).

Segundo Machado da Silva (2020, p. 79) “esse comportamento constante por intervalos ou função escada é o mais adequado para a situação do taxímetro”, em vez de uma reta crescente, como costumeiramente tem sido apresentado em sala de aula.

No que se refere às escolhas didáticas da professora “Rita”, estas seguem a sequência usual de ensino em que se apresenta a definição da Função Afim para, posteriormente, propor a conversão entre o RLN e o RA. Esse fato evidencia o Contrato Didático por ela estabelecido e sugere certa adaptação ao jogo didático ao passo que, caso não apresentasse tal definição, o estudante poderia demonstrar ainda mais dificuldades para fazer a conversão (inferido a partir da baixa expectativa da professora em relação aos estudantes, revelada na entrevista realizada, conforme análise no tópico 7.1). Mesmo com a utilização dessa estratégia, a primeira negociação acerca do saber em cena revela a dificuldade dos estudantes para fazer a conversão proposta, conforme extrato que segue.

Professora: A gente tem um valor fixo, qual o valor fixo?

Aluna: Quinze!

Professora: O valor fixo é quinze [anotando no quadro]. E a cada quilômetro rodado, quanto que ele cobra?

Aluna: Dois reais

Professora [anotando no quadro a resposta da estudante]: a partir daqui vocês são capazes de montar a lei de formação? [Os estudantes ficam calados, então, a professora se dirige ao quadro]: presta atenção aqui! O valor de $f(x)$ é igual a $ax + b$. Tem um valor que é fixo e um valor que depende de x . Quem é o fixo, o “ a ” ou “ b ”?

Aluna [a mesma que respondeu aos questionamentos anteriores]: “ a ”

Professora: O “ a ” tá junto de quem?

Aluno: “ x ”!

Professora: Então ele vai depender de...?

Aluno [mesmo anterior]: “ x ”!

Professora: Ele vai ser o fixo? Não [ela mesma responde]. E o “ b ”? O “ b ” depende de alguém?

Aluno [mesmo anterior]: Não!

Professora: Então ele vai ser o nosso valor fixo. Então eu já sei que “ $f(x) = ax + 15$ ”. A gente tem outro valorzinho no problema, não tem? Quem é o valor?

Aluna: Dois!

Professora: O dois... vocês acham que é o “ a ” ou o “ x ”?

Alunos: O “ a ”

Professora [indo até o quadro e completando a fórmula]: Então a gente já formou a nossa lei de formação do nosso probleminha: “ $2x + 15$ ”...⁴¹.

Com o silêncio da turma, a professora precisa reorganizar o jogo didático para que a situação didática não deixe de existir e passa a dar dicas aos estudantes, para que possa facilitar a conversão. Conforme Brousseau (1986), essa atitude da professora a leva a incorrer nos efeitos do CD, o que pode prejudicar a construção do conhecimento por parte do estudante. Além disso, segundo Brousseau (2008, p. 90) “o professor não pode dizer previamente ao estudante qual é a resposta exata que espera dele, mas deve agir de modo que este aceite a responsabilidade de tentar resolver os problemas ou exercícios cuja resposta desconhece”, ou seja, a devolução didática, tão necessária no processo de construção do conhecimento.

De acordo com o diálogo anterior, a expressão algébrica que representa a situação dada em linguagem natural é “ $y = 2 \cdot x + 15$ ”, sendo “ y ” correspondente ao valor total pago pela corrida e “ x ” à distância percorrida (em quilômetros), conforme obtido pela professora “Rita”. Embora essa seja uma conversão com baixo grau de não congruência semântica, conforme a análise do fenômeno de congruência semântica que segue, os estudantes manifestaram bastante dificuldades em realizá-la. Essas dificuldades podem ser justificadas pela dificuldade de conversão entre registros de naturezas diferentes (multifuncionais e monofuncionais), conforme já apontado na literatura.

De acordo com o explicitado no capítulo 3, o fenômeno de congruência semântica segue os critérios estabelecidos por Duval (2009, 2012a), que são: 1) correspondência semântica das unidades significantes; 2) univocidade semântica terminal; e 3) conservação da ordem na organização das unidades significantes. Satisfeitos os três critérios anteriores, a conversão é dita congruente. Caso a conversão não atenda um, dois ou os três dos critérios elencados, será classificada,

⁴¹ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021.

respectivamente, como sendo de baixo, médio e alto grau de não congruência semântica.

Para a análise dos critérios do fenômeno de congruência semântica referente à primeira situação proposta pela professora “Rita” (quadro 18), adotamos a expressão $y = 15 + 2 \cdot x$ respeitando a ordem das unidades significativas do registro de partida, o RLN. Assim, considerando os critérios de congruência semântica (DUVAL, 2009, 2012a), temos que: o critério (1) é satisfeito, haja vista que unidades significantes no registro de partida mantém o seu significado no registro de chegada (por exemplo, a palavra “acrescido”, associada à operação de adição), mantendo assim, a correspondência semântica dos elementos significantes; o critério (2) não é atendido, pois a expressão em língua natural “para cada” é substituída pelo símbolo da operação de multiplicação, portanto, duas palavras do registro de partida correspondendo a um único símbolo (“.”) no registro de chegada, dessa forma, não mantém a univocidade semântica terminal.

Em relação ao critério (3), esse é atendido, pois a conversão conserva a ordem das unidades significantes (“valor pago pela corrida”; “valor fixo”; “acrescido”; “valor por quilômetro percorrido” $\Rightarrow y = 15 + 2 \cdot x$). Assim, dizemos que esse é um problema com baixo grau de não congruência semântica, pois, apenas um dos critérios apontados por Duval (2009, 2012a) não foi atendido.

Sob a ótica do Contrato Didático, o fato de a professora “Rita” optar por uma situação com baixo grau de não congruência semântica pode sinalizar a sua preocupação em manter estável o jogo didático e a tentativa de fazer com que os estudantes entrem nesse jogo, pelo fato de esse tipo de situação ser considerado mais simples do ponto de vista matemático. O fato de a professora “Rita” ter invertido a ordem dos termos da expressão no registro de chegada, o registro algébrico, em comparação com a ordem das unidades significativas do registro de partida, língua natural, pode tornar a conversão menos congruente e aumentar as dificuldades dos estudantes.

No entanto, essa inversão pode ser importante, do ponto de vista do ensino, para “quebrar” as expectativas dos estudantes em relação aos termos da expressão algébrica da Função Afim, uma vez que eles costumam esperar que o valor do coeficiente “ a ” sempre seja apresentado imediatamente após o símbolo da igualdade, conforme destacado por Gomes (2017). Segundo esse autor, “este fato pode ser

consequência da única forma apresentada ao estudante da Função Afim na forma $y = ax + b$, sem nenhuma outra variação” (GOMES, 2017, p. 55).

Sob a ótica da TRRS, a opção da professora “Rita” em propor uma situação com baixo grau de não congruência semântica favorece as transformações por conversão, embora, quanto mais avança nos níveis de escolaridade, mais condições o estudante terá de fazer conversões cada vez menos congruentes. No entanto, de acordo com Duval (1996, p. 376), “uma tarefa matemática muito simples pode ser muito complexa de um ponto de vista cognitivo”.

A partir dessa situação inicial (quadro 18) proposta pela professora “Rita”, também foi possível analisar as três operações discursivas mobilizadas, considerando o registro de partida da conversão, a língua natural, para a comunicação do objeto matemático em estudo. A operação discursiva de enunciação aparece na forma de enunciado do problema, que tem um valor social de ordem e um valor epistêmico de certeza, podendo também apresentar um valor lógico de verdade. Além da operação discursiva de enunciação, a designação surge também no enunciado do problema por meio das diferentes formas de designação da relação funcional estabelecida, para as quais foram utilizadas a expressão literal “ $f(x)$ ” e a letra “ x ”, isto é, uma representação algébrica.

Por fim, a operação de expansão discursiva de um enunciado completo também pode ser evidenciada quando da descrição do problema, a partir do discurso natural proferido pela professora “Rita”. Considerando as características das situações propostas pela professora “Rita” quando tomadas no registro em língua natural, a análise das operações discursivas segue essa mesma linha ou serão exatamente iguais a essa, fato pelo qual omitimos a análise para as situações seguintes.

Após a conversão realizada e obtenção da expressão algébrica da lei de formação da função dada no registro em língua natural, a professora “Rita” parte dessa expressão para calcular valores numéricos de uma função para um dado valor de “ x ”. Essa nova conversão, entre os registros algébrico e numérico, pareceu bem mais fácil para os estudantes, ao contrário da conversão anterior (RLN $\rightarrow$ RA), fato também já justificado na literatura uma vez que os registros algébrico e numérico têm a mesma natureza (ambos são monofuncionais). Ademais, essa última conversão é mais congruente do que a anterior, haja vista que o estudante só precisa compreender que o valor dado é substituível na expressão algébrica pelo “ x ” e fazer as manipulações necessárias por meio das operações matemáticas.

Dando continuidade à aula, a professora “Rita” passa a falar sobre as características da Função Afim e os casos particulares conforme a apostila (fascículo) entregue aos estudantes, fazendo a leitura desse material. Essas características e casos particulares foram apresentados e discutidos conforme segue, inclusive na sequência apresentada:

1) A representação gráfica de uma função do primeiro grau⁴² é sempre uma reta decrescente quando “ a ” for um número menor que zero; **2)** A representação gráfica de uma função do primeiro grau é sempre uma reta crescente quando “ a ” for um número maior que zero; **3)** Na função “ $f(x) = ax + b$ ”, se “ b ” for igual a zero, a função é dita linear, se “ b ” for diferente de zero, a função é dita Afim; **4)** O gráfico da Função Afim intercepta o eixo dos “ x ” na raiz da equação “ $f(x) = 0$ ” e, portanto, no ponto de abscissa “ $x = -\frac{b}{a}$ ”; **5)** O gráfico intercepta o eixo dos “ y ” no ponto $(0, b)$, que é o termo independente “ b ”, onde “ b ” é chamado coeficiente linear; **6)** Na Função Afim, “ $f(x) = ax + b$ ”, se o valor de $a = 1$ e $b = 0$, a função é chamada de função identidade; e **7)** Na Função Afim, “ $f(x) = ax + b$ ”, se o valor de $a = 0$ a função é chamada de função constante.

As negociações acerca das características “1” e “2” acima descritas, podendo-se ser reduzida a uma, que trata da declividade da reta representante da Função Afim, ocorrem de forma articulada por meio da identificação visual dessas características em esboços de gráficos da Função Afim (esboçados no quadro pela professora) e por meio da identificação dessas características quando da utilização do registro algébrico, analisando a relação entre os coeficientes expressos no registro algébrico e as características visuais do gráfico. Esse aspecto, segundo Duval (2011a), favorece as conversões entre representações desses dois registros (RG e RA), nos dois sentidos.

Foi também nesse momento em que a professora retomou a discussão acerca dos coeficientes, deixada “de lado” por ela no início da discussão sobre a Função Afim ([...] “o que é o “ a ” e o “ b ” na função afim? Alguém sabe? [Ninguém responde] O “ a ” e o “ b ” são coeficientes [...] Mais à frente a gente vai ver o que se trata cada um”⁴³).

⁴² Segundo a leitura realizada pela professora, a partir do material por ela utilizado em sala de aula (o fascículo). Conforme apresentado e justificado no capítulo 4, preferimos adotar a expressão “Função Afim” a “função polinomial do 1º grau”.

⁴³ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021.

No recorte seguinte, apresentamos parte da negociação empreendida entre professora e estudantes acerca dessas duas características e sobre os coeficientes da Função Afim, importantes elementos para a identificação das propriedades visuais quando do trabalho com a representação gráfica.

Professora: E a primeira característica, diz o que aí, para você? [referindo-se ao texto da apostila entregue] 'A representação gráfica de uma função do primeiro grau é sempre uma reta decrescente quando " a " menor que zero'. Qual é o " a " que ele fala? É esse aqui ó [apontando para a expressão algébrica da Função Afim ($y = ax + b$), escrita no quadro]... o coeficiente angular. O que é o coeficiente angular de uma Função Afim? [Ninguém responde...] O que é o coeficiente angular de uma Função Afim? [a professora insiste, mas, ela própria responde] O coeficiente angular de uma Função Afim, ele determina a declividade da reta, ou seja, ele determina se ela vai ser crescente ou decrescente. Quando é que ela vai ser crescente? Quando o ângulo aqui ó, da minha reta [mostrando no quadro o ângulo formado pelo eixo " x " do plano cartesiano e a reta desenhada]... nós temos aqui essa reta roxa [referindo-se à cor do lápis de quadro utilizada], esse ângulo formado aqui ó [mostrando no quadro o ângulo formado pelo eixo " x " do plano cartesiano e a reta desenhada] é... maior ou menor que noventa graus?

Alunos: Menor!

Professora: Menor! Então, quando meu ângulo aqui é menor que noventa graus, a minha função é?

Ricardo: Crescente!⁴⁴.

O recorte anterior evidencia dois aspectos importantes no trabalho com a Função Afim e, novas regras do Contrato Didático são evidenciadas, conforme análises no subtópico 7.2.3. O primeiro, diz respeito à identificação visual da representação gráfica desse tipo de função (a declividade): as ideias de ascendente (crescente) e descendente (decrescente) associadas ao ângulo formado pela reta representada e o eixo " x " do plano cartesiano.

O segundo, refere-se à análise das ideias anteriormente mencionadas, por meio da relação entre essas características visuais e os coeficientes da Função Afim expressa em seu registro algébrico. O coeficiente " a " recobre duas unidades significativas diferentes: o sentido da inclinação, definido em relação ao sinal desse coeficiente ($a > 0$ ou $a < 0$); e o ângulo, definido em relação ao inteiro 1 ($a = 1$, partição simétrica; $a < 1$, ângulo menor; $a > 1$, ângulo maior).

Na sua ação didática, a professora não trabalhou esse último aspecto apresentado, no que concerne à unidade significativa do coeficiente " a " em relação ao inteiro 1 (um) mas, apenas relacionando ao ângulo formado entre a reta e o eixo " x ". A adequada relação entre esses dois aspectos (visual/gráfico e registro

⁴⁴ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora "Rita" de 30 de jul. de 2021.

algébrico/coeficientes) poderá favorecer as conversões entre os registros algébrico e gráfico, sobretudo no sentido inverso dessas conversões ($RG \rightarrow RA$), haja vista que nesse sentido é levado em conta a análise global das propriedades figurais (DUVAL, 2011a).

A compreensão, por parte dos estudantes, sobre os aspectos acima discutidos pode facilitar a compreensão global dos conceitos de função, sobretudo, em situações que envolvam o reconhecimento da Função Afim por meio dos seus registros algébrico e/ou gráfico. Nesse sentido, a pesquisa de Araújo (2021), realizada com estudantes do Ensino Médio, cujo objetivo foi analisar a conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da Função Afim, apontou que a maior parte dos estudantes pesquisados estabeleceu uma correspondência direta, e equivocada, entre as intersecções do traçado do registro gráfico e as unidades simbólicas do registro algébrico ao reconhecerem as Funções Afim representadas em seus registros gráfico e algébrico.

Os resultados dessa pesquisa ratificam as expectativas da professora “Rita”, apresentadas anteriormente na análise da entrevista, no que se refere à “confusão” que os estudantes fazem em relação aos coeficientes da Função Afim: “Eles não conseguem diferenciar o que são as variáveis e o que são os coeficientes. Eles sempre acham que o coeficiente angular é o x [...] Eles sempre confundem o a com o x ”⁴⁵.

Quanto às características descritas nos itens “3”, “6” e “7”, que se referem a casos particulares da Função Afim, embora não trabalhadas na sala de aula nessa sequência imediata, a relação didática seguiu a mesma sequência metodológica: a professora leu com os estudantes a definição de cada caso particular e apresentou alguns exemplos ilustrativos, tanto no registro algébrico quanto no registro gráfico. No subtópico 7.2.3 retomamos as negociações que se referem a esses itens, para enunciar regras do contrato didático instituídas a partir dessas negociações.

No que se refere às características “4” e “5”, essas apontam para o momento de discussão acerca de duas unidades significantes no registro algébrico e seus correspondentes elementos visuais pertinentes no registro gráfico: o coeficiente “ a ” e o termo independente “ b ” e suas relações com a declividade da reta, o ângulo formado e os pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados (x e y). Nesse

⁴⁵ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021.

momento, entra em cena o conceito de zero da Função Afim (também chamado pela professora de raiz da função), decorrente da relação entre esses dois coeficientes.

Ao discutir sobre o conceito de zero da Função Afim (haja vista que a discussão acerca dos coeficientes e suas relações com os aspectos do gráfico já fora tratada anteriormente), várias foram as dificuldades apresentadas pelos estudantes. Podemos associar essas dificuldades à maior necessidade de manipulação de símbolos algébricos quando do trato com esse conceito, conforme veremos no recorte da transcrição da aula, mais adiante.

Essas dificuldades já faziam parte das expectativas da professora “Rita”, manifestadas na entrevista, haja vista que ela menciona que havia realizado um momento de “revisão” dos conceitos de “Equação do 1º grau” e “Sistemas de equações do 1º grau” segundo ela, “pré-requisitos” para uma melhor aprendizagem dos conceitos de Função Afim. O excerto abaixo apresenta parte das negociações em torno do conceito de zero da Função Afim na relação didática.

Professora: Esse pontinho sobre o eixo “ x ” é chamado de raiz da função. O que quer dizer ser raiz da função? A raiz da minha função é quando meu “ y ” é igual a zero. A raiz, também chamada de zero da função. O que vocês acham que acontece quando eu colocar um zero aqui [apontando para o “ y ” da expressão da função] e substituir o valor na minha equação? Eu tenho “ $y = ax + b$ ”. Eu sei que no pontinho marcado no gráfico, eu tenho um valor desconhecido para “ x ”, mas eu conheço o meu valor “ y ”, que é quem?

Aluna: Zero!

Professora: Eu tenho o valor de “ y ”?

Alunos: Tem!

Professora: Qual é?

Alunos: Zero!

Professora: Então, “ $0 = ax + b$ ”! Vou trocar quem de lugar? Vou trazer o meu “ ax ” para o primeiro membro da equação. Ele tá positivo ou negativo?

Alunos: Positivo!

Professora: Quando eu trocar de membro, ele passa?

Alunos: Negativo!

Professora: Então, “ $-ax = b$ ”. E agora, o que eu faço, se eu quero encontrar o valor de “ x ” aqui? Somente o “ x ”! Eu tenho aqui “ $-ax = b$ ”, e eu quero encontrar somente o valor de “ x ”... [Ninguém responde] Quando eu tenho aqui, uma equaçãozinha “ $2x = 10$ ”, o que é que eu faço para encontrar o valor de “ x ”? [Ninguém responde... a professora insiste!] O que é que eu faço para encontrar o valor de “ x ” aqui [referindo-se à equação escrita no quadro: “ $2x = 10$ ”]?⁴⁶.

Percebendo as dificuldades dos estudantes para encontrar a fórmula algébrica que determina o zero da Função Afim, a professora propõe um exemplo utilizando uma expressão com coeficientes numéricos ($2x = 10$) para auxiliar na compreensão.

⁴⁶ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021.

Mesmo lançando mão dessa estratégia, os estudantes manifestaram bastante dificuldades em lidar com os tratamentos das equações do 1º grau. A professora propõe uma retomada desse conceito (mesmo já havendo feito isso em momentos anteriores), para poder dar prosseguimento ao estudo da Função Afim.

Sem a compreensão do conceito de equação do 1º grau e seus tratamentos possíveis, seria bastante difícil para os estudantes avançar no estudo da Função Afim, particularmente naquilo que se refere ao registro algébrico, como no caso do cálculo do zero da função, por exemplo; e, conseqüentemente, nas conversões $RG \rightarrow RA$. Essa atitude da professora sinaliza que ela propicia/mobiliza, na relação didática, a heterogeneidade dos sentidos, conforme proposto por Duval (2003a; 2011a), como veremos posteriormente.

Durante as negociações referentes ao cálculo do zero da função, parece emergir marcas de CD anteriores no que se refere à dificuldade dos estudantes quanto à manipulação de valores negativos nas expressões algébricas (sejam elas equações ou funções). Como exemplo disso, podemos destacar a passagem na qual a professora pede exemplos de Funções Afim aos estudantes e eles só os apresentam com números positivos. O extrato seguinte remete a essa negociação.

Professora: Menos “ b ” sobre “ a ”. Olha, encontrei a equação que determina a raiz da minha função. O “ x ” aqui da minha raiz é igual a menos “ b ” sobre “ a ”. E o que é que isso quer dizer? [Ninguém responde] Vou pegar alguns exemplos, que a gente vai ver! **Sílvia, me dê um exemplo de uma Função Afim!** [Sílvia fica em silêncio] Ó! Eu sei que a minha Função Afim é da forma “ $y = ax + b$ ”! Você só tem que criar um valor para “ a ” e um valor para “ b ”! Diga aí! Diga um valor para “ a ”!
Alunos: Um número, Sílvia!
Sílvia: Cinco!
Professora: “ $f(x) = 5x + \dots$ ” e um valor para “ b ”!
Sílvia: Dois!
Professora: Você quer **positivo ou negativo?**
Alunos: **Positivo é mais fácil!**
Sílvia: Positivo!⁴⁷.

Conforme ilustra o extrato anterior, os estudantes expressam tacitamente a sua preferência pelos números inteiros positivos (“**Positivo é mais fácil!**”⁴⁸), fato que leva a professora a sugerir uma ruptura desse CD (possivelmente trazido pelos estudantes, de outros contextos educacionais) que traz uma regra implícita que parece propor: “vamos utilizar sempre valores positivos porque estes são mais fáceis de manipular!”. Assim, na continuação da negociação acima, a professora pede um novo exemplo a

⁴⁷ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021, com **grifo nosso**.

⁴⁸ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021, com **grifo nosso**.

outro estudante, momento em que ela sugere a ruptura desse CD, conforme podemos ver no extrato que segue.

Professora: Eu vou pedir a Ruth para me dá uma função e, Ruth vai escolher uma pessoa para encontrar a raiz dessa função!

Ruth: $f(x)$ igual...

Professora: **pode usar números negativos também viu! Vocês só querem usar números positivos!**⁴⁹.

Na sequência dessa negociação, a estudante Ruth sugere a função " $f(x) = 10x - 3$ " e aponta o estudante Ricardo para encontrar o zero. Embora tenha atendido o pedido da professora e proposto um exemplo que utilizasse números negativos, Ruth o faz utilizando valor negativo apenas para o termo " b ", mas não para o " a ", tendência que se seguiu para os demais exemplos apresentados pelos estudantes, embora a maioria deles tenha proposto exemplos com ambos os termos positivos.

Após finalizada essa tarefa, a professora sugere alguns exemplos de gráficos, esboçados por ela no quadro, para que os estudantes pudessem identificar, a partir destes, os elementos estudados: coeficientes, declividade da reta, zero. Essa postura da professora sinaliza, mais uma vez, uma preocupação com a heterogeneidade dos sentidos das conversões (DUVAL, 2003a; 2011a).

Ainda no decurso dessas negociações, a professora "Rita" propõe a resolução de uma atividade impressa, contendo cinco problemas: dois apresentados em linguagem natural e três contendo representações mistas (envolvendo a linguagem natural e o registro tabular), para conversão em linguagem algébrica. O primeiro problema proposto (quadro 19), assim como o problema inicial trabalhado pela professora (quadro 18), foi um problema que envolvia uma conversão entre representações nos registros língua natural e algébrico, com baixo grau de não congruência semântica.

Quadro 19 – Item nº 01 da primeira atividade proposta pela professora "Rita"

Numa fábrica de bichos de pelúcia, o custo para produção de determinado modelo é de R\$ 12,50 por unidade, mais um custo inicial de R\$ 250,00.

- a) Escreva a fórmula da função que representa o custo total da produção.
- b) Determine o custo de produção de 50, 80 e 100 unidades do produto.

Fonte: Dados da pesquisa.

⁴⁹ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora "Rita" de 30 de jul. de 2021, com **grifo nosso**.

Para esse problema (quadro 19), correspondente ao item “um” da atividade proposta pela professora “Rita”, a exemplo daquele apresentado no quadro 18, trata-se de um exemplo contextualizado, o que sinaliza um ponto positivo sob a ótica das teorias discutidas nesse trabalho. No entanto, cabe alertar para o fato de que a maioria das questões contextualizadas, como essa do quadro 19, apresenta domínio discreto e não contínuo, o que pode gerar equívocos conceituais, sobretudo quando solicitada a representação gráfica da situação. Não diferir o domínio discreto do contínuo pode levar o estudante a esboçar uma reta, como representação gráfica para a situação proposta, em vez de um conjunto de pontos dispostos no plano cartesiano, como seria o caso da situação apresentada no quadro 19. Esse fato não foi discutido pela professora “Rita” quando trabalhou esse problema com os estudantes.

Sobre a conversão necessária para a solução de tal problema (quadro 19), uma conversão entre representações dos registros língua natural e algébrico foi desenvolvida pela professora “Rita” em interação com os estudantes. Esse fato corrobora a proposição de Melo *et al.* (2014) de que, costumeiramente, as conversões são realizadas em sala de aula pelos professores, como exemplos para os estudantes, a quem cabe apenas o papel de imitar os procedimentos apresentados. De acordo com esses autores, “do ponto de vista cognitivo é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão, no entanto, se elas são realizadas pelo professor [...], isso pouco contribui para a aprendizagem do aluno” (MELO *et al.*, 2014, p. 06).

Entretanto, para Brousseau (1986), o professor deve propor as condições, ou seja, estruturar o meio (*Milieu*) para que o estudante construa conhecimentos. Assim, para levar o estudante a mobilizar diversos registros de representação do objeto matemático estudado e coordená-los, o professor precisará romper com o Contrato Didático tradicional (normativo) e adentrar num Contrato Didático aproximativo, no qual o estudante precisará assumir a sua responsabilidade perante o saber em cena e transformá-lo em conhecimento.

Esse último aspecto parece um desafio para a professora “Rita”, haja vista a falta de devolução didática por parte dos estudantes. Mas por outro lado, a devolução precisa tornar-se uma das regras do contrato didático (JONNAERT, 1996) para que a aprendizagem ocorra.

Em seguida, mostramos parte das negociações entre a professora “Rita” e seus estudantes acerca do item “a” desse primeiro problema proposto na lista de atividades (quadro 19).

Professora: Eu vou dar alguns probleminhas e a gente vai encontrar a lei de formação desses probleminhas. Vamos lá! [A professora inicia a leitura dos problemas para os estudantes]

“Numa fábrica de bichos de pelúcia, o custo para produção de determinado modelo é de doze reais e cinquenta centavos por unidade, mais um custo inicial de duzentos e cinquenta reais”. O custo inicial é de duzentos e cinquenta reais, e para cada unidade de bichinho é doze reais e cinquenta centavos [frisa!]. [continua a leitura] Letra “a”: escreva a fórmula da função que representa o custo total da produção. [Se dirige ao quadro e pergunta aos estudantes]: quem seria o valor fixo? O doze e cinquenta ou o duzentos e cinquenta?

Alunos: Duzentos e cinquenta” [a professora anota no quadro: “250”].

Professora: Seria o “a” ou “b”? [Os estudantes ficam confusos, uns respondem “a”; outros, “b”. A professora considera a resposta dos estudantes que respondem “b”]. E, qual o valor que está em função de “x”?

Alunos: O doze e cinquenta!

Professora: Então, o meu doze e cinquenta vai ser o valor do meu?

Alunos: “a”!

Professora: O meu doze e cinquenta tem que multiplicar quem?

Alunos: “x”!⁵⁰

A partir das negociações acima é obtida a expressão que define a lei de formação da função solicitada no item “a” que é dada pela expressão “ $f(x) = 12,50x + 250,00$ ”, sendo “ $f(x)$ ” correspondente ao custo de produção e “ x ” à quantidade de unidades de bichos de pelúcia produzida. Analisando a conversão realizada, em termos dos critérios de congruência semântica (DUVAL, 2009, 2012a), temos que: o critério (1) é satisfeito, haja vista que unidades significantes no registro de partida mantém o seu significado no registro de chegada (a palavra “mais”, associada à operação de adição, por exemplo), mantendo, assim, a correspondência semântica dos elementos significantes; o critério (2) não é atendido, pois a expressão em língua natural “por unidade” é substituída pelo símbolo da operação de multiplicação, portanto, duas palavras do registro de partida correspondendo a um único símbolo (“.”) no registro de chegada, dessa forma, não mantém a univocidade semântica terminal.

Ainda, o critério (3) é atendido, pois a conversão conserva a ordem das unidades significantes (“custo total de produção”; “R\$ 12,50 por unidade”; “mais custo inicial de R\$ 250,00” $\Rightarrow f(x) = 12,50 \cdot x + 250,00$). Assim, dizemos que esse é um problema com baixo grau de não congruência semântica.

⁵⁰ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021.

A professora “Rita” seguiu essa estratégia de resolução (compartilhando a resolução com a participação dos estudantes) para o próximo item, deixando os três restantes para serem desenvolvidos pelos estudantes em casa. Na aula seguinte, ela inicia cobrando dos estudantes a resolução proposta, entretanto, apenas dois estudantes o fizeram, gerando uma frustração na professora do ponto de vista das suas expectativas. Esse fato revela o descumprimento, por parte dos estudantes, de um dos três elementos importantes que caracterizam o Contrato Didático: a ideia de compartilhar responsabilidades.

“A relação didática não está sob controle excessivo do professor, pois a responsabilidade do aprendiz é levada em conta: ele deverá aceitar realizar seu ofício de estudante” (JONNAERT, 2002, p. 178) para que a aprendizagem ocorra. Considerando o fato de os estudantes não terem realizado a tarefa em casa, a professora “Rita” retoma a correção, a partir do item 3, seguindo a mesma estratégia da aula anterior.

Esse fato reafirma, por um lado, a expectativa dessa professora em relação à devolução didática empreendida pelos estudantes quanto às atividades desenvolvidas (seja na sala aula ou fora dela), o que sugere que os estudantes não entraram no jogo didático no que se refere a essa atividade. Por outro lado, revela a necessidade de reflexão por parte da professora sobre o seu papel diante da devolução didática, haja vista que a devolução só será possível se o estudante aceitar jogar o jogo da relação didática.

Assim, para que haja devolução, com efeito sobre a aprendizagem do estudante, é necessário que ele tenha aceitado previamente esse princípio quando da negociação do Contrato Didático, ou seja, conforme já mencionamos, a devolução precisa tornar-se uma das regras do Contrato Didático estabelecido (JONNAERT, 1996).

Por se constituir algo natural no contexto da sala de aula e, nesse caso particular, também devido à própria ideia de currículo adotada (o currículo em espiral, conforme visto no capítulo 4), ao apresentar um dado registro, ao mesmo tempo a professora “Rita” realiza transformações com esses registros, ou a partir deles. Ou seja, ao propor os registros, a professora acaba realizando ou tratamentos ou conversões ou ambas as transformações, nesse caso em específico, evidenciando as características ou casos particulares da Função Afim em estudo (ou alguns deles). Por exemplo, o item 5 da lista propunha o problema abaixo (quadro 20).

Quadro 20 – Item nº 5 da primeira lista de atividades proposta pela professora “Rita”

Um veículo é abastecido por meio de um dispositivo provido de dois relógios. Um deles marca o tempo de abastecimento em minutos e, o outro, o volume de combustível fornecido ao tanque do veículo, em litros⁵¹.

Tempo em minutos (t)	Volume em litros (l)
0	3
5	5,5
10	8
15	10,5
20	13
25	15,5

Construa um gráfico correspondente à situação (volume em função do tempo).

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme o quadro 20, o comando da questão solicita apenas a conversão entre os registros em linguagem natural, com suporte no registro tabular, e o registro gráfico. Entretanto, a professora “Rita” extrapola esse comando e propõe, também, uma conversão do registro em linguagem natural, com suporte no registro tabular, para o registro algébrico. O extrato seguinte mostra tal situação.

Professora: Mas, se eu fizesse a lei de formação, como que eu faria? Se eu oferecer um ponto extra, alguém saberia me dizer qual a lei de formação? A expressão algébrica aqui, que representa o meu gráfico ou minha tabela?

Aluna: “t” de “x”, zero de “x”!

Professora: E aí? Eu quero meu volume em litros, né? O meu volume é em função do meu tempo. E, aí?

Aluno: Três!

Professora: Três?

Aluno: Três “x”?

Aluno: “t”!

Professora: Só tem o “t”? Tá faltando alguma coisa, não tá? Ninguém vai se arriscar? Vamos lá! A gente descobriu o quê? Que a relação é... dois e meio. Após cinco minutos, meu volume deu um pulo de dois e meio a mais, certo? De cinco em cinco minutos. Se eu fizesse de um em um, o que eu faria? Eu vou dividir o meu dois e meio por cinco, certo? Quanto é dois e meio dividido pra cinco? Se eu pedisse vinte e cinco dividido pra cinco?⁵²

⁵¹ Chamamos atenção ao fato de esse item da atividade tratar a grandeza “volume” como sinônimo da grandeza “capacidade”, algo corriqueiro nas salas de aula, no entanto, a não distinção entre esses dois conceitos pode levar o estudante a erros em outras situações.

⁵² Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 03 de ago. de 2021.

Embora o comando da questão solicitasse apenas a conversão $RLN \rightarrow RG$, possível de ser realizada com o suporte do registro tabular por meio da abordagem ponto a ponto, a professora “Rita” propõe uma conversão $RLN \rightarrow RA$, realizando uma conversão intermediária, com a utilização do registro tabular como registro auxiliar, com o intuito de “validar” a construção do referido gráfico.

Conforme o extrato acima propõe, os estudantes não conseguiram compreender e mobilizar tal conversão ($RLN \rightarrow RA$) mas, com a mediação da professora, avançaram até chegar ao registro algébrico buscado: “ $v(t) = 0,5t + 3$ ”, registro de chegada na conversão $RLN \rightarrow RA$. Para validar a construção gráfica (conforme já mencionado) a professora propõe “uma prova” utilizando o RA obtido e os dados da tabela apresentada no problema para obtenção dos valores numéricos da função e confrontação dos dados dessa tabela com o gráfico construído.

Nas palavras da professora, “Vamos provar, pra ver se dá certo ou não! Antônio [estudante], quando o meu “ t ” for zero... zero vírgula cinco vezes zero, mais três... igual a três! Tá certo? [...] Essa minha expressão algébrica tá certa?”⁵³.

O trecho transcrito anteriormente ilustra, ainda (assim como em diversos outros momentos), a tentativa da professora em fazer os estudantes entrarem no jogo didático, haja vista que a devolução empreendida por eles no decurso das aulas deixava bastante a desejar, conforme já era sinalizado por “Rita” na entrevista. Na tentativa de manter a situação didática, a professora propõe uma negociação em torno de bonificação para que os estudantes participassem da aula (“Se eu oferecer um ponto extra, alguém saberia me dizer qual a lei de formação?”⁵⁴, outra marca do Contrato Didático estabelecido.

Analisando a situação trabalhada (quadro 20), em termos de variação de congruência ou não congruência semântica, consideremos, inicialmente, a primeira conversão realizada (entre as representações dos registros tabular e algébrico). Para essa conversão, temos que a expressão algébrica que representa o registro de chegada é dada por: $v(t) = 0,5t + 3$, sendo “ $v(t)$ ” correspondente ao volume de combustível fornecido ao tanque do veículo e “ t ” ao tempo gasto (em minutos) para completá-lo.

⁵³ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 03 de ago. de 2021.

⁵⁴ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 03 de ago. de 2021.

Na aula, essa expressão é obtida por meio da estratégia de descoberta da regularidade presente na representação do registro tabular, conforme sugerido na figura 13, uma vez que a professora “Rita” ainda não havia trabalhado com seus estudantes a estratégia de obtenção da expressão da reta que representa o gráfico da Função Afim por meio de pontos dados.

Figura 13 – Registro tabular dado na situação proposta na questão 5, trabalhada pela professora “Rita”

	Tempo em minutos (t)	Volume em (litros)	
	0	3	
+5	5	5,5	+2,5
+5	10	8	+2,5
+5	15	10,5	+2,5
+5	20	13	+2,5
+5	25	15,5	+2,5

Fonte: Acervo da pesquisa.

Da estratégia utilizada pela professora “Rita” temos que a passagem de uma linha para a seguinte, na primeira coluna da tabela, requer que se adicionem cinco unidades ao valor da linha imediatamente anterior (como indicado pelas setas curvas à esquerda na figura 13). De modo análogo, a passagem de uma linha para a seguinte, na segunda coluna da tabela, requer que se adicionem dois inteiros e cinco décimos ao valor da linha imediatamente anterior (como indicado pelas setas curvas à direita na figura 13). Os tratamentos exigidos antes da realização da conversão revelam que essa conversão não é congruente, pois a representação de partida não transparece na representação de chegada.

Analisemos, então, o grau de não congruência semântica da situação dada (quadro 20), a partir dos critérios apontados por Duval (2009, 2012a): o critério (1) é satisfeito, haja vista que unidades significantes no registro de partida mantêm o seu significado no registro de chegada, mantendo, assim, a correspondência semântica dos elementos significantes; o critério (2) não é atendido, pois, pela estratégia utilizada pela professora, tratamentos sobre os dados apresentados no registro tabular foram

necessários para a obtenção do coeficiente angular do registro algébrico, não mantendo a univocidade semântica terminal.

Finalmente, o critério (3) também não é atendido, haja vista a necessidade de “reordenamento” das unidades significativas do registro tabular para se obter o coeficiente angular no registro algébrico. Assim, dizemos que esse é um problema com médio grau de não congruência semântica pois, dois dos critérios propostos por Duval (2009, 2012a) não foram atendidos na conversão.

Para a segunda conversão realizada a partir da situação proposta (quadro 20), $RA \rightarrow RG$, ainda considerando a variação de não congruência semântica, temos que: o critério (1) é atendido uma vez que as unidades significativas do RA possuem relação um a um com as variáveis visuais do RG: o sinal do coeficiente “ a ” indica a inclinação da reta; o valor de “ a ” indica se o ângulo formado pela reta e o eixo “ x ” será maior ou menor que 90° (ou seja, se será agudo ou obtuso) ou, ainda, se terá uma partição simétrica; o sinal do coeficiente “ b ” indica se o intercepto da reta com o eixo “ y ” ocorre acima, abaixo ou coincide com a origem do plano cartesiano (nesse caso, ocorre acima). Portanto, as unidades significativas do RA possuem correspondência semântica com as variáveis visuais do RG.

O critério (2) não é satisfeito, pois a cada unidade significante da representação de saída não existe apenas um significado no registro de chegada, como é o caso do valor do coeficiente “ a ”, que comporta duas interpretações no RG, uma relacionada à inclinação da reta e outra ao ângulo formado entre a reta e o eixo “ x ” do plano cartesiano. Logo, não mantém a univocidade semântica terminal.

Por fim, o critério (3) também não é satisfeito pois, a “ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão” (DUVAL, 2009, p. 69). No caso em análise, o registro de partida tem dimensão 1D e o registro de chegada 2D. Com isso, dizemos que esse é um problema com médio grau de não congruência semântica pois, dois dos critérios propostos por Duval (2009, 2012a) não foram atendidos nessa conversão.

Das escolhas didáticas da professora até aqui discutidas, apontamos uma reflexão em relação ao cálculo do zero da Função Afim. Quando ela propõe “nos gráficos, a gente tem o valor da raiz... o valor de “ b ”. Pra gente encontrar o coeficiente

angular, como que a gente faria? **Posso usar as duas fórmulas:** a fórmula geral [referindo-se à definição da Função Afim] e a da raiz?”⁵⁵.

Na verdade, embora ela tenha proposto como duas formas para encontrar o zero da função, ambas dizem respeito ao mesmo procedimento sendo o que ela propõe como segunda fórmula uma simplificação do que ela chama de primeira. Ao nosso ver, esse fato (de que na verdade ambas as formas são “a mesma”) não fica claro para o estudante o que pode levá-lo a tratar as “duas” formas, de fato, como formas distintas, evidenciando futuras descontinuidades conceituais para esse estudante.

Na aula, a professora “Rita” propõe inicialmente o uso da fórmula “ $x = -\frac{b}{a}$ ” para o cálculo do zero da função e, em seguida, propõe o uso de tratamentos algébricos na expressão da definição da Função Afim, para obtenção dessa fórmula. Os estudantes demonstram clara preferência pela “primeira forma”, fato que se justifica pelo CD ainda arraigado nas salas de aula de matemática, que evidencia o uso de fórmulas prontas para serem aplicadas aos dados dos problemas.

Após esse momento, a professora sugere a realização de três itens de uma atividade utilizando o livro didático adotado na escola. No primeiro item os estudantes deveriam determinar o zero de cada função dada; no item dois, os estudantes deveriam construir o gráfico cartesiano das funções; e, no item três, os estudantes deveriam identificar o erro cometido quando da construção do gráfico de uma dada Função Afim. O excerto abaixo ilustra parte dessa negociação no que se refere ao item 1 (um) da atividade:

Professora: Se eu fizesse “ $f(x) = -4x + 10 = 0$ ”? O que eu faço agora? Eu tenho primeiro e segundo membro. Eu pego o membro que tem o “ x ” e permaneço nesse lado, e passo o outro pra onde? Bora minha gente! O que a gente faz? Vou colocar menos dois pontos pra quem tá dormindo na aula! O número que tá sozinho eu passo pra onde? Vamos povo! Eu tenho o primeiro membro. Eu não vou responder, vocês quem vão responder. Quem tá com o “ x ” eu deixo onde? No primeiro membro, né? E o que tá sozinho? [silêncio na sala]

Aluna [timidamente]: Eu coloco para o segundo membro.

Aluna (outra): Vai Carol!

Professora: O que foi que Carol falou?

Aluna: Ela falou menos dez.

Professora: Quatro “ x ”, o que mais? Não é possível! Vocês passaram o Ensino Fundamental quase todo e não sabem resolver uma equação do primeiro grau! Vai Yasmin, responde!

Yasmin: Menos dez!

⁵⁵ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 30 de jul. de 2021, com **grifo nosso**.

Professora: Sílvia e Ruth, vocês já estão dizendo que não sabem? Menos quatro “ x ” igual a menos dez, dá quanto Érica? Como que eu faço? Quando menos quatro multiplica “ x ”, faço como? Faz o quê? Menos quatro tá multiplicando “ x ”, aí eu faço como? Vou trazer uma lista com centenas de equação de primeiro grau pra vocês e tabuada!⁵⁶

A passagem acima revela a dificuldade dos estudantes em lidar com a resolução da equação do 1º grau, ou seja, um tratamento da Função Afim no registro algébrico. Revela, ainda, a tentativa da professora de não deixar fracassar a relação didática e fazer com que os estudantes entrem no jogo didático. A devolução didática parece um desafio, conforme apontado pela professora “Rita” na entrevista preliminar.

Esse saber, a resolução de equações do 1º grau, é apresentado aos estudantes, segundo o Currículo de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, por isso a professora se mostra surpresa pelo fato de eles não conseguirem resolver as equações do 1º grau propostas no item “um” da atividade e encontrar o zero da Função Afim correspondente: “Vocês passaram o Ensino Fundamental quase todo e não sabem resolver uma equação do primeiro grau!”⁵⁷.

Ao propor: “Vou trazer uma lista com centenas de equação de primeiro grau pra vocês e tabuada!”⁵⁸, “Rita” revela o seu “desespero” para não deixar fracassar a relação didática, ao mesmo tempo em que revela, mais uma vez, outra marca do Contrato Didático por ela estabelecido na relação didática, o CD normativo (CHARNAY, 1996), ou seja, aquele de tendência tradicional. Infere-se da fala da professora que, “fazer com que os estudantes resolvam, repetidas vezes, um mesmo tipo de situações faz com que eles aprendam”.

O recorte da transcrição da aula da professora “Rita” acima citado remete-nos à pesquisa de Brito Menezes (2006). Ao analisar o Contrato Didático em relação à iniciação à álgebra, a pesquisadora aponta algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes quanto à resolução de equações do 1º grau. Segundo essa autora, os estudantes apresentaram dificuldades em estabelecer relações entre os termos da equação do 1º grau e seguir os procedimentos de resolução que conduziram à descoberta da incógnita (x), isto é, o valor que satisfaz à igualdade.

Ainda segundo Brito Menezes (2006), essas dificuldades advêm do fato de os estudantes conceberem o sinal de igualdade apenas como resultado de uma

⁵⁶ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 17 de ago. de 2021.

⁵⁷ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 17 de ago. de 2021.

⁵⁸ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 17 de ago. de 2021.

operação e não como uma equivalência entre os membros dessa igualdade. Para os estudantes participantes da pesquisa realizada por Brito Menezes (2006), esse saber era “novo” para eles, daí algumas dificuldades serem mais evidentes e aceitáveis, como a não compreensão do sinal de igualdade enquanto equivalência.

Entretanto, para os estudantes da professora “Rita”, participantes da nossa pesquisa, esse fato suscita preocupação, conforme manifestado por ela, porque, não saber tratar com esse registro da Função Afim pode desencadear outras dificuldades, como a não compreensão das propriedades globais do gráfico, necessárias para as conversões entre as representações nos registros algébrico e gráfico, sobretudo no sentido $RG \rightarrow RA$.

Na sequência dessa negociação, a professora “Rita” inicia os trabalhos com a construção do gráfico da Função Afim por meio da conversão entre as representações dos registros algébrico e gráfico desse tipo de função, tarefa requerida no item “dois”, da atividade do livro didático, por ela solicitada aos estudantes. No trecho que segue, ilustramos parte das negociações empreendidas entre “Rita” e seus estudantes para a apropriação desse conceito.

Professora: Para determinar o coeficiente linear... quem é o coeficiente linear?

Aluna: [A professora se dirige ao quadro para mostrar como constrói o gráfico de uma função] Eixo horizontal é o quê?

Alunos: “x”!

Professora: E o vertical?

Alunos: “y”!

Professora: Esse gráfico vai ser crescente ou decrescente?

Alunos: Decrescente!

Professora: Por quê?

Alunos: Porque tem o menos no “a”!

Professora: Quem é o valor de “b”?

Alunos: Dez!

Professora: O valor de “b”, fica na vertical ou horizontal?

Alunos: Vertical!

Professora: Sobre o eixo “x” fica algum valor, qual é?

Alunos: “a”!

Professora: Não! Sobre o eixo “x” fica um valor, quem é esse valor? A gente chama ele de quem?

Aluna: Raiz!

Professora: Quem é a raiz da função que a gente encontrou?

Alunos: Dois vírgula vinte e cinco!

Professora: Olho o meu coeficiente angular e determino se a minha reta vai ser crescente ou decrescente. Ela vai ser o quê?

Alunos: Decrescente!

Professora: A gente tem outro modo de construir. Aí vocês me dizem qual é o mais fácil. Nesse vocês vão atribuir valores a “x”. Artur, quando “x” for

menos um, qual o valor do “y”? Menos quatro vezes menos um mais dez, dá quanto? [substituindo o valor atribuído a “x” a, na expressão]⁵⁹.

O recorte acima aponta o diálogo entre a professora “Rita” e estudantes em que negociam, explicitamente, como proceder para a construção do gráfico da Função Afim. A proposta da professora sugere duas abordagens: a primeira, que ela chama em sua entrevista de “uso das propriedades dos coeficientes” e a segunda, que propõe a abordagem ponto a ponto Duval (2011a). A primeira abordagem proposta pela professora se aproxima da abordagem de interpretação global das propriedades figurais, segundo Duval (2011a).

Ao propor aos estudantes a estratégia de construção do gráfico da Função Afim utilizando o que ela chama de “propriedades dos coeficientes”, a professora “Rita” mostra aos seus estudantes a relação entre esses coeficientes e o comportamento do gráfico da função. Até certo ponto, essa estratégia leva o estudante a compreender o papel de cada coeficiente no comportamento do gráfico, ou seja, propicia ao estudante a associação entre as unidades significantes do registro algébrico e as unidades visuais no registro gráfico.

No entanto, para que, de fato, essa relação entre unidades significantes e unidades visuais fique mais evidente para o estudante, é necessário **“variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro** [ou mudar uma variável visual mantendo as duas outras constantes e ver as modificações que acontecem na expressão]” (DUVAL, 2011a, p. 103, **grifo nosso**). Dessa forma, o estudante poderá “ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de representação de um objeto ou de uma informação” (DUVAL, 2011a, p. 99).

O recorte acima revela ainda a passagem entre as duas abordagens para a construção do gráfico, propostas pela professora, sem que essa justifique para seus estudantes sobre as possibilidades de uso de cada uma delas. Conforme discutido ao longo desse texto, a abordagem ponto a ponto não favorece a compreensão global das propriedades visuais do gráfico e, por consequência, não favorece a conversão inversa, isto é, a conversão entre as representações do registro gráfico para o registro algébrico.

⁵⁹ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 17 de ago. de 2021.

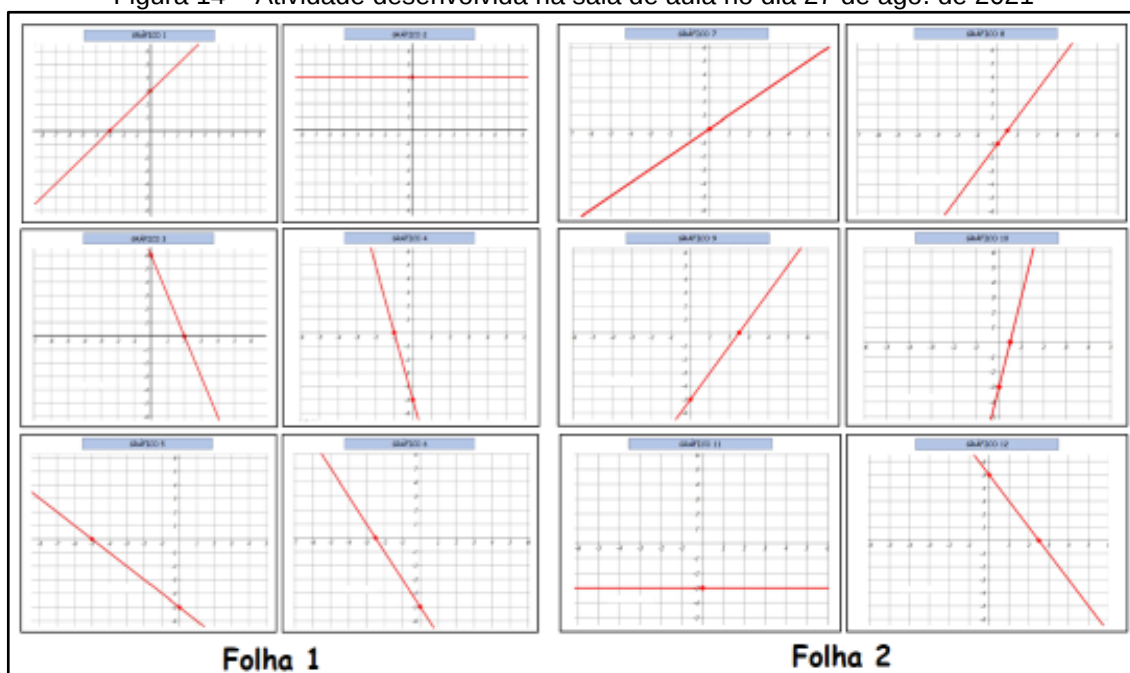
Os riscos para o estudante, quando o trabalho com a construção do gráfico fica focado na abordagem ponto a ponto é que esse se vê “desarmado” quando da conversão $RG \rightarrow RA$ pois, muitas vezes ele associa a construção do gráfico àqueles valores sugeridos pelo professor quando do trabalho com a conversão $RA \rightarrow RG$, o que torna praticamente impossível a conversão $RG \rightarrow RA$ uma vez que, para que essa possa ser realizada, **“é preciso identificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrá-las”** (DUVAL, 2011a, p. 102, **grifo nosso**). Mesmo sem a professora deixar claro para os estudantes essas possibilidades, eles preferem a primeira abordagem, que se aproxima da abordagem global, conforme o excerto seguinte: **“Professora:** Mais fácil assim, ou do jeito que fizemos agora? [comparando as duas abordagens]. **Maria:** O outro jeito. **Aluna:** O menos complicado possível. **Professora:** Qual é? **Aluna:** O primeiro!”⁶⁰.

As negociações anteriores sugerem que a professora, mesmo com a tendência ao CD normativo (CHARNAY, 1996), tenta utilizar em suas aulas uma abordagem que se aproxima da abordagem global das propriedades figurais para a construção do gráfico da Função Afim, o que favorece a aprendizagem do estudante. Entretanto, no decurso das suas aulas ela “oscila” entre as duas abordagens por ela propostas aos estudantes, o que ratifica, em certa medida, aquilo apontado por Charnay (1996) de que o professor não utiliza exclusivamente um modelo de contrato, embora, “apesar de tudo, cada professor faz uma escolha, consciente ou não e de maneira privilegiada, de um deles” (CHARNAY, 1996, p. 40).

Na sequência das aulas, e mais precisamente na aula seguinte às negociações acima apontadas, em que a professora propõe aos estudantes o trabalho com a construção do gráfico da Função Afim, ela passa a trabalhar a conversão inversa, ou seja, a conversão entre representações do registro gráfico para o registro algébrico. Ainda na aula anterior, a professora “Rita” entrega para os estudantes uma folha contendo uma malha quadriculada com esboços de gráficos da Função Afim desenhados (figura 14). Cada estudante recebeu uma cópia contendo a representação gráfica de seis Funções Afim, de um total de doze que seriam discutidas na aula seguinte. Alguns estudantes receberam as seis primeiras representações (um a seis) e outros, as seis últimas (sete a doze).

⁶⁰ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 17 de ago. de 2021.

Figura 14 – Atividade desenvolvida na sala de aula no dia 27 de ago. de 2021



Fonte: Acervo da pesquisa.

A professora “Rita” inicia a aula seguinte fazendo a conversão $RG \rightarrow RA$ para o gráfico 1. Em seguida, ela convida os estudantes para irem ao quadro fazer o mesmo para os gráficos restantes. O excerto seguinte traz um extrato das negociações empreendidas nessa aula.

Professora: Vamos lá! Vamos corrigir a atividade da aula passada. Vocês vão ter que olhar o gráfico, retirar os valores e substituir em “ a ” e em “ b ”! Vou fazer o gráfico 1: aqui tem dois pontos no gráfico: menos três e três. Que ponto é esse aqui, “ a ” ou “ b ”? [apontando para o ponto sobre o eixo y].

Aluna: “ b ”!

Professora: “ b ” igual a quanto?

Aluna: Três.

Professora: O ponto sobre o eixo “ x ” é a raiz da função, que é o “ x ”. E sobre o eixo “ y ” é quem? “ b ”, que é o coeficiente linear. Falta encontrar quem?

Aluna: “ a ”!

Professora: Como é que a gente faz pra encontrar o “ a ”? [ninguém responde] A gente tem a fórmula da raiz da função que é “ x ” igual a menos “ b ” sobre “ a ”, e a gente pode usar quantos valores nessa fórmula? [ninguém responde] A gente tem o valor de “ x ”, o valor de “ b ” e o valor de “ a ”, três valores. Mas, aqui a gente usa quantos?

Aluna: Dois.

Professora: Dois. Quem é que vai sobrar?

Aluna: “ a ”.

Professora: Então a gente vai encontrar quem?

Aluna: O valor de “ a ”.

Professora: Primeiro, substituir o valor de “ x ”. Quem é o valor de “ x ”?

Aluna: Menos três.

Professora: Menos três igual... o valor de “ b ”, quem é?

Aluna: Três.

Professora: Três, sobre o valor de “ a ”. Como é que a gente resolve agora?

Aluna: Regra de três.

Professora: Meios pelos extremos, uma regra de três. Menos três vezes “a”? [ninguém responde] Menos três “a”, igual um vezes menos três? [ninguém responde] Menos três! O menos três está multiplicando o “a”, vai passar à?

Aluna: Dividir.

Professora: “a” igual menos três dividido por menos três. Menos com menos?

Alunos: Mais!

Professora: Três dividido por três?

Alunos: Um!

Professora: Então, agora eu tenho o valor de “a”, que é um e o valor de “b”, que é três. Quem será o meu “ $f(x)$ ”? O que eu tenho que fazer? Substituir o valor de “a” e o valor de “b”. Vai ficar como?

Aluna: “f” de “x” igual, um “x” mais três.

Professora: Gráfico 2, quem vem? Ninguém se candidata? Vou chamar então! Elba! [a estudante hesita] Vem Elba! [a estudante se dirige ao quadro]⁶¹.

O extrato acima mostra parte da negociação entre a professora “Rita” e seus estudantes para o trabalho com a conversão entre representações dos registros gráfico e algébrico. Esse tipo de conversão requer do estudante uma compreensão global da relação existente entre as unidades visuais no registro gráfico e as unidades significantes do registro algébrico, colocando-as em correspondência. Daí, a importância de o trabalho na conversão RA → RG priorizar a abordagem global em detrimento da abordagem ponto a ponto para que o estudante possa, de fato, identificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrá-las (DUVAL, 2011a), fazendo-as corresponder às unidades significantes no registro algébrico.

A escolha didática da professora de propiciar em suas aulas a conversão entre as representações de registros, nesse caso particular o algébrico e o gráfico, nos dois sentidos, favorece a coordenação entre esses registros. Segundo Duval (1996, p. 365) “Não basta que haja um desenvolvimento de cada registro. É essencial que os diferentes registros que o sujeito tem à sua disposição, ou que a educação se esforce por fazê-lo adquirir [...], sejam coordenados”.

Essa escolha sinaliza uma preocupação da professora em relação à natureza diferente dos conteúdos de cada representação e contraria, o que é um fato positivo, aquilo apontado por Duval (2003a, p. 20) de que, “[...] geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado em um sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”.

Dando continuidade à sequência das aulas, a professora “Rita” aborda as inequações do 1º grau, associando-as ao estudo do sinal da Função Afim. Essa abordagem que associa o estudo das inequações ao estudo do sinal da Função Afim

⁶¹ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 17 de ago. de 2021.

é realizada com o uso do livro didático adotado na escola e foi desencadeada a partir de um problema dado em língua natural, proposto pelo LD (quadro 21).

Quadro 21 – Situação inicial proposta pela professora “Rita” para introduzir o estudo das inequações e estudo do sinal da Função Afim

Um taxista recebe três reais e sessenta centavos pela bandeirada e mais dois reais e vinte centavos por quilômetro rodado. Quantos quilômetros ele deve percorrer em uma única corrida para ganhar pelo menos cinquenta reais?

Fonte: Acervo da pesquisa.

A partir da situação apresentada (quadro 21), a professora “Rita” discute com seus estudantes sobre o conceito de inequação do 1º grau. Acompanhando a leitura do livro texto, ela vai dialogando com os estudantes sobre a distinção entre “equação do 1º grau” e “inequação do 1º grau” a partir do registro algébrico do problema trabalhado (quadro 21), já dado na discussão do problema no LD. O trecho adiante apresenta parte das negociações estabelecidas na aula acerca desses conceitos.

Professora: Se eu perguntasse assim: Quantos quilômetros ele precisa fazer em uma única corrida para ganhar cinquenta reais? A igualdade ia permanecer lá?

Aluna: Sim.

Professora: Sim, né? Porque eu quero exatamente cinquenta reais. Mas, se eu disser “pelo menos”? O que eu devo fazer com essa igualdade?

Aluno: Substituir por maior ou igual.

Professora: Então ficaria: “ $T(x) \geq 2,20x + 3,60$ ” (“T” de “x” maior ou igual a dois e vinte “x” mais três e sessenta). Por que maior ou igual?

Aluno: Porque tem que ser um valor maior ou igual do que cinquenta.

Professora: Todo mundo concorda?

Alunos: Sim!

Professora: Como é o nome que eu dou a esse sinal de maior? [ninguém responde] Lembrem quando a gente estudou conjuntos, que a gente estudou esses sinais aqui: maior que, menor que, maior ou igual e menor ou igual [anotando os símbolos no quadro]? E todos esses sinais representam o quê? [ninguém responde] Esse sinal representa o quê? [referindo-se à igualdade na expressão “ $T(x) = 2,20x + 3,60$ ”].

Aluna: Igual.

Professora: Igualdade. E esse daqui? [referindo-se à desigualdade na expressão “ $T(x) \geq 2,20x + 3,60$ ”].

Aluna: Desigualdade.

Professora: representa desigualdade. Então, toda vez que a gente estudar uma equação dada por desigualdade, a gente vai estar estudando uma inequação⁶².

O recorte acima mostra a professora “Rita” em um diálogo em que negocia explicitamente com seus estudantes sobre o conceito de inequação do 1º grau. Os estudantes demonstraram algumas dificuldades em relação ao processo de resolução

⁶² Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 10 de set. de 2021.

das inequações do 1º grau tal como foi evidenciado no trabalho com a resolução de equações do 1º grau, quando do cálculo do zero da Função Afim; e de sistemas de equações do 1º grau, quando das conversões entre representações dos registros gráfico e algébrico a partir de dois pontos distintos dos “pontos notáveis”⁶³.

No decurso da aula, a professora “Rita” chama a atenção dos estudantes para a mudança no sinal da desigualdade quando essa é multiplicada por um número negativo, sendo que, na aula, ela se refere apenas ao caso em que a desigualdade é multiplicada pelo número “um” negativo (-1), conforme ilustra o trecho abaixo.

Professora: Na inequação, quando eu multiplico ela por menos um, se o meu sinal está menor, eu tenho que inverter ele. Ele tem que ficar maior, e se ele tivesse maior, ele teria que ficar o quê? [ninguém responde] Ele estava menor ou igual, aí quando eu multiplico por menos um, ele fica?

Aluna: Maior ou igual.

Professora: Se ele tivesse maior igual, ele ficaria o quê?

Aluna: Menor ou igual⁶⁴.

A professora “Rita” conclui esse momento introdutório, antes de partir para o estudo do sinal da Função Afim, fazendo a leitura do livro texto e institucionalizando o conceito discutido, conforme extrato que segue.

Professora: O que fizemos foi resolver uma desigualdade, envolvendo uma Função Afim. De modo geral, se “ y ” igual a “ $f(x)$ ” é uma função real, chamamos inequação a cada uma das seguintes desigualdades: “ f ” de “ x ” maior que zero; “ f ” de “ x ” menor que zero; “ f ” de “ x ” maior ou igual a zero; “ f ” de “ x ” menor ou igual a zero. Como é que a gente chama essas desigualdades? [ninguém responde] A gente chama de inequação. A cada uma dessas desigualdades, a gente chama de inequação. Continuando, página cento e oito: “dessa forma, sempre que “ $y = ax + b$ ”, uma Função Afim, uma inequação do primeiro grau é toda inequação redutível a uma das seguintes fórmulas: “ ax ” mais “ b ” maior que zero; “ ax ” mais “ b ” menor que zero; “ ax ” mais “ b ” maior ou igual a zero; “ ax ” mais “ b ” menor ou igual a zero⁶⁵.

Com essa discussão, “Rita” fecha o diálogo falando sobre o conjunto solução de uma inequação do 1º grau e sobre o estudo do sinal de uma Função Afim. O recorte a seguir ilustra o momento em que “Rita” faz a “transição” entre o estudo das inequações do 1º grau e o estudo do sinal da Função Afim, este último apresentado por ela “como o processo de resolução de inequações do 1º grau”.

Professora: Em uma inequação do primeiro grau, os valores avaliados que transforma uma inequação em uma desigualdade verdadeira, recebe o nome soluções da inequação. O conjunto de todas as soluções de uma inequação

⁶³ Chamamos de pontos notáveis do gráfico àqueles pontos que interceptam os eixos coordenados (x e y), ou seja, o zero da função $(-\frac{b}{a}, 0)$ e o ponto $(0, b)$.

⁶⁴ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 10 de set. de 2021.

⁶⁵ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 10 de set. de 2021.

é o conjunto solução “S” ou conjunto verdade dessa inequação. O processo de resolução de uma inequação do primeiro grau, envolve descobrir os valores de “x” para os quais “ax” mais “b” menor que zero, ou “ax” mais “b” menor ou igual a zero, ou “ax” mais “b” maior que zero, ou “ax” mais “b” maior ou igual a zero, o que é chamado de estudo de sinais de uma Função Afim⁶⁶.

Nesse momento de conclusão, “Rita” discute com os estudantes sobre os exercícios resolvidos apresentados no livro didático, que trazem também a interpretação gráfica para a resolução de uma inequação do 1º grau, aspecto importante para a compreensão do estudo do sinal da Função Afim. Além disso, revela a preocupação da professora “Rita” em propiciar a diversidade de registros de representação semiótica na sala aula. O uso de diversos registros, sobretudo quando relacionados uns aos outros, favorece a coordenação desses registros por parte do estudante, levando-o a não confundir o objeto com a sua representação (DUVAL, 2012a).

Após o debate sobre os exercícios resolvidos, “Rita” solicita um novo exemplo ao estudante “Leonardo” para exercitar um pouco mais sobre o estudo do sinal da Função Afim, tanto em sua representação algébrica quanto gráfica. “Leonardo” sugere a função “ $f(x) = 5x + 7$ ”, para a qual encontram o zero e procedem à discussão do sinal da função no registro gráfico, conforme extrato abaixo:

Professora: Kátia! Se o valor de “x” fosse maior que menos sete sobre cinco, o que aconteceria com o valor do meu “y”? Do meu “f” de “x”? [Estudante calada] Imagine que o valor dele seja dez, é um número maior que menos sete sobre cinco, certo? Se dez é um valor maior que menos sete sobre cinco, o que acontece aqui no gráfico? O valor de “y” vai ser o quê? [Estudante calada] O valor do “f” de “x” vai ser o quê? [Estudante calada] Maior ou menor do que zero?

Kátia: Maior.

Professora: Então, o meu “f” de “x” vai ser maior do que zero. Sílvia, se o valor do meu “x” for menor do que menos sete sobre cinco, o que acontece com o valor do meu “y”? [Estudante calada] Kátia acabou de responder uma coisa semelhante. [Estudantes calados] “f” de “x” menor do quê?

Alunos: Zero.

Professora: Se o valor do meu “x” for um valor menor do que menos sete sobre cinco, o valor do meu “f” de “x” vai ser o quê? Vamos supor que fosse menos sete, o meu “y” ia ser o quê?

Alunos: Menor que zero⁶⁷.

“Rita” parte do exemplo dado por “Leonardo” para fechar a discussão sobre o estudo do sinal da Função Afim, seguindo a mesma lógica apontada pelo livro didático nos exercícios resolvidos discutidos, conforme figura 15, que apresenta um dos exercícios resolvidos no LD discutidos em sala de aula.

⁶⁶ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 10 de set. de 2021.

⁶⁷ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 10 de set. de 2021.

Figura 15 – Um dos exercícios resolvidos apresentados no LD adotado e discutidos em sala de aula

R9. Resolva a inequação $2x - 8 > 0$.

Resolução

Podemos resolver uma inequação do 1º grau **graficamente** ou **algebricamente**.

- Analisando o gráfico a seguir, devemos procurar os valores de x que tornam $2x - 8 > 0$, ou seja, que tornam a função positiva. Utilizando o que já sabemos sobre o estudo do sinal, verificamos que $f(x) > 0$ quando $x > 4$. Assim, podemos dizer que: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.
- Algebricamente, isolamos a variável x :

$$2x - 8 > 0$$

$$2x > 8$$

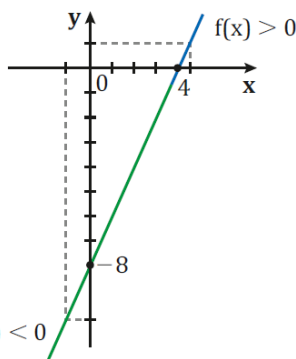
$$x > \frac{8}{2}$$

$$x > 4$$

Portanto, todo número maior que 4 é solução de $2x - 8 > 0$. Podemos descrever o conjunto solução S assim:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$$

ou $S =]4, +\infty[$



Fonte: LD adotado e utilizado pela professora “Rita”.

O exercício resolvido 9 (nove), figura 15, aponta a sequência metodológica adotada pela professora “Rita” para o estudo do sinal da Função Afim, e utiliza os registros gráfico, algébrico e em linguagem natural, realizando a articulação entre eles, o que sugere uma conversão em dois sentidos, isto é, a heterogeneidade de sentidos das representações.

O fato de o comando da situação não ter explicitado sobre qual registro deveria ser adotado para a resolução do item pode ser considerado um fator importante, pois abre a possibilidade para que o estudante possa fazer a escolha entre um tratamento no registro algébrico ou uma conversão entre representações do registro algébrico para o gráfico. Esse fato favorece, ainda, as conversões nos dois sentidos ($RA \rightarrow RG$ e $RG \rightarrow RA$) uma vez que essa “abertura” pode levar o estudante a proceder das duas maneiras, assim como o fez a professora “Rita” na sua aula, conforme sugere o recorte seguinte.

Professora: O meu “ x ” vai ser menor que menos um terço. Qual foi o meu modo de resolução aqui? [ninguém responde] O meu modo de resolução foi algébrico ou gráfico?

Aluna: Algébrico.

Professora: E a gente pode resolver graficamente?

Aluna: Pode.

Professora: Como a gente pode resolver graficamente?

Aluno: Faz o gráfico.

Professora: Venha fazer no quadro! [o estudante se recusa] Qual o ponto que vai ficar no meu eixo “y”? [ninguém responde] Eu tenho três “x” mais um... qual o valor que fica no meu eixo “y”?⁶⁸.

A professora “Rita” segue essa estratégia metodológica, apontando mais alguns exemplos e fazendo o estudo do sinal da Função Afim e/ou resolução de inequações do 1º grau fazendo o tratamento no registro algébrico e a conversão para o registro gráfico. Na sequência dessa negociação a professora “Rita” propõe o desenvolvimento de outras duas atividades do livro didático para as quais seguiu a mesma estratégia de resolução.

Com essa negociação e a sequência dela (conforme transcrições no Apêndice F), a professora “Rita” finaliza o ensino da Função Afim. Nas duas aulas seguintes “Rita” propõe uma revisão abordando todos os tópicos estudados (sequencialmente) ao longo das 18 (dezoito) aulas anteriores, perfazendo um total de 20 (vinte) aulas dedicadas ao ensino da Função Afim. Para finalizar o ensino da temática e possibilitar a entrada de um novo saber em cena no jogo didático, a professora “Rita” realiza uma avaliação com os estudantes para verificação das aprendizagens adquiridas.

Com isso, podemos considerar que o então saber em cena, a Função Afim, se torna obsoleto no jogo didático, o que ocorre em razão do tempo, determinado pelo programa de ensino – currículo, e do planejamento do professor. Quando esse tempo se esgota e um novo saber entra em cena e “ocorre o que Chevallard chamou de **obsolescência interna** do saber. Tal saber se torna obsoleto e um novo saber se institui” (BRITO MENEZES, 2006, p. 87, **grifo da autora**). A proposição dessa avaliação ao final da unidade de estudos ratifica, mais uma vez, a marca do contrato didático estabelecido pela professora “Rita” na relação didática.

Das negociações instituídas na relação didática e analisadas ao longo desse subtópico 7.2.2, regras do Contrato Didático podem emergir, de forma implícita, explícita, negociada ou tácita.

No subtópico 7.2.3 discutiremos sobre essas regras e suas possíveis rupturas e posteriores renegociações.

⁶⁸ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 10 de set. de 2021.

7.2.3 Regras, rupturas e renegociações do Contrato Didático estabelecido

Dos desdobramentos das negociações instituídas entre a professora “Rita” e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio acerca do saber Função Afim, algumas regras do Contrato Didático emergiram na relação didática. A primeira regra explícita se refere à conversão entre os registros língua natural e algébrico, a partir da situação inicial (quadro 18) proposta pela professora “Rita” para introdução do “novo” saber e pode ser enunciada da seguinte maneira: “para converter um problema apresentado no registro linguagem natural para outro, no registro algébrico, partimos da definição, encontramos no problema os respectivos valores correspondentes ao coeficiente “ a ” e termo independente “ b ”, e montamos a expressão algébrica da função”.

Essa regra sugere que, em alguns momentos implicitamente, em outros, explicitamente (como no caso em análise), os professores revelam que nos enunciados dos problemas existem palavras-chave, importantes para a resolução desses problemas e que, basta o estudante identificá-las. Na continuidade das aulas, outras regras do Contrato Didático surgiram, como aquelas relacionadas às características da Função Afim e aos casos particulares discutidos. No que se refere às regras relacionadas às características da Função Afim, podemos destacar duas delas explicitadas pela professora “Rita”, no que se refere ao trabalho com a declividade desse tipo de função.

Em relação ao registro algébrico: “para identificar a declividade da Função Afim, consideramos o coeficiente “ a ” dessa função; se $a > 0$, a Função Afim será crescente e se $a < 0$, a Função Afim será decrescente”. E outra, em relação ao registro gráfico: “se o ângulo formado pela reta representada e o eixo “ x ” do plano cartesiano for menor que 90° , a Função Afim será crescente; se o ângulo formado pela reta representada e o eixo “ x ” do plano cartesiano for maior que 90° , a Função Afim será decrescente”.

Como visto no subtópico 7.2.2, essas duas regras remetem à identificação visual da representação gráfica da Função Afim, a declividade, ou seja, as ideias de ascendente (crescente) e descendente (decrescente) associadas ao coeficiente “ a ” desse tipo de função representada em seu registro algébrico e ao ângulo formado pela reta representada e o eixo “ x ” do plano cartesiano, no registro gráfico, também associado a essa unidade simbólica “ a ” do registro algébrico.

Embora esse último aspecto não tenha sido explorado pela professora “Rita”, o ângulo formado pela reta representante da Função Afim e o eixo x (no registro gráfico), relaciona-se (também) com o coeficiente “ a ” dessa função, dada no registro algébrico. Esse fato, de a unidade simbólica “ a ” do registro algébrico recobrir duas variáveis visuais importantes no registro gráfico (o sentido da inclinação e o ângulo formado entre a reta e o eixo x) é um dos fatores que suscita dúvidas e incompreensões por parte dos estudantes. Daí, a necessidade de melhor exploração desses aspectos na sala de aula para favorecer as conversões, sobretudo aquelas no sentido RG $\rightarrow$ RA.

Quanto às regras referentes aos casos particulares da Função Afim, as negociações discutidas no subtópico 7.2.2 revelam duas regras implícitas: uma em relação ao registro algébrico e outra em relação ao registro gráfico. A primeira sugere que: “teremos um caso particular de Função Afim sempre que um dos coeficientes da expressão algébrica dessa função estiver ausente, ou seja, for igual a zero”. Nesse caso, temos três configurações possíveis: $a = 0$ e “ b ” qualquer; $a \neq 0$ e $b = 0$ e $a = 1$ e $b = 0$. E assim, teremos os casos de funções constante, linear e identidade, respectivamente; sendo esse último caso, um caso particular de um caso particular, isto é, um caso particular de função linear.

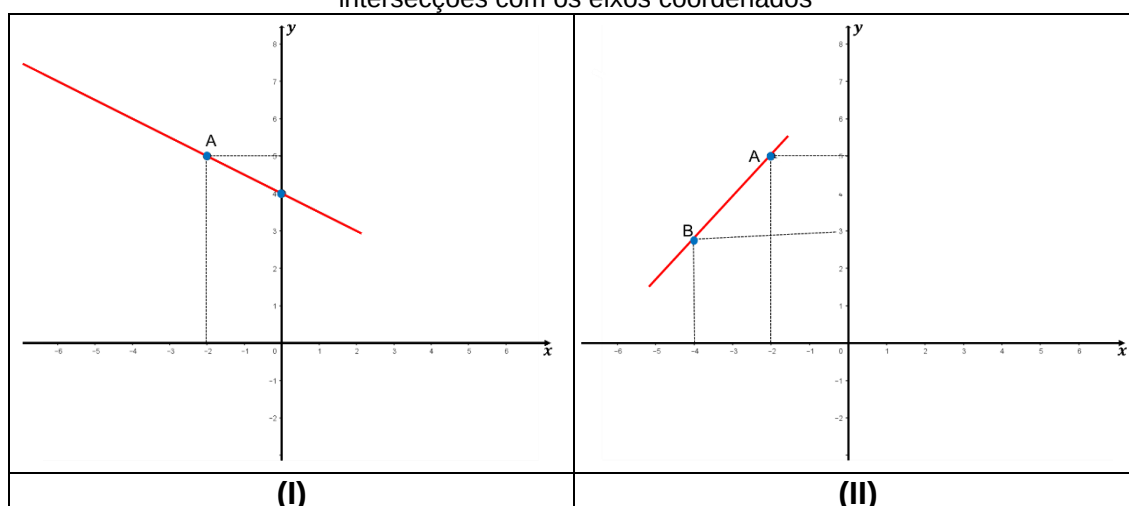
A segunda, chama atenção ao fato de que no registro gráfico é preciso atentar para os aspectos visuais em cada caso: “a função constante tem seu gráfico paralelo ao eixo “ x ” e intercepta o eixo “ y ” no valor da constante; a função linear “corta” o plano cartesiano na origem e a função identidade representa a bissetriz dos ângulos formados pela reta representada nos quadrantes ímpares (1º e 3º) do plano cartesiano”. A compreensão dos aspectos aqui discutidos, no que tange aos casos particulares da Função Afim e a relação entre cada caso e os coeficientes da expressão algébrica que a representa e/ou a representação gráfica correspondente, também pode facilitar a compreensão global dos conceitos de Função Afim, conforme discutido anteriormente.

Durante as negociações em sala de aula, outras regras do Contrato Didático surgiram na relação didática. Adiante, enunciaremos uma regra implícita que diz respeito ao cálculo algébrico do zero da Função Afim: “para determinar o zero (ou raiz, conforme a professora) da função, basta identificar adequadamente no problema proposto quais valores representam o coeficiente “ a ” e termo independente “ b ”, utilizar

a fórmula “ $x = -\frac{b}{a}$ ” e fazer as manipulações matemáticas necessárias, para obter esse valor”.

Essa regra, negociada pela professora “Rita”, é útil para os problemas em que o registro de partida é dado em linguagem natural ou em linguagem algébrica, porque os valores dos respectivos coeficientes podem aparecer naturalmente (embora, não necessariamente) no contexto do problema dado. No entanto, quando o registro de partida for o registro gráfico, o estudante precisará compreender que o próprio zero da função é um dos elementos visuais importantes dessa representação (intercepto com o eixo “ x ”) e que poderá ser identificado visualmente, caso esteja explícito. Não sendo esse elemento explicitado na representação visual (registro gráfico) ou ainda nos casos em que o termo “ b ” também não o seja, como sugere o exemplo dado no quadro 22, a regra ora enunciada não será útil.

Quadro 22 – Duas possíveis configurações de gráfico da Função Afim em que não aparece uma das intersecções com os eixos coordenados



Fonte: O autor (2022).

Conforme o quadro 22 sugere, para encontrar o zero das funções representadas (I e II) o estudante precisará utilizar a definição de Função Afim para substituição de pares ordenados dados nos gráficos e obtenção da lei de formação, o RA (registro de chegada) correspondente ao registro gráfico dado.

Quando do trabalho com a construção do gráfico da Função Afim, por meio da conversão entre as representações dos registros algébrico e gráfico desse tipo de função, duas regras explícitas do Contrato Didático também puderam ser enunciadas. Uma para cada tipo de abordagem da construção do gráfico, trabalhada pela professora.

A primeira sugere que “para construir o gráfico de uma Função Afim, atribuem-se valores à variável “ x ”, substituem-se esses valores na expressão algébrica da função para se obter o valor da variável “ y ”. Esses valores, “ x ” e “ y ”, formam um par ordenado que deve ser marcado no plano cartesiano. Ligando-se os pontos obtidos, obtém-se o gráfico da função”.

Já a segunda propõe que “para construir o gráfico da Função Afim, precisamos identificar as unidades significantes no registro algébrico da função: inclinação da reta, marcada pelo coeficiente “ a ”; intercepto com o eixo “ y ”, representado pelo termo independente “ b ” e intercepto com o eixo “ x ”, zero da função; e fazê-las corresponder às unidades visuais do gráfico”.

Essas regras são associadas, respectivamente, à abordagem ponto a ponto e à abordagem de interpretação global das propriedades figurais, segundo Duval (2011a). Dessas duas regras, decorrem um inconveniente, advindo da primeira e uma dificuldade apresentada pelos estudantes, advinda da segunda. O inconveniente, refere-se ao fato de, na maioria das vezes, o estudante querer atribuir sempre os mesmos valores para “ x ”, geralmente valores inteiros compreendidos entre três negativo e três positivo, como se esses fossem os únicos valores pertencentes à reta que representa a função dada. Esse inconveniente decorre do uso da abordagem ponto a ponto para a construção do gráfico da função. Conforme já visto, essa abordagem não favorece a interpretação global e, conseqüentemente, não favorece a conversão entre representações do registro gráfico para o algébrico.

Quanto à dificuldade decorrente da segunda regra, essa diz respeito à “confusão” que os estudantes costumam fazer em relação ao coeficiente “ a ” e termo independente “ b ” e, sobretudo, à “confusão” que costumam fazer entre o coeficiente “ a ” e o zero da função. A determinação do zero da função, costuma constituir-se outra dificuldade para o estudante, principalmente se este não tiver consolidado os tratamentos da equação do 1º grau, em etapas de ensino anteriores.

Considerando o sentido inverso dessa conversão, isto é, a conversão $RG \rightarrow RA$, uma nova regra explícita do contrato didático pode ser enunciada, especificamente para os tipos de gráficos trabalhados pela professora “Rita” em suas aulas (ver figura 14) e discutidos no subtópico 7.2.2. Conforme destacado, para esse tipo de conversão é necessário que o estudante mobilize a interpretação global das

propriedades figurais, para que possa estabelecer a relação entre as unidades visuais no registro gráfico e as unidades significantes do registro algébrico e integrá-las.

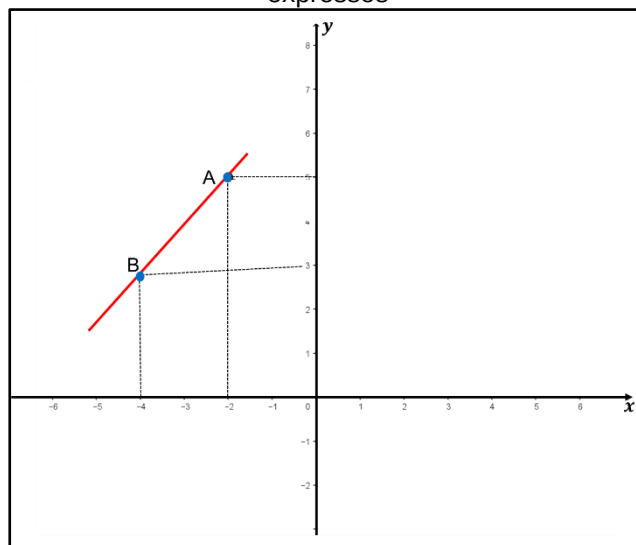
Daí, reforçamos a importância de, no trabalho com a conversão $RA \rightarrow RG$, ser priorizada a abordagem global em detrimento da abordagem ponto a ponto. Apontamos aqui a restrição em relação aos tipos de gráficos explorados pela professora “Rita” porque, nesse primeiro momento, foram explorados exemplos “clássicos” em que os elementos visuais importantes (interceptos com os eixos x e y) apareciam explícitos ou porque eram casos particulares (ver figura 14).

Para esses tipos de gráficos, conforme figura 14, a seguinte regra de Contrato Didático pode ser mencionada: “para convertermos uma representação dada no registro gráfico para outra no registro algébrico, devemos identificar as unidades visuais no gráfico (inclinação, intercepto com os eixos “ x ” e “ y ”) e associá-los aos termos da expressão geral da Função Afim (registro algébrico)”. Para a adequada compreensão dessa regra do CD, o estudante precisa entender que: a inclinação da reta é associada ao sinal do coeficiente “ a ” (reta ascendente, indica que $a > 0$; reta descendente, indica que $a < 0$), determinado, nesse caso, a partir da expressão geral da função (de $x = -\frac{b}{a}$, obtemos $a = -\frac{b}{x}$).

O termo “ b ”, nos tipos de gráficos representados na figura 14, é facilmente identificado porque é indicado pelo par ordenado $(0, b)$, intercepto do gráfico com o eixo “ y ”. Com esses dados, valor de “ a ” e valor de “ b ”, basta substituí-los na expressão geral da Função Afim, sua definição: $f(x) = ax + b$, onde $f(x) = y$, para encontrar a função, na forma algébrica, que representa o gráfico dado.

Cabe destacar que essa regra não é eficiente para gráficos nos quais esses elementos “notáveis”, aqui considerados os interceptos com os eixos coordenados, não são expressos na representação gráfica, como no caso exemplificado na figura 16.

Figura 16 – Exemplo de representação gráfica em que os “elementos notáveis” do gráfico não são expressos



Fonte: O autor (2022).

Para esse tipo gráfico, representado na figura 16, a regra instituída anteriormente não é suficiente para que o estudante faça a conversão requerida (RG → RA), uma vez que, além do (re)conhecimento das unidades significantes e unidades visuais, necessário para a interpretação global, o estudante também precisa compreender outros aspectos e propriedades do gráfico, como o postulado⁶⁹ da geometria plana que define “dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles”.

Nesse caso em específico, o estudante precisa ter compreensão do postulado apresentado e da definição algébrica da Função Afim, para que possa realizar a conversão necessária. No diálogo que segue, a professora “Rita” negocia com seus estudantes sobre conversões nas quais o registro de partida envolve esse tipo gráfico (figura 16).

Professora: Vamos lá! [a professora constrói um esboço de gráfico no quadro, no qual os “pontos notáveis” não aparecem, aparecendo apenas outros dois pontos distintos] Quem são esses pontos?

Ricardo: Menos dois e dez!

Professora: E depois?

Ricardo: Um e quatro. Tá certo?

Professora: A gente quer o gráfico?

Maria: Não!

Professora: A gente quer a função... e como é que a gente determina essa função? Tem como a gente saber assim? Quando “ x ” for menos dois, “ y ” vai ser dez. E quando “ x ” for um, “ y ” vai ser quatro. Aí, a partir desses valores tem como eu determinar a função? Como que é determinada a Função Afim? A definição de Função Afim... alguém sabe, alguém lembra?

⁶⁹ Em geometria, um postulado é uma afirmação, que relaciona as noções primitivas de ponto, reta e plano; e é aceita sem demonstração.

Ricardo: “ f ” de “ x ” igual a “ ax ” mais “ b ”.

Professora: Esse “ $f(x)$ ” é igual também ao quê?

Ricardo: “ y ”.

Professora: “ $y = ax + b$ ”. Nesse meu par ordenado [apontando para o quadro], eu tenho os valores de quem? Aqui [apontando para o quadro], eu tenho o valor de “ x ”, e aqui o de “ y ” [referindo-se aos dois valores do par ordenado] Então, a partir desses dois pontos, o que eu posso fazer? “ y ”...

Aluno: Não sei o que fazer.

Professora: Não sabe? Aqui, no meu ponto “A”, nesse par ordenado, eu tenho valor para “ x ” e outro valor para “ y ”. E aqui, na minha definição de função afim, eu tenho “ y ”, e tenho “ x ”. Eu posso usar esses dois valores de “ x ” e “ y ” na definição de função?

Alunos: Pode!⁷⁰.

Desse diálogo, uma nova regra explícita é instituída, agora para determinar a representação algébrica da Função Afim a partir de dois pontos do gráfico, distintos dos “pontos notáveis” desse tipo de representação (como o caso dado na figura 16): “para converter uma representação gráfica, na qual os “pontos notáveis” não são evidentes, utilizamos a definição algébrica da Função Afim “ $y = ax + b$ ”; substituímos os valores equivalentes aos pares ordenados de cada ponto dado “ (x, y) ”; montamos um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas; resolvemos o sistema, encontrando os valores das incógnitas, nesse caso, “ a ” e “ b ”; retomamos a definição da Função Afim, substituímos os valores encontrados para essas incógnitas e obtemos a representação algébrica da Função Afim, dada no registro gráfico”.

No decorrer dessa negociação, os estudantes manifestaram dificuldades relacionadas à noção de par ordenado e à resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, conforme sinalizado nas análises do subtópico 7.2.2. Na sequência das aulas, a professora “Rita” aborda as inequações do 1º grau, associando-as ao estudo do sinal da Função Afim, com o suporte do livro didático adotado na escola, como também discutido no subtópico 7.2.2. A discussão foi desencadeada a partir de um problema dado em língua natural, conforme apresentado no quadro 21 (subtópico 7.2.2).

No decurso das negociações decorrentes da discussão do problema trabalhado (quadro 21) em que a professora “Rita” negocia explicitamente com seus estudantes sobre o conceito de inequação do 1º grau, uma nova regra explícita do Contrato Didático é evidenciada: “uma inequação do 1º grau é uma equação do 1º grau em que substituímos o sinal de igualdade por uma desigualdade”. Essa regra sinaliza que a

⁷⁰ Recorte/extrato da transcrição da aula da professora “Rita” de 31 de set. de 2021.

professora utilizou uma analogia em que compara as equações às inequações do 1º grau. Contudo, sem considerar a raiz epistemológica de cada conceito, o que poderá desencadear descontinuidades conceituais para os estudantes.

Embora os métodos utilizados para encontrar a solução de inequações sejam parecidos com aqueles utilizados para encontrar a solução de equações, é necessário levar em consideração o fato de que as inequações lidam com desigualdades, e encontrar a sua solução requer encontrar “o conjunto” de soluções que faz com que a desigualdade seja verdadeira, e não um único valor. Diferentemente das equações do 1º grau, a inequação do 1º grau pode ter infinitas soluções, por isso, encontramos um conjunto de soluções e não uma única solução.

Os estudantes demonstraram algumas dificuldades no processo de resolução das inequações do 1º grau, tal como foi evidenciado no trabalho com a resolução de equações do 1º grau, quando do cálculo do zero da Função Afim; e de sistemas de equações do 1º grau, quando das conversões entre representações dos registros gráfico e algébrico a partir de dois pontos distintos dos “pontos notáveis”, conforme discutido no subtópico 7.2.2. Essas dificuldades são explicadas na literatura, haja vista o registro explorado, o registro algébrico, suscitar dificuldades diversas de tratamento e conversão nas diferentes etapas e níveis de ensino.

Foi observado ao longo das análises desenvolvidas que a professora “Rita”, na maioria das vezes, realizou a institucionalização dos saberes após um momento de discussão prévia com os estudantes, fato que corrobora com a premissa de que essa deve ser a última etapa no processo de construção do conhecimento (BROUSSEAU, 2008).

Não foram identificadas, nas análises realizadas ao longo das 20 (vinte) aulas referentes ao ensino da Função Afim, rupturas do Contrato Didático estabelecido entre a professora “Rita” e seus estudantes. Até certo ponto esse fato já era por nós esperado uma vez que, segundo Jonnaert (1996), há uma tendência natural em se manter estável o Contrato Didático estabelecido e, com isso, cada parceiro da relação didática procura manter seu papel quanto às suas responsabilidades, haja vista as expectativas recíprocas entre professor e estudantes. Contudo, identificamos algumas “perturbações” do Contrato Didático ao longo da análise da gravação em vídeo das aulas da professora “Rita”.

A ideia de provocar pequenas “perturbações” no contrato estável foi proposta por Ricardo, Slongo e Pietrocola (2003) no contexto do ensino de Ciências Naturais.

Para esses autores é possível provocar pequenas perturbações no Contrato Didático sem, contudo, provocar uma ruptura, por meio da introdução de problemas distintos daqueles prototípicos, como os problemas com falta ou excesso de dados, por exemplo.

A proposição de situações desse tipo, ainda segundo esses autores, pode ser considerada o motor da relação didática, evitando automatismos por parte do estudante na obtenção da solução esperada, desestabilizando, com certa frequência, o papel do estudante, “o que o leva a manter-se atento e aberto a avanços sem, contudo, promover uma ruptura no Contrato Didático” (RICARDO; SLONGO; PIETROCOLA, 2003, p. 10).

Além de pequenas perturbações, evidenciamos também momentos de reorganização do Contrato Didático (ALMEIDA, 2016), como quando os estudantes “quebraram” as expectativas da professora em relação ao saber em jogo: ao não conseguirem lidar com os tratamentos da equação do 1º grau para o cálculo do zero da Função Afim e/ou para resolução dos sistemas de equação do 1º grau para obtenção da expressão algébrica que definia a lei da função a partir de dois pontos dados ou; no momento em que deixaram de realizar as tarefas propostas por ela, para serem realizadas em casa.

Em linhas gerais, a partir dos dados analisados, podemos nos perguntar: o que, de fato, de Função Afim foi trabalhado pela professora “Rita” em suas aulas? Percebemos que essa professora dedicou bastante tempo à retomada de outros conteúdos que já haviam ou deveriam ter sido estudados pelos estudantes. Sobre esse aspecto, propomos duas reflexões que consideramos pertinentes: a primeira refere-se ao fato de, em alguns momentos da relação didática, para que a relação ao saber do estudante avance, faz-se necessária a retomada de conceitos que são importantes para o “novo” saber em jogo. Essa retomada faz parte da dinâmica do Contrato Didático para que a relação didática não fracasse, entretanto, o tempo didático da retomada não pode usurpar do tempo dedicado ao ensino do “novo” saber em cena.

A segunda, e essa nos parece bastante evidente a partir dos dados analisados, refere-se ao fato de que a pandemia de COVID-19 pode ter impactado negativamente no Contrato Didático estabelecido pela professora “Rita” e seus estudantes. Inferimos desses dados e das condições impostas pela pandemia, como: a organização da sala de aula, a divisão da turma e “repetição” das aulas, e outras medidas definidas pelos

protocolos de biossegurança como possíveis causadores de impactos negativos na maneira como o Contrato Didático foi estabelecido na relação didática.

Embora tenhamos discutido ao longo desse texto sobre a existência de um “núcleo duro” do CD, o que torna difícil as suas rupturas, percebemos na entrevista prévia e na própria dinâmica da sala de aula, que a natureza do CD estabelecido pela professora “Rita” poderia ter sido diferente em tempos anteriores/posteriores ao estado de pandemia.

No momento em que fala sobre o planejamento coletivo, realizado com outros professores de matemática da escola, por exemplo, a professora “Rita” destaca que “[...] pensamos em oficinas, **como fazemos todos os anos**, mas, descartamos devido à pandemia. **Todos os anos trabalhamos com oficinas, jogos, mas, esse ano, tivemos que descartar**”⁷¹. A partir da gravação em vídeo das aulas dessa professora percebemos que em alguns momentos na sala de aula, ao propor uma atividade para os estudantes, eles sempre se movimentavam procurando seus pares para desenvolver essas atividades em interação uns com os outros, no entanto, a professora “Rita” os repreendia sob a alegação da necessidade de observância das “medidas de distanciamento” impostas pelos protocolos então vigentes.

Entendemos que existe a possibilidade de o contrato “prescrito” ser distinto daquele “estabelecido”, exatamente pela influência de diversos fatores internos e externos ao ambiente da sala de aula. No entanto, ao nosso ver, os fatos mencionados podem sinalizar um impacto negativo da situação de pandemia de COVID-19 sobre o Contrato Didático estabelecido pela professora “Rita”. Somente uma futura pesquisa com essa mesma professora, comparando Contrato Didático por ela estabelecido no pós-pandemia e os resultados da pesquisa apresentados nesse texto de tese poderiam confirmar ou refutar essa conjectura. Fica como sugestão para futura investigação.

Por fim, pudemos observar inter-relações entre os aspectos contratuais que emergem na relação didática e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados nessa relação. Todos os elementos referentes ao CD, analisados conforme esquema da figura 11, aparecem evidenciados na aula da professora “Rita” e podem ser considerados em termos de registros de representação semiótica mobilizados.

⁷¹ Extrato da entrevista com a professora “Rita” concedida ao autor em 21 de jul. de 2021, **grifo nosso**.

Conforme salienta Duval (2012a), dada a natureza dos objetos matemáticos, não há outra forma de acesso a esses objetos se não por meio das suas representações, ou seja, não há *noesis* sem *semioses* (DUVAL, 2012a). Assim, evidencia-se na pesquisa empírica que o CD se “materializa” na sala de aula por meio dos registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática.

No âmbito das negociações empreendidas entre a professora “Rita” e seus estudantes, todas ocorreram tendo como “base” os RRS da Função Afim então mobilizados. As regras contratuais que “pactuadas” na relação didática também o foram levando em consideração tais registros. Dessa forma, consideramos que os RRS da Função Afim permearam o CD estabelecido em sala de aula entre a professora “Rita” e seus estudantes quando da relação didática instituída entre eles, ao passo que esse CD foi instituído em termos de RRS da Função Afim mobilizados.

No tópico 7.3 apresentamos uma síntese das inter-relações entre o CD, estabelecido entre a professora “Rita” e seus estudantes, e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática.

7.3 SÍNTESE DAS INTER-RELAÇÕES ENTRE O CONTRATO DIDÁTICO E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA MOBILIZADOS NA RELAÇÃO DIDÁTICA DURANTE O ENSINO DA FUNÇÃO AFIM

As análises apresentadas nos tópicos 7.1 e 7.2 buscaram responder aos objetivos específicos e nos propiciaram evidências empíricas importantes acerca das inter-relações entre o Contrato Didático e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática. Nesse tópico retomamos essas respostas para, a partir delas, responder ao nosso objetivo geral que foi “analisar inter-relações entre o Contrato Didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim. Segue, então, síntese das inter-relações discutidas ao longo dos dois tópicos anteriores.

Uma primeira inter-relação discutida diz respeito às negociações e caracterização/tipologia de CD estabelecido na relação didática. Quanto a esse quesito, as análises realizadas evidenciam que as negociações empreendidas na sala de aula se relacionam com o tipo de CD estabelecido e as representações semióticas

mobilizadas na relação didática. Conforme apresentado, evidenciamos forte viés do CD tradicional, nos moldes do paradigma do ensino tradicional, isto é, um Contrato Didático normativo (CHARNAY, 1996).

Observou-se que na maior parte do tempo didático a professora “Rita” tomou para si toda a ação didática, ou seja, ela “apresenta” aos estudantes as diversas representações da Função Afim, o objeto matemático de estudo, seus tratamentos e conversões. Também foi ela quem fez a coordenação da maior parte dos registros mobilizados, mostrando aos estudantes o “passo a passo” de como proceder para tal. Priorizou-se o registro algébrico e, nas conversões entre este registro e o registro gráfico, utilizou-se uma abordagem que se aproxima da abordagem global das propriedades figurais, contrariando a nossa expectativa enquanto pesquisador de que, em virtude do tipo de Contrato Didático estabelecido, se utilizaria a abordagem ponto a ponto por ser mais “rápida” e metódica do ponto de vista operacional.

Embora consideremos que seja mais comum nesse tipo de CD o professor não propiciar a heterogeneidade dos sentidos (DUVAL, 2003a, 2011a) a professora “Rita” o fez ao longo da relação didática, embora tenha propiciado situações com baixo ou médio graus de não congruência semântica por serem de mais fácil resolução por parte dos estudantes, embora ela própria tenha conduzido a maior parte das conversões exigidas na relação didática, não favorecendo a devolução.

No que se refere às expectativas, evidenciamos que a professora “Rita” esperava, dentre outras, que seus estudantes já tivessem dominado o conceito de função (relação funcional) haja vista a previsão desse conteúdo nos documentos de orientação curricular (BRASIL, 2017; PERNAMBUCO, 2019) desde o 9º ano do Ensino Fundamental e sua retomada no Ensino Médio, anteriormente ao ensino da Função Afim.

A professora “Rita” esperava também que os estudantes soubessem lidar com os tratamentos relacionados às equações do 1º grau, sistemas de equações do 1º grau e coordenadas de pontos no plano cartesiano e que conseguissem fazer conversões com baixo grau de não congruência semântica, pelo menos entre os registros dados em LN e o RA (nesse sentido) por serem os mais comumente utilizados no ensino das equações do 1º grau. A análise realizada evidenciou que essas expectativas foram frustradas e que “Rita” precisou reorganizar o Contrato Didático, fazer novos esses conceitos já antigos, dialética novo-antigo, segundo Brito Menezes (2006) para poder avançar com o novo saber em cena, a Função Afim.

Quanto às regras do Contrato Didático, explícitas ou implícitas, decorrentes das negociações em sala de aula, considerando as representações semióticas da Função Afim mobilizadas na relação didática, destacamos no quadro 23 aquelas por nós evidenciadas.

Quadro 23 – Síntese das regras contratuais que emergiram na relação didática à luz das representações semióticas da Função Afim mobilizadas

Regras explícitas	Regras implícitas
i) Para converter um problema cuja representação é dada no registro em LN para outra no RA, devemos partir da definição: encontramos no problema os respectivos valores correspondentes ao coeficiente “a” e termo independente “b”, e montamos a expressão algébrica desejada; ii) Para identificar a declividade da Função Afim, a partir do RA, devemos considerar o coeficiente “a” dessa função; se $a > 0$, a Função Afim será crescente e se $a < 0$, a Função Afim será decrescente; iii) Quando do registro gráfico, considerando o ângulo formado pela reta representada e o eixo “x” do plano cartesiano temos que: se esse ângulo for menor que 90°, a Função Afim será crescente; se for maior que 90°, a Função Afim será decrescente; iv) Para construir o gráfico de uma Função Afim, por meio da abordagem ponto a ponto, atribuem-se valores à variável “x”, substituem-se esses valores na expressão algébrica da função para	i) Sempre utilizar valores inteiros e positivos para os parâmetros da função uma vez que o uso de valores inteiros e positivos facilita as conversões entre as representações mobilizadas; ii) Teremos um caso particular de Função Afim sempre que um dos coeficientes da expressão algébrica dessa função estiver ausente, ou seja, for igual a zero. Para isso, temos três configurações possíveis: $a = 0$ e “b” qualquer, função constante; $a \neq 0$ e $b = 0$, função linear; e $a = 1$ e $b = 0$, função identidade; iii) Quanto à representação dos casos particulares no registro gráfico temos que: a função constante tem seu gráfico paralelo ao eixo “x”; a função linear “corta” o plano cartesiano na origem e a função identidade representa a bissetriz dos ângulos formados nos quadrantes ímpares (1° e 3°) do plano cartesiano; iv) Para determinar o zero (ou raiz, conforme a professora) da função no registro algébrico, basta identificar adequadamente no problema proposto quais valores representam o coeficiente

se obter o valor da variável “y”. Esses valores, “x” e “y”, formam um par ordenado que deve ser marcado no plano cartesiano. Ligando-se os pontos obtidos, obtém-se o gráfico da função; v) Para construir o gráfico da Função Afim, considerando a abordagem de interpretação global das propriedades visuais, identificamos as unidades significantes no registro algébrico da função: inclinação da reta, marcada pelo coeficiente “a”; intercepto com o eixo “y”, representado pelo termo independente “b” e intercepto com o eixo “x”, zero da função; e fazemo-los corresponder às unidades visuais do gráfico; vi) Em relação à conversão $RG \rightarrow RA$, para os tipos de gráficos representados na figura 14: para convertermos uma representação dada no registro gráfico para outra no registro algébrico, devemos identificar as unidades visuais no gráfico (inclinação, intercepto com os eixos “x” e “y”) e associá-las aos termos da expressão geral da Função Afim (registro algébrico); vii) Para determinar a representação algébrica da Função Afim a partir de dois pontos do gráfico, distintos dos “pontos notáveis” desse tipo de representação, utilizamos a definição algébrica da Função Afim “$y = ax + b$”; substituímos os valores equivalentes	“a” e termo independente “b”, utilizar a fórmula “$x = -\frac{b}{a}$” e fazer as manipulações matemáticas necessárias, para obter esse valor.
--	---

aos pares ordenados de cada ponto dado; montamos um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas; resolvemos o sistema, encontrando os valores das incógnitas “x” e “y”; retomamos a definição da Função Afim, substituímos os valores encontrados para essas incógnitas e obtemos a representação algébrica da Função Afim, dada no registro gráfico; viii) Uma inequação do 1º grau é uma equação do 1º grau em que substituímos o sinal de igualdade por uma desigualdade.	
--	--

Fonte: Dados da pesquisa.

Sobre as rupturas e renegociações do CD estabelecido, estas não foram evidenciadas na relação didática analisada. Embora as rupturas sejam essenciais para o avanço das aprendizagens (BROUSSEAU, 1986; ALMOULOUD, 2007; SILVA, 2018), observamos na aula da professora “Rita” momentos de tensão, questionamentos e contradições que, ao nosso entender, não consistiram em uma ruptura do Contrato Didático, mas apenas uma “reorganização contratual”, nos termos propostos por Almeida (2013), ou seja, uma “desestabilização momentânea” na relação didática e a professora “Rita” seguiu com sua negociação. A seguir, apresentamos nossas considerações finais acerca do estudo desenvolvido, buscando relacionar a abordagem teórica com os resultados da investigação empírica, retomando a questão e objetivos de pesquisa.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve por objetivo analisar inter-relações entre o Contrato Didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da Função Afim. Nesse sentido, buscamos caracterizar o Contrato Didático estabelecido entre uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio e identificar os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática, estabelecendo inter-relações entre dois aportes teóricos: o Contrato Didático e a TRRS.

Entendemos que essas teorias têm naturezas epistemológicas distintas, conforme discutido na introdução desse trabalho. Entretanto, defendemos que a articulação entre elas nos permitiu uma reflexão aprofundada sobre fatores que interferem no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos, em particular a Função Afim, e sobre formas que permitam ao estudante avançar na construção do conhecimento, embora esse último aspecto não tenha sido foco direto da nossa investigação.

Nessa perspectiva, adentrar o espaço da sala de aula por pouco mais de um mês, desde o momento em que a professora “Rita” anunciou o “novo” saber à sua turma, a Função Afim, até o momento em que ela finaliza esse ensino com a proposição de uma avaliação para verificação da aprendizagem (essa não foi objeto de análise) nos possibilitou capturar um grande volume de dados que revelaram tensões, negociações, regras, representações, que favoreceram a nossa compreensão acerca das inter-relações estudadas, as inter-relações entre o CD e a TRRS, nossa tese.

Assim, tendo em vista a questão de pesquisa e objetivos propostos para a realização desse trabalho, apresentamos nossas considerações finais acerca das análises desenvolvidas a partir da entrevista realizada com a professora “Rita” e da gravação em vídeo das 20 aulas ministradas presencialmente por essa professora sobre a Função Afim.

Quanto ao Contrato Didático estabelecido, embora evidenciado o esforço da professora “Rita” na tentativa por estabelecer um contrato mais aproximativo (CHARNAY, 1996), pôde-se observar, de fato, forte viés do Contrato Didático tradicional, aquele em que o professor traz definições, seguidas de uma série de

exemplos, depois propõe algumas atividades baseadas nesses exemplos e, por fim, faz uma avaliação nos mesmos moldes das atividades propostas, ou seja, um Contrato Didático normativo (CHARNAY, 1996), basicamente focado no conteúdo de ensino.

O CD diferencial (BRITO MENEZES, 2006; SCHUBAUER-LEONI; PERRET-CLERMONT, 1997), nos termos discutidos ao longo desse texto foi previsto previamente na entrevista com a professora “Rita” e pôde ser evidenciado em alguns momentos, inclusive manifestado pelos próprios estudantes. Esse fato pode decorrer de comportamentos do dia a dia, quando, possivelmente, a professora se dirige a determinado estudante, ou grupo de estudantes, para desenvolver atividades por ela propostas com mais frequência que outros (aqueles nos quais ela “deposita” altas expectativas).

Algumas regras contratuais instituídas foram identificadas, com destaque para aquelas que reafirmam a prevalência de um CD tradicional, como as que preveem o uso da definição e fórmulas para o desenvolvimento das conversões necessárias entre os registros de representação semiótica mobilizados; e a priorização do registro algébrico, embora em “diálogo” com outros registros o que, até certo ponto, favorece a coordenação entre esses registros.

Embora não tenham sido objeto de investigação, vários efeitos do CD foram evidenciados ao longo das aulas observadas. Segundo Brousseau (1986) esses efeitos surgem na sala de aula de forma não intencional, por parte do professor, que, no intuito de não ver seus estudantes fracassarem na situação didática, acabam por facilitar demais as tarefas para eles. Entretanto, esses efeitos podem se constituir em barreiras para a aprendizagem do estudante, uma vez que não avançam na construção de conhecimento.

Sob a ótica da TRRS, esse fato pode levar o estudante não fazer a necessária distinção entre objeto e representação, o que sugere a não compreensão do objeto matemático estudado, em nosso caso, a Função Afim. Chamamos atenção para o Efeito Topázio, que aparece com bastante frequência, embora outros também tenham surgido.

Observamos ao longo das aulas que a professora “Rita” procurou seguir as orientações dos documentos de orientação curricular então vigentes (BRASIL, 2019; PERNAMBUCO, 2012) no que se refere ao ensino da Função Afim. Essa professora buscou contextualizar o ensino por meio de situações semelhantes às aquelas vivenciadas no cotidiano dos estudantes, por exemplo, quando parte de problemas

em língua natural que remetem a contextos do cotidiano, como o caso da corrida de táxi, a escolha por um plano de pagamento de academia mais vantajoso, dentre outros.

Contextualizar o ensino favorece a compreensão, com significado, do objeto matemático estudado e leva o estudante a perceber a presença da matemática em situações do cotidiano. No entanto, sobre esses problemas contextualizados, chamamos a atenção para os aspectos discutidos nesse texto quanto à definição do domínio de validade das situações propostas haja vista que esse domínio influencia na solução do problema.

Ainda no que se refere aos documentos de orientação curricular, esses documentos preveem que o professor favoreça a diversidade de registros de representação semiótica, entendida implicitamente a coordenação entre esses registros; e leve o estudante a se tornar protagonista no seu processo de aprendizagem por meio da participação ativa nas situações de ensino.

Quanto a esse último aspecto, podemos relacionar a devolução didática, a qual não ocorreu na relação didática pesquisada, talvez por não se constituir como regra do próprio Contrato Didático estabelecido, ou por marcas de contratos didáticos anteriores, ou ainda pela situação de pandemia de COVID-19, da qual ainda estavam saindo, que interferiu no contrato escolar e, por conseguinte, no Contrato Didático. Conforme discutido anteriormente no capítulo 7, os dados dessa pesquisa sugerem que as medidas de biossegurança impostas pelo contexto de pandemia de COVID-19 parecem ter impactado negativamente no tipo de contrato didático estabelecido pela professora “Rita”.

O fato de a professora “Rita”, na maioria das vezes, desenvolver as atividades juntamente com os estudantes sem deixar que eles, por si sós, manipulassem as situações propostas em busca das soluções esperadas, pode tê-los levado a instituir uma regra implícita do Contrato Didático que sugere: “sempre esperar pois, a professora fará as atividades ou exercícios juntamente com os estudantes”; o que pode levar a essa não devolução didática por parte deles, a alguns efeitos “perversos” do Contrato Didático e à não construção do conhecimento por parte desses estudantes.

Os fatos acima mencionados colocam em evidência o papel da professora diante do saber em jogo. A professora “Rita” realizou a ação didática, forneceu as informações necessárias aos estudantes, mas não os deixou, na maior parte do tempo

didático, que interagissem com o meio (*Milieu*), a partir do movimento de ação/retroação em relação ao meio adidático o que os levaria à construção do conhecimento. Esse movimento de ação/retroação, segundo Bessot (2003), configura-se como a interação entre o estudante e o meio, o que favorece a sua aprendizagem.

Dessa forma, o papel do professor na estruturação do meio (*Milieu*) se constitui em peça fundamental para que a aprendizagem aconteça. Nos termos da TRRS, o professor precisa favorecer que os estudantes sejam levados a desenvolver a atividade cognitiva de conversão, no entanto, conforme discutido nesse texto, não é suficiente apenas organizar as sequências de atividades em sala de aula, mas é necessário tornar os estudantes capazes de resolver problemas, quaisquer que sejam as situações e quaisquer que sejam os objetos matemáticos estudados, daí a importância da devolução didática.

Ter a devolução didática como uma regra do Contrato Didático faz com que os estudantes se tornem sujeitos autônomos na construção do conhecimento e leva-os ainda, a “romper” com o paradoxo cognitivo do pensamento matemático (DUVAL, 2012a) uma vez que, à medida que tomam para si a responsabilidade pela construção do seu conhecimento, tendem, cada vez mais, a não confundir o objeto matemático com a representação.

A análise realizada revelou ainda que os estudantes manifestaram grandes dificuldades em lidar com o objeto matemático estudado, a Função Afim, sobretudo no que se refere aos tratamentos do registro algébrico, necessários para as conversões entre esse registro e o registro gráfico ou vice-versa. Esse fato corrobora outras pesquisas já desenvolvidas e que apontam resultados semelhantes, ou seja, a dificuldade dos estudantes, de diferentes etapas de ensino, em lidar com os registros algébrico e gráfico, como as pesquisas de: Delgado, Friedmann e Lima (2010); Delgado (2010); Reis (2011); Cardoso *et al.* (2013); Cardoso (2015); dentre outras.

Quanto a esses tratamentos, as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes participantes do nosso estudo se referem à resolução das equações do 1º grau, dificuldades trazidas de etapas escolares anteriores. No que concerne às conversões mobilizadas na relação didática, essas se sobressaem aos tratamentos o que revela uma preocupação da professora com a mobilização de diferentes registros de representação do objeto matemático em estudo e a coordenação entre eles.

Especificamente quanto à conversão entre representações dos registros algébrico e gráfico, nos dois sentidos, foi observado que a professora “Rita” utilizou, na maior parte do tempo didático uma abordagem que se aproxima da abordagem global de propriedades figurais (DUVAL, 2011a), ao passo que, em sua ação didática, buscou levar os estudantes a perceberem as modificações sofridas no gráfico da Função Afim quando se modificam os parâmetros da representação algébrica dessa função.

Ao utilizar o que a professora “Rita” chamou “propriedades dos coeficientes”, ela mostrava aos estudantes o papel de cada coeficiente da expressão algébrica da Função Afim e sua correspondente variável visual no registro gráfico o que pode favorecer a compreensão dos estudantes e a conversão no sentido oposto, $RG \rightarrow RA$. Mesmo adotando essa estratégia na maior parte do tempo didático, a professora “Rita” também utilizou a abordagem ponto a ponto, algumas vezes utilizando o registro tabular como registro auxiliar para a construção do gráfico. Esse tipo de procedimento, conforme visto, não permite a compreensão das unidades significantes de cada uma das representações, uma vez que não existe a coordenação entre os registros de saída e de chegada.

Quanto à variação de congruência ou não congruência semântica das conversões abordadas em sala de aula, foi identificado que elas foram do tipo com baixo e médio graus de não congruência semântica, por não conservarem ora um, ora dois dos critérios de congruência semântica apontados por Duval (2009, 2012a), o que pode ser justificado pelo fato de os estudantes apresentarem dificuldades em conteúdos matemáticos estudados em anos anteriores, como as equações do 1º grau, dentre outros, conforme já apontado.

Em geral, no que tange aos RRS mobilizados na relação didática e evidenciados no CD analisado, pôde-se perceber predominância do registro algébrico, conforme já mencionado. Fato já esperado, tendo em vista ser esse o tipo de registro mais privilegiado no estudo das funções no tipo de CD estabelecido pela professora participante da pesquisa – o CD tradicional. Pôde-se perceber ainda, predomínio da transformação de conversão, embora os tratamentos também tenham sido evidenciados, esses últimos particularmente quando do RA e sua utilização para o cálculo do zero da Função Afim, obtenção da expressão da Função Afim definida por dois pontos dados e estudo do sinal.

A professora “Rita” buscou, ao longo da sua ação didática, transitar entre as representações algébrica, gráfica, em linguagem natural e tabular, embora essa última tenha surgido apenas como registro auxiliar no cálculo do valor numérico da Função Afim e em alguns momentos para o esboço do gráfico desse tipo de função. Chamamos a atenção, como já destacado, para a maior ênfase dada pela professora “Rita” ao registro algébrico.

Pudemos perceber, a partir das análises realizadas, que mesmo no seio de um Contrato Didático eminentemente tradicional, normativo, o ensino da Função Afim se deu por meio das diversas representações desse objeto matemático e, as conversões se sobressaíram aos tratamentos. Sobre as conversões, priorizaram diferentes graus de não congruência semântica e, por conseguinte, diferentes graus de dificuldades, o que poderia (embora não ocorreu nessa turma em questão) levar o estudante a interagir com o meio (*Milieu*) em busca das soluções esperadas. Esse tipo de conversões desencadeia ainda, custos cognitivos distintos para a resolução das situações postas.

Ainda, observamos que todas as interações que ocorreram na sala de aula, como as negociações, as expectativas, as regras, as tensões, foram regidas pelo Contrato Didático e instituídas em termos de representações semióticas do objeto matemático em estudo. Dessa forma, foi possível observar que as negociações do CD e demais elementos que circundam esse fenômeno didático, ocorreram em termos de representações semióticas do objeto matemático, mobilizadas na relação didática.

Assim, acreditamos que a análise do contrato didático com foco nas representações semióticas do objeto matemático estudado, oportunizou uma melhor compreensão acerca das inter-relações existentes entre este e as representações semióticas mobilizadas na relação didática. Dessa forma, considerando as nossas reflexões teóricas, os dados coletados e as análises realizadas, identificamos elementos que, em nosso ponto de vista, revelam inter-relações que ratificam a tese defendida nesse estudo.

Os resultados sugerem que, na relação didática, o Contrato Didático, manifestado por meio das expectativas, negociações, regras, dentre outros elementos; e os registros de representação semiótica do objeto matemático em estudo, mobilizados, a coordenação entre esses registros, suas transformações, as variações de congruência ou não congruência semântica favorecidos, se inter-relacionam estreitamente.

É difícil conceber a relação didática dissociada desses dois aportes teóricos: por um lado, o CD é a “pedra de toque” de toda relação didática (CHEVALLARD; BOSH; GASCÓN, 2001), por outro, a natureza dos objetos matemáticos evoca, nos processos de ensino e aprendizagem, o uso e coordenação das distintas representações desses objetos (DUVAL, 2004). Assim, desde o momento em que o professor planeja a sua sequência de ensino, ele assume, de forma consciente ou não, um determinado tipo de CD (CHARNAY, 1996), e assim, “prevê” a maneira como irá gerenciar o saber em cena, as situações propostas, as expectativas em relação aos estudantes, a divisão de responsabilidades, as regras a instituir.

No entanto, para que esse CD se “materialize” na sala de aula, durante a relação didática, o professor precisa igualmente considerar o papel dos registros de representação semiótica do objeto matemático em estudo, uma vez que a única forma de acesso a esse objeto se dá por meio das suas representações (DUVAL, 2004). Isto é, as representações semióticas mobilizadas, suas transformações, as variações de congruência ou não congruência semântica, devem ser considerados desde a etapa de planejamento da sequência de ensino a ser adotada pelo professor. Logo, parece-nos impossível considerar os processos de ensino e aprendizagem dissociados do fenômeno do contrato didático e dos registros de representação semiótica mobilizados.

Restringindo o olhar para o universo da sala de aula investigada, identificamos diversos momentos em que inter-relações entre esses dois aportes teóricos foram evidenciadas: entre o CD estabelecido (tipo, expectativas, regras), a estruturação do meio (*Milieu*) pelo professor, a devolução didática e os registros de representação semiótica mobilizados (multiplicidade de registros, coordenação, transformações e as variações de congruência ou não congruência semântica). Por exemplo, no tipo de Contrato Didático estabelecido pela professora “Rita”, o CD tradicional – normativo (CHARNAY, 1996), ela toma para si toda a ação didática, privilegia as representações algébricas da Função Afim em detrimento das demais, propicia atividades com baixo ou médio grau de não congruência semântica entre as conversões. Favorece a coordenação entre representações, sobretudo entre aquelas dos registros algébrico e gráfico.

As expectativas, tanto dessa professora em relação aos estudantes, quanto desses últimos em relação à professora também estão intimamente inter-relacionadas com os registros de representação semiótica da Função Afim, mobilizados. As

expectativas da professora em relação aos estudantes definiram, em certa medida, suas escolhas didáticas quanto aos RRS mobilizáveis na sala de aula. Por outro lado, as expectativas dos estudantes em relação a essa professora, se alinharam àquilo que eles esperavam dessa professora: maneira de organizar a cena didática, fornecimento informações e explicações a respeito do objeto de ensino; o que está diretamente relacionado ao contrato didático estabelecido.

As regras, implícitas e explícitas, negociadas ou impostas, se inter-relacionaram os com RRS da função afim mobilizados uma vez que estes últimos estão diretamente relacionados ao tipo de CD estabelecido.

A partir dessas inter-relações, decorrentes na relação didática, consideramos o meio (*Milieu*) como o principal elemento balizador de todas as inter-relações pontuadas ao longo desse trabalho. No nosso ponto de vista, todo o desenrolar da relação didática, desde a sua etapa de planejamento, parte da ideia de estruturação do meio (*Milieu*) daí, as expectativas, as negociações, as regras, a devolução didática; os registros de representação semiótica mobilizados, a coordenação desses registros, suas transformações, assim como as variações de congruência ou não congruência semântica; influenciam e são influenciados pela estruturação desse meio (*Milieu*).

No caso particular do nosso estudo, o caminho trilhado pela professora “Rita” para gerenciar o saber Função Afim, em cena no jogo didático, partiu exatamente da estruturação desse meio (*Milieu*), mesmo que de maneira tradicional (haja vista o tipo de CD por ela estabelecido), o que tem a ver, fundamentalmente, com as suas expectativas em relação aos estudantes e a esse saber (concepções sobre os processos de ensino e aprendizagem desse saber, situações propostas, sua própria relação com esse saber) e os registros de representação semiótica mobilizáveis, o que definiu suas escolhas didáticas, tanto do ponto de vista do CD quanto dos RRS mobilizados em sala de aula.

Dessa forma, entendemos que a estruturação do meio (*Milieu*) engloba todas as inter-relações anteriormente apontadas e é fundamental para o gerenciamento do paradoxo da devolução (BROUSSEAU, 1986), o que, por sua vez, favorecerá o gerenciamento do paradoxo cognitivo do pensamento matemático (DUVAL, 2012a). A partir do momento em que o professor institui a devolução como uma das regras do CD e o estudante aceita o seu papel na divisão de responsabilidades perante o saber em jogo, cada vez mais, tenderá a não confundir o objeto matemático com a sua representação.

Por fim, e respondendo à nossa tese, concluímos que os resultados desse estudo apontam que a maneira como o professor gerencia o saber em cena, as situações propostas, as expectativas em relação aos estudantes, a divisão de responsabilidades, as regras instituídas na relação didática, é influenciada e ao mesmo tempo influencia os registros de representação semiótica do objeto matemático em estudo – em nosso caso, a Função Afim; mobilizados em sua prática.

Por outro lado, os tipos de registros de representação semiótica mobilizados, a coordenação entre esses registros, suas transformações, as variações de congruência ou não congruência semântica; favorecidos na relação didática sugerem que determinado tipo de Contrato Didático seja estabelecido. Assim, consideramos que existem inter-relações de estreita aproximação, ou seja, relações mútuas, entre o Contrato Didático estabelecido por uma professora de Matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática.

No decurso desse trabalho, novas questões surgiram e, deixamos como sugestões para futuras investigações: a) Como se dá o processo de devolução didática de estudantes do 3º ano do Ensino Médio em relação ao saber Função Afim, haja vista que esse não é um saber “novo” para eles? A relação ao saber desses estudantes favorece tal processo? Como se inter-relacionam, nesse contexto, a devolução didática e o paradoxo cognitivo do pensamento matemático? b) Que inter-relações podem ser estabelecidas, a partir da ruptura de um modelo de contrato didático tradicional (normativo) para um modelo aproximativo e os registros de representação semiótica da Função Afim mobilizados na relação didática? c) Considerando o amplo predomínio da linguagem natural, oral ou escrita, nas aulas de matemática, como se inter-relacionam as funções discursivas da linguagem e o Contrato Didático negociado, tendo a Função Afim como saber em cena? d) Quais rupturas do Contrato Didático são necessárias para que o professor adote, predominantemente, a abordagem global de propriedades figurais, quando das conversões entre os registros algébrico e gráfico da Função Afim?

De forma mais ampla, também consideramos relevante tomar os questionamentos anteriormente levantados para outros tipos de funções matemáticas, como as funções quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas, tendo em vista as dificuldades, já apontadas em estudos anteriores, apresentadas por

estudantes dos diferentes níveis de ensino em lidar com os diferentes registros de representação semiótica dessas funções.

Esperamos que este trabalho contribua com as reflexões acerca da articulação entre diferentes aportes teóricos no contexto da sala de aula e, de maneira particular, com as discussões sobre inter-relações entre o contrato didático e os registros de representação semiótica da função afim mobilizados na relação didática. Esperamos ainda, que esse trabalho suscite a reflexão, por parte do professor, em relação à sua prática e a necessidade de mudança de um contrato didático tradicional (normativo) para um contrato didático aproximativo, que considere a importância e necessidade de mobilização das múltiplas representações do objeto matemático de estudo e leve o estudante a agir sobre o saber em cena e transformá-lo em conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, D. F. **Representações matemáticas nos processos de ensino e de aprendizagem da Função Afim com uso do Software Geogebra**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2013. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/975/1/2015DionaraFreiredeAlmeida.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2019.
- ALMEIDA, F. E. L. **O Contrato Didático e as organizações matemáticas e didáticas: analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita**. 2016. Tese (Doutorado Programa em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7438>. Acesso em: 10 mar. 2019.
- ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- ARAÚJO, L. F. **Rompendo o Contrato Didático: utilização de estratégias metacognitivas na resolução de problemas algébricos**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3933>. Acesso em: 20 jul. 2018.
- ARAÚJO, J. R. **Conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da Função Afim: análise a partir da interpretação global de propriedades figurais**. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/42039>. Data do Acesso: 20 jun. 2022.
- ARAÚJO, L. F.; BRITO LIMA, A. P. A.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Ruptura e efeitos do Contrato Didático numa aula de resolução de problemas algébricos. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, vol. 92, n. 232, p. 739-756, 2011. Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/index.php/rbep/article/view/676/654>. Acesso em: 05 jun. 2018.
- ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Alemanha, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1024312321077>. Acesso em: 04 ago. 2020.
- ÁVILA, G. **Cálculo: das funções de uma variável**. v. 1. 7. ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- BATISTA, R. C. **Um estudo de representação de Função Afim em uma perspectiva de articulação entre matemática e física**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br:8443/jspui/bitstream/123456789/2638/1/ROG%c3%89RIO%20CARDOSO%20BATISTA.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

BESSA DE MENEZES, M. **Praxeologia do professor e do aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações de 2º grau**. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/3722/1/arquivo196_1.pdf. Acesso em: 23 out. 2020.

BESSOT, A. **Une introduction à la théorie des situations didactiques**. Master “Mathématiques, Informatiques” de Grenoble 2003-2004. N° 91. Oct. 2003. Disponível em: <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00078794/document>. Acesso em: 20 fev. 2022.

BOERO, P.; DOUEK, N.; FERRARI, P. L. Developing Mastery of Natural Language. *In*: L. D. E. (ed.). **International Handbook of Research in Mathematics Education**, New York, Routledge, p.262-295, 2008.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos**. Coleção Ciências da Educação. Tradução de: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRANDL, E.; RAMOS, E. E. L. As Funções Polinomiais do 1º e 2º Graus sob a perspectiva da Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013. *In*: **Anais do [...]**, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/334_580_ID.pdf. Acesso em: 15 jul. 2020.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O papel dos Registros de Representação na Compreensão do sistema de numeração decimal. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo: v. 7, n. 2, p. 201-227, 2005. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/4701/3269>. Acesso em: 15 jul. 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – matemática**. Brasília. Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Ministério da Educação, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2014.

BRASIL. **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Ministério da Educação, 2002.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, vol. 2. Secretaria de Educação Básica, Ministério da Educação, 2006.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: ensino fundamental. Brasília. Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: ensino médio. Brasília. Ministério da Educação, 2019.

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato Didático e Transposição Didática**: inter-relações entre fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3811>. Acesso em: 10 mar. 2019.

BROUSSEAU, G. **Ingénierie Didactique**: d'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet, 1982. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/03/82-3-Dun-probl%C3%A8me-%C3%A0-l%C3%A9tude-a-priori.pdf>. Acesso em: 24 ago. 2020.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *In*: **Théorisation des Phénomènes D'enseignement des Mathématiques**. Tese (Doutorado em mathématiques) Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986. p. 281-362.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990**. Editado e traduzido por: N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland e V. Warfield. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 2002.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O Professor e o Tempo. **Revista Tópicos Educacionais**. Recife, v. 15, nº 1/2, p. 105-116, 1997. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/topicoseducacionais/article/view/22467/18649>. Data do Acesso: 07 de ago. 2022.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; LIMA, P. F. Considerações Sobre a Matemática no Ensino Fundamental. I Seminário Nacional: Currículo em Movimento, Belo Horizonte, 2010. *In*: **Anais do [...]**, Belo Horizonte, 2010.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

CARDOSO, M. B. *et al.* Função Afim: uma análise dos procedimentos de conversão de alunos do 2º ano do ensino médio. 2013. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/671_1182_ID.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

CARDOSO, M. B. **Múltiplas Representações Semióticas no Ensino de Função Afim**: enfoque na formação inicial de professores de matemática. 2015. Dissertação

(Mestrado Acadêmico em Educação) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: http://www.uece.br/ppge/wp-content/uploads/sites/29/2019/06/Disserta%C3%A7%C3%A3o_MIKAEELLE-BARBOZA-CARDOSO.pdf. Acesso em: 15 jul. 2020.

CHAQUIAM, M.; CABRAL, N. F. Funções: uso, desuso e reflexos no ensino. **Coleção I – SINEPEM**, v. 4. Belém, PA. 2019. Disponível em: <https://paginas.uepa.br/ghemaz/wp-content/uploads/2021/10/Livro-2019-01-Funcoes-Uso-Desuso-e-Reflexos-sobre-o-Ensino.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2023.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a Resolução de Problemas. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 36-47.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações. v. 1., 2. ed., São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto & aplicações: ensino médio. v. 1., 3. ed., São Paulo: Ática, 2016.

DELGADO, C. J. B. **O Ensino da Função Afim a partir dos Registros de Representação Semiótica**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, 2010. Disponível em: <http://tede.unigranrio.edu.br/bitstream/tede/15/2/Carlos%20Jos%c3%a9%20Borges%20Delgado.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

DELGADO, C. J. B.; FRIEDMANN, C. V. P.; LIMA, J. C. P. As Dificuldades Apresentadas por Alunos do 1º Ano do Ensino Médio em Relação às Diferentes Representações da Função Afim. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010. In: **Anais do [...]**, Salvador, 2010. Disponível em: https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11_CC531.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

DENARDI, V. B. Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, Pelotas, 2017. In: **Anais do [...]**, Pelotas – RS, 2017. Disponível em: wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/files/2018/10/gd04_vania_denardi.pdf. Acesso em: 24 ago. 2022.

DENZIN, N. K; LINCOLN, Y. S. **O planejamento da pesquisa qualitativa**: teoria e abordagens. 2. ed., Porto Alegre: Artmed, 2006.

DUVAL, R. Registres de Représentation Sémiotique et Fonctionnement Cognitif de la Pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p.

37-65, 1993. Disponível em: <http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/ST/IST93004/IST93004.pdf>. Acesso em: 20 ago. 2020.

DUVAL, R. Quel Cognitif Retenir en Didactique des Mathématiques? **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 16, n° 3, p. 349-382, 1996.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. 2. Ed. Campinas: Papirus, 2003a. p. 11-33.

DUVAL, R. Comment Analyser le Fonctionnement Représentationnel des Tableaux et Leur Diversité?. **Spirale: Revue de recherches en éducation**. L'organisation visuelle des tableaux. n°32, p. 7-31. 2003b. Disponível em: https://www.persee.fr/doc/spira_0994-3722_2003_num_32_1_1377. Acesso em: 11 jul. 2020.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Gráficos e Equações: a articulação de dois registros. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática)**. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96>. Acesso em: 20 mai. 2020.

DUVAL, R. Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. In: CAMPOS, T. M. M. (Org.). **Matemática: Ver e Ensinar**. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática)**. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 14 jul. 2020.

DUVAL, R. Diferenças Semânticas e Coerência Matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática)**. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97/22381>. Acesso em: 20 jun. 2020.

DUVAL, R. Como Analisar a Questão Crucial da Compreensão em Matemática? Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática)**. Florianópolis, v. 13, n. 2, p.1-27, 2018. Disponível em:

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p1/38031>. Acesso em: 14 jul. 2020.

ELOI, Q. C. **Relações entre o Contrato Didático Potencial (CDP) proposto na abordagem do Livro Didático e o Contrato Didático estabelecido entre professor e alunos quando se tem o saber Função Afim em cena em uma turma de 1º Ano do Ensino Médio**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019. Disponível em:
<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/8341/2/Quercia%20Carvalho%20Eloi.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

FARIA, R. A. **Integração Multimodal e Coordenação de Representações Semióticas em Atividades de Função do 1º Grau**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017. Disponível em:
<http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000214818>. Acesso em: 20 jul. 2020.

FERREIRA DA SILVA, T. R. **Decisões Didáticas e Contrato Didático: inter-relações no ensino de um saber algébrico**. 2021. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2021.

FLICK, U. **Desenho da Pesquisa Qualitativa**. Porto Alegre: Bookman; Artmed, 2009.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. O funcionamento cognitivo e semiótico das Representações Gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. 28ª Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, Caxambu, 2005. *In: Anais da [...]*, Caxambu, 2005.

FONSECA, V. G. *et al.* Função Afim: um estudo das representações semióticas das soluções de questões por alunos da 1ª série do ensino médio. 2013. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2013. *In: Anais do [...]*, Salvador, 2013. Disponível em:
http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1506_1348_ID.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

FREIRE, B. L.; PIRES, R. F. O Conceito de Função nos Cadernos do Professor e do Aluno da Rede Estadual de Ensino de São Paulo: uma análise à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2013. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2013. *In: Anais do [...]*, Salvador, 2013. Disponível em:
http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1350_253_ID.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

GÁLVEZ, G. A Didática da Matemática. *In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 26-35.

GIBBS, G. **Análise de Dados Qualitativos**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GOMES, G. S. S. **A Função Afim através da Resolução de Problemas**: um estudo de caso analisando os registros de representação semiótica. 2017. Dissertação (Mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**. V. 1: conjuntos, funções. 9. ed., São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI *et al.* **Matemática**: ciência e aplicações: ensino médio. v. 1., 9. ed., São Paulo: Saraiva, 2016.

JOSHUA, S. Le Concept de Contrat Didactique et L'approche Vygotskienne. *In: Au-delà des didactiques, le didactique*: débats autour de concepts fédérateurs. De Boeck Université, 1996.

JONNAERT, P. Dévolution versus contre-dévolution! Un Tandem Incontournable pour le contrat didactique. *In: RAISKY, C.; CAILLOT, M. (éds) Au-delà des didactique: débats autour de concepts fédérateur*. Belgium: De Boeck & Larcier SA, 1996 (Tradução livre de Elio Ricardo)

JONNAERT, P. **Criar condições para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

LABURÚ, C. E.; FARIA, R. A. Coordenação e Multiplicidade Representacional em uma Atividade de Função do 1º Grau. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 7, n. 13, p. 61-86, 2018. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/460c/185ef49a19898defca7aa342daf162b31d62.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2020.

LENARTOVICZ, I. G. **Aplicação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval no estudo de Funções Polinomiais do 1º Grau no curso de Administração**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, 2013. Disponível em: https://bu.furb.br/docs/DS/2013/355715_1_1.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

LIMA BORBA, V. M. **A sala de aula como Espaço Psíquico**: articulações entre a didática, a psicanálise e a relação ao saber na proposição de uma tipologia de contrato didático. 2018. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/8348/2/Valeria%20Maria%20de%20Lima%20Borba.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2022.

LIMA *et al.* **A Matemática do Ensino Médio**. v. 1., 10. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética à álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LORENCINI, P. B. M. **Possibilidades inclusivas do diálogo entre videntes e alunos com deficiência visual em uma sequência didática sobre Função Afim**.

2019. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/4670>. Acesso em: 20 jul. 2020.

LUCAS, A. B. Equações e Funções: descontinuidades conceituais. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010. *In: Anais do [...]*, Salvador, 2010. Disponível em: https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T20_CC1493.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

MACHADO DA SILVA, E. **O conceito de função e suas linguagens**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2020.

MAGGIO, D. P.; SOARES, M. A. S.; NEHRING, C. M. Registros de Representação Semiótica da Função Afim: análise de livros didáticos de matemática do ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 05, n. 1, p. 38-47, 2010. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2010v5n1p38/21140>. Acesso em: 20 jul. 2020.

MATOS FILHO, M. A. S. **Análise de uma sequência didática para o ensino de Funções Polinomiais do 1º e 2º graus instrumentalizada por uma ferramenta computacional**: possibilidades e dificuldades. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/7480/2/Mauricio%20Ademir%20Saraiva%20de%20Matos%20Filho.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

MATOS FILHO, M. A. S.; MENEZES, J. E. Como os alunos do Ensino Médio estão construindo e interpretando gráficos de Funções Polinomiais de 1º e 2º Graus. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010. *In: Anais do [...]*, Salvador, 2010. Disponível em: https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11_CC1537.pdf. Acesso em: 15 jul. 2020.

MELO, J. J. *et al.* A Importância dos Registros de Representação Semiótica no Ensino da Matemática. **Revista Prospectos**, v. 1, p. 1-9, 2014.

MENESES, L. R. M. **Representações mobilizadas nas turmas de 1º Ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe no ensino de Função Afim e Quadrática**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/8906/2/LEONEL_RICARDO_MACHADO_MENESES.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

MORETTI, M. T. O Papel dos Registros de Representação na Aprendizagem de Matemática. **Contrapontos**, Itajaí, Ano 2 - n. 6 - p. 423-437, 2002. Disponível em: <https://siaiap32.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/180>. Acesso em: 05 jul. 2020.

MOSSI, S. V. **Análise discursiva das Representações Semióticas mobilizadas por Licenciandos em Matemática no ensino e na aprendizagem de Funções**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/6764/MOSSI%2c%20SHAYENE%20VIEIRA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 15 jul. 2020.

NEHRING, C. M. **A Multiplicação e seus Registros de Representação nas Séries Iniciais**. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996. Disponível em: Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/111405>. Acesso em: 15 jul. 2020.

OPAS. Organização Pan-Americana da Saúde. **Histórico da pandemia de COVID-19** [online]. Disponível em: <https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19>. Acesso em: 27 mai. 2021.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIS, S. M.; SARAIVA, M. J. O significado das representações da função afim para alunos do 8.º ano de escolaridade. **Quadrante**, vol. XX, nº 2, 2011. Disponível em: <https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/916152.pdf>. Data do acesso: 03 jun. 2022.

PERNAMBUCO. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife. Secretaria de Estado da Educação, 2012a.

PERNAMBUCO. **Parâmetros Curriculares**: introdutório. Recife. Secretaria de Estado da Educação, 2012b.

PERNAMBUCO. **Currículo de Pernambuco**: ensino fundamental. Recife. Secretaria de Estado da Educação e Esportes, 2019. Disponível em: [http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica\(2\).pdf](http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica(2).pdf). Acesso em: 15 jul. 2019.

POMMER, W. M. Brousseau e a Ideia de Situação Didática. **Seminários de Ensino de Matemática**. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/296483624_Brousseau_e_a_ideia_de_Situacao_Didatica. Acesso em: 25 jul. 2018.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. **Educação e Matemática**. Portugal, nº. 15, p. 3-9, 1990. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4473/1/90%20Ponte%20EM%2015.pdf>. Acesso em: 25 mai. 2021.

REIS, A. M. **Uma Proposta Dinâmica para o Ensino de Função Afim a Partir de Erros dos Alunos no Primeiro Ano do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São

Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em:
<https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10866/1/Adinilson%20Marques%20Reis.pdf>.
 Acesso em: 15 jul. 2020.

RICARDO, E; SLONGO, I; PIETROCOLA, M. A Perturbação do Contrato Didático e o Gerenciamento dos Paradoxos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 8, n. 2, p. 153-163, 2003. Disponível em:
<https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/545/340>. Acesso em: 20 jun. 2018.

SALIN, E. B. **Matemática Dinâmica**: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/108425>. Acesso em: 15 jul. 2020.

SANAR SAÚDE. **Linha do tempo do Coronavírus no Brasil**. Sanar Med – Sanar Saúde [online]. Disponível em: <https://www.sanarmed.com/linha-do-tempo-do-coronavirus-no-brasil>. Acesso em: 27 mai. 2021.

SANTOS, V. D. G. **Esboço de gráficos nos ambientes papel e lápis e GeoGebra**: funções afins e funções quadráticas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012. Disponível em:
<http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/1224/1/Esbo%3a7o%20de%20gr%3a1ficos%20nos%20ambientes%20papel%20e%20l%3a1pis%20e%20GeoGebra%20fun%3a7%3ab5es%20afins%20e%20fun%3a7%3ab5es%20quadr%3a1ticas.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

SARAIVA, M. J.; TEIXEIRA, A. M. Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, Suplemento nº 4 al nº 19, pp. 74–83. Itália: Palermo. 2009. Disponível em:
http://math.unipa.it/~grim/TSG24_ICMI11_Saraiva-Teixeira_QRDM_Supl4_09.pdf.
 Acesso em: 07 jun. 2022.

SARRAZY, B. Le contrat didactique. **Revue Française de Pédagogie**. França, nº 112, 1995.

SCHUBAUER-LEONI, M. L.; PERRET-CLERMONT, A. N. Social Interactions and Mathematics Learning. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Org.). **Learning and Teaching Mathematics**: an international perspective. Psychology Press Ltd. Publishers, 1997. Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/49251429_Social_interactions_and_mathematics_learning. Acesso em: 05 set. 2020.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: PUC-SP, 1999.

SILVA, F. A. F. **Graus de não congruência semântica nas conversões entre os Registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais**. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade

Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em:
<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/8349/2/Fernanda%20Andrea%20Fernandes%20Silva.pdf>. Acesso em: 20 de jun. 2019.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo**. v. 1., 1. ed., São Paulo: Saraiva, 2016.

SOTO, M.; HERRERA, C. G.; PEREYRA, N. E. Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. nº 55. 2019. p. 71-84. Disponível em:
<http://funes.uniandes.edu.co/17215/1/Soto2019Coordinación.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2022.

SOUSA, A. C. G. BARRETO, M. C. Os Registros de Representação Semiótica e o Trabalho com Aritmética nas Séries Iniciais da Escolaridade: uma experiência de formação docente. XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, Rio Claro, 2008. In: **Anais do [...]**, Rio Claro, 2008. Disponível em:
http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/298-1-A-gt1_sousa_ta.pdf. Acesso em: 02 jul. 2020.

SOUZA, C. M. P.; BRITO LIMA, A. P. A. O Contrato Didático a partir da aplicação de uma Sequência Didática para o Ensino de Progressão Aritmética. **Zetetiké**, v. 22, n. 42, p. 31-61, 2014. Disponível em:
<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646566/13466>. Acesso em: 25 jul. 2018.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **#Contato matemática**. 1º ano, 1. ed., São Paulo: FTD. 2016.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa**: como as coisas funcionam. Rio de Janeiro: Penso, 2011. Disponível em:
http://www.larpsi.com.br/media/mconnect_uploadfiles/x/d/xdw.pdf. Acesso em: 16 out. 2020.

STYLIANOU, D. A. An Examination of Middle School Students' Representation Practices in Mathematical Problem Solving Through the Lens of Expert Work: towards an organizing scheme. **Educational Studies in Mathematics**: v. 76, n. 3, p. 265-280, 2011.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, v. 21, n. 39 – jan/jun 2013. Disponível em:
periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/download/8646602/13504+&cd=3&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br. Acesso em: 19 set. 2018.

TOZO, F. L. D. **Tarefas Exploratórias-Investigativas para a Aprendizagem de Função Afim**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2016. Disponível em:
<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/7800/DissFLDT.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 15 jul. 2020.

VAZQUEZ, S.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función a través de la Historia. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. v. 4, n.16, p. 141-151. 2008. ISSN: 1815-0640. Disponível em: Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/14888/1/Sastre2008El.pdf>. Acesso em: 25 mai. 2021.

APÊNDICE A - TERMO DE AUTORIZAÇÃO INSTITUCIONAL**DECLARAÇÃO**

Declaramos para os devidos fins, que *autorizamos* o pesquisador JOSÉ EDIVAM BRAZ SANTANA, a coletar dados nesta instituição de ensino, para a execução do Projeto de Pesquisa intitulado “**CONTRATO DIDÁTICO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: inter-relações no ensino da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio**”, do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – PPGEDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, cujo objetivo principal é “analisar as inter-relações entre o contrato didático, estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim”.

Estamos cientes de que os dados aqui coletados serão utilizados única e exclusivamente para fins científicos e que não serão divulgados de forma a possibilitar a identificação dos participantes (escola, professora e estudantes). Da mesma forma, estamos cientes de que participar dessa pesquisa não implicará nenhum custo para os participantes e que, como voluntários, também não receberão qualquer valor em dinheiro como compensação.

Afogados da Ingazeira PE, ____ de _____ de 2021.

Gestora

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO I

MODELO UTILIZADO COM A PROFESSORA “RITA”⁷²

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa até então intitulada **“CONTRATO DIDÁTICO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: inter-relações no ensino da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio”**, do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – PPGEDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. A sua participação **não é obrigatória**, mas, voluntária. A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo na sua relação com o pesquisador, com a coordenação ou com o docente da disciplina.

Objetivo principal do estudo: analisar as inter-relações entre o contrato didático, estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim.

Procedimento: A pesquisa será realizada por meio de uma entrevista semiestruturada com a professora da turma; da gravação em vídeo das aulas referentes ao ensino da Função Afim, de forma que o pesquisador não fará interferências no decurso das aulas da professora; e da utilização dos registros no caderno de alguns dos alunos participantes. Os dados obtidos na pesquisa serão utilizados **única e exclusivamente** para fins científicos, não sendo divulgados, sobre qualquer pretexto, para fins alheios a esses.

Riscos: Não existem riscos relacionados à sua participação na pesquisa.

Benefícios: Os benefícios gerados com a sua participação estão relacionados às possíveis contribuições para a discussão em torno das inter-relações entre o CD e a TRRS.

Confidencialidade: As informações obtidas por meio dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre a sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar a identificação de quaisquer dos participantes. Os

⁷² **Adaptado de:** Projeto de Pesquisa: Entenda e Faça. Marco Antônio F. da Costa e Maria de Fátima Barrozo da Costa. 3. Ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. 140 p.

resultados serão divulgados em apresentações ou publicações com fins científicos ou educativos.

Custo e pagamento: Participar dessa pesquisa não implicará nenhum custo para você, e, como voluntário, você também não receberá qualquer valor em dinheiro como compensação pela participação.

Caso deseje, você poderá receber uma cópia deste termo onde consta o telefone e e-mail do pesquisador responsável, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

Pesquisador responsável: JOSÉ EDIVAM BRAZ SANTANA

Telefone/e-mail: (87) 99620-6079/ edivamsantana@hotmail.com

Orientadora: Professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Coorientador: Professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Eu, abaixo assinada, na condição de *professora da turma participante da pesquisa*, declaro que entendi os objetivos, condições, riscos e benefícios da nossa participação na pesquisa e estou de acordo em participar.

Afogados da Ingazeira PE, ____ de _____ de 2021.

Assinatura

APÊNDICE C - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO II

MODELO UTILIZADO COM OS ESTUDANTES OU RESPONSÁVEIS⁷³

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa até então intitulada **“CONTRATO DIDÁTICO E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: inter-relações no ensino da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio”**, do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – PPGEDUMATEC, da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. A sua participação **não é obrigatória**, mas, voluntária. A qualquer momento você pode desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa não trará nenhum prejuízo na sua relação com o pesquisador, com a coordenação ou com o docente da disciplina.

Objetivo principal do estudo: analisar as inter-relações entre o contrato didático, estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim.

Procedimento: A pesquisa será realizada por meio de uma entrevista semiestruturada com a professora da turma; da gravação em vídeo das aulas referentes ao ensino da função afim, de forma que o pesquisador não fará interferências no decurso das aulas da professora; e da utilização dos registros no caderno de alguns dos alunos participantes. Os dados obtidos na pesquisa serão utilizados **única e exclusivamente** para fins científicos, não sendo divulgados, sobre qualquer pretexto, para fins alheios a esses.

Riscos: Não existem riscos relacionados à sua participação na pesquisa.

Benefícios: Os benefícios gerados com a sua participação estão relacionados às possíveis contribuições para a discussão em torno das inter-relações entre o CD e a TRRS.

Confidencialidade: As informações obtidas por meio dessa pesquisa serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre a sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar a identificação de quaisquer dos participantes. Os

⁷³ **Adaptado de:** Projeto de Pesquisa: Entenda e Faça. Marco Antônio F. da Costa e Maria de Fátima Barrozo da Costa. 3. Ed. – Petrópolis, RJ: Vozes, 2012. 140 p.

resultados serão divulgados em apresentações ou publicações com fins científicos ou educativos.

Custo e pagamento: Participar dessa pesquisa não implicará nenhum custo para você, e, como voluntário, você também não receberá qualquer valor em dinheiro como compensação pela participação.

Caso deseje, você poderá receber uma cópia deste termo onde consta o telefone e e-mail do pesquisador responsável, podendo tirar suas dúvidas sobre o projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

Pesquisador responsável: JOSÉ EDIVAM BRAZ SANTANA

Telefone/e-mail: (87) 9620-6079/ edivamsantana@hotmail.com

Orientadora: Professora Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles

Coorientador: Professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos

() Eu, abaixo assinado(a), na condição de **estudante com idade maior que 18 anos**, declaro que entendi os objetivos, condições, riscos e benefícios de minha participação na pesquisa e estou de acordo em participar.

() Eu, abaixo assinado(a), na condição de **responsável pelo(a) estudante**

_____,
declaro que entendi os objetivos, condições, riscos e benefícios da sua participação na pesquisa e estou de acordo em participar.

Afogados da Ingazeira PE, ____ de _____ de 2021.

Assinatura

APÊNDICE D - ROTEIRO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA**PERFIL DOCENTE (A SER PREENCHIDO PELA PROFESSORA)****IDENTIFICAÇÃO**

1. Email:

2. Faixa etária:

a) 21 – 30 anos

d) 51 – 60 anos

b) 31 – 40 anos

e) Outra:

c) 41 – 50 anos

3. Tipo de vínculo

a) Professor da Rede privada

b) Efetivo da Rede estadual de ensino de Pernambuco

c) Contratado da Rede estadual de ensino de Pernambuco

d) Prestador de serviço da Rede estadual de ensino de Pernambuco

e) Outro:

4. Possui outro vínculo empregatício (na educação ou fora dela)?

a) Sim.

b) Não.

5. Em quais turmas você leciona (atualmente) nesta escola?

FORMAÇÃO DOCENTE E EXPERIÊNCIA DOCENTE

6. Qual a sua formação inicial?

7. Tem formação em nível de pós-graduação?

a) Sim

b) Não

8. Se sim, em que nível? Qual curso?

Especialização:

Mestrado:

Doutorado:

Outro:

9. Há quanto tempo você leciona?

10. Há quanto tempo você leciona nessa escola?

ENTREVISTA

Sobre a turma investigada

1. Como você avalia essa turma do 1º ano do ensino médio, tanto em termos comportamentais (disciplina/indisciplina, participação nas aulas) quanto em termos de aprendizagem, principalmente?
2. Você também atua outras turmas do EM? Quais?
3. Atuando em outras turmas, certamente, existem aquelas das quais você gosta mais, aquelas que gosta menos de dar aulas. Essa turma, se enquadra em qual desses perfis? Por quê?
4. Nessa turma em particular, tem alunos que você considera “mais capazes” que outros? De que forma você trata esses alunos?

Sobre o livro LD utilizado

5. Você participou ativamente do processo de escolha do LD adotado e utilizado nessa escola? De que forma?
6. É o LD que você pretendia escolher?
7. Você tem “afinidade” com esse livro? Por quê?
8. Você o utiliza em suas aulas? De que forma? Com que frequência?
9. Há quanto tempo o utiliza?

10. É dele que você retira as atividades trabalhadas em sala de aula ou costuma utilizar outras fontes também?
11. Qual é a relação dos alunos, dessa turma em particular, com esse livro? Utilizam com frequência? Conseguem desenvolver as atividades nele propostas ou sentem dificuldades?

Questões sobre a prática docente

12. Predominantemente, como costuma organizar o processo de ensino da Matemática em suas aulas para essa turma em específico?

No que se refere ao ensino de funções

13. De que forma costuma introduzir o ensino da função afim em suas turmas do 1º ano do EM?
14. Que sequência de conceitos costuma adotar?
15. Metodologicamente, como costuma vivenciar esta unidade didática (função afim) em sala de aula?
16. No caso do estudo do gráfico, como costuma proceder esse ensino?
17. Como você acha que o professor deve ensinar função afim para alunos do 1º ano do EM?
18. Você consegue antecipar as dificuldades enfrentadas pelos alunos quando do estudo da função afim?
19. De acordo com a sua experiência em turmas do 1º ano do EM, quando você ensina a função afim, quais são as dificuldades mais comuns que você percebe nos seus alunos?
20. Como você lida com essas dificuldades?
21. Para você, o que é uma função afim?

Sobre o processo de ensino-aprendizagem

22. Como você acha que o aluno aprende matemática? Mais particularmente, como você acha que ele aprende função afim?
23. Você acredita que as formas como os alunos utilizam as representações matemáticas para resolver os problemas propostos, influencia no seu processo de aprendizagem? Por quê?

24. Como você acha que o professor deve fazer para que o aluno aprenda, mais particularmente, aprenda o conceito de função afim?
25. Como você COSTUMAVA acompanhar os alunos que apresentam mais dificuldades? Como os orienta em seu processo de aprendizagem (o que você diz para ele? Como é que sugere que ele deva estudar Matemática?)?
26. E atualmente, considerando o contexto de pandemia e todas as restrições por ele impostas, como você faz para acompanhar os alunos que apresentam mais dificuldades? Como os orienta em seu processo de aprendizagem (o que você diz para ele? Como é que sugere que ele deva estudar Matemática?)?
27. Por enquanto é isso! Se outras questões surgirem, voltamos a conversar novamente! Tudo bem?

Obrigado por Colaborar!

APÊNDICE E – TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA “RITA”

Pesquisador: 30 de julho de 2021, vou começar aqui o trabalho de entrevista com a professora participante da pesquisa. Como já foi avisado, a gente sempre garante o anonimato dos participantes, por isso utilizaremos o pseudônimo. Então vamos lá! A entrevista conta com uma parte introdutória que é para traçar o perfil do professor. Essa parte é preenchida por você, então eu vou passar às perguntas. Lembrando que a pesquisa investiga a relação entre o contrato didático e a teoria dos registros de representação semiótica quando do ensino da função afim, no 1º ano do ensino médio. Qualquer dúvida, caso você não entenda alguma pergunta, porque às vezes tem pergunta que é extensa, não fique tímida, pode perguntar! Vamos lá!

Pesquisador: Sobre a turma investigada, como você avalia essa turma do 1º ano do ensino médio, tanto em termos comportamentais (disciplina/indisciplina, participação nas aulas) quanto em termos de aprendizagem, principalmente?

Rita: Eu estou com essa turma desde o início do ano. Em termos de aprendizagem, tem alunos muito bons e tem alunos muito fracos. Quando eu fui dar, por exemplo, equação do primeiro grau, eles disseram que nunca tinham visto isso na vida deles. Eu tive que dizer que era mentira deles, não é? Quando eu comecei a explicar e, mesmo assim, eles não conseguiram entender e eu tive que passar mais de duas semanas com equação do primeiro grau.

Pesquisador: Que é pré-requisito para o ensino de função afim?

Rita: Isso! E o mesmo problema aconteceu com sistemas, né? Eu dei logo depois de equação... bem complicado! Tive que retomar!

Pesquisador: Você também atua outras turmas do EM? Quais?

Rita: Primeiro, segundo e terceiro.

Pesquisador: Tem quantos primeiros anos?

Rita: Só esse mesmo.

Pesquisador: Então não te farei a próxima pergunta porque dependeria dessa, que seria, se você atuasse em outras turmas de primeiro ano, porque escolheu essa para participar da pesquisa.

Rita: Não! De primeiro ano, só essa mesmo.

Pesquisador: Certo! Mas, como você atua em outras turmas, que não são do primeiro ano mas, são do ensino médio, certamente, existem aquelas que você gosta mais,

aquelas que gosta menos, no sentido de dar aulas! Essa turma, se enquadra em qual desses perfis? Por quê?

Rita: Eu gosto de estar lá [de dar aula a esses alunos]! Ela é uma turma que tem um grupo muito afetuoso, muito receptivo; o outro [grupo], tem alunos bem comprometidos, bem focados assim... como se fosse, metade da turma bem focada, bem inteligente e a outra metade, totalmente o avesso. Alguns dormem na sala, assim, totalmente avesso mesmo, o professor chega lá, na sala, e é mesmo que não chegar ninguém.

Pesquisador: E esse é um desafio, não é? Você tentar conquistar essa outra metade?

Rita: Isso! E aí eles falam que nunca aprenderam matemática, que não sabem como chegaram no primeiro ano e que não é agora, que eu vou fazer eles aprender.

Pesquisador: Nossa! Isso é forte! Questão de concepção já!

Rita: Isso! Já vem se formando lá [ênfase]... desde antes...

Pesquisador: Nove anos de estudo já [referindo-se aos nove anos do ensino fundamental] e ainda assim têm essa aversão à matemática. E a gente, que gosta de matemática...

Rita: Fica é triste com isso.

Pesquisador: Exato!

Rita: Mas, é assim, alguns, digo, a maioria se esforça, sabe? Só que tem outra turma, que constitui o grupo da próxima semana que [referindo-se ao G2], você vai ver, é bem difícil.

Pesquisador: Mas, vamos lá! Nessa turma em particular, tem alunos que você considera “mais capazes” que outros? De que forma você trata esses alunos?

Rita: Tem sim! Embora, na hora da explicação eu tente tratar de modo igual mas, na hora das atividades, eu tento trazer mais atividades para eles, já que eles terminam as atividades antes dos outros, eu sempre trago “um extra” porque eles têm condições de avançar mais que os outros.

Pesquisador: Ok!... Sobre o livro LD utilizado, você participou ativamente do processo de escolha do LD adotado e utilizado nessa escola? De que forma?

Rita: Participei sim! Desde a análise e seleção das obras disponibilizadas.

Pesquisador: É o LD que você pretendia escolher?

Rita: Não! Não é o que eu pretendia. Na verdade, nós nem tínhamos esse livro em mãos, escolhemos pela resenha e o modelo digital, mas, ele é um livro de uma

linguagem bem complicada esse de... [diz o nome dos autores]. Para os alunos que nós temos, que vêm bem fraquinhos da base, esse não era o livro ideal...

Pesquisador: No caso, esse não seria o livro que você escolheria?

Rita: Não!

Pesquisador: Mas, você tem “afinidade” com esse livro? Por quê?

Rita: Atualmente eu já tenho sim! A gente vai se adaptando, mas, a primeira turma a utilizá-lo, achava a linguagem dele muito difícil e as atividades bem complicadas.

Pesquisador: Você o utiliza em suas aulas? De que forma? Com que frequência?

Rita: Assim, no currículo de PE, a gente pega o livro didático e ele não contempla todos os conteúdos [uma vez que esse currículo trabalha com a ideia de espiral], então, a gente vai pelo conteúdo, tem conteúdo que tem lá, da melhor maneira de trabalhar, e tem outros que não têm e aí, não tem como a gente utilizar esse livro.

Pesquisador: No caso, você usa, mas não em todas as aulas?

Rita: Isso! Porque tem conteúdo que o livro não contempla.

Pesquisador: No caso de função afim, você já tem um panorama do livro? Dá para utilizar ou não?

Rita: Dá para utilizar.

Pesquisador: Será utilizado?

Rita: Sim! Será utilizado! Em exercícios e atividades porque a parte teórica eu trouxe um fascículo que recebemos o ano passado da secretaria de educação.

Pesquisador: Certo! Há quanto tempo utiliza esse livro?

Rita: Esse é o quarto ano.

Pesquisador: Certo! No caso, você já falou que praticamente não o utiliza, mas, você diria que utiliza muitas atividades dele ou costuma utilizar outras fontes?

Rita: Eu trago muitas atividades impressas.

Pesquisador: Qual é a relação dos alunos, dessa turma em particular, com esse livro? Embora você já tenha dito que eles têm muita dificuldade em acompanhá-lo, mas, eles conseguem desenvolver as atividades nele propostas?

Rita: Eles utilizam com bastante dificuldade. De vez em quando me procurando para tirar dúvida.

Pesquisador: Falaremos agora sobre questões voltadas à prática docente. Predominantemente, como costuma organizar o processo de ensino da Matemática em suas aulas para essa turma em específico?

Rita: Costumo trazer uma contextualização, quando o assunto permite abranger e, de forma geral, eu procuro me basear no nível da turma. Alguns entenderiam rapidamente, por definição, mas outros, não. Tem que ser contextualizando e, mesmo assim, eles ainda não entendem o que a gente quer dizer. Acho que são as dificuldades que eles trazem lá da base que dificulta aqui [no ensino médio]. Eles têm dificuldades em questões básicas, tipo, se eu digo “ $+3 - 2$ ” ou “ $- 2 + 5$ ”, eles não sabem, sempre se engancham e confundem a relação de sinal. Tanto na adição e subtração, quanto na multiplicação e divisão, eles confundem uma coisa com a outra. E agora, que estamos com bem menos tempo para trabalhar [referindo-se à divisão da turma] porque estamos repetindo os conteúdos, embora, não era para a gente repetir, era para o aluno estudar em casa (na semana em que não estiver no ensino presencial) os mesmos conteúdos ministrados presencialmente, mas, a turma não consegue fazer isso.

Pesquisador: No que se refere ao ensino de funções, de que forma costuma introduzir o ensino da função afim em suas turmas do 1º ano do EM?

Rita: Sempre trago um problema, para contextualizar. Costumo ler o problema e dou um tempo para que eles possam observar as relações e montar a lei de formação.

Pesquisador: Você costuma seguir uma sequência de conceitos?

Rita: Hoje, eu sigo a sequência do fascículo. Já segui a do livro também, em outras turmas. Nessa turma, antes já trabalhei as noções de funções: domínio, contradomínio e imagem, mas, não relatei à função afim.

Pesquisador: Metodologicamente, como costuma vivenciar esta unidade didática (função afim) em sala de aula?

Rita: Eu costumo ir por partes. Explico uma parte do conteúdo, por exemplo, explico sobre o zero da função, os coeficientes e, já trago uma atividade. Em outros casos, quando tínhamos mais tempo. Depois aprofundávamos com problemas sobre função afim e trazia mais uma lista de exercício, para fixar.

Pesquisador: Certo! Como você já colocou, hoje o tempo está mais resumido mas,... você faz a definição, traz alguns conceitos mas, em algum momento você propõe que eles trabalhem... eu sei que atualmente, trabalho em grupo está bem difícil mas,...

Rita: Isso! Inclusive no nosso planejamento coletivo [com os outros professores de matemática da escola], pensamos em oficinas, como fazemos todos os anos, mas, descartamos devido à pandemia. Todos os anos trabalhamos com oficinas, jogos, mas, esse ano, tivemos que descartar.

Pesquisador: Basicamente, só trabalho individual?

Rita: Sim! Somente individual.

Pesquisador: O trabalho em grupos, faz falta?

Rita: Sim! Eu gosto de propor trabalho em grupos.

Pesquisador: No caso do estudo do gráfico, como costuma proceder esse ensino?

Rita: Geralmente, eu costumo trabalhar com as propriedades dos coeficientes. Começo com as propriedades dos coeficientes, depois, proponho também a construção por meio da atribuição de valores para x e y , para ir esboçando o gráfico, mas, eu prefiro utilizar as propriedades dos coeficientes porque fica mais amplo. Eles precisam saber porque são aqueles valores, porque aquele ponto de x tem que ser aquele valor, porque o de b fica lá no eixo y ... fica mais claro na mente deles do que só ir ligando os valores, por tabela.

Pesquisador: Como você acha que o professor deve ensinar função afim para alunos do 1º ano do ensino médio?

Rita: Começando pela definição. Depois domínio, imagem, contradomínio, o gráfico, o zero da função, os coeficientes, seguido de problemas com a função afim, depois, como encontrar o coeficiente angular.

Pesquisador: Você consegue antecipar as dificuldades enfrentadas pelos alunos quando do estudo da função afim?

Rita: Sim! Inclusive no meu planejamento, peguei um slide, com a intenção de utilizá-lo, mas, depois de analisa-lo percebi que não daria certo porque a linguagem era difícil, muita álgebra. Peguei também um resumo de um módulo que utilizamos em outra turma, mas também tinha muita álgebra, até para a construção do gráfico, então, percebi que para essa turma também não daria certo, então descartei também. Foi quando peguei o fascículo e achei mais de acordo com a linguagem deles, por isso, vou utilizá-lo.

Pesquisador: De acordo com a sua experiência em turmas do 1º ano do EM, quando você ensina a função afim, quais são as dificuldades mais comuns que você percebe nos seus alunos?

Rita: As mais comuns estão relacionadas à álgebra mesmo. Eles sempre perguntam porque misturar tanta letra com números. Eles não conseguem diferenciar o que são as variáveis e o que são os coeficientes. Eles sempre acham que o coeficiente angular é o x . O b , eu acho que é o que sempre fica mais claro para eles, por conta do valor fixo. Eles sempre confundem o a com o x . Você pergunta: o que é o coeficiente

angular? Geralmente a resposta que vem é: x . Ou então você pergunta o que é o x e eles respondem que é o coeficiente angular. Eles fazem essa confusão.

Pesquisador: Em relação ao gráfico: de acordo com a sua experiência, eles têm dificuldade na construção ou no reconhecimento do gráfico da função afim?

Rita: Sim! Sentem dificuldades. Inclusive percebemos isso em turmas do terceiro ano. Em outros anos, L... [nome de outra professora de matemática da escola] tinha uma turma de terceiro ano e ela sempre se reclamava que função afim nunca entrava na cabeça deles. Ela sempre levava aulões, muitas atividades, simulados, outros professores [para trabalhar o conteúdo] mas, mesmo assim, eles não conseguiam entender.

Pesquisador: E é, dentre os demais tipos de função, aquele mais simples, não é?

Rita: Sim. Mas, por incrível que pareça, eles acham mais simples a função quadrática do que a função afim. Assim, pela minha experiência, em muitas turmas, eles preferem função quadrática a função afim, talvez, pela afinidade com a equação do 2º grau.

Pesquisador: Talvez porque eles trabalhem mais tempo com a equação do 2º grau ou, porque estudam esse conteúdo mais próximo [em termos temporais], porque eles estudam equação do 1º grau lá no 6º ou 7º ano (embora revisitem sempre) e equação do 2º grau no 9º, talvez estejam mais familiarizados com isso.

Rita: Exato! Eles gostam muito de trabalhar com Báskara!

Pesquisador: Bom, diante dessas dificuldades, como você costuma lidar com elas?

Rita: Eu sempre digo a eles que o x é aquele valor que pode variar, que não é um valor só e o a , é um valor específico [referindo-se à confusão entre x e a , da função afim], de acordo com o coeficiente linear e a raiz da função. O x , ele vai sempre variar... então, se o valor pode variar, se ele pode 1, 2, 3, 10, então aquele valor ali é o x .

Pesquisador: A próxima pergunta é bem trivial, mas, preciso fazê-la: para você, o que é uma função afim?

Rita: A função afim é uma função definida por $f(x) = ax + b$, com b diferente de zero.

Pesquisador: Sobre o processo de ensino-aprendizagem, como você acha que o aluno aprende matemática? Mais particularmente, como você acha que ele aprende função afim?

Rita: É tudo um processo! Você precisa trabalhar as definições, trazer problemas do cotidiano. Não pode só se apegar às definições, mas também, não pode só se apegar aos problemas do cotidiano, tenho que envolver um com o outro e ele [o aluno] tem que também praticar, pegar exercícios e tentar resolver por si só, tem que treinar, para

ver se amadurece a mente dele, para ver se ele consegue abrir a mente, porque muitas vezes eu pego as questões mais simples, ele já olha, sem se quer ler a questão e já vai logo dizendo que não sabe e que não quer responder. Aí você pergunta: mas você já leu a questão? Não! Então, leia a questão. Ele diz: não consigo. Ler a questão, ou não ler e diz, eu não consigo professora, não vou saber responder essa questão.

Pesquisador: Você acredita que as formas como os alunos utilizam as representações matemáticas para resolver os problemas propostos, influencia no seu processo de aprendizagem? Por quê?

Rita: Com certeza ajuda! Eu sempre dou um problema e deixo eles fazerem... dependendo da resposta, eu valido. Não é necessário que utilizem a definição, mas que tenham coerência no seu raciocínio.

Pesquisador: Como você acha que o professor deve fazer para que o aluno aprenda, mais particularmente, aprenda o conceito de função afim?

Rita: Vou tirar por mim, quando eu era aluna, eu acho que se eu não tivesse aprendido bem a equação do 1º grau, eu acho que é um pré-requisito para função afim, eu não teria tido facilidade no ensino médio, para aprender função afim. Então é assim, eu acho que lá da base, ele tem que vir muito bem, com a equação do 1º grau... acho que se ele não tiver nenhuma dúvida com equação do 1º grau, ele vai ter muita facilidade com a função afim.

Pesquisador: Como você COSTUMAVA acompanhar os alunos que apresentavam mais dificuldades? Como os orientava em seu processo de aprendizagem (o que você dizia para ele? Como é que sugeria que ele devesse estudar Matemática? Uso o verbo no passado, por conta da situação de pandemia)?

Rita: Os alunos que não têm muita dificuldade, costumava trazer atividades extras, que não seriam utilizadas pelos outros, que têm muita dificuldade. Para aqueles que têm muita dificuldade, começávamos lá do comecinho, trazendo equação do 1º grau... explicava, trazia exercícios, atividades em grupos... em roda mesmo, assim... eles costumavam ficar ao redor do birô, quando a turma não era muita, e aí a gente ia discutindo as questões e, a partir daí, a gente começava a avançar para função afim: a questão dos coeficientes, do gráfico, do zero da função, tentava avançar mas, mesmo assim, era bem difícil. Ou seja, trazia atividades diferenciadas para os outros, mais avançadas sobre função mesmo e, para aqueles [com dificuldades], uma revisão, bem lá da base, para poder ir avançando para a função afim.

Pesquisador: E atualmente, considerando o contexto de pandemia e todas as restrições por ele impostas, como você faz para acompanhar os alunos que apresentam mais dificuldades? Como os orienta em seu processo de aprendizagem (o que você diz para ele? Como é que sugere que ele deva estudar Matemática?)?

Rita: Bom, atualmente, dou o assunto na sala e, como não posso me deter muito, e ficar voltando, por causa do tempo, porque se não atrasa muito o currículo, que precisamos cumprir... tem a sugestão de videoaulas, pego muitas no canal do “Educa PE”, quando as do “Educa PE” são poucas, busco em outros canais do *YouTube* alguns vídeos mais assim, para a linguagem deles. Mando slides, outros exercícios resolvidos, mando [ênfase na voz] mas só que, quando chega na sala que você pergunta: olharam o material que foi enviado, ou no grupo do *WhatsApp* ou no *Google Sala de Aula*? A resposta sempre é: não! Está bastante difícil!

Pesquisador: Nesse caso, a proposta de ensino híbrido não tem funcionado bem?

Rita: Não! Porque não há retorno do aluno.

Pesquisador: Por enquanto é isso! Deixo o espaço para que você possa fazer as suas considerações finais sobre as questões que discutimos aqui, principalmente sobre os processos de ensino e de aprendizagem da função afim. Se outras questões surgirem no decorrer da pesquisa, voltamos a conversar novamente! Tudo bem?

Rita: Na minha cabeça, função afim não era um assunto para os alunos terem tanta dificuldade. Eu acho que é uma função simples, de fácil resolução, de fácil entendimento, eu não compreendo o porquê de tanta dificuldade dos alunos. Eu acredito que seja problema lá da base mesmo.

Pesquisador: Obrigado por Colaborar!

APÊNDICE F – TRANSCRIÇÕES DAS OBSERVAÇÕES DAS AULAS DA PROFESSORA “RITA” (GRAVADAS EM ÁUDIO/VÍDEO)

Primeiro dia (30/07/2021): três aulas⁷⁴

A professora inicia a aula cumprimentando a turma e entregando uma “apostila” impressa aos alunos.

Professora: Dando continuidade ao assunto que a gente começou naquele dia, funções... A gente já viu essas noções de funções, então a gente vai começar, função afim. O que é uma função afim? Alguém já ouviu falar em função afim? [Ninguém responde]. Função afim é uma função polinomial do primeiro grau (anota no quadro). Vocês lembram de quando estudaram equação do primeiro grau? Lembram?

Alunos: Não!

Professora: Lembram qual a forma algébrica de uma equação do primeiro grau? [Ninguém responde] Bom, a função afim ela é definida como $f(x) = ax + b$ [anota no quadro]. A equação do primeiro grau a gente tinha: “ $ax + b = 0$ ”. Na função a gente tem “ $f(x) = ax + b$ ” ou o $f(x)$ a gente chama ele de y ; “ $y = ax + b$ ” [anota no quadro]. A gente sabe que o y e o x eles são par ordenado no plano cartesiano. Mas, o que é o “ a ” e o “ b ” na função afim? Alguém sabe? [Ninguém responde] O “ a ” e o “ b ” são coeficientes. O “ a ” é o coeficiente angular... E o “ b ”? O que seria o “ b ”? [Ninguém responde] O “ b ” é o coeficiente linear. Mais à frente a gente vai ver o que se trata cada um. Primeiro a gente vai começar na folha que entreguei a vocês. A gente tem um probleminha pra gente começar. Lembra quando a gente viu no assunto de funções, que eu trazia tabela e algumas funções e vocês montavam a lei de formação? A partir desse problema [ao apontar para o problema descrito na folha], que eu vou ler para vocês, a gente vai fazer a mesma coisa. “Em certa cidade, o valor pago por uma corrida de táxi é igual a um valor fixo, chamado de bandeirada, de quinze reais, acrescido de dois reais, a cada quilômetro percorrido. Denominando y como o valor total da corrida e x a distância percorrida em quilômetros, escreva uma expressão algébrica que representa essa situação”. Então, a partir desse

⁷⁴ Em alguns trechos da transcrição parecerá que não houve sequencialidade da aula anterior, isso ocorreu porque as aulas estavam acontecendo no formato híbrido: presencial e remoto. Acompanhamos apenas as aulas presenciais.

probleminha, a gente vai determinar qual a lei de formação. A gente tem um valor fixo, qual o valor fixo?

Aluna: Quinze

Professora: O valor fixo é quinze [anotando no quadro]. E a cada quilômetro rodado, quanto que ele cobra?

Aluna: Dois reais

Professora [anotando no quadro a resposta da aluna]: a partir daqui, vocês são capazes de montar a lei de formação? [Os alunos ficam calados, então, a professora se dirige ao quadro]: presta atenção aqui! O valor de $f(x)$ é igual a $ax + b$. Tem um valor que é fixo e um valor que depende de x . Quem é o fixo, o “ a ” ou “ b ”?

Aluna [a mesma que respondeu aos questionamentos anteriores]: “ a ”

Professora: O “ a ” tá junto de quem?

Aluno: “ x ”!

Professora: Então ele vai depender de...?

Aluno [mesmo anterior]: “ x ”!

Professora: Ele vai ser o fixo? Não [ela mesma responde]. E o “ b ”? O “ b ” depende de alguém?

Aluno [mesmo anterior]: Não!

Professora: Então ele vai ser o nosso valor fixo. Então eu já sei que “ $f(x) = ax + 15$ ”. A gente tem outro valorzinho no problema, não tem? Quem é o valor?

Aluna: Dois!

Professora: O dois... vocês acham que é o “ a ” ou o “ x ”?

Alunos: O “ a ”

Professora [indo até o quadro e completando a fórmula]: Então a gente já formou a nossa lei de formação do nosso probleminha. “ $2x + 15$ ”... Se eu rodar um quilômetro de táxi, quanto é que vou gastar?

Maria: Um real?

Professora: Um real?

Maria: Né dois por quilômetro?

Professora: Sim! Se eu rodar um quilômetro vai ser quanto?

Aluna (outra): Dois mais quinze!

Professora: Que dá quanto?

Aluna: Dezessete!

Professora: Se eu rodar dois quilômetros?

Aluna: Dezenove!

Professora: Dezenove, né? Ó! [aponta para a fórmula escrita no quadro] Eu rodei dois quilômetros: dois vezes dois, quatro; mais quinze, dezenove. Se eu rodar dez quilômetros?

Aluna: Tinta e cinco!

Professora: Trinta e cinco, né? Porque dez vezes dois é vinte; mais quinze, trinta e cinco. Todo mundo entendeu?

Pedro: Não!

Professora: Qual a parte, Pedro, que você não entendeu?

Pedro: Tudo! [A turma inteira rir]

Professora [explica novamente]: Ó, vamos para o problema! “Em certa cidade, o valor pago por uma corrida de táxi é igual a um valor fixo, que a gente chama de bandeirada. Esse valor corresponde a quinze reais...”. Você entrou no táxi já paga quinze reais [anotando o número quinze no quadro], “...acrescido de dois reais para cada quilômetro percorrido. Denominando de “ y ” o valor total da corrida, e de “ x ” a distância percorrida em quilômetros, escreva uma expressão algébrica que represente essa situação”. A gente já sabe que vai ter um valor fixo, que ele vai ser o quê? Quinze! E vai ter outro valor para cada quilômetro rodado. A gente não sabe quantos quilômetros vai rodar, sabe? Você tá em Recife, por exemplo, e vai do Shopping até certo bairro. Você não sabe quantos quilômetros vai rodar, sabe?

Alunos (inclusive Pedro): Não!

Professora: Eu não sei quantos quilômetros irei percorrer, então (escrevendo no quadro) vou adicionar aqui. “ x ” é a quantidade de quilômetros, que eu não sei. Mas assim, cada quilômetro percorrido equivale a dois reais. Então, eu tenho que multiplicar o meu “ x ” por quanto?

Alunos: Dois!

Professora: Então eu tenho que multiplicar meu “ x ” por dois. Se eu ando um quilômetro, vou ter: “ $f(1)$ ”. Lembra do valor numérico da função, que a gente estudou na outra aula? E aí a gente substituíamos os valores. Eu vou substituir no “ x ”. Suponha que eu rodei um quilômetro, eu vou ter o meu “ $f(1)$ ”. Então, onde tem “ x ” eu coloco?

Pedro: Um!

Professora: Dois vezes um, mais quinze!

Alunos: Dezesete!

Professora: Se eu rodar três quilômetros, eu vou ter " $f(3)$ ". O que eu faço?

Aluna: Dois vezes três, mais quinze!

Professora: Dois vezes três?

Alunos: Seis!

Professora: Seis, mais quinze?

Pedro: Vinte e um!

Professora: Se eu rodar quinze quilômetros? " $f(15)$ "...

Aluna: Dois vezes quinze...

Professora: Onde tem " x " eu coloco o quinze. Dois vezes quinze, mais quinze. Dois vezes quinze?

Alunos: Trinta!

Professora: Quinze mais trinta?

Pedro: Quarenta e cinco!

Professora: Conseguiu entender mais ou menos [direcionando-se ao aluno Pedro]? Posso adiantar?

Pedro: Pode!

Professora: Então, qual foi a expressão algébrica que a gente encontrou? [Silêncio na turma]

Professora: $f(x)$ igual a quem?

Maria: " $2x + 15$ "!

Professora (anota no quadro): Ou " $y = 2x + 15$ ". Tá na página três da apostila. [Continuando a aula, a professora começa a leitura do que está nessa página (a página três)] "Função afim é toda função polinomial do primeiro grau, como a gente viu no começo da aula, e formalmente escrevemos $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ ". Aí agora, a gente vai ver características de uma função afim, dando continuidade a esse assunto... A primeira característica que ele fala [referindo-se ao texto da apostila] é: "a representação gráfica de uma função do primeiro grau é sempre uma reta decrescente quando " a " menor que zero". Alguém sabe o que isso quer dizer? Sim ou não?

Alunos: Não!

Professora: [desenha um plano cartesiano no quadro]: A gente tem um plano cartesiano... quais são os eixos? " x " e?

Aluna: " y "!

Professora: O “ x ” é o eixo de que, que a gente viu? Quem lembra? Abscissas ou ordenadas?

Aluna (timidamente): Abscissas!

Professora: Pode falar alto! E o “ y ”?

Aluna: Ordenada! [A professora anota as respostas no quadro]

Professora: Então, o gráfico de uma função afim, ele é uma reta! [desenha no quadro duas retas, uma crescente e outra decrescente] O gráfico pode ser nesse sentido [apontando para a representação da reta crescente desenhada no quadro] ou nesse sentido [apontando para a representação da reta decrescente desenhada no quadro]. Essa aqui [apontando para o desenho no quadro], que está em roxo [referindo-se à cor do lápis de quadro utilizada], vocês acham que ela é crescente ou decrescente?

Aluna: Crescente!

Professora: E a verde [referindo-se à cor do lápis de quadro utilizada].

Aluna: Decrescente!

Professora: Muito bem! A roxa [referindo-se à cor do lápis de quadro utilizada] é crescente...

Aluno (complementa): e a verde [referindo-se à cor do lápis de quadro utilizada], decrescente.

Professora: E a primeira característica, diz o que aí, para você? [referindo-se ao texto da apostila entregue] “A representação gráfica de uma função do primeiro grau é sempre uma reta decrescente quando “ a ” menor que zero”. Qual é o “ a ” que ele fala? É esse aqui ó [apontando para a expressão algébrica da função afim ($y = ax + b$), escrita no quadro]... o coeficiente angular. O que é o coeficiente angular de uma função afim? [Ninguém responde...] O que é o coeficiente angular de uma função afim? [a professora insiste mas, ela própria responde] O coeficiente angular de uma função afim, ele determina a declividade da reta, ou seja, ele determina se ela vai ser crescente ou decrescente. Quando é que ela vai ser crescente? Quando o ângulo aqui ó, da minha reta [mostrando no quadro o ângulo formado pelo eixo “ x ” do plano cartesiano e a reta desenhada]... nós temos aqui essa reta roxa [referindo-se à cor do lápis de quadro utilizada], esse ângulo formado aqui ó [mostrando no quadro o ângulo formado pelo eixo “ x ” do plano cartesiano e a reta desenhada] é... maior ou menor que noventa graus?

Alunos: Menor!

Professora: Menor! Então, quando meu ângulo aqui é menor que noventa graus, a minha função é?

Ricardo: Crescente

Professora: Crescente! E aqui, na minha reta verde? [referindo-se à cor do lápis de quadro utilizada], meu ângulo é maior ou menor que noventa graus?

Ricardo: Maior!

Professora: Maior! Se ele é maior, a minha reta é? Decrescente! Se for menor, vai o quê?

Alunos: Crescente!

Professora: Se for menor?

Alunos: Decrescente!

Professora: Isso! Aí, a gente tem outro detalhe... [anotando no quadro] quando o meu “ a ” é menor do que zero, quando ele é um valor negativo, a minha reta é... decrescente. E quando o meu “ a ” é maior do que zero, quando ele é um valor positivo, a minha reta é... crescente. Quando o meu “ a ” for menos dois, ela vai ser crescente ou decrescente?

Aluna: Decrescente

Professora: Quando for dez?

Aluno: Crescente

Professora: Quando for menos um?

Aluna: Decrescente

Professora: Quando for menos um meio?

Aluna: Decrescente

Professora: Quando for dois terços?

Aluna: Crescente

Professora: Vou colocar em forma de números e vocês vão me dizendo se é crescente ou decrescente, certo?

Professora: primeiro exemplo [anotando no quadro]: “ $y = -2x - 3$ ”. Qual o valor de “ a ”?

Alunos: Dois!

Professora: Dois? [apontando para o valor de “ a ” escrito na função representada no quadro, que correspondia ao valor menos dois].

Alunos: Menos dois!

Professora: Vai ser maior ou menor que zero?

Aluna: Menor!

Professora: Antônio! [dirigindo-se ao aluno] Se o meu “ a ” é menor que zero, a minha função vai ser crescente ou decrescente? [o aluno não responde]

Aluna: Decrescente!

Professora: Qual o valor de “ a ”? [partindo para o segundo exemplo]

Aluna: Cinco!

Professora: Cinco é maior ou menor que zero?

Alunos: Maior!

Professora: Crescente ou decrescente?

Alunos: Crescente!

Professora: Qual o valor de “ a ”? [referindo-se ao terceiro exemplo]

Aluna: Menos zero vírgula dois?

Professora: É maior ou menor que zero?

Alunos: Menor!

Professora: Todo valor negativo é sempre menor que zero! Crescente ou decrescente?

Alunos: Decrescente!

Professora: Andresa, qual o valor de “ a ” [já apontando para o quarto exemplo]?

Andresa: Dois!

Professora: Dois é maior ou menor que zero?

Andresa: Maior!

Professora: Se é maior, vai ser crescente ou decrescente? [a aluna não responde]
Se é maior, então vai ser crescente. A gente viu aí a primeira e a segunda característica. A primeira dizia o quê? “Quando “ a ” é menor que zero, a função é decrescente. A segunda, quando “ a ” é maior que zero a função é crescente”. Agora, vamos para a terceira característica... página três [referindo-se ao texto da apostila entregue aos alunos]. Na função afim, “ $f(x) = ax + b$ ”,... ele diz o seguinte: se “ b ” for igual a zero, a função é dita, o quê?

Aluna: Linear! [a aluna está acompanhando a leitura do texto da apostila]

Professora: O que é uma função linear? [Ninguém responde...] Vamos lá! [escrevendo no quadro] Se eu tenho “ $f(x) = 5x + 0$ ”... isso quer dizer que meu “ b ” é igual a quanto?

Aluna: Zero!

Professora: Meu “ b ” vai ser igual a zero. Se é igual a zero, a função é linear, não é? Sim? Vamos lá! Vamos colocar no plano cartesiano! [A professora desenha o plano cartesiano no quadro] Se o valor do meu “ x ” for dois, qual vai ser o valor do meu “ y ”?

Aluno: Como?

Professora [apontando para a fórmula no quadro]: se o valor do meu “ x ” for dois, quanto é cinco vezes dois?

Aluno: Dez!

Professora: Se o meu “ x ” for dois, o meu “ y ” vai ser? Dez! Se o meu “ x ” for um, o meu “ y ” vai ser?

Aluno: Cinco!

Professora: Agora, se o meu “ x ” for zero.

Aluno: Zero!

Professora: Cinco vezes zero... O meu “ y ” vai ser zero! Então, a minha função linear vai ser a que passa na origem. O que é a origem do gráfico?

Aluna: O meio?

Professora: É! Percebam que se eu colocar o meu “ x ” igual a menos um... Quanto é que vai ser o meu “ y ”? [Ninguém responde] Cinco vezes menos um?

Aluna: Menos cinco!

Aluna [outra]: Eu tinha falado que era menos cinco!

Professora: Se for menos dois?

Alunos: Menos dez! [Cada ponto que a professora vai calculando, ela vai colocando no gráfico]

Professora: Traçando meu gráfico, veja que ele vai passar na origem. Para o valor positivo de “ x ”, ele vai ser valor positivo em? [ninguém responde] Se o meu valor for positivo de “ x ”, então ele vai ser positivo em “ y ”. Se o meu valor for negativo em “ x ”, então ele vai ser também negativo em “ y ”. O meu gráfico sempre vai passar na origem... para todo valor positivo de “ x ”, ele vai ter valor positivo de “ y ”, e para todo valor negativo de “ x ”, ele vai ter valor negativo em “ y ”. A próxima característica ele diz o quê [referindo-se ao texto escrito, apostila]? Se “ b ” é diferente de zero, a função é dita o quê?

Alunos [que acompanham a leitura do material impresso]: Função afim!

Professora: E a próxima, diz o quê?

Maria: O gráfico intercepta o eixo de “ x ” na raiz da equação $f(x)$ igual a zero e, portanto, no ponto de abscissa “ x ” igual a menos “ b ” sobre “ a ”.

Professora: Isso! [e repete a leitura: “O gráfico intercepta o eixo de “ x ” na raiz da equação $f(x)$ igual a zero e, portanto, no ponto de abscissa “ x ” igual a menos “ b ” sobre “ a ”]. O que é que isso quer dizer? Alguém sabe? [Ninguém responde] Uma coisa bem abstrata, não é? [se dirige ao quadro e desenha um plano cartesiano] Vou colocar aqui uma reta aleatória. Vocês querem crescente ou decrescente?

Alunos: Crescente!

Professora: Vou colocar aqui uma reta crescente... ele diz o quê? “O gráfico intercepta o eixo “ x ” na raiz da equação”. O eixo “ x ” é o horizontal ou o vertical?

Aluno: Horizontal!

[A professora aponta para o gráfico desenhado no quadro, no ponto em que a reta que representa esse gráfico intercepta o eixo “ x ”]

Professora: Onde o meu “ y ” é igual a quem? Quando a gente estudou plano cartesiano, lembra? Quando o ponto tava sobre a reta “ x ”, o “ y ” valia quanto?

Aluna: Era negativo?

Professora: Não!

Aluna: Zero!

Professora: Esse pontinho sobre o eixo “ x ” é chamado de raiz da função. O que quer dizer ser raiz da função? A raiz da minha função é quando meu “ y ” é igual a zero. A raiz, também chamada de zero da função. O que vocês acham que acontece quando eu colocar um zero aqui [apontando para o “ y ” da expressão da função] e substituir o valor na minha equação? Eu tenho “ $y = ax + b$ ”. Eu sei que no pontinho marcado no gráfico, eu tenho um valor desconhecido para “ x ”, mas eu conheço o meu valor “ y ”, que é quem?

Aluna: Zero!

Professora: Eu tenho o valor de “ y ”?

Alunos: Tem!

Professora: Qual é?

Alunos: Zero!

Professora: Então, “ $0 = ax + b$ ”! Vou trocar quem de lugar? Vou trazer o meu “ ax ” para o primeiro membro da equação. Ele tá positivo ou negativo?

Alunos: Positivo!

Professora: Quando eu trocar de membro, ele passa?

Alunos: Negativo!

Professora: Então, “ $-ax = b$ ”. E agora, o que eu faço, se eu quero encontrar o valor de “ x ” aqui? Somente o “ x ”! Eu tenho aqui “ $-ax = b$ ”, e eu quero encontrar somente o valor de “ x ”... [Ninguém responde] Quando eu tenho aqui, uma equaçãozinha “ $2x = 10$ ”, o que é que eu faço para encontrar o valor de “ x ”? [Ninguém responde... a professora insiste!] O que é que eu faço para encontrar o valor de “ x ” aqui [referindo-se à equação escrita no quadro: “ $2x = 10$ ”]?

Aluna: Multiplica?

Professora: Multiplica? Vejam, se meu dois está multiplicando ele passa...

Alunos: Dividindo!

Professora: então meu “ x ”...

Alunos: Cinco

Professora: Antes disso!

Alunos: Dez sobre dois.

Professora [escrevendo no quadro]: “ x ” é igual a dez sobre dois... que eu vou encontrar? Cinco, não é? O meu dois que está multiplicando o “ x ” ele passou?

Alunos: Dividindo!

Professora: Então quem é que está multiplicando o meu “ x ” aqui, nesse caso? [referindo-se à expressão “ $-ax = b$ ”, anteriormente discutida].

Alunos: “ a ”

Professora: Então, se o “ a ” está multiplicando, ele vai passar... dividindo. “ x ” é igual a “ b ” sobre menos “ a ”. Mais com menos? [fazendo jogo de sinal]

Aluno: Menos!

Professora: Menos “ b ” sobre “ a ”. Olha, encontrei a equação que determina a raiz da minha função. O “ x ” aqui da minha raiz, é igual a menos “ b ” sobre “ a ”. E o que é que isso quer dizer? [Ninguém responde] Vou pegar alguns exemplos, que a gente vai ver! Sílvia, me dê um exemplo de uma função afim! [Sílvia fica em silêncio] Ó! Eu sei que a minha função afim é da forma “ $y = ax + b$ ”! Você só tem que criar um valor para “ a ” e um valor para “ b ”! Diga aí! Diga um valor para “ a ”!

Alunos: um número, Sílvia!

Sílvia: Cinco!

Professora: “ $f(x) = 5x + \dots$ ” e um valor para “ b ”!

Sílvia: Dois!

Professora: Você quer positivo ou negativo?

Alunos: Positivo é mais fácil!

Sílvia: Positivo!

Professora: " $f(x) = 5x + 2$ "! Sei que o meu " a " é cinco e o meu " b " é quem? Dois! Aí, lá na formulazinha que a gente encontrou na expressãozinha, para determinar a raiz da função, ele diz que " x " é igual a menos, por determinação, " b " sobre " a ". Então, isso implica que o meu " x ", a raiz da minha função, vai ser quem? [escrevendo no quadro] Vou repetir o menos... Qual o valor de " b "?

Ricardo: Dois!

Professora: Dois! Quem é o valor de " a "?

Ricardo: Cinco!

Professora: Quem é a raiz da minha função? Menos dois sobre cinco ou menos dois quintos. Vamos para outro exemplo! Carol, me dê um exemplo de uma função afim!

Carol: " $f(x) = 7x + 4$ "! [a professora anota no quadro]

Professora: Qual é a formulazinha que a gente encontra a raiz da função? [Ninguém responde] A gente determinou aqui ó [apontando para a fórmula no quadro], anteriormente, qual foi?

Aluna: " x " igual a menos " b " sobre " a ".

Professora: [escrevendo no quadro] " x ", que é a raiz da minha função, é igual a menos... aí, qual é o valor de " b "?

Alunos: Quatro!

Professora: Quatro! E qual o valor de " x "?

Alunos: Sete!

Professora: Então vamos ter aqui...

Alunos: Quatro sobre sete.

Professora: Quem é a raiz da minha função?

Alunos: " x " é igual a menos quatro sobre sete.

Professora: A raiz da minha função, é igual a menos quatro sobre sete. Todo mundo sabe encontrar a raiz da função, se eu pedir? [Silêncio...] Quem sabe? Levante a mão, por favor! [Quatro ou cinco alunos levantam a mão!] Eu vou pedir a Ruth para me dá uma função e, Ruth vai escolher uma pessoa para encontrar a raiz dessa função!

Ruth: $f(x)$ igual...

Professora: pode usar números negativos também viu! Vocês só querem usar números positivos!

Ruth: [continua] dez “ x ” menos três! Agora, vai Ricardo! [indicando-o para encontrar o valor da raiz]

Professora: Ricardo, qual é o valor de “ a ”? E, qual o valor de “ b ”? [anotando no quadro os valores]

Ricardo: O valor de “ a ” é dez e o valor de “ b ” é três.

Professora: O valor de “ a ” é dez e o valor de “ b ” é?

Ricardo: Três!

Professora: Não!

Ricardo: Não?

Professora: Não!

Aluna: Menos três.

Ricardo: Menos três!

Professora: Ricardo, como é que a gente encontra a raiz da função ou o zero da função?

Ricardo [timidamente, bem baixinho]: “ x ” é igual a dez sobre três... não, menos três!

Professora: Ó, “ x ” é igual a menos “ b ” sobre “ a ” [anota a expressão no quadro]. Então, menos... quem é o valor de “ b ”?

Ricardo: Três!

Professora: Menos três, ó! Aí a gente tem que abrir um parêntese e colocar o menos três...

Ruth: Ixe! E vai ter essa frescura é?

Professora [continua]: Sobre dez! [e Ruth continua a retrucar... “pelo amor de Deus!”]

Professora [continua]: “ x ” é igual a menos dez, menos por menos? [jogo de sinal indicado na expressão anterior]

Alunos: Mais...

Professora: Quem é a raiz da minha função?

Aluna: “ x ” é igual a três décimos!

Professora: Vocês acham que tem outra forma para a gente encontrar a raiz da função?

Ricardo: Tem!

Professora: Como é que você imagina que tem? [Ricardo não responde] Alguém?
[os alunos ficam citando os nomes dos colegas, no entanto, ninguém responde]

Professora: Como é a forma geral da função afim? A expressão algébrica...

Aluna: " $f(x) = ax + b$ " [a professora anota no quadro]

Professora: Ou... $f(x)$ também pode ser quem?

Aluna: "y"

Professora: Então, " $y = ax + b$ ". Eu já sei que a raiz da minha função é o "x" quando o "y" for?

Aluna: Zero!

Professora: A raiz da minha função é o valor de "x" quando o meu "y" for...

Alunos: Zero!

Professora: Vou colocar aqui [escrevendo no quadro], " $f(x) = -2x + 4$ " [escrevendo um novo exemplo no quadro]. Para eu encontrar a raiz da minha função, eu sei que o meu "x" vai ser a raiz da minha função quando o meu "y" for...

Ricardo: Zero!

Professora: Então aqui [referindo-se à expressão $y = ax + b$], onde tem "y" eu posso colocar zero, não posso? Quem foi a minha função ali? [referindo-se ao exemplo anotado no quadro]

Alunos: Menos dois "x" mais quatro.

Professora: Então, zero é igual a menos dois "x" mais quatro ($0 = -2x + 4$)! Ó! O menos dois "x" tá negativo passa...

Alunos: Positivo!

Professora: Positivo. Ele tá no segundo membro da equação negativo, ele passa positivo. Então, dois "x" é igual a quatro ($2x = 4$). E agora?

Daniela: "x" é igual a quatro sobre dois!

Professora: "x" é igual a quatro sobre... o meu dois está multiplicando, ele vai passar?

Alunos: Dividindo.

Professora: Quanto é quatro dividido por dois?

Alunos: Dois!

Professora: Quem é a raiz da minha função?

Alunos: "x" igual a dois!

Professora: Então, quando o meu "y" aqui nessa função " $f(x) = -2x + 4$ " for zero, a raiz da minha função vai ser?

Alunos: Dois!

Professora: Vou dar outro exemplo: " $f(x) = 5x + 15$ "! [anotando no quadro] O que é que eu faço, inicialmente?

Alunos: Zero!

Professora: Zero? Pode dizer, Maria!

Maria: Zero igual a cinco " x " mais quinze ($0 = 5x + 15$)! [a professora anota no quadro]

Professora: E agora, Maria?

Maria: Cinco " x " igual...

Professora: Se ele está no segundo membro...

Maria: Vai passar para o primeiro... agora eu não sei se vai ficar negativo ou positivo!

Professora: Ele tá positivo ou negativo?

Maria: Positivo!

Professora: Então ele deve vir?

Maria: Negativo!

Professora: O meu menos cinco está multiplicando, vai passar o quê?

Maria: Dividindo!

Professora: Então " x " é igual a quinze sobre menos cinco... mais com menos? [jogo de sinais]

Maria: [timidamente, sem muita certeza] menos!?

Professora: Quinze dividido para cinco?

Alunos: Três!

Professora: Quem é a raiz da minha função?

Alunos: Menos três!

Professora: Ó, vocês viram que temos dois modos aqui, de encontrar a raiz da função, né? Qual o mais fácil?

Alunos: O primeiro!

Professora: Quem acha mais fácil o primeiro?

Alunos: Tem três é?

Aluno: Dois!

Professora: A gente tem um que substitui diretamente na fórmula " x " igual a menos " b " sobre " a " e a gente tem o outro que a gente iguala a função a zero, que é substituindo o valor de " y " por zero. Qual o mais fácil? [insiste!]

[alunos discutem...]

Professora: Qualquer um dos dois que vocês usarem, vai servir... certo? Vocês vão usar o que vocês acharem melhor para vocês! Se você tem mais dificuldade nesse aqui [apontando no quadro para o que ela chamou de primeiro modo, substituindo diretamente na fórmula " $x = -\frac{b}{a}$ "] aí você utiliza esse [apontando no quadro para o que ela chamou de segundo modo, resolvendo a equação obtida pela substituição de "y" por zero, na expressão da função] e vice versa. Mas, é importante que vocês saibam usar os dois!

Ricardo: E quando a gente tem dificuldade nos dois professora, aí faz o quê?

Professora: Aí tem que estudar mais, tirar mais dúvidas, não ficar dormindo na hora da aula! Ó, eu encontrei um ponto importante no gráfico não foi? Que foi a raiz da minha função. Aí eu vou ter outro ponto importante no meu gráfico, é o ponto que intercepta o eixo "y". Eu tenho o ponto que intercepta o meu eixo "x", que é quem?

Aluno: Raiz de f .

Professora: A raiz de f . E eu tenho o ponto que intercepta o eixo "y". Alguém sabe qual é? Sim ou não? E aí Érica, sabe qual é? O ponto que intercepta o meu eixo "y"... Ó, a gente aprendeu que quando o ponto tá sobre o eixo "x", o valor de "y" é quanto? Zero! E, quando o ponto tá sobre o eixo "y"? O que vai acontecer? O valor de "y" vai permanecer zero?

Aluna: Não!

Professora: O que acontece agora? Podem errar. Pode dizer sem medo de errar.

Ruth: Um!

Aluna: Dois, três...

Alunos: Cinco.

Professora: Então "y" pode ser qualquer valor... Mas, o "x" pode ser qualquer valor? Não! Quem é que vai ser o "x"?

Alunos: Zero!

Professora: Quando o ponto tá sobre o eixo "x", "y" é?

Alunos: Zero!

Professora: E quando o ponto tá sobre o eixo "y", "x" é?

Alunos: Zero!

Professora [apontando para o gráfico desenhado no quadro]: Esse pontinho sobre o eixo "y", é chamado de termo independente. Na minha função, " $f(x) = ax + b$ ", quem é o termo independente?

Alunos: “ b ”!

Professora: Então, o meu termo independente é: “ b ”! Anteriormente, a gente viu que o “ b ” é também o quê? A gente estudou dois coeficientes... O coeficiente “ a ”, angular e o coeficiente “ b ”?

Aluna: Linear.

Professora: Muito bem! O coeficiente angular a gente chama de quem? Quem é o coeficiente angular, que determina a declividade da reta?

Alunos: “ a ”!

Professora: E o linear?

Alunos: “ b ”!

Professora: Vou dá exemplos de gráficos agora, e a partir desses gráficos, vocês vão me dizer quem é o coeficiente linear, e quem é a raiz da minha função. Certo?

Alunos: Sim!

[A professora começa a desenhar os gráficos no quadro]

Professora: Quem vai ser a primeira pessoa que vai vir responder?

Aluno: Maria!

Professora: Maria, primeiramente, o gráfico 1, ele é crescente ou decrescente?

Maria: Ele é decrescente!

Professora: Ele é decrescente. Se ele é decrescente, meu “ a ” é maior ou menor que zero?

Maria: Maior...

Professora: Meu “ a ” é menor que zero. Agora, quem é a raiz da minha função? É o ponto que fica sobre o eixo “ x ”...

Aluna: Dois!

Professora: Meu “ x ” é dois! Quem é o meu coeficiente linear?

Aluna: É o ponto que tá sobre o “ y ”...

Professora: O meu “ b ” é... três! Estamos vendo no gráfico uma reta decrescente por quê? O “ a ” é maior ou menor que zero?

Aluno: Menor

Professora: Se o meu “ a ” é maior, meu ângulo é menor que noventa graus. Quem é o ponto que tá sobre o eixo “ x ”?

Aluna: Dois!

Professora: Então, ele é quem? A raiz da minha função! E quem é o ponto que está sobre o eixo “ y ”?

Maria: Três!

Professora: Então, ele vai ser o meu coeficiente linear, que é o “ b ”, certo? A partir dessas informações que temos, vocês acham que seria possível encontrar o coeficiente angular? Sim ou não?

Aluna: É!

Professora: A gente vai tirar as informações que temos nos gráficos e vamos encontrar o coeficiente angular dele. Certo? Andresa, o meu segundo gráfico é crescente ou decrescente?

Andresa: Crescente!

Professora: Então o meu “ a ” é maior ou menor que zero?

Andresa: Maior!

Professora: Quem vai ser a raiz da minha função?

Andresa: Menos quatro!

Professora: Andresa, quem vai ser meu coeficiente linear?

Andresa: Quatro

Professora: “ $b = 4$ ”! Antônio, e o meu gráfico 3, é crescente ou decrescente?

Antônio: Crescente!

Professora: O “ a ” é maior ou menor que zero? Que é o coeficiente angular...

Antônio: Maior!

Professora: “ a ” maior que zero. Antônio, quem vai ser a raiz da minha função?

Antônio: Cinco!

Professora: Quem vai ser o meu coeficiente linear?

Antônio: Menos cinco!

Professora: “ $b = -5$ ”! Valéria, e o meu gráfico 4, é crescente ou decrescente?

Valéria: Decrescente!

Professora: Então, o “ a ” é maior ou menor que zero?

Valéria: Menor!

Professora: Quem é a raiz da minha função?

Valéria: Três!

Professora: Não! Raiz da função é o ponto que está sobre o meu eixo “ x ”.

Valéria: Então é o menos um.

Professora: Quem é o meu coeficiente linear, Valéria? O ponto sobre o eixo “y”... quem é?

Valéria: Menos três!

Professora: vocês me disseram que tem como a gente encontrar o coeficiente angular, não foi?

Alunos: Foi!

Professora: Sílvia, a expressão algébrica da função afim, é como? A forma geral da função afim...

Sílvia: Sei não!

Professora: Não é possível! É “ $f(x) = \dots$ ” [os alunos ajudam a complementar] “ $ax + b$ ”!. A gente encontrou uma formulazinha, mais atrás, para encontrar a raiz da função, qual foi ela?

Aluna: “x” igual a menos “b” sobre “a” ($x = -\frac{b}{a}$)!

Professora: Nos gráficos, a gente tem o valor da raiz... o valor de “b”. Pra gente encontrar o coeficiente angular, como que a gente faria? Posso usar as duas fórmulas: a fórmula geral e a da raiz?

Aluna: Pode!

Professora [utilizando a expressão “ $x = -\frac{b}{a}$ ”]: O “x” é o valor de quem? Raiz! “b” é quem? Coeficiente linear! O “a” é quem?

Alunos: coeficiente angular.

Professora: O “x” é a raiz da minha função; o “b”, o coeficiente linear; e o “a”, o coeficiente angular. Então, para o nosso primeiro gráfico, quem seria nosso coeficiente angular? O nosso “x” é igual a quem?

Alunos: Dois!

Professora: E o valor de “b”?

Alunos: Três!

Professora: A gente tem o valor de “a”?

Alunos: Não!

Professora [fazendo as substituições na fórmula]: O coeficiente angular é $-\frac{3}{2}$. Positivo ou negativo?

Alunos: Negativo!

Professora: Menor que zero! Vamos fazer o gráfico 2 agora! Qual o valor de “ x ” no gráfico 2?

Alunos: Menos quatro!

Professora: Quem é o coeficiente linear?

Maria: Quatro!

Professora [escreve no quadro a expressão]: “ $-4 = -\frac{4}{a}$ ”.

Aluna: Multiplica o menos quatro vezes o “ a ”. Menos, dividido por menos, dá mais.

Professora: Isso! Então dá: um. O coeficiente é maior ou menor que zero?

Alunos: Maior!

Professora: Gráfico 3 agora! Yasmin, quem é o valor de “ x ”, a raiz?

Yasmin: Cinco! Aí, fica: “ $5 = -\frac{(-5)}{a}$ ”.

Professora: E agora, Yasmin? Meios pelos extremos: cinco vezes “ a ”, e cinco vezes um.

Yasmin: Cinco “ a ” igual a cinco. “ a ” igual a um (“ $5a = 5 \Rightarrow a = 1$ ”).

Professora: O gráfico 4 agora, quem se candidata? Ninguém? Carol! Quem é a raiz, Carol?

Carol: Menos um. E o resto [referindo-se ao procedimento de resolução]: menos um, igual menos três sobre “ a ” (“ $-1 = \frac{-3}{a}$ ”).

Professora: Menos três?

Alunos: Não, tem o parêntese?

Professora: E agora Carol?

Carol: “ a ” vezes menos um, é igual a “ $-a$ ”.

Professora: e agora?

Carol: “ a ” igual três sobre menos um (“ $a = 3/-1$ ”).

Professora: E agora?

Carol: Acabou!

Professora: Acabou? Três dividido por menos um? Mais por menos [jogo de sinais]?

Alunos: Menos!

Professora: Então, menos três! Quem tá com muita dúvida? [levantam a mão os alunos: Kátia, Sílvia e Yasmin]. Quem tá com mais ou menos? [Carol levanta a mão].

Carol: Eu não entendi! [referindo-se ao cálculo anterior].

Professora: Vamos lá! O três vezes “ a ” e o “ a ” vezes o menos um, que é o “ $-a$ ” [apontando para a solução escrita no quadro]. João! Quanto é menos um vezes “ a ”?

[João não responde]. Todo número multiplicado por um, é igual a ele mesmo. Então, “ a ” vezes um, é? “ a ”, né? E menos um vezes “ a ” é... “ $-a$ ”.

Aluna: Né menos um, não?

Professora: Temos uma letra, não podemos excluir ela. Se eu pergunto quanto é menos dois vezes “ x ”, você me diz que é menos dois, tá certo?

Aluna: Tá errado!

Professora: Quem aprendeu a 4? [os alunos Ruth, Maria, Ricardo, Andresa, sinalizam positivamente]. Quem mais? Os demais, mais ou menos. O “ a ”, é o coeficiente angular ou linear?

Alunos: Angular

Professora: E o “ b ”?

Alunos: Linear

Professora: O ponto que fica sobre o eixo “ y ” é quem?

Alunos: Raiz da função!

Professora: **Sílvia!** O ponto que fica sobre o “ y ”, é quem? [Sílvia não responde]. Vamos lá! O ponto que fica sobre o “ y ”? Quem é?

Aluna: Coeficiente linear.

Professora [desenhando novamente no quadro um gráfico e apontando para ele (mais especificamente para o ponto de intersecção da representação da reta, com o eixo “ y ”): O pontinho que intercepta o eixo “ y ” é?

Alunos: coeficiente linear.

Professora: O ponto que intercepta o eixo “ x ”, é?

Alunos: Raiz da função

Professora: Minha reta é crescente ou decrescente?

Alunos: Decrescente!

Professora: O meu ângulo é maior ou menor que noventa graus?

Alunos: Maior!

Professora: Se é maior, o meu “ a ” é menor que... zero. [A professora desenha outro gráfico no quadro. Ao apontar para o ponto localizado no eixo “ y ”, pergunta aos alunos...]: Que ponto é esse?

Alunos: “ b ”!

Professora: Que ponto é esse? [apontando para o ponto localizado sobre o eixo “ x ”].

Alunos: Raiz!

Professora: O ângulo aqui [mostrando no gráfico o ângulo formado entre o eixo “ x ” e a representação da reta], é maior ou menor que noventa graus?

Alunos: Menor!

Professora: Se é menor, o meu “ a ” é sempre maior que... zero. Crescente! Toda essa parte aqui do gráfico tá ok? Sim ou não?

Alunos: sim!

Professora: Eu vou dá alguns probleminhas e a gente vai encontrar a lei de formação desses probleminhas. Vamos lá! [A professora inicia a leitura dos problemas para os alunos]

“Numa fábrica de bichos de pelúcia, o custo para produção de determinado modelo é de doze reais e cinquenta centavos por unidade, mais um custo inicial de duzentos e cinquenta reais”. O custo inicial é de duzentos e cinquenta reais, e para cada unidade de bichinho é doze reais e cinquenta centavos [frisa!]. [continua a leitura] Letra “ a ”: escreva a fórmula da função que representa o custo total da produção. [Se dirige ao quadro e pergunta aos alunos]: quem seria o valor fixo? O doze e cinquenta ou o duzentos e cinquenta?

Alunos: Duzentos e cinquenta” [a professora anota no quadro: “250”].

Professora: Seria o “ a ” ou “ b ”? [Os alunos ficam confusos, uns respondem “ a ”; outros, “ b ”. A professora considera a resposta dos alunos que respondem “ b ”]. E, qual o valor que está em função de “ x ”?

Alunos: O doze e cinquenta!

Professora: Então, o meu doze e cinquenta vai ser o valor do meu?

Alunos: “ a ”!

Professora: O meu doze e cinquenta tem que multiplicar quem?

Alunos: “ x ”!

Professora: O doze e cinquenta é o meu “ a ”. Quem seria o meu “ x ”? [Os alunos não souberam responder. Então a professora realizou a leitura do enunciado novamente]. [E, continua...] Se eu produzo só um tipo de pelúcia, quanto irei gastar para produzi-lo?

Aluna: Duzentos?

Aluna (outra): Além do custo inicial de duzentos e cinquenta, irá gastar mais doze e cinquenta.

Professora: Que dá quanto?

Aluna: Duzentos e sessenta e dois e cinquenta.

Professora: Para cada bichinho de pelúcia que produzo, eu gasto?

Alunos: Doze e cinquenta!

Professora: Se eu produzisse cinco?

Aluna: Doze e cinquenta vezes cinco!

Professora: Então, quem seria o meu “ x ”? Sem ser valor... [Os alunos “chutam” as respostas]

Aluna: A unidade produzida?

Aluna (outra): Ô professora, essa daí é para colocar na fórmula?

Professora: Quem seria a nossa lei de formação? “ $f(x)$ ” igual a quem?

Alunos: Doze e cinquenta “ x ” mais duzentos e cinquenta (“ $12,50x + 250$ ”)!

Professora: Quem seria o meu “ $f(x)$ ”?

Aluna: “ y ”?

Professora: Mas, quem seria o meu “ y ”?

Aluna: Peraí, mas isso tudo é na letra “ a ”?

Professora: Não, não. Na letra “ a ”, pede-se o quê? Eu tô só explicando para vocês, certo? [apontando para os dados que escreveu no quadro]: Meu “ x ” é quem? Total de pelúcias produzidos [anota no quadro]. Quem seria o meu “ y ”? O que é que pede na letra “ a ”? “Escreva a fórmula da função que representa o custo total da produção”. Então, o meu “ y ” é o custo total da produção [anota no quadro]. O que ele pede na letra b ?

Alunos: “Determine o custo total da produção”!

Professora: Ele quer saber o custo total, quanto ele gastaria para produzir cinquenta unidades, oitenta unidade e cem unidades.

Aluna: Então, seria: doze e cinquenta vezes cinquenta, mais duzentos e cinquenta.

Professora: Vamos lá calcular o valor numérico! “ $f(50)$ =” ficaria como?

Aluna: Doze e cinquenta vezes cinquenta, mais duzentos e cinquenta.

Professora: Qual o outro valor que ele pede?

Aluna: Oitenta!

Professora: “ f ” de?

Aluna: De oitenta!

Aluna: Ficaria doze e cinquenta vezes oitenta, mais duzentos e cinquenta. [Enquanto a aluna fala, a professora anota no quadro]. E o outro?

Aluna: Doze e cinquenta vezes cem, mais duzentos e cinquenta.

Professora: alguém já respondeu quanto é doze e cinquenta vezes cem? Sem celular... [chamando a atenção dos alunos para que eles não utilizassem a calculadora do celular]

Aluna: Sou boa de tabuada não. [A professora se direciona ao quadro e realiza os cálculos da operação de multiplicação, com os alunos].

Professora: E a de oitenta, alguém já calculou?

Aluna: Calma [ênfase]! Eu odeio fazer multiplicação...

Professora: tem que praticar... Alguém já calculou doze e cinquenta vezes oitenta? [A professora fez similar ao caso anterior]

Professora: E essa aqui, preciso pensar [referindo-se ao produto de doze e cinquenta por cem]?

Aluna: Sim. [Demais alunos riem]

Professora: Cem vezes duzentos e cinquenta? Doze e cinquenta, aliás... [a professora chama a atenção e explica o procedimento de “adiantamento” da vírgula, de acordo com a quantidade de casas decimais. Os alunos demonstram não compreender tal procedimento].

Professora: Na próxima aula iremos ver função identidade, função constante e função linear. Todas relacionadas à função afim. Questão dois! “A produção de peças tem um custo fixo de oito reais. Mais o custo variável de cinquenta centavos por unidade produzida”. Quem é o custo fixo, “ a ”?

Alunos: Oito reais!

Professora: Oito vai ser o valor de “ a ” ou o de “ b ”?

Aluna: “ b ”!

Professora: Cinquenta centavos vai ser o valor de quem?

Alunos: “ a ”!

Professora: Então, como ficaria a nossa lei da função total?

Aluna: “ $f(x)$ ” igual a oito vezes “ x ”...

Aluna (outra): Não! Oito é o valor de “ b ”, tá lá!

Aluna (mesma anterior): É mesmo, esqueci!

Professora: “ $f(x)$ ” vai ser igual a quem?

Aluna: Zero vírgula cinquenta vezes “ x ” mais oito!

Professora: Muito bem! Quem seria o meu “ x ” aqui?

Aluno: Unidades produzidas!

Professora: E quem seria o meu " $f(x)$ "?

Aluna: O custo total! [À medida que os alunos vão respondendo, a professora vai anotando no quadro as informações].

Professora: E a letra "b" diz: e o custo total de cem peças?

Alunos: " f " de cem igual a zero vírgula cinquenta vezes cem mais oito!

Professora: Cinquenta centavos vezes cem? [resolve com a turma a operação de multiplicação]. Vocês conseguem terminar essas três [questões restantes] em casa? Ou a gente continua na próxima aula?

Alunos: Vamos fazer tudo errado! [riem!]

Professora: Vocês precisam do assunto pro dia de quê?

Alunos: da prova!

[Alguns alunos conversam entre si e riem, exclamando: nós, não! É que a prova referida anteriormente, referia-se a uma gincana anual de matemática realizada pela escola, da qual esse grupo de alunos ("nós, não!") não iria participar].

Professora: Não vai ter a questão sobre função afim? [A aula termina]

Segundo dia (03/08/2021): duas aulas

[A professora inicia a aula perguntando quem fez as atividades da aula anterior (referindo-se às três questões que ficaram para fazer em casa). Poucos alunos, ou melhor apenas um ou dois, sinaliza positivamente. Nesse momento, a professora distribui a folha com as atividades, para os alunos que faltaram à aula anterior].

Professora: Vamos lá! Questão 3! [anota no quadro os dados referentes à questão: Aluguel de um carro popular: 100 km → a taxa é de 50 reais; 300 km → a taxa é de 63 reais; 500km → a taxa é de 75 reais e; trinta e sete centavos por cada quilômetro excedente]. A gente sabe que se ele rodar cem quilômetros, cobra quanto?

Alunos: Cinquenta!

Professora: Se rodar trezentos? Se rodar quinhentos?

Alunos: Setenta e cinco!

Professora: São três itens, certo? E, trinta e sete centavos por quilômetro excedente, certo? Qual a lei da função de cada de caso, chamando de " x " os quilômetros excedentes? Quem sabe montar essa daí pra mim?

Aluna: O quê?

Professora: Ele pergunta: qual a lei da função de cada caso, chamando de “ x ” os quilômetros excedentes? A gente tem 3 casos: para rodar cem quilômetros, para rodar trezentos quilômetros e para rodar quinhentos quilômetros. Para cem quilômetros [anota no quadro: 100 km], quem responde essa pra mim?

Aluna: f de “ x ” igual a cem “ $f(x) = 100$ ”?

Professora: cem? Não, né!

Aluna: Péra [espera] que tô perdida!

Professora: Vamos lá!

Aluna: Zero vírgula trinta e sete “ x ”...

Professora: O que mais?

Aluna: Cem?

Professora: Veja: aqui, tem que ter uma taxa fixa. Para rodar os cem quilômetros é quanto?

Alunos: Cinquenta!

Aluno: Zero vírgula trinta e sete mais cinquenta.

Professora: Tá certo assim? [pergunta à turma]. Quem acha que tá certo?

Aluna: Eu que não acho!

Professora: Vejam, “ $0,37 + 50$ ” [anota no quadro] seria para rodar um quilômetro excedente. A gente sabe que ele só vai rodar um quilômetro excedente?

Aluna: Não!

Professora: A gente sabe quantos quilômetros serão excedentes?

Alunos: Não!

Professora: Se a gente não sabe, a gente precisa de quem?

Aluna: “ x ”!

Professora: “ $0,37x + 50$ ” [anota no quadro]. Agora, para trezentos quilômetros, qual seria?

Aluna: Aí vou usar a mesma propriedade?

Professora: Sim, senhora!

Aluna: f de “ x ” igual zero vírgula trinta e sete “ x ” mais sessenta e três “ $f(x) = 0,37x + 63$ ”!

Professora: E para quinhentos?

Aluna (outra): Que questão é essa?

Professora: Eu tô na mesma, só que ele pede para cem, para trezentos e para quinhentos.

Alunos: f de “ x ” igual zero vírgula trinta e sete “ x ” mais setenta e cinco “ $0,37x + 75$ ”.

Professora: Posso continuar? Ó, a questão 4, ele dá uma tabela e diz assim: as academias oferecem diferentes planos para o cuidado com a saúde. Aí ele dá duas academias: a academia 1, Corpo em Forma; e academia 2, Chega de Moleza. Na academia “Corpo em Forma”, ele diz que sua matrícula vai ser quanto?

Alunos: Matrícula: noventa e; mensalidade, quarenta e cinco.

Professora: E na academia “Chega de Moleza”, matrícula: setenta; mensalidade: cinquenta. Aí, na letra “a”, ele diz: escreva as expressões algébricas das funções dos custos para frequentar cada academia. Vamos fazer a primeira conta: a gente tem o valor fixo, qual seria aí? A matrícula ou a mensalidade?

Alunos: A matrícula!

Aluna: A mensalidade!

Professora: Qual deles eu vou pagar só uma vez? É a matrícula ou a mensalidade?

Alunos: A matrícula!

Professora: Então, a matrícula vai ser o quê?

Alunos: Valor fixo!

Professora: Quem é o fixo?

Aluna: Noventa!

Professora: Mas, na função afim a gente chama ele também de quê? Coeficiente o quê?

Aluno: Coeficiente linear!

Professora: Tá faltando um valor, num tá? Qual valor tá faltando?

Aluna: Quarenta e cinco!

Professora: Coloco só o quarenta e cinco na equação?

Aluna: Quarenta e cinco “ x ”!

Professora: Quarenta e cinco “ x ” mais noventa (“ $45x + 90$ ”) [anota no quadro]. Porque quarenta e cinco vezes “ x ”? A gente chama o coeficiente “ a ” de quê?

Alunos: Angular!

Professor: E o meu “ x ” seria o quê? Aqui [referindo-se ao problema] eu tenho, a matrícula e a mensalidade. A matrícula a gente diz que é quem?

Alunos: Valor fixo!

Professora: E o meu “ x ” seria quem? Quarenta e cinco, se refere a quem?

Alunos: Mensalidade!

Professora: Se eu falo em mensalidade, eu tô falando de quê?

Ruth: Do valor mensal!

Professora: Então meu “ x ” seria o quê?

Alunos: O valor mensal!

Professora: A quantidade de meses. Vamos supor: Sílvia [aluna] entra na academia, ela acha que vai frequentar o ano todo. Chegou lá, ela pagou a matrícula de noventa reais, então meu “ x ” é um, né? Quarenta e cinco vezes um, mais noventa, igual a cento e trinta e cinco. Aí, ela gostou de ficar na academia, aí vai pagar outro mês, então meu “ x ” agora é quantos meses? Dois meses! Quando chegou no terceiro mês ela desistiu de ir. Então, quantos meses ela foi?

Alunos: Dois!

Professora: Qual o custo total de Sílvia na “Corpo em Forma”? Ela foi dois meses, ó: quarenta e cinco vezes dois, mais noventa, igual a cento e oitenta. Então, ela passou dois meses na academia “Corpo em Forma” e gastou cento e oitenta reais. Aí, ela decidiu mudar para a “Chega de Moleza”! Qual seria a outra expressão algébrica para academia “Chega de moleza”?

Alunos: Cinquenta “ x ” mais setenta (“ $50x + 70$ ”)!

Professora: Vamos lá! Sílvia passou mais dois meses nessa academia. Como é que a gente calcula o custo aqui?

Aluna: Cinquenta vezes dois?

Professora: Dá quanto?

Aluna: Cem!

Professora: Cem Mais?

Aluna: Setenta! Cento e setenta!

Professora: Quanto que ela gastou na primeira academia?

Alunos: Cento e oitenta!

Professora: Qual academia oferece o menor custo em um ano?

Aluna: A “Chega de Moleza”!

Professora: Têm certeza?

Aluna: Não, não, tá bom, continua aí!

Professora: Vamos calcular para um ano! Qual a expressão algébrica da “Corpo em Forma”?

Alunos: f de “ x ” igual a quarenta e cinco “ x ” mais noventa (“ $f(x) = 45x + 90$ ”)!

Professora: Ele quer saber por um ano! O ano tem quantos meses?

Aluna: Doze!

Professora: Então, quem vai ser meu “ x ”?

Alunos: Doze!

Professora: f de doze igual a quarenta e cinco vezes doze mais noventa, igual a seiscentos e trinta [fazendo os cálculos no quadro, com a participação dos alunos]. Se eu passar um ano na “Corpo em Forma”, quanto que irei gastar?

Aluno: Seiscentos e trinta!

Professora: Se eu passar um ano na “Chega de Moleza”, quanto irei gastar? “ $f(x) = 50x + 70$ ” [apontando para a expressão no quadro]. E aí, qual o próximo passo?

Alunos: Cinquenta vezes doze mais setenta!

Professora: Quanto é cinquenta vezes doze? Usando calculadora Antônio?

Antônio: Seiscentos!

Professora: Seiscentos mais setenta? Olha, se tivesse dez vezes cinquenta, seria quanto? Dez vezes cinquenta, dá quanto?

Aluna: Quinhentos!

Professora: E Duas vezes cinquenta, dá quanto?

Aluna: Cem!

Professora: Quinhentos mais cem? Seiscentos! Uma conta dessas, precisa usar calculadora? Seiscentos mais setenta?

Alunos: Seiscentos e setenta!

Professora: Vamos para a pergunta: qual academia oferece menor custo em um ano?

Alunos: “Corpo em Forma”!

Professora: Porquê?

Aluno: Porque gasta menos!

Professora: Quanto irei gastar a menos?

Aluno: Trinta reais!

Professora: Trinta reais? Quarenta, né? Seiscentos e setenta, menos seiscentos e trinta? Quarenta, né minha gente? Vocês lembram que no começo eu perguntei qual era melhor?

Alunos: Foi!

Professora: Qual era a melhor nos dois meses?

Alunos: “Chega de Moleza”!

Professora: E, em um ano? Qual a melhor? A melhor é a que tem a menor matrícula ou a maior?

Alunas: A maior matrícula! [Um aluno não entendeu direito, a professora explica novamente o resultado para dois meses, nas duas academias]

Professora: [apontando para as expressões correspondentes escritas no quadro]: Quanto ele paga em dois meses de mensalidade? [O aluno não soube responder] Em dois meses, quarenta e cinco vezes dois?

Alunos: Noventa!

Professora: Cinquenta vezes dois? [apontando para a outra expressão].

Aluno: Cem!

Professora: Qual foi a diferença entre as duas, em dois meses?

Aluno: Dez reais!

Professora: Vamos olhar para a matrícula agora! Uma matrícula era noventa e a outra era setenta. Qual a diferença?

Alunos: Vinte!

Professora: Quem é maior, vinte ou dez?

Alunos: Vinte!

Professora: Vamos ver em três meses! Qual a diferença em três meses?

Aluno: Quinze!

Professora: Era dez e passou a ser quinze, né? Quinze cobre vinte?

Alunos: Não!

Professora: Vamos ver em quatro meses? Qual seria a diferença em quatro meses? Quarenta e cinco vezes quatro igual...

Alunos: Cento e oitenta!

Professora: E cinquenta vezes quatro?

Alunos: Duzentos!

Professora: Qual a diferença entre duzentos e cento e oitenta?

Alunos: Vinte!

Professora: E qual a diferença de noventa para setenta?

Alunos: Vinte!

Professora: Vocês percebem que em quatro meses não tem diferença? Agora, vamos olhar com a matrícula: cento e oitenta mais noventa?

Alunos: Duzentos e setenta!

Professora: E duzentos mais setenta?

Alunos: Duzentos e setenta!

Professora: O custo é igual! Aí, agora vamos fazer para cinco meses. Onde é a melhor? “Chega de Moleza” ou “Corpo em Forma”?

Aluno: Corpo em Forma!

Professora: Vamos lá! Quarenta e cinco vezes cinco? A gente sabe que quarenta e cinco vezes quatro é cento e oitenta aí, é só somar mais quarenta e cinco.

Alunos: Duzentos e vinte e cinco

Professora: Duzentos e vinte e cinco mais noventa, igual a trezentos e quinze. Aí, agora, cinquenta vezes cinco?

Alunos: Duzentos e cinquenta!

Professora: Duzentos e cinquenta mais setenta? Trezentos e vinte! Percebe que agora é trezentos e vinte e a outra é trezentos e quinze. Então, a partir do quinto mês, “Corpo em Forma” tem um custo menor. Mas, até o terceiro mês, quem tinha o custo melhor?

Alunos: “Chega de Moleza”!

Professora: Quinta questão! “Um veículo é abastecido por meio de um dispositivo provido de dois relógios. Um deles marca o tempo de abastecimento em minutos e o outro, o volume de combustível fornecido ao tanque do veículo, em litros. Construa um gráfico correspondente à situação (volume em função do tempo)” [A questão segue acompanhada de uma tabela que apresenta os dados relativos à relação “tempo x volume (litros)”]. Alguém sabe fazer a construção desse gráfico? Sim ou não? [Silêncio...]. Com o tempo de zero minutos, qual o volume em litros?

Aluno: Três!

Professora: Lembra do plano cartesiano? “ x ” é o horizontal e o “ y ”, o vertical. Aqui é como se o “ t ” fosse “ x ”, e o “ v ”, o “ y ”. A gente viu que o “ t ” tempo, tem valor zero e “ v ”, três. Então, o ponto vai ficar no eixo horizontal ou vertical? Vai ficar no qual?

Alunos: Vertical! [À medida que os alunos falam os valores de “ t ” e “ v ”, dispostos na tabela, a professora vai preenchendo o gráfico no quadro].

Professora [ao terminar o preenchimento dos pontos no gráfico]: Tem alguma semelhança entre os valores? Alguém sabe?

Aluno: Sim!

Professora: Qual é? [O aluno fica calado...]

Professora: Tem alguma semelhança, Sílvia? Olhe para a tabela! Pessoal, olhem a tabela, tem alguma semelhança?

Alunos: Tem!

Professora: Qual é?

Ricardo: Um lado da tabela aumenta de cinco em cinco.

Professora: Ricardo disse que essa [apontando para a primeira coluna da tabela, desenhada no quadro] vai de cinco em cinco... acertou! E o outro lado? Tem alguma outra semelhança?

Aluno: Sim!

Aluno (outro): Dois vírgula cinco?

Professora: Dois vírgula cinco? Vamos lá: cinco vírgula cinco, menos três?

Alunos: Dois vírgula cinco!

Professora: Sete vírgula cinco, menos cinco?

Alunos: Dois vírgula cinco!

Professora: Se eu pedisse para vocês montarem a lei de formação, vocês conseguiriam?

Alunos: Não sei!

Professora: Eu tava no minuto zero, pulei pro minuto cinco... mas, se eu fizesse de um em um: no minuto zero, meu volume era qual?

Aluno: Três!

Professora: No tempo cinco, meu volume era qual?

Aluno: Cinco vírgula cinco!

Professora: Mas, se eu fizesse a lei de formação, como que eu faria? Se eu oferecer um ponto extra, alguém saberia me dizer qual a lei de formação? A expressão algébrica aqui, que representa o meu gráfico ou minha tabela?

Aluna: “ t ” de “ x ”, zero de “ x ”?

Professora: E aí? Eu quero meu volume em litros, né? O meu volume é em função do meu tempo. E, aí?

Aluno: Três!

Professora: Três?

Aluno: Três “ x ”?

Aluno (outro): “ t ”!

Professora: Só tem o “ t ”? Tá faltando alguma coisa, não tá? Ninguém vai se arriscar? Vamos lá! A gente descobriu o quê? Que a relação é... dois e meio. Após cinco minutos, meu volume deu um pulo de dois e meio a mais, certo? De cinco em cinco minutos. Se eu fizesse de um em um, o que eu faria? Eu vou dividir o meu dois e meio

por cinco, certo? Quanto é dois e meio dividido pra cinco? Se eu pedisse vinte e cinco dividido pra cinco?

Alunos: Três vírgula cinco?

Professora: Não! Eu quero vinte e cinco dividido pra cinco!

Aluno: Cinco!

Professora: Se vinte e cinco dividido pra cinco é cinco, então, quanto é dois vírgula cinco dividido pra...

Aluno: Zero vírgula quarenta e quatro!

Professora: Ó, se vinte e cinco dividido pra cinco é cinco... eu tenho quantas casas aqui, depois das vírgulas?

Ruth: Zero vírgula cinco!

Professora: Então, a cada minuto o volume do meu tanque aumentaria quanto?

Alunos: Zero vírgula cinco!

Professora: Zero vírgula cinco! Eu posso colocar zero vírgula cinco vezes “t”?

Alunos: Pode!

Professora: Posso? Sim ou não?

Alunos: Pode!

Professora: Vamos provar, pra ver se dá certo ou não! Antônio, quando o meu “t” for zero, zero vírgula cinco vezes zero, mais três... igual a três! Tá certo?

Alunos: Tá!

Professora: Zero vírgula cinco vezes cinco?

Antônio: Dois vírgula cinco.

Professora: Dois vírgula cinco mais três?

Alunos: Cinco vírgula cinco!

Professora: Tá ok? Vamos ver o tempo dez! Zero vírgula cinco vezes dez? [Ninguém responde] Não é possível!

Alunos: Cinco!

Professora: Cinco mais três?

Alunos: Oito!

Professora: Quinze vezes zero vírgula cinco?

Aluno: Dez?

Professora: Quinze vezes zero vírgula cinco? Presta atenção! Quando eu multiplico o número por zero vírgula cinco, o resultado é igual a metade desse número! Então, se eu multiplico quinze vezes zero vírgula cinco, dá quanto?

Aluno: Sete vírgula cinco!

Professora: Sete vírgula cinco mais três?

Alunos: Dez vírgula cinco!

Professora: Vinte vezes zero vírgula cinco? Qual a metade de Vinte?

Alunos: Dez!

Professora: Dez mais três?

Alunos: Treze!

Professora: Qual a metade de vinte e cinco?

Alunos: Doze vírgula cinco!

Professora: Doze vírgula cinco mais três?

Alunos: Quinze vírgula cinco!

Professora: Essa minha expressão algébrica tá certa?

Alunos: Tá!

Professora: É difícil a função afim?

Alunos: Muito!

Professora: Terminaram as questões? Vai ser rapidinho agora... vamos só revisar um pouquinho! Ó, sexta-feira passada a gente estudou o quê? [Ninguém responde!] Hã!!??

Alunos: Função afim!

Professora: Eu disse que o gráfico de uma função afim tem o formato de quê? Uma reta, né? " $f(x) = ax + b$ " [anotando no quadro]. A gente estudou que a função afim era uma função definida por " $f(x) = ax + b$ ", com " b " diferente de?

Aluna: " a "!

Outra aluna: " x ", " y ", zero?

Professora: " b " diferente de zero! Ó, o pontinho que fica sobre o eixo horizontal, a gente chama de quem? O ponto que fica sobre " x ", a gente chama de quem?

Aluna: Zero?

Professora: Peguem a apostilazinha [fascículo] que eu entreguei, e olhem aí!

Aluno: Preguiça!

Professora: Preguiça nada! O ponto " $(0, x)$ " a gente chama de quem?

Aluna: É angular, é?

Professora: Não! Nem é angular nem linear!

Aluno: A raiz de " f "! [verificando no fascículo]

Aluna: Eu ia falar!

Professora: Ia, mas não falou, né? Quem é o ponto que fica sobre o eixo vertical “y”? Coeficiente...

Aluno: Linear!

Professora: A gente chama ele também de quem? Eu tenho a fórmula geral da função afim: “ $f(x) = ax + b$ ”. Eu disse a vocês que eu tinha dois coeficientes: angular e linear. Quem é o linear? [Depois de muita insistência...]

Aluna: Zero?

Professora: Já olharam na apostila? O coeficiente linear é o meu ponto que vai ser o “b”. O “a” eu falei para vocês, “a” de angular. E o “b” de linear. Eu tenho o gráfico aqui ó... [aponta para o gráfico desenhado no quadro] A regra da minha função... O meu ângulo..., [aponta para o primeiro quadrante] está maior ou menor que noventa graus?

Aluno: Menor!

Professora: Se ele está menor, isso quer dizer o quê? Que a função é crescente ou decrescente?

Alunos: As duas coisas: crescente e decrescente!

Professora: Hãh??

Alunos: Crescente!

Professora: Quando alfa é menor que noventa, minha função é crescente. E o meu coeficiente angular vai ser o quê? Tem que ser um valor o quê? O meu coeficiente angular, o meu “a”, tem que ser um valor o quê? Positivo ou negativo?

Aluna: Positivo!

Professora: Se ele é positivo, ele tem que ser o quê? Maior que... zero! Na minha função crescente, o meu ângulo tem que ser o quê? Menor que noventa e o meu coeficiente angular maior que zero, ou seja, um valor positivo. [A professora desenha a representação de uma reta decrescente no quadro]: E a reta aqui, tá crescente ou decrescente?

Ruth: Decrescente!

Professora: O meu ângulo aqui [apontando para o ângulo formado entre a representação da reta e o eixo “x” do plano cartesiano] tá maior ou menor que noventa?

Aluno: Maior!

Professora: Meu ângulo alfa tá maior que noventa graus. Quando ele é maior que noventa, minha função é... decrescente! O meu coeficiente angular tem valor positivo ou negativo?

Alunos: Negativo!

Professora: Logo, meu coeficiente angular é menor que zero! Qual é a formula geral da função afim? Quem é a formula geral da função afim?

Alunos: " $f(x) = ax + b$ "!

Professora: " a " é o meu coeficiente o quê?

Alunos: Angular!

Professora: E o " b "?

Alunos: Linear!

Professora: O ponto que fica sobre " y " é quem?

Daniela: " b "!

Professora: Que também a chama de quem?

Alunos: Linear!

Professora: E o ponto que fica sobre " x "?

Alunos: Raiz!

Professora: A gente encontrou uma formulazinha, não foi? Para determinar a raiz da função ou o zero da função? Quem lembra da fórmula? Quem foi? A folhinha de vocês tem um gráfico aí, nela tem todas essas informações, aliás quase todas, aí ele vem dizendo a formulazinha. Encontraram?

Alunos: Ainda não!

Professora: Não encontraram? [A professora vai até um aluno e mostra onde ficavam localizadas as informações]. " $x = -\frac{b}{a}$ "! A gente já sabe que o gráfico de uma função afim é o quê? Tem o formato de quê?

Alunos: Reta!

Professora: A gente tem três casos particulares, isso tá no final da folhinha. Três casos particulares: o primeiro deles a gente tem a função identidade. Quem diz o que a função identidade? Me diz pra mim? O que acontece para a função ser identidade? O meu " a " tem que ser igual a quem? A um! E o meu " b "?

Aluna: Zero!

Professora: Por que a gente chama de função identidade? Alguém sabe? Vamos substituir os valores da fórmula geral " $f(x) = ax + b$ ". " $f(x)$ " igual... quem é o valor de " a "?

Alunos: Um!

Professora: E o valor de " b "?

Alunos: Zero!

Professora: Então, meu " $f(x)$ " será igual a um vezes " x " ou " y " igual a " x ". O valor de " x " vai ser igual ao valor de " y "! Quando é que minha função é identidade? Quando o valor de " x " vai ser igual ao valor de... " y ". Se o meu " x " for um, " y " será um. Se o meu " x " for dois, " y " será dois. Se o meu " x " for três, " y " será três, e assim sucessivamente. Qual o outro caso? Função constante! O que é uma coisa constante para vocês?

Daniela: Que acontece diariamente.

Professora: Só isso? Pra minha função ser constante, o meu " a " tem que ser igual a quem?

Alunos: Zero!

Professora: E a minha " $f(x)$ " igual a... " b ". " $f(x) = ax + b$ ", " $f(x)$ " igual a zero vezes " x ", igual a zero, mais " b ", igual a " b ". Vamos colocar no gráfico! O meu " $f(x)$ " igual a zero vezes " x " mais " b ", igual a " b ". Ó, minha " $f(x)$ " igual a zero vezes " x " mais cinco. Se o meu " x " for um, qual vai ser o valor de " y "? " $f(x)$ " igual a zero vezes um mais cinco, igual a cinco. Quando o meu " x " for um, o meu " y " é cinco! Quando meu " x " for dois, o meu " y " é cinco. Zero vezes dois?

Alunos: Zero!

Professora: Zero mais cinco?

Alunos: Cinco!

Professora: Quando o meu " x " for menos um? Zero vezes menos um?

Alunos: Zero!

Professora: Zero mais cinco?

Alunos: Cinco!

Professora: Quando meu " x " for cinco? Zero vezes cinco?

Alunos: Zero!

Professora: Zero mais cinco?

Alunos: Cinco!

Professora: Então, para qualquer valor de " x ", o meu " y " é sempre cinco. Então o meu gráfico é uma reta paralela ao eixo " x ". Se o meu " b " fosse três, a minha reta passaria em que ponto?

Alunos: Três!

Professora: Três de?

Alunos: " y "!

Professora [apontando para o quadro onde está representado o plano cartesiano com a reta anteriormente discutida]: Se aqui [em $f(x) = 5$] fosse menos três, a reta passaria onde? Passaria no “ $y = -3$ ”! O que é uma função constante? Para qualquer valor de “ x ”, o valor de “ y ” é o mesmo, vai ser constante. O meu “ x ” pode mudar mas, o meu “ y ” será sempre o mesmo. E a outra [característica] é o que? Função linear! A função linear diz o quê [no fascículo]? [O aluno Orisvaldo quer dizer, mas está com vergonha] Diz o que a função linear?

Orisvaldo: “ b ” igual a zero!

Professora: A minha função linear é: “ $f(x) = ax + b$ ”, com “ b ” igual a zero. Então, se “ b ” é igual a zero, então como que vai ficar minha função linear? “ $f(x)$ ” igual a?

Aluna: “ $ax + 0$ ”!

Professora: “ $f(x) = ax$ ”! A minha função identidade ela é o que? “ $f(x)$ ” igual a quem?

Aluna: Igual a “ x ”!

Professora: A minha função constante? O meu “ a ” é igual a quem?

Alunos: Zero!

Professora: E a minha função [constante] vai ser igual a?

Alunos: “ b ”!

Professora: “ $f(x) = b$ ”! E a minha função linear? O “ b ” é igual a quem?

Alunos: Zero!

Professora: E a função vai ser igual a quem? “ $f(x) = ax$ ”. Foi muita informação pra hoje? Não, né?

Alunos: Foi. Muita informação para processar!

Terceiro dia (17/08/2021): duas aulas

Professora: Trouxeram o livro? Página 101! Ó, questões um, dois e três da página 101. Questão um, pede o quê? “Determine a raiz ou zero de cada função a seguir”. “Questão dois: construa o gráfico cartesiano de cada função de domínio $\mathbb{R}$ dadas abaixo”. Questão três: ele dá o gráfico e diz assim: “ao construir o gráfico, o desenhista cometeu um erro, você consegue identificá-lo?”. Podem começar!

Aluno: Quais são as questões professora?

Professora: É página 101, questões um, dois e três [a professora leva o livro até o aluno]. Bora Antônio, abre o caderno! Antônio!

Aluno [outro]: É obrigatório, é?

Professora: [acena com a cabeça e diz que sim] Essa é uma das atividades do terceiro bimestre.

Aluno: Essa primeira questão é pra fazer o quê?

Professora: Pra descobrir a raiz ou zero da função. Pode igualar a função a zero ou usar a fórmula " $x = -\frac{b}{a}$ ". Vou dar um exemplo: [anota quadro] " $f(x) = -4x + 10$ ".

Quem é o " a "?

Aluna: É o quatro!

Professora: Quatro?

Aluna [outra]: É dez?

Professora: Como é? Quem falou? Carol?

Carol: Menos quatro!

Professora: E o " b "?

Carol: É dez!

Professora: Então " $x = -\frac{b}{a}$ ". Qual o valor de " b "?

Aluna: Dez!

Professora: E o valor de " a "?

Aluna: Menos quatro!

Professora: Menos com menos?

Aluna: Mais!

Professora: Então, menos dez sobre quatro.

Aluna: Aí divide, né?

Professora: Posso simplificar a fração ou dividir?

Aluna: Dividir!

Professora: Então, 10 dividido pra quatro?

Aluna: Dois!

Professora: Dois? Duas vezes quatro?

Aluna: Oito! [A professora monta o algoritmo da divisão no quadro e vai fazendo com os alunos]

Professora: Quem é a raiz da função?

Aluna: " x " igual a dois virgula cinco.

Professora: Se eu fizesse " $f(x) = -4x + 10 = 0$ "? O que eu faço agora? Eu tenho primeiro e segundo membro. Eu pego o membro que tem o " x " e permaneço nesse lado, e passo o outro pra onde? Bora minha gente! O que a gente faz? Vou colocar menos dois pontos pra quem tá dormindo na aula! O número que tá sozinho eu passo pra onde? Vamos povo! Eu tenho o primeiro membro. Eu não vou responder, vocês quem vão responder. Quem tá com o " x " eu deixo onde? No primeiro membro, né? E o que tá sozinho? [silêncio na sala]

Aluna [timidamente]: Eu coloco para o segundo membro.

Aluna (outra): Vai Carol!

Professora: O que foi que Carol falou?

Aluna: Ela falou menos dez.

Professora: Quatro " x ", o que mais? Não é possível! Vocês passaram o ensino fundamental quase todo e não sabem resolver uma equação do primeiro grau! Vai Yasmin, responde!

Yasmin: Menos dez!

Professora: Sílvia e Ruth, vocês já estão dizendo que não sabem? Menos quatro " x " igual a menos dez, dá quanto Érica? Como que eu faço? Quando menos quatro multiplica " x ", faço como? Faz o quê? Menos quatro tá multiplicando " x ", aí eu faço como? Vou trazer uma lista com centenas de equação de primeiro grau pra vocês e tabuada!

Aluna: Multiplica por dez?

Professora: Não é possível que vocês já esqueceram!

Aluna: Vai Carol, fala!

Carol: Passa dividindo!

Professora: Menos dez sobre quatro. Menos com menos?

Aluna: Mais!

Professora: Dez dividido por quatro?

Aluna: Dois e meio!

Professora: Agora, questão um, do livro, letra a, " $f(x) = 3x + 15$ ". Eu não vou fazer! Vocês vão fazer e vão trazer para eu ver! Vamos, Yasmin!

Yasmin: Vou tentar, se eu errar...

Professora: Se errar a gente corrige, né?

Aluna: Aí, no caso, o “ x ” vai ser aquele ali né, o do quatro, nesse caso, o do três? [a professora vai andando pelas bancas para conferir se estão fazendo. Ao perceber um erro, ela vai ao quadro e se direciona a todos]

Professora: Vocês estão esquecendo o sinal, o menos a fórmula!

Aluna: Mas, não é só para colocar quando tem?

Professora: Não! Esse sinal já faz parte da fórmula. [Uma aluna chama a professora na banca]

Professora [para a aluna]: Menos com menos?

Aluna: Mais! [Outra aluna chama a professora na banca]

Aluna: Acho que errei aqui! [A professora fica circulando bancas tirando dúvidas dos alunos]

Aluna: Tá certo agora, né?

Professora: Qual foi o resultado agora?

Aluna: Menos cinco!

Professora: Tá!

Aluno: Qual fórmula usar?

Professora: Qualquer uma das duas!

Professora: [chamando a atenção de uma aluna que não está fazendo a atividade]: Bora Sílvia!

Sílvia: Eu não sei fazer!

Professora: Você sabe! Não fez a outra! A questão dois é para construir o gráfico! [e continua indo de banca em banca tirando as dúvidas dos alunos] Qual o valor de “ b ” [na banca de uma aluna]?

Aluna: É sete ou menos sete?

Aluna [da banca vizinha]: Menos sete!

Professora: Tem o parêntese, né? [referindo-se ao uso da fórmula]

Aluna: É! [ênfase]

Aluno: Professora, vem cá!

Aluna: Não tô conseguindo fazer isso não...

Professora: Para determinar o coeficiente linear... quem é o coeficiente linear?

Aluna: É o dois! [A professora se dirige ao quadro para mostrar como constrói o gráfico de uma função] Eixo horizontal é o quê?

Alunos: “ x ”!

Professora: E o vertical?

Alunos: “y”!

Professora: Esse gráfico vai ser crescente ou decrescente?

Alunos: Decrescente!

Professora: Por quê?

Alunos: Porque tem o menos no “a”!

Professora: Quem é o valor de “b”?

Alunos: Dez!

Professora: O valor de “b”, fica na vertical ou horizontal?

Alunos: Vertical!

Professora: Sobre o eixo “x” fica algum valor, qual é?

Alunos: “a”!

Professora: Não! Sobre o eixo “x” fica um valor, quem é esse valor? A gente chama ele de quem?

Aluna: Raiz!

Professora: Quem é a raiz da função que a gente encontrou?

Alunos: Dois vírgula vinte e cinco!

Professora: Olho o meu coeficiente angular e determino se a minha reta vai ser crescente ou decrescente. Ela vai ser o quê?

Alunos: Decrescente!

Professora: A gente tem outro modo de construir. Aí vocês me dizem qual é o mais fácil. Nesse, vocês vão atribuir valores a “x”. Artur, quando “x” for menos um, qual o valor do “y”? Menos quatro vezes menos um mais dez, dá quanto? [substituindo o valor atribuído a “x” a, na expressão]

Alunos: Quatorze!

Professora: Então, para esse “x”, meu “y” vai ser quatorze! Vamos fazer para “x” igual a zero! Menos quatro vezes zero?

Alunos: Zero!

Professora: Zero mais dez?

Alunos: Dez!

Professora: Agora, quando o meu “x” for um?

Alunos: Menos quatro vezes um, mais dez!

Professora: “ $y = -4 + 10$ ”. Sinais diferente, eu subtraio e repito o sinal do maior número. Menos quatro mais dez fica positivo ou negativo?

Alunos: Positivo!

Professora: Quando “ x ” for um, “ y ” vai ser quanto?

Aluno: Seis!

Professora: Quando “ x ” for dois, “ y ” vai ser quanto?

Alunos: Dois!

Professora: Sabem montar com esses valores? Primeiro: ali a gente tem três valores para “ x ” e para “ y ”. Quem são os valores para “ x ”?

Aluna: Menos um, zero e um.

Professora: E para “ y ”?

Aluna: Quatorze, dez e seis.

Professora: Quando “ x ” for menos um, “ y ” vai ser quanto?

Aluna: Quatorze!

Professora: Quando “ x ” for zero?

Aluna: Dez!

Professora: Quando “ x ” for um?

Aluna: Seis! [a professora vai jogando os pontos no gráfico]

Professora: Mais fácil assim, ou do que jeito que fizemos agora? [comparando as duas abordagens]

Maria: O outro jeito.

Aluna: O menos complicado possível.

Professora: Qual é?

Aluna: O primeiro!

Professora: Vamos lá, questão dois! Letra a: menos três “ x ” mais quatro...

Aluna: Quatro dividido para três, dá quanto?

Professora: Você divide quatro em três partes. Luana e Carol, terminaram?

Alunos: Ainda não!

Professora: Vocês vão terminarem em casa, viram? Tirem a foto do livro, da página do livro [uma vez que os livros ficam na escola], levem para terminar em casa, e quarta feira a gente vai corrigir. Vão ter mais de uma semana para terminar! [Devido ao sistema de rodízio]

Quarto dia (25/08/2021): duas aulas

Professora: A questão “um” pediu para determinar o zero ou a raiz da função. Fizeram? Vou conferir de banca em banca. [circula pela sala olhando os cadernos dos alunos] Vamos lá! Letra “a”... “ $f(x) = 3x + 15$ ”. Como é que a gente determina a raiz ou o zero da função? [ninguém responde]

Professora: “ x ” igual a menos “ b ” sobre “ a ” ou igualamos a função a zero: “ $f(x) = 3x + 15 = 0$ ”. Determinando quem é “ b ” e quem é “ a ”, a gente sabe que a função é definida por “ $f(x) = ax + b$ ”. Então nessa função aqui, quem é o valor de “ a ” e quem é o valor de “ b ”?

Alunos: Valor de “ a ” é três!

Professora: E o valor de “ b ”?

Alunos: Quinze!

Professora: Substituindo os valores: “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. Quem é o valor de “ b ”?

Alunos: Quinze!

Professora: Quem é o valor de “ a ”?

Alunos: Três!

Professora: Então, “ $x = -\frac{15}{3}$ ”, dá quanto? [ninguém responde] Menos com mais, igual a menos e quinze dividido por três?

Alunos: Cinco!

Professora: A raiz da minha função é menos cinco. E se eu igualasse a zero, como ficaria? [silêncio na sala] Onde está o primeiro membro da minha função? [ninguém responde] Antes da igualdade eu tenho quem?

Alunos: Três “ x ” mais cinco!

Professora: E depois?

Alunos: Zero!

Professora: Então no primeiro membro eu tenho três “ x ” mais cinco e no segundo eu tenho zero. Como é que a gente resolve uma equação do primeiro grau?

Aluna: Três “ x ” igual a zero...

Professora: O quinze é positivo, vai passar a ser nega...tivo. Três “ x ” igual a menos quinze. E agora? [ninguém responde] O três tá multiplicando, vai passar a?

Alunos: Dividir!

Professora: Dividir. “ x ” igual a menos quinze dividido por três. Vai dar o mesmo resultado, “ x ” igual a menos cinco. Vocês acham mais fácil assim [apontando para a primeira forma realizada, utilizando a fórmula da raiz] ou assim [apontando para a

última forma realizada, igualando a função a zero]? [opiniões divididas] Vamos para a “b”! Qual o valor de “a” na letra “b”? Qual o valor de “b”?

Aluno: Doze!

Professora: Substituindo os valores, como é que fica?

Aluna: “x” igual a menos doze sobre menos quatro.

Professora [anotando no quadro]: O que eu faço agora?

Aluno: Divide doze por quatro e coloca o sinal do maior.

Professora: Sinal do maior não, quando é divisão e multiplicação, a gente faz a relação de sinal. Menos com menos, igual a mais. Doze dividido por quatro, igual a três. Então a raiz da minha função é três. Letra “c”: “ $f(x) = 5x - 7$ ”. Tentem fazer essa! [Alunos tentam responder e a professora aguarda][algum tempo depois...] Qual o valor de “a”?

Aluna: Cinco!

Professora: E o valor de “b”?

Aluna: Menos sete!

Professora: Substituindo os valores de “a” e “b”, fica como?

Aluna: “x” igual a menos sete sobre menos cinco.

Professora: E agora, o que eu faço? [ninguém responde] Relação de sinal: menos com menos, igual a mais. Sete sobre cinco, fica quanto?

Aluna: Um vírgula quatro!

Professora: Sete dividido por cinco? [a professora desenvolve o algoritmo da divisão e vai efetuando a operação com os alunos] Letra “d”, qual o valor de “a” e o valor de “b”?

Aluno: Menos cinco, valor de “a”!

Professora: E o valor de “b”?

Aluno: Zero!

Professora: Por que zero? [ninguém responde] A função é definida por quem? [ninguém responde] “ $f(x) = ax + b$ ”. O “a” é o termo que acompanha quem?

Alunos: “x”!

Professora: E o “b” é um termo independente, está sozinho. Se aqui eu só tenho um termo que acompanha o “x”, está faltando quem?

Alunos: “b”!

Professora: Então aqui é como se eu tivesse menos cinco “ x ” mais zero. Como é que eu faço agora? “ x ” é... Toda vez que o “ b ” for igual a zero, a raiz da função vai ser zero? [ninguém responde] Sim ou não? [silêncio total] Quem acha que sim, levanta a mão [poucos alunos levantam a mão] E quem acha que não? [ninguém levanta a mão] Ninguém? Toda vez que o “ b ” da minha função for igual a zero, a raiz da minha função vai ser igual a zero. Segunda questão: “construa o gráfico cartesiano de cada função”. Letra “ a ”, “ y ” igual a menos três “ x ” mais quatro. A gente aprendeu a construir o gráfico de duas maneiras, não foi? [ninguém responde] Quais foram elas? [ninguém responde] A gente aprendeu a construir o gráfico localizando os pontos nos eixos “ y ” e “ x ”. Quem é o eixo vertical?

Alunos: “ y ”!

Professora: Quem é o eixo horizontal?

Alunos: “ x ”!

Professora: Sobre o eixo “ y ” fica um pontinho, e sobre o eixo “ x ” fica outro. Quem é o ponto que fica sobre o eixo “ y ” e quem é o ponto que fica sobre o eixo “ x ”?

Aluna: Zero!

Professora: Zero é esse ponto aqui, o encontro, a origem do gráfico. Essa função aqui, vai ter raiz diferente de zero? [ninguém responde] Vai? A raiz dela vai ser diferente de zero?

Alunos: Vai!

Professora: Quem é o coeficiente angular dessa função? [ninguém responde] Qual é o coeficiente angular dessa função, coeficiente “ a ”?

Aluna: Menos três!

Professora: E o coeficiente linear, que é o coeficiente de “ b ”?

Aluna: Quatro!

Professora: Meu coeficiente angular é positivo ou negativo?

Aluna: Negativo

Professora: Negativo! “ a ” igual a menos três. “ a ” é menor do que zero, então, o gráfico da minha função vai ser crescente ou decrescente?

Aluna: Decrescente!

Professora: Decrescente, né? Quando o valor de “ a ” é menor do que zero, o gráfico é decrescente. Um desses dois pontos é ..., qual deles é?

Aluno: “ a ”!

Aluno [outro]: “ b ”!

Professora: Quem acha que é “ a ”, levanta a mão! [a maior parte dos alunos levanta a mão] Quem acha que é “ b ”? [alguns alunos levantam a mão] O “ a ”, como a gente viu na outra aula, lá no comecinho, vai determinar se a reta vai ser crescente ou decrescente. O “ b ”, meu coeficiente linear, é o pontinho que vai ficar sobre o eixo “ y ”. Quem é o valor de “ b ” aqui? O quatro! O meu quatro vai ficar aqui no eixo “ y ”. Acima do eixo “ x ”, eu tenho valor positivo. Aí eu tenho outro ponto que se localiza aqui no eixo “ x ”, quem é esse ponto?

Aluna: Menos três!

Professora: O menos três é o meu coeficiente angular, ele que determina se a reta vai ser crescente ou decrescente. A gente determinou quatro raízes aqui, utilizando a fórmula ou igualando a zero [referindo-se ao item um já realizado]. Preferem fazer como? Igualando a zero ou utilizando a fórmula?

Alunos: Utilizando a fórmula!

Professora: “ x ” igual a menos... quem é o valor de “ b ”?

Alunos: Quatro!

Professora: Quem é o valor de “ a ”?

Alunos: Menos três!

Professora: “ x ” igual a menos quatro sobre menos três. Vai dar quanto? Menos com menos?

Alunos: Mais!

Professora: “ x ” igual a quatro terços. É um número maior ou menor que um?

Alunos: Maior!

Professora: Por que é maior?

Aluna: Porque forma um número decimal.

Professora: Todo número decimal é maior do que um?... Mas, toda vez que o meu numerador for maior que o meu denominador, o meu número vai ser maior do que um. Toda vez que o meu numerador for menor que o meu denominador, eu vou ter um número menor que um. Entenderam?

Alunos: Sim!

Professora: Quem é maior? Três quartos ou quatro terços? [ninguém responde] Três quartos é menor que quatro terços?

Aluno: É!

Professora: Vamos lá! Três dividido por quatro... [faz o algoritmo da divisão e vai desenvolvendo os cálculos com os alunos]

Professora: E agora, se eu dividir quatro por três? [faz o algoritmo da divisão e vai desenvolvendo os cálculos com os alunos] Então, de novo, toda vez que o meu numerador for menor que o denominador, meu número vai ser menor do que um. Toda vez que for maior, o meu número vai ser maior do que um. Então vamos imaginar que eu tenho quatro terços nesse gráfico. Essa minha raiz vai ficar à esquerda do um ou à direita do um?

Aluna: À direita!

Professora: Por quê?

Aluna: Porque é maior do que um.

Professora: Porque é um número maior do que um. A reta do meu gráfico vai ser crescente ou decrescente?

Aluna: Decrescente!

Professora: Decrescente! Letra “b”: “ $y = 4x + 8$ ”. Essa função é crescente ou decrescente?

Aluna: Crescente!

Professora: Crescente, por quê?

Aluna: Porque o quatro é menor que oito.

Professora: Por quê? Por que essa função é crescente? Quem é que determina se a função vai ser crescente ou decrescente?

Aluna: Quando o “a” é maior que zero, a função é crescente.

Professora: O “a” aqui é maior do que zero? Então minha função é crescente. Quem é que determina se a minha função vai ser crescente ou decrescente?

Aluna: O “a”!

Professora: O “a”, que é o meu coeficiente angular. Quem é a raiz dessa função?

Aluna: Menos oito sobre quatro.

Professora: Utilizando a fórmula, o valor de “b”, que é oito, sobre o “a”. Então, menos oito dividido por quatro?

Aluna: Menos dois!

Professora: Menos dois! Só com o valor de “x”, da minha raiz da função, eu consigo fazer meu gráfico? [ninguém responde] A raiz da minha função foi “x” igual a menos dois. Esse ponto vai ficar à esquerda de “y” ou à direita de “y”?

Aluna: À esquerda!

Professora: Então, só com esse pontinho eu posso fazer a reta do meu gráfico?

Aluna: Não!

Professora: Falta quem ali, no gráfico?

Aluna: O termo " a ".

Professora: Não! O termo " a ", a gente já identificou ele para determinar se é crescente ou decrescente. Quem é que falta aqui no meu gráfico?

Aluno: " b "!

Professora: O termo " b ". E o " b " fica onde?

Aluno: " y "!

Professora: No " y "! O valor de " b " é positivo ou negativo?

Aluno: Positivo!

Professora: Positivo! Vai ficar acima ou abaixo do eixo " x "?

Alunos: Acima.

Professora: Letra " c ". Kátia! A função é crescente ou decrescente?

Kátia: Decrescente!

Professora: Luana, por que é decrescente? [a aluna não responde] Mônica, Kátia disse que é uma função decrescente. Por que é decrescente? [a aluna não responde] Andresa?

Andresa: Porque o valor de " a " é menor do que zero.

Professora: Quando o valor de " a " é menor do que zero, o gráfico da minha função vai ser?

Andresa: Decrescente!

Professora: Quem vai ser a raiz da minha função?

Aluna: Menos seis!

Professora: Quem mais?

Aluna: Só!

Professora: Só? [aluna não responde] Quem vai ser a raiz da minha função?

Aluna: Menos menos seis sobre menos cinco.

Professora: Menos com menos?

Alunos: Mais!

Professora: Então, seis sobre menos cinco. A raiz da minha função vai ser positiva ou negativa?

Aluna: Positiva!

Professora: Mais com menos?

Alunos: Menos!

Professora: Negativa! Se eu tirar esse sinal aqui agora [referindo-se ao sinal negativo da fração seis quintos], esse número aqui vai ser maior ou menor que um?

Aluna: Maior!

Professora: Seis dividido por cinco... [faz o algoritmo da divisão e vai desenvolvendo os cálculos com os alunos] Menos um vírgula dois é a raiz da minha função. É um valor negativo, fica a direita ou à esquerda ou eixo “y”?

Alunos: À esquerda!

Professora: Aí, vai ficar entre zero e menos um ou entre menos um e menos dois?

Aluna: Entre menos um e menos dois.

Professora: Está faltando que informação no gráfico?

Aluno: O termo “b”!

Professora: O termo “b”, que fica onde?

Aluna: Embaixo do eixo “x”!

Professora: O valor de “b” é positivo ou negativo?

Aluna: Negativo!

Professora: Então vai ficar onde?

Aluno: Embaixo!

Professora: Abaixo do eixo “x”. Letra “d”! Valéria! Minha função vai ser crescente ou decrescente?

Valéria: Crescente!

Professora: Por quê?

Valéria: Porque o valor de “a” é menor que o de “b”.

Professora: Não! O quatro aqui é menor do que oito [referindo-se ao item “b”, já corrigido], a reta é crescente. Mas, nessa questão aqui, o menos três é menor do que quatro [referindo-se a outro exemplo do quadro], e é decrescente. O que determina se a função é crescente ou decrescente?

Aluna [outra]: Se o “a” é maior do que zero!

Professora: Quem determina se é crescente ou decrescente, é o valor do termo “a”, que é o coeficiente angular. O dez aqui [referindo-se ao item em questão], é maior ou menor do que zero?

Aluna: Maior!

Professora: Se o meu “ a ” é maior do que zero, a minha função é o quê?

Alunos: Crescente!

Professora: Quem vai ser a raiz dessa função? [ninguém responde]

Professora: Montem aí na cabeça de vocês e me digam como vai ficar a raiz da função.

Aluna: “ x ” igual a menos menos cinco sobre dez.

Professora: Está correto? A gente sabe que “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. Então, eu tenho “ x ” igual... o valor de “ b ” é menos cinco, sobre “ a ”, que é dez. Então está correto! Menos com menos?

Alunos: Mais!

Professora: “ x ” igual a cinco sobre dez. São cinco décimos. Como é que eu escrevo cinco décimos?

Aluna: Zero vírgula cinco.

Professora: “ x ” igual a zero vírgula cinco. Mas, eu poderia simplificar minha fração?

Aluna: Sim!

Professora: Como é que eu simplifico a minha fração? [ninguém responde] Já estudaram simplificação de fração, né?

Daniela: Divide pelo mesmo número.

Professora: Divide tanto o numerador, quanto o denominador por cinco. Divide os dois ao mesmo tempo. Como a gente simplifica uma fração? [ninguém responde] Não lembram? Só Daniela que lembra? [silêncio...] Ninguém lembra como simplifica uma fração?... Eu tenho que pegar um número que divida tanto o numerador quanto o denominador ao mesmo tempo. Quem seria o número nesse caso?

Aluna: Cinco!

Professora: O cinco divide tanto o cinco quanto o dez. [faz a simplificação] Um meio, é igual a quanto?

Aluna: Zero vírgula cinco.

Professora: O valor de “ b ” vai ficar acima ou abaixo do eixo “ x ”?

Aluna: Abaixo!

Professora: Por quê?

Aluna: Porque é um número negativo.

Professora: E a raiz da minha função vai ficar à esquerda ou à direita de “ y ”?

Aluna: À direita.

Professora: Por quê?

Aluna: Porque é um número positivo.

Professora: Vai ficar depois ou antes de um?

Aluna: Antes!

Professora: Na letra “e” e na letra “f”, eu tenho as funções “ $y = 4x$ ” e “ $y = -3x$ ”. O que está faltando nessas duas funções?

Aluna: “b”!

Professora: Quando não tem o termo “b”, ele vai ser igual a quanto?

Alunos: Zero!

Professora: E a gente viu o que lá na primeira questão? Quando o “b” é igual a zero, o que acontece com a raiz da função?

Aluna: Vai ser igual a zero.

Professora: A gente viu lá na primeira questão que quando o termo “b” for zero, a raiz da função vai ser igual a zero. Então, a gente vai ter “ $4x = 0$ ”, esse quatro está multiplicando e vai passar a dividir, e a gente vai ter “ $x = \frac{0}{4}$ ”, que vai dar?

Alunos: Zero!

Professora: E aqui, “ $-3x = 0$ ”, menos três está multiplicando passa a dividir, “ $x = \frac{0}{-3}$ ”, que vai ser zero. Como a gente vai fazer esse gráfico se tanto o “b”, como a raiz da minha função é igual a zero? [ninguém responde]

Professora: Como é que eu faria esses dois gráficos se tanto o meu “b”, como o meu “x” é igual a zero? [ninguém responde]

Professora: Sílvia fez, né?

Sílvia: Sim!

Professora: Como é que você fez?

Sílvia: Não sei! [a professora se dirige até a aluna para verificar]

Professora: Você só colocou um ponto zero no gráfico. Ela colocou os dois eixos, o “x” e o “y”, colocou zero e nada mais. Está correto esse gráfico? [ninguém responde]

O que eu tenho que fazer para descobrir como ficaria esse gráfico? [ninguém responde] Aqui fica os valores para “x” [referindo-se ao eixo “x” do plano cartesiano].

Vou atribuir três valores para “x”: menos dois, zero e dois. Quando “x” for menos dois, o que eu tenho que fazer, nessa primeira função aqui? Eu quero calcular “ $f(-2)$ ”.

Quem é a minha função? " $y = 4x$ " ou " $f(x) = 4x$ ". Quando tiver " x ", eu substituo por quem?

Aluna: Menos dois.

Professora: Então eu vou ter quatro vezes menos dois. Dá quanto? Mais do quatro e menos do dois, dá quanto?

Alunos: Menos!

Professora: Quatro vezes dois.

Alunos: Oito!

Professora: Então eu vou ter menos oito. Quando " x " for menos dois, " y " vai ser quanto?

Alunos: Menos oito!

Professora: Quando " x " for zero? Onde tiver " x ", eu substituo por zero. Então eu vou ter quatro vezes zero, que dá quanto?

Aluna: Zero.

Professora: Quando " x " for zero, " y " vai ser quanto?

Alunos: Zero!

Professora: Agora, quando " x " for dois, " $f(2)$ "... Quando for " x ", eu coloco quem?

Alunos: Dois!

Professora: Então eu vou ter quatro vezes dois, que dá quanto?

Alunos: Oito!

Professora: Quando " x " for dois, " y " vai ser quanto?

Alunos: oito!

Professora: Vamos construir esse gráfico agora! Quando " x " foi menos dois, " y " foi quanto?

Alunos: menos oito!

Professora: Menos oito está aqui em cima ou aqui embaixo [apontando para o eixo " x " do plano cartesiano]?

Alunos: Embaixo!

Professora: Quando " x " foi zero, " y " foi quanto?

Alunos: zero!

Professora: E quando " x " foi dois, " y " foi quanto?

Alunos: Oito!

Professora: Letra “f”! O que eu teria que fazer? [ninguém responde] O que eu fiz com a letra “e”? [ninguém responde]

Professora: Eu atribuí valores para “x”. Então, o que eu tenho que fazer na letra “f”?

Aluno: Atribuir valores.

Professora: Atribuir valores para? [ninguém responde] Para “x”. “ $y = -3x$ ”..., então o valor de “y” vai depender do valor de quem?

Aluno: “x”!

Professora: Então, vou atribuir valores para quem?

Alunos: “x”!

Professora: Vamos lá... calculando de cabeça! Quando “x” for menos um, “y” vai ser quanto? Como ficaria? Eu vou substituir esse valor aqui, que é menos um, onde tiver o “x”. Então eu vou ter: menos três vezes menos um. Fazendo relação de sinal: menos com menos?

Alunos: Mais!

Professora: Três vezes um?

Alunos: Três!

Professora: Agora, onde for “x” eu vou colocar zero. Então eu vou ter menos três vezes zero.

Alunos: Zero!

Professora: Agora, onde for “x” eu vou colocar o valor de um. Então eu vou ter menos três vezes um.

Alunos: Menos três!

Professora: Quando “x” for menos um, “y” vai ser?

Alunos: Menos três!

Professora: Quando “x” for zero, “y” vai ser?

Alunos: Zero!

Professora: Quando “x” for um, “y” vai ser?

Alunos: Menos três!

Professora: Esse gráfico aqui vai ser crescente ou decrescente?

Aluna: Decrescente!

Professora: Por quê?

Aluna: Porque o valor do termo “a” é menor do que zero. [professora faz o esboço do gráfico]

Professora: Para casa, vocês vão determinar os valores dos termos “ a ” e “ b ”, da raiz da função e definir a lei de formação [entrega uma folha em malha quadriculada com esboços de gráficos desenhados. São duas folhas diferentes: uma continha os gráficos de um a seis, e na outra de sete a doze. Cada aluno recebe uma dessas folhas].

Quinto dia (27/08/2021): três aulas

[A professora inicia a aula chamando os alunos para resolverem as questões da aula anterior, no quadro]

Professora: Vamos lá! Vamos corrigir a atividade da aula passada. Vocês vão ter que olhar o gráfico, retirar os valores e substituir em “ a ” e em “ b ”! Vou fazer o gráfico 1: aqui tem dois pontos no gráfico: menos três e três. Que ponto é esse aqui, “ a ” ou “ b ”? [apontando para o ponto sobre o eixo y]

Aluna: “ b ”!

Professora: “ b ” igual a quanto?

Aluna: Três.

Professora: O ponto sobre o eixo “ x ” é a raiz da função, que é o “ x ”. E sobre o eixo “ y ” é quem? “ b ”, que é o coeficiente linear. Falta encontrar quem?

Aluna: “ a ”!

Professora: Como é que a gente faz pra encontrar o “ a ”? [ninguém responde] A gente tem a fórmula da raiz da função que é “ x ” igual a menos “ b ” sobre “ a ”, e a gente pode usar quantos valores nessa fórmula? [ninguém responde] A gente tem o valor de “ x ”, o valor de “ b ” e o valor de “ a ”, três valores. Mas, aqui a gente usa quantos?

Aluno: Dois.

Professora: Dois. Quem é que vai sobrar?

Aluno: “ a ”.

Professora: Então a gente vai encontrar quem?

Aluno: O valor de “ a ”.

Professora: Primeiro, substituir o valor de “ x ”. Quem é o valor de “ x ”?

Aluno: Menos três.

Professora: Menos três igual... o valor de “ b ”, quem é?

Aluno: Três.

Professora: Três, sobre o valor de “ a ”. Como é que a gente resolve agora?

Aluna: Regra de três.

Professora: Meios pelos extremos, uma regra de três. Menos três vezes “ a ”? [ninguém responde] Menos três “ a ”, igual um vezes menos três? [ninguém responde] Menos três! O menos três está multiplicando o “ a ”, vai passar a?

Aluna: Dividir.

Professora: “ a ” igual menos três dividido por menos três. Menos com menos?

Alunos: Mais!

Professora: Três dividido por três?

Alunos: Um!

Professora: Então, agora eu tenho o valor de “ a ”, que é um e o valor de “ b ”, que é três. Quem será o meu “ $f(x)$ ”? O que eu tenho que fazer? Substituir o valor de “ a ” e o valor de “ b ”. Vai ficar como?

Aluna: “ f ” de “ x ” igual, um “ x ” mais três.

Professora: Gráfico 2, quem vem? Ninguém se candidata? Vou chamar então! Elba! [a aluna hesita] Vem Elba! [a aluna se dirige ao quadro] A gente tem esse gráfico que é o “2”, uma reta paralela ao eixo “ x ”. Lembram que tipo de gráfico é esse? [ninguém responde] É paralelo ao eixo “ x ”, quem é que lembra que tipo de gráfico é esse? [ninguém responde] Esse aqui é o que? [referindo-se ao gráfico “1”]

Aluno: Crescente.

Professora: Esse gráfico aqui é crescente [o gráfico “1”]. E esse [referindo-se ao gráfico “2”], quem sabe?

Aluna: Decrescente.

Professora: Não! Esse gráfico aqui forma um ângulo de cento e oitenta graus... paralelo ao eixo “ x ”. O crescente forma um ângulo menor quê?

Aluno: Noventa graus.

Professora: E o decrescente?

Alunos: Maior!

Professora: Maior do que noventa graus, mas vai ser também menor que cento e oitenta graus. Esse gráfico vai ser o quê? [o gráfico “2”]... [ninguém responde] Se eu tiver aqui um valor, menos quinze e 4 quatro, quem vai ser o valor do meu “ y ”?

Aluna: Quatro.

Professora: Se eu tiver “ $x = -8$ ”, quem vai ser o valor do meu “ y ”?

Aluna: Quatro.

Professora: Se eu tiver o valor de menos um, quem vai ser “y”?

Aluno: Quatro.

Professora: Se eu tiver dez, quem vai ser “y”?

Aluna: Quatro.

Professora: O valor de “y” vai mudar?

Alunos: Não!

Professora: E quando o valor de “y” não muda, a função é o quê? [ninguém responde]
É uma função ... constante. E na função constante, o que acontece? [ninguém responde] A gente vai ter raiz aqui?

Aluna: Não.

Professora: A raiz fica aonde? No eixo?

Alunos: “x”.

Professora: Tem algum ponto aqui sobre o eixo “x”?

Alunos: Não!

Professora: Então, vai ter raiz? [ninguém responde] Não existe raiz. A gente tem o valor de “b”?

Aluna: Tem.

Professora: É qual?

Alunos: Quatro.

Professora: E o valor de “a”?

Aluna: Zero!

Professora: Quem vai ser a lei de formação da minha função? Desse gráfico?

Elba [ao quadro]: Quatro.

Professora: Por que é quatro? “ $f(x) = ax + b$ ”. Elba disse que o valor de “a” é quanto?

Aluno: Zero.

Professora: Zero vezes “x” mais... o valor de “b” que é?

Alunos: Quatro.

Professora: Zero vezes “x” igual a... zero, quem é que sobra? Quatro! Vamos ver se é possível descobrir a raiz. Quem é o valor de “b”?

Aluna: Quatro.

Professora: Menos quatro, e o valor de “a”?

Aluna: Zero.

Professora: Existe uma fração com denominador igual a zero? [ninguém responde]

A gente pode dividir algum número por zero?

Alunos: Não!

Professora: A gente sabe que não existe. Certo?

Alunos: Certo!

Professora: Quem é o próximo a vir ao quadro? Maria! [a aluna se dirige ao quadro]

Esse gráfico aqui vai ser o quê?

Maria: Decrescente.

Professora: Quais são os valores do gráfico aqui?

Aluna: “ a ” e “ b ”.

Professora: Tem certeza?

Maria: Tenho.

Professora: Não!

Maria: “ a ” e “ x ”.

Professora: Quem é o valor que fica sobre o eixo “ y ”?

Maria: “ b ”.

Professora: Então, coloca o valor de “ b ” aqui [apontando para a fórmula “ $x = -\frac{b}{a}$ ”]. E

quem é o valor que fica sobre o eixo “ x ”?

Maria: Dois.

Professora: E é o valor de quem esse dois?

Maria: Do “ x ”.

Professora: A gente chama de que esse pontinho aqui sobre o eixo “ x ”? [aluna não responde] Esse ponto “ b ” tem um nome, esse ponto “ x ” também tem um nome. Como é o nome do pontinho “ b ”? [ninguém responde] Qual é o nome desse ponto “ b ”?

Maria: Coeficiente linear... não, angular.

Professora: A gente aprendeu, quem é o coeficiente angular, quem é o coeficiente linear e quem é a raiz da função. Coeficiente angular, a gente chama de quem?

Maria: “ a ”.

Professora: Valor de “ a ”! Coeficiente linear?

Maria: “ b ”.

Professora: “ b ”. E a raiz da função?

Maria: “ x ”.

Professora: Então, “ b ” é o valor de quem? [ninguém responde] Quem é o meu coeficiente linear?

Alunos: “ b ”!

Professora: Que é igual a quê [no item em questão]?

Alunos: Seis!

Professora: E quem é a raiz da minha função?

Maria: “ x ”.

Professora: Que é o valor de quem aqui?

Maria: Dois. [A aluna vai anotando no quadro os valores correspondentes, substituindo-os na fórmula “ $x = -\frac{b}{a}$ ”]

Professora: Está faltando o valor de quem?

Maria: “ a ”.

Professora: Que a gente chama de?

Maria: Coeficiente angular.

Professora: Como é que a gente monta o gráfico? [ninguém responde] Tendo os valores do coeficiente linear e da raiz da função, como é que eu posso encontrar o meu coeficiente angular? [ninguém responde, enquanto isso, Maria vai fazendo os cálculos no quadro] Está correto assim?

Maria: Acho que sim.

Professora: “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. Você está me dizendo que “ x ” é seis e “ b ” é dois.

Maria: Eu ia colocar o seis dividido por dois.

Professora: Mas, aqui onde você substitui na fórmula, é ... “ $2 = -\frac{6}{a}$...” [a aluna havia confundido o valor do zero da função com o valor do coeficiente “ b ”]... Dois “ a ” igual a menos seis. O dois está multiplicando o “ a ”, vai passar a?

Alunos: Dividir!

Professora [explicando para Maria, que está ao quadro]: Então, a gente agora tem “ a ” igual a quem? Se ele está multiplicando, vai passar a dividir. Então agora temos “ a ” igual a menos seis sobre dois. Quanto é menos seis dividido por dois? Você tem seis canetas e vai dividir para você e Kátia [outra aluna da sala],... quanto é que fica a minha função? Primeiro ..., “ a ” vezes “ x ”... quem é o valor de “ a ”?

Maria: Menos três.

Professora: ... vezes “ x ”? Mais... o valor de “ b ”. Quem determina se o meu gráfico é crescente ou decrescente?

Aluno: “ a ”.

Professora: Quando o meu “ a ” é menor do que zero, meu gráfico é o quê? Por exemplo, aqui é menos três, meu gráfico é o quê?

Alunos: Decrescente.

Professora: E quando o meu “ a ” é maior do que zero... tem valor positivo?

Alunos: Crescente!

Professora: Gráfico 4 agora. Quem é que vem agora? [ninguém responde] Ruth! [A aluna se dirige ao quadro] Valor que está sobre o eixo “ y ”.

Ruth: Menos cinco.

Professora: Que é o valor de quem?

Ruth: De “ a ”?

Professora: Não.

Ruth: De “ b ”?

Professora: “ b ”, que a gente chama de? [ninguém responde] Coeficiente...?

Alunos: Linear.

Professora: E o valor que está sobre o eixo “ x ”?

Ruth: Menos um.

Professora: Que a gente chama de?

Alunos: Raiz da função.

Professora: A gente precisa descobrir o valor de quem?

Ruth: De “ a ”!

Professora: Se eu tenho o valor do coeficiente linear e da raiz da função, que fórmula eu posso usar para encontrar o coeficiente angular?

Ruth: Vai colocar menos um...

Professora: “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. Aí, substituindo os valores na fórmula, quem é o valor de “ x ”?

Ruth: Menos um.

Professora: Você vai substituir na fórmula agora, onde for “ x ”, você vai colocar menos um.

Ruth: Menos um igual, menos...

Professora: Quem é o valor de “ b ”?

Aluna: Menos cinco.

Professora: Aí, já tenho o menos... se eu colocar outro menos, fica o quê?

Ruth: Mais.

Professora: Sobre “ a ”, que é o valor que eu vou descobrir. [a aluna vai substituindo os valores na fórmula e fazendo os cálculos]... “ a ” vezes menos um?

Ruth: Menos um “ a ”.

Professora: Aí, a gente vai fazer relação de sinal agora: menos com menos?

Ruth: Mais.

Professora: Aí, eu vou ter cinco vezes um.

Ruth: Cinco.

Professora: Esse menos um aqui, está multiplicando vai passar a?

Ruth: Dividir. Cinco dividido pra um.

Professora: Para um, não.

Ruth: Menos um. Cinco dividido para menos um igual a... menos cinco.

Professora: “ $f(x) = ax + b$ ”. Agora você vai substituir os valores de “ a ” e de “ b ”.

Ruth: “ $f(x) =$ ” menos cinco mais menos um.

Professora: E agora, terminou? Preciso fazer a relação de sinal aqui [apontando para o quadro “ $[(+ (-1))]$ ”]... mais com menos?

Ruth: Menos.

Professora: Então, “ $f(x) = \dots$ ”?

Ruth: “ $f(x) = -5x + 1$ ”.

Professora: A gente fez a relação de sinal, mais com menos igual... menos. Então, menos um.

Ruth: “ $f(x) = -5x - 1$ ”.

Professora: Gráfico “5” agora, quem vem? [ninguém se habilita] chama Carol? [a aluna se esquiva, mas acaba se dirigindo ao quadro] Carol, quais os valores que temos aqui? [aluna não responde] Quem fica sobre o eixo “ y ”, é o valor de quem?

Alunos: “ b ”.

Professora: O valor de “ b ” vai ser? [ninguém responde] Está faltando o valor de quem?

Alunos: “ a ”.

Professora: A gente sempre está procurando o valor de?

Alunos: “ a ”!

Professora: A gente sempre está procurando o valor de “ a ”, porque no gráfico temos dois valores, que são?

Carol: “ b ” e “ x ”.

Professora: Então o “ x ” é quem?

Carol: Menos quinze.

Professora: Então, quem é que eu vou descobrir agora?

Carol: “ a ”.

Professora: Como é que eu posso descobrir o valor de “ a ”, se eu tenho os valores de “ b ”, meu coeficiente linear, e “ x ”, a minha raiz da função?

Carol: “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. [A aluna vai substituindo os valores na fórmula e respondendo à questão no quadro]

Professora: “ a ” vezes menos quinze?

Carol: Menos quinze “ a ”.

Professora: Menos com menos?

Carol: Mais.

Professora: Cinco vezes um?

Carol: Cinco.

Professora: Aí, o menos quinze está multiplicando o “ a ”, vai passar a?

Carol: Dividir.

Professora: “ a ” igual a cinco dividido por menos quinze.

Carol: “ a ” igual a menos cinco sobre quinze.

Professora: Mais com menos?

Carol: Menos.

Professora: “ a ” igual a... simplificando... um terço. Quem é a minha função nesse gráfico? Eu tenho ... o valor de “ a ” e “ b ”. “ $f(x)$ ” igual... o valor de “ a ” é quem?

Carol: Menos um terço.

Professora: “ $f(x)$ ” igual a menos um terço vezes “ x ”, mais o valor de “ b ”.

Carol: “ $f(x) = -\frac{1x}{3} + 5$ ”.

Professora: É difícil?

Carol: Não!

Professora: Gráfico “6”, quem vem? [o aluno Leonardo se levante e dirige-se ao quadro] No gráfico “6”, tem um ponto sobre o eixo “ y ” que é o ponto menos cinco, e sobre o eixo “ x ” tem um ponto entre menos três e menos dois. Que ponto é esse?

Leonardo: Menos um.

Professora: O ponto fica entre menos três e menos dois, que ponto é esse?

Leonardo: Menos dois e meio. [Anota o valor no quadro]

Professora: E em fração, como seria esse número?

Leonardo: Dois sobre cinco.

Professora: Quanto é dois dividido para cinco? [ninguém responde]

Professora: Zero vírgula quatro. Quem seria dois e meio em forma de fração?

Aluna: Dois vírgula cinco.

Professora: Não, dois vírgula cinco é em forma decimal. Eu quero em forma de fração... forma “ A ” sobre “ B ”, quem seria? [ninguém responde]

Aluna: Cinco sobre dois?

Professora: Cinco sobre dois. Porque cinco dividido para dois é dois vírgula cinco. E se eu perguntasse quem é quatro vírgula cinco em forma de fração?

Aluna: Nove sobre cinco.

Professora: Nove sobre dois, não é? Quando tiver um número como dois vírgula cinco, ou um vírgula cinco, ou três vírgula cinco, eu multiplico por dois. Por exemplo, dois vírgula cinco vezes dois?

Aluna: Cinco.

Professora: Cinco dividido pra dois é? [ninguém responde] Vamos lá, retomando, quem é o valor que fica sobre o eixo “ x ”?

Leonardo: Menos dois vírgula cinco.

Professora: Valor negativo. E o valor que fica sobre o eixo “ y ”? [Leonardo não responde] Menos cinco, é o valor de quem?

Leonardo: “ b ”.

Professora: Agora eu preciso encontrar o valor de quem?

Leonardo: “ a ”.

Professora: E, se eu tenho o valor do coeficiente linear e da raiz da função, como é que eu posso encontrar o valor do coeficiente angular? [ninguém responde] Vamos lá, de novo! Eu tenho o valor do coeficiente linear, que é “ b ”. Tenho o valor da raiz da função, que é “ x ”. Como é que eu faço para encontrar o valor do coeficiente angular, que é o meu “ a ”?

Leonardo [ao quadro]: Usando a fórmula.

Professora: Substituindo os valores... “ x ”? Valor de “ b ”!

Leonardo: Cinco.

Professora: E o menos, foi pra onde? [Leonardo corrige o valor no quadro para menos cinco] Aí, eu vou ter “ a ” multiplicando menos dois vírgula cinco? Menos com menos?

Leonardo: Mais.

Professora: Agora, menos dois vírgula cinco está multiplicando “ a ”, vai passar a?

Leonardo: Dividir.

Professora: “ a ” igual menos dois vírgula cinco estava multiplicando, passou... dividindo. Quanto é cinco dividido pra dois vírgula cinco?

Aluna: Dois.

Professora [perguntando para o aluno que está respondendo no quadro, Leonardo]: Concorda com ela?

Leonardo: Sim.

Professora: Então, vamos lá! Mais com menos?

Leonardo: Menos.

Professora: Cinco dividido pra dois vírgula cinco igual... dois. E agora, onde fica o menos? [Leonardo acrescenta o sinal de negativo]

Professora: Quem é o valor de “ a ” que você encontrou?

Leonardo: Menos dois.

Professora: “ $f(x)$ ” igual... valor de “ a ” vezes “ x ” mais valor de “ b ”. Faz o quê agora? Só relação de sinal, mais com menos...

Leonardo: Menos.

Professora: Pronto! “ $f(x) = -2x - 5$ ”! Gráfico “7”, alguém? Leonardo novamente? Pode vir!

Alunos: Não!

[Uma aluna diz que não entendeu a questão anterior, a professora explica novamente]

Professora [continuando]: Pronto! Agora, o gráfico “7”! Bora lá! Só tenho um ponto sobre o gráfico, que ponto vai ser esse?

Leonardo: Zero.

Professora: Zero. Ele vai ser o valor de quem? [Leonardo não responde] “ a ”, “ b ”, “ x ”? A gente tem o valor de “ b ”? [ninguém responde] Tem ou não? [ninguém responde] Tem algum ponto sobre o eixo “ y ”? [ninguém responde] Esse ponto aqui está sobre os dois eixos? Sim ou não?

Maria: Sim!

Ruth: Ô Rita [professora]! Esses números aí são só de enfeite?

Professora: Não! Esses números aqui querem dizer alguma coisa. Então, esse ponto aqui está sobre os dois eixos... a raiz da minha função é quem? [ninguém responde]
Quem seria o valor de “ b ”?

Leonardo: Zero [como não consegue resolver a questão, o aluno acaba retornando ao seu lugar].

Professora: Se eu substituísse esses valores agora: “ $f(x) = ax + b$ ”! Tem o valor de “ a ”?

Alunos: Não.

Professora: Tem o valor de “ x ”?

Alunos: Tem, zero!

Professora: Zero. Tem o valor de “ b ”?

Maria: Tem, zero.

Professora: E agora, como é que ficaria?

Maria: Tudo vai dar zero.

Professora: E agora? [ninguém responde] Quando “ x ” for um, “ y ” vai ser quanto?

Maria: Um.

Professora: Quando “ x ” for dois, “ y ” vai ser quanto?

Alunos: Dois!

Professora: Quando “ x ” for três?

Maria: Três.

Professora: Quando “ x ” for menos um?

Maria: Menos um.

Professora: Quando “ x ” for menos dois?

Maria: Menos dois.

Professora: Quando “ x ” for menos três?

Maria: Menos três.

Professora: Na folhinha de vocês, a gente tem uma função que é chamada de função identidade, e ela diz que o meu “ y ” é igual ao meu “ x ”. Ou seja, “ $f(x) = x$ ”. Função identidade, “ y ” igual a “ x ”. Um igual a um, dois de “ x ” igual a dois de “ y ”, três de “ x ” igual a três de “ y ”. Então quem seria o meu “ a ” e quem seria o meu “ b ”? [ninguém responde] Eu estou dizendo que “ $f(x) = x$ ”, então quem seria “ a ” e quem seria “ b ”? [ninguém responde] Na função identidade... olhem na folhinha de vocês, em casos

particulares, tem a função identidade. Quem seria o valor de “ a ” e quem seria o valor de “ b ”? [ninguém responde] Leonardo me disse que o valor de “ b ” é zero, então é o valor de quem agora?

Alunos: De “ a ”!

Professora: Quem vai ser o valor de “ a ”?

Maria: Um.

Professora: Um... Um vezes “ x ”?

Maria: Um “ x ”.

Professora: “ x ” mais zero?

Maria: “ x ”.

Professora: Gráfico 8, quem vem? Sílvia! Você tem dois pontos sobre o eixo “ y ” e sobre o eixo “ x ”. Quem é o pontinho que está sobre o eixo “ y ”?

Sílvia: “ b ”.

Professora: “ b ”, que é igual a quanto?

Sílvia: Menos um.

Professora: O ponto que está sobre o eixo “ x ”?

Sílvia: Um.

Professora: Um?

Sílvia: Zero vírgula cinco.

Professora: Que é o valor de quem?

Sílvia: “ x ”.

Professora: E agora falta o valor de quem?

Sílvia: “ a ”.

Professora: Como é que eu faço para encontrar o valor de “ a ” agora?

Sílvia: A fórmula.

Professora: Eu tenho dois valores, o valor de “ x ” e o valor de “ b ”. O valor da raiz da função igualo com o coeficiente linear, como vai ficar? [A aluna, Maria, vai substituindo os valores na fórmula e resolvendo o problema no quadro] “ a ” vezes zero vírgula cinco?

Sílvia: Zero vírgula cinco.

Professora: Zero vírgula cinco? Zero vírgula cinco “ a ” Menos com menos?

Sílvia: Mais.

Professora: Zero vírgula cinco está multiplicando “ a ”, agora passa?

Sílvia: Dividindo.

Professora: Quanto é que dá um dividido para zero vírgula cinco?

Sílvia: Zero vírgula cinco.

Professora: Tem certeza que é zero vírgula cinco?

Sílvia: Sim.

Aluna [outra]: Dois.

Professora: Dois vezes zero vírgula cinco?

Sílvia: Zero.

Professora: Zero vírgula cinco mais zero vírgula cinco?

Sílvia: Um.

Professora: Maria disse que é dois, não foi? Então quanto é dois vezes zero vírgula cinco, ou zero vírgula cinco mais zero vírgula cinco? [ninguém responde] Um dividido para zero vírgula cinco, é quanto?

Alunos: Dois.

Professora: Quem vai ser minha função? [Aluna responde no quadro] E agora? Relação de sinal... [Aluna conclui a resolução da questão no quadro]... Vamos lá, Daniela! [A aluna responde a questão sozinha no quadro] O valor de “ b ”, ela disse que é quem?

Aluno: Menos cinco.

Professora: O valor da raiz da função é dois vírgula cinco. Substituindo a fórmula, deu “dois vírgula cinco “ a ” igual a cinco. Dividiu e deu igual a dois, está correto?

Alunos: Sim!

Professora: Agora, é a vez de Andresa [a aluna se dirige ao quadro]. Quem é o valor da raiz da função?

Andresa: O valor de “ y ”.

Professora: Quem está sobre eixo “ y ”, o valor de “ a ”, “ b ” ou “ x ”?

Andresa: De “ b ”.

Professora: O valor que está sobre o eixo “ y ”, é quem?

Andresa: Menos três.

Professora: Menos três é o valor de quem?

Andresa: De “ b ”.

Professora: E “ b ”, a gente chama de quem?

Andresa: Coeficiente linear.

Professora: Quem é a raiz da função?

Sílvia: Não sei.

Professora: O ponto que está sobre o eixo “ x ”, está entre zero e um. Que ponto é esse? [Sílvia não responde] Na metade de zero e um.

Sílvia: Zero vírgula cinco.

Professora: Agora, como é que eu descubro o valor do coeficiente angular?

[Sílvia não responde] Se eu tenho o valor da raiz da função e o valor do coeficiente linear, eu posso substituir na fórmula “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. [A aluna substitui os valores na fórmula] Substitua o valor de “ x ”. Quem é o valor de “ x ”? Qual é o valor de “ b ”? [Aluna continua respondendo no quadro] Está faltando uma coisa... Tem um sinal na fórmula, depois da igualdade. A própria fórmula já tem um sinal. [A aluna tem dificuldade em resolver a questão] “ a ” vezes zero vírgula cinco igual a zero vírgula cinco “ a ”. Menos com menos?

Sílvia: Mais.

Professora: Está multiplicando, passa a dividir. “ a ” igual a três dividido para zero vírgula cinco. Quanto é três dividido para zero vírgula cinco?

Sílvia: Seis. [enquanto Sílvia finaliza a resolução, o aluno Leonardo se aproxima do quadro para fazer a questão seguinte]

Professora: A função é o quê? [referindo-se à questão “11”] Que função é aquela do gráfico “11”?

Ruth: Função constante.

Professora: Função constante... o valor de “ a ” vai ser igual a quanto?

Ruth: Zero.

Professora: Vai ter raiz, a função?

Alunos: Não!

Professora: E quem é o valor de “ b ”?

Ruth: Menos três.

Professora: Quem vai ser a função?

Ruth: “ f ” de “ x ” igual a “ x ” mais zero.

Professora: Mais zero?

Ruth: Igual a “ x ” mais “ b ”.

Professora: Zero vezes “ x ”?

Ruth: Zero.

Professora: Mais ou menos?

Ruth: Menos.

Professora: Quem é função desse meu gráfico? [ninguém responde e ela finaliza a resolução] Próxima questão! Ricardo! [o aluno se dirige ao quadro] Quem é o ponto sobre o eixo “ x ”? Não tem raiz. [o aluno vai respondendo no quadro] O “ b ” é quem?

Ricardo: Menos três.

Professora: É menos três. A minha função não tem raiz, então quem é que sobra?

Ricardo: “ b ”.

Professora: Menos três. Agora, é para descobrir o valor do “ a ”.

Ricardo: Esqueci a fórmula.

Professora: Quantas vezes eu trouxe essa fórmula aqui? Você tem o valor de “ a ”?

Ricardo: Não.

Professora: E por que você colocou no quadro? Vamos lá, “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. Eu tenho o valor de “ x ”?

Ricardo: Tem.

Professora: É quem? [Ricardo não responde]

Professora: Você tem o valor de “ x ”? [Ricardo sinaliza com a cabeça, que não] Eu tenho o valor de “ b ”?

Ricardo: Sim.

Professora: Eu tenho o valor de “ a ”?

Ricardo: Não.

Professora: E como é que fica a função? [o aluno tenta resolver...]

Ricardo: “ $f(x) = -3$ ”. [O mesmo aluno permanece no quadro para resolver a questão seguinte. Ele “retira” do gráfico os valores de “ x ” e de “ b ” e já começa a substituir na fórmula]

Professora: Agora, “ a ” vezes dois vírgula cinco?

Ricardo: Dois vírgula cinco “ a ”.

Professora: Menos cinco vezes um?

Ricardo: Menos cinco.

Professora: O dois vírgula cinco está multiplicando o “ a ”, agora passa?

Ricardo: Dividindo.

Professora: “ a ” igual a menos cinco...

Ricardo: “ a ” igual a menos cinco dividido por dois vírgula cinco.

Professora: Dá quanto?

Ricardo: Quanto?

Professora: Dois. Positivo é?

Ricardo: Sim.

Professora: Agora, monte a função. [algumas alunas ajudam o aluno a montar a função] Ele colocou aqui dois “ x ” menos cinco. “ $f(x) = 2x - 5$ ” (“ f ” de “ x ” igual a dois “ x ” menos cinco). Essa função aqui seria crescente ou decrescente?

Aluna: Decrescente.

Professora: A função está decrescente, o meu gráfico está decrescente. O valor do meu “ b ” aqui, está positivo ou negativo?

Ricardo: Negativo.

Professora: Então ele vai ficar acima ou abaixo de “ x ”?

Alunos: Abaixo.

Professora: Então, a função é decrescente.

Ruth: É menos dois “ x ”, Ricardo!

Professora: “ f ” de “ x ” é igual a menos dois “ x ” mais... o valor de “ b ”, que é cinco. E agora? [ninguém responde] O meu coeficiente angular está mesmo que o do meu gráfico. O valor do meu “ b ” está positivo, então está acima do eixo “ x ”. Na próxima aula, vamos descobrir a função a partir de dois pontos dados.

Sexto dia (31/08/2021): duas aulas

Professora: Vamos lá! [a professora constrói um esboço de gráfico no quadro, no qual os “pontos notáveis” não aparecem, aparecendo apenas outros dois pontos distintos] Quem são esses pontos?

Ricardo: Menos dois e dez!

Professora: E depois?

Ricardo: Um e quatro. Tá certo?

Professora: A gente quer o gráfico?

Maria: Não!

Professora: A gente quer a função... e como é que a gente determina essa função? Tem como a gente saber assim? Quando “ x ” for menos dois, “ y ” vai ser dez. E quando “ x ” for um, “ y ” vai ser quatro. Aí, a partir desses valores tem como eu determinar a

função? Como que é determinada a função afim? A definição de função afim... alguém sabe, alguém lembra?

Ricardo: “ f ” de “ x ” igual a “ ax ” mais “ b ”.

Professora: Esse “ $f(x)$ ” é igual também ao quê?

Ricardo: “ y ”.

Professora: “ $y = ax + b$ ”. Nesse meu par ordenado [apontando para o quadro], eu tenho os valores de quem? Aqui [apontando para o quadro], eu tenho o valor de “ x ”, e aqui o de “ y ” [referindo-se aos dois valores do par ordenado] Então, a partir desses dois pontos, o que eu posso fazer? “ y ”...

Aluno: Não sei o que fazer.

Professora: Não sabe? Aqui, no meu ponto “A”, nesse par ordenado, eu tenho um valor para “ x ” e outro valor para “ y ”. E aqui, na minha definição de função afim, eu tenho “ y ”, e tenho “ x ”. Eu posso usar esses dois valores de “ x ” e “ y ” na definição de função?

Alunos: Pode!

Professora: “A” [o ponto] é menos dois e dez. Ficaria como? Substituindo esses valores... Eu quero substituir esses valores, menos dois e dez, nessa equação... Podem falar!

Aluna: Dez, igual a menos dois “ a ” mais “ b ”.

Professora: Certo. E para “B” [o ponto], um e quatro.

Aluno: Quatro igual a um “ a ” mais “ b ”.

Professora: Então, encontrei uma equação para o ponto “A” e outra equação para o ponto “B”. O que eu tenho ali? Duas equações,... com duas incógnitas, né? O que eu faço?

Ricardo: Coloca uma embaixo da outra.

Professora: Qual é o nome? Menos dois “ a ” mais “ b ” igual a dez. E “ a ” mais “ b ” igual a quatro. Como é o nome? Sistema de...? Sistema de equações. Eu tenho um sisteminha de equações. Eu faço o quê? Qual a intenção disso? A gente soma os dois sistemas. Você escolhe o de cima ou o de baixo?

Aluna: O de baixo.

Professora: Você quer multiplicar por quanto?

Aluna: Menos um.

Professora: Menos dois “ a ” mais “ b ” igual a dez. Agora eu vou multiplicar: “ a ” vezes menos um? [na outra equação]

Aluna: Menos “ a ”.

Professora: “ b ” vezes menos um?

Aluna: Menos “ b ”.

Professora: E quatro vezes menos um?

Aluna: Menos quatro.

Professora: E agora o que eu faço? Eu vou somar as duas equações. O que acontece? Mais “ b ” com menos “ b ” dá igual a quanto?

Aluna: zero.

Professora: Menos dois “ a ”, menos “ a ”?

Alunos: “ a ”.

Professora: Se eu fizesse dois “ a ” mais “ a ”?

Alunos: Três “ a ”.

Professora: Se eu tivesse menos dois menos um.

Alunos: Menos três.

Professora: Sinais iguais o que eu faço?

Aluno: Positivo.

Professora: Não! Sinais iguais eu vou somar e repetir o sinal. Dois “ a ” mais “ a ”?

Alunos: Três “ a ”!

Professora: Menos dois “ a ” menos “ a ”... aqui dá menos três “ a ”. Menos três “ a ” é igual a dez menos quatro.

Alunos: Seis!

Professora: E agora? Como que o três fica?

Alunos: Passa dividindo.

Professora: Agora, eu tenho uma relação entre sinal. Mais por menos?

Alunos: Menos!

Professora: Seis dividido por três. Dois! E agora, que encontrei “ a ”, o que eu posso fazer? Não me olhem com essa cara de desespero não. O que eu faço para encontrar o “ b ”? Pode falar Daniela!

Daniela: Multiplicar por menos dois.

Professora: Ó, eu já tenho o valor de “ a ”. Se eu substituir em uma dessas equações será que eu encontro o “ b ”? Hein, Leonardo? Se eu usar o valor de “ a ” em uma dessas duas equações será que eu encontro o valor de “ b ”?

Leonardo: Sim.

Professora: Vocês acham que eu devo usar a primeira ou a segunda equação?

Alunos: A primeira.

Professora: A primeira é: menos dois “ a ” mais “ b ” igual a dez. A gente encontrou o valor de “ a ” igual a quanto?

Aluno: Menos dois.

Professora: Então onde for “ a ” eu vou usar quanto?

Alunos: Menos dois!

Professora: Menos dois vezes menos dois mais “ b ” igual a dez. Isolo o “ b ”... “ b ” igual a dez menos quatro. Quatro tá positivo, passa... negativo. Dez menos quatro, igual a seis. Então, eu tenho “ a ” igual a menos dois e “ b ” igual a seis. Agora, será que eu posso determinar a minha função? Como que vai ficar minha função desse gráfico aqui? Eu vou ter “ y ”, igual a quem? Agora eu tenho “ $ax + b$ ”. E eu vou substituir os valores de quem?

Alunos: “ a ” e “ b ”.

Professora: Então “ y ” vai ser igual a menos dois “ x ” mais seis. A função do gráfico dos pontos “ A ” igual a menos dois, dez e “ B ” igual a um e quatro é igual a “ y ” igual a menos dois “ x ” mais seis. Difícil?

Alunos: Muito!

Professora: Que fórmula eu uso para tirar a raiz da função? Já passei alguma vez?

Aluna: Não que eu lembre.

Professora: Eu preciso de fórmula para encontrar a raiz dessa função? Vamos lá! Eu tenho dois pontos aqui. Vocês perguntaram se tinha outra forma, eu disse que tem. Vocês têm uma simples fórmula que é igual “ $x = -\frac{b}{a}$ ”. Vocês não lembram dessa simples fórmula? Eu usei menos de dez vezes essa fórmula? E vocês não lembram? Estou indignada! Vocês vão aprender! Primeiramente, vocês já tinham que saber resolver esse sistema, que a gente já estudou isso aqui, esse ano... não é no ensino fundamental não,... foi esse ano! Mais um exemplo! [anota no quadro] E agora?

Ruth: Aí, já não basta ser complicado, ela coloca outra.

Professora: Eu não coloquei, eu peguei do livro.

Aluno: Eu não consigo decorar nenhuma fórmula.

Professora: Quem é o ponto “C”?

Aluna: Menos cinco e quatro.

Professora: O que eu posso fazer agora? Como é que eu resolvo?

Aluna: Tá complicado.

Professora: O que eu fiz nesse aqui? [referindo-se ao exemplo anterior.

Aluna: Você fez uma coisa.

Professora: Como é o nome dessa coisa que eu fiz? Substituí os valores de?

Alunos: De “y”.

Professora: De “x” e “y”. Então, para o ponto “C”, menos cinco e quatro...

Aluna: “y” é quatro é igual a menos cinco “a” mais “b”.

Professora: E o outro?

Aluna: Menos dez igual dois “a” mais “b”.

Professora: Muito bem! E agora?

Aluna: A gente encontrou as equações.

Professora: Montar o sistema de equações... Fica como?

Alunos: Menos cinco “a” mais “b” igual a quatro e dois “a” mais “b” igual a menos dez.

Professora: E agora? Como resolvo esse sistema. Tem como eu somar esses termos? Se eu multiplicar por menos um, eu já corto, né? Então, aqui em cima fica como? Dois “a” vezes menos um?

Aluna: Menos dois “a”.

Professora: “b” vezes menos um?

Alunos: Menos “b”!

Aluna: Não tô entendendo muito.

Professora: Ó, que sinal que é aqui?

Aluna: Positivo.

Professora: Então, mais com menos?

Alunos: Menos.

Professora: Dois “a” vezes um negativo?

Alunos: Menos dois “a”.

Professora: Mais vezes menos?

Alunos: Menos!

Professora: “b” vezes menos um?

Alunos: Menos “ b ”.

Professora: E agora? Menos vezes menos?

Alunos: Mais.

Professora: Dez vezes um?

Alunos: Dez positivo.

Professora: E agora? Vou somar as equações. O que eu faço agora? Menos cinco “ a ” menos dois “ a ”?

Aluna: Três “ a ”?

Professora: Não. Menos sete “ a ”. Sinais iguais eu faço o quê?

Aluna: Soma e repete o sinal.

Professora: E aqui, com o “ b ”? Mais “ b ” menos “ b ” dá quanto?

Aluna: Zero.

Professora: Preciso colocar?

Aluna: Não.

Professora: Aí, agora eu vou ter quatro mais dez. E agora? Como eu faço para resolver?

Aluno: Isola o “ a ”.

Professora: Como que eu faço?

Aluno: “ a ” igual a...

Professora: Vamos lá! Aqui, “ a ” igual, a quatorze dividido por menos sete?

Aluno: Dois.

Professora: Menos dois. E “ b ”, como encontramos?

Aluna: Pega a primeira [referindo-se à primeira equação do sistema]

Professora: Então, “ b ” é igual a quatro mais cinco “ a ”. Qual o valor de “ a ”?

Alunos: Menos dois.

Professora: “ b ” igual a quatro mais cinco vezes menos dois?

Alunos: Menos dez.

Professora: E agora?

Alunos: Quatro menos dez.

Professora: Quanto é quatro menos dez?

Alunos: Menos seis.

Professora: E agora?

Aluno: “ b ” é igual a menos seis.

Professora: E agora? Quem é a minha função? “ y ” é igual a menos dois “ x ” menos seis. O gráfico dessa função é crescente ou decrescente?

Alunos: Decrescente.

Professora: O valor do meu coeficiente angular ele tá positivo ou negativo?

Alunos: Negativo.

Professora: O valor do meu coeficiente linear, olha aqui,... negativo. Vou passar uma pra vocês fazerem... Como ainda faltam vinte minutos, dá tempo de vocês fazerem. Vou passar uma questãozinha dessa para vocês tentarem fazer. Vocês preferem que eu dê dois pontos, ou querem o gráfico?

Alunos: No gráfico é melhor.

[A professora anota dois exemplos no quadro um, dando dois pontos para encontrar a lei de formação da função e outro dando o gráfico para encontrar a lei de formação. Enquanto os alunos vão fazendo, a professora vai circulando entre as bancas].

[Após um tempo, a aula termina...]

Professora: Terminem em casa e enviem a foto no grupo [de *WhatsApp*].

Sétimo dia (10/09/2021): três aulas

[A professora inicia a aula entregando os livros didáticos (que ficam guardados na sala) aos alunos]

Professora: Vamos lá! Página cento e sete! Acompanhem o problema a seguir e a sua resolução: “Um taxista recebe três reais e sessenta centavos pela bandeirada e mais dois reais e vinte centavos por quilômetro rodado. Quantos quilômetros ele deve percorrer em uma única corrida, para ganhar pelo menos cinquenta reais? O que significa esse “pelo menos”?

Aluna: Aproximadamente.

Aluno: No mínimo cinquenta reais.

Aluna: O mínimo.

Professora: Para ganhar pelo menos cinquenta reais, ele tem que ganhar cinquenta reais ou mais, não é isso? Então, cinquenta reais... Pelo menos cinquenta reais. Aí ele diz: o total que o taxista recebe quando percorre “ x ” quilômetros em uma corrida, é dado pela expressão “ $T(x) = 2,20x + 3,60$ ”. O que significa cada coisa aqui nessa

expressão? Quem é que lembra? [ninguém responde] O “ T ” de “ x ” representa o que aqui nessa equação?

Aluno: O total.

Professora: Total de quê? [ninguém responde] O total de quê? A gente está falando de quê? [ninguém responde] A questão está falando de quê? Leiam a questão novamente! [Alunos leem a questão] Está falando de quê?

Aluno: De quilômetros.

Professora: Mas, o “ T ” de “ x ” está representando o quê? O total de quê?

Aluna: Reais.

Professora: Total de reais e o que mais?

Aluno: Que o taxista vai receber.

Professora: Então, o “ T ” de “ x ” representa o total de reais que o taxista vai receber. O “dois e vinte” representa o quê?

Aluna: Os quilômetros.

Professora: Quilômetros rodados?

Aluna: Sim.

Professora: Não. O dois e vinte representa o quê? [ninguém responde] O valor por quilômetro rodado... O “ x ”?

Alunos: Os quilômetros.

Professora: Os quilômetros rodados, que a gente não sabe quantos são. E o “três e sessenta”?

Alunos: A bandeirada.

Professora: Aí, o que ele quer saber? A pergunta dele é o quê? [ninguém responde] O que ele quer saber? A pergunta do começo: “Quantos quilômetros ele deve percorrer em uma única corrida, para ganhar pelo menos cinquenta reais? O que ele quer saber aqui, o “ T ” ou o “ x ”?

Aluno: “ x ”.

Professora: “ x ”. Ele quer saber quantos quilômetros ele precisa rodar em uma única corrida. E como é que a gente pode resolver isso? [ninguém responde] Essa minha igualdade aqui vai permanecer? [referindo-se à igualdade na expressão “ $T(x) = 2,20x + 3,60$ ”]

Aluna: Não.

Professora: Por que não vai permanecer? [ninguém responde] Se eu perguntasse assim: Quantos quilômetros ele precisa fazer em uma única corrida, para ganhar cinquenta reais? A igualdade ia permanecer lá?

Aluna: Sim.

Professora: Sim, né? Porque eu quero exatamente cinquenta reais. Mas, se eu disser “pelo menos”? O que eu devo fazer com essa igualdade?

Aluno: Substituir por maior ou igual.

Professora: Então ficaria: “ $T(x) \geq 2,20x + 3,60$ ” (“ T ” de “ x ” maior ou igual a dois e vinte “ x ” mais três e sessenta). Por que maior ou igual?

Aluno: Porque tem que ser um valor maior ou igual do que cinquenta.

Professora: Todo mundo concorda?

Alunos: Sim!

Professora: Como é o nome que eu dou a esse sinal de maior? [ninguém responde] Lembram quando a gente estudou conjuntos, que a gente estudou esses sinais aqui: maior que, menor que, maior ou igual e menor ou igual [anotando os símbolos no quadro]? E todos esses sinais representam o quê? [ninguém responde] Esse sinal representa o quê? [referindo-se à igualdade na expressão “ $T(x) = 2,20x + 3,60$ ”]

Aluna: Igual.

Professora: Igualdade. E esse daqui? [referindo-se à desigualdade na expressão “ $T(x) \geq 2,20x + 3,60$ ”]

Aluna: Desigualdade.

Professora: representa desigualdade. Então, toda vez que a gente estudar uma equação dada por desigualdade, a gente vai estar estudando uma inequação. Essa equação aqui, inicialmente, era do primeiro grau? Sim ou não?

Aluna: Não.

Professora: Não? Como é que a gente define uma função afim? [ninguém responde] Como é que a gente define uma função afim, ou uma função do primeiro grau? Quem é que lembra?

Aluna: “ f ” igual a “ ax ” mais “ b ”.

Professora: O meu “ a ” tem que ser o quê? Diferente de...?

Aluna: Zero.

Professora: Então, aqui a gente teria uma função do primeiro grau...? Teria, né? Então, com a igualdade, ela é uma função do primeiro grau. E com a desigualdade,

ela vai ser o quê? [ninguém responde] Com a desigualdade, ela passa a ser uma inequação. Como a gente resolveria essa inequação? [ninguém responde]

Professora: “Quantos quilômetros ele deve percorrer em uma única corrida, para ganhar pelo menos cinquenta reais? Como é que eu posso resolver? [ninguém responde] Ele me deu um valor, não deu?

Alunos: Sim.

Professora: Qual foi o valor que ele me deu? Ele tem que ganhar pelo menos quanto?

Alunos: Cinquenta.

Professora: Cinquenta vai ser o meu “ x ” ou o meu “ T ” de “ x ”?

Alunos: “ T ” de “ x ”.

Professora: Por quê? [ninguém responde] A gente está falando de quilômetros rodados ou de total a receber?

Aluno: Total.

Professora: Do total a receber em uma única corrida. Então se a gente está falando do total, cinquenta vai ser o meu “ T ” de “ x ”. Cinquenta vai ser maior ou igual? Assim? [anota no quadro]

Alunos: Sim.

Professora: Cinquenta maior ou igual a dois e vinte “ x ” mais três e sessenta. Está correto isso aqui?

Aluna: Sim.

Professora: Analisem aqui: aqui diz que cinquenta é maior ou igual a dois e vinte “ x ” mais três e sessenta. Ele está dizendo que o que ele ganhar aqui, será menor ou igual a cinquenta. Concordam ou discordam? Quem concorda? [alguns alunos levaram a mão]

Professora: E quem discorda? E aí? Cinquenta é maior ou igual a dois e vinte “ x ” mais três e sessenta? Não, né? E o meu “ T ” de “ x ”, tem que ser o quê? [ninguém responde] Menor ou igual... E agora, como é que eu resolvo?

Aluna: Isola o “ x ”.

Professora: Como é que eu posso isolar o “ x ”?

Aluna: Passa o dois e vinte para o primeiro membro.

Professora: Mas o “dois e vinte” está multiplicando o “ x ”, não posso tirar. Vamos lá, vamos trazer o dois e vinte “ x ” para o primeiro membro. Se ele está positivo, passa a ser?

Alunos: Negativo.

Professora: E agora? Três e sessenta menos cinquenta... E agora?

Aluna: Menos dois e vinte “ x ” igual...

Professora: Menos dois e vinte “ x ” menor ou igual a quanto? Quanto é três e sessenta menos cinquenta?

Aluno: Quarenta e seis e quarenta.

Professora: Assim, desse jeito?

Aluno: Negativo.

Professora: Por que negativo? [ninguém responde] Adição e subtração, sinais diferentes, eu subtraio e dou o sinal do maior valor. Quem é o maior valor, três e sessenta ou cinquenta?

Aluno: Cinquenta.

Professora: E agora, esse meu “ x ” aqui vai ficar negativo?

Aluna: Não.

Professora: Ele tem que ficar o quê?

Aluna: Positivo.

Professora: E como é que eu faço?

Aluna: Multiplica por menos um.

Professora: Menos dois e vinte “ x ” multiplicado por menos um..., dá quanto? Dois e vinte “ x ”. Menos quarenta e seis e quarenta multiplicado por menos um...?

Aluna: Quarenta e seis e quarenta.

Professora: Na inequação, quando eu multiplico ela por menos um, se o meu sinal está menor, eu tenho que inverter ele. Ele tem que ficar maior, e se ele tivesse maior, ele teria que ficar o quê? [ninguém responde] Ele estava menor ou igual, aí quando eu multiplico por menos um, ele fica?

Aluna: Maior ou igual.

Professora: Se ele tivesse maior igual, ele ficaria o quê?

Aluna: Menor ou igual.

Professora: E agora? O dois e vinte está multiplicando o “ x ”, passa a?

Alunos: Dividir.

Professora: “ x ” maior ou igual a quarenta e seis e quarenta dividido por dois e vinte, que dá quanto? [ninguém responde] Vinte e um vírgula zero nove. Então, isso quer dizer o que aqui? “ x ” maior ou igual a vinte e um vírgula zero nove? O que isso quer dizer? [ninguém responde] Pedro está dizendo que para ganhar pelo menos cinquenta reais, o percurso da corrida tem que ser superior a vinte e um vírgula zero nove, o quê?

Pedro: Quilômetros.

Professora: Concordam ou não?

Alunos: Sim.

Professora: Continuando: observamos assim que “ T ” de “ x ” maior ou igual a cinquenta, logo “ x ” maior ou igual a vinte e um vírgula zero nove. Portanto, para receber pelo menos cinquenta reais, o percurso da corrida deve ser superior a vinte e um vírgula zero nove quilômetros. Na prática, isso significa que o taxista deve percorrer pelo menos vinte e dois quilômetros. O que fizemos foi resolver uma desigualdade, envolvendo uma função afim. De modo geral, se “ y ” igual a “ $f(x)$ ” é uma função real, chamamos inequação a cada uma das seguintes desigualdades: “ f ” de “ x ” maior que zero; “ f ” de “ x ” menor que zero; “ f ” de “ x ” maior ou igual a zero; “ f ” de “ x ” menor ou igual a zero. Como é que a gente chama essas desigualdades? [ninguém responde] A gente chama de inequação. A cada uma dessas desigualdades, a gente chama de inequação. Continuando, página cento e oito: “dessa forma, sempre que “ $y = ax + b$ ”, uma função afim, uma inequação do primeiro grau é toda inequação redutível a uma das seguintes fórmulas: “ ax ” mais “ b ” maior que zero; “ ax ” mais “ b ” menor que zero; “ ax ” mais “ b ” maior ou igual a zero; “ ax ” mais “ b ” menor ou igual a zero. Como é que a gente chama isso aqui?

Alunos: Inequação.

Professora: Inequação do?

Alunos: Primeiro grau.

Professora: Em uma inequação do primeiro grau, os valores avaliados que transforma uma inequação em uma desigualdade verdadeira, recebe o nome soluções da inequação. O conjunto de todas as soluções de uma inequação é o conjunto solução “ S ” ou conjunto verdade dessa inequação. O processo de resolução de uma inequação do primeiro grau, envolve descobrir os valores de “ x ” para os quais “ ax ” mais “ b ” menor que zero, ou “ ax ” mais “ b ” menor ou igual a zero, ou “ ax ” mais “ b ”

maior que zero, ou " ax " mais " b " maior ou igual a zero, o que é chamado de estudo de sinais de uma função afim. Agora, a gente vai acompanhar algumas atividades resolvidas aqui do livro. Em que ano vocês aprenderam inequação do primeiro grau? [Alunos respondem] Resolução um, do livro, diz assim: "descubra os valores de " x ", para os quais a função " f " de " x " igual a três " x " mais um maior ou menor que zero. Como é que a gente pode resolver? " f " de " x " igual a três " x " mais um, como é que a gente resolve? Se eu quisesse saber quem é a raiz ou o zero dessa minha função, como é que eu faria? [ninguém responde] Leonardo, como é que eu posso resolver ou encontrar a raiz? Sem usar a fórmula. [Leonardo não responde] Não é possível que vocês não sabem! [silêncio na sala] Sem usar a fórmula, como é que a gente pode encontrar a raiz ou o zero da função? [ninguém responde] Igualando a minha equação a zero. O meu " f " de " x " igual a zero. Então, três " x " mais um igual a zero. E agora, como é que eu resolvo?

Aluna: Isola o " x ".

Professora: Como eu posso isolar o " x "?

Aluna: Passa o um para o outro lado.

Professora: O um está no primeiro membro, passa para o segundo membro. Se ele está positivo, vai ficar?

Alunos: Negativo.

Professora: Então, três " x " igual a menos um. " x " igual a menos um terço. Mas, é isso o que ele pede na questão? [ninguém responde] O que ele pede? Que o valor de " x " seja maior ou menor do que zero. Então, quando " f " de " x " igual a zero, " x " igual a menos um terço. Quando " f " de " x " é maior do que zero, o que acontece aqui?

Aluno: O " x " vai ser positivo.

Professora: Três " x " mais um maior que zero. Como é que eu resolvo? [ninguém responde] A gente acabou de resolver aqui. Só porque a gente trocou a igualdade por uma desigualdade, vocês deixaram de saber?

Aluno: É só fazer a mesma coisa.

Professora: Então se aqui é igual, e aqui agora eu troquei por maior, vai ser como? Meu " x " vai ser o quê?

Aluna: Maior.

Professora: Maior que o quê?

Aluna: Menos um terço.

Professora: Então, quando o meu " f " de " x " for maior que zero, meu " x " vai ser?

Alunos: Maior que menos um terço.

Professora: Quando o meu " f " de " x " for menor que zero, o que acontece?

Aluna: Vai ser menor que menos um terço.

Professora: O meu " x " vai ser menor que menos um terço. Qual foi o meu modo de resolução aqui? [ninguém responde] O meu modo de resolução foi algébrico ou gráfico?

Aluna: Algébrico.

Professora: E a gente pode resolver graficamente?

Aluna: Pode.

Professora: Como a gente pode resolver graficamente?

Aluno: Faz o gráfico.

Professora: Venha fazer no quadro! [o aluno se recusa] Qual o ponto que vai ficar no meu eixo " y "? [ninguém responde] Eu tenho três " x " mais um... qual o valor que fica no meu eixo " y "?

Aluna: Um.

Professora: É positivo ou negativo?

Aluna: Positivo.

Professora: Vai ficar acima ou abaixo de " x "?

Aluna: Acima.

Professora: E quem foi a raiz da minha função?

Aluna: Menos um terço.

Professora: Menos um terço fica entre menos um e?

Alunos: Zero.

Professora: O meu gráfico vai ser crescente ou decrescente?

Alunos: Crescente.

Professora: O três aqui [apontando para a expressão da função], a gente chama de quem? [ninguém responde] Coeficiente...?

Aluna: Angular.

Professora: Ele está positivo ou negativo?

Aluno: Positivo.

Professora: Se ele está positivo, o meu gráfico vai ser o quê?

Aluno: Crescente.

Professora: Se o meu " a " fosse negativo, a reta do meu gráfico seria o quê?

Alunos: Decrescente.

Professora: Terminei aqui o meu gráfico?

Alunos: Não.

Professora: O que falta? [ninguém responde] Eu só fiz o gráfico da minha função. Mas, o que eu quero fazer? Eu quero resolver a minha inequação graficamente, e o que é que está faltando? [ninguém responde] Esses valores destacados em roxo, [referindo-se ao trecho do esboço gráfico destacado nessa cor] representam o quê?

Aluno: Os valores de " x ".

Professora: Mas, representa o quê?

Aluno: Maiores do que menos um terço.

Professora: E em verde [referindo-se ao trecho do esboço gráfico destacado nessa cor] aqui, representa o quê?

Aluno: Menores do que menos um terço.

Professora: Os valores de " x " menores do que menos um terço. E quando é que isso acontece? Quando o meu " x " é menor do que menos um terço?

Aluno: Quando " f " de " x " é menor do que zero.

Professora: E aqui, o que acontece? [referindo-se à outra parte do gráfico, destacada na cor verde]

Aluna: " f " de " x " é maior do que zero.

Professora: Vocês percebem isso aqui só em olhar para o gráfico? Sim ou não?

[Alguns alunos respondem que "sim", outros, que "não"] Vamos lá! Se o meu " y " fosse zero vírgula um, o meu " x " seria maior ou menor que menos um terço? [ninguém responde] Zero vírgula um, aqui, vai ficar depois de menos um terço, na esquerda, ou à direita?

Alunos: À direita.

Professora: Então, ele vai ser maior ou menor que menos um terço?

Alunos: Maior.

Professora: Se o valor do meu " y " fosse quatro. O meu " x " seria o que, maior ou menor que menos um terço?

Alunos: Maior.

Professora: E se o meu " y " fosse menos um, o que aconteceria com o meu " x "? Ia ser o quê?

Alunos: Menor.

Professora: Se fosse menos cinco, ia ser o quê? Menor ou maior?

Alunos: Menor.

Professora: Conseguiram entender? Sim ou não?

Alunos: Sim.

Professora: Orisvaldo, me dê um exemplo de uma função do primeiro grau!

Orisvaldo: " f " de " x " igual a cinco " x " mais sete.

Professora: Quem seria a raiz dessa função?

Orisvaldo: " f " de " x " igual a cinco " x " mais sete igual a zero.

Professora: E agora? Cinco " x " igual a menos sete.

Orisvaldo: " x " igual a menos sete sobre cinco.

Professora: Se o meu " f " de " x " for maior que zero, o que acontece?

Orisvaldo: " x " vai ser maior que menos sete sobre cinco.

Professora: E se o meu " f " de " x " for menor que zero?

Orisvaldo: " x " vai ser menor que menos sete sobre cinco.

Professora: E, graficamente como é que vai ficar? Qual o valor que fica aqui no eixo " x "? [ninguém responde] O ponto aqui, que fica sobre o eixo " x ", a gente chama de quê?

Aluno: Raiz.

Professora: Então, se é a raiz... quem é o valor do eixo " x "?

Aluno: Menos sete sobre cinco.

Professora: Vai ser à direita ou à esquerda de " y "?

Aluno: Esquerda.

Professora: Por quê?

Aluna: Porque é negativo.

Professora: Qual vai ser o valor sobre o eixo " y "?

Aluna: Sete.

Professora: Acima ou abaixo de " x "?

Aluna: Acima.

Professora: Por quê?

Aluna: Porque é positivo.

Professora: E agora? A reta do meu gráfico vai ser crescente ou decrescente?

Alunos: Crescente.

Professora: Kátia! Se o valor de “ x ” fosse maior que menos sete sobre cinco, o que aconteceria com o valor do meu “ y ”? Do meu “ f ” de “ x ”? [Aluna calada] Imagine que o valor dele seja dez, é um número maior que menos sete sobre cinco, certo? Se dez é um valor maior que menos sete sobre cinco, o que acontece aqui no gráfico? O valor de “ y ” vai ser o quê? [Aluna calada] O valor do “ f ” de “ x ” vai ser o quê? [Aluna calada] Maior ou menor do que zero?

Kátia: Maior.

Professora: Então, o meu “ f ” de “ x ” vai ser maior do que zero. Sílvia, se o valor do meu “ x ” for menor do que menos sete sobre cinco, o que acontece com o valor do meu “ y ”? [Aluna calada] Kátia acabou de responder uma coisa semelhante. [Alunos calados] “ f ” de “ x ” menor do quê?

Alunos: Zero.

Professora: Se o valor do meu “ x ” for um valor menor do que menos sete sobre cinco, o valor do meu “ f ” de “ x ” vai ser o quê? Vamos supor que fosse menos sete, o meu “ y ” ia ser o quê?

Alunos: Menor que zero.

Professora: Conseguiram entender? Sim ou não?

Alunos: Sim.

Professora: Agora, tentem resolver a inequação dois “ x ” menos oito maior que zero. [depois de um tempo, a professora retoma] Marina, como é que eu posso resolver? [Aluna calada] Está pedindo o que aqui? Os valores o quê?

Marina: Maior.

Professora: Maior que zero. Aí, vocês vão resolver algebricamente ou graficamente?

Aluno: Algebricamente.

Professora: Agnes me perguntou anteriormente “tem como eu fazer isso aqui graficamente, sem fazer nenhum cálculo?”. No gráfico a gente sabe que a gente tem que ter o valor do quê? Da raiz! Tem como eu calcular a raiz sem fazer cálculo?

Alunos: não.

Professora: Então, tem que fazer pelo menos o cálculo da raiz.

Agnes: Pode fazer o cálculo da raiz mentalmente e resolver graficamente?

Professora: Pode, só basta está certa a raiz. Na prova, se você fizer o cálculo mentalmente e o gráfico certinho, está certo. Então, mentalmente, quem seria a raiz?

Agnes: Quatro.

Professora: Passaria positivo, né? O dois está multiplicando, passa dividindo, então eu tenho “ x ” igual a oito dividido por dois... “ x ” igual a quatro. O meu coeficiente linear quem seria?

Agnes: Menos oito.

Professora: A reta é crescente ou decrescente?

Alunos: Crescente.

Professora: Ele quer os valores de “ x ” maiores que o quê? Maiores que... quatro. Então eu vou destacar os valores maiores ou menores que zero?

Agnes: Maiores.

Professora: “ x ” maior que quatro.

Agnes: Pode fazer assim na prova? [referindo-se ao cálculo mental da raiz]

Professora: Pode sim! Meu “ f ” de “ x ” aqui vai ser o quê?

Agnes: Maior.

Professora: “ f ” de “ x ” maior que zero. Assim está resolvido graficamente, e algebricamente?

Agnes: Dois “ x ” menos oito maior que zero.

Professora: E depois?

Agnes: Dois “ x ” maior que oito... “ x ” maior que oito...

Professora: O dois está multiplicando, passa?

Agnes: Dividindo.

Professora: “ x ” maior que quatro. Terminei?

Alunos: Não.

Professora: Falta o que aqui? Solução de quê? [ninguém responde] A solução, como ficaria? [ninguém responde] O grupo 1 lembra? O grupo 2 lembra disso aqui. A gente viu em conjuntos. Notação de chaves e notação de intervalo, eu quero as duas: notação de chaves!

Alunos: “ x ” pertencente aos reais, tal que “ x ” maior que quatro.

Professora: E se fosse em intervalo? Se fosse em intervalo?

Aluna: Quatro aberto e infinito aberto.

Professora: Positivo, né? Lembram de polinômios? Vou só explicar essa parte para vocês, para passar uma atividade para vocês... [A professora vai até o quadro e desenha ilustrações de intervalos] Esses valores aqui, a gente conhece eles ou não? [referindo-se aos trechos dos intervalos além dos valores algébricos “marcados”]

Alunos: Não.

Professora: Então a gente chama de quem?

Alunos: Infinito.

Professora: Aqui, o meu " a " [ponto algébrico marcado no intervalo], ele tá maior ou menor que o valor " x "?

Aluno: Tá menor.

Professora: Aí, se tá aberto, vai ser menor ou menor igual?

Aluno: Oi?

Professora: Aí, se tá aberto, vai ser menor ou menor igual?

Aluno: Menor.

Professora: Então, o meu " a ", vai ser menor. Assim, ou " x " menor que " a ". E aqui? " a " seria menor ou igual, porque tá fechado, né? Então, o meu " x ", vai ser maior ou igual a...

Alunos: " a ".

Professora: Aqui, agora! [apontando para outro exemplo ilustrado]

Alunos: " a " maior que " x ".

Professora: E o " x " seria o quê? " x " menor que " a ". Aqui, agora...

Aluno: " x " menor igual a " a ".

Professora: Agora, se eu quiser as notações, em chaves?

Alunos: " x " pertence aos reais, tal que " x " maior que " a ".

Professora: E em intervalos? Quem vem primeiro aqui, são os valores " x " ou o " a "?

Alunos: " a ".

Aluno: Nunca vi isso!

Professora: Nunca viu isso? Primeiro bimestre a gente estudou isso. Ó, primeiro vem o valor de " a ". O primeiro intervalo vai ser aberto ou fechado?

Aluno: Aberto.

Professora: E o infinito vai ser o quê?

Aluna: Aberto.

Professora: Positivo ou negativo?

Aluna: Positivo.

Professora: Aqui, agora...

Aluno: Fechado em " a ".

Aluna: Aberto em " x ".

Professora: E a notação de chaves?

Aluno: “ x ” pertence aos reais, tal que “ x ” maior ou igual a “ a ”.

Professora: Essa aqui, agora?

Aluno: Aberto.

Professora: Quem vem primeiro agora?

Aluno: Infinito, negativo.

Professora: Que mais?

Aluno: “ a ”, aberto.

Professora: Chaves!

Aluno: “ x ” pertence aos reais, tal que “ x ” menor que “ a ”.

Professora: Esse aqui agora, intervalo! Quem vem primeiro?

Aluno: “ x ”.

Professora: Aberto ou fechado?

Aluno: Aberto.

Professora: E o “ a ”? Aberto ou fechado?

Aluno: Fechado.

Professora: Chaves!

Aluna: “ x ” pertence aos reais, tal que “ x ” menor ou igual a “ a ”.

Professora: Agora, página cento e nove, questão trinta e oito e trinta e nove. [alunos começam a fazer e a professora fica circulando pela sala, passando de banca em banca]

Oitavo dia (14/09/2021): duas aulas (aula de revisão)

Professora: O que é uma função afim ou uma função do primeiro grau? [ninguém responde] Quem lembra? É uma função definida por quem?

Aluno: “ f ” de “ x ”.

Professora: E o que mais?

Alunos: “ ax ” mais “ b ”.

Professora: E o que mais? Com “ a ” diferente de?

Alunos: Zero.

Professora: Dados dois números reais “ a ” e “ b ”, com “ a ” diferente de zero, denomina-se função do primeiro grau ou função afim a função que é definida de R em R . O que é R em R ? Quem lembra?

Aluno: Reais em reais.

Professora: O que isso quer dizer?

Alunos: O conjunto dos reais.

Professora: O que mais? O domínio está em quem? Em R , o contradomínio está em R e a imagem está em R . Tal que “ f ” de “ x ” igual a “ ax ” mais “ b ”. Ó, se “ b ” igual a zero, “ f ” de “ x ” igual “ ax ”. Que é denominado o quê? Quando “ f ” de “ x ” é igual “ ax ” ou quando “ y ” é igual “ ax ”? Primeira particularidade, se “ b ” é igual a zero, “ f ” de “ x ” é igual a “ ax ” ou “ y ” é igual a “ ax ”. O que isso quer dizer? Vocês já esqueceram de tudo? Ela é denominada uma função... linear. Se “ f ” de “ x ” é igual a cinco “ x ”, e quando “ x ” for um, “ f ” de “ x ” vai ser quanto? Se “ f ” de “ x ” é igual a cinco “ x ”, e quando “ x ” for um, “ y ” vai ser quanto? Se “ x ” for um, “ y ” vai ser quanto? Vai ser quanto? Se “ x ” for um, “ y ” vai ser quanto? Já esqueceram? [A professora anota o exemplo no quadro] Cinco vezes menos um?

Aluna: Menos cinco.

Professora: Cinco vezes zero?

Aluna: Zero.

Professora: Cinco vezes um?

Aluno: Cinco.

Professora: Cinco vezes dois?

Aluna: Dez.

Professora: Se “ x ” for menos um, “ y ” vai ser quanto?

Alunos: Menos cinco.

Professora: Se “ x ” for zero?

Aluno: Zero.

Professora: Se “ x ” for um?

Alunos: Cinco.

Professora: Se “ x ” for dois?

Alunos: Dez.

Professora: Se caísse uma questão dessa na prova amanhã, vocês não iam saber disso?

Alunos: Não.

Professora: Parabéns! Se “ f ” de “ x ” for igual a “ x ”, o que acontece se “ x ” for um?
[Alunos sussurram] É o quê?

Aluno: Cinco.

Professora: A gente tá falando dessa aqui agora [apontando para o quadro]... “ f ” de “ x ” igual a “ x ”. O que acontece se “ x ” for um? “ y ” vai ser quanto? Vai ser uma função “ f ” de “ x ” igual a “ x ”.

Alunos: Um.

Professora: Se “ x ” for zero?

Alunos: Zero.

Professora: Se “ x ” for dois?

Alunos: Dois.

Professora: Se “ x ” for mil?

Alunos: Mil.

Professora: Difícil? Entenderam? Segunda particularidade... Se “ a ” é igual a um, e “ b ” igual a zero, é denominada por função identidade... “ f ” de “ x ” igual a “ x ”. Lembram que a gente estudou função identidade? Sim ou não?

Alunos: Sim!

Professora: O que quer dizer a identidade de vocês? Para comprovar que você é você, né? E aqui, “ f ” de “ x ” igual a “ x ”?

Alunos: Que “ y ” é igual a “ x ”, e “ x ” é igual a “ y ”.

Professora: Se “ x ” for menos um, “ y ” vai ser menos um, se “ x ” for zero, “ y ” vai ser zero, se “ x ” for um, “ y ” vai ser um, se “ x ” for dois, “ y ” vai ser dois. Entenderam o que é uma função identidade?

Aluno: Sim.

Professora: Então, me diga aí o que é uma função identidade.

Aluno: É aquela em que “ y ” é igual a “ x ”, e “ x ” igual a “ y ”.

Professora: Agora, vamos analisar essas duas funções aqui [exemplos no quadro]... “ f ” de “ x ” igual a dois “ x ” mais um, e “ t ” de “ x ” igual a menos dois “ x ” mais um. Qual a diferença entre essas duas funções aí?

Alunos: Uma é positiva e outra negativa.

Professora: O que é positivo nessa função?

Aluno: Dois “ x ” mais um.

Professora: E o dois representa o quê? Quem lembra?

Aluno: O “ a ”.

Professora: E o “ a ” gente chama de quê?

Aluna: Coeficiente angular.

Professora: E o um, representa o quê?

Aluno: O “ b ”.

Professora: E o “ b ” a gente chama de quê?

Aluna: Coeficiente linear.

Professora: O que é que difere essas duas funções? No começo Pedro falou, uma é positiva outra é negativa. O que é positivo e o que é negativo? Vocês acabaram de me falar, que o dois representa o “ a ” e o um representa o “ b ”. Então, o que é positivo e o que é negativo?

Alunos: O “ a ”.

Professora: Que é quem? Coeficiente... angular. Isso aqui interfere em alguma coisa na função? O “ a ” interfere em alguma coisa?

Pedro: Interfere.

Professora: Em quê?

Alunos: No resultado.

Professora: Só no resultado? Vocês não me responderam ainda, o que o “ a ” determina na função?

Alunos: Para saber se o gráfico é crescente ou decrescente.

Professora: pra que Leonardo?

Leonardo: Para saber se o gráfico é crescente ou decrescente.

Professora: Determina se a reta do meu gráfico vai ser crescente ou decrescente. Só Leonardo que lembrou? Vamos analisar isso. Quando “ x ” for menos três, “ f ” de “ x ” vai ser quanto? Na primeira... “ f ” de “ x ” a gente tem, duas vezes menos três...

Alunos: Menos seis.

Professora: Menos seis mais um?

Alunos: Menos cinco.

Professora: Menos seis mais um, uma subtração com sinais diferentes, subtrai e dá o sinal do maior. Quem é o maior?

Alunos: Seis.

Professora: Subtraindo, seis menos um?

Alunos: Menos cinco.

Professora: Quando “ x ” for menos dois, agora... “ f ” de “ x ” vai ser quanto? A gente vai ter duas vezes menos dois, que dá quanto?

Alunos: Menos quatro.

Professora: Menos quatro mais um?

Alunos: Menos três.

Professora: Quando “ x ” for menos um, “ f ” de “ x ” vai ser quanto? Duas vezes menos um?

Alunos: Menos dois.

Professora: Menos dois mais um?

Alunos: Menos um.

Professora: Quando “ x ” for zero? Duas vezes zero mais um?

Alunos: Um.

Professora: Duas vezes um?

Alunos: Dois.

Professora: Dois mais um?

Alunos: Três.

Professora: Duas vezes dois?

Alunos: Quatro.

Professora: Quatro mais um?

Alunos: Cinco.

Professora: Duas vezes três?

Alunos: Seis.

Professora: Mais um?

Alunos: Sete.

Professora: Agora a gente vai ver “ t ” de “ x ”... Que é menos dois “ x ” mais um. Menos dois vezes menos três mais um? Menos com menos?

Alunos: Mais.

Professora: Duas vezes três?

Alunos: Seis.

Professora: Seis mais um?

Alunos: Sete.

Marina: Não entendi nada.

Professora: Não entendeu nada Marina?

Marina: Essa parte daí não.

Professora: Só entendeu até “ t ” de “ x ”? Mas qual foi a diferença aqui? Ó, o “ f ” de “ x ” é igual a dois “ x ” mais um [referindo-se ao exemplo anterior]. E agora, “ t ” de “ x ” é igual a menos dois “ x ” mais um. A gente não pode esquecer do sinal aqui. Menos dois, vezes o valor de “ x ” atribuído, que foi menos três mais um. Menos com menos?

Alunos: Mais.

Professora: Duas vezes três?

Alunos: Seis.

Professora: Mais um?

Alunos: Sete.

Professora: Próximo valor, quem é? Menos dois. Menos dois vezes menos dois mais um. Menos com menos?

Alunos: Mais.

Professora: Dois vezes dois?

Alunos: Quatro.

Professora: Quatro mais um?

Alunos: Cinco.

Professora: Quando for menos um, agora. Menos com menos?

Alunos: Mais.

Professora: Dois vezes um?

Alunos: Dois.

Professora: Dois mais um?

Alunos: Três.

Professora: Agora, menos dois vezes zero?

Alunos: Zero.

Professora: Zero mais um?

Alunos: Um.

Professora: Menos dois vezes um?

Alunos: Dois.

Professora: Vamos de novo, fazer a relação do sinal. Menos com mais?

Alunos: Mais.

Professora: Menos com mais?

Alunos: Menos.

Professora: Duas vezes um?

Alunos: Dois.

Professora: Menos dois mais um?

Alunos: Menos um, menos dois.

Professora: Menos dois ou menos um?

Alunos: Menos um.

Professora: Ó, sinais, diferentes, subtrai e repete o sinal do maior. Quem é o maior número?

Alunos: Dois.

Professora: Menos dois vezes dois?

Alunos: Menos quatro.

Professora: Menos quatro mais um?

Alunos: Menos três.

Professora: Menos dois vezes três?

Alunos: Menos seis.

Professora: Menos seis mais um?

Alunos: Menos cinco.

Professora: O que vocês percebem nessas duas funções? O que vocês conseguem analisar por meio dessas tabelas? Conseguem analisar nada?

Agnes: “ t ” de “ x ” é a mesma coisa que “ f ” de “ x ” só que ao contrário.

Professora: Vamos lá, ver o que Agnes quis dizer... Quando “ x ” foi menos três, o “ f ” de “ x ” foi menos cinco. Quando “ x ” foi menos três, o “ t ” de “ x ” foi cinco. Quando os sinais foram opostos, eles, foram se igualando. Só o zero que foi igual. Quando o “ x ” foi três, o “ t ” de “ x ” foi sete. Quando foi menos três, o “ f ” de “ x ” foi sete. Por que isso aconteceu? Foi por causa dos valores de “ x ”? Foi? Sim ou não? Eu vou dá um ponto extra pra prova!

Alunos: Sim.

Professora: Por quê?

Aluna: Foi não. Foi por causa dos sinais.

Professora: O sinal de que, especificamente? Tá valendo um ponto extra ainda, viu!

Aluno: De “ f ” de “ x ”?

Professora: Não. De quem, Daniela?

Daniela: Porque o sinal tá negativo e o outro tá positivo.

Professora: Quem tá positivo e negativo?

Daniela: O dois “ x ”.

Professora: Quem é?

Daniela: O “ a ”. O valor do coeficiente angular.

Professora: No “ f ” de “ x ” tá positivo e no “ t ” de “ x ” tá negativo. E o coeficiente aqui, não mudou. Se aqui fosse, três “ x ” e menos três “ x ”, aconteceria a mesma coisa?

Alunos: Não.

Professora: Se aqui fosse, três “ x ” e menos três “ x ”, aconteceria a mesma coisa?

Alunos: Aconteceria.

Professora: Só não daria os mesmos valores, mas aconteceria essa coincidência. Menos cinco com menos cinco, menos três com menos três... Se eu pedisse para montar o gráfico, o que vocês acham que seria diferente nessas duas?

Aluna: Uma é crescente e a outra decrescente.

Professora: Quais são os valores que a gente atribuiu para “ x ”?

Aluna: Menos três, menos dois, menos um, zero, um, dois e três.

Professora: Vamos fazer primeiro para “ f ” de “ x ”. Quando “ x ” foi menos três, “ y ” foi quanto?

Alunos: Menos cinco.

Professora: Quando “ x ” foi menos dois?

Alunos: Menos três.

Professora: Quando “ x ” foi menos um?

Alunos: Menos um.

Professora: Quando “ x ” foi zero?

Alunos: Um.

Professora: Quando “ x ” foi um?

Alunos: Três.

Professora: Quando “ x ” foi dois?

Alunos: Cinco.

Professora: Quando “ x ” foi três?

Alunos: Sete.

Professora: Dá pra traçar esse gráfico?

Alunos: Sim. [A professora faz o esboço do gráfico no quadro]

Professora: Vamos fazer o outro agora. Quando “ x ” foi menos três, “ t ” de “ x ” foi quanto?

Alunos: Sete.

Professora: Quando “ x ” foi menos dois?

Alunos: Cinco.

Professora: Quando “ x ” foi menos um?

Alunos: Três.

Professora: Quando “ x ” foi zero?

Alunos: Um.

Professora: Quando “ x ” foi um?

Alunos: Menos um.

Professora: Quando “ x ” foi dois?

Alunos: Menos três.

Professora: Quando “ x ” foi três?

Alunos: Menos cinco.

Professora: E aí, o que coincide nesses dois gráficos? Tem alguma coisa coincidente nesses dois?

Alunos: O número um.

Professora: O número um que representa o que, Orisvaldo? Quem é o ponto que fica sobre o eixo “ y ”?

Alunos: Zero.

Professora: Zero?

Alunos: Um.

Professora: É um, mas ele é quem? O “ b ”, né? E o “ b ” é quem?

Alunos: Coeficiente linear.

Professora: Quer dizer que se uma dessa cair na prova, vocês não sabem?

Alunos: Não.

Professora: A prova já tá pronta! Dez questõezinhas bem simples. Ó, o gráfico de uma função afim... Vocês lembram quando a gente estudou aqui do ângulo? [referindo-se ao ângulo formado pela representação da reta, gráfico da função, e o eixo “ x ” do plano cartesiano] Eu falei o que do ângulo? O ângulo menor que noventa graus, ele é crescente.

Alunos: Se for maior, é decrescente.

Professora: “Teta” aqui, é um símbolo que a gente chama de ângulo, é a inclinação da reta e a tangente de teta é igual a “ a ”. O que é o “ a ”?

Alunos: Coeficiente angular.

Professora: A inclinação da reta e a tangente de teta é igual a " a ", é a taxa de variação, é o coeficiente angular. Mais na frente, no segundo ano, quando a gente for estudar detalhadamente o estudo da reta, vocês vão ver que o coeficiente angular é também igual a tangente do ângulo. Então, a minha função é crescente quando a taxa de variação, a minha tangente é positiva, o " a " for maior que zero. E quanto que ele vai ser decrescente?

Alunos: Quando o ângulo for maior que noventa graus.

Professora: E o que mais? Quando " a " for o quê?

Alunos: Menor que zero.

Professora: A minha função é decrescente quando o " a " for menor que zero, ou quando o ângulo for maior que noventa graus e menor que cento e oitenta graus. Ó, o gráfico da minha função quando o meu " a " for maior que zero. O pontinho que fica sobre o eixo " x " é o valor de quem? Ele já tá me dizendo aqui...

Alunos: Raiz.

Professora: É a raiz da minha função. É aquilo que a gente cansou de estudar aqui, " x " é igual a menos " b " sobre " a ". Lembram? Ou já esqueceram?

Alunos: Esquecemos.

Professora: O pontinho sobre o eixo " x " é chamado de raiz da função ou zero da função, que a gente determina usando menos " b " sobre " a ". E o ponto sobre o eixo " y " é quem?

Alunos: Valor de " b ".

Professora: O " b " a gente chama de quem?

Alunos: Coeficiente linear.

Professora: Esse meu gráfico tá crescente porquê? [apontando para o exemplo trabalhado: " f " de " x " igual a dois " x " mais um]

Alunos: Porque o ângulo é menor que noventa graus.

Professora: É porque o ângulo é menor que noventa graus e também, porque meu " a " é maior que zero, é um valor positivo. E o que acontece quando meu " a " é menor que zero? O gráfico fica o quê?

Alunos: Decrescente.

Professora: E o meu ângulo aqui? [apontando para o outro exemplo trabalhado: " t " de " x " igual a menos dois " x " mais um]

Alunos: Maior que noventa graus.

Professora: Vocês conseguem entender aqui se eu pedir na prova se o valor de “ a ” é positivo ou negativo, vocês conseguem? Vou colocar na prova um gráfico semelhante na prova, e pedir para vocês me dizer se o coeficiente angular é positivo ou negativo, vocês conseguem?

Alunos: Consegue.

Professora: Certeza? Sim ou não?

Alunos: Sim.

Professora: Se eu pedir o coeficiente linear?

Alunos: Sim.

Professora: Se eu pedir a raiz da função?

Alunos: Sim.

Professora: Espero que sim! Tem um ponto “ b ” no eixo “ y ”, ele sempre vai tá lá... Se eu pedir para vocês identificarem o coeficiente linear, vocês conseguem?

Alunos: Sim.

Professora: Se eu pedir para verificar se o coeficiente angular é positivo ou negativo, conseguem?

Alunos: Sim.

Professora: Cada questão vale um ponto. Agora, é o estudo dos sinais da função afim. Quando “ a ” for maior que zero, esse meu pontinho vai ser o quê?

Alunos: Raiz.

Professora: Quando “ a ” for maior que zero, a minha reta vai ser o quê?

Alunos: Crescente.

Professora: Quando “ y ” for maior que zero, “ x ” vai ser o quê? Ó, “ y ” maior que zero, para “ x ” maior que a raiz. “ y ” é igual a zero para “ x ” igual à raiz. E “ y ” é menor que zero, para “ x ” menor que a raiz. Esses valores aqui de “ x ”, eles são maiores ou menores? [apontando para a parte direita do zero da função, na representação gráfica no quadro] Maiores né? Esses valores à direita da raiz, eles são maiores ou menores?

Alunos: Maiores.

Professora: Para esses valores aqui, o meu “ y ” vai ser o quê?

Alunos: Positivo.

Professora: E para esses valores a esquerda?

Alunos: Negativo.

Professora: Isso quando minha função for o quê?

Alunos: Crescente.

Professora: E quando minha função for decrescente, vai ficar a mesma coisa? Ou vai mudar?

Alunos: Vai mudar.

Professora: Vamos analisar se vai mudar. Essa reta aqui do meu gráfico [apontando para o segundo exemplo trabalhado: " t " de " x " igual a menos dois " x " mais um], tá crescente ou decrescente?

Alunos: Decrescente.

Professora: Agora, os valores a esquerda da minha raiz são maiores ou menores que ela?

Alunos: Menores.

Professora: Mas, o valor do meu " y ", ele vai ser positivo ou negativo?

Alunos: Menores e maiores.

Professora: Vamos lá de novo, os valores a esquerda minha raiz são maiores ou menores que ela?

Alunos: Menores.

Professora: Os valores do meu " y " aqui estão maiores ou menores que zero?

Alunos: Maiores.

Professora: Se eles são maiores que zero, eles vão ser o quê?

Alunos: Positivos.

Professora: Ó, para o " y " igual a zero, o " x " vai igual à raiz. E se o meu " y " agora for menor que zero, abaixo do eixo " x "? Se eles forem valores negativos, o que acontece com a raiz da minha função? Os valores de " x " vão ser maiores que ela... " y " menor que zero, que são esses valores daqui, para " x " menor que menos " b " sobre " a ". Todos esses valores aqui, são maiores que menos " b " sobre " a "? Sim ou não? Todos esses valores aqui, são maiores que menos " b " sobre " a "? Esses valores aqui, eles são maiores que a raiz da minha função?

Alunos: Sim.

Professora: E o meu " y " aqui, vai ser positivo ou negativo? Negativo. Vocês conseguem enxergar isso aqui? Sim ou não?

Alunos: Sim.

Professora: Se eu pedir para identificar na prova, vocês conseguem também, né? Ficaram calados, então como diz a história, quem cala consente. Vou traçar aqui meu

eixo “ y ”. Se eu pegar um valor à direita da minha raiz e ligar ao eixo “ y ”, o valor aqui, vai tá positivo ou negativo?

Alunos: Positivo.

Professora: Aqui?

Alunos: Positivo.

Professora: Aqui?

Alunos: Positivo.

Professora: Se eu pegasse daqui agora...

Alunos: Negativo.

Professora: E se fosse aqui, no meu gráfico decrescente? Pro “ x ” menor que a raiz, o meu “ y ” vai ser o que?

Alunos: Positivo.

Professora: E aqui? Negativo e negativo, né? Melhorou? Sim ou não? [ninguém responde] Só melhorou pra mim foi? O que é uma inequação do primeiro grau, quem é que lembra?

Alunos: Tem o sinal da desigualdade.

Professora: Temos uma inequação do primeiro grau, quando a expressão “ ax ” mais “ b ”, na variável “ x ”, quando “ ax ” mais “ b ” menor que zero; ou “ ax ” mais “ b ” maior que zero ou “ ax ” mais “ b ” maior ou igual a zero ou “ ax ” mais “ b ” menor ou igual a zero. Vocês lembram dessas desigualdades aqui? [apontando para as inequações escritas no quadro]

Alunos: Acho que lembro.

Professora: É fácil? Vamos lá! “ ax ” mais “ b ” é maior que zero, implica “ ax ” maior que quem? “ ax ” maior que menos “ b ”. Aí, o meu “ a ”, tá multiplicando vai passar o quê?

Alunos: Dividindo.

Professora: O meu “ x ” vai ser maior ou igual a menor “ b ” sobre “ a ” se o “ a ” for maior que zero. Quem vai ser a solução da minha inequação? Quando “ x ” for maior ou igual a menos “ b ” sobre “ a ”, e o “ a ” for maior que zero? Quem é a solução da minha inequação? Tá bem aqui, gente! “ S ” é igual, “ x ” pertencente aos reais tal que “ x ” é maior ou igual a menos “ b ” sobre “ a ”. E o que acontece se o “ x ” for menor ou igual a menor “ b ” sobre “ a ”? O que muda na inequação? O que muda na solução da inequação? O que muda? O sinal de desigualdade, era maior ou igual, ficou menor ou igual? Tá todo mundo preparado pra tirar dez na prova, né? Vamos lá! “Um padeiro

fabrica duzentos e cinquenta pães por hora, qual é a função que representa a quantidade de pães fabricados, “ p ”, em função do tempo “ t ” em horas?

Alunos: Acho que é letra “ d ” [referindo-se ao gabarito da questão]

Professora: Agnes, disse que era “ d ”, quem concorda com Agnes? Levanta a mão! Só Maria, Vanessa e Orisvaldo? O “ p ” aqui significa o quê?

Alunos: A quantidade de pães fabricados.

Professora: E o “ t ”?

Alunos: O tempo.

Professora: Então, se eu quisesse setecentos e cinquenta pães, quantas horas duraria? Quantas horas?

Leonardo: Três.

Professora: Todo mundo sabe porque são três horas?

Alunos: Não.

Professora: São duzentos e cinquenta cada hora. Se fossem dois mil pães?

Alunos: Oito horas.

Professora: Ó, se fosse aqui, a letra “ a ”, seria certo? O “ t ” aqui representa o quê?

Alunos: Tempo.

Professora: Se o “ t ” aqui fosse um, daria duzentos e cinquenta mais um, que daria quanto?

Alunos: Duzentos e cinquenta um.

Professora: Letra “ b ”, duzentos e cinquenta dividido por “ t ”. Letra “ c ”, duzentos e cinquenta menos “ t ”, letra “ d ”, duzentos e cinquenta vezes “ t ” e letra “ e ”, duzentos e cinquenta é igual a “ t ”. Letra “ d ”, não é? Ó, vamos para o próximo: “Marcelo trabalha em uma loja de brinquedos, seu salário mensal é representado por uma função do primeiro grau “ S ” é igual a zero vírgula zero dois “ x ” mais cinquenta, onde “ x ” representa o total das vendas em reais. No mês que Marcelo recebeu mil duzentos e cinquenta reais, o valor das vendas de Marcelo é de quanto? O salário é representado por quem? “ S ” igual a zero vírgula zero dois mais trezentos. Aí ele diz assim, no mês, Marcelo recebeu, mil duzentos e cinquenta. Esse valor seria o salário ou o total e vendas?

Alunos: Total de vendas.

Aluna: Salário.

Professora: Ele seria o “ S ” ou o “ x ”?

Alunos: “ S ”.

Professora: Mil duzentos e cinquenta, igual a zero vírgula zero dois “ x ” mais cinquenta. Então, nessa equação aqui, o que irei encontrar?

Aluna: “ x ”.

Professora: E o meu “ x ” representa o quê?

Alunos: O total de vendas.

Professora: Então, a gente vai encontrar o total de vendas em reais. Como que a gente resolveria essa equaçãozinha? Tem que isolar o “ x ”... O que a gente pode fazer? O cinquenta tá positivo, ele vai passar o quê?

Alunos: Negativo.

Professora: Mil duzentos e cinquenta menos cinquenta, igual a zero vírgula zero dois “ x ”. Mil duzentos e cinquenta menos cinquenta?

Alunos: Mil e duzentos.

Professora: Mil e duzentos é igual a zero vírgula zero dois “ x ”. E agora? Se tá multiplicando vai passar dividindo, né? “ x ” é igual a mil e duzentos dividido por zero vírgula zero dois. Vai dá quanto? Como que eu posso dividir? Como que eu faço para tirar essa vírgula daqui?

Alunos: Coloco mais dois zeros lá.

Professora: Isso. Se eu andei duas casas aqui, vou acrescentar dois zeros. Quanto é cento e vinte mil dividido por dois?

Alunos: Sessenta mil.

Professora: Qual foi o total de vendas que ele fez?

Alunos: Sessenta mil.

Professora: E só ganhou quanto?

Alunos: Mil duzentos e cinquenta.

Professora: Saiu perdendo?

Alunos: Demais.

Professora: Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada obedecendo à função do primeiro grau “ p ” de “ x ” igual a cinco mais um vírgula vinte “ x ”, onde “ p ” é o preço pago em reais, e “ x ” representa a quantidade de quilômetros rodados. O usuário pagou dezenove e quarenta, então o táxi percorreu quantos quilômetros?

Alunos: Não sei.

Professora: Como que eu posso resolver essa questãozinha aí? “ p ” de “ x ” igual a cinco mais um e vinte “ x ”. Ele quer descobrir o quê?

Alunos: O “ x ”.

Professora: Ele quer descobrir quem?

Alunos: A quantidade de quilômetros rodados.

Professora: Como que eu resolvo? Esses dezenove e quarenta representa o quê?

Alunos: O valor total.

Professora: Então vai ser o “ p ” de “ x ” ou o “ x ”?

Aluno: Dezenove e quarenta é igual a cinco mais um e vinte “ x ”.

Professora: E agora?

Alunos: Isola o “ x ”.

Professora: Como que faz?

Alunos: Dezenove e quarenta menos cinco é igual a um e vinte “ x ”.

Professora: Quanto é dezenove e quarenta menos cinco?

Alunos: Quatorze e quarenta.

Professora: Quatorze e quarenta é igual a um e vinte “ x ”. E agora?

Alunos: Tá multiplicando, passa dividindo.

Professora: Quatorze e quarenta dividido por um e vinte... E agora? Tem vírgula em cima e em embaixo. A gente anda uma pra cá e outra cá [referindo-se ao numerador e denominador da fração obtida, respectivamente] Depois, mais uma vez... Cento e quarenta e quatro dividido pra doze?

Alunos: Doze.

Professora: Difícil?

Alunos: Mais ou menos.

Professora: Os problemas são mais fáceis que os cálculos?

Alunos: Sim.

Professora: Duas amigas saem de férias no mesmo período, decidem alugar um táxi para fazer uma viagem. A função “ p ” “ x ” é igual trinta mais zero vírgula quarenta “ x ”, onde “ p ” é o preço pago em reais, e “ x ” representa a quantidade de quilômetros rodados. Se as amigas andarem duzentos e cinquenta quilômetros, quanto que elas vão pagar?

Alunos: Letra “c”.

Professora: Quem lembra a função qual é? “ p ” de “ x ” é igual trinta mais zero vírgula quarenta “ x ”.

Alunos: Isola o “ x ”.

Professora: O “ x ” representa o quê?

Alunos: A quantidade de quilômetros rodados.

Professora: E o “ p ” de “ x ”?

Alunos: O preço pago.

Professora: Se elas rodarem duzentos e cinquenta quilômetros, quanto que elas vão pagar? Aqui, eles querem saber o “ p ” de “ x ” ou o “ x ”?

Alunos: O “ p ” de “ x ”.

Professora: A gente vai fazer o “ p ” de duzentos e cinquenta. Como que a gente faz?

Aluna: Tem que substituir o “ x ”.

Professora: “ p ” de “ x ” igual a trinta mais duzentos e cinquenta vezes zero vírgula quatro. Eu vou somar trinta mais duzentos e cinquenta, ou vou multiplicar duzentos e cinquenta vezes zero vírgula quatro?

Aluna: Multiplicar.

Professora: Posso usar a regrinha aqui?

Alunos: Sim.

Professora: Na divisão eu ando uma casa e acrescento o zero, e na multiplicação?

Alunos: Ando uma casa e cancelo um zero.

Professora: Então, vou ter quatro vezes vinte e cinco?

Alunos: Cem.

Professora: Cem mais trinta?

Alunos: Cento e trinta.

Professora: Vocês têm algum material para estudar em casa?

Alunos: Sim.

Professora: Vou enviar mais no grupo hoje. No *Google Sala de Aula* vai ter uma pastinha lá: função do primeiro grau. Estudem e boa prova amanhã!

ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA DO SAEPE

MATEMÁTICA | 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

GEOMETRIA

D01 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D02 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

D03 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D04 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.

D05 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

D06 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

D07 – Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D08 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

D09 – Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

D10 – Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

GRANDEZAS E MEDIDAS

D11 – Resolver problema envolvendo perímetro de figuras planas.

D12 – Resolver problema envolvendo área de figuras planas.

D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

NÚMEROS E OPERAÇÕES / ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- D14** – Identificar a localização de números reais na reta numérica.
- D15** – Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
- D16** - Resolver problema que envolva porcentagem.
- D17** – Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.
- D18** – Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
- D19** – Resolver problema envolvendo uma função do 1º Grau
- D.20** – Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
- D21** – Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral.
- D22** – Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.
- D23** – Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico ou vice-versa.
- D24** – Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função polinomial do 2º grau.
- D25** – Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.
- D26** – Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
- D27** - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
- D28** – Resolver problema que envolva função exponencial
- D29**– Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.
- D30** – Determinar a solução de um sistema linear.
- D35** – Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.

ESTATÍSTICA, PROBABILIDADE E COMBINATÓRIA

- D31** – Resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.
- D32** – Resolver problema que envolva probabilidade de um evento.

D33 - Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

D34 - Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa

ANEXO B – FASCÍCULO ADOTADO PELA PROFESSORA “RITA” PARA USO NAS AULAS





Expediente

Governador de Pernambuco

Paulo Henrique Saraiva Câmara

Vice-governadora de

Pernambuco

Luciana Barbosa de Oliveira Santos

Secretário de Educação e Esportes de

Pernambuco Frederico da Costa Amancio

Autores

Prof. Antony Arthur Rodrigues
Viana Prof. Davidson Alves Santos
de Santana

Revisão de Língua Portuguesa

Prof.^a Aline Vieira de Oliveira

Couto Projeto gráfico

Clayton Quintino de

Oliveira Diagramação

Caio Renato Tavares da Silva



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISDB

GOVERNO de Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes.

Matemática: Função Afim. – Recife: Secretaria de Educação e Esportes, 2020. 14 p.: il.

1º Ano. Educa-PE. Fascículo 3.

1. Matemática. 2. Função linear. 3. Função polinomial de primeiro grau I. Título.

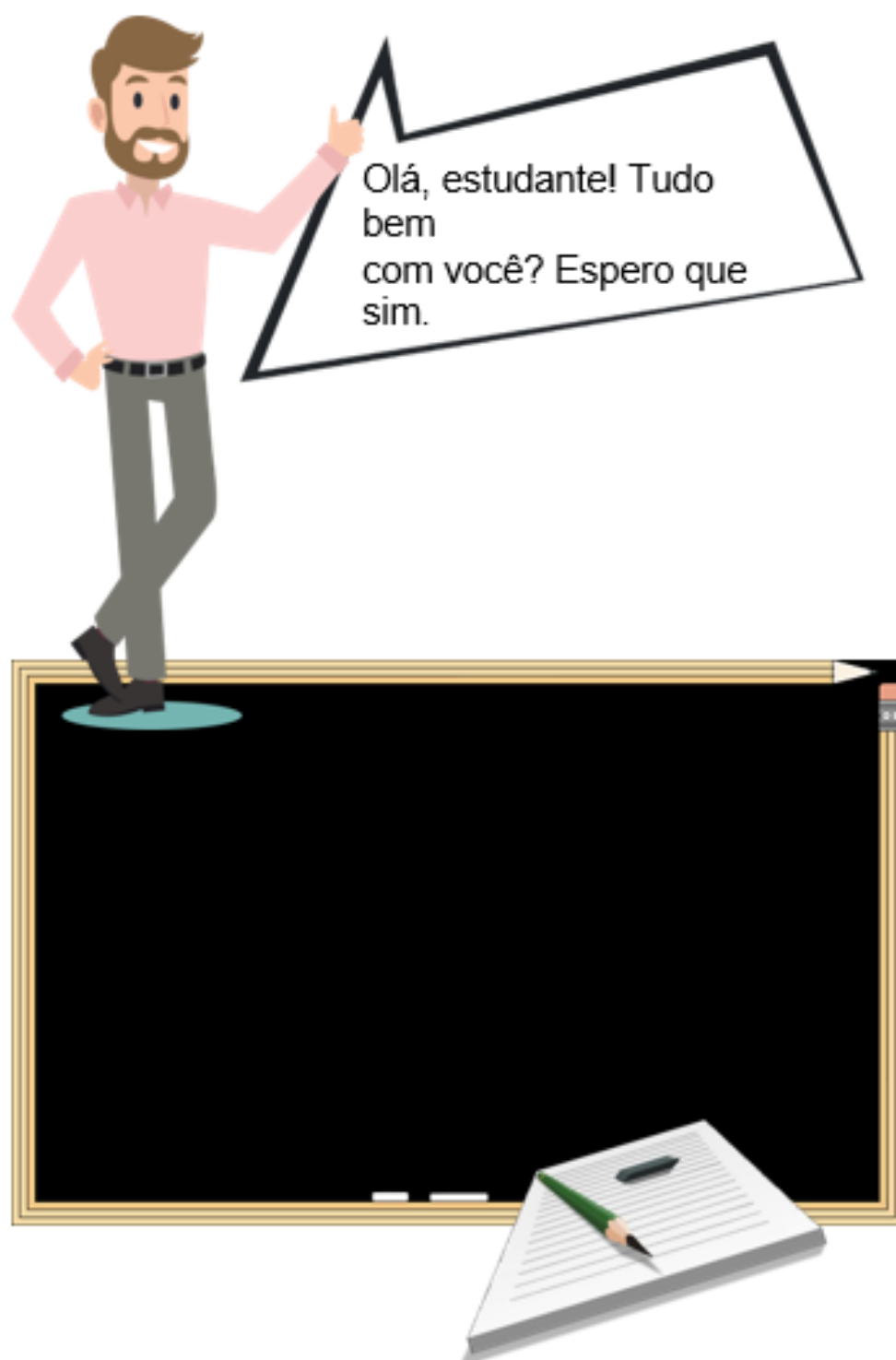
CDU – 517.5

Elaborado por Hugo Carlos Cavalcanti | CRB-4 2129

Secretaria de
Educação
e Esportes



GOVERNO DO ESTADO
PERNAMBUCO
MAIS TRABALHO. MAIS FUTURO.



Em certa cidade, o valor pago por uma corrida de táxi é igual a um valor fixo, chamado de bandeirada, no valor de R\$ 15,00, acrescido de R\$ 2,00 para cada quilômetro percorrido. Denominando y o valor total da corrida e x a distância percorrida, em quilômetros, escreva uma expressão algébrica que represente essa situação.



Para resolver, vou construir uma tabela, com alguns valores para você compreender como funciona o valor total.

Distância percorrida (em km)	Valor total da corrida
1	$15 + 2 \cdot 1 = 17$
2	$15 + 2 \cdot 2 = 19$
3	$15 + 2 \cdot 3 = 21$
4	$15 + 2 \cdot 4 = 23$
5	$15 + 2 \cdot 5 = 25$
:	:
x	$15 + 2 \cdot x = y$

Observando a tabela, você pode perceber o que valor pago depende da distância que foi percorrida. E a expressão algébrica que representa o valor pago nessa corrida é dado pela expressão

$$15 + 2x = y \text{ ou } y = 2x + 15$$

As expressões obtidas acima, representam uma **função afim**. Vamos ver a definição.

FUNÇÃO AFIM

É chamada função afim toda função polinomial do primeiro grau. Formalmente escrevemos que:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim quando existem dois números reais a e b tais que satisfaçam a seguinte condição:

$$f(x) = ax + b \text{ ou } y = ax + b$$

Observe a função que você encontrou no exemplo acima. Ela tem o formato de uma função afim e podemos identificar os valores de a e b .

$$y = 2x + 15 \rightarrow a = 2 \text{ e } b = 15$$

Outros exemplos:

- $y = -x - 5 \rightarrow a = -1 \text{ e } b = -5$

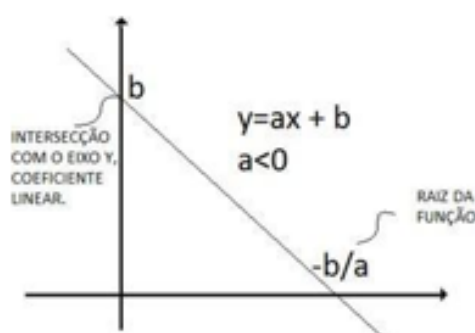
- $y = 2x \rightarrow a = 2 \text{ e } b = 0$

- $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{5} \rightarrow a = -\frac{3}{2} \text{ e } b = \frac{3}{5}$

- $y = 10 \rightarrow a = 0 \text{ e } b = 10$

CARACTERÍSTICAS DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

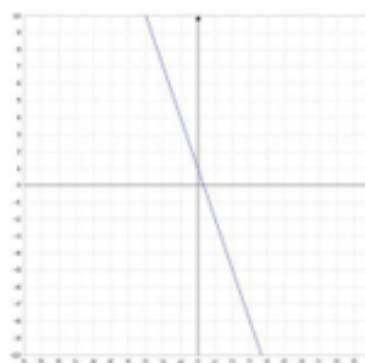
I) A representação gráfica de uma função do 1º grau é sempre uma reta decrescente quando $a < 0$.



Exemplo: acompanhe a tabela e veja que os valores encontrados nos resultados estão diminuindo, isto caracteriza uma função decrescente.

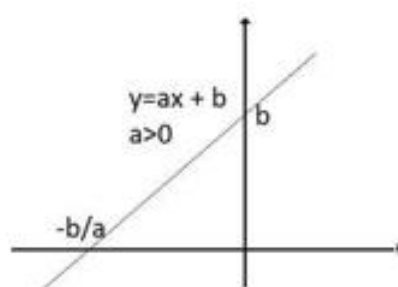
$$f(x) = -3x + 1$$

x	$y = f(x) = -3x + 1$
-2	$-3 \cdot (-2) + 1 = 7$
-1	$-3 \cdot (-1) + 1 = 4$
0	$-3 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$-3 \cdot 1 + 1 = -2$
2	$-3 \cdot 2 + 1 = -5$





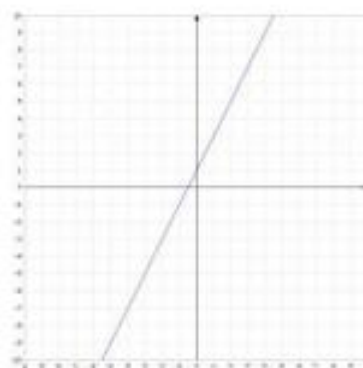
II) O gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta crescente quando $a > 0$.



Exemplo: acompanhe a tabela e veja que os valores encontrados nos resultados estão aumentando, isto caracteriza uma função crescente.

$$f(x) = 2x + 1$$

x	$y = f(x) = 2x + 1$
-2	$2 \cdot (-2) + 1 = -3$
-1	$2 \cdot (-1) + 1 = -1$
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$





III) Na função $f(x) = ax + b$

• Se $b = 0$, f é dita **função linear**.

Exemplo: a função $f(x) = 3x$ é linear, pois $a = 3$ e $b = 0$.

• Se $b \neq 0$, f é dita **função afim**.

Exemplo, a função $f(x) = 3x + 5$ é afim, pois $a = 3$ e $b = 5 \neq 0$.

IV) O gráfico intercepta o eixo dos x na raiz da equação $f(x) = 0$ e, portanto, no ponto de abscissa $x = -b/a$.

Como exemplo, você pode considerar a função $f(x) = 2x + 6$. Para encontrar a raiz desta função, faça:

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{2} \Rightarrow x = -3$$

Logo, a raiz de $f(x) = 2x + 6$ é $x = -3$.

V) O gráfico intercepta o eixo dos y no ponto $(0, b)$, que é o termo independente b , onde b é chamado coeficiente linear.

Observe como exemplo a função $f(x) = -10x + 7$, note ainda que coeficiente $b = 7$, e daí você pode concluir, com certeza, que a reta passa no eixo y no ponto $(0, 7)$.

VI) O valor a é chamado coeficiente angular e dá a inclinação da reta.

Função Identidade

Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.

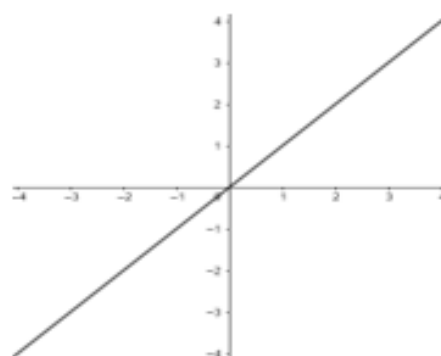
Observe, estudante, que o valor de $a = 1$ e $b = 0$, sempre que isso acontece a função é chamada de **Função Identidade**.

Faço, ainda, algumas observações para você colorir com seu marca texto preferido!

1- O gráfico da função identidade é chamado de bissetriz dos quadrantes ímpares.

2- O gráfico passa pela origem. 3-

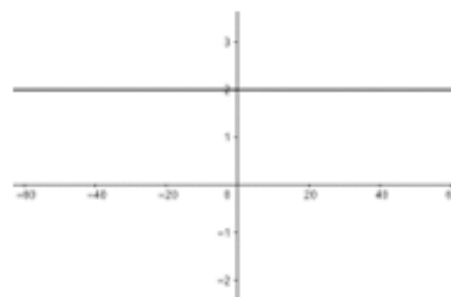
O valor de x e y são iguais.



Função constante

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de constante quando $f(x) = b$, isto é, o valor de $a = 0$.

Por exemplo, seja a função $f(x) = 2$, o seu gráfico será uma reta paralela ao eixo dos x .

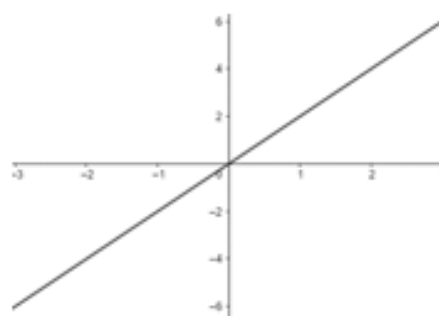


Função linear

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de linear quando

$f(x) = ax$, isto é, $b = 0$.

Por exemplo, a função $f(x) = 2x$ terá a sua representação gráfica dada por:



QUESTÕES

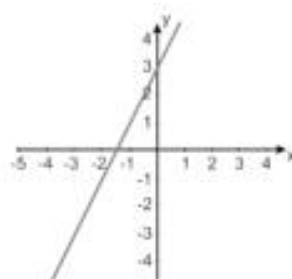


1. (G1 - ifsul|2017) Numa serigrafia, o preço y de cada camiseta relaciona-se com a quantidade x de camisetas encomendadas, através da fórmula $y = -0,4x + 60$. Se foram encomendadas 50 camisetas, qual é o custo de cada camiseta?

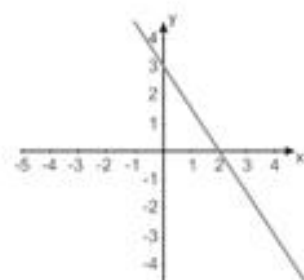
a) R\$ 40,00 b) R\$ 50,00 c) R\$ 70,00 d) R\$ 80,00

2. (Unisinos 2012) Qual dos gráficos abaixo representa a reta de equação $y = 2x + 3$?

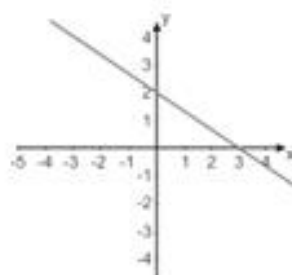
a)



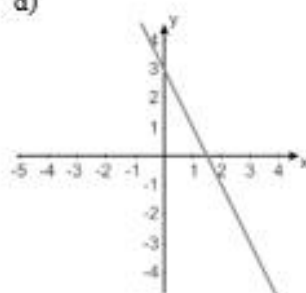
b)



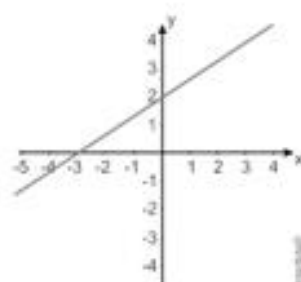
c)



d)



e)



3. (Unisinos 2017) João e Pedro alugaram o mesmo modelo de carro por um dia, em duas locadoras distintas. João alugou o carro na locadora Arquimedes, que cobra R\$ 80,00 a diária, mais R\$ 0,70 por quilômetro percorrido. Pedro alugou na Locadora Bhaskara, que cobra R\$ 50,00 a diária, mais R\$ 0,90 por quilômetro percorrido. Ao final do dia, João e Pedro pagaram o mesmo valor total pela locação.

Quantos quilômetros cada um percorreu e quanto pagaram?

- a) 150 km e R\$ 185,00
- b) 160 km e R\$ 192,00
- c) 170 km e R\$ 199,00
- d) 180 km e R\$ 206,00
- e) 190 km e R\$ 213,00

4. (Upe-ssa 1 2016) Na fabricação de 25 mesas, um empresário verificou que o custo total de material foi obtido por meio de uma taxa fixa de R\$ 2.000,00, adicionada ao custo de produção que é de R\$ 60,00 por unidade. Qual é o custo para fabricação dessas mesas?

- a) R\$ 1.500,00
- b) R\$ 2.900,00
- c) R\$ 3.500,00
- d) R\$ 4.200,00
- e) R\$ 4.550,00

GABARITO

1.

Para obter o custo de cada camiseta, basta substituir $x = 50$ na função $y(x)$.

$$y(x) = -0,4(x) + 60$$

$$y(50) = -0,4(50) + 60$$

$$y(50) = -20 + 60 = 40$$

Logo, R\$ 40,00 cada camiseta.

Alternativa: A

2.

Escolha valores comuns, como visto no exemplos acima, dois pontos notáveis são quando

$$x = 0 \text{ e ficamos com } y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\text{E outro quando } y = 0 \text{ e ficamos com } 0 = 2x + 3$$

$$2x = -3 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad x = -1,5$$

Assim tomando os pontos $(0,3)$ e $(-1,5; 0)$, chegamos ao gráfico:

Alternativa: A

3.

Se x é o número de quilômetros rodados, então

$$0,9x + 50 = 0,7x + 80$$

$$0,2x = 30$$

$$x = 150 \text{ km}$$

Logo cada um pagou $0,9 \times 150 + 50 = 185$.

Alternativa: A

4.

Veja que o gráfico da função corta o eixo das ordenadas (eixo dos y) em $(0, 3)$, daí já você já pode concluir que $b = 3$. Além disso, o gráfico da função corta o eixo das abscissas (eixo dos x) em $(2, 0)$.

Logo,

$$0 = a \cdot 2 + 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

e, portanto, $a + b = -\frac{3}{2} + 3 = 1,5$.

Alternativa: C

