UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Tanires Ribeiro Custódia

Sistema de Schrödinger-Poisson axialmente simétrico em dimensão dois

Recife

2023

Tanires Ribeiro Custódia

Sistema de Schrödinger-Poisson axialmente simétrico em dimensão dois

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): José Carlos de Albuquerque Melo Júnior

Recife

2023

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C987s Custódia, Tanires Ribeiro
Sistema de Schrödinger-Poisson axialmente simétrico em dimensão dois / Tanires Ribeiro Custódia. – 2023.
68 f.

Orientador: José Carlos de Albuquerque Melo Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2023.
Inclui referências e apêndice.

1. Análise. 2. Convolução logarítmica. I. Melo Júnior, José Carlos de Albuquerque (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2023-33

TANIRES RIBEIRO CUSTÓDIA

SISTEMA DE SCHRÖDINGER-POISSON AXIALMENTE SIMÉTRICO EM DIMENSÃO DOIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 23/02/2023

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr.José Carlos de Albuquerque Melo Júnior (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal de Goiás

____

Prof. Dr. Jônison Lucas dos Santos Carvalho (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Dedico à minha família e a todos os professores e colegas de turma que apoiaram e colaboraram com a minha formação.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai Beaz Laurentino, ao meu irmão Tarlys Francisco, e em especial a minha mãe Luzia Ernestina que foi a maior apoaiadora durante todo minha trajetória. Amo vocês.

Ao meu orientador José Carlos de Albuquerque Melo Júnior, por todo apoio, incentivo e paciência. Obrigada por ter me aceitado como orientanda, por todas as vezes que me motivou a não desistir, serei eternamente grata.

Ao meu noivo José Hilário Rocha, por me dar forças para enfrentar as dificuldades e pela preocupação e cuidado que teve comigo.

Aos meus amigos da UFPI e da UFPE, que contribuiram para que esse sonho pudesse se tornar realidade, por compartilharem seus conhecimentos e dividirem momentos tão felizes, o que tornou a caminhada mais prazerosa.

Aos professores da UFPI e UFPE, que tive o prazer de receber tantos ensinamentos, conselhos e apoio durante toda minha trajetória acadêmica.

Ao meu irmão de orientação Hugo Henryque Coelho e Silva, que me incentivou e ajudou todas as vezes que precisei.

Aos membros da banca examinadora por aceitar contribuir na avaliação deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a existência de solução para o sistema de Schrödinger-Poisson em dimensão dois, a qual foi obtida a partir de sequências de Cerami, que foram utilizadas para encontrar uma solução de energia mínima do tipo Nehari e uma solução não trivial, ao aplicar o Teorema do Passo da Montanha. O sistema escolhido para se realizar o estudo foi tomado como sendo axialmente simétrico, isto é, o potencial $V(x)$ e a função não linear $f(x,u)$ são axialmente simétricos em x. Além disso, $f(x,u)$ é assintoticamente cúbica em u. Características essas que trazem relevância ao estudo, uma vez que as funções com simetria axial são mais gerais que funções com simetria radial. Outro aspecto que torna esse trabalho importante é que existem poucos trabalhos considerando o sistema de Schrödinger-Poisson em dimensão dois e axialmente simétrico, bem como, ele complementa as literaturas que estudam o sistema em dimensão três.

Palavras-chaves: schrödinger-poisson; potencial de convolução logarítmica; função axialmente simétrico; solução de energia mínima.

ABSTRACT

In this work we study the existence of a solution for the Schrödinger-Poisson system in dimension two, which was obtained from Cerami sequences, which were used to find a minimum energy solution of the Nehari type and a non-trivial solution, when applying the Mountain Pass Theorem. The system chosen to carry out the study was assumed to be axially symmetric, that is, the potential $V(x)$ and the nonlinear function $f(x, u)$ are axially symmetric in x. Furthermore, $f(x, u)$ is asymptotically cubic in u. These characteristics bring relevance to the study, since functions with axial symmetry are more general than functions with radial symmetry. Another aspect that makes this work important is that there are few works considering the Schrödinger-Poisson system in dimension two and axially symmetrical, as well as, it complements the literature that studies the system in dimension three.

Keywords: schrödinger-poisson; logaritmic convolution potential; axially symmetric function; least energy solution.

LISTA DE SÍMBOLOS

ω_N	Denota o volume da bola N-dimensional;
$f * g$	Denota convolução das funções f e g, donde $$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y)dy;$$
$B(x,r)$	$B(x,r) = \{z \in \mathbb{R}^2 / \lvert x - z\rvert < r\}$;
Δu	Denota o Laplaciano de u;
u^+	Denota a parte positiva de u, que é a função $u^+ : X \to \mathbb{R}$ tal que $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, sendo X um conjunto qualquer;
u^-	Denota a parte negativa de u, que é a função $u^- : X \to \mathbb{R}$ tal que $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$, sendo X um conjunto qualquer;
A^c	Complementar de A;
1_B	Denota a função indicadora de B, que é designada pela função $$1_B : A \to \mathbb{R}; \quad 1_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B, \\ 0, & \text{se } x \in B^c, \end{cases}$$ sendo A um conjunto qualquer e $B \subset A$;
$o(g)$	Se $f = o(g)$, então $\lim_{x \to x_0} \frac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} = 0$;
$\lVert u\rVert_{L^p(\Omega)}$	Denota a norma de uma função u no espaço $L^p(\Omega)$;
$\mathcal{C}^1(\Omega)$	Denota o conjunto das funções contínuas que possuem derivada de primeira ordem contínua;
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$	Denota o conjunto das funções contínuas que se anulam fora de um conjunto compacto, além de que a derivada de todas as ordens são contínuas;
$H^1(\Omega)$	Denota o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$, isto é, é o conjunto de todas as funções $u \in L^2(\Omega)$ que possuem derivada fraca;

$X \hookrightarrow Y$	Denota que X é imerso continuamente em Y;
$X \overset{C}{\hookrightarrow} Y$	Denota que X é imerso compactamente em Y;
$u_n \rightharpoonup u_0$	Denota que u_n converge fraco para uma função u_0;
$q.t.p$	Quase todo ponto.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de fazer um estudo detalhado do artigo (CHEN; TANG, 2019), bem como evidenciar sua relevância para a literatura. Para este propósito, faremos um estudo preliminar do problema de Schrödinger-Poisson com a presença do termo logarítmico. Precisamente, estudaremos o sistema planar de Schrödinger-Poisson exposto abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda\phi u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \Delta\phi = u^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}, V \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2,(0,\infty)\right)$ e $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$. A partir desse sistema obtemos a equação integro-diferencial

$$-\Delta u + V(x)u + \phi_{2,u}u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

donde $\phi_{2,u}$ está sendo mostrado abaixo. Nesse sentido, estudaremos a existência de uma solução de energia mínima do tipo Nehari, como também, obteremos uma solução não trivial ao aplicar o Teorema do Passo da Montanha para a equação integro-diferencial.

O sistema (1.1) é um caso particular do sistema N-dimensional de Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u + \lambda\phi u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \triangle\phi = u^2, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

que é combinação de duas equações famosas, a equação de Schrödinger, que tem muita influência na mecânica quântica, e a equação de Poisson. Como mostraremos adiante, de modo a estudar o problema (1.1) via métodos variacionais, precisaremos analisar o seguinte kernel integral logarítmo que aparecerá no funcional energia

$$\phi_{2,u}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y|u^2(y)dy.$$

Note que o termo $\ln$ presente em $\phi_{2,u}$ está mudando de sinal e não tem limitação alguma, logo teremos dificuldade de ter controle sobre ele.

Todavia, a principal propriedade dessa pesquisa é abordar o caso em que o potencial $V(x)$ e a função não linear $f(x,u)$ são axialmente simétrico em x e $f(x,u)$ é assintoticamente cúbica ou supercúbica em u, em vez do caso donde as funções são de simetria radial, já que além de ter sido pouco explorado na literatura traz consigo a característica de ser mais geral que a simetria radial. No entanto, optar por esse tipo de funcional tem como consequência a não compacidade ao incorporar o espaço das funções de simetria axial ao espaço $L^s(\mathbb{R}^N)$. Além de não podermos utilizar o Princípio de Concentração-Compacidade de Lions, uma vez que as funções axialmente simetricas não são $\mathbb{Z}^2$-invariantes.

O desenvolvimento desse trabalho está organizado em dois capítulos. O primeiro capítulo é iniciado apresentando o sistema de Schrödinger-Poisson N-dimensional e fazendo uma breve discussão acerca das equações que o compõem. Ademais, é exibido o funcional energia associado ao sistema. Depois fixamos o caso planar e definimos a norma e espaço para se procurar solução e, logo após, mostramos a boa definição deles.

O segundo capítulo começa apresentando o sistema de Schrödinger-Poisson axialmente simétrico em dimensão dois e, em seguida, é exibida as seguinte hipóteses sobre V e f:

(V_0) $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}), \inf_{x\in\mathbb{R}^2} V(x) > 0$ e $V(x) := V(x_1,x_2) = V(|x_1|,|x_2|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(V_1) Existe uma sequência $(t_n) \subset (0,\infty)$ de tal modo que $t_n \to \infty$ e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2, n\in\mathbb{N}} \frac{V(t_n^{-1}x)}{V(x)} < \infty;$$

(F_1) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R},\mathbb{R}), f(x,t) := f(x_1,x_2,t) = f(|x_1|,|x_2|,t), \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ e existe uma constante $\mathcal{C}_0 > 0$ e $p \in (2,\infty)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \mathcal{C}_0\left(1+|t|^{p-1}\right), \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R};$$

(F_2) $f(x,t) = o(|t|)$ quando $t \to 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$;

(F_3) $\inf_{x\in\mathbb{R}^2, t\neq 0} \dfrac{F(x,t)}{t^2} > -\infty$;

(F_4) Existe $\theta \in [0,1)$ de tal modo que

$$\left[\frac{f(x,\tau)}{\tau^3} - \frac{f(x,t\tau)}{(t\tau)^3}\right] sinal(1-t) + \theta V(x)\frac{|1-t^2|}{(t\tau)^2} \geq 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}^2, t>0, \tau\neq 0;$$

(F_5) Existe $\beta > 0$ tal que

$$f(x,t)t - 4F(x,t) \geq -4\beta t^2, \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R};$$

(F_6) $f(x,t) - a(x)t^3 = o(|t|^3)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$ quando $|t| \to \infty$, onde $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2,[0,\infty))$ é axialmente simétrico;

(F_7) Existem $\kappa > 1, c_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tal que

$$|f(x,t)|^\kappa \leq c_0|t|^\kappa\left[f(x,t)t - 4F(x,t) + 4\beta t^2\right], \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, \quad |t|\geq R_0;$$

(F_8) Existem $c_1 > 0, R_1 > 0$ e $\nu \in (0,2)$ tais que

$$F(x,t) \leq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c_1|t|^\nu}\right) f(x,t)t \quad \text{para } |t|\geq R_1.$$

A seguir, apresentaremos os três Teoremas que são os resultados referentes ao problema.

Teorema 1.1. *Suponha que* V *e* f *satisfazem* (V_0), (V_1) *e* (F_1)-(F_4)*. Então a equação* (1.2) *tem uma solução* $u_0 \in E_{as}$ *tal que* $\Phi(u_0) = \inf_{\mathcal{N}} \Phi > 0$.

Teorema 1.2. *Suponha que* V *e* f *satisfazem* (V_0), (V_1), (F_1)-(F_3), (F_5) *e* (F_6)*. Então a equação* (1.2) *tem uma solução não trivial* $u_0 \in E_{as}$.

Teorema 1.3. *Suponha que* V *e* f *satisfazem* (V_0), (V_1), (F_1)-(F_3), (F_5) *e* (F_7)*. Então a equação* (1.2) *tem uma solução não trivial* $u_0 \in E_{as}$.

Nossa abordagem para demonstrar os teoremas acima é baseada em procurarmos sequências minimizantes de Cerami para provar a existência de solução de energia mínima. Além disso, para provaremos a existência de solução não trivial usamos o Teorema do Passo da montanha. Como também, mostraremos o princípio de criticalidade simétrica de Palais o qual nos possibilita encontrar solução no espaço geral, isto é, sem a hipótese de que o potencial é axialmente simétrico.

2 O SISTEMA DE SCHRÖDINGER-POISSON

Neste capítulo, iremos discorrer sobre o sistema de Schrödinger-Poisson N-dimensional, assim como, apresentar seu funcional energia e explicitar o espaço adequado para se obter solução. Além de demonstrar os pré-requisitos para que o espaço esteja bem definido no caso do sistema planar. Logo após, daremos ênfase no caso planar que é o foco do nosso trabalho.

O sistema de Schrödinger-Poisson exibido abaixo é constituído pela combinação de duas equações importantes, a equação de Schrödinger e a equação de Poisson,

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u + \lambda\phi u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ \triangle\phi = u^2, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}, V \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N, (0,\infty)\right)$ e $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$. É pertinente ressaltar que (2.1) tem bastente influência em modelos de mecânica quântica, como os retratados nos trabalhos (BENGURIA; BREZIS; LIEB, 1981), (CATTO; LIONS, 1993) e (LIEB, 1981) e na teoria de semicondutores, como os apresentados em (BENCI; FORTUNATO, 2002) e (LIONS, 1984).

A primeira expressão do sistema (2.1) é a equação de Schrödinger, que é bastante influente na mecânica quântica. A solução do sistema (2.1) está associada com a onda solitária de ansatz $\psi(x,t) = e^{-i\mu t}u(x)$ para o sistema

$$\begin{cases} -i\psi_t - \triangle\psi + E(x)\psi + \lambda\phi\psi = f(x,\psi), & \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \\ \triangle\phi = |\psi|^2, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

de tal forma que $\psi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é a função de onda que descreve o comportamento de um sistema quântico, $V(x) = E(x) + \mu$, em que $E(x)$ é um potencial externo real e $\mu \in \mathbb{R}$, além de que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, ϕ representa um potencial interno para uma auto-interação não local da função de onda e o termo não linear f descreve o efeito de interação entre muitas partículas.

A segunda expressão é a equação de Poisson, que é uma equação diferencial parcial elíptica que possui várias aplicações na física. É bem conhecido que a solução da equação de Poisson está relacionada com a solução fundamental da equação de Laplace

$$\Gamma_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & N = 2, \\ \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N}|x|^{2-N}, & N \geq 3, \end{cases} \tag{2.2}$$

em que ω_N é o volume da bola unitária N-dimensional. Daí, a solução da equação de Poisson é a convolução

$$\phi_{N,u}(x) = \left(\Gamma_N * u^2\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma_N(x-y)u^2(y)dy. \tag{2.3}$$

Nesse sentido, ao substituirmos (2.3) na primeira expressão do sistema (2.1), obtemos a seguinte equação integro-diferencial

$$-\Delta u + V(x)u + \lambda\left(\Gamma_N * u^2\right)u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Então, o funcional energia associado a (2.4) será

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right)dx + \frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\phi_{N,u}u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)dx, \tag{2.5}$$

sendo que $F(x,t) := \int_0^t f(x,s)ds$.

2.1 O SISTEMA DE SCHRÖDINGER-POISSON EM DIMENSÃO DOIS

O sistema planar de Schrödinger-Poisson terá por (2.2) e (2.3) o seguinte funcional de convolução

$$\phi_{2,u}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\ln|x-y|u^2(y)dy. \tag{2.6}$$

Observe que $\phi_{2,u}$ é ilimitado e muda de sinal, em virtude desse funcional se comportar como $\frac{1}{2\pi}\|u\|_2^2\ln|x|$ no infinito. Então, (2.5) não está bem definido em $H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ ainda que $V \in L^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} V > 0$. Logo, não podemos utilizar os mesmos métodos variacionais que são usados quando $N \geq 3$, no sistema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda\phi u = f(x,u), & x \in \mathbb{R}^2, \\ \Delta\phi = u^2, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Por esses motivos que o caso planar não foi tão estudado e é isso que enriquece o desenvolvimento do nosso estudo.

De agora em diante, em vez de considerarmos (2.1), iremos trabalhar somente com a equação de Schrödinger-Poisson em dimensão 2, e reescalonado (2.7) podemos admitir que para $\lambda = 1$, obtemos

$$-\Delta u + V(x)u + \left(\Gamma_2 * u^2\right)u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.8}$$

Lembrado que como o funcional (2.6) está acompanhado do logaritmo neperiano, temos que o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^2)$ não é adequado para encontrar a solução do problema em questão.

Nesse sentido, inspirado por (STUBBE, 2008) e (CINGOLANI; WETH, 2016), provaremos que o espaço apropriado para ser a estrutura variacional de (2.8) é o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$E := \left\{ u \in H^1\left(\mathbb{R}^2\right) : \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2 dx < \infty \right\}. \tag{2.9}$$

Defina para qualquer função mensurável $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o seguinte produto escalar e norma

$$\langle u, v \rangle_* = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)uvdx, \tag{2.10}$$

$$\|u\|_*^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2 dx \in [0, \infty]. \tag{2.11}$$

Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\inf_{\mathbb{R}^2} V > 0$. Definamos o produto escalar e a norma em $H^1(\mathbb{R}^2)$ como sendo

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)dx \tag{2.12}$$

e

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right) dx \right)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Então, definiremos a norma em E como sendo

$$\|u\|_E = \left(\|u\|^2 + \|u\|_*^2 \right)^{1/2},$$

isto é,

$$\|u\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 + \ln(1+|x|)u^2 \right] dx \right)^{1/2}. \tag{2.14}$$

2.2 A FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Esta seção foi inspirada por (CINGOLANI; WETH, 2016) e (BUFOLO, 2018). Primeiramente, iremos mostrar que (2.11) e (2.13) são normas para concluirmos que (2.14) é uma norma. Em virtude de $\|u\|_*^2 = \langle u, u \rangle_*$ e $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$, provaremos que (2.10) e (2.12) estão bem definidos, isto é, $\langle u, v \rangle_*$ e $\langle u, v \rangle$ só assumem valores finitos e são produtos internos.

Depois disso, nosso próximo passo será fazer algumas demonstrações prévias aos quais comprovem que (2.9) seja o espaço apropriado para buscar as soluções da equação (2.8), que está associada ao sistema (2.7), isto é, o espaço pretendido tem que ser um espaço vetorial munido de uma estrutura métrica e precisa ser completo.

Proposição 2.1. *Sejam $u, v \in E$. Então*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)uvdx \right| < \infty. \tag{2.15}$$

Demonstração. Note que pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)uvdx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\ln(1+|x|)uv|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left|\ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}u\right| \left|\ln(1+|x|)^{\frac{1}{2}}v\right| dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

em razão de $u, v \in E$. □

Proposição 2.2. *$\langle u, v\rangle_*$ é um produto interno em E.*

Demonstração. Como (2.15) é satisfeito, teremos que mostrar somente a simetria, bilinearidade e positividade. Tomemos $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. (Simetria)

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_* &= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)uvdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)vudx \\
&= \langle v, u\rangle_*.
\end{aligned}$$

2. (Bilinearidade)

$$\begin{aligned}
\langle u+\alpha v, w\rangle_* &= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)(u+\alpha v)wdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)uw + \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)vwdxdx \\
&= \langle u, w\rangle_* + \alpha\langle v, w\rangle_*.
\end{aligned}$$

É análogo para provar que $\langle u, w+\alpha v\rangle_* = \langle u, w\rangle_* + \alpha\langle u, v\rangle_*$.

3. (Positividade) Obviamente,

$$\langle u, u\rangle_* = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2dx \geq 0,$$

pois u^2 e $\ln(1+|x|)$ são não negativos. E caso

$$\langle u, u\rangle_* = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2dx = 0,$$

podemos afirmar que $\ln(1+|x|)u^2(x) = 0$, q.t.p em $\mathbb{R}^2$, assim, $\ln(1+|x|) = 0$ não pode ocorrer, pois implicará que $|x| = 0$ e $\{0\}$ é um conjunto de medida nula. Portanto, $u^2 = 0$, q.t.p em $\mathbb{R}^2$, então $u = 0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Portanto, $\langle u, v\rangle_*$ está bem definido. $\square$

Temos que a norma usual em $H^1(\mathbb{R}^2)$ é proveniente deste produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^2} uv dx.$$

Proposição 2.3. *$\langle u, v\rangle$ é um produto interno em E.*

Demonstração. Como $u, v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, inferimos que $\left|\langle u, v\rangle_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right| < \infty$. Note que

$$\begin{aligned}
|\langle u, v\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv) dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x) uv dx\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \sup_{x\in\mathbb{R}^2} V(x) \int_{\mathbb{R}^2} uv\right| dx \\
&\leq \max\left\{1, \sup_{x\in\mathbb{R}^2} V(x)\right\} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u \cdot \nabla v|\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} |uv|\, dx\right) \\
&= \max\left\{1, \sup_{x\in\mathbb{R}^2} V(x)\right\} \left|\langle u, v\rangle_{H^1(\mathbb{R}^2)}\right| \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Sejam $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. (Simetria)

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla v + V(x) uv dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \cdot \nabla u + V(x) vu dx \\
&= \langle v, u\rangle.
\end{aligned}$$

2. (Bilinearidade)

$$\begin{aligned}
\langle u + \alpha v, w\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(u + \alpha v) \cdot \nabla w + V(x)(u + \alpha v) w dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u + \alpha \nabla v) \cdot \nabla w + V(x)(u + \alpha v) w dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla w + \alpha \nabla v \cdot \nabla w + V(x) uw + \alpha a(x) vw dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla w + V(x) uw dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \cdot \nabla w + V(x) vw dx \\
&= \langle u, w\rangle + \alpha \langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

É análogo para provar que $\langle u, w + \alpha v\rangle = \langle u, w\rangle + \alpha \langle u, v\rangle$.

3. (Positividade)

$$\begin{aligned} \langle u, u\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla u + V(x)uu)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx \geq 0, \end{aligned}$$

já que $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, (0,\infty))$ é positivo.

Por outro lado, se $\langle u, u\rangle = 0$ então $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx = 0$ e pelo fato de $|\nabla u|^2 \geq 0$ e $V(x)u^2 \geq 0$, podemos concluir que $|\nabla u| = 0$ e $u = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$, pois $V > 0$.

Portanto, $\langle u, v\rangle$ é, de fato, um produto interno. □

Agora, mostraremos que E é um subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^2)$, ou seja, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in E$ implica que $\alpha u + \beta v \in E$ e em sequência provaremos que E é um espaço completo.

Proposição 2.4. *E é um subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Perceba que tomando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, inferimos que por u, v pertencerem a E e por (2.15) que

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^2} \left[\ln(1+|x|)(\alpha u + \beta v)^2(x)\right] dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \left[\ln(1+|x|)(\alpha^2 u^2(x) + 2\alpha u(x)\beta v(x) + \beta^2 v^2(x)\right] dx\right| \\ &= \left|\alpha^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\ln(1+|x|)u^2(x)dx + 2\alpha\beta \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\right] dx \right. \\ &\quad \left. +\beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)dx\right| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo, segue o resultado. □

Utilizaremos o espaço de Lebesgue ponderado $L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$ para mostrar que E é completo, cuja medida será definida a seguir. Considere

$$\mu : \mathcal{M} \to [-\infty, +\infty]; \mu(E) = \int_E \ln(1+|x|)dx,$$

em que $\mathcal{M}$ é uma σ-algebra de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$. Antes de prosseguir devemos mostrar que μ é uma medida.

Proposição 2.5. *μ é uma medida sobre $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{M}$.

1. Usaremos a definição de integral de Lebesgue, então precisamos argumentar que μ é não negativa para concluir que $\mu(\emptyset) = 0$. Como $\ln(1+|x|)$ é não negativa, infere-se que

$$\mu(A) = \int_A \ln(1 + |x|)dx \geq 0.$$

2. Seja A_i uma família disjunta contável de membros de $\mathcal{M}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \ln(1+|x|)dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \ln(1+|x|)dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos o resultado. □

Por consequência da Proposição 2.5, temos que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida. Lembrando que uma função mensurável no que se refere a um espaço de medida, só depende da σ-álgebra do espaço. Nesse sentido, uma função é $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$-mensurável se, e somente se, é Lebesgue mensurável. Além do mais, o fato de pudermos escolher o espaço de Lebesgue ponderado $L^2\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu\right)$ é em razão da $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2,\mathcal{M},\mu)} = \|u\|_*$, e essa igualdade será provada logo abaixo.

Proposição 2.6. *Se u:* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma função Lebesgue mensurável, então* $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2,\mathcal{M},\mu)} = \|u\|_*$.

Demonstração. Para mostrarmos que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2,\mathcal{M},\mu)} = \|u\|_*$, devemos mostrar que

$$\int_A u d\mu = \int_A \ln(1+|x|)u(x)dx,$$

sendo que $A \in \mathcal{M}$. Seja A_i uma família disjunta contável de membros de $\mathcal{M}$ e consideremos $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Desse modo, pela função indicadora e pela definição da integral de Lebesgue dessa mesma função, infere-se

$$\begin{aligned}
\int_A u d\mu &= \int_A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}\right) 1_A d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i \cap A} d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} 1_{A_i \cap A} d\mu
\end{aligned}$$

Daí, novamente pela função indicadora e pela definição da integral de Lebesgue em subconjuntos mensuráveis, temos

$$\begin{aligned}
\int_A u d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(A_i \cap A\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i \cap A} \ln(1+|x|) dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) 1_{A_i \cap A} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) 1_{A_i} 1_A dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A} \ln(1+|x|) 1_{A_i} dx \\
&= \int_A \ln(1+|x|) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_1} dx \\
&= \int_A \ln(1+|x|) u(x) dx. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Agora, consideremos que u é uma função mensurável não negativa. Assim, pela propriedade de funções simples, temos que exite uma sequência não decrescente (u_n) convergindo para $u(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$. Então, (2.16) implica que

$$\begin{aligned}
\int_A u d\mu &= \lim \int_A u_n d\mu \\
&= \lim \int_A \ln(1+|x|) u_n(x) dx \\
&= \int_A \ln(1+|x|) u(x) dx. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Já que as funções u^+ e u^- são positivas por definição, $\ln(1+|x|)$ é não negativa e vale (2.17), podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
\int_A u d\mu &= \int_A u^+ d\mu - \int_A u^- d\mu \\
&= \int_A \ln(1+|x|) u^+(x) dx - \int_A \ln(1+|x|) u^-(x) dx \\
&= \int_A (\ln(1+|x|) u(x))^+ dx - \int_A (\ln(1+|x| u(x))^- dx \\
&= \int_A \ln(1+|x|) u(x) dx.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_A \ln(1+|x|) u^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\|_*,
\end{aligned}$$

no que segue o resultado. □

Proposição 2.7. *O espaço E munido da norma $\|u\|_E$ é completo.*

Demonstração. Note que a partir da Proposição 2.6, deduz-se

$$\begin{aligned} L^2\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu\right) &= \left\{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 < \infty\right\} \\ &= \left\{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \|u\|_2^2 < \infty\right\} \\ &= \left\{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \|u\|_*^2 < \infty\right\} \\ &= \left\{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \ln(1+|x|)u^2(x)dx < \infty\right\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida, podemos concluir pelo Teorema de Riesz-Fischer que $L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de Banach, e em particular é um espaço completo. Então, (2.18) nos traz

$$E := \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^2\right) : \int_{\mathbb{R}^2} [\ln(1+|x|)]u^2 dx < \infty\right\} = H^1\left(\mathbb{R}^2\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}, \mu\right).$$

Portanto, E é um espaço completo. □

3 O SISTEMA DE SCHRÖDINGER-POISSON AXIALMENTE SIMÉTRICO EM DIMENSÃO DOIS

Lembrando que o sistema que estudaremos será

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda\phi u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \Delta\phi = u^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

e sua respectiva equação será

$$-\Delta u + V(x)u + \left(\Gamma_2 * u^2\right) u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{3.2}$$

Perceba que o potencial $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, (0,\infty))$ e $f(x,u)$ são assumidos como sendo obrigatoriamente axialmente simétrico.

A simetria axial é mais geral que a simetria radial, como havíamos mencionado na introdução desse trabalho, e essa afirmação será demonstrada abaixo. Lembrando que dada uma função h qualquer, temos que h é axialmente simétrica no plano quando $h(x_1,x_2) = h(|x_1|,|x_2|)$ e h é radialmente simétrica no plano quando $h(x) = h(|x|) = h(|(x_1,x_2|)$.

Afirmamos que a simetria radial implica na simetria axial.

De fato, note que

$$\begin{aligned} h(x_1,x_2) = h(|x|) &= h(|(x_1,x_2)|) \\ &= h\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) \\ &= h\left(\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}\right) \\ &= h(|(|x_1|,|x_2|)|) \\ &= h(|x_1|,|x_2|). \end{aligned}$$

Porém, a simetria axial não implica na simetria radial, como por exemplo acontece na função $h(x_1,x_2) = |x_1| + |x_2|^2$ que é axialmente simétrica mas não é radialmente simétrica, já que

$$h(1,2) = |1| + |2|^2 = h(|1|,|2|)$$

no entanto, mesmo que $|(1,2)| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{2^2+1^2} = |(2,1)|$, temos que

$$h(1,2) = |1| + |2|^2 = 5 \neq 3 = 2 + 1^2 = h(2,1).$$

Agora, exporemos as hipóteses que serão utilizadas no problema, como também, o espaço apropriado para se buscar soluções e, logo após, explicitar o problema que será proposto em três Teoremas.

Segue abaixo as hipóteses a respeito de f e V.

(V_0) $V \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2,(0,\infty)\right), \inf_{x\in\mathbb{R}^2} V(x) > 0$ e $V(x) := V\left(x_1,x_2\right) = V\left(|x_1|,|x_2|\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(V_1) Existe uma sequência $(t_n) \subset (0,\infty)$ de tal modo que $t_n \to \infty$ e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2,n\in\mathbb{N}} \frac{V\left(t_n^{-1}x\right)}{V(x)} < \infty;$$

(F_1) $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right), f(x,t) := f\left(x_1,x_2,t\right) = f\left(|x_1|,|x_2|,t\right), \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ e existe uma constante $\mathcal{C}_0 > 0$ e $p \in (2,\infty)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \mathcal{C}_0\left(1+|t|^{p-1}\right), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R};$$

(F_2) $f(x,t) = o(|t|)$ quando $t \to 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$;

(F_3) $\inf_{x\in\mathbb{R}^2,t\neq 0} \dfrac{F(x,t)}{t^2} > -\infty$;

(F_4) Existe $\theta \in [0,1)$ de tal modo que

$$\left[\frac{f(x,\tau)}{\tau^3} - \frac{f(x,t\tau)}{(t\tau)^3}\right] sinal(1-t) + \theta V(x)\frac{|1-t^2|}{(t\tau)^2} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \tau \neq 0;$$

(F_5) Existe $\beta > 0$ tal que

$$f(x,t)t - 4F(x,t) \geq -4\beta t^2, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R};$$

(F_6) $f(x,t) - a(x)t^3 = o\left(|t|^3\right)$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$ quando $|t| \to \infty$, onde $a \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2,[0,\infty)\right)$ é axialmente simétrico;

(F_7) Existem $\kappa > 1, c_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tal que

$$|f(x,t)|^\kappa \leq c_0|t|^\kappa\left[f(x,t)t - 4F(x,t) + 4\beta t^2\right], \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, \quad |t| \geq R_0;$$

(F_8) Existem $c_1 > 0, R_1 > 0$ e $\nu \in (0,2)$ tais que

$$F(x,t) \leq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c_1|t|^\nu}\right) f(x,t)t \quad \text{para } |t| \geq R_1.$$

Observação. Se V for limitada ou monótona, isto é, $V \in L^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ ou $V(tx) \leq V(x)$, em que $t \in (0,1]$ e $x \in \mathbb{R}^2$, temos por (V_0) que (V_1) é satisfeita. Além disso, também existem funções ilimitadas e não monótonas que satisfazem (V_0) e (V_1), como por exemplo, $V(x) = 1 + |x_2|\left[1+\sin^2\left(\pi|x_1|\right)\right]$ com $t_n = n$. É óbvio que essa função $V(x)$ verifica (V_0) e para perceber que verifica (V_1), basta notar que o numerador da fração abaixo tende para 1

$$\frac{V(t_n^{-1})}{V(x)} = \frac{V(\frac{x}{n})}{V(x)} = \frac{1+\left|\frac{|x_2|}{n}\right|\left[1+\sin^2\left(\pi\frac{|x_1|}{n}\right)\right]}{1+|x_2|\left[1+\sin^2\left(\pi|x_1|\right)\right]}.$$

Exemplo 1. $f_1(x,t) = b|t|^{p-2}t$ com $b \geq 0$ e $p \geq 4$ satisfaz (F_1)-(F_3) e (F_5).

De fato f_1 satisfaz (F_1), pois é imediato que f_1 é axialmente simétrica e, perceba que dado $\mathcal{C} > 0$, obtemos

$$|f_1(x,t)| = |b|t|^{p-2}t| = b|t|^{p-1} \leq \mathcal{C} + b|t|^{p-1} \leq \mathcal{C}_0(1+|t|^{p-1}), \text{ sendo que } \mathcal{C}_0 = \max\{\mathcal{C}, b\}.$$

Assim como, f_1 satisfaz (F_2), já que

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f_1(x,t)|}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{|b|t|^{p-2}t|}{|t|} = \lim_{t\to 0} b|t|^{p-2} = 0.$$

Além disso, f_1 satisfaz (F_3), pois como $F_1(x,t) = \dfrac{b}{p}|t|^p$, segue que

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^2, t\neq 0} \frac{F_1(x,t)}{t^2} = \inf_{x\in\mathbb{R}^2, t\neq 0} \frac{b}{p}\frac{|t|^p}{t^2} = \inf_{x\in\mathbb{R}^2, t\neq 0} \frac{b}{p}|t|^{p-2} \geq 0.$$

Por fim, f_1 satisfaz (F_5), devido a

$$\begin{aligned} f_1(x,t)t - 4F_1(x,t) &= \left(b|t|^{p-2}t\right)t - 4\frac{b}{p}|t|^p \\ &= |t|^p b\left(1 - \frac{4}{p}\right) \\ &\geq 0 \\ &\geq -4\beta t^2, \text{ em que } \beta > 0. \end{aligned}$$

Perceba que tomando $b = 1$ e $p = 4$ é imediato que f satisfaz (F_4).

Exemplo 2. $f_2(x,t) = a(x)t^3$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ satisfaz (F_6), em que $a(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, [0,\infty))$ é axialmente simétrico. Em consequência de

$$\frac{|f_2(x,t) - a(x)t^3|}{|t|^3} = \frac{|a(x)t^3 - a(x)t^3|}{|t|^3} = 0$$

Note que f_2 também satisfaz (F_1)-(F_3) e (F_5), basta tomarmos o p presente na função f_1 do Exemplo 1, como sendo igual a 4.

Considere o seguinte subconjunto de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$H^1_{as}\left(\mathbb{R}^2\right) := \left\{u \in H^1\left(\mathbb{R}^2\right) : u(x) := u(x_1, x_2) = u(|x_1|, |x_2|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2\right\}. \tag{3.3}$$

Dessa forma, o espaço adequado para se procurar solução, quando os funcionais são axialmente simétricos, será

$$E_{as} = \left\{u \in H^1_{as}\left(\mathbb{R}^2\right) : \int_{\mathbb{R}^2} [V(x) + \ln(1+|x|)]u^2 dx < \infty\right\}. \tag{3.4}$$

Temos que se $V(x)$ satisfaz (V_0), então podemos dotar $H^1(\mathbb{R}^2)$ com o produto escalar e com a seguinte norma

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)dx \tag{3.5}$$

e

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx\right)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Por fim, o conjunto

$$E_{as} = \left\{u \in H^1_{as}\left(\mathbb{R}^2\right) : \|u\|^2 + \|u\|_*^2 < \infty\right\}$$

é um espaço de Hilbert equipado com a norma

$$\|u\|_{E_{as}} = \left(\|u\|^2 + \|u\|_*^2\right)^{1/2}. \tag{3.7}$$

O funcional energia $\Phi : E_{as} \to \mathbb{R}$ associado a (3.2) é dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx.$$

Posteriormente, mostraremos que ele está bem definido.

Uma condição necessária para que $u \in E_{as}$ seja um ponto crítico de Φ é que $\langle \Phi'(u), u\rangle = 0$. Diante disso, defina a Variedade de Nehari como sendo

$$\mathcal{N} := \left\{u \in E_{as}\backslash\{0\} : \langle \Phi'(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca do problema (3.2) se satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u \nabla v + V(x)uv\right) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}(x)uv\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u)v\, dx, \quad \forall\, v \in E.$$

Dizemos que uma solução $u \neq 0$ é uma ground state ou uma solução de energia mínima do tipo Nehari de (3.2) se

$$\Phi(u) = \inf_{\mathcal{N}} \Phi.$$

Se u é uma solução fraca para (3.2), então o par $(u, \phi_{2,u})$ é uma solução para o sistema (3.1).

Os resultados referentes ao problema deste trabalho estão exposto nos Teoremas abaixo e nosso objetivo é demonstrá-los.

Teorema 3.1. *Suponha que V e f satisfazem (V_0), (V_1) e (F_1)-(F_4). Então a equação* (3.2) *tem uma solução $u_0 \in E_{as}$ tal que $\Phi(u_0) = \inf_{\mathcal{N}} \Phi > 0$.*

Teorema 3.2. *Suponha que V e f satisfazem (V_0), (V_1), (F_1)-(F_3), (F_5) e (F_6). Então a equação* (3.2) *tem uma solução não trivial $u_0 \in E_{as}$.*

Teorema 3.3. *Suponha que V e f satisfazem (V_0), (V_1), (F_1)-(F_3), (F_5) e (F_7). Então a equação* (3.2) *tem uma solução não trivial $u_0 \in E_{as}$.*

3.1 A FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Nesta subseção iremos estabelecer a formulação variacional relacionada ao problema (3.1), argumentando a boa definição do espaço E_{as}. Além de definir os funcionais I_1, I_2 e I_3 que são imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho, bem como, o funcional energia associado à equação (3.2) e esclarecer a sua boa definição.

Defina as seguintes formas bilineares simétricas:

$$\begin{aligned}(u,v) &\mapsto A_1(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u(x)v(y)dxdy,\\ (u,v) &\mapsto A_2(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u(x)v(y)dxdy\end{aligned}$$

e

$$(u,v) \mapsto A_0(u,v) = A_1(u,v) - A_2(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u(x)v(y)dxdy, \tag{3.8}$$

donde $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, de modo que a integral dupla correspondente seja bem definida no sentido de Lebesgue.

A partir das formas bilineares A_1, A_2 e A_0, definamos os seguintes funcionais:

$$\begin{aligned}I_1 : H^1(\mathbb{R}^2) \to [0,\infty], \quad I_1(u) &= A_1(u^2,u^2)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)dxdy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 : L^{8/3}(\mathbb{R}^2) \to [0,\infty), \quad I_2(u) &= A_2(u^2,u^2)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)u^2(y)dxdy\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}I_0 : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}, \quad I_0(u) = I_1(u) - I_2(u) &= A_0(u^2,u^2)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)dxdy.\end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos perceba que as normas $\|u\|^2$ e $\|u\|_*^2$ estão bem definidas em E_{as}, por argumentos similares aos que foram feitos na Proposição 2.2 e Proposição 2.3. Portanto, omitiremos.

3.1.1 O espaço E_{as}

Vamos argumentar a boa definição do espaço (3.4), uma vez que ele é adequado para buscar as soluções da equação (3.2), o que significa que ele é um espaço vetorial completo munido de uma estrutura métrica e seu funcional só assume valores reais.

Proposição 3.1. *E_{as} é um subespaço vetorial de $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Queremos mostrar que dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in E_{as}$ implica que $\alpha u + \beta v \in E_{as}$.

Antes de prosseguir precisamos mostrar que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)uvdx\right| < \infty, \quad u, v \in E_{as}. \tag{3.9}$$

De fato, a partir de (V_0), desigualdade de Hölder e por $u, v \in E_{as}$, deduz-se

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)uvdx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\ln(1+|x|)uv|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left|\ln(1+|x|)^{1/2}u\right| \left|\ln(1+|x|)^{1/2}v\right| dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)dx\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} [V(x)+\ln(1+|x|)]u^2dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} [V(x)+\ln(1+|x|)]v^2dx\right)^{1/2} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in E_{as}$. Então em razão de (3.9) e por $u, v \in E_{as}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \Big[V(x) + \ln(1+|x|)(\alpha u + \beta v)^2(x)\Big] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Big[V(x) + \ln(1+|x|)(\alpha^2 u^2(x) + 2\alpha u(x)\beta v(x) + \beta^2 v^2(x))\Big] dx \\
&= \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^2} \Big[V(x) + \ln(1+|x|)u^2(x)dx + 2\alpha\beta \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\Big] dx \\
&\quad + \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)v^2(x)dx \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, E_{as} é um subespaço vetorial. $\square$

Por fim, a demonstração de que o espaço E_{as} é completo é análoga ao que fizemos na formulação variacional do sistema planar de Schrödinger-Poisson.

Proposição 3.2. *E_{as} é imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Considere (u_n) uma sequência em E_{as} convergindo para $\bar{u} \in E_{as}$, ou seja, $\|u_n - \bar{u}\|_{E_{as}} \to 0$. Observe que como

$$\sqrt{\|u_n - \bar{u}\|^2 + \|u_n - \bar{u}\|_*^2} = \|u_n - \bar{u}\|_{E_{as}} \to 0,$$

então $\|u_n - \bar{u}\| \to 0$, isto é, $u_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\longrightarrow} \bar{u}$. Portanto, considerando a aplicação imersão $i : E_{as} \to H^1(\mathbb{R}^2)$ dada por $i(x) = x$, teremos que

$$\lim \|i(u_n) - i(\bar{u})\| = \lim \|u_n - \bar{u}\| = 0,$$

o que nos traz que i é continua. $\square$

Proposição 3.3. *E_{as} é imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^2)$, donde $2 \leq p < +\infty$.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes:

Parte 1. Considere $p = 2$. Suponha, por contradição, que existe uma sequência (u_n) em E_{as} convergindo fraco para $\bar{u} \in E_{as}$ e (u_n) não convergindo forte para $\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Definamos uma sequência $w_n := u_n - \bar{u}$, então teremos que $w_n \overset{E_{as}}{\rightharpoonup} 0$ e $w_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\not\longrightarrow} 0$. Esse primeiro nos traz que existe $C > 0$ tal que $\|w_n\|_{E_{as}} \leq C$. Logo, pelas normas serem não negativas, temos que

$$\|w_n\|_* \leq \sqrt{\|w_n\|^2 + \|w_n\|_*^2} = \|w_n\|_{E_{as}} \leq C. \tag{3.10}$$

Ademais, como $w_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\not\longrightarrow} 0$, então para todo $k_0 \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma subsequência $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $k > k_0$ implica

$$\|w_{n_k}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} > \varepsilon_0. \tag{3.11}$$

Por outro lado, note que a partir da Proposição 3.2 e por $w_n \overset{E_{as}}{\rightharpoonup} 0$, podemos concluir que $w_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} 0$, e em particular, existe $r > 0$ tal que w_n tende fraco para 0 em $H^1(B(0,r))$. Diante disso, pelo fato da $B(0,r)$ ser limitada, inferimos pelo Teorema A.5 (Ver Apêndice) que $H^1(B(0,r)) \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(B(0,r))$. Por conta disso, $w_n \overset{L^2(B(0,r))}{\longrightarrow} 0$, o que significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$$\|w_n\|_{L^2(B(0,r))} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3.12}$$

Agora, tomemos $R > 0$ de tal forma que $R > \mathrm{e}^{2C^2/\varepsilon} - 1$. Daí, dado $x \in \mathbb{R}^2 \backslash B(0,R)$ e em consequência do logaritmo ser crescente e positivo, deduz-se que

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} w_n^2(x)dx &= \int_{B(0,R)} w_n^2(x)dx + \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,R)} w_n^2(x)dx \\
&= \int_{B(0,R)} w_n^2(x)dx + \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,R)} \frac{\ln(1+|x|)}{\ln(1+|x|)} w_n^2(x)dx \\
&\leq \int_{B(0,R)} w_n^2(x)dx + \frac{1}{\ln(1+R)} \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,R)} \ln(1+|x|) w_n^2(x)dx \\
&\leq \int_{B(0,R)} w_n^2(x)dx + \frac{1}{\ln(1+R)} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|) w_n^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Desse modo, (2.11), (3.10), (3.12) e $n \geq n_0$, nos traz

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \|w_n\|_{L^2(B(0,R))}^2 + \frac{1}{\ln(1+R)} \|w_n\|_*^2 \\
&< \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}^2 + \frac{1}{\ln(1+R)} \|w_n\|_*^2 \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\ln(1+R)} \|w_n\|_*^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C^2}{\ln(1+R)},
\end{aligned}$$

o que acarreta em

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C^2}{\ln\left(1 + \mathrm{e}^{2C^2/\varepsilon} - 1\right)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C^2}{\ln\left(\mathrm{e}^{2C^2/\varepsilon}\right)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C^2}{(2C^2/\varepsilon)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Contradição, pois supomos (3.11). Logo, $E_{as} \overset{C}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo $p = 2$.

Parte 2. Considere $p > 2$. Note que a Proposição 3.2 e o Teorema A.4 (Ver Apêndice) nos traz que $E_{as} \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, em que $2 \leq q < +\infty$, e seja (u_n) uma sequência em E_{as} convergindo fraco para $\bar{u} \in E_{as}$. Definamos uma sequência $w_n := u_n - \bar{u}$, sendo assim, $w_n \in L^{p+1}(\mathbb{R}^2)$ e $w_n \overset{E_{as}}{\rightharpoonup} 0$. Ademais, seguindo o mesmo procedimento feito na Parte 1, podemos afirmar que E_{as} está compactamente imerso em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e, consequentemente,

$$w_n \overset{L^2(\mathbb{R}^2)}{\longrightarrow} 0\ . \tag{3.13}$$

Além disso, note que a partir da Proposição 3.2 e por $w_n \overset{E_{as}}{\rightharpoonup} 0$, podemos concluir que $w_n \overset{H^1(\mathbb{R}^2)}{\rightharpoonup} 0$. Esse último nos traz que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|w_n\| \leq C_1. \tag{3.14}$$

Além do mais, pelas imersões $E_{as} \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ temos que existe $C_2 > 0$ satisfazendo

$$\|w_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^2)} \leq C_2 \|w_n\|. \tag{3.15}$$

Então, por (3.14), (3.15) e pela Proposição A.1(Ver Apêndice) temos que

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\leq \|w_n\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|w_n\|^{1-\theta}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C_2 \|w_n\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|w_n\|^{1-\theta} \\ &\leq C_2 \|w_n\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^2)} {C_1}^{1-\theta}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Perceba que por (3.13) e (3.16) concluímos que $\lim \|w_n\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = 0$, isto é, $w_n \overset{L^p\left(\mathbb{R}^2\right)}{\longrightarrow} 0$, o que implica que $u_n \overset{L^p\left(\mathbb{R}^2\right)}{\longrightarrow} \bar{u}$. Portanto, $E_{as} \overset{C}{\hookrightarrow} L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo $2 \leq p < \infty$. □

3.1.2 O funcional energia associado

Vamos mostrar a boa definição dos funcionais I_1, I_2 e I_0 que foram introduzidos, pois esses resultados serão essenciais para mostrar que o funcional energia do problema (3.1) foi bem definido.

Proposição 3.4. *Sejam $u, v, w, z \in E_{as}$. Então*

$$|A_1(uv, wz)| \leq \|u\|_*\|v\|_*\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|z\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|w\|_*\|z\|_*.$$

Demonstração. Como a função logarítmica é não negativa quando o logaritmando é maior ou igual a 1, temos que

$$\begin{aligned} |A_1(uv, wz)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|) u(x)v(x)w(y)z(y) dx dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\ln(1 + |x-y|) u(x)v(x)w(y)z(y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1 + |x-y|) |u(x)v(x)||w(y)z(y)| dx dy. \end{aligned}$$

Além disso, pela Proposição A.2(Ver apêndice) e desigualdade de Hölder, infere-se

$$\begin{aligned}
|A_1(uv, wz)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} (\ln(1+|x|) + \ln(1+|y|))|u(x)v(x)||w(y)z(y)|dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)v(x)||w(y)z(y)|dxdy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)|u(x)v(x)||w(y)z(y)|dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |w(y)z(y)|dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)|u(x)v(x)|dx\right) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)|w(y)z(y)|dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)v(x)|dx\right) \\
&\leq \|u\|_*\|v\|_*\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|z\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|w\|_*\|z\|_*\|w\|.
\end{aligned}$$

Logo, segue o resultado. □

Proposição 3.5. *((LOSS; LIEB, 2001), p. 106) A desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev em $L^p(\mathbb{R}^N)$ afirma que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\right| x-y|^{-\lambda} v(y)dxdy \mid \leq C_{N,\lambda,p}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^N)},$$

para quaisquer $u \in L^p(\mathbb{R}^N), v \in L^r(\mathbb{R}^N)$, sendo $p, r > 1$ e $0 < \lambda < N$ satisfazendo $1/p + \lambda/N + 1/r = 2$. Por definição $C_{N,\lambda,p}$ é a melhor constante na desigualdade acima.

Proposição 3.6. *Sejam $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis, tais que $u, v \in L^{4/3}(\mathbb{R}^2)$. Então existe $\mathcal{C}_1 > 0$ de tal modo que*

$$|A_2(u,v)| \leq \mathcal{C}_1\|u\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}\|v\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.17}$$

Demonstração. Considere $p = r = 4/3$, $N = 2$ e $\lambda = 1$. Diante disso, observe que

$$\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{r} = \frac{1}{4/3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Além de que $u, v \in E \subset H^1_{as}(\mathbb{R}^2) \subset H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^{4/3}(\mathbb{R}^2)$. Daí, aplicando a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev que é a Proposição 3.5, obtemos

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-y|}|u(x)v(y)|dxdy\right| \leq \mathcal{C}_1\|u\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}\|v\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.18}$$

Observe que $0 \leq \ln(1+b) \leq b$ para $b \geq 0$, e isso combinado a (3.18) implica em

$$\begin{aligned}
|A_2(u,v)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) u(x)v(y)dxdy\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-y|}|u(x)v(y)|dxdy\right| \\
&\leq \mathcal{C}_1\|u\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}\|v\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. □

Proposição 3.7. *Seja $u \in E_{as}$. Então*

$$I_1(u) - I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}(x) u^2 dx$$

Demonstração. É imediato que por (2.6), infere-se

$$\begin{aligned} I_1(u) - I_2(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) u^2(x) u^2(y) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) u^2(y) dy \right) u^2(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}(x) u^2(x) dx. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado □

Corolário 3.1. *O funcional I_1 está bem definido.*

Demonstração. Temos que mostrar somente que $I_1(u) \in [0, \infty)$, para todo $u \in E_{as}$. Primeiramente, note que $I_1(u) \geq 0$, já que os termos na integral de $I_1(u)$ são não negativos. Além disso, pela Proposição 3.4, deduz-se

$$I_1(u) = A_1(u^2, u^2) \leq 2\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u\|^2_*.$$

Daí, por $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ temos que existe $C_1 > 0$ satisfazendo

$$I_1(u) \leq C_1 \|u\|^2 \|u\|^2_* < \infty,$$

pois como $u \in E_{as}$, temos que $\|u\|^2, \|u\|^2_* < \infty$. □

Corolário 3.2. *Seja $u \in E_{as}$. Então existem $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 > 0$ tais que*

$$|I_2(u)| \leq \mathcal{C}_1 \|u\|^4_{L^{8/3}(\mathbb{R}^2)} \leq \mathcal{C}_2 \|u\|^4, \quad \forall u \in L^{8/3}(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Note que (3.17) nos traz

$$|I_2(u)| = \left| A_2(u^2, u^2) \right| \leq \mathcal{C}_1 \|u^2\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)} \|u^2\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{C}_1 \|u^2\|^2_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |I_2(u)| &\leq \mathcal{C}_1 \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(u^2\right)^{4/3} dx \right)^{3/4} \right)^2 \\ &= \mathcal{C}_1 \left(\left(\int_{\mathbb{R}^2} u^{8/3} dx \right)^{3/8} \right)^4 \\ &= \mathcal{C}_1 \|u\|^4_{L^{8/3}(\mathbb{R}^2)} < \infty. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Como foi mencionado anteriormente o funcional energia associado a (3.2) é

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx \tag{3.19}$$

A seguir mostraremos que ele está bem definido em E_{as}, isto é, que seus termos são finitos. Para isso, perceba que a partir de (F_1) e (F_2), podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ que satisfaz

$$f(x,u)u \leq \varepsilon u^2 + C_\varepsilon |u|^p, \quad F(x,u) \leq \varepsilon u^2 + C_\varepsilon |u|^p, \quad \forall (x,u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Proposição 3.8. *O funcional Φ está bem definido em E_{as}.*

Demonstração. Veja que por (V_0), pelo Corolário 3.1, Corolário 3.2, Proposição 3.7 e (3.20) temos que

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\left[I_1(u) - I_2(u)\right] - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx\end{aligned}$$

podemos concluir que os termos $\Phi(u)$ são finitos. □

Então, as soluções de (3.2) são os pontos críticos de (3.19). É importante ressaltar que

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\left[I_1(u) - I_2(u)\right] - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx, \tag{3.21}$$

pois esse funcional será bastante usando durante esse trabalho.

Além disso, $\Phi \in \mathcal{C}^1(E_{as}, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)dx + A_1\left(u^2, uv\right) - A_2\left(u^2, uv\right) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u)v dx. \tag{3.22}$$

Note ainda que

$$\langle \Phi'(u), u\rangle = \|u\|^2 + I_1(u) - I_2(u) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u)u dx. \tag{3.23}$$

Desde que o funcional Φ está definido no espaço E_{as} e a noção de solução para o problema (3.1) é introduzida referente ao espaço E, iremos introduzir um princípio da criticalidade de Palais adequado ao nosso problema, de modo a buscar soluções no funcional restrito ao espaço E_{as}.

Lema 3.1. *Suponha que (V_0), (F_1) e (F_2) sejam satisfeitas. Se u é um ponto crítico de Φ restrito a E_{as}, então u é um ponto crítico de Φ em E.*

Demonstração. Considere o seguinte grupo de transformação $G = \{id, -id, as_1, as_2\}$, de tal modo que as_i é a reflexão no eixo de coordenadas x_i para $i = 1, 2$. Seja a ação de G em E da seguinte forma

$$gu(x) := u\left(g^{-1}x\right).$$

Assim,

$$(id)u = u, \quad (g_1g_2)u = g_1(g_2u), \quad u \mapsto gu \text{ é linear e } \quad \|gu\| = \|u\|,$$

para quaisquer $g, g_1, g_2 \in G$ e $u \in E$. Note que

$$Fix(G) := \{u \in E : gu = u, \forall g \in G\} = E_{as}.$$

Daí, por (V_0), (F_1) e (F_2), obtemos que $\Phi(gu) = \Phi(u)$ para todo $g \in G$ e $u \in E$. Diante disso, a demonstração se conclui pelo Teorema 1.28 do (MAWHIN; WILLEM, 1989).
É importante ressaltar que a leitura dos artigos (TANG, 2014), (TANG; CHENG, 2016), (CHEN; TANG, 2016), (CHEN; TANG, 2017a), (CHEN; TANG, 2017b), (CHEN; TANG, 2017c), (CHEN; TANG, 2017d), (CHEN; TANG, 2018a), (CHEN; TANG, 2018b), (CHEN; TANG, 2018c) e (TANG; LIN; YU, 2019) e são essenciais para o entendimento desse trabalho, bem como, complementam a teoria aqui exposta. □

3.2 RESULTADOS TÉCNICOS

Considere os seguintes conjuntos:

$$I := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq 0\right\};$$

$$II := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 > 0\right\};$$

$$III := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0, x_2 \leq 0\right\};$$

$$IV := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 < 0\right\}.$$

Proposição 3.9. *Seja* $u \in H^1_{as}(\mathbb{R}^2)$ *então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)dx = 4\int_I u^2(x)dx = 4\int_{II} u^2(x)dx = 4\int_{III} u^2(x)dx = 4\int_{IV} u^2(x)dx. \tag{3.24}$$

Demonstração. Note que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)dx &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx_2 \left(\int_{\mathbb{R}} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left[\left(\int_{-\infty}^{0} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) + \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx_2 \left[\left(\int_{-\infty}^{0} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) + \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right)\right] \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} dx_2 \left[\left(\int_{-\infty}^{0} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) + \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right)\right].
\end{aligned}
$$

Fazendo a distributividade, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} dx_2 \left(\int_{-\infty}^{0} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) + \int_{-\infty}^{0} dx_2 \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} dx_2 \left(\int_{-\infty}^{0} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) + \int_{0}^{\infty} dx_2 \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx_2 \left(\int_{-\infty}^{0} u^2\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right)dx_1\right) + \int_{-\infty}^{0} dx_2 \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right)dx_1\right) \\
&\quad + \int_{0}^{\infty} dx_2 \left(\int_{-\infty}^{0} u^2\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right)dx_1\right) + \int_{0}^{\infty} dx_2 \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right)dx_1\right) \\
&= 4\int_{0}^{\infty} dx_2 \left(\int_{0}^{\infty} u^2\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right)dx_1\right) \\
&= 4\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} u^2\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2 \\
&= 4\int_{I} u^2(x)dx.
\end{aligned}
$$

As outras igualdades podem ser deduzidas de forma análoga. □

Proposição 3.10. *Seja* $u \in H^1_{as}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *então*

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)dx &= 4\int_{I} \ln(1+|x|)u^2(x)dx \\
&= 4\int_{II} \ln(1+|x|)u^2(x)dx \\
&= 4\int_{III} \ln(1+|x|)u^2(x)dx \\
&= 4\int_{IV} \ln(1+|x|)u^2(x)dx. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é similar a Proposição 3.9, por isso omitimos. □

Lema 3.2. *Suponha que* (V_0) *seja satisfeita. Então*

$$I_1(u) \geq \frac{1}{8\pi}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|u\|^2_*, \quad \forall u \in E_{as}.$$

Demonstração. Tome $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ e perceba que se $(x, y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{III}$ ou $(x, y) \in \mathrm{II} \times \mathrm{IV}$, vale

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle \geq |x|^2 + |y|^2 \geq |x|^2,$$

pois $\langle x, y\rangle \leq 0$, em decorrência de x_1 e y_1 terem sinais opostos, bem como x_2 e y_2. Daí, como

$$1 + |x-y| \geq 1 + |x|,$$

conclui-se que

$$\ln(1 + |x-y|) \geq \ln(1 + |x|), \tag{3.26}$$

já que a função logarítmica é crescente. Diante disso, I_1 produz

$$\begin{aligned}
I_1(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy\left(\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+|x-y|)u^2(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy\left(\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+|x-y|)u^2(x)dx\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy\left(\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+|x-y|)u^2(x)dx\right)\right] \\
&\geq \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy\frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+|x-y|)u^2(x)dx\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy\left(\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+|x-y|)u^2(x)dx\right)\right].
\end{aligned}$$

Desse modo, pela Proposição 3.9, Proposição 3.10 e (3.26), infere-se que

$$\begin{aligned}
I_1(u) &\geq \frac{1}{\pi}\left[\int_{III} u^2(y)dy\left(\int_I \ln(1+|x-y|)u^2(x)dx\right)\right. \\
&\quad \left. + \int_{IV} u^2(y)dy\left(\int_{II}\ln(1+|x-y|)u^2(x)dx\right)\right] \\
&\geq \frac{1}{\pi}\left[\int_{III} u^2(y)dy\left(\int_I \ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathrm{IV}} u^2(y)dy\left(\int_{\mathrm{II}}\ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\right].
\end{aligned}$$

Novamente, pela Proposição 3.9 e Proposição 3.10, tem-se

$$
\begin{aligned}
I_1(u) \geq & \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy \left(\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\right.\\
& \left. + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy \left(\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\right]\\
= & \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\right.\\
& \left. + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\right]\\
= & \frac{1}{\pi}\frac{2}{16}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\\
= & \frac{1}{8\pi}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u^2(x)dx\right)\\
= & \frac{1}{8\pi}\left\|u_n\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\left\|u\right\|^2_*, \quad \forall u \in E_{as}.
\end{aligned}
$$

Logo, chegamos ao resultado desejado. □

3.3 A VARIEDADE DE NEHARI

Nesta seção apresentaremos os resultados que diz respeito a Variedade de Nehari. Lembremos que a Variedade de Nehari relacionada ao problema (3.2) é definida por

$$
\mathcal{N} := \{u \in E_{as}\backslash\{0\} : \langle \Phi'(u), u\rangle = 0\},
$$

em que $\Phi \in \mathcal{C}^1(E_{as}, \mathbb{R})$ é o funcional introduzido em (3.19).

Lema 3.3. *Suponha que* (V_0),(F_1),(F_2) *e* (F_4) *sejam satisfeitas. Então*

$$
\Phi(u) \geq \Phi(tu) + \frac{1-t^4}{4}\langle \Phi'(u), u\rangle + \frac{(1-\theta)\left(1-t^2\right)^2}{4}\|u\|^2, \quad \forall u \in E_{as}, \quad t \geq 0. \tag{3.27}
$$

Demonstração. Primeiramente, perceba que por (F_4) e para todo $x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, \tau \neq 0$ tem-se

$$
\begin{aligned}
& \frac{1-t^4}{4}\tau f(x,\tau) + F(x,t\tau) - F(x,\tau) + \frac{\theta V(x)}{4}\left(1-t^2\right)^2\tau^2\\
= & \frac{1-t^4}{4}\tau f(x,\tau) + F(x,t\tau) - F(x,\tau) + \theta V(x)\tau^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\\
= & \int_t^1 s^3 ds \tau f(x,\tau) - \tau\int_t^1 f(x,s\tau)ds + \theta V(x)\tau^2\int_t^1\left(s-s^3\right)ds\\
= & \int_t^1 \frac{f(x,\tau)}{\tau^3}\cdot s^3\tau^4 ds - \int_t^1 \frac{f(x,s\tau)}{(s\tau)^3}\cdot s^3\tau^4 ds + \int_t^1 \theta V(x)\frac{(1-s^2)}{(s\tau)^2}s^3\tau^4 ds\\
= & \int_t^1\left[\frac{f(x,\tau)}{\tau^3} - \frac{f(x,s\tau)}{(s\tau)^3} + \theta V(x)\frac{(1-s^2)}{(s\tau)^2}\right]s^3\tau^4 ds \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Nesse sentido, segue de (3.21) que

$$
\begin{aligned}
\Phi(u)-\Phi(tu) &= \frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}\left[I_1(u)-I_2(u)\right]-\int_{\mathbb{R}^2}F(x,u)dx\\
&\quad-\frac{1}{2}\|tu\|^2-\frac{1}{4}\left[I_1(tu)-I_2(tu)\right]+\int_{\mathbb{R}^2}F(x,tu)dx\\
&=\frac{1}{2}\left(\|u\|^2-t^2\|u\|^2\right)+\frac{1}{4}\left[I_1(u)-I_2(u)\right]\\
&\quad-\frac{1}{4}\left[I_1(tu)-I_2(tu)\right]+\int_{\mathbb{R}^2}[F(x,tu)-F(x,u)]dx. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Além disso, como $I_0(u)=I_1(u)-I_2(u)$, teremos

$$
\frac{1}{4}\left[I_1(u)-I_2(u)\right]-\frac{1}{4}\left[I_1(tu)+I_2(tu)\right]=\frac{1}{4}I_0(u)-\frac{1}{4}t^4I_0(u)=\frac{1-t^4}{4}I_0(u). \qquad (3.30)
$$

Daí, (3.23), (3.29) e (3.30) implicam

$$
\begin{aligned}
\Phi(u)-\Phi(tu) &= \frac{1-t^2}{2}\|u\|^2+\frac{1-t^4}{4}I_0(u)+\int_{\mathbb{R}^2}\left[F(x,tu)-F(x,u)\right]dx\\
&=\left(\frac{1-t^4}{4}+\frac{\left(1-t^2\right)^2}{4}\right)\|u\|^2+\frac{1-t^4}{4}I_0(u)+\frac{1-t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}f(x,u)udx\\
&\quad-\frac{1-t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}f(x,u)udx+\int_{\mathbb{R}^2}\left[F(x,tu)-F(x,u)\right]dx\\
&=\frac{1-t^4}{4}\left(\|u\|^2+I_0(u)-\int_{\mathbb{R}^2}f(x,u)udx\right)+\frac{\left(1-t^2\right)^2}{4}\|u\|^2\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1-t^4}{4}f(x,u)u+F(x,tu)-F(x,u)\right]dx\\
&=\frac{1-t^4}{4}\left\langle\Phi'(u),u\right\rangle+\frac{\left(1-t^2\right)^2}{4}\|u\|^2\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1-t^4}{4}f(x,u)u+F(x,tu)-F(x,u)\right]dx.
\end{aligned}
$$

Acrescentando o termo negativo

$$
-\frac{\theta}{4}\left(1-t^2\right)^2\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2dx,
$$

obteremos

$$
\begin{aligned}
\Phi(u)-\Phi(tu) &\geq \frac{1-t^4}{4}\left\langle\Phi'(u),u\right\rangle+\frac{\left(1-t^2\right)^2}{4}\|u\|^2\\
&\quad+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1-t^4}{4}f(x,u)u+F(x,tu)-F(x,u)\right]dx\\
&\quad-\frac{\theta}{4}\left(1-t^2\right)^2\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2dx
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\Phi(u)-\Phi(tu) &\geq \frac{1-t^4}{4}\langle \Phi'(u),u\rangle + \frac{(1-t^2)^2}{4}\|u\|^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1-t^4}{4}f(x,u)u + F(x,tu) - F(x,u)\right]dx \\
&\quad - \frac{\theta}{4}\left(1-t^2\right)^2\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2 - V(x)u^2\right)dx \\
&= \frac{1-t^4}{4}\langle \Phi'(u),u\rangle + \frac{(1-t^2)^2}{4}\|u\|^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1-t^4}{4}f(x,u)u + F(x,tu) - F(x,u)\right]dx \\
&\quad - \frac{\theta}{4}\left(1-t^2\right)^2\left(\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2dx\right)
\end{aligned}
$$

Ademais, (3.28) ocasiona

$$
\begin{aligned}
\Phi(u)-\Phi(tu) &= \frac{1-t^4}{4}\langle \Phi'(u),u\rangle + \frac{(1-\theta)(1-t^2)^2}{4}\|u\|^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1-t^4}{4}f(x,u)u + F(x,tu) - F(x,u) + \frac{\theta V(x)}{4}\left(1-t^2\right)^2u^2\right]dx \\
&\geq \frac{1-t^4}{4}\langle \Phi'(u),u\rangle + \frac{(1-\theta)(1-t^2)^2}{4}\|u\|^2, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos o resultado. □

Corolário 3.3. *Suponha que* (V_0), (F_1), (F_2) *e* (F_4) *sejam satisfeitas. Então*

$$\Phi(u) = \max_{t\geq 0}\Phi(tu), \quad \forall u \in \mathcal{N}.$$

Demonstração. É imediato pela definição de máximo que

$$\Phi(u) \leq \max_{t\geq 0}\Phi(tu).$$

Por outro lado, observe que pelo Lema 3.3 e por $u \in \mathcal{N}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) &\geq \Phi(tu) + \frac{1-t^4}{4}\langle \Phi'(u),u\rangle + \frac{(1-\theta)(1-t^2)^2}{4}\|u\|^2 \\
&= \Phi(tu) + \frac{(1-\theta)(1-t^2)^2}{4}\|u\|^2 \\
&\geq \Phi(tu),
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$\Phi(u) = \max_{t\geq 0}\Phi(u) \geq \max_{t\geq 0}\Phi(tu).$$

Potanto, segue o resultado. □

Para obter a caracterização minimal de $m_0 := \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u)$, nós definimos um conjunto Λ do seguinte modo:

$$\Lambda = \left\{ u \in E_{as} : \int_{\mathbb{R}^2} \left[V(x)u^2 + \phi_{2,u}u^2 - f(x,u)u \right] dx < 0 \right\}.$$

Lema 3.4. *Suponha que* (V_0), (V_1) *e* (F_1)-(F_4) *sejam satisfeitas. Então* $\Lambda \neq \emptyset$ *e* $\mathcal{N} \subset \Lambda$.

Demonstração. Primeiramente, definamos $u_t(x) = u(tx)$ para $t > 0$, sendo $u \in E_{as}$ qualquer com $u \neq 0$. Nesse sentido, como $d(tz) = t^2 dz\ \forall z \in \mathbb{R}^2$ e por (2.6), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,tu_t}(x)\,(tu_t(x))^2\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(tu_t(y))^2(tu_t(x))^2 dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)t^2u_t^2(y)t^2u_t^2(x)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)t^2u^2(ty)t^2u^2(tx)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(tx)u^2(ty)d(tx)d(ty) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} [\ln(|tx-ty|) - \ln t]u^2(tx)u^2(ty)d(tx)d(ty).
\end{aligned}$$

Tome $tx = x$ e $ty = y$, então $d(tx) = dx$ e $d(ty) = dy$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,tu_t}(x)\,(tu_t(x))^2\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} [\ln(|tx-ty|) - \ln t]u^2(tx)u^2(ty)d(tx)d(ty) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} [\ln(|x-y|) - \ln t]u^2(x)u^2(y)dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(x)u^2(y)dxdy \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln t u^2(x)u^2(y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)u^2(y)dy \right) u^2(x)dx \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\ln t \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)u^2(y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2(x)dx - \frac{1}{2\pi}\ln t \int_{\mathbb{R}^2} u^2(x)dx \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2(y)dy \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2(x)dx - \frac{1}{2\pi}\ln t(\|u\|_2^2)(\|u\|_2^2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2(x)dx - \frac{1}{2\pi}\ln t\|u\|_2^4.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,tu_t}(x)(tu_t(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2(x)dx - \frac{1}{2\pi}\ln t\|u\|_2^4. \tag{3.31}$$

Além disso, por (V_1) e (F_3), existem $\mathcal{K}_0 > 0$ e $\mathcal{K}_1 > 0$ tais que

$$V(t_n^{-1}x) \leq \mathcal{K}_0 V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N} \tag{3.32}$$

e

$$F(x,\tau) \geq -\mathcal{K}_1\tau^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

Agora, denotando $y = t_n x$, teremos $dy = t_n^2 dx$, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} V(x)(t_n u_{t_n})^2(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^2} V(x)t_n^2 u_{t_n}^2(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2(t_n x)t_n^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} V(t_n^{-1}y)u^2(y)dy
\end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, t_n u_{t_n})t_n u_{t_n} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_n^{-1}y, t_n u)t_n u}{{t_n}^2} dy.$$

Daí, tomando $x = y$ observe que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)(t_n u_{t_n})^2(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} V(t_n^{-1}x)u^2(x)dx \tag{3.34}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, t_n u_{t_n})t_n u_{t_n} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_n^{-1}x, t_n u)t_n u}{{t_n}^2} dx. \tag{3.35}$$

Dessa forma, segue de (V_0), (3.31), (3.32), (3.34) e (3.35) que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} [V(x)(t_n u_{t_n})^2 + \phi_{2,t_n u_{t_n}}(t_n u_{t_n})^2 - f(x, t_n u_{t_n})t_n u_{t_n}]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} V(t_n^{-1}x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2 dx - \frac{\ln t_n}{2\pi}\|u\|_2^4 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_n^{-1}x, t_n u)t_n u}{t_n^2} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K}_0 V(x)u^2(x)dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2 dx - \frac{\ln t_n}{2\pi}\|u\|_2^4 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_n^{-1}x, t_n u)t_n u}{t_n^2} dx \\
&\leq \mathcal{K}_0 \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2 dx - \frac{\ln t_n}{2\pi}\|u\|_2^4 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_n^{-1}x, t_n u)t_n u}{t_n^2} dx \\
&= \mathcal{K}_0\|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2 dx - \frac{\ln t_n}{2\pi}\|u\|_2^4 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_n^{-1}x, t_n u)t_n u}{t_n^2} dx.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Além disso, por (3.28) com $t = 0$, conclui-se

$$\frac{1}{4}f(x,\tau)\tau - F(x,\tau) + \frac{\theta V(x)}{4}\tau^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.37}$$

Ademais, de (3.37) e tomando $x = t_n^{-1}x$, bem como, $\tau = t_n u$, tem-se

$$\frac{f(t_n^{-1}x, t_n u)t_n u}{t_n^2} \geq \frac{4F(t_n^{-1}x, t_n u)}{t_n^2} - \frac{\theta V(t_n^{-1}x)(t_n u)^2}{t_n^2}. \tag{3.38}$$

Como também, por (3.32), (3.33) e (3.38) temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t_n^{-1}x, t_n u)t_n u}{t_n^2} dx &\geq \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{4F(t_n^{-1}x, t_n u)}{t_n^2} - \theta V(t_n^{-1}x)u^2\right] dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{-4\mathcal{K}_1(t_n u)^2}{t_n^2} - \theta \mathcal{K}_0 V(x)u^2\right] dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \left[4\mathcal{K}_1 + \theta\mathcal{K}_0 V(x)\right] u^2 dx. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Logo, segue de (3.36) e (3.39) que existe $M > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} \left[V(x)(t_n u_{t_n})^2 + \phi_{2,t_n u_{t_n}}(t_n u_{t_n})^2 - f(x, t_n u_{t_n})t_n u_{t_n}\right] dx \\ &\leq \mathcal{K}_0\|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2 dx - \frac{\ln t_n}{2\pi}\|u\|_2^4 + \int_{\mathbb{R}^2} \left[4\mathcal{K}_1 + \theta\mathcal{K}_0 V(x)\right] u^2 dx \\ &< -M, \end{aligned} \tag{3.40}$$

quando $n \to \infty$, pois por (V_1) $t_n \to \infty$. Perceba que tomando $v_n = t_n u_{t_n}$, obtemos por (3.40) que $v_n \in \Lambda$ quando $n \to \infty$, logo, $\Lambda \neq \emptyset$. Além disso, por (3.23) teremos que dado $u \in \mathcal{N}$, deduz-se

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} \left[V(x)u^2 + \phi_{2,u}u^2 - f(x,u)u\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u)u dx \\ &< \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u}u^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u)u dx \\ &= \|u\|^2 + I_1(u) - I_2(u) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u)u dx \\ &= \langle \Phi'(u), u\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{N} \subset \Lambda$. □

Lema 3.5. *Suponha que (V_0) e (F_1)-(F_4) sejam satisfeitas. Se $u \in \Lambda$, então existe um $\bar{t}_u > 0$ tal que $\Phi(tu) < 0$ para $t \geq \bar{t}_u$.*

Demonstração. Perceba que (3.21) implica que

$$\begin{aligned}\Phi(tu) &= \frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{1}{4}\left[I_1(tu) - I_2(tu)\right] - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,tu)dx \\ &= \frac{1}{2}\|tu\|^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)(tu)^2(x)(tu)^2(y)dxdy\right] - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,tu)dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}I_0(u) - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,tu)dx.\end{aligned}$$

Daí, segue de (3.28) que

$$\begin{aligned}
\Phi(tu) &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}I_0(u) - \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1-t^4}{4}uf(x,u) - F(x,u) + \frac{\theta V(x)}{4}(1-t^2)^2u^2\right]dx \\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u}(x)u^2dx - \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{4}f(x,u)u - \frac{t^4}{4}f(x,u)u - F(x,u)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\theta V(x)}{4}u^2 + \frac{\theta V(x)}{4}(-2t^2)u^2 + \frac{\theta V(x)}{4}t^4u^2\right]dx.
\end{aligned}$$

Organizando os termos, obteremos

$$\begin{aligned}
\Phi(tu) &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[\theta V(x)u^2 + f(x,u)u - 4F(x,u)\Big]dx \\
&\quad + \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[\theta V(x)u^2 + \phi_{2,u}(x)u^2 - f(x,u)u\Big]dx - \frac{\theta t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[\theta V(x)u^2 + f(x,u)u - 4F(x,u)\Big]dx \\
&\quad + \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\Big[V(x)u^2 + \phi_{2,u}(x)u^2 - f(x,u)u\Big]dx - \frac{\theta t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2dx \\
&< 0, \quad \forall t \geq \bar{t}_u,
\end{aligned}$$

pois em virtude de $u \in \Lambda$, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\Big[V(x)u^2 + \phi_{2,u}(x)u^2 - f(x,u)u\Big]dx < 0$$

e, portanto, conseguimos concluir que existe $\bar{t}_u > 0$ suficientemente grande, tal que $\Phi(tu) < 0$, para todo $t \geq \bar{t}_u$. □

Lema 3.6. *Suponha que* (V_0), (V_1) *e* (F_1)-(F_4) *sejam satisfeitas. Então para qualquer* $u \in \Lambda$, *existe um único* $t_u > 0$ *tal que* $t_u u \in \mathcal{N}$.

Demonstração. Defina a função $g(t) := \langle \Phi'(tu), tu\rangle$ em $[0,\infty)$, sendo $u \in \Lambda$. Segue de (F_4) que para todo $x \in \mathbb{R}^2, t \geq 1, \tau \in \mathbb{R}$, infere-se

$$\left[\frac{f(x,\tau)t^4\tau}{t^4\tau^4} - \frac{f(x,t\tau)t\tau}{t^4\tau^4}\right](-1) + \frac{\theta V(x)(t^2-1)(t\tau)^2}{t^4\tau^4} \geq 0.$$

Logo,

$$f(x,t\tau)t\tau - f(x,\tau)t^4\tau + \theta V(x)(t^2-1)(t\tau)^2 \geq 0,$$

isto é,

$$f(x,t\tau)t\tau \geq f(x,\tau)t^4\tau - \theta V(x)(t^2-1)(t\tau)^2.$$

Daí, pela distributividade resulta que

$$f(x,t\tau)t\tau \geqslant f(x,\tau)t^4\tau - \theta V(x)(t^4\tau^2 - t^2\tau^2),$$

e, colocando t^4 em evidência nos traz

$$f(x,t\tau)t\tau \geqslant t^4\left(f(x,\tau)\tau-\theta V(x)\tau^2\right)+\theta V(x)t^2\tau^2,$$

o que acarreta em

$$t^4\left(\theta V(x)\tau^2-f(x,\tau)\tau\right)\geqslant \theta V(x)(t\tau)^2-f(x,t\tau)t\tau,$$

assim,

$$t^4\int_{\mathbb{R}^2}\left[\theta V(x)\tau^2-f(x,\tau)\tau\right]d\tau \geqslant \int_{\mathbb{R}^2}\left[\theta V(x)(t\tau)^2-f(x,t\tau)t\tau\right]d\tau. \tag{3.41}$$

Nesse sentido, note que de (3.23) e (3.41), tem-se

$$\begin{aligned}
g(t)&=t^2\|u\|^2+t^4I_0(u)-\int_{\mathbb{R}^2}f(x,tu)tudx\\
&\leq t^2\|u\|^2+t^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u}(x)u^2dx+t^4\int_{\mathbb{R}^2}\left[V(x)u^2-f(x,u)u\right]dx\\
&\quad-\theta t^2\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2dx\\
&=t^2\|u\|^2+t^4\int_{\mathbb{R}^2}\left[V(x)u^2+\phi_{2,u}(x)u^2-f(x,u)u\right]dx\\
&\quad-\theta t^2\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u^2dx.
\end{aligned}\tag{3.42}$$

Por (3.42) é óbvio que $g(0)=0$. Ademais, por (3.42), tomando t grande e sendo $u\in\Lambda$ temos que $g(t)<0$ e, por fim, combinando (3.20) e (3.42) concluímos que $g(t)>0$ para $t>0$ pequeno. Desse modo, temos que existe um $t_u>0$ que satisfaça $g\left(t_u\right)=0$ e $t_uu\in\mathcal{N}$.

Afirmemos que t_u é único para qualquer $u\in\Lambda$. De fato, tomemos $t_1,t_2>0$, de tal modo que $g(t_1)=g(t_2)=0$. Aplicando o Lema 3.3 com $t=t_2/t_1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi\left(t_1u\right)&\geq\Phi\left(t_2u\right)+\frac{t_1^4-t_2^4}{4t_1^4}\left\langle\Phi'\left(t_1u\right),t_1u\right\rangle+\frac{(1-\theta)\left(t_1^2-t_2^2\right)^2}{4t_1^2}\|u\|^2\\
&=\Phi\left(t_2u\right)+\frac{(1-\theta)\left(t_1^2-t_2^2\right)^2}{4t_1^2}\|u\|^2,
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\Phi\left(t_1u\right)-\Phi\left(t_2u\right)\geq\frac{(1-\theta)\left(t_1^2-t_2^2\right)^2}{4t_1^2}\|u\|^2. \tag{3.43}$$

Por outro lado, usando o Lema 3.3 com $t=t_1/t_2$, deduz-se

$$\begin{aligned}
\Phi\left(t_2u\right)&\geq\Phi\left(t_1u\right)+\frac{t_2^4-t_1^4}{4t_2^4}\left\langle\Phi'\left(t_2u\right),t_2u\right\rangle+\frac{(1-\theta)\left(t_2^2-t_1^2\right)^2}{4t_2^2}\|u\|^2\\
&=\Phi\left(t_1u\right)+\frac{(1-\theta)\left(t_2^2-t_1^2\right)^2}{4t_2^2}\|u\|^2,
\end{aligned}$$

então

$$\Phi(t_2u) - \Phi(t_1u) \geq \frac{(1-\theta)\left(t_2^2 - t_1^2\right)^2}{4t_2^2}\|u\|^2. \tag{3.44}$$

Logo, (3.43) e (3.44) nos traz

$$\frac{(1-\theta)\left(t_1^2 - t_2^2\right)^2}{4t_1^2}\|u\|^2 \leq -\frac{(1-\theta)\left(t_2^2 - t_1^2\right)^2}{4t_2^2}\|u\|^2,$$

então,

$$\frac{\left(t_1^2 - t_2^2\right)^2}{4t_1^2}\|u\|^2 + \frac{\left(t_2^2 - t_1^2\right)^2}{4t_2^2}\|u\|^2 \leq 0,$$

o que implica $t_1 = t_2$ Portanto, $t_u > 0$ é único para qualquer $u \in \Lambda$. □

Lema 3.7. *Suponha que* (V_0), (V_1) *e* (F_1)-(F_4) *sejam satisfeitas. Então*

$$\inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u) := m_0 = \inf_{u\in\Lambda} \max_{t\geq 0} \Phi(tu) > 0.$$

Demonstração. Note que pelo Corolário 3.3 e pelo fato de $\mathcal{N} \subseteq \Lambda$, tem-se

$$\inf_{u\in\Lambda} \max_{t\geqslant 0} \Phi(tu) \leqslant \inf_{u\in\mathcal{N}} \max_{t\geqslant 0} \Phi(tu) = \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u) = m_0.$$

Sejam $u_0 \in \Lambda$ e $t_{u_0} > 0$ tal que $t_{u_0}u_0 \in \mathcal{N}$. Daí, pelo Lema 3.6, teremos

$$m_0 = \inf_{u\in\mathcal{N}} \Phi(u) \leq \Phi\left(t_{u_0}u_0\right) \leq \max_{t\geqslant 0} \Phi\left(tu_0\right), \quad \forall u_0 \in \Lambda.$$

Tomando o ínfimo em ambos membros, obtemos

$$m_0 \leq \inf_{u\in\Lambda} \max_{t\geqslant 0} \Phi(tu). \tag{3.45}$$

Por outro lado, temos pelo Corolário 3.3 que

$$\inf_{u\in\Lambda} \max_{t\geqslant 0} \Phi(tu) \leq \inf_{u\in\mathcal{N}} \max_{t\geqslant 0} \Phi(tu) = \inf_{u\in\mathcal{N}}, \Phi(u) = m_0 \tag{3.46}$$

já que $\mathcal{N} \subseteq \Lambda$ implica em $\inf_\Lambda \leq \inf_\mathcal{N}$. Portanto, por (3.45) e (3.46) segue o resultado. □

Utilizaremos a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha, encontrado em (VIEIRA, 2010) (Ver também Teorema 9.6 em (JABRI, 2003) e (LINS H.F. SILVA, 2009)), para provar a existência de soluções não triviais.

Definição 3.1. *Dizemos que* $(u_n) \subset E_{as}$ *é uma sequência de Cerami para o funcional* Φ*, se existe* $c \in (0, \infty)$ *tal que*

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \|\Phi(u_n)\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_n\|_{E_{as}}\right) \to 0.$$

Temos que $\Phi \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami no nível c, e denotamos por $(Ce)_c$, se qualquer sequência de Cerami $(u_n) \subset E_{as}$ no nível c possui uma subsequência convergente. Além disso, Φ satisfaz a condição de Cerami, denotada por (Ce), se satisfaz $(Ce)_c$ para cada $c \in \mathbb{R}$.

Lema 3.8. *Sejam X um espaço de Banach real e $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Seja S um subconjunto fechado de X, o qual desconecta X em duas componentes conexas distintas X_1 e X_2. Suponha ainda que $I(0) = 0$ e*
(i) $0 \in X_1$ e existe $\alpha > 0$ tal que $I|_S \geq \alpha$,
(ii) Existe $e \in X_2$ de tal modo que $I(e) \leq 0$.
Então I possui uma sequência $(Ce)_c$ com $c \geq \alpha > 0$ dado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Lema 3.9. *Suponha que (V_0), (V_1) e (F_1)-(F_3) sejam satisfeitas. Se $\Phi(e) < 0$ para algum $e \in E$ com $\|e\| > 1$, então existe $c \in \left(0, \sup_{t \geq 0} \Phi(te)\right]$ e uma sequência $(u_n) \subset E_{as}$ satisfazendo*

$$\Phi(u_n) \to c, \quad \|\Phi'(u_n)\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_n\|_{E_{as}}\right) \to 0. \tag{3.47}$$

Demonstração. Segue de (3.21) que

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\left[I_1(u) - I_2(u)\right] - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)dxdy\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)u^2(y)dxdy\right] - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx.
\end{aligned}$$

Daí, por (3.20) temos

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)u^2(x)u^2(y)dxdy\right] - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}I_2(u) - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\mathcal{C}_2\|u\|^4 - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\mathcal{C}_2\|u\|^4 - \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4}u^2 + C_{\frac{1}{4}}|u|^p\right)dx.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\mathcal{C}_2\|u\|^4 - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx - C_{\frac{1}{4}}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^p dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\mathcal{C}_2\|u\|^4 - \frac{1}{4}\|u\|^2 - C_{\frac{1}{4}}\|u\|^p \\ &= \frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\mathcal{C}_2\|u\|^4 - C_{\frac{1}{4}}\|u\|^p.\end{aligned}$$

Sendo $p > 2$, segue que existe $\alpha_0 > 0$ e $0 < \rho < 1$ que satisfaça

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{4}\|u\|^2 - \mathcal{C}_2\|u\|^4 - \mathcal{C}_3\|u\|^p \geq \alpha_0, \quad \forall u \in S := \{u \in E_{as} : \|u\| = \rho\}.$$

Desde que $e \in E_{as}\backslash B_\rho$ e $\Phi(e) < 0$, então tendo em vista Lema 3.8 com $X = E_{as}$, $X_1 := \{u \in E : \|u\| < \rho\}$ e $X_2 := \{u \in E : \|u\| > \rho\}$, deduzimos que existem $c \in \left[\alpha_0, \sup_{t\geq 0}\Phi(te)\right]$ e uma sequência $(u_n) \subset E_{as}$ satisfazendo (3.47). □

3.4 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO DE ENERGIA MÍNIMA

Nosso próximo passo será encontrar uma sequência minimizante de Cerami para Φ fora de $\mathcal{N}$, usando o método diagonal, como foi feito em (X.H.TANG, 2014).

Lema 3.10. *Suponha que (V_0), (V_1) e (F_1)-(F_4) sejam satisfeitas. Então existe uma constante $c_* \in (0, m_0]$ e uma sequência $(u_n) \subset E_{as}$ satisfazendo*

$$\Phi(u_n) \to c_*, \quad \|\Phi'(u_n)\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_n\|_{E_{as}}\right) \to 0. \tag{3.48}$$

Demonstração. Tomemos $v_k \in \mathcal{N}$ que satisfaça

$$m_0 \leq \Phi(v_k) < m_0 + \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.49}$$

Perceba de (3.21) que $\Phi(0) = 0$, e pelo Lema 3.5 tem-se $\Phi(tv_k) < 0$ para $t > 0$ grande. Além disso, segue do Lema 3.9 que existe uma sequência $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset E_{as}$ de tal modo que

$$\Phi(u_{k,n}) \to c_k, \quad \|\Phi'(u_{k,n})\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_{k,n}\|_{E_{as}}\right) \to 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.50}$$

donde $c_k \in \left[\alpha_0, \sup_{t\geq 0}\Phi(tv_k)\right]$. Ademais, pelo Corolário 3.3, tem-se que $\Phi(v_k) \geq \Phi(tv_k)$, para todo $t \geq 0$, pois $\Phi(v_k)$ é máximo, assim, $\Phi(v_k) = \sup_{t\geq 0}\Phi(tv_k)$. Nesse sentido, (3.49) e (3.50) implicam

$$\Phi(u_{k,n}) \to c_k \in \left[\alpha_0, m_0 + \frac{1}{k}\right), \quad \|\Phi'(u_{k,n})\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_{k,n}\|_{E_{as}}\right) \to 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Então, tomemos uma sequência $(n_k) \subset \mathbb{N}$ que satisfaça

$$\Phi\left(u_{k,n_k}\right) \in \left[\alpha_0, m_0 + \frac{1}{k}\right), \quad \left\|\Phi'\left(u_{k,n_k}\right)\right\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_{k,n_k}\|_{E_{as}}\right) < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

E, se for necessário, consideremos uma subsequência $u_{k,n_k} = u_k, k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\Phi\left(u_n\right) \to c_* \in \left[\alpha_0, m_0\right], \quad \left\|\Phi'\left(u_n\right)\right\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_n\|_{E_{as}}\right) \to 0,$$

como queríamos demonstrar. □

3.4.1 Demonstração do Teorema 3.1

Primeiramente, observe que pelo Lema 3.10, temos que existe uma sequência $(u_n) \subset E_{as}$ que satisfaz (3.48). Daí, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\left\langle \Phi'\left(u_n\right), \|u_n\|\right\rangle| &\leq \left\|\Phi'\left(u_n\right)\right\| \|u_n\| \\ &\leq \left\|\Phi'\left(u_n\right)\right\| \|u_n\| + \|\Phi'(u_n)\| \\ &= \left\|\Phi'\left(u_n\right)\right\|\left(1 + \|u_n\|\right) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Diante disso, pelo Lema 3.3, por (3.48), (3.51) e considerando $t = 0$, obtemos

$$c_* + o(1) = \Phi\left(u_n\right) - \frac{1}{4}\left\langle \Phi'\left(u_n\right), u_n\right\rangle \geq \frac{1-\theta}{4}\|u_n\|^2. \tag{3.52}$$

Logo, (u_n) é uma sequência limitada. Observe que a partir do Corolário 3.2, (3.20), (3.23) e (3.51) segue que

$$\begin{aligned} I_1(u_n) &= \langle \Phi'(u_n), u_n\rangle - \|u_n\|^2 + I_2(u_n) + \int_{\mathbb{R}^2} f(x, u_n)u_n dx \\ &\leq \langle \Phi'(u_n), u_n\rangle - \|u_n\|^2 + \mathcal{C}_2\|u_n\|^4 + \int_{\mathbb{R}^2}\left(\varepsilon {u_n}^2 + C_\varepsilon |u_n|^p\right)dx, \end{aligned}$$

isto é, $I_1(u_n)$ é limitado.

Afirmamos que

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} > 0. \tag{3.53}$$

Com efeito, se $\delta = 0$, teríamos pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u_n\|_{L^s(\mathbb{R}^2)}^s \leq \mathcal{C}_4\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{s-2}$$

que $u_n \to 0$ em $L^s\left(\mathbb{R}^2\right)$ para $s \geq 2$. Além do mais, pelo Corolário 3.2 e por (u_n) ser limitada, podemos concluir que $I_2\left(u_n\right) \to 0$. Note que por (3.20) e pelo $\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{1}{2}f\left(x,u_n\right)u_n-F\left(x,u_n\right)\right|dx\\
&\leq\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{1}{2}\left(\varepsilon {u_n}^2+C_\varepsilon|u_n|^p\right)-\left(\varepsilon u^2+C_\varepsilon|u|^p\right)\right|dx\\
&=\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left|-\frac{1}{2}\left(\varepsilon {u_n}^2+C_\varepsilon|u_n|^p\right)\right|dx\\
&=\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2}\left(\varepsilon {u_n}^2+C_\varepsilon|u_n|^p\right)dx\\
&=\frac{1}{2}\left[\varepsilon\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}u_n^2dx+C_\varepsilon\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}|u_n|^p\,dx\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\varepsilon\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}+C_\varepsilon\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|^p_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)}\right],
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{1}{2}f\left(x,u_n\right)u_n-F\left(x,u_n\right)\right|dx=0. \tag{3.54}
$$

Desse modo, por (3.21), (3.23), (3.48), (3.51), (3.54) e por $I_2\left(u_n\right)\to 0$, podemos concluir

$$
\begin{aligned}
c_*+o(1)&=\Phi\left(u_n\right)-\frac{1}{2}\left\langle\Phi'\left(u_n\right),u_n\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\left[I_1(u_n)-I_2(u_n)\right]-\int_{\mathbb{R}^2}F(x,u_n)dx\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\|u_n\|^2+I_1(u_n)-I_2(u_n)-\int_{\mathbb{R}^2}f(x,u_n)u_ndx\right)\\
&=-\frac{1}{4}I_1\left(u_n\right)+\frac{1}{4}I_2\left(u_n\right)+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{2}f\left(x,u_n\right)u_n-F\left(x,u_n\right)\right]dx\\
&\leq\frac{1}{4}I_2\left(u_n\right)+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{2}f\left(x,u_n\right)u_n-F\left(x,u_n\right)\right]dx\\
&\leq o(1).
\end{aligned}
$$

Então, $c_*=0$, contradição, pois $c_*\in(0,m_0]$. Portanto, concluimos que $\delta>0$.

Como $I_1\left(u_n\right)$ é limitado, teremos pelo Lema 3.2 que $(\|u_n\|_*)$ é limitada. Assim, (u_n) é limitada em E_{as}. Logo, passando para uma subsequência se necessário e juntamente com $\delta=\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}>0$, implica que $u_n\rightharpoonup u_0$ em E_{as}, $u_n\to u_0$ em $L^s\left(\mathbb{R}^2\right),s\in[2,\infty)$ e $u_n(x)\to u_0(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$.

Afirmamos que $u_n\to u_0$ em E_{as}. Com efeito, como $(\|u_n\|_*)$ e $(\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)})$ são limitadas, segue que

$$
\int_{\mathbb{R}^2}\ln(1+|y|)|u_0(y)|\,|u_n(y)-u_0(y)|\,dy=o(1). \tag{3.55}
$$

De fato, visto que $\|u_n-u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\to 0$, por $(\|u_n-u_0\|_*)$ ser limitada, pela desigualdade de

Hölder e lembrando de (2.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy &= \int_{B(0,R)} \ln(1+|y|)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,R)} \ln(1+|y|)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy \\
&\leq \ln(1+R)\int_{B(0,R)} |u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,R)} \ln(1+|y|)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy \\
&\leq \ln(1+R)\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|u_n-u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\quad + \|u_n-u_0\|_*\left[\int_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,R)} \ln(1+|y|)u_0^2(y)dy\right]^{1/2} \\
&= o_n(1)+o_R(1), \text{ quando } n\to\infty, R\to\infty.
\end{aligned}
$$

Então, segue da Proposição A.2 (Ver apêndice) que

$$
\begin{aligned}
|A_1(u_n^2,u_0(u_n-u_0))| &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x-y|)u_n^2(x)u_0(u_n-u_0)(y)dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} [\ln(1+|x|)+\ln(1+|y|)]u_n^2(x)u_0(u_n-u_0)(y)dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} [\ln(1+|x|)+\ln(1+|y|)]u_n^2(x)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u_n^2(x)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dxdy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)u_n^2(x)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u_n^2(x)dx\int_{\mathbb{R}^2} |u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2(x)dx\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy
\end{aligned}
$$

Daí, como $\|u_n-u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\to 0$, por (2.11) e (3.55), temos que

$$
\begin{aligned}
|A_1(u_n^2,u_0(u_n-u_0))| &= \|u_n\|_*^2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|u_n-u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\quad + \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|y|)\,|u_0(y)\|u_n(y)-u_0(y)|\,dy \\
&= o(1). \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

O procedimento para provar que $A_1\left(u_0^2,u_0\left(u_n-u_0\right)\right)=o(1)$ é similar ao que acabamos de fazer para provar que $A_1\left(u_n^2,u_0\left(u_n-u_0\right)\right)=o(1)$.

Agora, vamos provar que

$$
\int_{\mathbb{R}^2} |f\left(x,u_n\right)-f(x,u_0)|\,|u_n-u_0|\,dx=o(1). \qquad (3.57)
$$

Note que por (F_1), pela desigualdade triangular e por termos $\|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \to 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,u_n) - f(x,u_0)||u_n - u_0|\, dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,u_n)||u_n - u_0| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |f(x,u_0)||u_n - u_0| dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_0 \left(1 + |u_n|^{p-1}\right) |u_n - u_0| dx + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_0 \left(1 + |u_0|^{p-1}\right) |u_n - u_0| dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_0 |u_n - u_0| dx + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_0 |u_n|^{p-1} |u_n - u_0| dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_0 |u_n - u_0| dx + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_0 |u_0|^{p-1} |u_n - u_0| dx \\
&= 2\mathcal{C}_0 \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \mathcal{C}_0 \|u_n\|^{p-1}_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^2)} \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \mathcal{C}_0 \|u_0\|^{p-1}_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^2)} \|u_n - u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= o(1).
\end{aligned}
$$

Finalmente, por (3.22), infere-se que

$$
\begin{aligned}
o(1) &= \langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u_0), u_n - u_0 \rangle \\
&= \langle \Phi'(u_n), u_n - u_0 \rangle - \langle \Phi'(u_0), u_n - u_0 \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u_0) + V(x) u_n (u_n - u_0)) dx + A_1(u_n^2, u_n(u_n - u_0)) \\
&\quad - A_2(u_n^2, u_n(u_n - u_0)) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)(u_n - u_0) dx \\
&\quad - \left[\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0 \cdot \nabla (u_n - u_0) + V(x) u_0 (u_n - u_0)) dx + A_1({u_0}^2, u_0(u_n - u_0)) \right. \\
&\quad \left. - A_2({u_0}^2, u_0(u_n - u_0)) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_0)(u_n - u_0) dx \right].
\end{aligned}
$$

Organizando os termos e a partir do Lema 3.2, (3.17),(3.56), (3.57) e como $u_n \to u_0$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
o(1) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla (u_n - u_0)|^2 + V(x)(u_n - u_0)^2 \right) dx + A_1(u_n^2, (u_n - u_0)^2) + A_1(u_n^2, u_0(u_n - u_0)) \\
&\quad - A_1({u_0}^2, u_0(u_n - u_0)) - A_2(u_n^2, u_n(u_n - u_0)) + A_2({u_0}^2, u_0(u_n - u_0)) \\
&\quad - \int [f(x,u_n) - f(x,u_0)] (u_n - u_0) dx \\
&= \|u_n - u_0\|^2 + A_1(u_n^2, (u_n - u_0)^2) + A_1(u_n^2, u_0(u_n - u_0)) \\
&\quad - A_1({u_0}^2, u_0(u_n - u_0)) - A_2(u_n^2, u_n(u_n - u_0)) + A_2({u_0}^2, u_0(u_n - u_0)) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} [f(x,u_n) - f(x,u_0)] (u_n - u_0) dx \\
&= \|u_n - u_0\|^2 + A_1(u_n^2, (u_n - u_0)^2) + o(1) \\
&\ge \|u_n - u_0\|^2 + \frac{1}{8\pi} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u_n - u_0\|^2_* + o(1).
\end{aligned}
$$

Portanto, $u_n \to u_0$ em E_{as}.

Por tudo o que foi exposto temos que $\Phi'(u_0) = 0$ e $u_0 \neq 0$. Consequentemente, $u_0 \in \mathcal{N}$. Dessa forma, por (3.6), (3.21), (3.23), (3.37), (3.48), pela semicontinuidade inferior da norma e Lema de Fatou, tem-se que

$$
\begin{aligned}
m_0 \geq c_* &= \lim_{n\to\infty}\left[\Phi\left(u_n\right) - \frac{1}{4}\left\langle \Phi'\left(u_n\right), u_n\right\rangle\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left\|u_n\right\|^2 + \frac{1}{4}\left(I_1\left(u_n\right) - I_2\left(u_n\right)\right) - \int_{\mathbb{R}^2} F\left(x, u_n\right) dx\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{4}\left(\left\|u_n\right\|^2 + I_1\left(u_n\right) - I_2\left(u_n\right) - \int_{\mathbb{R}^2} f\left(x, u_n\right) u_n dx\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F\left(x, u_n\right) dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} f\left(x, u_n\right) u_n dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\left(|\nabla u_n|^2 + V(x){u_n}^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^2} F\left(x, u_n\right) dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} f\left(x, u_n\right) u_n dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\|\nabla u_n\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) + \frac{1}{4}V(x)u_n^2\right) dx\right] \\
&\geq \frac{1}{4}\left\|\nabla u_0\right\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{4}f\left(x, u_0\right) u_0 - F\left(x, u_0\right) + \frac{1}{4}V(x){u_0}^2\right] dx \\
&= \Phi\left(u_0\right) - \frac{1}{4}\left\langle \Phi'\left(u_0\right), u_0\right\rangle \\
&= \Phi\left(u_0\right) \geq m_0
\end{aligned}
$$

então, $\Phi\left(u_0\right) = m_0 > 0$.

3.5 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NÃO TRIVIAL

Lema 3.11. *Suponha que* (V_0), (V_1) *e* (F_1)-(F_3) *sejam satisfeitas. Então para todo* $u \in E_{as}\backslash\{0\}$, *tem-se*

$$\|t_n^2 u_{t_n}\|^2 \to +\infty, \quad \Phi(t_n^2 u_{t_n}) \to -\infty, \text{ quando } n \to \infty.$$

Demonstração. Defina $u_t(x) = u(tx)$, donde $t > 0$ e $u \in E_{as}\backslash\{0\}$ é fixo. Tome $y = t_n x$, então $dy = t_n^2 dx$. Dessa forma, por (3.6), tem-se

$$
\begin{aligned}
\|t_n^2 u_{t_n}(x)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2}\left[\left|\nabla t_n^2 u_{t_n}(x)\right|^2 + V(x)\left(t_n^2 u_{t_n}(x)\right)^2\right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left[\left|\nabla t_n^2 u(t_n x)\right|^2 + V(x)\left(t_n^2 u(t_n x)\right)^2\right] dx \\
&= t_n^4 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(t_n x)|^2 dx + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u^2(t_n x) dx \\
&= t_n^4 \int_{\mathbb{R}^2} |t_n \nabla u(t_n x)|^2 dx + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u^2(t_n x) dx \\
&= t_n^6 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(t_n x)|^2 dx + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u^2(t_n x) dx \\
&= t_n^4 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y)|^2 dy + t_n^2 \int_{\mathbb{R}^2} V(t^{-1} y) u^2(y) dy
\end{aligned}
$$

Então, por (V_0), segue que

$$\begin{aligned}\|t_n^2 u_{t_n}(x)\|^2 &= t_n^4\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + t_n^2\int_{\mathbb{R}^2} V(t_n^{-1}y)u^2dy\\ &\geq t_n^4\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + t_n^2\inf_{\mathbb{R}^2} V\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \to \infty, \text{ quando } n\to\infty.\end{aligned}$$

Além disso, por (2.6) e notando que $d(tz) = t^2dz$ para todo $z\in\mathbb{R}^2$, infere-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,t^2u_t}(x)(t^2u_t(x))^2dx &= t^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,t^2u_t}(x)u_t^2(x)dx\\ &= \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(|x-y|)\left(t^2u_t(y)\right)^2u_t^2(x)dxdy\\ &= \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(|x-y|)t^4u_t^2(y)u_t^2(x)dxdy\\ &= \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(|x-y|)t^4u^2(ty)u^2(tx)\frac{1}{t^4}d(tx)d(ty)\\ &= \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}[\ln(|tx-ty|)-\ln t]u^2(ty)u^2(tx)d(tx)d(ty).\end{aligned}$$

Admita que $tx = x$ e $ty = y$, desse modo $d(tx) = dx$ e $d(ty) = dy$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,t^2u_t}(x)(t^2u_t(x))^2dx &= \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}[\ln(|tx-ty|)-\ln t]u^2(ty)u^2(tx)d(tx)d(ty)\\ &= \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}[\ln(|x-y|)-\ln t]u^2(y)u^2(x)dxdy\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,t^2u_t}(x)(t^2u_t(x))^2dx &= \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(|x-y|)u^2(y)u^2(x)dxdy\\ &\quad - \frac{t^4}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(t)u^2(y)u^2(x)dxdy\\ &= t^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u}(x)u^2(x)dx - \frac{t^4\ln t}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}u^2(y)u^2(x)dxdy\\ &= t^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u}(x)u^2(x)dx - \frac{t^4\ln t}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}^2}u^2(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}u^2(y)dy\right)\\ &= t^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u}u^2dx - \frac{t^4\ln t}{2\pi}\|u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,t^2u_t}(t^2u_t)^2dx = t^4\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u}u^2dx - \frac{t^4\ln t}{2\pi}\|u\|^4_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.58}$$

Por outro lado, a partir de (3.21), (3.32), (3.33), (3.58) e lembrando que

$$I_0(t_n^2u_{t_n}) = \int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,t^2u_4}(t^2u_t)^2dx,$$

constata-se que

$$
\begin{aligned}
\Phi(t_n^2 u_{t_n}) &= \frac{1}{2}\|t_n^2 u_{t_n}\|^2 + \frac{1}{4} I_0(t_n^2 u_{t_n}) - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, t_n^2 u_{t_n}) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\left|\nabla t_n^2 u_{t_n}\right|^2 + V(x)(t_n^2 u_{t_n})^2\right] dx + \frac{t_n^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u} u^2 dx \\
&- \frac{t_n^4 \ln t_n}{8\pi}\|u_{t_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, t_n^2 u_{t_n}) dx \\
&= \frac{t_n^4}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(x) t_n^4 u^2(t_n x) dx + \frac{t_n^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u} u^2 dx \\
&- \frac{t_n^4 \ln t_n}{8\pi}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, t_n^2 u) dx.
\end{aligned}
$$

Considerando $y = t_n x$, tem-se $dy = t_n^2 dx$. Por consequência,

$$
\begin{aligned}
\phi(t_n^2 u_{t_n}) &= \frac{t_n^4}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V\left(t_n^{-1} y\right) u^2(y) dy + \frac{t_n^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u} u^2 dx \\
&- \frac{t_n^4 \ln t_n}{8\pi}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 - \int_{\mathbb{R}^2}\frac{F\left(t_n^{-1} y, t_n^2 u\right)}{t_n^2} dy \\
&\leq \frac{t_n^4}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{K}_0 V(x) u^2 dx + \frac{t_n^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u} u^2 dx \\
&- \frac{t_n^4 \ln t_n}{8\pi}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 + t_n^2\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{K}_1 u^2 dx \\
&= \frac{t_n^4}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\mathcal{K}_0 V(x) + 2\mathcal{K}_1\right] u^2 dx \\
&+ \frac{t_n^4}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\phi_{2,u} u^2 dx - \frac{t_n^4 \ln t_n}{8\pi}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \to -\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue o resultado. □

Lema 3.12. *Admita que* (V_0), (V_1) *e* (F_1)-(F_3) *sejam satisfeitas. Logo existe* $c > 0$ *e uma sequência* $\{u_n\} \subset E_{as}$ *satisfazendo*

$$
\Phi\left(u_n\right) \to c, \quad \|\Phi'\left(u_n\right)\|_{E_{as}^*}\left(1 + \|u_n\|_{E_{as}}\right) \to 0. \tag{3.59}
$$

Demonstração. A prova desse Lema é similar ao que foi feito em ((CHEN, 2020), p. 5-7). □

3.5.1 Demonstração do Teorema 3.2

Tendo em vista o Lema 3.12, existe uma sequência $(u_n) \subset E_{as}$ que satisfaz (3.59), e isso implica que $\langle \Phi'\left(u_n\right), u_n\rangle = o(1)$ como em (3.51). Nesse sentido, a partir de (F_5), (3.21) e

(3.23), tem-se

$$
\begin{aligned}
c+o(1) &= \Phi\left(u_n\right)-\frac{1}{4}\left\langle\Phi'\left(u_n\right), u_n\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\left[I_1(u_n)-I_2(u_n)\right]-\int_{\mathbb{R}^2} F(x,u_n)dx \\
&\quad -\frac{1}{4}\left[\|u_n\|^2+I_1(u_n)-I_2(u_n)-\int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)u_n dx\right] \\
&= \frac{1}{4}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)u_n dx-\int_{\mathbb{R}^2} F(x,u_n)dx \\
&= \frac{1}{4}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]dx \\
&\geq \frac{1}{4}\|u_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^2}\beta {u_n}^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\left\|u_n\right\|^2-\beta\left\|u_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
c+o(1) \geq \frac{1}{4}\left\|u_n\right\|^2-\beta\left\|u_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \tag{3.60}
$$

Além disso, vamos provar que a sequência $(\|u_n\|)$ é limitada. Nesse intuito, suponha por contradição que $\|u_n\| \to \infty$ e considere $v_n = u_n/\|u_n\|$, logo $\|v_n\| = 1$. Primeiramente, observe que

$$
\frac{\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2}{\|u_n\|^2} = \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \tag{3.61}
$$

De fato,

$$
\frac{\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2}{\|u_n\|^2} = \frac{\int u_n^2 dx}{\|u_n\|^2} = \int \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2}dx = \int\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2 dx = \int v_n^2 dx = \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.
$$

Agora, note que (3.60) e (3.61) traz

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\|u_n\|^2}(c+o(1)) &\geq \frac{1}{\|u_n\|^2}\left(\frac{1}{4}\|u_n\|^2-\beta\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right) \\
&= \frac{1}{4}-\beta\left\|v_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\frac{1}{\beta\left\|u_n\right\|^2}(c+o(1)) \geqslant \frac{1}{4\beta}-\left\|v_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2
$$

e, portanto,

$$
\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \geq \frac{1}{4\beta}-\frac{1}{\beta\left\|u_n\right\|^2}(c+o(1)).
$$

Como $\|u_n\| \to \infty$, segue que

$$
\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \geq \frac{1}{4\beta}+o(1). \tag{3.62}
$$

Ademais, Corolário 3.2, (3.20), (3.21), (3.59) e (3.62), concebe

$$\begin{aligned}
I_1(v_n) &= 4\Phi(v_n) - 2\|v_n\|^2 + I_2(v_n) + 4\int_{\mathbb{R}^2} F(x,v_n)dx \\
&= 4\Phi\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) - 2\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|^2 + I_2(v_n) + 4\int_{\mathbb{R}^2} F\left(x,\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)dx \\
&= \frac{4}{\|u_n\|}\Phi(u_n) - 2\left\|\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\|^2 + I_2(v_n) + \frac{4}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^2} F(x,u_n)dx \\
&= I_2(v_n) + \frac{4}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^2} F(x,u_n)\,dx + o(1) \\
&\le \mathcal{C}_2\|v_n\|^4 + \frac{4\mathcal{C}_5}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^2}\left(u_n^2 + u_n^4\right)dx + o(1) \le \mathcal{C}_6,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

pois $\|u_n\| \to \infty$ e $\|v_n\| = 1$. Então, pelo Lema 3.2, (3.62) e (3.63) podemos afirmar que $(\|v_n\|_*)$ é limitada. Chegando a conclusão de que (v_n) é limitada em E_{as}. Portanto, pelo Proposição 3.3 e (3.62), podemos assim assumir, passando para uma subsequência se necessário, que $v_n \rightharpoonup v_0 \neq 0$ em $E_{as}, v_n \to v_0$ em $L^s(\mathbb{R}^2)$ para $s \in [2,\infty)$ e $v_n(x) \to v_0(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$. Considere $f_\infty(x,t) := f(x,t) - a(x)t^3$. Lembrando que $u_n(x) = \|u_n\|v_n(x)$, assim para $x \in \Omega := \{y \in \mathbb{R}^2 : v_0(y) \neq 0\}$, temos $|u_n(x)| \to \infty$ como $n \to \infty$. Veja que para qualquer $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, por (3.59) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduz-se

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi'(u_n), \|u_n\|\varphi\rangle| &\le \|\Phi'(u_n)\|\,\|u_n\|\,\|\varphi\| \\
&\le \|\varphi\|\,\|\Phi'(u_n)\|\,\|u_n\| + \|\varphi\|\,\|\Phi'(u_n)\| \\
&= \|\varphi\|\,\|\Phi'(u_n)\|\,(1+\|u_n\|) \to 0, \text{ quando } n \to \infty.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Nesse sentido, a partir de (3.22) e (3.64), vale

$$\begin{aligned}
o(1) &= \langle \Phi'(u_n), \|u_n\|\varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\nabla u_n \cdot \nabla(\|u_n\|\varphi) + V(x)u_n(\|u_n\|\varphi)\right)dx + A_1\left({u_n}^2, u_n\|u_n\|\varphi\right) \\
&\quad - A_2\left({u_n}^2, u_n\|u_n\|\varphi\right) - \int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)\|u_n\|\varphi dx.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Por (2.6) e (3.8), inferimos que

$$\begin{aligned}
A_1\left({u_n}^2, u_n\|u_n\|\varphi\right) - A_2\left({u_n}^2, u_n\|u_n\|\varphi\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|){u_n}^2(y)u_n\|u_n\|\varphi dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\ln(|x-y|){u_n}^2(y)dy\right)u_n\|u_n\|\varphi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,u_n}(x)u_n\|u_n\|\varphi dx.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Assim, a partir de (3.65) e (3.66), tem-se

$$o(1) = \|u_n\|\int_{\mathbb{R}^2}\left(\nabla u_n \cdot \nabla\varphi + V(x)u_n\varphi\right)dx + \|u_n\|\int_{\mathbb{R}^2}\left[\phi_{2,u_n}(x)u_n - f(x,u_n)\right]\varphi dx.$$

Além disso, lembrando que como $u_n = \|u_n\| v_n$ e $f(x,u_n) = f_\infty(x,u_n) + a(x)u_n^3$, temos

$$\begin{aligned} o(1) &= \|u_n\|^2 \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_n \cdot \nabla \varphi + V(x) v_n \varphi) dx + \|u_n\|^4 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\phi_{2,v_n}(x) v_n - a(x) v_n^3\right] \varphi dx \\ &\quad - \|u_n\| \int_{\mathbb{R}^2} f_\infty(x,u_n) \varphi dx, \end{aligned} \tag{3.67}$$

pois

$$\begin{aligned} \phi_{2,u_n}(x) u_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) \|u_n\|^2 {v_n}^2(y) dy (\|u_n\| v_n) \\ &= \|u_n\|^3 \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) {v_n}^2(y) dy v_n \\ &= \|u_n\|^3 \phi_{2,v_n}(x) v_n. \end{aligned}$$

Diante disso, dividindo (3.67) por $\|u_n\|^4$ em ambos os membros, resulta em

$$\begin{aligned} o(1) &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\nabla v_n \cdot \nabla \varphi + V(x) v_n \varphi)}{\|u_n\|^2} dx + \|u_n\|^4 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\phi_{2,v_n}(x) v_n - a(x) v_n^3\right] \varphi dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_\infty(x,u_n)\varphi}{\|u_n\|^3} dx \end{aligned}$$

que implica

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\phi_{2,v_n}(x) v_n - a(x) v_n^3\right] \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_\infty(x,u_n)}{\|u_n\|^3} \varphi dx = o(1). \tag{3.68}$$

Pelas hipóteses (F_1), (F_2), (F_6), pela definição de Ω e por $\|u_n\| = \dfrac{u_n}{v_n}$, vale

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_\infty(x,u_n)}{\|u_n\|^3} \varphi dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f_\infty(x,u_n)|}{\|u_n\|^3} |\varphi| dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{|f_\infty(x,u_n)|}{\|u_n\|^3} |\varphi| dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} \frac{|f_\infty(x,u_n)|}{\|u_n\|^3} |\varphi| dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{|f_\infty(x,u_n)|}{|u_n|^3} |v_n|^3 |\varphi| dx \\ &\quad + \mathcal{C}_7 \left(\|u_n\|^{-2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} |v_n| |\varphi| \, dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} |v_n|^3 |\varphi| dx \right) \\ &= o(1). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Combinando (3.68) com (3.69), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\phi_{2,v_0}(x) v_0 - a(x) {v_0}^3\right] \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty \left(\mathbb{R}^2\right).$$

Portanto,

$$a(x) {v_0}^2(x) \equiv \phi_{2,v_0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| {v_0}^2(y) dy, \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.70}$$

que produz

$$-\triangle \left[a(x) {v_0}^2(x)\right] + {v_0}^2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

já que v_0 é solução da equação (3.1). Daí, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\left|\nabla\left(a(x){v_0}^2(x)\right)\right|^2+a(x){v_0}^4(x)\right]dx=0,$$

logo $a(x)v_0^2(x)\equiv 0$, o que contradiz (3.70). Por essa razão, temos que $(\|u_n\|)$ é limitado. Além do mais, para provarmos que (u_n) é limitado em E_{as} basta seguir o mesmo procedimento feito na Subseção 3.4.1. O restante das provas é padrão e já demonstramos na Subseção 3.4.1.

3.5.2 Demonstração do Teorema 3.3

Tendo em vista o Lema 3.12, teremos que existe uma sequência $(u_n)\subset E_{as}$ que satisfaz (3.59) e, consequentemente satisfaz (3.60). Note que por (3.21), (3.23) e (3.60), obtemos

$$\begin{aligned}
c+o(1)&=\Phi\left(u_n\right)-\frac{1}{4}\left\langle\Phi'\left(u_n\right),u_n\right\rangle\\
&=\frac{1}{2}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\left[I_1(u_n)-I_2(u_n)\right]-\int_{\mathbb{R}^2}F(x,u_n)dx\\
&\quad-\frac{1}{4}\left[\|u_n\|^2+I_1(u_n)-I_2(u_n)-\int_{\mathbb{R}^2}f(x,u_n)u_ndx\right]\\
&=\frac{1}{4}\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{4}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]dx.
\end{aligned}\tag{3.71}$$

Agora provaremos que $(\|u_n\|)$ é limitada. Nesse intuito, suponhamos, por contradição, que $\|u_n\|\to\infty$. Considere a sequência $v_n=u_n/\|u_n\|$, assim $\|v_n\|=1$, que combinado com (3.60) rende (3.62), da mesma forma que foi demonstrado no Teorema 3.1. Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|u_n\|^4}\int_{\mathbb{R}^2}f(x,u_n)u_ndx&=\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|}\frac{u_n}{\|u_n\|}dx\\
&=\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|f(x,u_n)|}{\|u_n\|}|v_n|dx\\
&\leq\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{u_n\neq 0}\frac{|f(x,u_n)|}{\|u_n\|}|v_n|dx.
\end{aligned}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|u_n\|^4}\int_{\mathbb{R}^2}f(x,u_n)u_ndx=\frac{1}{\|u_n\|^2}&\left[\int_{0<|u_n|<R_0}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n|^2dx\right.\\
&\left.+\int_{|u_n|\geq R_0}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n|^2dx\right].
\end{aligned}$$

Tomemos $\kappa' = \kappa/(\kappa-1)$. Dessa forma, por (F_1), pela desigualdade de Hölder, teremos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u_n\|^4}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)u_n dx \\
&\le \frac{1}{\|u_n\|^2}\left\{\int_{0<|u_n|<R_0}\frac{\mathcal{C}_0(1+|u_n|)}{|u_n|}|v_n|^2dx\right. \\
&\quad \left. + \left[\int_{|u_n|\ge R_0}\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}dx\right)^{\kappa}\right]^{\frac{1}{\kappa}}\int_{|u_n|\ge R_0}\left[\left(|v_n|^2dx\right)^{\kappa'}\right]^{\frac{1}{\kappa'}}\right\} \\
&= \frac{1}{\|u_n\|^2}\left\{\mathcal{C}_8\|v_n\|_2^2 + \left[\int_{|u_n|\ge R_0}\left(\frac{|f\left(x,u_n\right)|}{|u_n|}\right)^{\kappa}dx\right]^{1/\kappa}\|v_n\|_{2\kappa'}^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Daí, por (F_7) inferimos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u_n\|^4}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)u_n dx \\
&\le \frac{1}{\|u_n\|^2}\left\{\mathcal{C}_8\|v_n\|_2^2 + \left[\int_{|u_n|\ge R_0} c_0\frac{|u_n|^{\kappa}}{|u_n|^{\kappa}}\left(f\left(x,u_n\right)u_n - 4F\left(x,u_n\right) + 4\beta u_n^2\right)dx\right]^{\frac{1}{\kappa}}\|v_n\|_{2\kappa'}^2\right\} \\
&\le \frac{\mathcal{C}_9}{\|u_n\|^2}\left[\int_{|u_n|\ge R_0}\left(f\left(x,u_n\right)u_n - 4F\left(x,u_n\right) + 4\beta u_n^2\right)dx\right]^{1/\kappa} + o(1).
\end{aligned}
$$

Agora deduzimos por (3.20) e pelas imersões $H^1\left(\mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ e $H^1\left(\mathbb{R}^2\right) \hookrightarrow L^p\left(\mathbb{R}^2\right)$ que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u_n\|^4}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)u_n dx \\
&\le \frac{\mathcal{C}_9}{\|u_n\|^2}\left[\int_{|u_n|\ge R_0}\left(f\left(x,u_n\right)u_n - 4F\left(x,u_n\right) + 4\beta u_n^2\right)dx\right]^{1/\kappa} + o(1) \\
&\le \frac{\mathcal{C}_9}{\|u_n\|^2}\left[\int_{|u_n|\ge R_0}\left(u_n^2 + \mathcal{C}_1\left|u_n\right|^p + 4u_n^2 + 4\mathcal{C}_1\left|u_n\right|^p + 4\beta u_n^2\right)dx\right]^{1/\kappa} + o(1) \\
&= \frac{\mathcal{C}_9}{\|u_n\|^2}\left(\mathcal{C}_2\left\|u_n\right\|_2^2 + \mathcal{C}_3\left\|u_n\right\|_p^p\right)^{1/\kappa} + o(1) \\
&\le \frac{\mathcal{C}_9}{\|u_n\|^2}\left(\mathcal{C}_2\left\|u_n\right\|^2 + \mathcal{C}_3\left\|u_n\right\|^p\right)^{1/\kappa} + o(1) \\
&= \mathcal{C}_9\left(\mathcal{C}_2\frac{\|u_n\|^2}{\|u_n\|^{2\kappa}} + \mathcal{C}_3\frac{\|u_n\|^p}{\|u_n\|^{2\kappa}}\right)^{1/\kappa} + o(1) \\
&= \mathcal{C}_9\left(\mathcal{C}_2\left\|u_n\right\|^{2-2\kappa} + \mathcal{C}_3\left\|u_n\right\|^{p-2\kappa}\right)^{1/\kappa} + o(1).
\end{aligned}
$$

Daí, tomando $p < 2\kappa$, deduz-se

$$
\frac{1}{\|u_n\|^4}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,u_n)u_n dx \le \mathcal{C}_9(o(1))^{1/\kappa} + o(1) = o(1). \tag{3.72}
$$

Note que (3.23) nos traz

$$
I_1\left(u_n\right) = \left\langle\Phi'\left(u_n\right),u_n\right\rangle + I_2\left(u_n\right) - \left\|u_n\right\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} f\left(x,u_n\right)u_n dx,
$$

o que implica em

$$\frac{I_1(u_n)}{\|u_n\|^4} = \frac{\langle \Phi'(u_n), u_n \rangle + I_2(u_n) - \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} f(x, u_n) u_n dx}{\|u_n\|^4}.$$

Assim, pelo Corolário 3.2, (3.59), (3.72) e como $\|u_n\| \to \infty$, então

$$\begin{aligned}
I_1(v_n) &= I_2(v_n) + \frac{\langle \Phi'(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|^4} - \frac{1}{\|u_n\|^2} + \frac{1}{\|u_n\|^4} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, u_n) u_n dx \\
&= I_2(v_n) + \frac{1}{\|u_n\|^4} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, u_n) u_n dx + o(1) \\
&\leq \mathcal{C}_2 \|v_n\|^4 + o(1) \\
&\leq \mathcal{C}_{11}.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Desse modo, a partir de (3.62), (3.66), (3.73) e do Lema 3.2, podemos concluir que $(\|v_n\|_*)$ é limitada, logo, $(\|v_n\|)$ é limitada em E_{as}. Portanto, pela Proposição 3.3 e (3.62), podemos assim assumir, passando para uma subsequência se necessário, que $v_n \to v_0 \neq 0$ em $E_{as}, v_n \to v_0$ em $L^s(\mathbb{R}^2)$ para $s \in [2, \infty)$ e $v_n(x) \to v_0(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$.

Lembrando que $u_n(x) = \|u_n\| v_n(x)$, assim para $x \in \Omega := \{y \in \mathbb{R}^2 : v_0(y) \neq 0\}$, temos $|u_n(x)| \to \infty$ como $n \to \infty$. Para algum $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, segue de (3.59) que

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi'(u_n), \|u_n\| \varphi \rangle| &\leq \|\Phi'(u_n)\| \, \|u_n\| \|\varphi\| \\
&\leq \|\varphi\| \, \|\Phi'(u_n)\| \, \|u_n\| + \|\varphi\| \, \|\Phi'(u_n)\| \\
&= \|\varphi\| \|\Phi'(u_n)\| (1 + \|u_n\|) \to 0, \text{ quando } n \to \infty.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Além disso, por (3.22) e (3.74) temos que

$$\begin{aligned}
o(1) &= \langle \Phi'(u_n), \|u_n\| \varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \cdot \nabla \|u_n\| \varphi + V(x) u_n \|u_n\| \varphi) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_{2,u_n}(x) u_n \, \|u_n\| \, \varphi dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} f(x, u_n) \|u_n\| \varphi dx \\
&= \|u_n\| \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \cdot \nabla \varphi + V(x) u_n \|u_n\| \varphi) dx + \|u_n\| \int_{\mathbb{R}^2} [\Phi_{2,u_n}(x) u_n - f(x, u_n)] \varphi dx \\
&= \|u_n\|^2 \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_n \cdot \nabla \varphi + V(x) v_n \varphi) dx + \|u_n\|^4 \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,v_n}(x) v_n \varphi dx \\
&\quad - \|u_n\| \int_{\mathbb{R}^2} f(x, u_n) \varphi dx,
\end{aligned}$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,v_n}(x) v_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|^3} \varphi dx = o(1). \tag{3.75}$$

Note que por (F_1), pela desigualdade de Hölder e fazendo $1/\|u_n\| = v_n/u_n$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u_n\|^3}\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,u_n)\varphi|\,dx \\
&\leq \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_{u_n\neq 0} \frac{|f(x,u_n)|}{\|u_n\|}|\varphi| dx \\
&= \frac{1}{\|u_n\|^2}\left[\int_{0<|u_n|<R_0} \frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n||\varphi| dx + \int_{|u_n|\geq R_0} \frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n||\varphi| dx\right] \\
&\leq \frac{1}{\|u_n\|^2}\left\{\int_{0<|u_n|<R_0} \frac{c_0(1+|u_n|)}{|u_n|}|v_n||\varphi| dx\right. \\
&\left. + \left[\int_{|u_n|\geq R_0}\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}\right)^{\kappa} dx\right]^{1/\kappa}\left[\int_{|u_n|\geq R_0} (|u_n||\varphi|)^{\kappa'} dx\right]^{1/\kappa'}\right\}.
\end{aligned}$$

Nesse sentido, (F_2), (F_7), (3.20), (3.71) e as imersões $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ e $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ implicam em

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u_n\|^3}\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,u_n)\varphi|\,dx \\
&\leq \frac{1}{\|u_n\|^2}\left\{\mathcal{C}_{12}\|v_n\|_2\|\varphi\|_2 + \left[\int_{|u_n|\geq R_0}\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}\right)^{\kappa} dx\right]^{1/\kappa}\|v_n\|_{2\kappa'}\|\varphi\|_{2\kappa'}\right\} \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_{13}}{\|u_n\|^2}\left[\int_{|u_n|\geq R_0}\left[f(x,u_n)u_n - 4F(x,u_n) + \beta u_n^2\right] dx\right]^{1/\kappa} + o(1) \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_{13}}{\|u_n\|^2}\left[\int_{|u_n|\geq R_0}\left({u_n}^2 + \mathcal{C}_1|u_n|^p + 4u_n^2 + 4\mathcal{C}_1|u_n|^p + 4\beta u_n^2\right) dx\right]^{1/\kappa} + o(1) \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_{13}}{\|u_n\|^2}\left[\mathcal{C}_3\|u_n\|_2^2 + \mathcal{C}_4\|u_n\|_p^p\right]^{1/\kappa} + o(1) \\
&\leq \frac{\mathcal{C}_{13}}{\|u_n\|^2}\left[\mathcal{C}_3\|u_n\|^2 + \mathcal{C}_4\|u_n\|^p\right]^{1/\kappa} + o(1) \\
&= \mathcal{C}_{13}\left[\mathcal{C}_3\frac{\|u_n\|^2}{\|u_n\|^{2\kappa}} + \mathcal{C}_4\frac{\|u_n\|^p}{\|u_n\|^{2k}}\right]^{1/\kappa} + o(1) \\
&= o(1),
\end{aligned} \tag{3.76}$$

sendo $p < 2\kappa$. Dessa forma, (3.75), (3.76) implica em

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{2,v_0}(x)v_0\varphi dx = 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Assim,

$$\phi_{2,v_0}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y|{v_0}^2(y)dy = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Contradição! portanto $(\|u_n\|)$ é limitada. Da mesma forma que provamos na Subseção (3.4.1) temos (u_n) é limitada em E_{as}. O restante da prova é padrão e está demonstrado na Subseção (3.4.1).

REFERÊNCIAS

BENCI, V.; FORTUNATO, D. Solitary waves for nonlinear klein–gordon equations coupled with born–infeld theory. *Reviews in Mathematical Physics*, v. 14, p. 409–420, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0129055X02001168>.

BENGURIA, R.; BREZIS, H.; LIEB, E. H. The thomas-fermi-von weizsäcker theory of atoms and molecules. *Communications in Mathematical Physics*, v. 79, p. 167–180, 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01942059>.

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer, 2010. v. 1.

BUFOLO, G. N. *Sobre o sistema de Schrödinger-Poisson no plano*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2018.

CATTO, I.; LIONS, P. L. Binding of atoms and stability of molecules in hartree and thomas-fermi type theories. *Communications in Partial Differential Equations*, v. 18, p. 1149–1159, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/03605309308820967>.

CHEN, L. W. . X. T. . S. Ground state solutions to logarithmic choquard equations in r3. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, v. 43, p. 4222–4238, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/mma.6186>.

CHEN, S.; TANG, X. Ground state sign-changing solutions for a class of schrödinger–poisson type problems in $\mathbb{R}^3$. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 67, p. Art. 102, 18 pp., 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0695-2>.

CHEN, S.; TANG, X. Ground state solutions of nehari-pohozaev type for schrödinger-poisson problems with general potentials. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 37, p. 4973–5002, 2017. Disponível em: <Doi:10.3934/dcds.2017214>.

CHEN, S.; TANG, X. Ground state solutions of nehari–pohozaev type for kirchhoff-type problems with general potentials. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 56, p. Art. 110, 25 pp., 2017. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00526-017-1214-9>.

CHEN, S.; TANG, X. Nehari type ground state solutions for asymptotically periodic schrödinger-poisson systems. *Taiwanese J. Math.*, v. 21, p. 363 – 383, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.11650/tjm/7784>.

CHEN, S.; TANG, X. Nehari type ground state solutions for asymptotically periodic schrödinger-poisson systems. *Taiwanese J. Math.*, v. 21, p. 363–383, 2017.

CHEN, S.; TANG, X. Existence of ground states for fractional kirchho equations with general potentials via nehari-pohozaev manifold. *Electron. J. Dier. Eq.*, p. Paper No. 142, 21 pp, 2018.

CHEN, S.; TANG, X. Ground state solutions for generalized quasilinear schrödinger equations with variable potentials and berestycki-lions nonlinearities. *J. Math. Phys*, v. 59, p. 081508, 18pp., 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.5036570>.

CHEN, S.; TANG, X. Improved results for klein-gordon-maxwell systems with general nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 38, p. 2333–2348, 2018. Disponível em: <doi:10.3934/dcds.2018096>.

CHEN, S.; TANG, X. Existence of ground state solutions for the planar axially symmetric schrödinger-poisson system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 24, p. 4685–4702, 2019. Disponível em: <https://doi:10.3934/dcdsb.2018329>.

CINGOLANI, S.; WETH, T. On the planar schrödinger–poisson systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 33, p. 169–197, 2016. Disponível em: <DOI10.1016/J.ANIHPC.2014.09.008>.

JABRI, Y. *The Mountain Pass Theorem: variants, generalizations and some applications*. [S.l.]: In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2003.

LIEB, E. H. Thomas-fermi and related theories of atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics*, v. 53, p. 603–641, 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.53.603>.

LINS H.F. SILVA, E. Quasilinear asymptotically periodic elliptic equations with critical growth. *Nonlinear Anal*, v. 71, p. 2890–2905, 2009.

LIONS, P. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 2. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 1, p. 223–283, 1984. Disponível em: <https://DOI10.1016/S0294-1449(16)30422-X>.

LOSS, M.; LIEB, E. *Analysis*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2001. v. 14.

MAWHIN, J.; WILLEM, M. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. [S.l.]: Springer-Verlag New York Inc., 1989. v. 74.

STUBBE, J. Bound states of two-dimensional schr odinger-newton equations. 2008. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0807.4059.pdf>.

TANG, X. New conditions on nonlinearity for a periodic schrödinger equation having zero as spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 413, p. 392 – 410, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.11.062>.

TANG, X.; CHENG, B. Ground state sign-changing solutions for kirchhoff type problems in bounded domains. *Journal of Differential Equations*, v. 261, p. 2384–2402, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.04.032>.

TANG, X.; LIN, X.; YU, J. Nontrivial solutions for schrödinger equation with local super-quadratic conditions. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, v. 31, p. pages369–383, 2019. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10884-018-9662-2>.

VIEIRA, E. A. B. S. . G. F. Quasilinear asymptotically periodic schrödinger equations with critical growth. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, p. 1–33, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00526-009-0299-1>.

X.H.TANG. New conditions on nonlinearity for a periodic schrödinger equation having zero as spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 413, p. 392–410, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.11.062>.

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E RESULTADOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Primeiramente, vamos definir funções mensuráveis. Porém, para que isso seja apresentado de forma clara exporemos alguns pré-requisitos que foram inspirados por ((BREZIS, 2010), p. 89).

Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, isto é, Ω é um conjunto, $\mathcal{M}$ é uma σ-algebra em Ω e μ é uma medida.

Definição A.1. *(σ-algebra). Seja $\mathcal{M}$ uma σ-algebra em Ω, ou seja, $\mathcal{M}$ é uma coleção de subconjuntos de Ω que satisfaz os seguintes itens:*

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$;
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$;
3. *Dada uma sequência* $A_i \in \mathcal{M}$, *então* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Definição A.2. *(Medida). Seja μ uma medida, isto é, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ que satisfaz*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right)$, *donde A_i é uma família disjunta contável de membros de $\mathcal{M}$.*

Finalmente, segue a definição de funções mensuráveis.

Definição A.3. *(Funções mensuráveis). Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{M}$ - mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\{x \in \Omega; f(x) > \alpha\}$$

está em $\mathcal{M}$, ou seja, é mensurável.

Agora, definiremos os espaços L^p e em sequência alguns resultados que serão essenciais no desdobramento deste trabalho.

Definição A.4. *(Espaços $L^p(\Omega)$). Sejam $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Definamos*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

donde a norma em $L^p(\Omega)$ é dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição A.5. *(Espaços $L^{\infty}(\Omega)$). Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Definamos*

$$L^{\infty}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \sup_{x \in \Omega} |f| < \infty \right\},$$

donde a norma em $L^{\infty}(\Omega)$ é dada por

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

em que $\sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{c \in \mathbb{R}; |f(x)| \leq c$, q.t.p em $\Omega\}$.

Teorema A.1. *(Desigualdade de Hölder - (LOSS; LIEB, 2001), p. 45). Sejam p e q índices, tais que, $1/p + 1/q = 1$ com $1 \leq p \leq \infty$. Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\left| \int_{\Omega} fg d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f||g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposição A.1. *(Desigualdade de Interpolação) Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Teorema A.2. *(Semicontinuidade inferior da norma - (LOSS; LIEB, 2001), p. 57). Para $1 \leq p \leq \infty$ a norma L^p é fracamente semicontínua inferioriormente , isto é, se $f^j \to f$ fracamente em $L^p(\Omega)$, então*

$$\liminf_{j \to \infty} \left\| f^j \right\|_p \geq \|f\|_p.$$

Se $p = \infty$ fazemos a suposição técnica extra de que a medida μ é sigma finito.

Além disso, se $1 < p < \infty$ e se $\lim_{j \to \infty} \|f^j\|_p = \|f\|_p$, então $f^j \to f$ fortemente como $j \to \infty$.

Teorema A.3. *(Teorema da convergência dominada de Lebesgue - (BREZIS, 2010), p. 90). Sejam Ω um conjunto qualquer e uma sequência de funções (f_n) em L^1 que satisfaz*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;*

2. *Existe uma função $g \in L^1$, tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, para todo n e q.t.p. em Ω.*

Então $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Lema A.1. *(Lema de Fatou - (BREZIS, 2010), p. 90). Sejam Ω um espaço de medida e uma sequência de funções (f_n) em L^1 que satisfaz*

1. $f_n \geq 0$, *para todo* n *q.t.p;*

2. $\sup_n \int f_n < \infty$.

Considere $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$, *para quase todo* $x \in \Omega$. *Então* $f \in L^1$ *e*

$$\int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

Definição A.6. *(Imerso continuamente) Considere* X *e* Y *espaços vetoriais normados tal que* $X \subseteq Y$. *Então* X *está imerso continuamente em* Y, *caso exista* $C > 0$ *que satisfaça*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Isto é, a aplicação identidade $i : X \to Y$ *dada por* $i(x) = x$ *é contínua.*

Teorema A.4. *(Imersões contínuas - (BREZIS, 2010), p. 284-285). Se* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um aberto limitado e* $1 \leq p < \infty$, *então as seguintes imersões são contínuas:*

1. *Se* $1 \leq p < N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, p^*]$, *onde* $p^* = \frac{Np}{N-p}$, *denota o expoente crítico de Sobolev;*

2. *Se* $p = N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *para todo* $q \in [1, +\infty)$;

3. *Se* $p > N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema A.5. *(Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov (BREZIS, 2010), p. 285). Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado e* $p \geq 1$. *Daí, dividindo em dois casos, teremos que*

1. *Se* $p < n$ *e* $q \geq 1$, *satisfazendo*

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \text{ ou seja, } 1 \leq q < p^* = \frac{np}{n-p},$$

então,

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$$

2. *Se* $p > n$, *então,*

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} C(\bar{\Omega}).$$

Definição A.7. *(Imerso compactamente) Considere* X *e* Y *espaços vetoriais normados tal que* $X \hookrightarrow Y$. *Então a imersão de* X *em* Y *é compacta se a aplicação identidade* $i : X \to Y$ *for compacta.*

Outra forma de provar que X está imerso compactamente em Y é mostrando que toda sequência $(u_n) \subset X$ limitada possui subsequência convergente em Y.

Proposição A.2. *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^2$*. Então*

$$\ln(1 + |x - y|) \leq \ln(1 + |x|) + \ln(1 + |y|). \tag{A.1}$$

Demonstração. Com efeito, temos pela desigualdade triangular que

$$|x - y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|,$$

e isso aliado a propriedade de que logaritmo natural é crescente, acarreta em

$$\begin{aligned}
\ln(1 + |x - y|) &\leq \ln(1 + |x| + |y|) \\
&\leq \ln(1 + |x| + |y| + |x||y|) \\
&= \ln((1 + |x|)(1 + |y|)) \\
&= \ln(1 + |x|) + \ln(1 + |y|).
\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □