UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Igor de Barros Nonato

Finitude Genérica para Configurações Centrais de Dziobek

Recife

2022

Igor de Barros Nonato

Finitude Genérica para Configurações Centrais de Dziobek

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de ciências exatas e da natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): Eduardo Shirlippe Goes Leandro

Recife

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

N812f Nonato, Igor de Barros
Finitude genérica para configurações centrais de Dziobek / Igor de Barros Nonato. – 2022.
82 f.: il., fig., tab.

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2022.

Inclui referências e apêndices.

1. Análise. 2. Finitude genérica. 3. Configurações de Dziobek I. Leandro, Eduardo Shirlippe Goes (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2022-132

IGOR DE BARROS NONATO

FINITUDE GENÉRICA PARA CONFIGURAÇÕES CENTRAIS DE DZIOBEK

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 27/07/2022

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

_____

Prof. Dr. Alain Albouy (Examinador Externo)
Bureau des Longitudes, Observatoire de Paris

Dedico à minha família, amigos e a todos os professores que contribuíram na minha formação.

AGRADECIMENTOS

Em 2015 quando ganhei a medalha de prata da OBMEP e conheci o PICME, desde aquela época, sonhava em ser mestre em matemática. Sete anos se passaram e o sonho se tornou realidade. Para cada pessoa que passou na minha vida e me tirou um sorriso, eu agradeço.

A toda minha família, em especial, aos meus pais Romildo e Margarete.

Ao meu orientador Profº Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro, que está comigo desde 2016, ainda pelo PICME, por todo apoio, dedicação, paciência e contribuição na minha vida acadêmica.

A todos os professores que já tive, desde Tia Sualene na minha alfabetização até os professores no mestrado. Nesse caminho, um agradecimento especial ao meu professor de matemática do ensino médio, Maurílio Vilaça, e aos meus professores da graduação, Marcílio Santos e Cristiane Rocha.

Ao Profº Dr. Thiago Dias da UFRPE, pela contribuição dada ao desenvolvimento deste trabalho.

A todos os amigos que fiz nessa curta jornada até aqui, da EREMDA no ensino médio, do CAA na graduação, do DMat no mestrado. Aos amigos que encontrei nas aleatoriedades da vida. Jamais esquecerei de vocês, tudo o que vivemos me trouxe até aqui, por isso esse trabalho também é vosso.

À banca examinadora por aceitar contribuir na avaliação deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho demonstraremos a finitude genérica para configurações centrais de Dziobek associadas a um potencial semi-inteiro. Mais exatamente, existe um aberto de Zariski no espaço euclidiano n-dimensional, tal que para todo vetor de massas m neste aberto, corresponde uma quantidade finita, a menos de isometrias, de configurações centrais com dimensão $n-2$. A análise é restrita ao caso de forças que dependem das distâncias mútuas elevadas a um expoente semi-inteiro, possibilitando utilizar métodos da Geometria Algébrica. Para este fim, determinamos equações polinomiais cujos zeros estão relacionados com as chamadas configurações de Dziobek. Assim construímos uma variedade quase-afim definida por esses polinômios e calculamos sua dimensão utilizando os espaços tangentes e a matriz Jacobiana. Aplicando o Teorema da Dimensão das Fibras, encontramos o aberto de Zariski desejado. Por fim, existe uma cota superior para estas quantidades finitas de classes de configurações centrais que independe da escolha genérica das massas. Chegamos a esta cota utilizando resultados topológicos para a quantidade de componentes conexas da variedade afim obtida.

Palavras-chaves: problema dos n corpos; configurações centrais; configurações de Dziobek; finitude genérica.

ABSTRACT

In this work we demonstrate generic finiteness for Dziobek configurations for potentials with semi-integer exponents. More exactly, there is a Zariski open set in the n-dimensional Euclidean space such that for every mass vector m in this open set, there corresponds a finite number, up to isometries, of central configurations of dimension $n-2$. The analysis is restricted to the case of forces that depend on mutual distances raised to a semi-integer exponent, which makes it possible to use methods from Algebraic Geometry. To this end, we determine polynomial equations whose zeros are related to the Dziobek configurations. We construct the quasi-affine variety defined by these polynomials and calculate its dimension using tangent spaces and Jacobian matrices. Applying the Fiber Dimension Theorem, we find the required Zariski open set. Finally, there is an upper bound for these finite amounts of classes of central configurations that does not depend on the generic choice of masses. We arrive at this bound by using topological results for the number of connected components of an affine variety.

Keywords: n-body problem; central configuration; Dziobek configuration; generic finiteness.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Solução do problema dos n Corpos em $\mathbb{R}^2$ quando $n = 3$. 13
Figura 2 – Variedade afim obtida do círculo de raio r e centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. 47
Figura 3 – Interseção da variedade afim $V = V(x+y, x-y)$ com a reta $L_Q, Q = (1, 2)$. 52
Figura 4 – Lugar geométrico dos pontos Q tais que as retas L_Q são tangentes à variedade $V(x^2 - y^3)$ passando por $(1, 1)$. 53
Figura 5 – Reta tangente à função $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ no ponto $x = 1$. 53
Figura 6 – Espaço tangente à variedade V no ponto x em $\mathbb{R}^3$. 54

LISTA DE SÍMBOLOS

$A^\top$	Transposta da matriz A;
$\|A\|$	Determinante de A;
A_{ij}	Cofator de A obtido da i-ésima linha e j-ésima coluna;
$\|\|x\|\|$	Norma euclidiana;
$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$	Subespaço gerado pelos $x_1, \ldots, x_n$;
$\dim S$	Dimensão do subespaço S;
$\mathcal{N}(X)$	Núcleo de X;
Imf	Imagem da função f;
$(x_1, \ldots, x_n)$	Configuração x obtida pelos n corpos $x_1, \ldots, x_n$;
$x_{i_1,\ldots,i_k}$	Configuração obtida de x removendo os corpos $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

1.1 MOTIVAÇÃO 12

1.2 CONFIGURAÇÕES 14

2 A GEOMETRIA DAS CONFIGURAÇÕES 21

2.1 A MATRIZ DE UM CONFIGURAÇÃO 21

2.2 A MATRIZ DE CAYLEY - MENGER 25

3 EQUAÇÕES QUE DESCREVEM AS CONFIGURAÇÕES CENTRAIS 36

4 UM BREVE PASSEIO PELA GEOMETRIA ALGÉBRICA 46

4.1 TOPOLOGIA DE ZARISKI 46

4.2 DIMENSÃO 49

4.3 O ESPAÇO TANGENTE 51

4.4 FUNÇÕES REGULARES 55

4.5 COMPONENTES CONEXAS 57

5 A MATRIZ JACOBIANA E A FINITUDE GENÉRICA 58

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 71

REFERÊNCIAS 72

APÊNDICE A – MATRIZES E DETERMINANTES 74

APÊNDICE B – GEOMETRIA ALGÉBRICA 76

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, utilizaremos métodos da Geometria Algébrica com o objetivo de provar a finitude genérica para as configurações de Dziobek associadas a potenciais com expoente a semi-inteiro, demonstrado por Thiago Dias (DIAS, 2016), generalizando o artigo de Richard Moeckel (MOECKEL, 2001).

Inicialmente, neste capítulo, falaremos brevemente do Problema Newtoniano dos n Corpos, pois este é um caso particular do nosso problema em questão. Assim, por ser um problema famoso, utilizamo-lo como motivação para o estudo desta dissertação. Quando procuramos pelas soluções do Problema dos n Corpos, no qual as órbitas são rotações uniformes em torno de um ponto fixo, obtemos apenas um sistema linear que só depende das massas, das distâncias mútuas iniciais, da velocidade angular e do centro de massa. A análise é restrita ao caso de forças que dependem das distâncias mútuas elevadas a um expoente semi-inteiro $a \in \mathbb{Z}/2$, possibilitando utilizar métodos da Geometria Algébrica. Disto definimos as configurações centrais e generalizamos o Problema Newtoniano dos n Corpos. Definimos a dimensão de uma configuração, e quando ela vale $n-2$ dizemos que é uma configuração de Dziobek.

No segundo capítulo, associaremos uma configuração a uma matriz, sendo a dimensão da configuração inteiramente ligada ao posto desta matriz. Com isto, podemos encontrar condições necessárias e suficientes para uma configuração ser de Dziobek. Outras condições equivalentes serão apresentadas, e a mais importante envolve a matriz de Cayley-Menger.

A fim de utilizarmos a Geometria Algébrica, no terceiro capítulo descrevemos equações polinomiais cujos zeros podem ser associados a configurações de Dziobek. Assim, ao final deste capítulo, apresentamos a variedade quase-afim V^a cujos pontos são unicamente ligados a uma configuração de Dziobek, a menos de isometria.

Para mostrarmos a finitude genérica, precisamos calcular a dimensão de V^a. No quarto capítulo apresentamos alguns resultados básicos da Geometria Algébrica. Definiremos a topologia de Zariski, e com isto poderemos falar em dimensão de variedades, sendo estas calculadas usando a matriz Jacobiana. Para obter o resultado principal deste trabalho, nas últimas seções discorreremos sobre funções regulares e componentes conexas.

Por fim, no quinto e último capítulo, usaremos os resultados apresentados no capítulo anterior e mostraremos que $\dim V^a \leq n$. Como consequência obteremos um fechado B tal

que, para cada escolha de massa $m \in \mathbb{R}^n \backslash B$, existe uma quantidade finita, a menos de isometria, de configurações de Dziobek associadas. Além disso, existe uma cota superior para essas quantidades de configurações, que não depende da escolha genérica da massa m.

1.1 MOTIVAÇÃO

O Problema dos n Corpos estuda o movimento de n corpos sujeitos apenas à atração gravitacional entre eles. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ as posições de n corpos em $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, com respectivas massas $m_1, \ldots, m_n$. Tomemos $r_{ij} := ||x_i - x_j||$ a distância entre x_i e x_j. Consideremos $G = 1$. Pela Lei da Gravitação Universal a força que x_j exerce em x_i é dada por

$$\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(x_j - x_i),$$

logo a força sofrida por x_i nesse sistema é

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(x_j - x_i).$$

Pela Segunda Lei de Newton temos

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(x_j - x_i) = m_i \cdot a_i = m_i \cdot \ddot{x}_i,$$

sendo a_i a aceleração do corpo x_i. Seja c o centro de massa destes n corpos no instante $t = 0$. Trabalhando em $\mathbb{R}^2$, Suponhamos que todos os $x_i(t)$ são rotações uniformes com velocidade ω não nula em torno de um ponto fixo c:

$$x_i(t) = R(t)(x_i(0) - c) + c$$

no qual

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

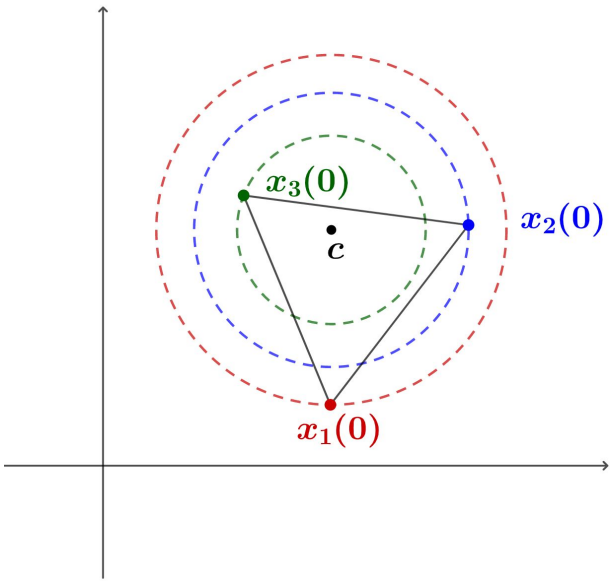
Tomando $\lambda = -\omega^2$ temos que x_i é solução de

$$\ddot{x} = \lambda(x - c),$$

pois

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i(t) = -\omega^2 R(t)(x_i(0) - c) &= -\omega^2 R(t)(x_i(0) - c) + \lambda c - \lambda c \\ &= \lambda x_i(t) - \lambda c \\ &= \lambda(x_i(t) - c). \end{aligned}$$

Figura 1 – Solução do problema dos n Corpos em $\mathbb{R}^2$ quando $n = 3$.



Fonte: imagem criada no software Geogebra.

Analogamente, se os x_i são soluções de

$$\ddot{x} = \lambda(x - c), \quad x'(0) \perp x(0) \neq c,$$

com $\lambda = -\omega^2$ e c, a priori, um ponto de $\mathbb{R}^2$ qualquer, então os x_i são rotações uniformes com velocidade angular ω em torno de c. De fato, note que

$$e^{-i\omega t}[a \quad b]^\top = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

é solução da EDO homogênea $\ddot{x} = \lambda x$. Como a função constante c é solução particular de

$$\ddot{x} = \lambda(x - c)$$

o resultado segue.

Observação 1.1. Se os x_i são soluções do Problema de n Corpos tais que

$$\ddot{x} = \lambda(x - c)$$

com $\lambda \neq 0$, então c é o centro de massa dos x_i. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda m_i(x_i - c) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}(x_j - x_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\implies \lambda \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - c) = 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - c) = 0$$

$$\implies c = \frac{m_1 x_1 + \ldots m_n x_n}{m_1 + \ldots m_n}.$$

Com isto temos o seguinte cenário hipotético: possuímos n corpos com massas $m_1, \ldots, m_n$ com suas posições $x_i(t)$ no plano ao longo do tempo, determinadas pelo sistema de EDO's

$$\ddot{x_i}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3}(x_j(t) - x_i(t)).$$

Como desejamos que as trajetórias sejam rotações uniformes com velocidade $\sqrt{-\lambda}$ ao redor do centro de massa, isto ocorre se e somente se

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3}(x_j(t) - x_i(t)) = \lambda(x_i(t) - c). \tag{1.1}$$

Ora, $x_i(t) = R(t)(x_i(0) - c) + c$, logo é fácil ver que (1.1) é satisfeita se, e somente se,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3}(x_j(0) - x_i(0)) = \lambda(x_i(0) - c). \tag{1.2}$$

Ou seja, dadas n massas procuramos por n pontos no plano que satisfaçam (1.2) e com isto teremos nossas n trajetórias desejadas.

Para o caso geral de n corpos em $\mathbb{R}^d$ estamos interessados nas *soluções autossimilares*, isto é, cada x_i é solução de

$$\ddot{x}_i = \lambda(x_i - c)$$

para alguns $\lambda \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}^d$. Análogo ao que foi mostrado na observação 1.1, c deve ser o centro de massa.

1.2 CONFIGURAÇÕES

Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ coordenadas de n corpos com respectivas massas positivas $m_1, \ldots, m_n$.

Definição 1.2. O vetor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$, tais que $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, é chamado de *configuração associada aos corpos com posições* $x_1, \ldots, x_n$.

Denotamos a distância mútua entre x_i e x_j, com $x_i \neq x_j$, por $r_{ij} = ||x_i - x_j||$. Considere a família de potenciais homogêneos definidos por

$$U_a(x) = \frac{1}{2a+2} \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^{2a+2},$$

se $a \in \frac{\mathbb{Z}}{2} = \{a; 2a \in \mathbb{Z}\}$ e $a \neq -1$, e

$$U_a(x) = \sum_{i<j} m_i m_j \log r_{ij}$$

se $a = -1$. Todos os potenciais são definidos no aberto $A = \{x = (x_1, \ldots, x_n); x_i \neq x_j\}$.

Seja x_{ik} a k-ésima coordenada de x_i. Então

$$\frac{\partial r_{ij}^2}{\partial x_{ik}} = 2 r_{ij} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ik}}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{ij}^2}{\partial x_{ik}} &= \frac{\partial}{\partial x_{ik}}((x_{i1} - x_{j1})^2 + \cdots + (x_{in} - x_{jn})^2) \\ &= 2(x_{ik} - x_{jk}), \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ik}} = \frac{1}{r_{ij}}(x_{ik} - x_{jk}).$$

Daí, para $a \neq -1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_a}{\partial x_{ik}}(x) &= \frac{1}{2a+2} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{\partial}{\partial x_{ik}}(r_{ij}^{2a+2}) \\ &= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{2a+1} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_{ik}} \\ &= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{2a+1} \frac{1}{r_{ij}}(x_{ik} - x_{jk}) \\ &= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{2a}(x_{ik} - x_{jk}). \end{aligned}$$

Se $\frac{\partial U_a}{\partial x_i}$ denota a derivada do potencial U_a em relação às variáveis $x_{i1}, \ldots, x_{id}$, então temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_a}{\partial x_i}(x) &= \left(\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{2a}(x_{ik} - x_{jk}) \right)_{1 \leq k \leq d} \right)^{\top} \\ &= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{2a}(x_{i1} - x_{j1}, \ldots, x_{id} - x_{jd})^{\top} \\ &= \sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j)^{\top}. \end{aligned}$$

Para $a = -1$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_a}{\partial x_{ik}}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_{ik}}\left(\sum_{i<j} m_i m_j \log r_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{\partial}{\partial x_{ik}}(\log r_{ij})\\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{1}{r_{ij}}\frac{\partial}{\partial x_{ik}}(r_{ij})\\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{1}{r_{ij}^2}(x_{ik}-x_{jk}),\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_a}{\partial x_i}(x) &= \left(\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{1}{r_{ij}^2}(x_{ik}-x_{jk})\right)_{1\leq k\leq d}\right)^{\top}\\ &= \sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{-2}(x_i-x_j)^{\top}.\end{aligned}$$

Conclui-se que para todo $a \in \mathbb{Z}/2$, $\frac{\partial U_a}{\partial x_i}(x)$ possui a mesma expressão. O que desejamos saber é: dadas n massas $m_1, \ldots, m_n$, determinar se existem (e quais são, caso afirmativo) as n trajetórias $x_1, \ldots, x_n$ no espaço $\mathbb{R}^d$ que são soluções do sistema de EDOs:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_i m_j r_{ij}^{2a}(x_i-x_j)^{\top} = \frac{\partial U_a}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Se $a = -3/2$, retornamos ao Problema dos n Corpos.

Definição 1.3. Dadas uma configuração x a tal que $2a \in \mathbb{Z}$, dizemos que x é uma *configuração central associada ao potencial* U_a se existem $\lambda \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}^d$ tais que

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_j r_{ij}^{2a}(x_i-x_j) = \lambda(x_i-c), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Observação 1.4. Análogo à observação 1.1, se x é uma configuração central então c deve ser o centro de massa:

$$c = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n) \quad \text{com} \quad M = m_1 + \cdots + m_n.$$

Observação 1.5. Se $a = 0$, então toda configuração é central. De fato,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_j(x_i-x_j) &= \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_j\right)x_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} m_j x_j\\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)x_i - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j.\\ &= Mx_i - M\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j\\ &= M(x_i-c).\end{aligned}$$

Uma propriedade interessante a respeito das configurações centrais é o fato delas serem invariantes por rotações, translações e dilatações. Isso nos permite estudar a finitude das soluções de 1.4 módulo esta relação de equivalência.

Proposição 1.6. *Seja x uma configuração central associada ao potencial U_a. Se rotacionarmos, transladarmos ou dilatarmos x, obtemos ainda uma configuração central.*

Demonstração: Seja $D : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma dilatação em relação ao ponto c. Isto é, existe $\alpha > 0$ tal que

$$D(y) = c + \alpha(y - c).$$

Note que

$$\tilde{r}_{ij} := ||D(x_i) - D(x_j)|| = ||\alpha x_i - \alpha x_j|| = \alpha r_{ij},$$

logo

$$\begin{aligned}
\sum_{j\neq i} m_j \tilde{r}_{ij}^{2a}(D(x_i) - D(x_j)) &= \alpha^{2a+1} \sum_{j\neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) \\
&= (\alpha^{2a+1}\lambda)(x_i - c) \\
&= (\alpha^{2a}\lambda)(c + \alpha(x_i - c) - c) \\
&= (\alpha^{2a}\lambda)(D(x_i) - c).
\end{aligned}$$

Portanto $(D(x_1), \ldots, D(x_n))$ é uma configuração central.

Seja $R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ um rotação em torno do ponto c. Então R preserva distâncias (euclidianas), ou seja,

$$\tilde{r}_{ij} = ||R(x_i) - R(x_j)|| = ||x_i - x_j|| = r_{ij}.$$

Da linearidade de R segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j\neq i} m_j \tilde{r}_{ij}^{2a}(R(x_i) - R(x_j)) &= R\left(\sum_{j\neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j)\right) \\
&= R(\lambda(x_i - c)) \\
&= \lambda(R(x_i) - c).
\end{aligned}$$

Portanto $(R(x_1), \ldots, R(x_n))$ é uma configuração central.

Seja $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma translação. Ou seja, existe $c' \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$T(y) = y + c'.$$

É imediato que T preserva distância. Logo

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i} m_j \tilde{r}_{ij}^{2a}(T(x_i)-T(x_j)) &= \sum_{j\neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i-x_j)\\ &= \lambda(x_i-c)\\ &= \lambda(x_i+c'-(c+c'))\\ &= \lambda(T(x_i)-(c+c'))\end{aligned}$$

Portanto $(T(x_1),\ldots,T(x_n))$ é uma configuração central. ■

Assim, nós perguntamos se para uma escolha arbitrária de números reais positivos $m_1,\ldots,m_n$, o número de configurações centrais é finito, a menos de translações, rotações e dilatações.

Este problema foi inicialmente proposto por Jean Chazy (CHAZY, 1918). Aurel Wintner (WINTNER, 1941) e Stephen Smale (SMALE, 1998) fizeram a mesma indagação. Com isto, a resposta afirmativa a essa pergunta é conhecida atualmente como *Conjectura de Chazy-Wintner-Smale* ou *Problema da Finitude*.

Existe uma maneira de atacar o problema da finitude, segundo a qual separamos as configurações em relação a sua dimensão.

Definição 1.7. A *dimensão* de uma configuração x, denotada por $\delta(x)$, é a dimensão do menor subespaço afim que contém os pontos $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^d$. Se $\delta(x) = 1, 2$ ou 3 nós dizemos, respectivamente, que a configuração x é *colinear, plana* ou *espacial*.

Exemplo 1.8. Se $x_1,\ldots,x_n$ são pontos distintos sobre uma reta r então x é colinear, pois r é um subespaço afim de $\mathbb{R}^d$ de dimensão 1.

Lema 1.9. *Seja $x = (x_1,\ldots x_n)$ uma configuração. Seja S o subespaço gerado por $x_1-x_i,\ldots,x_n-x_i$. Então temos*

$$\dim S = \delta(x).$$

Demonstração: Note que $x_j \in S + x_i = \langle x_1-x_i,\ldots,x_n-x_i\rangle + x_i$, para cada j. Logo $S+x_i$ é um subespaço afim que contém todos os x_j. Resta verificar que $S+x_i$ é o menor deles, em relação à dimensão. Seja $S'+v$ um subespaço afim que contém todos os x_j tal que $\dim S' = \delta(x)$. Vamos mostrar que $S' = S$. Como $x_j, x_i \in S'+v$ então

$$x_j - x_i \in S'.$$

Segue que $S = \langle x_1-x_i,\ldots,x_n-x_i\rangle \subset S'$. Ora, $\dim S' = \delta(x)$ então pela definição de $\delta(x)$ segue que $\dim S = \dim S'$, concluindo que $S = S'$ ■

Proposição 1.10. *A dimensão de uma configuração $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é invariante por dilatações, rotações e translações.*

Demonstração: Seja $D(y) = c + \alpha(y - c)$ uma dilatação com respeito ao centro de massa. Observe que

$$\begin{aligned} \langle D(x_1) - D(x_i), \ldots, D(x_n) - D(x_i)\rangle &= \langle \alpha(x_1 - x_i), \ldots, \alpha(x_n - x_i)\rangle \\ &= \langle x_1 - x_i, \ldots, x_n - x_i\rangle. \end{aligned}$$

Pelo lema 1.9, as configurações $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $(D(x_1), \ldots, D(x_n))$ possuem a mesma dimensão.

Seja R uma rotação. Por preservar distâncias, ela deve ser injetiva. Sejam $x_{m_1} - x_i, \ldots, x_{m_k} - x_i$ o máximo de vetores L.I. do conjunto $x_1 - x_i, \ldots, x_n - x_i$. Da linearidade de R e de sua injetividade têm-se que

$$R(x_{m_1}) - R(x_i), \ldots, R(x_{m_k}) - R(x_i)$$

são L.I.. Se x_m for tal que $x_m \notin \{x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}\}$ então existem $b_1, \ldots, b_k$ tais que

$$x_m - x_i = b_1(x_{m_1} - x_i) + \cdots + b_k(x_{m_k} - x_i)$$

$$\implies \quad R(x_m) - R(x_i) = b_1(R(x_{m_1}) - R(x_i)) + \cdots + b_k(R(x_{m_k}) - R(x_i)).$$

Assim, $\{R(x_{m_1}) - R(x_i), \ldots, R(x_{m_k}) - R(x_i)\}$ é um subconjunto L.I. maximal de $\{R(x_1) - R(x_i), \ldots, R(x_n) - R(x_i)\}$. Portanto

$$\dim\langle x_1 - x_i, \ldots, x_n - x_i\rangle = \dim\langle R(x_1) - R(x_i), \ldots, R(x_n) - R(x_i)\rangle.$$

Pelo lema 1.9, as configurações $x = (x_1, \ldots x_n)$ e $(R(x_1), \ldots, R(x_n))$ possuem a mesma dimensão.

Seja $T(y) = y + c'$ uma translação. É imediato que

$$\langle T(x_1) - T(x_i), \ldots, T(x_n) - T(x_i)\rangle = \langle x_1 - x_i, \ldots, x_n - x_i\rangle,$$

logo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $(T(x_1), \ldots, T(x_n))$ possuem a mesma dimensão. ■

Com este resultado podemos dividir o Problema da Finitude a partir da dimensão.

Forest Ray Moulton (MOULTON, 1910) provou que existe uma única configuração central colinear, para $a = -3/2$ e qualquer n, a menos de reordenação.

Joseph Lagrange (LAGRANGE, 1772) mostrou quando $n = 3$ e $a = -3/2$ que só existe uma única configuração central plana, a saber, o triângulo equilátero.

Mais geralmente, Donald Saari (SAARI, 1980) provou que dadas n massas positivas, existe uma única configuração central $(n-1)$-dimensional qual seja o simplexo regular.

Infelizmente, para outros valores da dimensão, o problema de encontrar ou mesmo de contar classes de configurações centrais é muito difícil.

Nosso projeto se concentra em estudar o caso $\delta(x) = n-2$, conhecido como *configurações de Dziobek*.

Novamente para $a = -3/2$, Moeckel e Hampton (HAMPTON; MOECKEL, 2006) provaram que para qualquer escolha de quatro corpos com massas positivas existe uma quantidade finita de configurações de Dziobek associadas.

Previamente para n corpos, Moeckel (MOECKEL, 2001) obteve um resultado de finitude genérica. Rigorosamente, há um polinômio $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tal que, se $m = (m_1, \ldots, m_n)$ é uma escolha arbitrária de massas positivas com $P(m) \neq 0$, então o número de configurações centrais de Dziobek é finito e não excede um certo limite que depende apenas de n. Todavia essa escolha genérica da massa não é possível explicitar seguindo a prova dada por Moeckel. Quando $n = 5$, Albouy e Kaloshin (ALBOUY; KALOSHIN, 2012) mostraram precisamente quem são as escolhas das massas para as quais vale o resultado de finitude.

Esta dissertação tem como objetivo apresentar o trabalho de Thiago Dias (DIAS, 2016) no qual ele demonstra a generalização do resultado de Richard Moeckel (MOECKEL, 2001), sendo agora a um semi-inteiro qualquer.

2 A GEOMETRIA DAS CONFIGURAÇÕES

2.1 A MATRIZ DE UM CONFIGURAÇÃO

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n = \mathbb{R}^{dn}$ uma configuração. Do lema 1.9 é imediato que

$$\delta(x) \leq n - 1. \tag{2.1}$$

Seja $S+v$ o menor subespaço afim que contém os $x_1, \ldots, x_n$. Temos que existe uma cópia isomorfa de S em $\mathbb{R}^{n-1}$. Seja $\varphi : S \to \mathbb{R}^{n-1}$ tal isomorfismo. É fácil ver que

$$\varphi(x_1 - v), \ldots, \varphi(x_n - v)$$

é uma configuração em $\mathbb{R}^{(n-1)n}$ com dimensão $\delta(x)$. Portanto, a partir de agora, não há perda de generalidade em assumirmos que, dada uma configuração x de n corpos pertencentes a $\mathbb{R}^{dn}$, vale $d \leq n - 1$. Desta forma, definindo $k \geq 1$ inteiro tal que

$$d = n - k.$$

Considere o mapa de inclusão

$$\begin{array}{rccc} i_n : & \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (a_1, \ldots a_{n-k}) & \longmapsto & (1, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots 0). \end{array}$$

Podemos assim identificar a configuração $x \in \mathbb{R}^{(n-k)n}$ com uma configuração em $\mathbb{R}^{n^2}$

$$i_n(x) := (i_n(x_1), \ldots, i_n(x_n)).$$

Observação 2.1. Se x é uma configuração central então $i_n(x)$ também é central. De fato

$$\begin{aligned} \lambda(i_n(x_i) - i_n(c)) &= (0, \lambda(x_{i1} - c_1), \ldots, \lambda(x_{i\,n-k} - c_{n-k}), 0 \ldots, 0) \\ &= \Big(0, \sum m_j r_{ij}^{2a}(x_{j1} - x_{i1}), \ldots, \sum m_j r_{ij}^{2a}(x_{j\,n-k} - x_{i\,n-k}), 0 \ldots, 0\Big) \\ &= \sum m_j r_{ij}^{2a}(i_n(x_j) - i_n(x_i)). \end{aligned}$$

Observação 2.2. É verdade que $\delta(x) = \delta(i_n(x))$. Se $S + v$ é o menor subespaço afim que contém todos x_i's, o subespaço afim $S' + i_n(v) := \{i_n(y) + i_n(v); y \in S\}$ claramente contém todos $i_n(x_i)$'s e é fácil ver que ele é o menor com tal propriedade.

Definição 2.3. A matriz

$$X = \begin{bmatrix} i_n(x_1) & \dots & i_n(x_n) \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz associada à configuração* x, e denotamos seu determinante $|X|$ por $\omega(x)$.

Observação 2.4. Temos que X é linha-equivalente a

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ x_1 - x_i & \cdots & x_i & \cdots & x_n - x_i \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Tirando a i-ésima coluna, as demais $n-1$ colunas têm exatamente $\delta(x)$ colunas L.I. pelo lema 1.9. Note que a i-ésima coluna é L.I. com as demais. Portanto

$$\text{posto}(X) = \delta(x) + 1. \tag{2.2}$$

A partir desta observação, conseguimos estudar a dimensão de uma configuração a partir da sua matriz associada.

Exemplo 2.5. Se $d = n-1$, então $\delta(x) = n-1$ se e somente se $\omega(x) \neq 0$. Pois, da observação anterior,

$$\begin{aligned} n - 1 = \delta(x) = \text{posto}(X) - 1 \quad &\iff \quad \text{posto}(X) = n \\ &\iff \quad \omega(x) = |X| \neq 0. \end{aligned}$$

Estamos interessados nas configurações de Dziobek, cuja definição geral não será apresentada aqui. Quando assumimos que as massas e a massa total são não-nulas, (ALBOUY, 2002) apresenta uma definição equivalente, na qual trabalharemos com ela.

Definição 2.6. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma configuração central com massas positivas associadas. Dizemos que x é uma *configuração de Dziobek* se $\delta(x) = n-2$.

Vejamos, a seguir, uma primeira propriedade que descreve tais configurações:

Proposição 2.7. *Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma configuração central. Temos $\delta(x) \leq n-2$ se, e somente se, houver um vetor não-nulo $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ no núcleo de X, ou seja,*

$$\begin{cases} \Delta_1 + \dots + \Delta_n = 0 \\ \Delta_1 x_1 + \dots + \Delta_n x_n = 0 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Além disso, $\delta(x) = n-2$ se, e somente se, Δ for único a menos de fator constante.

Demonstração: Sabemos que $\delta(x) \leq n-1$. Pelo exemplo anterior, $\delta(x) = n-1$ se, e somente se, posto$(X) = n$. Assim

$$\delta(x) \leq n-2 \iff \text{posto}(X) < n \iff \dim \mathcal{N}(X) \geq 1.$$

Seja $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \in \mathcal{N}(X)$ não-nulo. É de imediata verificação que da igualdade matricial $X\Delta = 0$ obtemos as equações (2.3). Por fim,

$$\delta(x) = n-2 \iff \text{posto}(X) = n-1 \iff \dim \mathcal{N}(X) = 1\cdot$$

Assim Δ é único a menos de fator constante. ■

Se $\delta(x) \leq n-2$ nos perguntamos como obter explicitamente um vetor Δ que satisfaça (2.3). Sendo $\delta(x) \leq n-2$, novamente não há perda de generalidade em assumir que $x_i \in \mathbb{R}^{n-2}$. Com isto a última linha da matriz X é composta por zeros. Se removermos essa última linha juntamente com a k-ésima coluna, obtemos uma matriz, denotada por $\widehat{X_k}$, associada à configuração $\widehat{x}_k := (x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n)$, isto é, a configuração de $(n-1)$-corpos onde o vetor da k-ésima posição de x foi excluído.

Note que $|\widehat{X_k}|$ é o menor cofator de X obtido da última linha e k-ésima coluna

$$X_{n\,k} = |\widehat{X_k}|.$$

Se tomarmos

$$\Delta_k := (-1)^{k+1}|\widehat{X_k}|, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

então uma vez que $|X| = 0$, ($\delta(x) \leq n-2$ logo posto$(X) \neq n$), segue da fórmula do determinante pela expansão de Laplace que

$$\begin{aligned} & (-1)^{1+n}|X_{n\,1}| \; + \cdots + \; (-1)^{n+n}|X_{n\,n}| = 0 \\ \Longrightarrow \quad & (-1)^{1+1}|\widehat{X_1}| \; + \cdots + \; (-1)^{n+1}|\widehat{X_n}| = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \Delta_1 \; + \cdots + \; \Delta_n = 0 \end{aligned}$$

Para verificar que $\Delta := (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ está no núcleo de X, falta verificar que

$$\Delta_1 x_1 + \cdots + \Delta_n x_n = 0.$$

Mas isto é consequência imediata do seguinte lema, cuja demonstração se encontra no apêndice A.

Lema 2.8. *Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $A_{ij}; i, j \in \{1, \ldots, n\}$ seus cofatores. Se A possui núcleo não-trivial então $(A_{i1}, \ldots, A_{in})$ pertence ao núcleo de A para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Com isto podemos encontrar o vetor $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ a partir dos $|\widehat{X_k}| := \omega(\widehat{x}_k)$. Agora vejamos que com o uso do produto exterior podemos obter $\omega(\widehat{x}_k)$.

Lema 2.9. *Seja $\wedge$ o produto exterior no espaço $\mathbb{R}^{n-2}$. Temos que*

$$\tau(j,k)(x_1 - x_j) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_j) = \omega(\widehat{x}_k)e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2,}$$

em que os fatores $(x_k - x_j)$ e $(x_j - x_j)$ foram omitidos no primeiro membro, j é um índice arbitrário com $j \neq k$, os e_i's formam a base canônica de $\mathbb{R}^{n-2}$ e

$$\tau(j,k) = \begin{cases} (-1)^j & \text{, se } k < j; \\ (-1)^{j+1} & \text{, se } k > j. \end{cases}$$

Demonstração: Suponha $k > j$ (o outro caso é análogo). Sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma configuração com $\delta(x) = n - 2$, então $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n-2}$ sem perda de generalidade. Sejam $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^{n-2}$. Observe que

$$T := \left[(x_1 - x_j) \ldots \widehat{(x_j - x_j)} \ldots \widehat{(x_k - x_j)} \ldots (x_n - x_j)\right]$$

é a matriz das coordenadas dos $x_1 - x_j, \ldots, x_n - x_j$ na base canônica. Logo

$$(x_1 - x_j) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_j) = |T|e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2}$$

Para o que resta, consideremos a matriz obtida de $\widehat{X_k}$ subtraindo sua j-ésima coluna das demais, obtendo

$$\widehat{X}_k^{(j)} := \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ (x_1 - x_j) & & (x_{j-1} - x_j) & x_j & (x_{j+1} - x_j) & & (x_n - x_j) \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante de $\widehat{X}_k^{(j)}$ pela primeira linha, verifica-se que

$$\omega(\widehat{x}_k) := |\widehat{X_k}| = |\widehat{X}_k^{(j)}| = (-1)^{j+1}|(\widehat{X}_k^{(j)})_{1,j}| = (-1)^{j+1}|T|.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \tau(j,k)(x_1 - x_j) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_j) &= (-1)^{j+1}(x_1 - x_j) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_j) \\ &= (-1)^{j+1}|T|e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \omega(\widehat{X_k})e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

■

A seguir iremos reformular os critérios de dimensão em termos das distâncias mútuas $r_{ij} = ||x_i - x_j||$, ou melhor, seus quadrados $s_{ij} := ||x_i - x_j||^2$.

2.2 A MATRIZ DE CAYLEY - MENGER

Na procura por descrever a dimensão de uma configuração $x \in \mathbb{R}^{(n-1)n}$ em termos das suas distâncias mútuas, primeiro observe que

$$\begin{aligned} s_{ij} = r_{ij}^2 &= ||x_i - x_j||^2 \\ &= (x_{i\,1} - x_{j\,1})^2 + \cdots + (x_{i\,n-1} - x_{j\,n-1})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (x_{i\,k} - x_{j\,k})^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (x_{i\,k}^2 + x_{j\,k}^2) - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_{i\,k} x_{j\,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (x_{i\,k}^2 + x_{j\,k}^2) - 2x_i^\top x_j. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Considere $X' = (x_{rs})_{1 \leq r \leq n-1,\ 1 \leq s \leq n}$ a matriz $(n-1) \times n$ cujas colunas são formados pelas coordenadas dos pontos $x_1, \ldots, x_n$. Note que

$$X'^\top X' = (x_i^\top x_j)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Porém o posto de X' não nos fornece a dimensão da configuração x. Por outro lado, o produto da transposta da matriz X, associada à configuração x, com ela própria não nos retorna $(x_i^\top x_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Desta forma procuramos uma matriz cujo posto esteja associado à dimensão de x e dependa apenas dos s_{ij}. A maneira de encontrá-la é a seguinte: seguindo (HAGIHARA, 1975) começamos observando que podemos ver X com uma submatriz da seguinte matriz $(n+1) \times (n+1)$

$$X_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & x_{1\,1} & \ldots & x_{n\,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{1\,(n-1)} & \ldots & x_{n\,(n-1)} \end{bmatrix},$$

as quais possuem o mesmo determinante

$$\omega(x) = |X| = |X_1|. \tag{2.6}$$

De X_1 obtemos uma nova matriz linha-equivalente apenas trocando de lugar as duas primeiras linhas:

$$X_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{1\,(n-1)} & \dots & x_{n\,(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a transposta de X_1 por X_2 temos, fazendo uso de (2.5),

$$\begin{aligned} X_3 := X_1^\top X_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1^\top x_1 & \dots & x_1^\top x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^\top x_1 & \dots & x_n^\top x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n-1}(x_{1\,k}^2 + x_{1\,k}^2) - s_{11}] & \dots & \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n-1}(x_{1\,k}^2 + x_{n\,k}^2) - s_{1n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n-1}(x_{n\,k}^2 + x_{1\,k}^2) - s_{n1}] & \dots & \frac{1}{2}[\sum_{k=1}^{n-1}(x_{n\,k}^2 + x_{n\,k}^2) - s_{nn}] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies \quad (-2)^n X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -2 & s_{11} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{1\,k}^2 + x_{1\,k}^2) & \dots & s_{1n} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{1\,k}^2 + x_{n\,k}^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & s_{n1} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n\,k}^2 + x_{1\,k}^2) & \dots & s_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n\,k}^2 + x_{n\,k}^2) \end{bmatrix}$$

$$\implies \quad (-2)^{n-1} X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s_{11} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{1\,k}^2 + x_{1\,k}^2) & \dots & s_{1n} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{1\,k}^2 + x_{n\,k}^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_{n1} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n\,k}^2 + x_{1\,k}^2) & \dots & s_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n\,k}^2 + x_{n\,k}^2) \end{bmatrix}.$$

Por fim, observe que podemos eliminar os termos $\sum_{k=1}^{n-1}(x_{i\,k}^2 + x_{j\,k}^2)$ facilmente da matriz $(-2)^{n-1}X_3$ acima. Para tal fazemos as seguintes operações nas linhas

$$L_{i+1} \longrightarrow L_{i+1} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{i\,k}^2)L_1, i = 2, \ldots, n+1$$

obtendo

$$X_4 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & s_{11} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{1\,k}^2 & \ldots & s_{1n} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{n\,k}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_{n1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{1\,k}^2 & \ldots & s_{nn} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{n\,k}^2 \end{bmatrix}.$$

Agora fazendo as operações de coluna

$$C_{j+1} \longrightarrow C_{j+1} - \sum_{k=1}^{n-1}(x_{j\,k}^2)C_1, j = 2, \ldots, n+1$$

obtemos

$$X_5 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz que acabamos de encontrar é muito importante para o desenvolvimento da teoria e ela tem um nome especial.

Definição 2.10. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma configuração e s_{ij} os quadrados das distâncias mútuas $r_{ij} = ||x_i - x_j||$. A matriz

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & s_{12} & s_{13} & \ldots & s_{1n} \\ 1 & s_{12} & 0 & s_{23} & \ldots & s_{2n} \\ 1 & s_{13} & s_{23} & 0 & \ldots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_{1n} & s_{2n} & s_{3n} & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

é chamada de *matriz de Cayley-Menger associada à configuração* x. Seu determinante é representado por $F(x)$. Denotamos o cofator $(A(x))_{i+1,j+1}$ por $F_{ij}(x) :=$, ou $F_{i\,j}$ simplesmente quando a configuração x estiver clara.

Como consequência imediata do que fizemos até agora, temos as seguintes proposições.

Proposição 2.11. *Seja x uma configuração. São equivalentes:*

1. $\delta(x) = n - 1$;

2. *posto*$(A(x)) = n + 1$.

Demonstração: Segue de (2.6), de $|X_1| = -|X_2|$ e de $X_3 = X_1^\top X_2$ que

$$\begin{aligned}\omega(x)^2 = |X_1||X_1| = -|X_1^\top||X_2| = -|X_1^\top X_2| &= -|X_3| \\ &= \frac{-1}{(-2)^{n-1}}|(-2)^{n-1}X_3| \\ &= \frac{-1}{(-2)^{n-1}}|X_4| \\ &= \frac{-1}{(-2)^{n-1}}|X_5| \\ &= \frac{-1}{(-2)^{n-1}}F(x).\end{aligned}$$

Se $\delta(x) = n - 1$ temos que

$$n - 1 = \delta(x) = \text{posto}(X) - 1 \quad \therefore \quad \text{posto}(X) = n,$$

logo

$$\omega(x) = |X| \neq 0 \quad \therefore \quad F(x) = (-2)^{n-1}\omega(x)^2 \neq 0.$$

Como $F(x) = |A(x)|$ segue que $A(x)$ tem posto máximo, isto é,

$$\text{posto}(A(x)) = n + 1.$$

Reciprocamente, se posto$(A(x)) = n + 1$, então

$$F(x) = |A(x)| \neq 0 \quad \therefore \quad \omega(x)^2 \neq 0 \quad \therefore \quad \omega(x) \neq 0.$$

Pelo exemplo 2.5 conclui-se que

$$\delta(x) = n - 1.$$

■

Corolário 2.12. *Seja x uma configuração com n corpos e seja F o determinante de Cayley-Menger associado a x. Então $\delta(x) \leq n - 2$ se, e somente se, $F(x) = 0$.*

Demonstração: Se $\delta(x) \leq n-2 < n-1$, então da proposição anterior, posto$(A(x)) < n+1$, logo $F(x) = |A(x)| = 0$. Se $F(x) = 0$ então $A(x)$ não tem posto máximo. Daí $\delta(x) < n-1 \iff \delta(x) \leq n-2$. ■

Com este corolário, temos uma condição de equivalência para a dimensão de uma configuração ser menor que $n-1$, que só depende do determinante da matriz de Cayley-Menger associado, que está em termos das distâncias mútuas. A seguir obteremos condições equivalentes a uma configuração ser de Dziobek em relação a sua matriz de Cayler-Menger.

Proposição 2.13. *Seja x uma configuração de n corpos. Se $F = 0$, são equivalentes:*

1. $\delta(x) = n-2$;
2. *pelo menos dois dos cofatores principais F_{ii} são não-nulos;*
3. *posto*$(A(x)) = n$.

Demonstração:

- $1) \Rightarrow 2)$

  Tomemos $S = \langle x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1 \rangle$. Temos que $\dim S = \delta(x)$ pelo lema 1.9. Como estamos assumindo $\delta(x) = n-2$ e S é gerado por $n-1$ vetores então existe um x_i tal que

  $$\langle x_2 - x_1, \ldots, \widehat{x_i - x_1}, \ldots, x_n - x_1 \rangle = S. \tag{2.7}$$

  Tomando a configuração de $n-1$ corpos $\widehat{x_i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ de (2.7) tem-se que

  $$\delta(\widehat{x_i}) = n-2.$$

  Observe que o determinante da matriz de Cayley-Menger associado à configuração $\widehat{x_i}$ é exatamente F_{ii}. Como

  $$\delta(\widehat{x_i}) = n-2 > n-3 = (n-1)-2$$

  segue do corolário anterior que

  $$F_{ii}(x) = F(\widehat{x_i}) \neq 0.$$

Para achar outro cofator principal diferente de zero, primeiro observe que se $F(\widehat{x_i}) \neq 0$ então $\omega(\widehat{x_i}) \neq 0$. Mas pelas equações (2.4) temos que

$$\omega(\widehat{x_1}) - \omega(\widehat{x_2}) + \cdots + (-1)^{n+1}\omega(\widehat{x_n}) = 0,$$

logo deve existir $j \neq i$ tal que $\omega(\widehat{x_j}) \neq 0$, e com isto

$$F_{jj} = F(\widehat{x_j}) \neq 0.$$

- $2) \Rightarrow 3)$

  Por hipótese $F(x) = 0$, logo posto$(A(x)) < n+1$ isto é posto$(A(x)) \leq n$. Se posto$(A(x)) < n$ então toda submatriz quadrada de $A(x)$ de ordem n teria determinante nulo. Mas se $F_{ii} \neq 0$, então isso não ocorre. Portanto posto$(A(x)) = n$.

- $3) \Rightarrow 1)$

  Com efeito, lembrando que $\mathcal{N}(A(x))$ é o núcleo de $A(x)$, tem-se

  $$\dim \mathcal{N}(A(x)) = 1.$$

  Sabe-se que para $i = 0, \ldots, n$ vale

  $$(F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}) \in \mathcal{N}(A(x))$$

  pelo lema 2.8. Se $(F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}) \neq 0$ então existe uma constante κ_j tal que

  $$F_{ir} = \kappa_j F_{jr}, \quad 0 \leq r \leq n.$$

  Daí

  $$F_{ir}F_{js} = (\kappa_j F_{jr})\left(\frac{1}{\kappa_j}F_{is}\right) = F_{jr}F_{is}.$$

  Observe que, caso $(F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}) = 0$, a igualdade acima encontrada ainda é válida. Logo

  $$F_{ir}F_{js} = F_{jr}F_{is}, \quad \forall i, j, k, l.$$

  Em particular

  $$F_{ii}F_{jj} = F_{ij}^2. \tag{2.8}$$

  Como posto$(A(x)) = n$ então algum $F_{ij} \neq 0$. De (2.8) conclui-se que $F_{ii} \neq 0$. Daí $\delta(\widehat{x_i}) = n - 2$ e segue que

  $$\delta(x) \leq n - 2 = \delta(\widehat{x_i}) \leq \delta(x) \quad \therefore \quad \delta(x) = n - 2.$$

■

A seguir iremos generalizar parcialmente este resultado para configurações com dimensão $n-k$, com $k \geq 2$. Mas antes precisamos do seguinte lema:

Lema 2.14. *Sejam $x = (x_1, \dots x_n)$ uma configuração, X a matriz de x e $A(x)$ a matriz de Cayley-Menger associada. Se os vetores*

$$v_1 = (v_{11}, \dots, v_{1n}), \dots, v_k = (v_{k1}, \dots, v_{kn})$$

são linearmente independentes e estão no núcleo de X, então os vetores

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_1 &= \left(\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 v_{1j}, v_{11}, \dots, v_{1n} \right), \\ &\vdots \\ \widetilde{v}_k &= \left(\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 v_{kj}, v_{k1}, \dots, v_{kn} \right) \end{aligned}$$

são linearmente independentes e estão no núcleo de $A(x)$. Em particular, $\dim \mathcal{N}(X) \leq \dim \mathcal{N}(A(x))$.

Demonstração: Primeiro observe que os vetores $\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_k$ estão no núcleo de $A(x)$. De fato, temos que

$$A(x)\widetilde{v}_i = \left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij}, -\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 v_{ij} + \sum_{j=1}^{n} s_{1j} v_{ij}, \dots, -\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 v_{ij} + \sum_{j=1}^{n} s_{nj} v_{ij} \right).$$

De $v_i \in \mathcal{N}(X)$ seguem $\sum_{j=1}^{n} v_{ij} = 0$ e $\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = 0$, logo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} s_{kj} v_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} (||x_k||^2 - 2\langle x_j, x_k \rangle + ||x_j||^2) v_{ij} \\ &= ||x_k||^2 \sum_{j=1}^{n} v_{ij} - 2 \left\langle \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j, x_k \right\rangle + \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 v_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 v_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto, $A(x)\widetilde{v}_i = 0$ se, e só se, $\widetilde{v}_i \in \mathcal{N}(A(x))$.

Por outro lado, sejam $b_1, \dots, b_k$ constantes tais que

$$b_1 \widetilde{v_1} + \cdots + b_k \widetilde{v_k} = 0.$$

Então em particular vale

$$\begin{aligned} b_1 v_{11} \quad + \cdots + \quad b_k v_{k1} &= 0, \\ &\vdots \\ b_1 v_{1n} \quad + \cdots + \quad b_k v_{kn} &= 0. \end{aligned}$$

Daí $b_1v_1 + \cdots + b_1v_k = 0$, logo $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Assim $\widetilde{v_1}, \ldots, \widetilde{v_k}$ são L.I. ■

Antes de prosseguimos vamos ver uma nova definição que nos será útil. Dada uma configuração $x = (x_1, \ldots, x_n)$, já falamos que podemos obter uma nova configuração com $n-1$ corpos apenas removendo algum x_k dos $x_1, \ldots, x_n$ e chamamos tal configuração de $\widehat{x}_k$. Ora, nada impede de removermos mais de um corpo. Sejam $i_1, \ldots, i_k$ índices distintos entre 1 e n. A configuração $\widehat{x}_{i_1,\ldots,i_k}$ é a configuração obtida de x removendo os corpos $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$.

Proposição 2.15. *Para qualquer $k \geq 2$, as condições a seguir são equivalentes:*

1. $\delta(x) = n - k$;
2. *posto*$(A(x)) = n - k + 2$.

Demonstração: Para provar $(1) \Rightarrow (2)$, seja $\delta(x) = n-k$. Tomemos $S = \langle x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1 \rangle$. Temos que $\dim S = n - k$. Assim, podemos tirar até $k-1$ destes $x_i - x_j$ e os restantes ainda gerariam S. Em particular, existem $k-2$ índices $i_1, \ldots, i_{k-2}$ tal que a configuração de $n-(k-2)$ corpos $\widehat{x}_{i_1,\ldots i_{k-2}}$ tem dimensão $n-k$. Como $n-k = [n-(k-2)]-2$, segue da proposição 2.13 que a matriz de Cayley-Menger $A(\widehat{x}_{i_1,\ldots i_{k-2}})$ possui dois cofatores principais não-nulos. Seja $F_{jj}(\widehat{x}_{i_1,\ldots i_{k-2}})$ um deles. Note que $F_{jj}(\widehat{x}_{i_1,\ldots k-2})$ é o determinante de uma submatriz quadrada $(n-k+2) \times (n-k+2)$ da matriz A. Assim

$$\text{posto}(A(x)) \geq n - k + 2.$$

Por outro lado, pelo lema anterior

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(A(x)) &\geq \mathcal{N}(X) \\ &= n - 1 - \delta(x) \\ &= n - 1 - (n-k) \\ &= k - 1, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \text{posto}A(x) &= n + 1 - \dim \mathcal{N}(A(x)) \\ &\leq n + 1 - (k-1) \\ &= n - k + 2. \end{aligned}$$

Para a volta, se posto$A(x) = n - k + 2$ então

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(A(x)) &= n + 1 - \text{posto}A(x) \\ &= n + 1 - n + k - 2 \\ &= k - 1. \end{aligned}$$

Pelo lema anterior,

$$\dim \mathcal{N}(X) \leq k - 1.$$

Suponha, por absurdo, que $\dim \mathcal{N}(X) = l - 1$ com $l < k$. Daí

$$\delta(x) = \text{posto}X - 1 = n - (l - 1) - 1 = n - l$$

com $l < k$. Uma vez já provado $(1) \Rightarrow (2)$, temos que posto$A(x) = n - l + 2$. Assim $k = l < k$, absurdo. Logo $\dim \mathcal{N}(X) = k - 1$ e segue que

$$\delta(x) = n - k.$$

■

Corolário 2.16. *Seja x uma configuração. Então $\mathcal{N}(A(x))$ e $\mathcal{N}(X)$ são isomorfos através do mapa*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{N}(X) & \longrightarrow & \mathcal{N}(A(x)) \\ & v = (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & \widetilde{v} = \left(-\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 v_i, v_1, \ldots, v_n \right) \end{array}$$

Demonstração: Temos que

$$\dim \mathcal{N}(X) = n - \delta(x) - 1 = n - (n - k) - 1 = k - 1$$

e

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{N}(A(x)) &= n + 1 - \text{posto}A(x) \\ &= n + 1 - (n - k + 2) \\ &= k - 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Portanto $\mathcal{N}(X)$ e $\mathcal{N}(A(x))$ têm a mesma dimensão. Por fim, pelo lema 2.14 temos que T preserva conjuntos L.I.. Fica provado que T é um isomorfismo. ■

Até o momento, estamos sempre associando a matriz de Cayley-Menger a uma configuração x. Mas podemos estudar a matriz de Cayley-Menger como uma função de $\mathbb{C}^q$ em

$\mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$ em que $q = n(n-1)/2$. Seja $r = (r_{1\,2}, \ldots, r_{1\,n}, r_{2\,3}, \ldots, r_{2\,n}, \ldots, r_{n-1\,n}) \in \mathbb{C}^q$. Definimos assim $A\colon \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$ por

$$r \longmapsto A(r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & r_{1\,2}^2 & r_{1\,3}^2 & \ldots & r_{1\,n}^2 \\ 1 & r_{1\,2}^2 & 0 & r_{2\,3}^2 & \ldots & r_{2\,n}^2 \\ 1 & r_{1\,3}^2 & r_{2\,3}^2 & 0 & \ldots & r_{3\,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_{1\,n}^2 & r_{2\,n}^2 & r_{3\,n}^2 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

e da mesma forma, $F(r) := |A(r)|$. Com isto, podemos estabelecer uma relação mais geral entre os cofatores $F_{ij} := F_{ij}(r) := (A(r))_{i+1,j+1}$ e núcleo de $A(r)$ quando $F(r) = 0$.

Proposição 2.17. *Seja $A(r)$ a matriz de Cayley-Menger associada a um vetor $r \in \mathbb{C}^q$. Suponha que $F(r) = 0$, mas pelo menos um dos cofatores $F_{ij} \neq 0$. Então, se $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ for qualquer solução diferente de zero de $A(r)\Delta = 0$, existe uma constante $\kappa \neq 0$ tal que*

$$F_{ij} = \kappa \Delta_i \Delta_j.$$

Além disso, pelo menos dois dos Δ_i, com $1 \leq i \leq n$, são diferentes de zero.

Demonstração: Sejam $1 \leq i_0, j_0 \leq n$ tais que $F_{i_0 j_0} \neq 0$. Disto e de $F(r) = 0$ segue que posto$(A(r)) = n$. Logo

$$\dim \mathcal{N}(A(s)) = 1.$$

Seja Δ um vetor gerador de $\mathcal{N}(A(r))$. Como os vetores $(F_{i0}, F_{i1}, \ldots, F_{in}) \in \mathcal{N}(A(r))$, para cada i, existem constantes κ_i tais que

$$F_{ij} = \kappa_i \Delta_j. \tag{2.10}$$

Mas por simetria tem-se

$$F_{ij} = F_{ji} = \kappa_j \Delta_i,$$

ou seja,

$$\kappa_i \Delta_j = \kappa_j \Delta_i. \tag{2.11}$$

De $F_{i_0 j_0} \neq 0$ junto com (2.10) segue que $\Delta_{j_0} \neq 0$. Tomando $\kappa = \frac{\kappa_{j_0}}{\Delta_{j_0}}$ segue de (2.11) que $\kappa_i = \kappa \Delta_i$ e daí

$$F_{ij} = \kappa_i \Delta_j = \kappa \Delta_i \Delta_j.$$

Por fim, do que acabamos de provar conclui-se que Δ_{i_0} e Δ_{j_0} são não-nulos. Se $i_0 \neq j_0$ não há mais nada a fazer. Se $i_0 = j_0$, então resta observar que de $A(r)\Delta = 0$, a multiplicação da primeira linha de $A(r)$ com Δ nos dá

$$\Delta_1 + \cdots + \Delta_n = 0.$$

Disto e de $\Delta_{i_0} \neq 0$ deduzimos que existe outro Δ_i diferente de Δ_{i_0}, que também deve ser não-nulo. ■

3 EQUAÇÕES QUE DESCREVEM AS CONFIGURAÇÕES CENTRAIS

Como mencionado na introdução, procuramos descrever as configurações de Dziobek como uma variedade afim, isto é, como o conjunto de zeros simultâneos para um conjunto de polinômios pré-estabelecido. Sabemos que dada uma configuração de Dziobek x podemos associá-la ao seu vetor das distâncias mútuas $r = (r_{1\,2}, \ldots, r_{(n-1)\,n}) \in \mathbb{R}^q$, em que $q = \frac{n(n-1)}{2}$. Pelo corolário 2.12 temos $F(r) = 0$, isto é, r é um zero do polinômio obtido do determinante de Cayley-Menger em que as entradas são as q variáveis $R_{1\,2}, \ldots, R_{(n-1)\,n}$. Todavia, sabemos que podem existir vetores r^* raízes de F que não podem ser associados a nenhuma configuração de Dziobek. Desta forma, vamos à procura de mais equações polinomiais que nos forneçam como zeros pontos que podem ser associados a uma configuração de Dziobek.

Seja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma configuração central em que os corpos $x_1, \ldots, x_n$ têm massas positivas $m_1, \ldots, m_n$ respectivamente. Então existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\sum_{j \neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) = \lambda(x_i - c), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Introduzimos agora uma nova constante r_0 tal que

$$r_0^{2a} = \frac{\lambda}{M}, \tag{3.2}$$

sendo $M = m_1 + \cdots + m_n > 0$. Tomemos as quantidades

$$S_{ij} =: r_{ij}^{2a} - r_0^{2a}. \tag{3.3}$$

Combinando as equações (3.1) e (3.3) têm-se, para $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j \neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) - \lambda(x_i - c) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) - \lambda\left(x_i - \frac{1}{M}\sum_j m_j x_j\right) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) - r_0^{2a} M x_i + r_0^{2a}\sum_j m_j x_j \\
&= \sum_{j \neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) - \sum_j m_j r_0^{2a} x_i + \sum_j m_j r_0^{2a} x_j \\
&= \sum_{j \neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) - \sum_j m_j r_0^{2a}(x_i - x_j) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j r_{ij}^{2a}(x_i - x_j) - \sum_{j \neq i} m_j r_0^{2a}(x_i - x_j) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j (r_{ij}^{2a} - r_0^{2a})(x_i - x_j) \\
&= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij}(x_i - x_j).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Para eliminarmos a dependência de x, tomemos o produto exterior na i-ésima equação de (3.4) com $n-3$ multivetores da forma

$$v_{ikl} = (x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i)$$

em que i, k, l são quaisquer três índices entre 1 e n distintos entre si, e o produto exterior omite os três fatores $(x_i - x_i), (x_k - x_i)$ e $(x_l - x_i)$. Daí

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\textstyle\sum_{j\neq i} m_j S_{ij}(x_i - x_j)\Big) \wedge (x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i) \\ &= \textstyle\sum_{j\neq i} \Big(m_j S_{ij}(x_i - x_j) \wedge (x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i)\Big), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} & m_k S_{ik}(x_i - x_k) \wedge (x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i) \\ = \; & -m_l S_{il}(x_i - x_l) \wedge (x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i). \end{aligned}$$

Vamos considerar um dos possíveis casos, quando temos $k < l < i$. Segue então

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (-1)^k m_k S_{ik}(x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_k - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i) \\ = \; & -(-1)^{l-1} m_l S_{il}(x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_l - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (-1)^{k+1} m_k S_{ik} \tau(i,l)^2 (x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_k - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i) \\ = \; & (-1)^{l+1} m_l S_{il} \tau(i,k)^2 (x_1 - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_l - x_i) \wedge \cdots \wedge (x_n - x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (-1)^{k+1} m_k S_{ik} \tau(i,l) \omega(\widehat{x_l}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2} \\ = \; & (-1)^{l+1} m_l S_{il} \tau(i,k) \omega(\widehat{x_k}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & (-1)^{l+1} m_k S_{ik} \tau(i,l) \omega(\widehat{x_l}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2} \\ = \; & (-1)^{k+1} m_l S_{il} \tau(i,k) \omega(\widehat{x_k}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \Longrightarrow \quad \tau(i,l) m_k S_{ik} \Delta_l e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2} = \tau(i,k) m_l S_{il} \Delta_k e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2} \\ & \Longrightarrow \quad \tau(i,l) m_k S_{ik} \Delta_l = \tau(i,k) m_l S_{il} \Delta_k \\ & \Longrightarrow \quad m_k S_{ik} \Delta_l = m_l S_{il} \Delta_k. \end{aligned}$$

Os demais casos podem ser feitos de maneira análoga. Com isto provamos o seguinte resultado:

Proposição 3.1. *Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ uma configuração central com massas $m_1, \ldots m_n$, S_{ij} como em (3.3) e $\Delta_i = (-1)^{i+1}\omega(\widehat{x_i})$. Então*

$$m_k S_{ik} \Delta_l = m_l S_{il} \Delta_k. \tag{3.5}$$

O próximo resultado fornece uma parametrização dos S_{ij} que descrevem as configurações de Dziobek.

Proposição 3.2. *Seja x uma configuração de Dziobek de n massas positivas, e sejam S_{ij} dados por (3.3). Então há números reais $w_i, 1 \leq i \leq n$, e $\kappa \neq 0$ tais que*

$$S_{ij} = \kappa w_i w_j. \tag{3.6}$$

Além disso, pelo menos dois dos w_i são diferentes de zero.

Demonstração: Sejam $\Delta_i = (-1)^{i+1}\omega(\widehat{x_i}), i = 1, \ldots, n$. Pelo fato das massas serem não-nulas, podemos definir

$$w_i = \frac{\Delta_i}{m_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.7}$$

e então (3.5) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} S_{ik} w_l &= S_{ik} \frac{\Delta_l}{m_l} = \frac{m_k S_{ik} \Delta_l}{m_k m_l} \\ &= \frac{m_l S_{il} \Delta_k}{m_k m_l} = S_{il} \frac{\Delta_k}{m_k} = S_{il} w_k. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\delta(x) = n - 2$, a proposição 2.17 nos diz que dois dos Δ_i são não-nulos, e com isto pelo menos dois dos w_i são não-nulos. Suponhamos que $w_k \neq 0$ e tomemos

$$\kappa_i := \frac{S_{ik}}{w_k}, \tag{3.9}$$

logo

$$S_{ij} = \frac{S_{ij} w_k}{w_k} = \frac{S_{ik} w_j}{w_k} = \kappa_i w_j \tag{3.10}$$

Agora, da simetria $S_{ij} = S_{ji}$, tem-se

$$\kappa_i w_j = \kappa_j w_i, \quad \forall i, j. \tag{3.11}$$

Como $w_k \neq 0$, seja

$$\kappa := \frac{\kappa_k}{w_k}. \tag{3.12}$$

Logo

$$\kappa_i = \frac{\kappa_k}{w_k} w_i = \kappa w_i, \quad \forall i. \tag{3.13}$$

Portanto, de (3.10) e (3.12), temos

$$S_{ij} = \kappa_i w_j = \kappa w_i w_j.$$

Por fim, se $\kappa = 0$ teríamos $S_{ij} = 0$ para todos os $i \neq j$ e de $S_{ij} = r_{ij}^{2a} - r_0^{2a}$ obteríamos em $r_{ij} = r_0$ para todo $i \neq j$. Isto é, a configuração x teria seus corpos distribuídos no espaço de modo que a distância de cada corpo ao outro seria constante. Assim, x formaria um $(n-1)$-simplexo regular. Daí $\delta(x) = n - 1$, uma contradição. Portanto κ é diferente de zero. ■

Se não restringirmos os w_i a serem reais, então não há perda de generalidade em supor que $\kappa = 1$. De fato, tomando $z_i := \sqrt{\kappa} w_i$ tem-se

$$S_{ij} = \kappa w_i w_j = \kappa \frac{z_i}{\sqrt{\kappa}} \frac{z_j}{\sqrt{\kappa}} = z_i z_j.$$

Relembramos que $S_{ij} = r_{ij}^{2a} - r_0^{2a}$. Se $a > 0$ o ponto (r_{ij}, z_i, z_j) é raiz do polinômio

$$g_{ij}^a(R_{ij}, Z_i, Z_j) := R_{ij}^{2a} - r_0^{2a} - Z_i Z_j. \tag{3.14}$$

Se $a < 0$, então

$$r_{ij}^{2a} = r_0^{2a} + z_i z_j \quad \therefore \quad 1 = r_{ij}^{-2a}(r_0^{2a} + z_i z_j),$$

e assim (r_{ij}, z_i, z_j) é raiz do polinômio

$$g_{ij}^a(R_{ij}, Z_i, Z_j) := R_{ij}^{-2a}(r_0^{2a} + Z_i Z_j) - 1. \tag{3.15}$$

Tais polinômios g_{ij}^a podem ser vistos como polinômios em $\mathbb{C}$ nas $q + n$ variáveis $R_{12}, \ldots, R_{(n-1)n}, Z_1, \ldots, Z_n$. Deste modo, seja x uma configuração de Dziobek, r_{ij} as q distâncias mútuas associadas a x e $z_1, \ldots, z_n$ como na proposição 3.2. O ponto $P = (r_{12}, \ldots, r_{(n-1)n}) \in \mathbb{C}^{q+n}$ é portanto um zero comum dos q polinômios g_{ij}^a. E como foi mencionado no começo deste capítulo, P também é raiz de $F(R_{12}, \ldots, R_{(n-1)n})$, o determinante de Cayley-Menger em que as entradas são as variáveis $R_{12}, \ldots R_{(n-1)n}$.

Temos até agora o seguinte: a uma configuração x associamos um ponto $P = (r, z) = (r_{12}, \ldots r_{(n-1)n}, z_1, \ldots, z_n)$ que é zero comum dos polinômios F e g_{ij}^a. Porém, pode existir algum zero comum de F e g_{ij}^a ao qual não conseguiríamos associar uma configuração de

Dziobek. Novamente, vamos restringir conjunto de zeros comuns de F e g_{ij}^a. E faremos isso usando mais polinômios.

Antes de prosseguirmos, lembrando que $r_0^{2a} = M^{-1}\lambda$, dada uma configuração x existe uma dilatação de x tal que a nova configuração obtida tem o valor r_0 associado igual a 1. De fato, da proposição 1.10, dada uma dilatação $D(y) = c + \alpha(y - c)$ em que c é o centro de massa e α é um fator qualquer, temos que

$$\sum_{j\neq i} m_j \tilde{r}_{ij}^{2a}(D((x_i) - D(x_j)) = \alpha^{2a}\lambda(D(x_i) - c);$$

tomando α de modo que $\alpha^{2a}\lambda = M$, segue que o valor r_0 associado à configuração $(D(x_1), \ldots, D(x_n))$ tem valor 1. A fim de encontrar a solução para o problema da finitude, restringirmos nossa atenção ao conjunto definido a seguir.

Definição 3.3. Definimos $\mathcal{X}^a$ como o conjunto de todas as classes de configurações de Dziobek com expoente semi-inteiro diferente de zero módulo a relação de equivalência das isometrias e tal que $r_0 = 1$.

Observação 3.4. Seja $[x] \in \mathcal{X}^a$. Se x e y são configurações pertencentes à mesma classe $[x]$ então x e y diferem apenas por rotação e translação. Pois, qualquer dilatação de x ou y altera o r_0 associado, enquanto rotações e translações não altera r_0.

Desejamos definir uma associação entre $\mathcal{X}^a$ e alguma variedade afim sobre $\mathbb{C}$. Um ponto $r = (r_{12}, \ldots r_{(n-1)n})$ anular $F(R)$ garante apenas que a configuração com distâncias mútuas r_{ij} tem dimensão menor ou igual a $n-2$. Para termos a igualdade precisamos que $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ seja único a menos de fator constante tal que

$$\begin{cases} \Delta_1 + \ldots + \Delta_n = 0; \\ \Delta_1 x_1 + \ldots + \Delta_n x_n = 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

onde $\Delta_k = (-1)^{k+1}\omega(\widehat{x_k})$. Na demostração da proposição 3.2, construímos os z_i tais que $z_i = \Delta_i/m_i$. Assim a primeira equação acima se reescreve como

$$m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n = 0. \tag{3.17}$$

Na demonstração do lema 2.14 foi mostrado que

$$\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 \Delta_j = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j r_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} m_j z_j r_{ij}^2. \tag{3.18}$$

Tomemos $\Delta_0 := -\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \Delta_j$. Sejam $[x] \in \mathcal{X}^a$ e $m_1, \ldots, m_n$ as massas correspondentes a $[x]$. A $[x]$ associamos o ponto

$$P_x = (r, \Delta_0, z, m) := (r_{12}, \ldots, r_{(n-1)n}, \Delta_0, z_1, \ldots, z_n, m_1, \ldots m_n) \in \mathbb{C}^{q+2n+1}$$

Com o que foi feito até agora, pelas equações (3.17) e (3.18), segue que P_x é raiz dos polinômios

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma_0(R_{12}, \ldots, R_{(n-1)n}, \Delta_0, Z_1, \ldots, Z_n, M_1, \ldots, M_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} M_j Z_j \end{aligned} \tag{3.19}$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \Gamma_i(R_{12}, \ldots, R_{(n-1)n}, \Delta_0, Z_1, \ldots, Z_n, M_1, \ldots, M_n) \\ &= \Delta_0 + \sum_{j=1}^{n} M_j Z_j R_{ij}^2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A partir daqui, $r \in \mathbb{C}^q$ representa um vetor com entradas r_{ij} reais, $z \in \mathbb{C}^n$, Δ_0 um número real e $m \in \mathbb{C}^n$ um vetor de massas. Os polinômios g_{ij}^a são dadas por (3.14) se $a > 0$ e por (3.15) se $a < 0$. Ainda, F é o determinante de Cayley-Menger e Γ_0 e Γ_i são como em (3.19) e (3.20) respectivamente.

Com isto definimos a seguinte variedade afim

$$\widetilde{V}^a := \left\{ (r, \Delta_0, z, m) \in \mathbb{C}^{q+2n+1}; \begin{array}{c} g_{ij}^a(r, z) = 0 \\ F(r) = 0 \\ \Gamma_0(z, m) = 0 \\ \Gamma_i(r, \Delta_0, z, m) = 0 \end{array} \right\}. \tag{3.21}$$

O seguinte resultado estabelece uma relação entre entre $\mathcal{X}^a$ e $\widetilde{V}^a$ a partir do seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Seja x uma configuração de Dziobek com respectivas massas $m_1, \ldots m_n$ e expoente semi-inteiro $a \in (\mathbb{Z}/2)\backslash\{0\}$. Então existe uma função bivalente $f^a : \mathcal{X}^a \to \widetilde{V}^a$ que associa $[x]$ aos pontos*

$$P_x = (r, \Delta_0, z_1, \ldots, z_n, m) \text{ e } P_x^* = (r, -\Delta_0, -z_1, \ldots, -z_n, m) \in \widetilde{V}^a,$$

em que $r = (r_{ij})$ é o vetor das distâncias mútuas de x, $m = (m_i)$ é o vetor das massas associadas à $[x]$ e os z_i's e Δ_0 são determinados pelas equações polinomiais que definem $\widetilde{V}^a$.

Além disso, os números r_{ij} e m_i são números reais positivos, os números z_i e Δ_0 são todos reais ou são todos imaginários puros e existem pelo menos dois z_i diferentes de zero.

Demonstração: Seja $[x] \in \mathcal{X}^a$. Pela observação 3.4 qualquer representante x de $[x]$ tem seu vetor $r = (r_{ij})$ de distâncias mútuas invariante por rotação e translação. Tomemos $z = (z_1, \ldots, z_n)$ como na proposição 3.2 e $\Delta_0 = -\sum_{j=1}^{n} ||x_n||^2 \Delta_j$. Assim, associamos

$$[x] \longmapsto P_x = (r, \Delta_0, z, m).$$

Pelo que fizemos até agora, temos que $P_x \in \widetilde{V}^a$. Por fim, seja y outro representante de $[x]$. Os vetores r e m associados a y coincidem com os de x. Sejam z^* e Δ_0^* tomados de maneira análoga a z e Δ_0, só que em relação a y. Então $[x]$ está associado a dois pontos

$$P_x = (r, \Delta_0, z, m) \quad \text{e} \quad P_y = (r, \Delta_0^*, z^*, m)$$

de $\widetilde{V}^a$. Por hipótese deve-se ter $\dim \mathcal{N}(A(x)) = 1$. Sabemos, do lema 2.14, que

$$\left(-\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^2 \Delta_j, \Delta_1, \ldots, \Delta_n \right) = (\Delta_0, z_1 m_1, \ldots, z_n m_n) \in \mathcal{N}(A(x))$$

e analogamente

$$(\Delta_0^*, z_1^* m_1, \ldots, z_m^* m_n) \in \mathcal{N}(A(x)),$$

logo existe uma constante ξ tal que

$$\begin{aligned} \xi \Delta_0 = \Delta_0^* \quad \text{e} \quad \xi z_i m_i &= z_i^* m_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ \therefore \qquad \xi z_i &= z_i^*. \end{aligned}$$

Sabemos que existem z_{i_0} e z_{j_0} não-nulos. De $g^a_{i_0 j_0}(P_x) = 0$ e $g^a_{i_0 j_0}(P_y) = 0$ temos que

$$\begin{aligned} r^{2a}_{i_0 j_0} - 1 - z_{i_0} z_{j_0} &= r^{2a}_{i_0 j_0} - 1 - \xi^2 z_{i_0} z_{j_0} \\ \therefore \ \xi^2 = 1 \ &\therefore \xi = \pm 1, \end{aligned}$$

para $a > 0$. O outro é análogo. Desta forma a função bivalente

$$\begin{aligned} f^a : \ \mathcal{X}^a &\longrightarrow \widetilde{V}^a \\ [x] \quad &\longmapsto \quad P_x = (r, \Delta_0, z, m) \\ &\longmapsto \quad P_x^* = (r, -\Delta_0, -z, m) \end{aligned}$$

existe. ■

Tal função f^a encontrada não necessariamente é sobrejetiva. Desejamos diminuir o conjunto $\widetilde{V}^a$ de modo que tal novo subconjunto ainda contenha a imagem de f^a.

Lema 3.6. *Sejam $F(R)$ o determinante da matriz de Cayley-Menger $A(R)$ e $P_x = (r, \Delta_0, z, m)$ um ponto associado a x, uma configuração de Dziobek. Então*

$$\frac{\partial F}{\partial R_{ij}}(P_x) = 4\kappa r_{ij} m_i z_i m_j z_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n,$$

em que κ é a constante definida na proposição 2.17.

Demonstração: Sejam $F_0, F_1, \ldots, F_n$ as colunas de F. Então, pelo lema A.3,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial R_{ij}} &= \det\left[\frac{\partial F_0}{\partial R_{ij}}\, F_1 \ \ldots \ F_n\right] + \cdots + \det\left[F_0\, F_1 \ \ldots \ \frac{\partial F_n}{\partial R_{ij}}\right] \\
&= \det\left[F_0 \ \ldots \ \frac{\partial F_i}{\partial R_{ij}} \ \ldots \ F_n\right] + \det\left[F_0 \ \ldots \ \frac{\partial F_j}{\partial R_{ij}} \ \ldots \ F_n\right] \\
&= \det\begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ F_0 & \ldots & 2R_{ij} & \ldots & F_n \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ F_0 & \ldots & 2R_{ji} & \ldots & F_n \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \\
&= 2R_{ij}F_{ij} + 2R_{ji}F_{ji} = 4R_{ij}F_{ij}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial R_{ij}}(P_x) = 4r_{ij}F_{ij} &= 4r_{ij}\kappa\Delta_i\Delta_j \\
&= 4\kappa r_{ij} m_i z_i m_j z_j.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.7. *Sejam x uma configuração de Dziobek com expoente $a \in \mathbb{Z}/2\backslash\{0\}$ e $P_x \in \mathbb{C}^{q+2n+1}$ um ponto associado a x. Considere, para cada $i = 1, \ldots, n$, os polinômios*

$$\psi_i^a = \begin{cases} R_{i1}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{i1}} Z_1 + \cdots + R_{in}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{in}} Z_n, & \text{se} \quad a < 0; \\ \prod_{(k,l)\neq(i,1)} R_{kl}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{i1}} Z_1 + \cdots + \prod_{(k,l)\neq(i,n)} R_{kl}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{in}} Z_n, & \text{se} \quad a > 0. \end{cases}$$

Então para todo $a \in (\mathbb{Z}/2)\backslash\{0\}$, as equações $\psi_i^a(P_x) = 0$ não são simultaneamente satisfeitas.

Demonstração:

- $a < 0$

Usando o lema anterior tem-se que

$$\begin{aligned}\psi_i^a(P_x) &= r_{i1}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P_x)z_1+\cdots+r_{in}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{in}}(P_x)z_n\\ &= r_{i1}^{-2a+1}(4\kappa r_{i1}m_iz_im_1z_1)z_1+\cdots+r_{in}^{-2a+1}(4\kappa r_{in}m_iz_im_nz_n)z_n\\ &= 4\kappa m_iz_i(m_1r_{i1}^{-2a+2}z_1^2+\cdots+m_nr_{in}^{-2a+2}z_n^2).\end{aligned}$$

De $m_i, r_{ij} > 0$ e de todos os z_i serem reais ou todos serem imaginários puros segue que $m_1r_{i1}^{-2a+2}z_1^2+\cdots+m_nr_{in}^{-2a+2}z_n^2 \neq 0$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $z_1=\cdots=z_n=0$. Logo

$$\psi_i^a(P_x)=0 \iff z_i=0.$$

Mas, pela proposição 3.2 segue que nem todos os z_i são nulos.

- $a>0$

  Novamente pelo lema anterior temos

$$\begin{aligned}\psi_i^a(P_x) &= \prod_{(k,l)\neq(i,1)} r_{kl}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P_x)z_1+\cdots+\prod_{(k,l)\neq(i,n)} r_{kl}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{in}}(P_x)z_n\\ &= \prod_{(k,l)\neq(i,1)} r_{kl}^{-2a+1}4\kappa r_{i1}m_iz_im_1z_1^2+\cdots+\prod_{(k,l)\neq(i,n)} r_{kl}^{-2a+1}4\kappa r_{in}m_iz_im_nz_n^2\\ &= 4\kappa\prod r_{kl}^{-2a+1}(m_iz_i)(m_1z_1^2+\cdots+m_nz_n^2). \qquad (3.22)\end{aligned}$$

  O final do argumento é o mesmo do caso $a<0$.

■

Proposição 3.8. *Com a notação introduzida em (3.21), para todo $a\in\mathbb{Z}/2\backslash\{0\}$, a variedade quase-afim*

$$V^a := \widetilde{V}^a\backslash(W_1\cup W_2\cup W_3^a)$$

contém todos os pontos associados a uma configuração de Dziobek, em que

$$W_1=\{(r,\Delta_0,z,m)\in\mathbb{C}^{q+2n+1}; \prod_{i<j} r_{ij}=0\}$$

$$W_2=\{(r,\Delta_0,z,m)\in\mathbb{C}^{q+2n+1}; F_{ij}(r)=0,\forall i,j\}$$

$$W_3^a=\{(r,\Delta_0,z,m)\in\mathbb{C}^{q+2n+1}; \psi_i^a(r,\Delta_0,z,m)=0, i=1,\ldots,n\}$$

Demonstração: Sejam $f^a : \mathcal{X}^a \longrightarrow \widetilde{V}^a$ a função bivalente construída no teorema 3.5 e $P_x \in f^a(\mathcal{X}^a) \subset \widetilde{V}^a$. Note que $P_x \notin W_1$, uma vez que as distâncias mútuas $r_{ij}, i \neq j$, associadas à uma configuração de Dziobek são não nulas. Para ver que $P_x \notin W_2$, sabe-se da proposição 2.13 que posto $A(x) = n$. Por definição, não se pode ter todos os menores determinantes $F_{ij}(r) = 0$. Por fim, $P_x \notin W_3^a$ é uma consequência imediata da proposição 3.7.

■

4 UM BREVE PASSEIO PELA GEOMETRIA ALGÉBRICA

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados sobre as chamadas *variedades quase-afins*; o conjunto V^a, definido no capítulo anterior (vide proposição 3.8), é uma tal variedade. Usaremos tais resultados no próximo capítulo para calcular a dimensão de V^a e com isso obter a finitude genérica. As demonstrações não citadas a seguir encontram-se no apêndice B.

4.1 TOPOLOGIA DE ZARISKI

Definição 4.1. Dados $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ m polinômios sobre o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o conjunto dos zeros comuns dos $f_1, \ldots, f_m$ polinômios é chamado de *variedade afim associado aos polinômios* $f_1, \ldots f_m$ e denotaremos por

$$V(f_1 \ldots, f_m) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n; f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Além disso, se I é um ideal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, definimos analogamente a *variedade afim associada ao ideal* I como o conjunto

$$V(I) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n; f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \forall f \in I\}.$$

Proposição 4.2. *Seja I o ideal gerado pelos m polinômios $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$. Então*

$$V(f_1 \ldots, f_m) = V(I).$$

Este resultado permite, inicialmente, concentrar-nos ao estudo das variedades afins somente associadas a algum ideal. Isso decorre do importante teorema a seguir, cuja a demonstração pode ser vista em (COX; LITTLE; O'SHEA, 1996).

Teorema 4.3 (Teorema da base de Hilbert)**.** *Todo ideal $I \subset K[T_1, \ldots, T_n]$ é finitamente gerado, isto é, $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ para alguns $f_1, \ldots, f_m \in I$.*

A proposição a seguir é importante, pois podemos definir o espaço topológico onde os abertos são os complementares das variedades afins e os fechados serão as variedades afins.

Proposição 4.4. *A interseção arbitrária e a união finita de variedades afins é uma variedade afim.*

Definição 4.5. Chamamos de *topologia de Zariski* em $\mathbb{K}^n$ a topologia cujos abertos são os conjuntos complementares das variedades afins.

Exemplo 4.6. $\{0\}$ e $\mathbb{K}^n$ são fechados na topologia de Zariski: note que

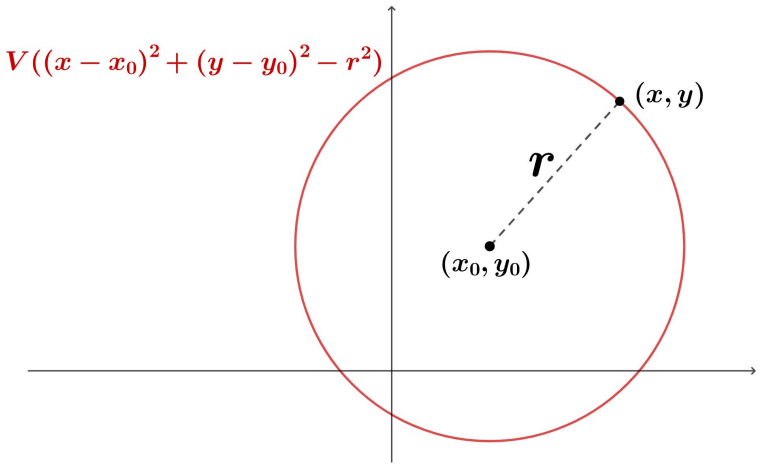
$$\{0\} = \{(x_1, \ldots, x_n); x_1 = \cdots = x_n = 0\}$$

e

$$\mathbb{K}^n = V(f) \text{ em que } f \equiv 0.$$

Dado um círculo de raio r e centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, então ele é uma variedade afim. Basta observar que seus pontos são determinados pelos zeros do polinômio $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2$.

Figura 2 – Variedade afim obtida do círculo de raio r e centro $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.



Fonte: imagem criada no software Geogebra.

Definição 4.7. Dado uma variedade afim V então $V = V(I)$ para algum ideal I. Definimos o mapa $\mathcal{I}(\cdot)$ tal que

$$\mathcal{I}(V) = I.$$

Definição 4.8. O *radical* de I é o ideal

$$\sqrt{I} = \{f \in K[T_1, \ldots, T_n]; f^m \in I \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}.$$

O próximo resultado é bem conhecido na Geometria Algébrica; para uma demonstração consulte (COX; LITTLE; O'SHEA, 1996).

Proposição 4.9. *(Teorema dos Zeros de Hilbert): $V(\cdot)$ e $\mathcal{I}(\cdot)$ induzem a seguinte correspondência bijetiva que reverte inclusões:*

$$\begin{aligned} \{V; V \text{ é uma variedade afim de } \mathbb{K}^n\} &\iff \{I; I \text{ é ideal radical de } \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_m]\} \\ V &\longmapsto \mathcal{I}(V) \\ V(I) &\longmapsfrom I. \end{aligned}$$

De modo que vale

$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}.$$

A seguir iremos definir os tipos de subconjunto no qual o nosso V^a se encaixa.

Definição 4.10. Um aberto relativo U de uma variedade afim é chamado de *variedade quase-afim*.

Observação 4.11. Se U é uma variedade quase-afim então $U = V\backslash Y$ para certas variedades afins V e Y. Podemos ver U também como

$$U = V \cap (\mathbb{K}^n \backslash Y).$$

Assim as variedades quase-afins são a interseção de um fechado e um aberto de Zariski.

Observação 4.12. Toda variedade afim V é quase-afim, pois $V = V\backslash\emptyset$. Porém, nem toda variedade quase-afim é afim. Por exemplo, $U = \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ é quase-afim, mas não pode ser afim uma vez que não existe um polinômio f de n variáveis sobre $\mathbb{K}$ que se anula em todo $\mathbb{K}^n$ menos na origem. Isto é decorrência de f ser uma função contínua visto que é um polinômio.

Agora, seguindo (HARTSHONE, 1977), trataremos de propriedades para espaços topológicos quaisquer, e que podem ser imediatamente aplicadas as variedades afins e quase-afins.

Seja $\mathcal{T}$ um espaço topológico.

Definição 4.13. Dizemos que $\mathcal{T}$ é *irredutível* se $\mathcal{T} \neq \emptyset$ e $\mathcal{T}$ não pode ser escrito como união de subconjuntos fechados próprios de $\mathcal{T}$.

Proposição 4.14. *São equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $\mathcal{T}$ *é irredutível;*

ii) Se U_1 *e* U_2 *são subconjuntos abertos não vazios de* $\mathcal{T}$*, então* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Corolário 4.15. $\mathcal{T}$ *é irredutível se, e somente se, todo subconjunto aberto não-vazio é denso em* $\mathcal{T}$.

Definição 4.16. Sejam $\mathcal{T}$ um espaço topológico e Y um subespaço de $\mathcal{T}$. Dizemos que Y é *irredutível* se Y é irredutível com a topologia induzida.

Proposição 4.17. $\mathcal{T}$ *é irredutível se, e somente se, todo aberto* U *não-vazio de* $\mathcal{T}$ *for irredutível.*

Definição 4.18. Sejam $\mathcal{T}$ um espaço topológico e Y um subespaço de $\mathcal{T}$. O *fecho* $\overline{Y}$ de Y é o menor fechado, com relação à inclusão, que contém Y.

Proposição 4.19. *Sejam $\mathcal{T}$ um espaço topológico e Y um subespaço irredutível de $\mathcal{T}$. Então o fecho $\overline{Y}$ de Y é um subespaço irredutível de $\mathcal{T}$.*

Para o nosso estudo, aplicaremos as proposições anteriores para mostrar que se U é um aberto relativo de uma variedade afim ou quase-afim irredutível V, então $\overline{U} = V$. Isto é, U é denso em V. Além disso, se V é irredutível, então U é irredutível. Tais resultados necessitam das variedades em questão serem irredutíveis. Porém, não há garantia que nossa variedade quase-afim V^a o seja também. Por sorte, toda variedade pode ser expressa de maneira única como união finita de variedades irredutíveis.

Teorema 4.20. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado.*

i) Dados uma cadeia de variedades afins $\mathbb{K}^n$

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \cdots$$

existe um inteiro N tal que $V_N = V_{N+1} = \cdots$.

ii) Para toda variedade afim $V \subseteq \mathbb{K}^n$ pode ser escrita de maneira única como união finita de variedades afins irredutíveis

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$

em que $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$ (a qual chamaremos de decomposição irredundante de V).

Teorema 4.21. *Toda variedade quase-afim admite uma decomposição irredundante, a menos de reordenação.*

4.2 DIMENSÃO

O próximo conceito a ser mencionado aqui é o de dimensão. A definição mais geral para um espaço topológico qualquer, dada a seguir, será usada para as variedades afins e quase-afins.

Definição 4.22. Se $\mathcal{T}$ é um espaço topológico, definimos a *dimensão* de $\mathcal{T}$ com o supremo de todos os inteiros n tais que existe uma cadeia estritamente ascendente

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$$

de subconjuntos fechados irredutíveis de $\mathcal{T}$. Denotamos este número por $\dim(\mathcal{T})$. Definimos a dimensão de uma variedade afim ou quase-afim sendo sua dimensão como espaço topológico.

Pode ser provado que $\dim V$ coincide com a dimensão de Krull para o anel de coordenadas afim $\mathbb{K}[V] := \mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{I}(V)$. E com isto, ver (HARTSHONE, 1977), vale que

Teorema 4.23. *Se U é uma variedade quase-afim irredutível, então*

$$\dim \overline{U} = \dim U.$$

Podemos também estudar a dimensão pontualmente. Da seguinte forma:

Definição 4.24. Se $\mathcal{T}$ é um espaço topológico, definimos a *dimensão* de $\mathcal{T}$ no ponto $P \in \mathcal{T}$ como o supremo de todos os inteiros n tais que existe uma cadeia

$$\{P\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$$

de subconjuntos fechados irredutíveis de $\mathcal{T}$. Denotamos este número por $\dim_P \mathcal{T}$. Definimos a dimensão pontual de uma variedade afim ou quase-afim por sua dimensão pontual como espaço topológico.

O interessante da dimensão em um ponto é que mostraremos, mais na frente, um critério que nos permite estimá-lo, e o máximo das dimensões pontuais nos fornece a dimensão do espaço topológico.

Proposição 4.25. *Se $\mathcal{T}$ é um espaço topológico, então*

$$\dim \mathcal{T} = \max_{P \in \mathcal{T}} \dim_P \mathcal{T}.$$

Existe um resultado análogo ao Teorema 4.23 para dimensões pontuais, com este agora podendo ser um aberto de um espaço topológico irredutível qualquer.

Teorema 4.26. *Se U é um aberto irredutível então*

$$\dim_P U = \dim_P \overline{U}.$$

Proposição 4.27. *Se V é uma variedade quase-afim irredutível e U é um aberto de V, então* $\dim V = \dim U$.

Proposição 4.28. *A dimensão de um espaço topológico $\mathcal{T}$, que admite decomposição em um número finito de componentes fechadas e irredutíveis, é o máximo das dimensões de suas componentes irredutíveis.*

4.3 O ESPAÇO TANGENTE

O espaço tangente de uma variedade afim V em $\mathbb{K}^n$ em um ponto P é o conjunto de todas as retas que passam por P e são tangentes a V. Desta forma, vejamos primeiro o que significa uma reta ser tangente à uma variedade afim, segundo (SHAFAREVICH, 2010).

Uma reta que passa por $P \in V$ é um conjunto da forma

$$L_Q = \{P + tQ \in \mathbb{K}^n; t \in \mathbb{K}\},$$

para algum Q. Estamos interessados em conhecer a interseção $L_Q \cap V$. Seja $\mathcal{I}(V) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Assim

$$P + tQ \in L_Q \cap V \iff f_1(P + tQ) = \cdots = f_m(P + tQ) = 0.$$

Tomando t como variável temos que os $f_1(P + tQ), \ldots, f_m(P + tQ)$ são polinômios em uma variável. É fácil ver que

$$\mathcal{I}(f_1(P + tQ), \ldots, f_m(P + tQ)) = \mathcal{I}(f(t))$$

em que

$$f(t) = \text{mdc}(f_1(P + tQ), \ldots, f_m(P + tQ)).$$

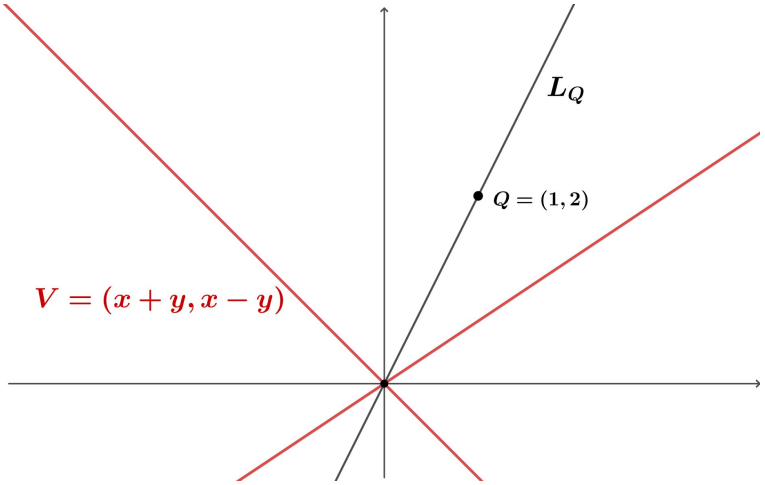
De $P \in V$, segue que $f_1(P) = \cdots = f_m(P) = 0$, logo 0 é raiz de f.

Definição 4.29. O grau de multiplicidade da raiz 0 de $f(t) = \text{mdc}(f_1(P + tQ), \ldots, f_m(P + tQ))$ é chamado de *multiplicidade de interseção* de L_Q com V. Se f for nula convencionamos a dizer que a multiplicidade de interseção é $+\infty$.

Pelo Teorema de Bézout para polinômios, é fácil ver que a multiplicidade de interseção não depende dos geradores de $\mathcal{I}(V)$.

Exemplo 4.30. Seja $V = V(x+y, x-y)$. Se $Q = (1,2)$ e L_Q é a reta que passa por $(0,0)$ e Q,

Figura 3 – Interseção da variedade afim $V = V(x+y, x-y)$ com a reta $L_Q, Q = (1,2)$.



Fonte: imagem criada no software Geogebra.

então

$$\text{mdc}(t+2t, t-2t) = t.$$

Logo L_Q tem multiplicidade de interseção igual a 1.

Estamos, na verdade, interessados em quando essa multiplicidade de interseção é pelo menos 2.

Definição 4.31. Uma reta L_Q é *tangente* à variedade afim V no ponto P se a multiplicidade de interseção de L_Q em P é maior ou igual a 2.

Exemplo 4.32. Seja $V = V(x^2 - y^3)$. Quem são as L_Q tangentes a V no ponto $(1,1)$? Tomando $Q = (a,b)$, temos

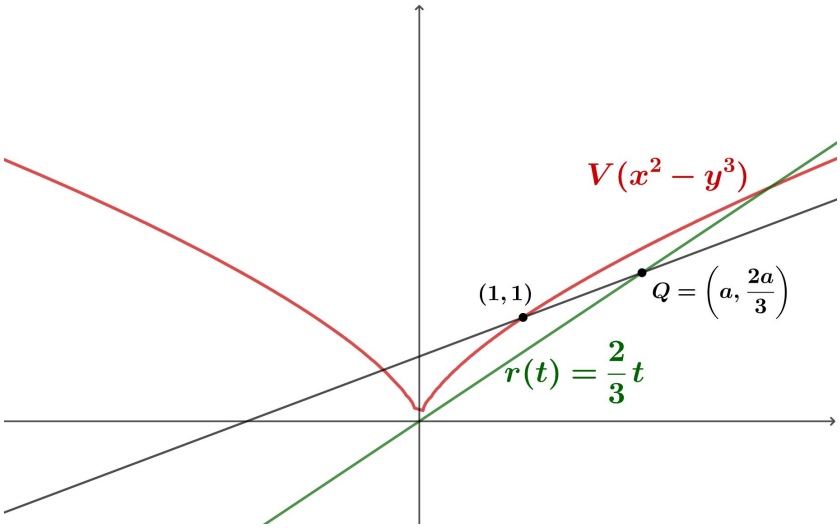
$$L_Q = \{(1,1) + (a,b)t\} = \{(1+at, 1+bt)\}.$$

Daí

$$\begin{aligned} f(t) &= (1+at)^2 - (1+bt)^3 \\ &= 1 + 2at + at^2 - 1 - 3bt - 3b^2t^2 - b^3t^3 \\ &= (2a-3b)t + (a-3b^2)t^2 - b^3t^3. \end{aligned}$$

Ou seja, se $Q = (a,b)$ é tal que $2a - 3b = 0$, então L_Q é tangente à variedade $V(x^2 - y^3)$ em $(1,1)$. Deste modo o conjunto dos pontos Q tais que a reta L_Q é tangente à variedade $V(x^2 - y^3)$ passando por $(1,1)$ coincide com a reta $r(t) = \frac{2}{3}t$.

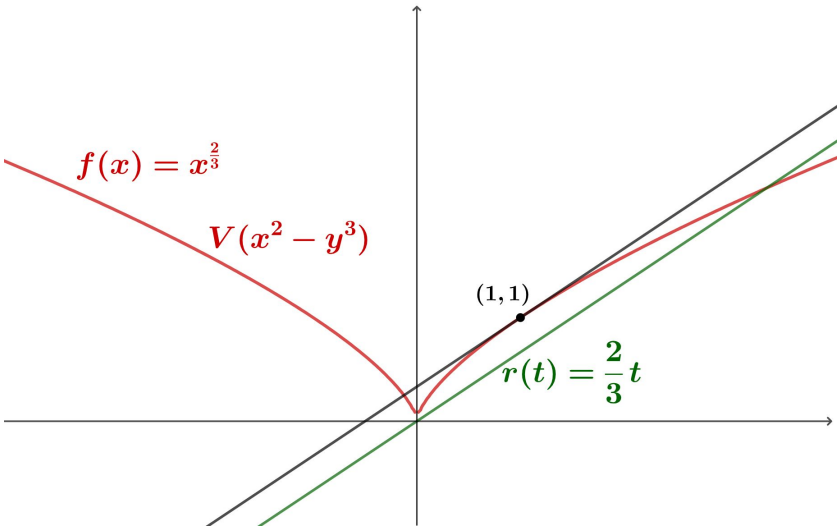
Figura 4 – Lugar geométrico dos pontos Q tais que as retas L_Q são tangentes à variedade $V(x^2-y^3)$ passando por $(1,1)$.



Fonte: imagem criada no software Geogebra.

Observe que o gráfico de $V(x^2-y^3)$ coincide com o da função $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$. O coeficiente angular da reta tangente à função f em $x=1$ é dada por $f'(1)=\frac{2}{3}$. Assim as noções de tangência em uma variedade e em uma função coincidiram nesse exemplo.

Figura 5 – Reta tangente à função $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ no ponto $x=1$.



Fonte: imagem criada no software Geogebra.

Tal coincidência não é por acaso. Com o uso da série de Taylor no ponto $P\in V$, mostraremos isso a seguir.

Seja V uma variedade afim e $f_1,\ldots,f_m$ geradores de $\mathcal{I}(V)$. Expandindo cada f_i em série

de Taylor no ponto $P \in V$ obtemos

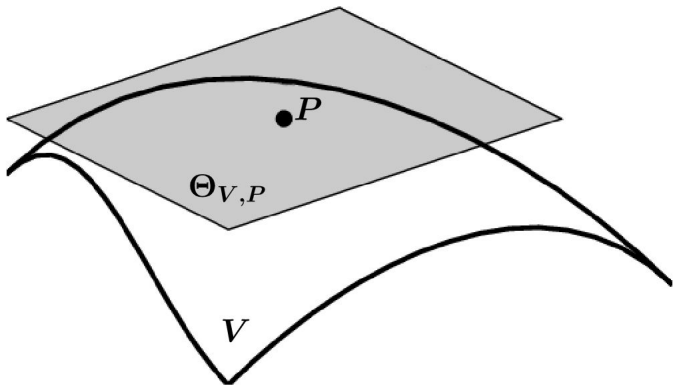
$$\begin{aligned} f_i(P+tQ) &= f_i(P) + df_i(P)\cdot(tQ) + f_i^{(2)}(P+tQ) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial(tq)}(P) + f_i^{(2)}(P+tQ) \\ &= \langle \text{grad} f_i(P), tQ\rangle + f_i^{(2)}(P+tQ) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial T_j}(P)\cdot tQ_j + f_i^{(2)}(P+tQ),\ Q=(Q_1,\ldots,Q_n), \end{aligned}$$

em que $f_i^{(2)}(P+tQ)$ é o resto da expressão em série de Taylor. Logo, t^2 divide $f_i(P+tQ)$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial T_j}(P)\cdot Q_j = 0$. Assim definimos o seguinte subespaço.

Definição 4.33. O conjunto dos pontos $Q \in \mathbb{K}^n$ tais que a reta L_Q é tangente à variedade $V = V(f_1,\ldots,f_m)$ no ponto $P \in V$ é chamado de *espaço tangente à variedade V no ponto P*, e o denotamos por $\Theta_{V,P}$. Pelo que vimos anteriormente, $\Theta_{V,P}$ é um subespaço linear, pois $\Theta_{V,P}$ é determinado pelas soluções do sistema linear homogêneo

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial T_j}(P)(Q_j) = 0, \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

Figura 6 – Espaço tangente à variedade V no ponto x em $\mathbb{R}^3$.



Fonte: imagem criada no software Photoshop.

Definição 4.34. Seja $P \in \mathbb{K}^n$. A *matriz Jacobiana* dos polinômios $f_1,\ldots,f_m \in \mathbb{K}[T_1,\ldots,T_m]$ no ponto P é dada por

$$J(f_1,\ldots,f_m)(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}(P)\right)_{i,j}.$$

Observação 4.35. Temos que $\Theta_{V,P}$ é o núcleo da matriz Jacobiana $J(f_1, \ldots, f_m)(P)$. Desta forma

$$\begin{aligned} \dim \Theta_{V,P} &= \dim \mathcal{N}(J(f_1, \ldots, f_m)(P)) \\ &= n - \text{posto}(J(f_1, \ldots, f_m)(P)). \end{aligned}$$

O que torna o uso do espaço tangente útil para o nosso estudo é que com ele conseguimos estimar a dimensão pontual de uma variedade afim através da dimensão do espaço tangente associado a esta variedade, sendo este último muito mais fácil de calcular.

Proposição 4.36. *(Desigualdade Jacobiana): Sejam V uma variedade afim irredutível e $P \in V$. Então*

$$\dim_P V \leq \dim \Theta_{V,P}.$$

Para uma prova veja (SHAFAREVICH, 2010).

4.4 FUNÇÕES REGULARES

No próximo capítulo usaremos um mapa π, construído aqui, que sai da nossa variedade quase-afim V^a e vai ao espaço das massas $\mathbb{C}^n$. Observe que a finitude genérica vai ser provada se conseguimos um aberto de $\mathbb{C}^n$ em que para todo vetor de massa m nesse aberto vale que $\pi^{-1}(m)$ é finito. Tal mapa a ser construído será uma função regular, conceito que definiremos a segui e para o qual apresentaremos os resultados relevantes ao nosso trabalho.

Definição 4.37. Seja V uma variedade quase-afim em $\mathbb{K}^n$. Uma função $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ é *regular* se existe um polinômio $F(T)$ com coeficientes em $\mathbb{K}$ tal que $f(P) = F(P)$ para todo $P \in V$.

Observação 4.38. F não é necessariamente unicamente determinado. Se $V = V(F_1, \ldots, F_s)$ então

$$f(P) = F(P) + a_1F_1(P) + \cdots + a_sF_s(P),$$

para todo $P \in V$ e $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{K}$.

Definição 4.39. Sejam $V_1 \subset \mathbb{K}^n$ e $V_2 \subset \mathbb{K}^m$ variedades quase-afins. Uma função $f : V_1 \longrightarrow V_2$ é dita *regular* se f for da forma

$$f(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P)), \quad \forall P \in V_1,$$

com $f_1, \ldots, f_m : V_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ sendo funções regulares.

Exemplo 4.40. O mapa

$$\begin{array}{rccc} \pi : & V^a & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & (r, \Delta_0, z, m) & \longmapsto & m \end{array}$$

é uma função regular, pois $(r, \Delta_0, z, m) \longmapsto m_i$, $i = 1, \ldots, n$, são regulares.

Os próximos resultados sobre tais funções são bastante conhecidos na literatura; para uma demonstração consulte (SHAFAREVICH, 2010).

Proposição 4.41. *Funções regulares são contínuas na topologia de Zariski. Em particular, $f^{-1}(y)$, denominada por fibra de y, é um fechado de Zariski.*

Teorema 4.42. *(Teorema da Dimensão das Fibras): Se $f : V_1 \longrightarrow V_2$ é uma função regular sobrejetiva com V_1 e V_2 irredutíveis então*

i) $\dim f^{-1}(y) \geq |\dim V_1 - \dim V_2|$, $\forall y \in V_2$;

ii) existe um aberto não vazio U de V_2 tal que

$$\dim f^{-1}(y) = |\dim V_1 - \dim V_2|, \forall y \in U.$$

Um novo tipo de funções que nos serão úteis são as funções chamadas de dominantes.

Definição 4.43. Uma função regular $f : V_1 \longrightarrow V_2$ é dita *dominante* se $f(V_1)$ não está contida em nenhuma subvariedade própria de V_2. Equivalentemente

$$\overline{f(V_1)} = \overline{V_2}.$$

Proposição 4.44. *Se $f : V_1 \longrightarrow V_2$ é uma função dominante e V_1 é irredutível então V_2 é irredutível.*

Demonstração: Caso contrário, seja $V_2 = X \cup Y$, então

$$V_1 = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y).$$

De V_1 ser irredutível segue que $f^{-1}(X) = V_1$ ou $f^{-1}(Y) = V_1$, ou seja, $f(V_1) \subset X$ ou $f(V_1) \subset Y$, uma contradição com o fato de f ser dominante. ■

Por fim, utilizamos esta última proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em (MILNE, 2017).

Proposição 4.45. *Se $f : V_1 \longrightarrow V_2$ é uma função regular dominante então*

$$\dim(V_1) \geq \dim(V_2).$$

4.5 COMPONENTES CONEXAS

Não somente desejamos mostrar a finitude genérica mas também queremos que a quantidade de configurações de Dziobek independa da escolha genérica da massa. Para tal usaremos o último resultado desta seção. Até chegarmos nele precisamos nos familiarizar com a noção de componentes conexas.

Definição 4.46. Um espaço topológico $\mathcal{T}$ é *conexo* quando não puder ser escrito como união disjunta não-trivial de abertos. Um subconjunto $C \in \mathcal{T}$ é dito *conexo* se ele como espaço topológico, com a topologia induzida de $\mathcal{T}$, é conexo.

As proposições a seguir serão apenas citadas. Para ver as demonstrações consulte (MUNKRES, 2000).

Proposição 4.47. *Seja C_λ uma família de subconjuntos conexos de $\mathcal{T}$. Se $\bigcap C_\lambda \neq \emptyset$ então $\bigcup C_\lambda$ é conexo.*

Deste resultado surge a seguinte definição:

Definição 4.48. Sejam $\mathcal{T}$ um espaço topológico e $P \in \mathcal{T}$ um ponto qualquer de $\mathcal{T}$. Definimos a *componente conexa* de P como o maior conexo de $\mathcal{T}$ que contém o ponto P.

Proposição 4.49. *As componentes conexas particionam um espaço topológico $\mathcal{T}$.*

Exemplo 4.50. Em um espaço topológico finito $\mathcal{T}$, munido da topologia de Zariski induzida, cada ponto $P \in \mathcal{T}$ é uma componente conexa.

De fato, seja C_P a componente conexa que contém P. Digamos que $C_P \neq \{P\}$. De $\mathcal{T}$ ser finita seque que $C_P = \{P, P_1, \ldots, P_n\}$ para alguns $P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{T}$. Se $P_{m+1}, \ldots, P_n$ são os demais pontos de $\mathcal{T}$, segue que

$$C_P = (\mathcal{T} \backslash (\{P_1\} \cup \cdots \cup \{P_n\})) \cup (\mathcal{T} \backslash (\{P\} \cup \{P_{m+1}\} \cup \cdots \cup \{P_n\})),$$

uma contradição com o fato de C_P ser conexo.

Feito isto, o teorema que usaremos para encerrar nossa discussão, foi apresentado por Thom e Milnor ((THOM, 1965) e (MILNOR, 1964)).

Teorema 4.51. *Considere $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$. Seja a variedade afim $V = V(f_1, \ldots, f_m)$ com a topologia de Zariski induzida. Então o número de componentes conexas de V é menor ou igual a $\beta(2\beta - 1)^{n-1}$, onde $\beta = \max\{\text{grau } f_1, \ldots, \text{grau } f_m\}$.*

5 A MATRIZ JACOBIANA E A FINITUDE GENÉRICA

Estamos prontos para partimos em busca da finitude genérica. Com o uso da Desigualdade Jacobiana (proposição 4.36) vamos mostrar que $\dim V^a \leq n, \forall a \in \frac{\mathbb{Z}}{2}\backslash\{0\}$.

Para um ponto $P = (r, \Delta_0, z, m) \in V^a$, a matriz Jacobiana $J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l)(P)$ é a matriz $(q + 2n + 1) \times (q + 2n + 1)$ dada em blocos por

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial g^a_{ij}}{\partial R}(P)\right]_{q\times q} & \left[\frac{\partial g^a_{ij}}{\partial Z}(P)\right]_{q\times n} & \left[\frac{\partial g^a_{ij}}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{q\times(n+1)} \\ \left[\frac{\partial F}{\partial R}(P)\right]_{1\times q} & \left[\frac{\partial F}{\partial Z}(P)\right]_{1\times n} & \left[\frac{\partial F}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{1\times(n+1)} \\ \left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial R}(P)\right]_{(n+1)\times q} & \left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial Z}(P)\right]_{(n+1)\times n} & \left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{(n+1)\times(n+1)} \end{bmatrix}$$

em que $F(R)$ é o determinante da matriz de Cayley-Menger $A(R)$,

$$\Gamma_0 = \textstyle\sum_{j=1}^n M_j Z_j, \qquad \Gamma_l = \Delta + \sum_{j=1}^n M_j Z_j R^2_{lj}, \quad l = 1, \ldots, n$$

e

$$g^a_{ij} = \begin{cases} R^{2a}_{ij} - 1 - Z_i Z_j, & \text{se } a > 0 \\ R^{-2a}_{ij}(Z_i Z_j + 1) - 1, & \text{se } a < 0 \end{cases},$$

para $1 \leq i < j \leq n$.

Note que $J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l)$ é triangular em blocos. Uma vez que g^a_{ij} e Γ_l não dependem de Δ e M, segue que os blocos

$$\left[\frac{\partial g^a_{ij}}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{q\times(n+1)} \text{ e } \left[\frac{\partial F}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{1\times(n+1)}$$

são matrizes nulas. Assim o posto de $J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l)$ é dado pela soma dos postos dos blocos

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial g^a_{ij}}{\partial R}(P)\right]_{q\times q} & \left[\frac{\partial g^a_{ij}}{\partial Z}(P)\right]_{q\times n} \\ \left[\frac{\partial F}{\partial R}(P)\right]_{1\times q} & \left[\frac{\partial F}{\partial Z}(P)\right]_{1\times n} \end{bmatrix}$$

e

$$\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Agora, estimamos o posto de cada um destes blocos.

Lema 5.1. *Considere*

$$J(g_{ij}^a, F) = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial g_{ij}^a}{\partial R}(P)\right]_{q\times q} & \left[\dfrac{\partial g_{ij}^a}{\partial Z}(P)\right]_{q\times n} \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial R}(P)\right]_{1\times q} & \left[\dfrac{\partial F}{\partial Z}(P)\right]_{1\times n} \end{bmatrix}.$$

Se $a \neq 0$ para todo ponto $P \in V^a$, então $J(g_{ij}^a, F)(P)$ tem posto máximo.

Demonstração:

I) $a < 0$:

Seja δ_{ij} o Delta de Kronecker. Usando o fato que $P \in V^a$ nós temos, para $a < 0$

$$\begin{aligned} r_{ij}\frac{\partial g_{ij}^a}{\partial R_{ij}}(P) &= r_{ij}\frac{\partial}{\partial R_{ij}}(R_{ij}^{-2a}(Z_iZ_j+1)-1)(P) \\ &= r_{ij}(-2a)r_{ij}^{-2a-1}(z_iz_j+1) \\ &= -2ar_{ij}^{-2a}(z_iz_j+1) = -2a, \end{aligned}$$

pois $P \in V^a$ implica $r_{ij}^{2a} = z_iz_j + 1$. Se $k \neq i$ ou $l \neq j$ temos

$$\frac{\partial g_{ij}^a}{\partial R_{kl}}(P) = \frac{\partial}{\partial R_{ij}}(R_{ij}^{-2a}(Z_iZ_j+1)-1)(P) = 0.$$

Assim

$$\frac{\partial g_{ij}^a}{\partial R_{kl}}(P) = \delta_{ik}\delta_{jl}\frac{(-2a)}{r_{ij}},$$

para cada $1 \leq i < j \leq n$ e $1 \leq l < l \leq n$.

Por isso, $\left[\dfrac{\partial g_{ij}^a}{\partial R}(P)\right]_{q\times q}$ é a matriz diagonal com entradas $\frac{-2a}{r_{ij}} \neq 0$.

Para a submatriz $\left[\dfrac{\partial g_{ij}^a}{\partial Z}(P)\right]_{q\times q}$ note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}^a}{\partial Z_l}(P) &= \frac{\partial}{\partial Z}(R_{ij}^{-2a}(Z_iZ_j+1)-1)(P) \\ &= R_{ij}^{-2a}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial Z_l}Z_j + Z_i\frac{\partial Z_j}{\partial Z_l}\right)(P) \\ &= r_{ij}^{-2a}(\delta_{il}z_j + \delta_{jl}z_i). \end{aligned}$$

Por fim, observe que $\left[\frac{\partial F}{\partial Z}(P)\right]_{1\times n}$ é a matriz nula pois F só depende dos R_{ij}.

Pela definição de V^a, temos que cada ponto $P \in V^a$ não satisfaz, para algum i, a equação

$$\psi_i^a(P) = r_{i1}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P)z_1 + \cdots + r_{in}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{in}}(P)z_n = 0.$$

Selecionando as primeiras $q+1$ linhas, as q primeiras colunas e a $(q+i)$-ésima coluna de $J(g_{ij}^a, F)(P)$, obtemos a seguinte submatriz $(q+1)\times(q+1)$:

$$H(P) = \begin{bmatrix} \frac{-2a}{r_{12}} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-2a}{r_{i1}} & \dots & 0 & \dots & 0 & r_{i1}^{-2a}z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{-2a}{r_{in}} & \dots & 0 & r_{in}^{-2a}z_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{-2a}{r_{(n-1)n}} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial R_{12}}(P) & \dots & \frac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P) & \dots & \frac{\partial F}{\partial R_{in}}(P) & \dots & \frac{\partial F}{\partial R_{(n-1_n}}(P) & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações de coluna

$$C_{q+1} \longrightarrow \frac{1}{2a}r_{ij}^{-2a+1}z_jC_{ij} + C_{q+1}, \quad j \neq i$$

em $H(P)$, nós obtemos

$$\widetilde{H}(P) = \begin{bmatrix} \frac{-2a}{r_{12}} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-2a}{r_{i1}} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{-2a}{r_{in}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{-2a}{r_{(n-1)n}} & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial R_{12}}(P) & \dots & \frac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P) & \dots & \frac{\partial F}{\partial R_{in}}(P) & \dots & \frac{\partial F}{\partial R_{(n-1_n}}(P) & \gamma \end{bmatrix}$$

em que

$$\gamma := \frac{1}{2a}\left(r_{i1}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P)z_1 + \cdots + r_{in}^{-2a+1}\frac{\partial F}{\partial R_{in}}(P)z_n\right) = \frac{\psi_i^a(P)}{2a}.$$

Logo $\gamma \neq 0$ e de $\frac{-2a}{r_{ij}} \neq 0$ é imediato que $\widetilde{H}(P)$, e portanto $H(P)$, tem posto $q+1$.

II) $a > 0$:

Seja δ_{ij} o Delta de Kronecker. Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}^a}{\partial R_{ij}}(P) &= \frac{\partial}{\partial R_{ij}}(R_{ij}^{2a} - 1 - Z_i Z_j)(P) \\ &= (2a) r_{ij}^{2a-1}. \end{aligned}$$

Se $k \neq i$ ou $l \neq j$, tem-se

$$\frac{\partial g_{ij}^a}{\partial R_{ij}}(P) = 0.$$

Assim

$$\frac{\partial g_{ij}^a}{\partial R_{ij}}(P) = \delta_{ik}\delta_{jl}(2a) r_{ij}^{2a-1},$$

para cada $1 \leq i < j \leq n$ e $1 \leq k < l \leq n$.

Por isso, $\left[\frac{\partial g_{ij}^a}{\partial R}(P)\right]_{q\times q}$ é a matriz diagonal com entradas $(2a) r_{ij}^{2a-1}$. Para a submatriz $\left[\frac{\partial g_{ij}^a}{\partial Z}(P)\right]_{q\times n}$ note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}^a}{\partial Z_l}(P) &= \frac{\partial}{\partial Z_l}(R_{ij}^{2a} - 1 - Z_i Z_j)(P) \\ &= \left(-\frac{\partial Z_i}{\partial Z_l} Z_j - Z_i \frac{\partial Z_j}{\partial Z_l}\right)(P) \\ &= -\delta_{il} z_l - \delta_{jl} z_i. \end{aligned}$$

Análogo ao caso $a < 0$, seja ψ_i^a tal que

$$\psi_i^a(P) = \prod_{(k,l)\neq(i,1)} r_{kl}^{2a-1} \frac{\partial F}{\partial R_{i1}} z_1 + \cdots + \prod_{(k,l)\neq(i,1)} r_{kl}^{2a-1} \frac{\partial F}{\partial R_{in}} z_n \neq 0,$$

para um P fixo. Selecionamos as primeiras $q+1$ linhas, as q primeiras colunas e a

$(q+i)$-ésima coluna de $J(g_{ij}^a, F)(P)$ obtendo a seguinte submatriz $(q+1)\times(q+1)$:

$$H(P)=\begin{bmatrix} 2ar_{12}^{2a-1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 2ar_{i1}^{2a-1} & \dots & 0 & \dots & 0 & -z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 2ar_{in}^{2a-1} & \dots & 0 & -z_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 2ar_{(n-1)n}^{2a-1} & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial R_{12}}(P) & \dots & \dfrac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P) & \dots & \dfrac{\partial F}{\partial R_{in}}(P) & \dots & \dfrac{\partial F}{\partial R_{(n-1_n}}(P) & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações de colunas

$$C_{q+1}\longrightarrow \frac{1}{2a}r_{ij}^{-2a+1}z_jC_{ij}+C_{q+1},\quad j\neq i$$

em $H(P)$, nós obtemos

$$\widetilde{H}(P)=\begin{bmatrix} 2ar_{12}^{2a-1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 2ar_{i1}^{2a-1} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 2ar_{in}^{2a-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 2ar_{(n-1)n}^{2a-1} & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial R_{12}}(P) & \dots & \dfrac{\partial F}{\partial R_{i1}}(P) & \dots & \dfrac{\partial F}{\partial R_{in}}(P) & \dots & \dfrac{\partial F}{\partial R_{(n-1_n}}(P) & \gamma \end{bmatrix}$$

em que

$$\gamma:=\frac{1}{(2a)r_{i1}^{2a-1}}\frac{\partial F}{\partial R_{i1}}z_1+\cdots+\frac{1}{(2a)r_{in}^{2a-1}}\frac{\partial F}{\partial R_{in}}z_n.$$

De $\widetilde{H}(P)$ ser triangular, seu determinante é o produto dos termos da diagonal principal, o qual é

$$(2a)^{q-1}\psi_i^a(P)\neq 0.$$

Logo $\widetilde{H}(P)$, e portanto $H(P)$, tem posto $q+1$.

■

Considere agora

$$V^a = V_1 \cup \cdots \cup V_b$$

a decomposição em componentes irredutíveis de V^a e considere os fechados relativos de V^a

$$\begin{aligned} D_k &= \{(r, \Delta_0, z, m) \in V^a, z_k = 0\} \\ &= V^a \cap V(Z_k),\ k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nós temos dois casos a considerar: $V_i \not\subset D_k$ para todo k ou $V_i \subset D_k$ para algum k. Para calcular a dimensão de V^a precisamos calcular o posto de

$$\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{(n+1)\times(n+1)}$$

nos dois casos acima. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \Delta}(P) &= \frac{\partial}{\partial \Delta}\left(\sum_{l=1}^{n} M_l Z_l\right)(P) = 0; \\ \frac{\partial \Gamma_0}{\partial M_j}(P) &= \frac{\partial}{\partial M_j}\left(\sum_{l=1}^{n} M_l Z_l\right)(P) = z_j; \\ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \Delta}(P) &= \frac{\partial}{\partial \Delta}\left(\Delta + \sum_{l=1}^{n} M_l Z_l R_{il}^2\right)(P) = 1; \\ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial M_j}(P) &= \frac{\partial}{\partial M_j}\left(\Delta + \sum_{l=1}^{n} M_l Z_l R_{il}^2\right)(P) = z_j r_{ij}^2. \end{aligned}$$

Assim

$$\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{(n+1)\times(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n \\ 1 & 0 & z_2 r_{12}^2 & z_3 r_{13}^2 & \ldots & z_n r_{1n}^2 \\ 1 & z_1 r_{12}^2 & 0 & z_3 r_{23}^2 & \ldots & z_n r_{2n}^2 \\ 1 & z_1 r_{13}^2 & z_2 r_{23}^2 & 0 & \ldots & z_n r_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_1 r_{1n}^2 & z_2 r_{2n}^2 & z_3 r_{3n}^2 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Lema 5.2. *Seja V_i uma componente irredutível de V^a. Se $V_i \not\subset D_k$ para cada k, então existe um aberto $U \in V_i$ tal que para todo $P \in U$, $\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta,M)}(P)\right]_{(n+1)\times(n+1)}$ tem posto n. Em particular, para cada $P \in U$, $\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta,M)}(P)\right]_{(n+1)\times(n+1)}$ tem uma submatriz quadrada G não-singular de ordem n.*

Demonstração: Considere

$$U := \{(r, \Delta_0, z, m) \in V_i; z_k \neq 0, \forall k\}.$$

Observe que $U = \bigcap_{k=1}^{n}(V_i \backslash D_k)$, logo U é um aberto relativo de V_i. Dado $P \in U$, então $z \neq 0$, logo podemos dividir a coluna

$$\begin{bmatrix} z_k & z_k r_{k1}^2 & \dots & z_k r_{kn}^2 \end{bmatrix}^\top$$

por z_k, de modo que ao fazermos isso com todas as n últimas colunas de $\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{(n+1)\times(n+1)}$ obtemos exatamente a matriz de Cayley-Menger $A(R)$, a qual possui posto n (proposição 2.13). ■

Proposição 5.3. *Se $V_i \not\subset D_k, \forall k$, então V_i tem dimensão no máximo n.*

Demonstração: Seja $U \subset V_i$ como no lema 5.2. Para cada $P \in U$, existe $M(P)$, uma submatriz de ordem $q + n + 1$ de $J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l)(P)$, tal que

$$M(P) = \begin{bmatrix} H_{(q+1)\times(q+1)} & 0_{(q+1)\times n} \\ Y_{n\times(q+1)} & G_{n\times n} \end{bmatrix}$$

para qual, H como no lema 5.1, G como no lema 5.2, $0_{(q+1)\times n}$ é uma submatriz nula de

$$\begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial g_{ij}^a}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{q\times(n+1)} \\ \left[\dfrac{\partial F}{\partial(\Delta, M)}(P)\right]_{1\times(n+1)} \end{bmatrix} = 0_{(q+1)\times(n+1)}$$

e Y uma submatriz de

$$\begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial \Gamma_l}{\partial R}(P)\right]_{(n+1)\times q} & \left[\dfrac{\partial \Gamma_l}{\partial Z}(P)\right]_{(n+1)\times n} \end{bmatrix}.$$

Como $M(P)$ é uma matriz triangular em blocos e as matrizes H e G são não-singular, $M(P)$ é não-singular de ordem $n + q + 1$.

Seja $\overline{V_i}$ o fecho de V_i. Temos que $\overline{V_i} \subset \widetilde{V}^a$. Como

$$\mathcal{I}(\widetilde{V}^a) = \langle g_{ij}^a, F, \Gamma_l \rangle,$$

tem-se que existem $f_1, \dots, f_s$ em que

$$\mathcal{I}(\overline{V_i}) = \langle g_{ij}^a, F, \Gamma_l, f_1, \dots, f_s \rangle,$$

logo $J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l)(P)$ é submatriz de $J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l, f_1, \ldots, f_s)(P)$. Daí

$$\operatorname{posto} J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l)(P) \leq \operatorname{posto} J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l, f_1, \ldots f_s)(P).$$

Portanto, para $P \in U$,

$$\begin{aligned}
\dim_P U &= \dim_P V_i = \dim_P \overline{V_i} \leq \dim \Theta_{P,\overline{V_i}} \\
&= q + 2n + 1 - \operatorname{posto} J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l, f_1, \ldots f_s)(P) \\
&\leq q + 2n + 1 - \operatorname{posto} J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l)(P) \\
&= q + 2n + 1 - (q + n + 1) = n,
\end{aligned}$$

implicando em

$$\dim V_i = \dim U = \max_{P \in U} \dim_P U \leq n$$

■

Lema 5.4. *Seja V_i uma componente irredutível de V^a tal que $V_i \subset D_k$ para algum k. Então existem um aberto $U \in V_i$ e $t \in \{1, \ldots, n\}$ tal que para todo $P \in U$ valem*

$$z_1 = \cdots = z_t = 0$$

e

$$n - t \leq \textit{posto}\left(\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}\right]\right) \leq (n - t) + 1.$$

Em particular, para cada $P \in U$, $\left[\dfrac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}\right]$ possui uma submatriz quadrada G invertível de ordem $n - t$ ou $n - t + 1$.

Demonstração: Neste caso podemos supor, sem perda de generalidade, que existe um único

$$t \in \{1, \ldots, n\} \text{ tal que } \begin{cases} V_i \subset \bigcap_{k=1}^{t} D_k \\ \text{e} \\ V_i \not\subset D_{t+1}, \ldots, D_n \end{cases}.$$

Tomemos o aberto relativo de V_i

$$U := \bigcap_{k=t+1}^{n} (V_i \backslash D_k).$$

Segue que para todo $P \in U$, tem-se

$$z_1 = \cdots = z_t = 0 \quad \text{e} \quad z_{t+1}, \ldots, z_n \neq 0.$$

Sejam $v_0, v_1, \ldots, v_n$ os vetores coluna de

$$\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n \\ 1 & 0 & z_2 r_{12}^2 & z_3 r_{13}^2 & \ldots & z_n r_{1n}^2 \\ 1 & z_1 r_{12}^2 & 0 & z_3 r_{23}^2 & \ldots & z_n r_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 1 & z_1 r_{1n}^2 & z_2 r_{2n}^2 & z_3 r_{3n}^2 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

As colunas $v_1, \ldots, v_t$ são nulas. Fazendo as operações em coluna

$$v_j \longrightarrow v_j' = \frac{1}{z_j} v_j, \quad t+1 \leq j \leq n,$$

a matriz $\begin{bmatrix} v_0 & v_{t+1}' & \ldots & v_n' \end{bmatrix}$ é uma submatriz $(n+1) \times (n-t+1)$ de $A(r)$, que tem posto n. Assim

$$\text{posto} \begin{bmatrix} v_0 & v_{t+1}' & \ldots & v_n' \end{bmatrix} = n - t + 1 \quad \text{ou} \quad n - t,$$

logo

$$n - t \leq \text{posto} \left(\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta, M)} \right] \right) \leq (n-t) + 1.$$

■

Proposição 5.5. *Se $V_i \subset D_k$ para algum k, então*

$$\dim V_i \leq n.$$

Demonstração: Seja $U \subset V_i$ e $t \in \{1, \ldots, n\}$ como no lema 5.4. Analogamente à prova da proposição 5.3 considere, para cada $P \in U$, a seguinte submatriz de $J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t)(P)$:

$$M(P) = \begin{bmatrix} H_{(q+1)\times(q+1)} & 0_{(q+1)\times u} & 0_{(q+1)\times t} \\ Y_{u\times(q+1)} & G_{u\times u} & 0_{u\times t} \\ 0_{t\times(q+1)} & 0_{t\times u} & I_{t\times t} \end{bmatrix}$$

para o qual H é como no lema 5.1, G é uma submatriz quadrada de $\left[\frac{\partial \Gamma_l}{\partial(\Delta,M)}(P)\right]$ de posto máximo, $0_{t\times(q+1)}, 0_{t\times u}$ e $I_{t\times t}$, a matriz identidade de ordem t, são submatrizes de $J(Z_1, \ldots, Z_t)(P)$. Observe que, pelo lema 5.4, o tamanho de G é $u = n - t$ ou $(n-t)+1$.

Como $M(P)$ é diagonal em blocos e as matrizes H, G e I são singulares, $M(P)$ é não singular. Desta forma

$$\text{posto}(J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t)(P)) \geq q + 1 + n - t + t = n + q + 1.$$

De $V_i \subset \bigcap_{k=1}^t D_k$ e $D_k = V^a \cap V(Z_k)$, temos que

$$\overline{V_i} \subset \overline{\bigcap_{k=1}^t D_k} \subset \widetilde{V}^a \cap \bigcap_{k=1}^t V(Z_k) = V(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t),$$

logo existem polinômios $f_1, \ldots, f_m$ tais que

$$\overline{V_i} = V(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t, f_1, \ldots, f_m).$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{posto}\, J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l)(P) &\leq \text{posto}\, J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t)(P) \\ &\leq \text{posto}\, J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t, f_1, \ldots, f_m)(P). \end{aligned}$$

Portanto, para $P \in U$, análogo a proposição 5.3,

$$\begin{aligned} \dim_P U &= \dim_P V_i = \dim_P \overline{V_i} \leq \dim \Theta_{P,\overline{V_i}} \\ &= q + 2n + 1 - \text{posto}\, J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l)(P) \\ &\leq q + 2n + 1 - \text{posto}\, J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t)(P) \\ &\leq q + 2n + 1 - \text{posto}\, J(g_{ij}^a, F, \Gamma_l, Z_1, \ldots, Z_t, f_1, \ldots, f_m)(P) \\ &= q + 2n + 1 - (q + n + 1) = n, \end{aligned}$$

implicando em

$$\dim V_i = \dim U = \max_{P \in U} \dim_P U \leq n.$$

■

Teorema 5.6. $\dim(V^a) \leq n$, *para todo* $a \in \frac{\mathbb{Z}}{2} \backslash \{0\}$.

Demonstração: Seja $P \in V^a$. Então existe alguma componente irredutível V_i de V^a tal que $P \in V_i$. Pelas proposições 5.3 e 5.5 temos que

$$\dim V_i \leq n.$$

Uma vez que

$$\dim V^a = \max \dim V_i,$$

tem-se o resultado. ■

Na seção 4.4 mencionamos o mapa regular

$$\begin{aligned} \pi : \quad V^a \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{C}^n \\ (r, \Delta_0, z, m) \quad &\longmapsto \quad m \end{aligned}$$

Com o resultado do Teorema anterior mais as proposições da seção 4.4 conseguiremos mostrar que para uma escolha genérica de uma massa m, a fibra $\pi^{-1}(m)$ é finita. Resolveremos primeiro quando $m \in \mathbb{C}^n$ e depois provaremos para $m \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.7. *Existe uma variedade afim $\widetilde{B} \subset \mathbb{C}^n$ tal que se $m \in \mathbb{C}^n \backslash \widetilde{B}$ então a fibra $\pi^{-1}(m)$ é finita.*

Demonstração: Consideremos as restrições $\pi|_{V_i}$. Se para uma componente irredutível V_i de V^a a restrição $\pi|_{V_i}$ não é dominante, definimos

$$B_i := \overline{\pi(V_i)}.$$

Note que para todo $m \in \mathbb{C}^n \backslash B_i$ tem-se $\pi^{-1}(m) \cap V_i = \emptyset$. Pois se $P \in \pi^{-1}(m) \cap V_i$, então $m = \pi(P) \in \pi(V_i) \subset B_i$, uma contradição com $m \notin B_i$. Se $\pi|_{V_j}$ é dominante, pela proposição 4.45, temos que

$$\dim V_j \geq \dim \mathbb{C}^n = n.$$

Pelo teorema anterior $\dim V_j = n$. De π ser regular, segue que a restrição $\pi|_{V_j}$ ainda é regular, e da hipótese de V_j ser irredutível decorre da proposição 4.44 que $\mathbb{C}^n$ é irredutível. Assim aplicamos o Teorema da Dimensão das Fibras (proposição 4.42) na restrição $\pi|_{V_j}$ e obtemos um fechado A_j em que se $m \in \mathbb{C}^n \backslash A_j \neq \emptyset$. Então

$$\dim(\pi|_{V_j}^{-1}(m)) = \dim V_j - \dim \mathbb{C}^n = 0.$$

Isto é, $\pi^{-1}(m) \cap V_j$ é finito. Considere

$$\widetilde{B} = (\cup_i B_i) \cup (\cup_j A_j)$$

Escolhendo $m \in \mathbb{C}^n \backslash \widetilde{B}$ temos que a

$$\pi^{-1}(m) = \pi^{-1}(m) \cap V^a = (\pi^{-1}(m) \cap V_1) \cup \cdots \cup (\pi^{-1}(m) \cap V_b)$$

é união de conjuntos finitos, logo $\pi^{-1}(m)$ é finito. ■

Teorema 5.8. *Existe uma subvariedade própria no espaço das massas reais, $B \subset \mathbb{R}^n$, tal que se $m \in \mathbb{R}^n \backslash B$. Então para todo $a \in \mathbb{Z}/2$, m admite somente um número finito de configurações de Dziobek com potencial U_a a menos de uma isometria.*

Demonstração: Seja $\widetilde{B}$ o conjunto obtido no teorema 5.7, então temos que $B := \widetilde{B} \cap \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade própria de $\mathbb{R}^n$. De fato, seja $\widetilde{B} = V(F_1, \ldots, F_s)$ com $F_j \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Então existem $F_{ij}, F_{2j} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que

$$F_j = F_{1j} + iF_{2j}.$$

Se $m \in B = \widetilde{B} \cap \mathbb{R}^n$, então $F_j(m) = 0$ se, e só se, $F_{1j}(m) = F_{2j}(m) = 0$. Daí $m \in V(F_{11}, \ldots, F_{1s}, F_{21}, \ldots, F_{2s})$. A volta é imediata. Portanto

$$B = V(F_{11}, \ldots, F_{1s}, F_{21}, \ldots, F_{2s}),$$

que deve ser própria, pois do contrário

$$\begin{aligned} & \{0\} = \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{I}(B) = \langle F_{11}, \ldots, F_{1s}, F_{21}, \ldots, F_{2s} \rangle \\ \therefore \quad & F_{11} = \cdots = F_{1s} = F_{21} = \cdots = F_{2s} = 0 \\ \therefore \quad & F_1 = \cdots = F_s = 0 \\ \therefore \quad & \widetilde{B} = \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Assim se $m \in \mathbb{R}^n \backslash B$ a fibra $\pi^{-1}(m)$ é finita. Isto implica que para um vetor de massa genérica fixo m, temos um número finito de distâncias mútuas r_{ij} associados às configurações de Dziobek. As distâncias mútuas determinam as configurações a menos de isometria. Assim o teorema está provado. ■

Finalizando este trabalho, vamos mostrar que existe uma mesma cota superior para a quantidade de configurações de Dziobek para todas as escolhas de genérica das massas.

Teorema 5.9. *Se $n \geq 4$, para todo $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n \backslash B$, o número de configurações de Dziobek com massas $m_1, \ldots, m_n$ e potencial $U_a, a \in \mathbb{Z}/2$ é menor ou igual a $\beta(2\beta - 1)^{q-1}$ onde β é $\max\{-2a + 2, 2n\}$ se $a < 0$ e $\max\{2a, 2n\}$ se $a > 0$.*

Demonstração: Seja $m \in \mathbb{R}^n \backslash B$. Consideremos $X_m \subset \mathcal{X}^a$ o conjunto das classes de configuração de Dziobek associados a m. Seja f^a tal qual no teorema 3.5. Observe que

$$f^a(X_m) \subset \pi^{-1}(m) \subset V^a.$$

De $\pi^{-1}(m)$ ser finito temos que $f^a(X_m)$ é finito também. Consideremos a seguinte relação de um para um

$$\begin{aligned} f^a(X_m) &\longrightarrow V_m^a \\ (r, \Delta_0, z, m) &\longmapsto (r, \kappa, w) \end{aligned}$$

sendo

$$V_m^a = \{(r, \kappa, w) \in \mathbb{R}^{q+n+1}; F = \widetilde{g}_{ij}^a = \Omega_0 = \Omega_i - \Omega_j = 0\}$$

em que

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_{ij}^a(r, \kappa, w) &= r_{ij}^{2a} - 1 - \kappa w_i w_j \\ \Omega_0(w) &= \sum_{l=1}^{n} m_l w_l \\ \Omega_i(r, w) &= \sum_{l=1}^{n} m_l w_l r_{il}^2, \end{aligned}$$

κ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$ são como na proposição 3.2. De V_m^a ser finito, cada ponto seu é uma componente conexa. Pelo teorema 4.51

$$|V_m^a| \leq \beta(2\beta - 1)^{n-1}$$

em que $\beta = \max\{\text{grau } \widetilde{g}_{ij}^a, \text{grau } F, \text{grau } \Omega_0, \text{grau } (\Omega_i - \Omega_j)\}$. Observe que grau $\Omega_0 = 1$, grau $(\Omega_i - \Omega_j) = 3$, grau $F = 2n$ e grau $\widetilde{g}_{ij}^a = 2a$ ou 3. Como estamos assumindo $n \geq 4$, tem-se

$$\beta = \max\{2a, 2n\}.$$

Para $a < 0$, o que muda é que agora

$$\widetilde{g}_{ij}^a = r_{ij}^{-2a}(1 + \kappa w_i w_j)$$

logo grau $\widetilde{g}_{ij}^a = -2a + 2$ e segue

$$\beta = \max\{-2a + 2, 2n\}$$

e o resultado está provado. ■

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, utilizamos ferramentas da geometria algébrica para garantir a existência de um aberto de Zariski no espaço das massas $(\mathbb{R}^*_+)^n$, em que para toda escolha de m neste aberto, a quantidade de configurações centrais de Dziobek com potencial de expoente semi-inteiro associadas a m é finita, a menos de isometria, e não supera uma certa cota que não depende de m.

Para isto, no capítulo 2, a cada configuração x associamos uma matriz de Cayley-Menger $A(x)$, que só depende das distâncias mútuas de x. Pela proposição 2.13 obtemos condições necessárias e suficientes, em relação a $A(x)$, para que x seja de Dziobek. No decorrer do capítulo 3 obtemos funções F, g^a_{ij} e Γ_l cujos zeros, pelo teorema 3.5, estão unicamente ligados a uma classe de isometria de configurações de Dziobek. A necessidade de trabalharmos com configurações com potencial de expoente semi-inteiro se deve às funções F, g^a_{ij} e Γ_l serem polinômios se, e somente se, o expoente a é semi-inteiro, e desta forma podermos usar ferramentas da Geometria Algébrica ao considerar a variedade afim $\widetilde{V}^a$ gerada por esses polinômios. Entretanto o teorema 3.5 não nos fornece uma sobrejeção. Assim restringimos a variedade afim $\widetilde{V}^a$ à variedade quase-afim V^a que, pelo teorema 3.8, ainda contém todos os pontos associados a uma configuração de Dziobek.

O grande truque para chegarmos à finitude genérica foi utilizar o espaço tangente, definido no capítulo 4, e calcularmos sua dimensão usando a sua matriz Jacobiana. Deste modo usamos a Desigualdade Jacobiana (proposição 4.36) para obtermos n como uma cota superior para a dimensão de V^a. E assim fizemos no capítulo 5, calculando o posto da matriz jacobiana $J(g^a_{ij}, F, \Gamma_l)(P)$ no ponto $P \in V^a$. Prosseguimos tomando o mapa de projeção π que vai de V^a no espaço das massas estendido a $\mathbb{C}^n$. De $\dim V^a \leq n$ e o Teorema da Dimensão das Fibras (proposição 4.42) obtemos o aberto de Zariski $\mathbb{C}^n \backslash \widetilde{B}$ tal que $\pi^{-1}(m)$ é finito para m neste aberto. Segue imediatamente daí a finitude genérica. No teorema 5.8 restringirmos para massas reais e o resultado foi provado. Por fim, usando resultados da topologia para a quantidade de componentes conexas de uma variedade afim real, de $\pi^{-1}(m)$ ser finito, conseguimos relacionar cada configuração de Dziobek com vetor de massa m a uma componente conexa, e pelo teorema 4.51 este conjunto possui uma cota superior que não depende de m. Desta forma, atingimos nosso objetivo garantindo a finitude genérica para as configurações de Dziobek associadas a um potencial de expoente semi-inteiro.

REFERÊNCIAS

ALBOUY, A. On a paper of Moeckel on central configurations. *Regul. Chaotic Dyn.*, v. 8, p. 133–142, 2002.

ALBOUY, A.; KALOSHIN, V. Finiteness of central configurations of five bodies in the plane. *Annals of Mathematics*, n. 176, p. 535–588, 2012. Available at: <http://dx.doi.org/10.4007/annals.2012.176.1.10>.

CHAZY, J. Sur certaines trajectoires du probleme des n corps. *Bull. Astron*, v. 35, p. 321–389, 1918.

COX, D.; LITTLE, J.; O'SHEA, D. *Ideals, varieties, and algorithms:a introduction to computacional algebraic geometry and commutative algebra*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1996.

DIAS, T. New equations for central configurations and generic finiteness. *Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 3069-3084*, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1090/proc/13427>.

HAGIHARA, Y. Celestial mechanics. MIT Press, v. 1, 1975.

HAMPTON, M.; MOECKEL, R. Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Invent. math.*, n. 163, p. 289–312, 2006. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00222-005-0461-0>.

HARTSHONE, R. *Algebraic geometry*. [S.l.]: Springer, 1977.

LAGRANGE, J.-L. Essai sur le probleme des trois corps. *Prix de lAcadémie royale des Sciences de Paris*, n. 9, p. 229–324, 1772.

MILNE, J. S. *Algebraic Geometry (v6.02)*. 2017. 221 p. Available at www.jmilne.org/math/.

MILNOR, J. On the Betti numbers of real varieties. *Proc. Amer. Math. Soc*, n. 15, p. 275–280, 1964.

MOECKEL, R. Generic finiteness for Dziobek configurations. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 353, p. 4673–86, 2001. Available at: <http://www.jstor.org/stable/2693755>.

MOULTON, F. R. The straight line solutions of the problem of n bodies. *The Annals of Mathematics*, n. 12, p. 1–17, 1910.

MUNKRES, J. R. *Topology*. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.

SAARI, D. On the role and the properties of n body central configurations. *Celestial mechanics*, n. 21, p. 9–20, 1980.

SHAFAREVICH, I. R. *Basic Algebraic Geometry 1, Varieties in Projective Space*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2010.

SMALE, S. Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, v. 20, n. 2, p. 7–15, 1998.

THOM, R. Sur l'homologie des variétés algebrique réeles. *In Differential and Combinatorial Topology*, p. 255–265, 1965.

WINTNER, A. The analytical foundations of celestial mechanics. *Princeton University Press*, 1941.

APÊNDICE A – MATRIZES E DETERMINANTES

Lema A.1. *Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $A_{ij}; i, j \in \{1, \ldots, n\}$ seus cofatores. Se A possui núcleo não-trivial, então $(A_{i1}, \ldots, A_{in})$ pertence ao núcleo de A para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Consideremos as matrizes $B_k \in \mathcal{M}_{n\times n}, k = 1, \ldots, n$ obtidos da matriz A, substituindo a k-ésima linha da matriz A pela i-ésima linha e mantendo a i-ésima linha intacta.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Seja $B_k = (b_{rs})$ então $b_{rs} = a_{rs}$ para $r \neq k$ e $b_{rs} = a_{is}$. Note que as matrizes B_k têm determinante nulo, pois possuem duas linhas iguais. Pela fórmula de Laplace para o cálculo do determinante, tomando $(B_k)_{rs}$ o cofator de B_k com respeito a r-ésima linha e s-ésima coluna, tem-se que

$$b_{k1}B_{k(k1)} + \cdots + b_{kn}B_{k(kn)} = \det B_k = 0$$

$$\therefore a_{i1}A_{k1} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0.$$

Desta forma obtemos, tomando $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{cases} a_{11}A_{k1} & + & \ldots & + & a_{1n}A_{kn} & = & 0 \\ a_{n1}A_{k1} & + & \ldots & + & a_{nn}A_{kn} & = & 0 \end{cases}.$$

Portanto $(A_{k1}, \ldots, A_{kn}) \in \mathcal{N}(A)$. ■

Lema A.2. *Sejam as matrizes $A = [a_1 \ \ldots \ a_n]$ e $B = [b_1 \ \ldots \ b_n]$. Se as colunas a_i e b_i coincidem para os valores $1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ então*

$$\det A + \det B = \det[a_1 \ \ldots \ a_{j-1} \ \ a_j + b_j \ \ a_{j+1} \ \ldots \ a_n].$$

Demonstração: Basta expandir os determinante de A e B pela j-ésima coluna. Como os cofatores $A_{ij} = B_{ij}, 1 \leq i \leq n$ o resultado segue. ■

Lema A.3. *Sejam $f_1, \dots f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deriváveis. Tem-se que*

$$\frac{d}{dx}\det\begin{bmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x)\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\det\begin{bmatrix} f_1(x)\dots f_j'(x)\dots f_n(x)\end{bmatrix}.$$

Demonstração: Considere a matriz $A = [f_{ij}(x)]$. Segue do lema anterior que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\det(A(x))\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{\det(A(x+h)-\det(A(x))}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{\det\begin{bmatrix} f_1(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}-\det\begin{bmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x)\end{bmatrix}}{h}\\
=\ &\lim_{h\to 0}\frac{\det\begin{bmatrix} f_1(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}-\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}}{h}\\
&+\Big(\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}\\
&-\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}\Big)/h\\
&+\Big(\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}\\
&-\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}\Big)/h\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&+\Big(\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_{n-1}(x) & f_n(x+h)\end{bmatrix}\\
&-\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x+h) & \dots & f_{n-1}(x) & f_n(x)\end{bmatrix}\Big)/h\\
\\
=\ &\det\begin{bmatrix}\left(\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\right) & f_2(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}\\
&+\det\begin{bmatrix} f_1(x) & \left(\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}\right) & f_3(x+h) & \dots & f_n(x+h)\end{bmatrix}\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&+\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & \left(\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right)\end{bmatrix}\\
\\
=\ &\det\begin{bmatrix} f_1'(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x)\end{bmatrix}\\
&+\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2'(x) & \dots & f_n(x)\end{bmatrix}\\
&\qquad\vdots\\
&+\det\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n'(x)\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

■

APÊNDICE B – GEOMETRIA ALGÉBRICA

Neste apêndice apresentaremos as demonstrações omitidas das seções 4.1 e 4.2. As definições usadas a seguir foram citadas nas respectivas seções.

Proposição B.1. *Sejam I e J ideais do anel de polinômios $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ nas variáveis $T_1, \ldots, T_n$ sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então vale as seguintes propriedades sobre variedades afins geradas pelos ideias I e J:*

i) $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$;

ii) $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$.

Demonstração: Seja $P \in V(I) \cup V(J)$ então $f(P) = g(P) = 0, \forall f \in I$ e $\forall g \in J$, logo $f(P)g(P) = 0$ e segue que $P \in V(IJ)$. Se $P \in V(IJ)$, então $f(P)g(P) = 0, \forall f \in I, g \in J$. Então $f(P) = 0$ ou $g(P) = 0$, logo $P \in V(I)$ ou $P \in V(J)$. Em todo caso, $P \in V(I) \cup V(J)$ e, portanto temos a primeira igualdade. A essência da demonstração do item ii) é a mesma. ■

Corolário B.2. *A interseção arbitrária e a união finita de variedades afins é uma variedade afim.*

Proposição B.3. *São equivalentes as seguintes afirmações.*

i) $\mathcal{T}$ *é irredutível;*

ii) Se U_1 *e* U_2 *são subconjuntos abertos não-vazios de* $\mathcal{T}$*, então* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Demonstração: Seja $\mathcal{T}$ irredutível. Se U_1 e U_2 são subconjuntos abertos não-vazios de $\mathcal{T}$ tais que $U_1 \cup U_2 = \emptyset$, então

$$\mathcal{T} = (\mathcal{T} \backslash U_1) \cap (\mathcal{T} \backslash U_2).$$

De U_1 e U_2 serem abertos, segue que $\mathcal{T} \backslash U_1$ e $\mathcal{T} \backslash U_2$ são fechados. De $\mathcal{T}$ ser irredutível implica em $\mathcal{T} \backslash U_1 = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{T} \backslash U_2 = \mathcal{T}$, isto é,

$$U_1 = \emptyset \text{ ou } U_2 = \emptyset,$$

uma contradição. Reciprocamente, por contra-positiva, se $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ tais que $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ são fechados próprios de $\mathcal{T}$, tomemos os abertos

$$U_1 = \mathcal{T} \backslash \mathcal{T}_1, \quad U_2 = \mathcal{T} \backslash \mathcal{T}_2.$$

É imediato que

$$U_1 \cup U_2 = \emptyset.$$

■

Corolário B.4. *$\mathcal{T}$ é irredutível se, e somente se, todo subconjunto aberto não-vazio é denso em $\mathcal{T}$.*

Demonstração: Digamos que $\mathcal{T}$ é irredutível. Seja U um aberto de $\mathcal{T}$. Se $\overline{U} \subsetneq \mathcal{T}$, então

$$U \cap (\mathcal{T} \backslash \overline{U}) = \emptyset$$

em que U e $\mathcal{T}\backslash\overline{U}$ são abertos não-vazios. Uma contradição a proposição anterior. Logo

$$\overline{U} = \mathcal{T}.$$

Para a volta, sejam U_1 e U_2 dois abertos não-vazios de $\mathcal{T}$. Se $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então

$$U_2 \subset X \backslash U_1.$$

Mas U_2 é denso em $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}\backslash U_1$ é fechado. Logo

$$\mathcal{T} = \overline{U_2} \subset \overline{\mathcal{T}\backslash U_1} = \mathcal{T}\overline{U_1}$$

$$\therefore \ \ \mathcal{T} = \mathcal{T}\backslash U_1$$

$$\therefore \ \ U_1 = \emptyset,$$

uma contradição. Assim $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ e segue que $\mathcal{T}$ é irredutível. ■

Proposição B.5. *Sejam $\mathcal{T}$ um espaço topológico e Y um subespaço irredutível de $\mathcal{T}$, então o fecho $\overline{Y}$ de Y é um subespaço irredutível de $\mathcal{T}$.*

Demonstração: Sejam $A \cap \overline{Y}$ e $B \cap \overline{Y}$ abertos não vazios em $\overline{Y}$. Se $A \cap Y = \emptyset$ então

$$U \subset (\overline{Y} \backslash A) \subsetneq \overline{Y}$$

uma contradição em $\overline{Y}$ ser o fecho de Y. Assim, $A \cap Y \neq \emptyset$. Analogamente, $B \cap Y \neq \emptyset$. Logo $A \cap Y$ e $A \cap Y$ são abertos em Y com a topologia induzida, e como é irredutível, então

$$(A \cap Y) \cap (B \cap Y) \neq \emptyset$$

e segue de $Y \subset \overline{Y}$ que

$$(A \cap \overline{Y}) \cap (B \cap \overline{Y}) \neq \emptyset.$$

Isto é $\overline{Y}$ é irredutível. ■

Teorema B.6. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito e algebricamente fechado.*

i) Dadas uma cadeia de variedades afim em $\mathbb{K}^n$

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$$

existe um inteiro N tal que $V_N = V_{N+1} = \dots$.

ii) Toda variedade afim $V \subseteq \mathbb{K}^n$ pode ser escrito unicamente como a união finita de variedades afins irredutíveis

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$$

em que $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$.

Demonstração:

i) Se $V_i \supseteq V_j$, então $I(V_i) \subseteq I(V_j)$ pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (Teorema 4.9). Assim temos uma cadeia ascendente de ideais em $\mathbb{K}[T_0, \dots, T_n]$

$$\mathcal{I}(V_1) \subseteq \mathcal{I}(V_2) \subseteq (V_3) \subseteq \dots.$$

De $\mathbb{K}$ ser um corpo segue que $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ é um domínio de ideais principais, logo é noetheriano e, portanto a cadeia anterior é estacionária a partir de algum N. Novamente pelo Teorema dos Zeros de Hilbert

$$V_1 = V(I(V_1)) \supseteq V_2 = V(I(V_2)) \supseteq \cdots \supseteq V_N = V_{N+1} = \dots.$$

ii) Se V for irredutível, não há nada a fazer. Digamos que V não é irredutível. Então $V = V_1 \cup V_1'$ em que V_1 e V_1' são variedades afins estritamente menores que V que não podem ser escritas como união finita de variedades afins irredutíveis simultaneamente. Digamos que V_1 não possa. Argumentando de maneira análoga, temos que $V_1 = V_2 \cup V_2'$ com V_2 e V_2' que não são uniões finita de variedades afins irredutíveis. De maneira recursiva, construímos uma cadeia

$$V_1 \supsetneq V_2 \subsetneq V_3 \supsetneq \cdots \supsetneq V_N \supsetneq V_{N+1}$$

que não é estacionária, uma contradição ao item (i). Logo

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$

com $V_1, \ldots, V_m$ variedades afins. Caso algum $V_i \subset V_j$, para $i \neq j$, basta descartarmos o V_i nessa união finita de variedades afins. Para a unicidade, digamos que $V = V_1' \cup \cdots \cup V_l'$. Então

$$V_i = V \cap V_i = (V_1' \cup \cdots \cup V_l') \cap V_i = (V_1' \cap V_i) \cup \cdots \cup (V_l' \cap v_i).$$

De V_i ser irredutível, temos $V_i = V_j' \cap V_i$, para algum j. Logo $V_i \subseteq V_j'$. Aplicando o mesmo argumento para algum V_j', tem-se que $V_j' \subseteq V_k$, para algum k. Daí

$$V_i \subseteq V_j' \subseteq V_k.$$

Pela minimalidade, $i = k$ e segue que $V_i = V_j'$. Disto obtemos $m \leq l$. De maneira análoga obtém-se $l \leq m$. Assim $m = l$. Do que foi feito é imediato a conclusão que os V_j' são uma permutação dos V_i, e a unicidade está provada.

■

Apesar do resultado também valer para variedades quase-afins o argumento não pode ser o mesmo, pois $\mathcal{I}(U)$ não está definido para U quase-afim. Porém podemos usar o caso afim para obter o resultado desejado.

Seja U uma variedade quase-afim. Seja $X \backslash Y$ uma representação possível de U. Note que $\overline{U} \subset X$. Assim

$$U = X \backslash Y = \overline{U} \backslash Y.$$

Além disso, seja $\overline{U} \backslash Y'$ uma outra representação para U, tem-se que

$$\overline{U} \cap Y = \overline{U} \cap Y'.$$

Como $\overline{U} \backslash Y = \overline{U} \backslash (\overline{U} \cap Y)$, fixado um Y qualquer de uma representação de U, dizemos que

$$U = \overline{U} \backslash (\overline{U} \cap Y)$$

é a *representação canônica* de U.

Seja $\overline{U} = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ a decomposição irredundante de $\overline{U}$. Temos que

$$U = (X_1 \backslash \overline{U} \cap Y) \cup \cdots \cup (X_n \backslash \overline{U} \cap Y)$$

é uma decomposição de irredutíveis para U. Seja

$$U = (X_1' \backslash Y_1) \cup \cdots \cup (X_m' \backslash Y_m)$$

outra decomposição em irredutíveis para U. Então

$$\begin{aligned} X_i\backslash(\overline{U}\cap Y) &= (X_i\backslash(\overline{U}\cap y))\cap U \\ &= =(X_i\backslash(\overline{U}\cap Y))\cap((X'_1\backslash Y_1)\cup\cdots\cup(X'_m\backslash Y_m)) \\ &= [X_i\backslash(\overline{U}\cap Y))\cap(X'_1\backslash Y_1)]\cup\cdots\cup[X_i\backslash(\overline{U}\cap Y))\cap(X'_m\backslash Y_m)]. \end{aligned}$$

Como $X_i\backslash(\overline{U}\cap Y)$ é irredutível então

$$X_i\backslash(\overline{U}\cap Y) = X_i\backslash(\overline{U}\cap Y))\cap(X'_j\backslash Y_j)$$

para algum j. Logo

$$X'_j\backslash Y_j \subset X_i\backslash(\overline{U}\cap Y).$$

Repetindo o mesmo argumento agora para $X'_j\backslash Y_j$ tem-se que

$$X_k\backslash(\overline{U}\cap Y)\subset X'_j\backslash Y_j$$

para algum k. Portanto

$$X_K\backslash(\overline{U}\cap Y)\subset X_i\backslash(\overline{U}\cap Y)$$

$$\therefore\quad X_k=\overline{X_K\backslash(\overline{U}\cap Y)}\subset\overline{X_i\backslash(\overline{U}\cap Y)}=X_i$$

$$\therefore\quad X_k=X_i$$

$$\therefore\quad X_K\backslash(\overline{U}\cap Y)=X_i\backslash(\overline{U}\cap Y)$$

$$\therefore\quad X_i\backslash(\overline{U}\cap Y)=X'_j\backslash Y_j.$$

Desta maneira temos que $n\leq m$. De maneira totalmente análoga, obtemos $m\leq n$. Assim, $n=m$. Feito isto a unicidade está garantida obtendo assim:

Teorema B.7. *Toda variedade quase-afim admite uma decomposição irredundante, a menos de reordenação.*

Finalizamos com os resultados sobre dimensões apresentadas na seção 4.2.

Proposição B.8. *Se $\mathcal{T}$ é um espaço topológico então*

$$\dim\mathcal{T}=\max_{P\in\mathcal{T}}\dim_P\mathcal{T}.$$

Demonstração: Seja

$$\{P\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$$

uma cadeia de fechados irredutíveis maximal para $\mathcal{T}$, então $Z_0 = \{P^*\}$ para algum $P^* \in \mathcal{T}$. Logo

$$\dim \mathcal{T} = \dim_{P^*} \mathcal{T}.$$

Como $\dim_P \mathcal{T} \leq \dim \mathcal{T}, \forall P \in \mathcal{T}$, segue o resultado. ■

Teorema B.9. *Se U é um aberto irredutível então*

$$\dim_P U = \dim_P \overline{U}.$$

Demonstração: Seja

$$\{P\} \cap U \subsetneq Z_1 \cap U \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \cap U = U$$

uma sequência de fechados irredutíveis em U. Então

$$\{P\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n = \overline{U}$$

é uma sequência de fechados irredutíveis em $\overline{U}$. De fato se $Z_i = Z_{i+1}$ para algum i, então $Z_i \cap U = Z_{i+1} \cap U$, uma contradição. Desta forma conclui-se

$$\dim_p U \leq \dim_P \overline{U}.$$

Seja $\{P\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n = \overline{U}$ uma cadeia maximal para $\overline{U}$ começando por $\{P\}$. Tomemos os conjuntos

$$U_i := Z_i \cap U \neq \emptyset.$$

Então

$$\emptyset \neq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_n = U$$

é uma cadeia para U. De fato, se $U_i = U_{i+1}$, então

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= (Z_{i+1} \cap U) \cup (Z_{i+1} \cap (\overline{U} \backslash U)) \\ &= (Z_i \cap U) \cup (Z_{i+1} \cap (\overline{U} \backslash U)) \\ &= Z_i \cup (Z_{i+1} \cap (\overline{U} \backslash U)) \end{aligned}$$

uma contradição em Z_{i+1} ser irredutível. Portanto

$$\dim_P U \geq \dim_P \overline{U}.$$

■

Proposição B.10. *Se V é uma variedade quase-afim irredutível e U é um aberto de V então* $\dim V = \dim U$.

Demonstração: De V ser irredutível segue que U é denso em V, isto é, V é a menor variedade quase-afim que contém U. Como toda variedade afim é uma variedade quase-afim, segue que qualquer fechado de Zariski que contiver U, contém V. Daí $\overline{V}$ é o menor deles. Logo $\overline{U} = \overline{V}$. Portanto

$$\dim U = \dim \overline{U} = \dim \overline{V} = \dim V.$$

■

Proposição B.11. *A dimensão de um espaço topológico $\mathcal{T}$, que admite decomposição em componentes fechadas e irredutíveis, é o máximo das dimensões de suas componentes irredutíveis.*

Demonstração: Seja $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{T}_m$ a decomposição irredundante de $\mathcal{T}$. Seja

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n \subset \mathcal{T}$$

uma cadeia maximal para $\mathcal{T}$. Note que

$$Z_n = \mathcal{T} \cap Z_n = (\mathcal{T}_1 \cap Z_n) \cup \cdots \cup (\mathcal{T}_m \cap Z_n).$$

De Z_n ser irredutível existe um $\mathcal{T}_j$ tal que

$$Z_n = \mathcal{T}_j \cap Z_n \quad \therefore \quad Z_n \subset \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}.$$

Para não contradizer a maximalidade da cadeia precisamos que $Z_n = \mathcal{T}_j$. Portanto

$$\dim \mathcal{T}_j = \dim \mathcal{T}.$$

E o resultado segue, pois $\dim \mathcal{T}_i \leq \dim \mathcal{T}, \forall i$. ■