UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cadeias de Markov a tempo discreto e algumas aplicações

Higor Felipe de Oliveira Souza

Orientador: João Antônio Miranda Gondim

RECIFE

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Higor Felipe de Oliveira Souza

Cadeias de Markov a tempo discreto e algumas aplicações

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção de grau de graduado.

Orientador: João Antônio Miranda Gondim

RECIFE

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Souza, Higor Felipe de Oliveira.
Cadeias de Markov a tempo discreto e algumas aplicações / Higor Felipe de Oliveira Souza. - Recife, 2023.
57p : il.

Orientador(a): João Antonio Miranda Gondim
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática - Licenciatura, 2023.

1. Cadeias de Markov. 2. Cadeias de Markov Absorventes. 3. Cadeias de Markov Ergódicas. I. Gondim, João Antonio Miranda. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

Dedico este trabalho primeiramente a DEUS, e também aos meus avós e minha sogra que não tiveram a honra de ver essa etapa da minha vida, a minha mãe Odinete, ao meu pai Roberto, e a minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS, por me ajudar e proteger durante toda minha jornada até o exato momento.

Agradeço aos meus pais Odinete de Oliveira Souza e Antonio Roberto de Souza, pelo apoio e por sempre acreditarem em mim mesmo depois de tantas frustrações. Ao meu irmão Hugo Roberto por todas as orientações, ensinamentos e seu carinho insubstituível.

Agradeço a Mônique Souza por superar comigo cada obstáculos que nos apareceram nossa frente principalmente na reta final do nosso curso.

Agradeço a todos os Amigos que fiz durante toda a minha graduação. Especialmente a Evenildo e Maria Eduarda.

Agradeço imensamente ao professor e orientador João Antônio Miranda Gondim por toda atenção, dedicação e paciência que teve durante o desenvolvimento desse trabalho. E a todos os professores do Dmat da UFPE que contribuíram diretamente e indiretamente para minha formação.

Agradeço profundamente aos meus avós que vieram a falecer e não tiveram a honra de me ver formado, por todos os ensinamentos que levarei para toda a minha vida pessoal e profissional, que os deixarão orgulhosos de mim a onde eles estejam.

Resumo

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo promover ao leitor um domínio de forma mais acessível o ensino das Cadeias de Markov a Tempo Discreto mostrando algumas aplicações de seus cálculos com exercícios mais compreensíveis. Os conceitos aqui tratados são: a Introdução a Cadeias de Markov, Cadeias de Markov Absorventes e Cadeias de Markov Ergódicas. Utilizando os Exercícios de forma mais clara, mostrando todos os seus passos enriquece de forma objetiva esse TCC. Assim é necessário também posteriormente uma continuação desse trabalho para que tenhamos um entendimento amplo de todo o assunto sobre as Cadeias de Markov, como apoio para o último capítulo desse TCC pois seus teoremas são um pouco mais complexos.

Palavras-chave: Matrizes de transições; Potências de transições; Cadeias Absorventes; Cadeias Ergódicas; Cadeias Regulares.

Abstract

This Course Completion Work aims to promote to the reader a more accessible mastery of the teaching of Markov Chains in Discrete Time showing some applications of their calculations with more understandable exercises. The concepts discussed here are Introduction to Markov Chains, Absorbent Markov Chains, and Ergodic Markov Chains. Using the exercises more clearly, showing all your steps objectively enriches this TCC. Thus, a continuation of this work is also necessary later so that we have a broad understanding of the entire subject of Markov Chains, as support for the last chapter of this TCC because its theorems are a little more complex.

Keywords: Transition Matrix; Powers of transitions; Absorbing Chains; Ergodic Chains; Regular Chains.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A Matemática é uma ciência repleta de conhecimentos muito importantes. Uma de suas áreas é a Estatística e a Probabilidade, e todos um dia já estudaram um pouco sobre ou se depararam com alguns exemplos, tais como uma pessoa jogando uma moeda para saber a probabilidade de sair cara ou coroa, sair duas vezes cara ou três vezes coroa sequencialmente, ou ainda, supondo que há bolas coloridas que serão retiradas de dentro de uma caixa, determinar a probabilidade de tirarmos a mesma cor sequencialmente. Talvez tenham se perguntado se de alguma forma vai existir algum fator dependente para que tenha-se dois resultados iguais ou diferentes no primeiro caso (sair coroa/coroa, ou coroa/cara), ou de os resultados serem duas bolas de mesma cor consecutivas, ou de serem cores diferentes.

Assim, por mais simples que pareça, esse tipo de pergunta é um dos pensamentos que dão base para a Teoria de Probabilidade, na qual um dos nomes que tiveram mais destaque foi Andrei Markov, mentor da propriedade markoviana, que refere-se à propriedade da perda de memória, sobre a qual foi desenvolvida a teoria sobre Cadeias de Markov, que são um tipo especial de processo estocástico no qual estados futuros do processo dependem apenas do estado presente; isto é, dado o presente, o futuro não depende do passado.

Este trabalho surge como um recurso que pretende apresentar pontos de maior relevância para que aqueles que tenham interesse nesse assunto, tenham um texto que possa ser mais efetivo, direto e prático com exemplos e resoluções mais detalhadas. Mostramos o que é uma cadeia de Markov, ressaltando que ela estuda as sequências de experimentos aleatórios onde seus resultados independem dos resultados anteriores, motivos pelo qual as Cadeias de Markov são um assunto que pode ser utilizado como ferramenta para diversas áreas, como em melhoramento genético (NASCIMENTO, 2009), reamostragem (PETRIELLI; ADRIANA, 2004), classificação de sinais biopotenciais emitidos pelo cérebro (FRONDANA, 2012) e outras áreas. Como podemos ver, sua aplicabilidade em âmbitos fora do contexto matemático é extensa e não é diferente com a própria teoria das cadeias, pois utiliza como base Álgebra Linear com a Probabilidade.

Este texto foi baseado no livro de Grinstead e Snell (1997) e consiste de três capítulos. No Capítulo 1, vamos descrever as cadeias de Markov, mostrar que de uma cadeia podemos encontrar várias outras dependendo da interpretação que damos para a cadeia e que podemos encontrar um vetor que é caraterístico para cada uma delas.

No Capítulo 2, descrevemos um tipo de cadeia especial, as chamadas cadeias absorventes, e iremos modificá-las para encontrar sua forma canônica de onde teremos aporte para desenvolvermos cálculos específicos para uma cadeia absorvente, por exemplo, para encontrar a matriz fundamental, o tempo de absorção e outros.

No Capítulo 3, será falado sobre duas cadeias especiais: as ergódicas e as regulares. Tais cadeias possuem uma característica muito importante, que se trata de todas as cadeias regulares são cadeias ergódicas, porém nem todas ergódicas são regulares. No estudo das cadeias regulares, descobriremos que quando a potência da matriz de transição tende a infinito terá as linhas das matrizes iguais e ,consequentemente, suas colunas será constantes. Assim por alguns cálculos poderemos descobrir quais são os valores dessas linhas sem muita dificuldade e encontraremos também um vetor específico para elas.

Cada capítulo será acompanhado de exemplos bem desenvolvidos para que o intuito desse trabalho seja cumprido, ou seja, para que aqueles que buscarem possam compreender melhor por meio de exemplos bem esclarecidos.

1 INTRODUÇÃO A CADEIAS DE MARKOV

Um processo estocástico é uma sequência cronológica de algo que possa ser descrito por uma distribuição de probabilidade, representando a evolução dos seu valores com o tempo que se passa. Com isso, dizemos que uma cadeia de Markov é uma classe de processos estocásticos em tempo discreto, ou seja, são processos que as evoluções dos seus futuros valores, não dependem do seu passado mas apenas do seu presente. Vamos ver neste Capítulo como é formada uma cadeia de Markov descrevendo seus elementos, como denominamos cada parte sua e como formular cadeias futuras.

1.1 Descrição de uma cadeia de Markov

As cadeias de Markov são descritas da seguinte forma:
Seja A um conjunto tal que $A = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_l\}$, onde os s_i's são chamados de estados da cadeia de Markov, nos quais é possível movimentar-se de um estado para o outro.

O deslocamento entre esses estados é chamado de passo e existe uma probabilidade p_{ij} para que o estado s_i passe para o estado s_j, a qual é chamada de probabilidade de transição.

Exemplo 1.1. Sejam $0, 1$ e 2 os estados de uma cadeia de Markov, com a probabilidade de transição do estado 0 para o estado 0 é de $\frac{1}{2}$, igualmente com a probabilidade de se passar do estado 1 para o estado 0, do estado 1 para o estado 2 e do estado 2 para o estado 2. Assim como a probabilidade do estado 0 para o 1, do 0 para o 2, do 2 para o 0, do 2 para o 1 são iguais à $\frac{1}{4}$. E nunca vamos conseguir passar do estado 1 para o estado 1, portanto sua probabilidade é de 0. Na figura 1 podemos podemos ver uma representação desse nosso primeiro exemplo das probabilidades de transição.

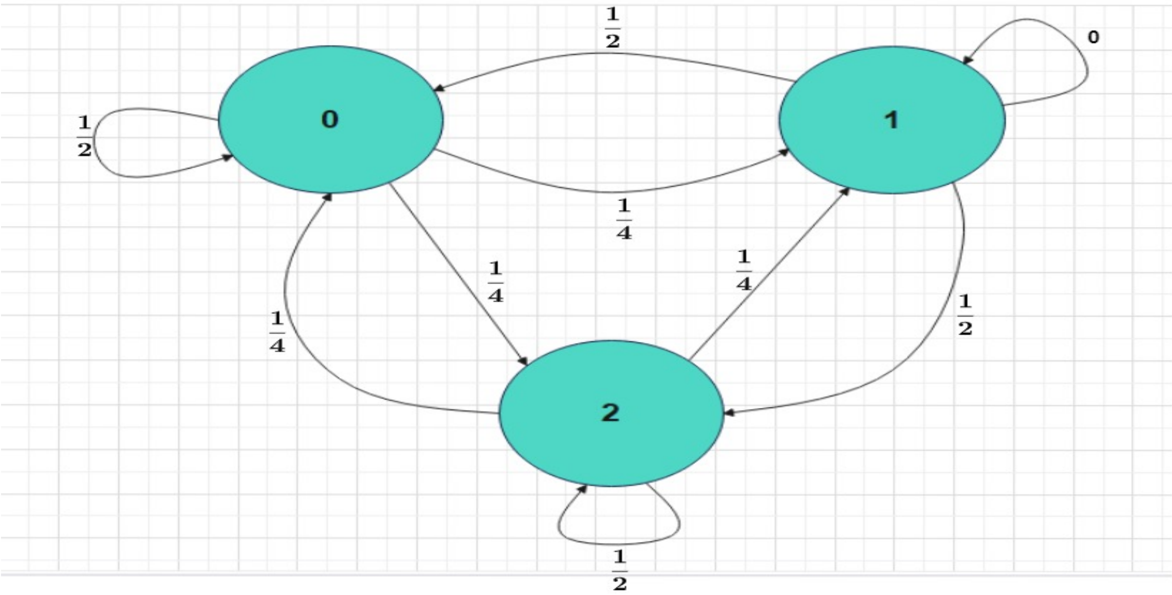

Figura 1 – Esquema com as probabilidades entre os três estados possíveis. Fonte: Autor.

Na próxima seção iremos descobrir como é formada a chamada matriz de transição e como as probabilidades de transição atuam na matriz, mostraremos que a partir de uma probabilidade de transição podemos criar várias matrizes desse tipo dadas pelas potências das matrizes original.

1.2 Matriz de Transição

As matrizes de transição são as matrizes quadradas formadas pelas probabilidades de transição e podemos descrevê-las da seguinte forma: se temos que as matrizes são formadas pelas probabilidades de transição então podemos dizer que $a_{ij} = p_{ij}$, portanto teremos a matriz da seguinte forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1l} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{l1} & p_{l2} & \cdots & p_{ll} \end{pmatrix}$$

Utilizando o Exemplo 1.1 para usar como demonstração de uma matriz de transição, teremos

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Assim, depois que aprendemos a formular uma matriz de transição ficamos com a seguinte pergunta em mãos: conseguimos obter uma probabilidade em um intervalo de tempo de duas unidades? E a resposta é "sim"! Conseguimos, e não apenas para duas unidades, mas também para mais unidades. Isto quer dizer que estaremos transitando do estado inicial para um estado com um intervalo de tempo discreto e será chamada de probabilidade de transição após n passos, as quais serão denotadas por $p_{ij}^{(n)}$, sendo n a quantidade de passos utilizada.

Portanto, para encontrar a probabilidade de $p_{12}^{(2)}$, por exemplo, precisamos usar o Teorema da Probabilidade Total. No caso do Exemplo 1.1, estaríamos querendo a probabilidade do estado 0 passar para o estado 1 em dois passos, o que pode ser interpretado das seguintes formas: estar no estado 0 amanhã e no estado 1 daqui a dois dias; estar no estado 1 amanhã e nele novamente daqui a dois dias; e estar no estado 2 amanhã e no estado 1 daqui a dois dias.

Assim, a probabilidade será calculada por:

$$p_{12}^{(2)} = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32}.$$

Com isso, podemos deduzir a seguinte fórmula, que nos fornecerá as probabilidades de transição em uma quantidade qualquer de passos:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{l} p_{ik}p_{kj}^{(n-1)} \tag{1.1}$$

A partir dessa formula podemos deduzir o seguinte teorema:

Teorema 1.2. *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. A ij-ésima entrada da matriz P^n nos dá a probabilidade de que a cadeia de Markov, a partir do estado s_i, esteja no estado s_j após n passos.*

Demonstração. Vamos provar por indução que:

$$(P^n)_{ij} = p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}$$

Tomemos

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Vamos testar para $n = 1$

portanto vamos ter o seguinte:

$$P_{ij}^{1} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}^{(1-1)} \therefore P_{ij} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik}$$

Como o nosso estado inicial é o 1 e o nosso estado final também é 1 vamos ter o seguinte resultado:

$$P_{11} = p_{11}$$

Provado para $n = 1$

Agora vamos testar para $n = 2$

teremos o seguinte

$$P_{ij}^{2} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}^{(2-1)} \therefore P_{ij}^{2} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}$$

para continuar precisamos mostrar primeiro a matriz cujo as suas entradas são as probabilidades condicionais para representar P_{ij}^2 como ja foi visto antes, :

$$P_{ij}^{2} = \begin{pmatrix} p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{21} & p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \\ p_{12} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{21} & p_{12} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} \end{pmatrix}$$

Como temos as probabilidade condicionais podemos dar continuidade.

Portanto vamos olhar primeiro para $i = 1$ e $j = 1$:

$P^2_{11} = \sum_{k=1}^{r} p_{1k} p_{k1}^{(2-1)} \therefore p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{21} = p_{11} \cdot p_{11} + p_{12} \cdot p_{21}$

Para $i = 1$ e $j = 2$

$P^2_{12} = \sum_{k=1}^{r} p_{1k} p_{k2}^{(2-1)} \therefore p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} = p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22}$

Para $i = 2$ e $j = 1$

$P^2_{21} = \sum_{k=1}^{r} p_{2k} p_{k1}^{(2-1)} \therefore p_{12} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{21} = p_{12} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{21}$

para $i = 2$ e $j = 2$

$P^2_{22} = \sum_{k=1}^{r} p_{2k} p_{k2}^{(2-1)} \therefore p_{12} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22} = p_{12} \cdot p_{12} + p_{22} \cdot p_{22}$

Provado para $n = 2$.

Provemos agora que vale para $n + 1$.

Por hipótese temos que:

$$(P^n)_{ij} = p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}$$

Substituindo $n + 1$ em ambos os lados, obtemos

$$p_{ij}^{n+1} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}^{(n+1)-1} \therefore p_{ij}^{n+1} = \sum_{k=1}^{r} p_{ik} p_{kj}^{n}$$

Se tomarmos $k = 1$ e $i = 1$, como estado inicial temos:

$$p_{11}^{n+1} = p_{11} p_{1j}^{n} \therefore p_{11} = \frac{p_{11}^{n+1}}{p_{1j}^{n}}$$

E se substituímos da mesma forma que anteriormente na hipótese teremos:

$$(P^n)_{11} = p_{11}^{(n)} = p_{11} p_{1j}^{(n-1)} \therefore p_{11} = \frac{p_{11}^{(n)}}{p^{(n-1)}}$$

substituindo as equações temos:

$$\frac{p_{1j}^{n+1}}{p_{1j}^{n}} = \frac{p_{1j}^{n}}{p_{1j}^{n-1}} \therefore \frac{p_{1j}^{n-1}}{p_{1j}^{n}} = \frac{p_{1j}^{n}}{p_{1j}^{n+1}} \therefore$$

$$p_{1j} = p_{1j}$$

Logo a formula vale para $n+1$. Assim provamos nosso Teorema 1.2. $\square$

Exemplo 1.3. Um homem joga BlackJack em um cassino e existem três possibilidades para finalizar o seu jogo: ele pode ganhar, empatar ou perder. A probabilidade de ganhar a primeira partida e ganhar a segunda partida é de $0,5$, que é igual para ele empatar e ganhar, empatar e perder, perder e perder. A probabilidade dele ganhar a primeira partida e em seguida empatar a segunda partida, ganhar em seguida perder, perder em seguida ganhar, perder em seguida empatar são de 0,25 cada. E a sua probabilidade de empatar a primeira partida e empatar a segunda partida é nula.

Assim, podemos montar uma matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c} \\ G \\ E \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array},$$

Utilizando o que vimos no Teorema 1.2, podemos montar a matriz de dois jogos à frente, portanto teremos o seguinte:

$p^2_{11} = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} = 0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,25 = 0,437.$

$p^2_{12} = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32} = 0,5 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0,25 = 0,188.$

$p^2_{13} = p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} = 0,5 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,5 = 0,375.$

$p^2_{21} = p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} = 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,375.$

$p^2_{22} = p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} = 0,5 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,375.$

$p^2_{23} = p_{21}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{33}p_{33} = 0,5 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,250.$

$p^2_{31} = p_{31}p_{11} + p_{32}p_{21} + p_{33}p_{31} = 0,25 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,375.$

$p^2_{32} = p_{31}p_{12} + p_{32}p_{22} + p_{33}p_{32} = 0,25 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,188.$

$p^2_{33} = p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} = 0,25 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,25 = 0,437.$

Portanto,

$$P^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ E \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0,438 & 0,188 & 0,375 \\ 0,375 & 0,250 & 0,375 \\ 0,375 & 0,188 & 0,438 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Assim temos que o elemento da coluna 1 e linha 1 significa que ele possui uma probabilidade de 0,438 de ganhar a primeira e ganhar a terceira partida. O elemento da linha 1 e coluna 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,188 de ganhar a primeira e empatar a terceira partida. O elemento da coluna 3 e linha 1 significa que ele possui uma probabilidade de 0,375 de ganhar a primeira e perder a terceira partida. O elemento da coluna 1 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,375 de empatar a primeira e ganhar a terceira partida. O elemento da coluna 2 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,250 de empatar a primeira e empatar a terceira partida. O elemento da coluna 3 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,375 de empatar a primeira e perder a terceira partida. O elemento da coluna 1 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de 0,375 de perder a primeira e ganhar a terceira partida. O elemento da coluna 2 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de 0,188 de perder a primeira e empatar a terceira partida. O elemento da coluna 3 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de 0,375 de perder a primeira e perder a terceira partida.

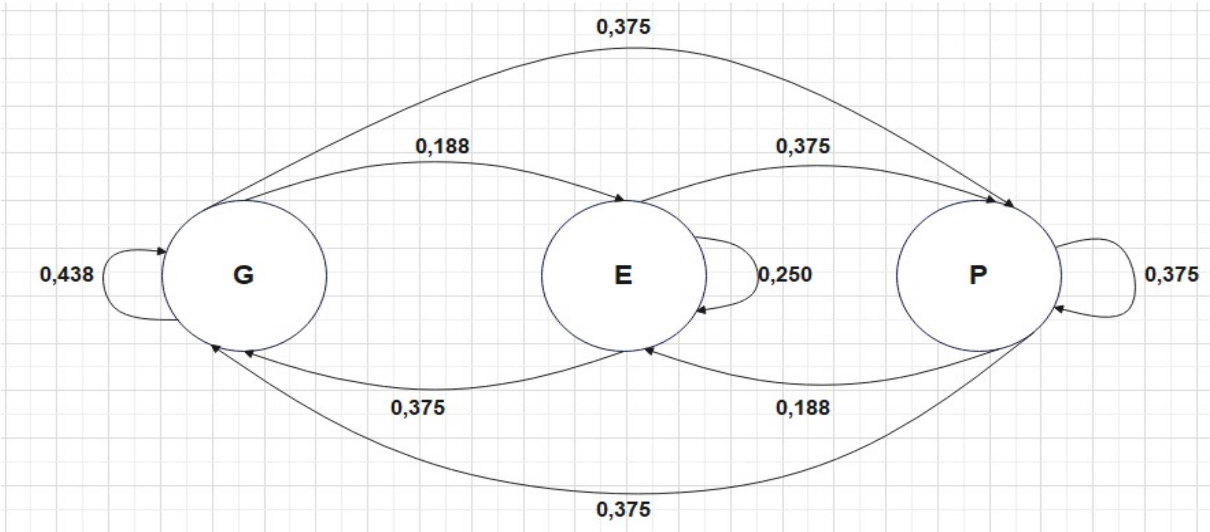

Figura 2 – Esquema com as probabilidades para a potência P^2. Fonte: Autor.

Dessa forma, podemos montar outras matrizes, por exemplo, P^3 e P^6, que mostraremos a seguir:

$$P^3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ E \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0,406 & 0,203 & 0,391 \\ 0,406 & 0,188 & 0,406 \\ 0,391 & 0,203 & 0,406 \end{pmatrix} \end{array},$$

Portanto, o elemento da coluna 1 e linha 1 significa que ele possui uma probabilidade de 0,406 de ganhar a primeira e ganhar a quarta partida. O elemento da linha 1 e coluna 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,203 de ganhar a primeira e empatar a quarta partida. O elemento da coluna 3 e linha 1 significa que ele possui uma probabilidade de 0,391 de ganhar a primeira e perder a quarta partida. O elemento da coluna 1 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,406 de empatar a primeira e ganhar a quarta partida. O elemento da coluna 2 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,188 de empatar a primeira e empatar a quarta partida. O elemento da coluna 3 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de 0,406 de empatar a primeira e perder a quarta partida. O elemento da coluna 1 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de 0,391 de perder a primeira e ganhar a quarta partida. O elemento da coluna 2 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de 0,203 de perder a primeira e empatar a quarta partida. O elemento da coluna 3 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de 0,406 de perder a primeira e perder a quarta partida.

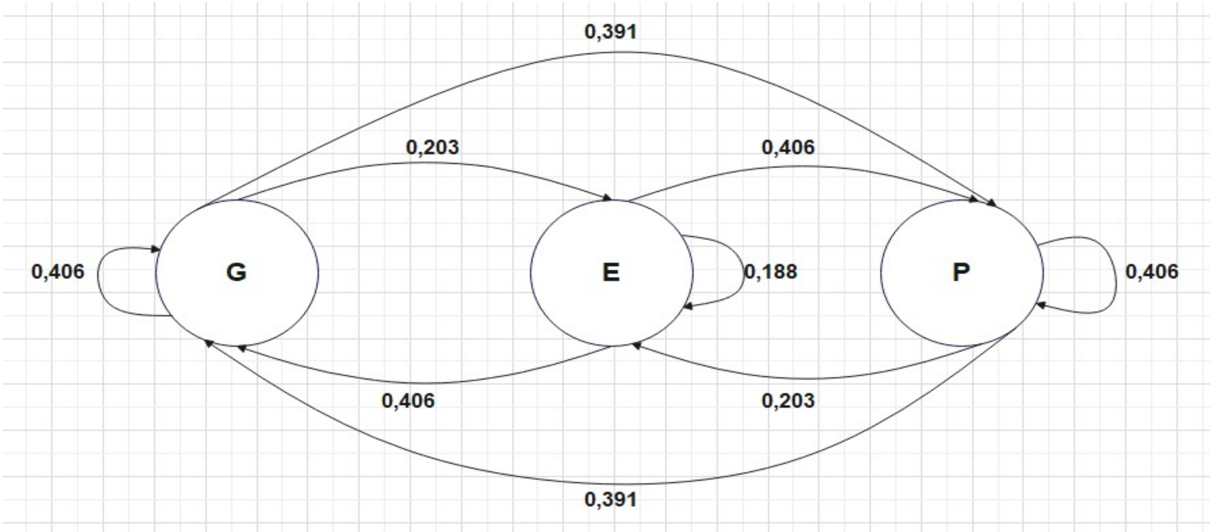

Figura 3 – Esquema com as probabilidades para a potência P^3. Fonte: Autor.

$$P^6 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ E \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

,

Portanto, o elemento da coluna 1 e linha 1 significa que ele possui uma probabilidade de $0,400$ de ganhar a primeira e ganhar a sétima partida. O elemento da linha 1 e coluna 2 significa que ele possui uma probabilidade de $0,200$ de ganhar a primeira e empatar a sétima partida. O elemento da coluna 3 e linha 1 significa que ele possui uma probabilidade de $0,400$ de ganhar a primeira e perder a sétima partida. O elemento da coluna 1 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de $0,400$ de empatar a primeira e ganhar a sétima partida. O elemento da coluna 2 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de $0,200$ de empatar a primeira e empatar a sétima partida. O elemento da coluna 3 e linha 2 significa que ele possui uma probabilidade de $0,400$ de empatar a primeira e perder a sétima partida. O elemento da coluna 1 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de $0,400$ de perder a primeira e ganhar a sétima partida. O elemento da coluna 2 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de $0,200$ de perder a primeira e empatar a sétima partida. O elemento da coluna 3 e linha 3 significa que ele possui uma probabilidade de $0,400$ de perder a primeira e perder a sétima partida.

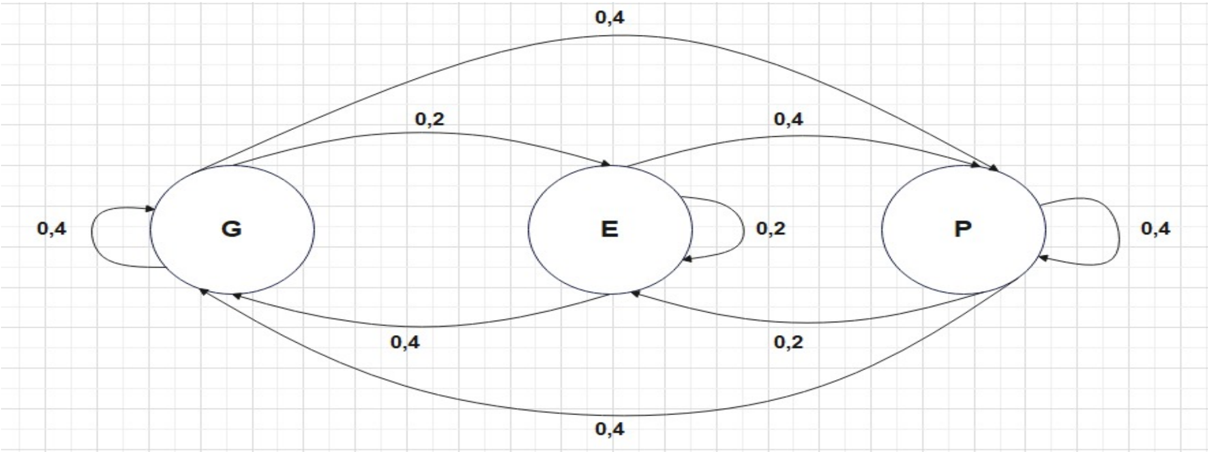

Figura 4 – Esquema com as probabilidades para potência P^6. Fonte: Autor.

1.3 Vetor Probabilidade

Definimos como um vetor probabilidade qualquer vetor que tenha a probabilidade de transição, ou seja, podendo se movimentar de um estado para o outro, o vetor probabilidade possui a seguinte restrição: $V = v_{ij}, v_{ik}, v_{il}, ...$, tal que todos os elementos do conjunto V sejam positivos e que a soma de seus elementos sejam iguais a 1.

Teorema 1.4. *Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov, e seja u o vetor de probabilidade que representa a distribuição de partida (estado inicial). Então a probabilidade de que a cadeia esteja no estado s_j após n passos é a $i-$ésima entrada do vetor $u^{(n)} = uP^n$*

Exemplo 1.5. Podemos utilizar o Exemplo 1.3 como base. Assim, tendo um vetor probabilidade $u = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Podemos calcular a distribuição dos estados após 6 passos, ou seja, na sétima jogadas. Assim temos: $u^{(6)} = up^6$

$$u^6 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$u^6 = (0.4 \cdot 0.333 + 0.4 \cdot 0.333 + 0.4 \cdot 0.333, 0.2 \cdot 0.333 + 0.2 \cdot 0.333 + 0.2 \cdot 0.333, 0.4 \cdot 0.333 + 0.4 \cdot 0.333 + 0.4 \cdot 0.333)$

$u^6 = (0.4, 0.2, 0.4)$

1.4 Exemplos

Exemplo 1.6. Na idade média, Harvard, Dartmouth e Yale admitiam apenas estudantes masculinos. Suponha que, naquela época, 80% dos filhos de homens de Harvard fossem para Harvard e o restante fosse para Yale, 40% dos filhos de homens de Yale fossem para Yale, e o restante fosse dividido igualmente entre Harvard e Dartmouth; e dos filhos de Dartmouth, 70% foram para Dartmouth, 20% para Harvard e 10% para Yale. Formamos uma cadeia de Markov com matriz de transição

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} H & Y & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ Y \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Se o pai estudava em Harvard, qual será a probabilidade de seu neto e seu tataraneto estudar em Dartmounth? Ou seja, precisamos descobrir quais são as matrizes de probabilidade de transição P^2 e P^4?

Utilizando o que vimos no Teorema 1.2, podemos montar a matriz de daqui a dois anos, portanto teremos o seguinte:

$p_{11}^2 = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} = 0,70.$

$p_{12}^2 = p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{13}p_{32} = 0,24.$

$p_{13}^2 = p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33} = 0,06.$

$p_{21}^2 = p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} = 0,42.$

$p_{22}^2 = p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} = 0,25.$

$p_{23}^2 = p_{21}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{33}p_{33} = 0,33.$

$p_{31}^2 = p_{31}p_{11} + p_{32}p_{21} + p_{33}p_{31} = 0,19.$

$p_{32}^2 = p_{31}p_{12} + p_{32}p_{22} + p_{33}p_{32} = 0,15.$

$p_{33}^2 = p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} = 0,66.$

Portanto teremos a seguinte matriz:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ H \\ Y \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H & Y & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7 & 0,24 & 0,06 \\ 0,42 & 0,25 & 0,33 \\ 0,19 & 0,15 & 0,66 \end{pmatrix} \end{array},$$

Para calcularmos a matriz de 4 anos, basta fazer o mesmo cálculo anterior para as matrizes de 2 anos, portanto:

$p_{11}^4 = p_{11}^2p_{11}^2 + p_{12}^2p_{21}^2 + p_{13}^2p_{31}^2 = 0,602.$

$p_{12}^4 = p_{11}^2p_{12}^2 + p_{12}^2p_{22}^2 + p_{13}^2p_{32}^2 = 0,237.$

$p_{13}^4 = p_{11}^2p_{13}^2 + p_{12}^2p_{23}^2 + p_{13}^2p_{33}^2 = 0,161.$

$p_{21}^4 = p_{21}^2p_{11}^2 + p_{22}^2p_{21}^2 + p_{23}^2p_{31}^2 = 0,468.$

$p_{22}^4 = p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} + p_{23}p_{32} = 0,213.$

$p_{23}^4 = p_{21}p_{13} + p_{22}p_{23} + p_{33}p_{33} = 0,319.$

$p_{31}^4 = p_{31}p_{11} + p_{32}p_{21} + p_{33}p_{31} = 0,321.$

$p_{32}^4 = p_{31}p_{12} + p_{32}p_{22} + p_{33}p_{32} = 0,182.$

$p_{33}^4 = p_{31}p_{13} + p_{32}p_{23} + p_{33}p_{33} = 0,497.$

$$P^4 = \begin{array}{c} \\ H \\ Y \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H & Y & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,602 & 0,237 & 0,161 \\ 0,468 & 0,213 & 0,319 \\ 0,312 & 0,182 & 0,497 \end{pmatrix} \end{array},$$

A probabilidade de que o filho cujo pai estudou em Harvard estudar em Dartmouth depois de 2 anos é de $p_{13}^2 = 0,06\%$ e depois de 4 anos é de $p_{13}^4 = 0,161\%$.

Exemplo 1.7. (Modelo de gene) O tipo mais simples de herança de características em animais ocorre quando uma característica é governada por um par de genes, cada um dos quais pode ser de dois tipo, digamos G e g. Um individuo pode ter uma combinação GG ou Gg (que é geneticamente igual a gG) ou gg. Muitas vezes, os tipos GG e Gg são indistinguíveis na aparência, e então dizemos que o gene G domina o gene g. Um com indivíduo é chamado de dominante se tiver genes GG, recessivo se tiver gg e híbrido com uma mistura de Gg. No acasalamento de dois animais, a prole herda um gene do par de cada pai, e a suposição básica da genética é que esses genes são selecionados aleatoriamente, independentemente um do outro. A prole de dois genitores puramente dominantes deve ser dominante, de dois genitores recessivos deve ser recessiva e de um genitor dominante e um recessivo deve ser híbrida. No acasalamento de um animal dominante e um híbrido, cada descendente deve obter um gene G do primeiro e tem uma chance igual de obter G ou g do segundo. Portanto, há uma probabilidade igual de obter uma prole dominante ou híbrida. Novamente no acasalamento de um recessivo e um híbrido, há uma chance igual de obter um recessivo ou um híbrido. N o acasalamento de dois híbridos, a prole tem uma chance igual de obter G ou g de cada pai. Portanto, as probabilidades são $\frac{1}{4}$ para GG, $\frac{1}{2}$ para Gg e $\frac{1}{4}$ para gg. Considere um processo de acasalamentos contínuos. Começamos com um indivíduo de caráter genético conhecido e o acasalamos com um híbrido. Assumimos que há pelo menos um descendente. Uma prole é escolhida aleatoriamente e acasalada com um híbrido e esse processo é repetido por várias gerações. O tipo genético da prole escolhida em gerações sucessivas pode ser representado por uma cadeia de Markov. Os estados são dominante, híbrido e recessivo, e indicados por GG, Gg, gg, respectivamente. As probabilidades de transição são:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} GG & Gg & gg \end{array} \\ \begin{array}{c} GG \\ Gg \\ gg \end{array} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array},$$

2 CADEIAS DE MARKOV ABSORVENTES

Para falar um pouco mais sobre cadeias de Markov é importante estudarmos alguns tipos especiais de cadeias. Portanto vamos começar pelas cadeias de Markov absorventes.

2.1 Cadeias Absorventes

Definimos um estado absorvente da seguinte maneira: Dado uma cadeia de Markov com espaço de estados S, um estado $i \in S$ é dito absorvente quando $p_{ii} = 1$. Assim uma cadeia de Markov é absorvente quando existe pelo menos um estado absorvente, ou seja, existe um estado tal que se a cadeia chega a ele não sai mais. Além disso, exige-se que, de qualquer estado, é possível atingir um estado absorvente (não necessariamente em um passo). Quando o estado da cadeia não é absorvente ele é chamado de estado de transição.

Exemplo 2.1. Hugo cursa Farmácia em uma universidade. Ele está procurando um local tranquilo para estudar e com isso ele percebe que tem algumas opções: Casa dos amigos, Sua casa e as áreas de saúde, humanas e exatas da sua universidade. Hugo possui uma probabilidade de $\frac{1}{2}$ de transitar entre a área de saúde e a casa dos amigos se estiver na área de exatas; Uma probabilidade de $\frac{1}{2}$ de transitar entre as áreas de exatas e humanas caso esteja na área de saúde; E se estiver na área de Humanas possui uma probabilidade de $\frac{1}{2}$ de transitar entre as áreas de saúde e ir para sua casa. Caso ele já esteja na casa dos seus amigo ou na sua casa ele permanecerá lá.

Portanto, podemos montar a seguinte matriz:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} A & E & S & H & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ E \\ S \\ H \\ C \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Assim podemos perceber quais são os estados de transição, ou seja, aqueles em que podemos nos movimentar (E, S, H) e os estados absorventes, que são estados em que não é possível se movimentar para outro estado (A, C). É mais compreensível quando olhamos a Figura 5, pois os estados que não possuem setinha saindo dele são os absorventes e os que possuem setinhas saindo e entrando são os de transição.

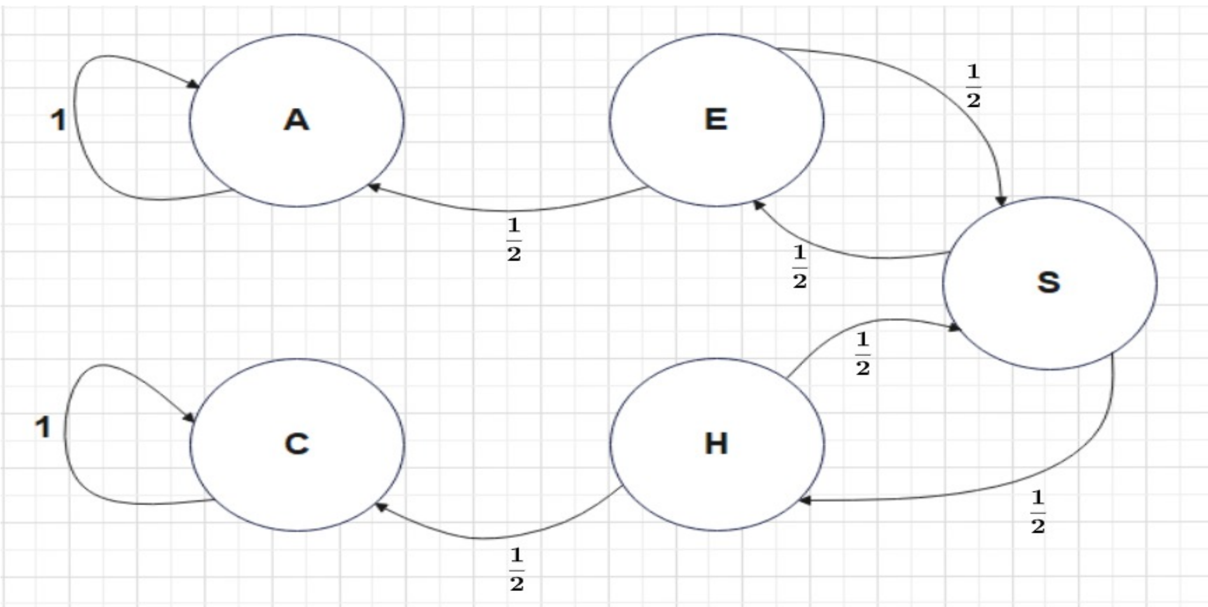

Figura 5 – Esquema com as probabilidades para a cadeia absorvente. Fonte: Autor.

Agora, iremos mostrar como construir a forma canônica de uma matriz absorvente, afim de calcular o intervalo de tempo de absorção do estado e quantas vezes percorremos estados transitórios até que esses sejam efetivamente absorvidos.

2.2 Forma Canônica

Para encontrar a forma canônica de uma matriz basta reorganizar a matriz original, com a finalidade de que os estados de transição fiquem como os primeiros elementos da matriz. Portanto a matriz deve se comportar da seguinte forma:

$$P = \begin{array}{c} \\ TR \\ ABS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} TR & ABS \end{array} \\ \begin{pmatrix} Q & R \\ O & I \end{pmatrix} \end{array},$$

Como podemos ver na matriz acima, os estados de transição são os primeiros elementos da matriz, como queríamos quando a reescrevemos e com isso temos a forma canônica, a qual é valida apenas se tivermos r estados absorventes e t estados de transição. Observe que O que é a matriz nula t x r, Q é uma matriz t x t, R é uma matriz não nula t x r e que I é a matiz identidade r x t.

Exemplo 2.2. Utilizando o Exemplo 2.1, podemos mostrar como ficaria a sua forma canônica:

$$P = \begin{array}{c} \\ E \\ S \\ H \\ A \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E & S & H & A & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos dizer que P^n é a matriz que possui as probabilidade de sairmos do estado inicial s_i para o estado final s_j para uma unidade de tempo qualquer, de forma semelhante ao que vimos no capitulo anterior. Portanto podemos escrever P^n na forma canônica:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} TR & ABS \end{array} \\
P^n = \begin{array}{c} TR \\ ABS \end{array} & \begin{pmatrix} Q^n & * \\ O & I \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

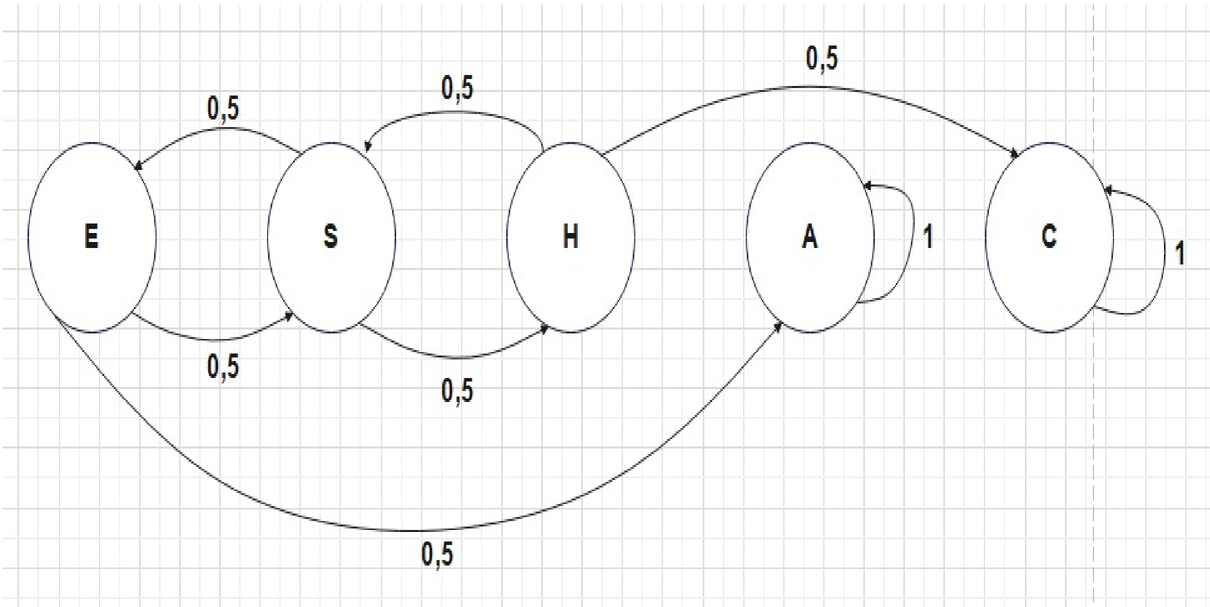

Figura 6 – Esquema com as probabilidades para a forma canônica. Fonte: Autor.

Diferente da anterior alteramos uma parte da matriz, adicionamos nessa nova um novo elemento, $*$ no qual é equivalente a uma matriz t x r e pode ser escrita em termos de R e Q.

2.3 Probabilidade de ser absorção

P^n nos mostra que vamos obter em Q^n a probabilidade de chegarmos em qualquer estado de transição após n passos, tendo como inicial um estado também de transição.

O teorema a seguir mostra que a probabilidade de estarmos em um estado de transição qualquer em n passos, quando $n \to \infty$, tende a zero. Portanto $Q^n \to 0$ quando n fica muito grande.

Teorema 2.3. *Em uma cadeia de Markov absorvente, a probabilidade do processo ser absorvido é* 1*, i.e,* $Q^n \to 0$ *quando* $n \to \infty$*.*

Demonstração. A partir de um estado s_j, é possível atingir um estado absorvente da cadeia. Assim, podemos definir m_j como a quantidade mínima de passos que damos para chegar em um estado absorvente a partir de um estado s_j, e p_j a probabilidade de que o processo não seja absorvido referente a quantidade de passos de m_j, então temos que $p_j < 1$. Selecionando o maior m dos m_j e o maior p dos p_j, a probabilidade do processo não ser absorvido em m passos é menor ou igual a p, de não ser absorvido em $2m$ passos é menor ou igual a p^2 e assim sucessiv [amente. Portanto, como $p < 1$, $p^n \to 0$. Como a probabilidade de não ser absorvido em n passos é monótona decrescente, pelo fato de termos que $p_j < 1$ e há uma subsequência que tende a zero, então a sequência inteira tende a zero quando $n \to \infty$. Dessa forma $Q^n = 0$. □

2.4 Matriz Fundamental

Teorema 2.4. *Para uma cadeia de Markov absorvente, a matriz* $I - Q$ *tem uma inversa* $N = I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots$. *A entrada* n_{ij} *da matriz* N *nos dá o número esperado de vezes que a cadeia estará no estado* s_j*, iniciando em* s_i*, até ser absorvido. Se* $i = j$*, o estado inicial é contado.*

Assim podemos definir a Matriz fundamental como a matriz inversa de $I - Q$ que chamaremos de N, Portanto $N = (I - Q)^{-1}$.

Demonstração. Essa prova é possível ser encontrada na prova do teorema 11.4 (GRINSTEAD, Charles M.; SNELL, J. Laurice. Introduction to Probability. segunda. ed. rev. [S. l.]: American Mathematical Society, 1997) □

Exemplo 2.5. Consideremos o Exemplo 2.2, que nos mostra como seria a forma canônica do Exemplo 2.1. Vamos achar a sua matriz fundamental. Para isso precisamos encontrar sua forma canônica.

Assim temos que sua forma canônica é:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} E & S & H & A & C \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ S \\ H \\ A \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Com a forma canônica podemos ir para o próximo passo, onde montamos uma Matriz Q e poderemos calcular a Matriz $I - Q$. Portanto teremos que:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Logo temos que

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Assim encontramos que $(I - Q)^{-1}$:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E & S & H \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ S \\ H \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Assim descobrimos que se ele começar na área de Exatas o numero esperado de vezes nos estados de exatas, saude e humanas antes de ser absorvido respectivamente é $\frac{3}{2}$, 1 e $\frac{1}{2}$; Se começar na área de saúde o número esperado de vezes nos estados de exatas, saúde e humanas antes de ser absorvido respectivamente é 1, 2 e 1; Se começar na área de humanas o número esperado de vezes nos estados de exatas, saúde e humanas antes de ser absorvido respectivamente é $\frac{1}{2}$, 1 e $\frac{3}{2}$.

2.5 Tempo de Absorção

Para descobrimos o número de etapas antes que a cadeia seja absorvida podemos utilizar o próximo teorema.

Teorema 2.6. *Seja t_i o número esperado de passos antes de a cadeia ser absorvida, dado que iniciamos do estado s_i, e seja T o vetor coluna com entradas t_i, então $T = Nc$, onde c é o vetor coluna com entradas iguais a 1.*

Demonstração. Queremos provar que t_i é o número de passos antes da cadeia ser absorvida. Vimos que $(I - Q)^{-1} = N$ é uma matriz cuja as entradas são os números esperado de vezes que a cadeia estará no estado s_j, iniciando em s_i, segundo o teorema 2.4 da matriz fundamental. Assim, se fixarmos uma linha que corresponde aos elementos de t_i e tomarmos a soma de todos os elementos dessa linhas de N será o numero de passos que a cadeia dará antes de ser absorvida. Portanto será o mesmo que estar multiplicando a matriz por um vetor com todas as entradas igual a 1. Dessa forma temos $(I - Q)^{-1} \cdot v$, onde v é um vetor com todas entradas igual a 1. Assim $T = Nv$, como queríamos provar. □

Exemplo 2.7. No exemplo do aluno (Exemplo 2.1), descobrimos que:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Por isso,

$$T = Nc = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Assim, temos como tempo para absorção $3, 4$ e 3 para respectivamente os estados $1, 2$ e 3.

2.6 Probabilidades de Absorção

Para calcularmos quando a cadeia de Markov será absorvida começando por um estado transitório, utilizamos o teorema a seguir:

Teorema 2.8. *Seja b_{ij} a probabilidade de que uma cadeia absorvente seja absorvida nos estados absorventes, se ela começar no estado transitório s_i. Seja B a matriz com entradas b_{ij}. Então B é uma matriz $t \times r$, e*

$$B = NR,$$

onde N é a matriz fundamental e R é como na forma canônica.

Demonstração. Essa prova é possível ser encontrada na prova do teorema 11.6 (GRINSTEAD, Charles M.; SNELL, J. Laurice. Introduction to Probability. segunda. ed. rev. [S. l.]: American Mathematical Society, 1997) □

Exemplo 2.9. No exemplo do aluno (Exemplo 2.1) descobrimos que:

$$R = \begin{array}{c} \\ E \\ S \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Por isso,

$$B = NR = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ E \\ S \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

Assim, temos que se Hugo estivesse na área de Exatas ele teria a probabilidade de $\frac{3}{4}$ de absorção na casa dos amigos e $\frac{1}{4}$ de absorção em sua residência; Para a área de saúde teria a probabilidade de $\frac{1}{2}$ de absorção tanto para a casa dos seus amigos quanto para a sua residência; Para a área de Humanas teria uma probabilidade de $\frac{1}{4}$ de absorção na casa dos amigos e $\frac{3}{4}$ de absorção em sua residencia.

2.7 Exemplos

Exemplo 2.10. Seja a Matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Reordenando o conjunto de estados para acharmos a sua forma canônica, temos:

$$\alpha = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vamos calcular N para que possamos descobrir o tempo para que a nossa cadeia seja absorvida. Se $N = (I - Q)^{-1}$, vamos fazer primeiro $I - Q$ e depois achamos a sua inversa, portanto:

$$(I-Q)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0,8&0\\0,4&0&0,6\\0&0,7&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-0,8&0\\-0,4&1&-0,6\\0&-0,7&1\end{pmatrix}$$

Assim sua inversa é:

$$N=(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix}0,58&0,4&0,28\\0,8&1&0,7\\0,48&0,6&0,68\end{pmatrix}$$

Como agora temos N podemos encontrar a quantidade de passos para que os estados $2,3$ e 4 sejam absorvidos, assim basta usarmos o Teorema 2.6, portanto,

$$T=\begin{pmatrix}0,58&0,4&0,28\\0,8&1&0,7\\0,48&0,6&0,68\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por aproximadamente o tempo para que os estafos sejam absorvidos é

$$T=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Assim o tempo para que o estado 2 seja absorvido é de 1 passo, para que o estado 3 seja absorvido é de 3 passos e para que o estado 4 seja absorvido é de 2 passos.

Podemos também encontrar a probabilidade de que os estados $2,3$ e 4, sejam absorvidos. E para isso podemos utilizar o teorema 2.8:

$$B=NR=\begin{pmatrix}0,58&0,4&0,28\\0,8&1&0,7\\0,48&0,6&0,68\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,2&0\\0&0\\0&0,3\end{pmatrix}$$

Portanto temos:

$$B=\begin{array}{c}\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\quad 1 & \qquad 5\end{array}\\\begin{pmatrix}0,116&0,084\\0,160&0,210\\0,096&0,204\end{pmatrix}\end{array}$$

Assim temos que as probabilidade para que o estado 2 seja absorvido pelo estado 1 é de $0,116$ e pelo estado 5 é de $0,084$. Já no estado 3, a probabilidade de ser absorvido pelo estado 1 é de $0,160$ e pelo estado 5 é de $0,210$. E por ultimo, para o estado 4 ser absorvido pelo estado 1 é $0,096$ e pelo estado 5 é $0,204$.

Exemplo 2.11. Um homem caminha por um trecho de cinco quarteirões da Park Avenue (veja a Figura 7). Se ele está no canto 1, 2, 3 ou 4 então ele anda para a esquerda ou para a direita com igual probabilidade. Ele continua até chegar ao canto 5, que é um bar, ou ao canto 0, que é sua casa. Se ele chegar em casa ou no bar, ele fica lá. Formamos uma cadeia de Markov com os estados 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Os estados 0 e 4 são estados absorventes.

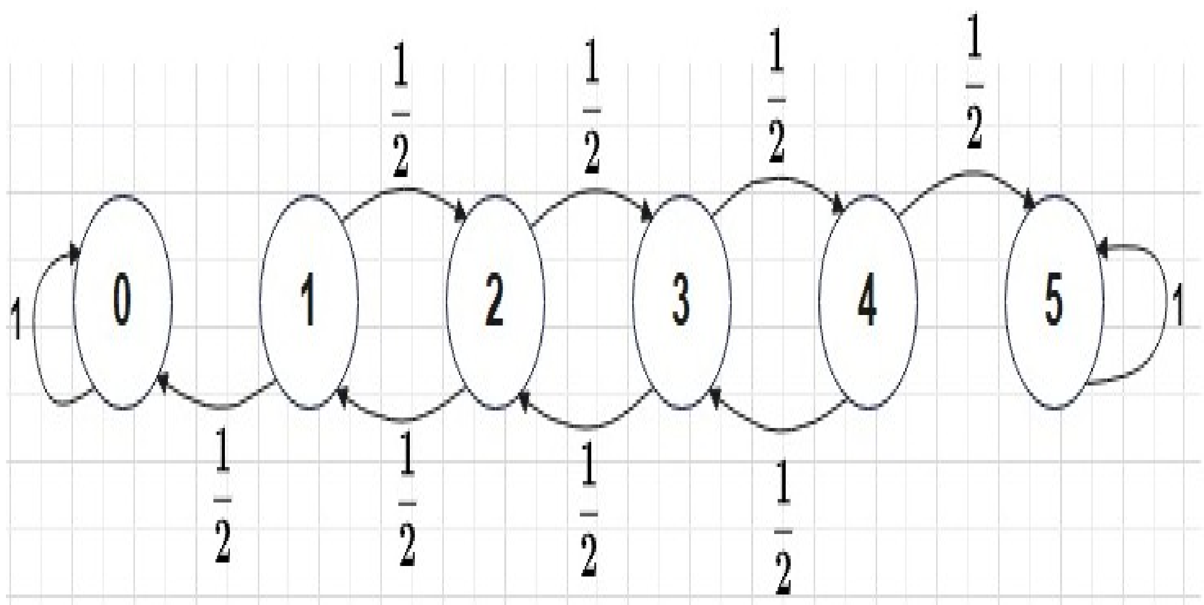

Figura 7 – Park Avenue. Fonte: Autor

A matriz de transição é:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Seja a sua forma canônica:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vamos saber agora o tempo para que a cadeia seja absorvida. Portanto vamos primeiro descobrir quem é N: Portanto temos que:

$$(I - Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Devemos agora achar a sua inversa, portanto:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Agora que sabemos quem é N podemos encontrar quantos passos é preciso para que os estados sejam absorvidos. Portanto vamos ter que:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} + \frac{12}{5} + \frac{8}{5} + \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} + \frac{8}{5} + \frac{12}{5} + \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Assim podemos ver que o tempo para que o estado 1 e 4 sejam absorvidos é de 4 passos, para que o estado 2 e 3 sejam absorvidos é de 6 passos.

Agora vamos encontrar as probabilidades deles serem absorvidos, então vamos ter:

$$B = NR = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Portanto vamos ter que:

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

Com isso podemos ver que as probabilidades para que o estado 1 seja absorvido no estado 0 é de $\frac{4}{5}$ e para o estado 5 é de $\frac{1}{5}$. Já o estado 2 para ser absorvido é de $\frac{3}{5}$ no estado 0 e $\frac{2}{5}$ no estado 5. O estado 3 vai ser absorvido com uma probabilidade $\frac{2}{5}$ para o estado 0 e $\frac{3}{5}$ para o estado 5. E por ultimo o estado 4 vai ser absorvido com uma probabilidade de $\frac{1}{5}$ no esta 0 e $\frac{4}{5}$ no estado 5.

3 CADEIAS DE MARKOV ERGÓDICAS

Vamos estudar nesse capitulo outra cadeia de Markov especial e muito importante, as cadeias Ergódicas e as Regulares.

3.1 Cadeias Ergódicas

Dizemos que uma cadeia de Markov é ergódica, quando ela consegue passar por todos os estado, independente da quantidade de passos necessários. Portanto, é ergódica quando for possível ir de qualquer estado para qualquer estado, independente do número de passos.

Exemplo 3.1. Seja uma matiz transição qualquer:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos ver que se a cadeia começa no estado A ela pode passar para o estado B, da mesma forma se começar no estado B podendo se movimentar para o estado A.

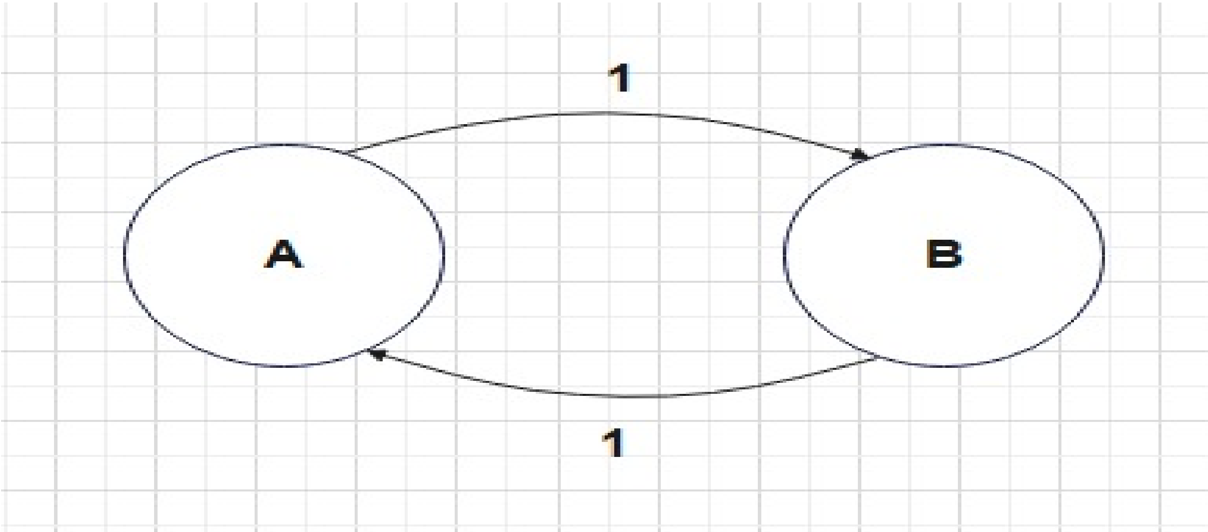

Figura 8 – Esquema com as probabilidades para a cadeia ergódica do Exemplo 3.1. Fonte: Autor.

3.2 Cadeias de Markov Regulares

Definimos uma cadeia de Markov regular quando alguma potência da matriz de transição possui apenas elementos positivos. Ou seja, é necessário que todas as entradas $p_{ij}^{n} > 0$.

É importante ressaltar que toda cadeia regular é ergódica pois, por definição, podemos ir de qualquer estado para qualquer estado em n passos, para algum n inteiro positivo, mas nem toda cadeia ergódica é regular. Também é necessário ressaltar que uma cadeia de Markov pode ter uma matriz de transição que possua zeros mas uma das suas potências não possua, um exemplo que podemos utilizar é a matriz do Exemplo 1.1, onde $p_{22} = 0$, mas a matriz P^2 não possui elementos nulos, então temos uma cadeia regular. Isso é muito fácil de ser compreendido se olharmos para uma matriz do Exemplo 3.1 onde a cadeia é ergódica, mas se n for par, então não é possível passar do estado 0 para o estado 1 então a cadeia não é regular.

Exemplo 3.2. Utilizando o Exemplo 1.3 temos a potencia da matriz P^3:

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ G \\ E \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,406 & 0,203 & 0,391 \\ 0,406 & 0,188 & 0,406 \\ 0,391 & 0,203 & 0,406 \end{pmatrix} \end{array},$$

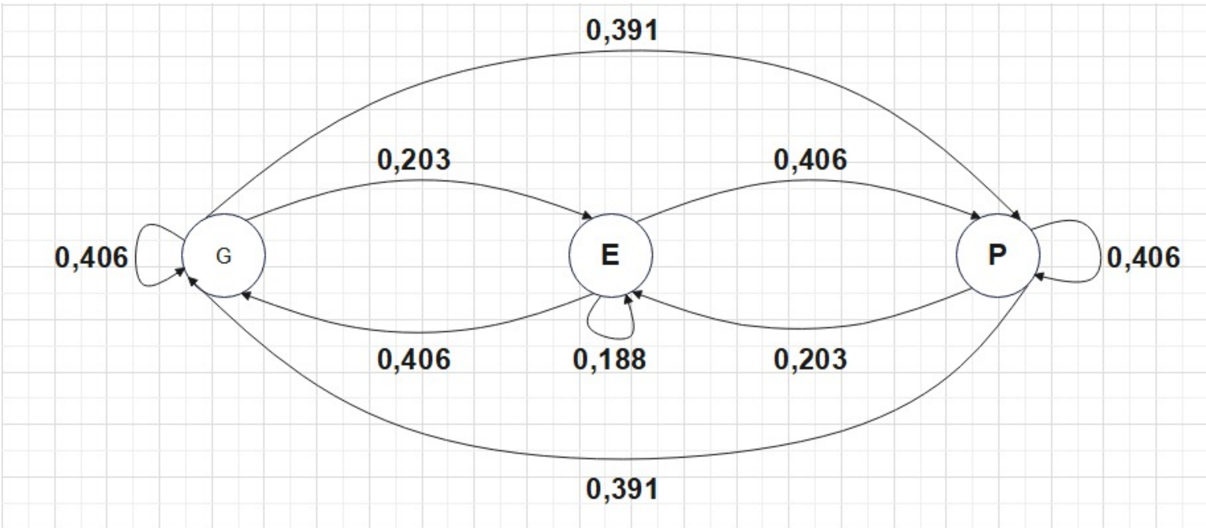

Figura 9 – Esquema com as probabilidades para a cadeia regular. Fonte: Autor.

Esse é um exemplo de cadeia regular, pois suas probabilidades de transição em três passos são diferentes de zero. Além disso, também é uma cadeia ergódica pois é possível passar de um estado para o outro, se começar ganhado ele pode perder ou empatar no próximo jogo, da mesma forma se ele começar empatando ou perdendo é possível passar para os outros estados.

Do mesmo modo que trabalhamos com os estados de uma cadeia, para encontrar as potências das cadeias de transições, podemos descobrir que as linhas das matrizes serão iguais em alguma potência e consequentemente irá ter colunas constantes. Dessa forma encontraremos um vetor que fornecerá os elementos dessas linhas, e veremos que ele é único. Iremos estudar isso e um pouco mais na próxima seção.

3.3 Vetores fixos

Teorema 3.3. *Seja P a matriz de transição para uma cadeia regular. Então, como $n \to \infty$, as potencias P^n se aproximam de uma matriz limite W com todas as linhas do mesmo vetor w. O vetor w é um vetor de probabilidade estritamente positivo.*

Assim podemos notar que o objetivo desse teorema é nos mostrar que em algum momento as matrizes de transições terão as linhas iguais e consequentemente suas colunas será constantes.

Exemplo 3.4. Vamos analisar as matrizes do Exemplo 1.1, P^2 e P^6:

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ G \\ E \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,438 & 0,188 & 0,375 \\ 0,375 & 0,250 & 0,375 \\ 0,375 & 0,188 & 0,438 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$P^6 = \begin{array}{c} \\ G \\ E \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array},$$

Portanto podemos ver que o menor valor da matriz aumenta de 0,188 para 0,200 e o valor máximo diminui de 0,438 para 0,400. Nesse caso, já conseguimos que as linhas ficassem todas iguais.

Teorema 3.5. *Se P é uma matriz de transição regular, seja*

$$W = \lim_{x \to \infty} P^n,$$

seja w a linha comum de W e c é o vetor coluna cujo seus componentes é 1, temos

(a) $wP = w$, e qualquer vetor linha v tal que $vP = v$ é um multiplo de w.

(b) $Pc = c$, e qualquer vetor coluna x tal que $Px = x$ é um multiplo de c.

Portanto definimos como vetor linha fixo o w com propriedade $wP = w$. Assim como x é o vetor coluna com a propriedade $Px = x$.

Exemplo 3.6. Vamos utilizar o Exemplo 1.3, para encontrarmos o vetor limite w da cadeia. Assim temos que $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ e

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & E & P \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ E \\ P \end{array} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

Então temos o seguinte sistema:

$w_1 + w_2 + w_3 = 1$

$0,5w_1 + 0,5w_2 + 0,25w_3 = w_1$

$0,25w_1 + 0,25w_3 = w_2$

$0,25w_1 + 0,5w_2 + 0,5w_3 = w_3$

A solução desse sistema é: $w_1 = 0,4$, $w_2 = 0,2$ e $w_3 = 0,4$. Portanto temos que:

$$w = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

E assim podemos ver que é a mesma linha de uma das potências da nossa matriz, P^6.

Teorema 3.7. *Seja P uma matriz de transição regular e v um vetor de probabilidade qualquer. Então*

$$\lim_{n\to\infty} vP^n = w$$

onde w é o único vetor de probabilidade fixo de P.

3.4 Equilíbrio

Iremos ver agora alguns teoremas que podemos utilizar para encontrar os vetores fixos para cadeias ergódicas. Mas como foi dito anteriormente sabemos que toda cadeia regular é uma cadeia ergódica, portanto vamos aprender formas diferentes das vistas anteriormente para calcular os vetores fixos.

Teorema 3.8. *Para uma cadeia de Markov ergódica, existe um único vetor de probabilidade w tal que $wP = w$ e w é extremamente positivo. E qualquer vetor linha tal que $vP = v$ é um multiplo de w. qualquer vetor coluna x tal que $Px = x$ é um vetor constante.*

Teorema 3.9. *Seja P uma matriz de transição ergódica. Seja A a matriz definida por:*

$$A_n = \frac{I + P + P^2 + ... + P^n}{n+1}$$

Então se $A_n \to W$ onde W é uma matriz cujas linhas são todas iguais ao único vetor de probabilidade fixo w para P.

Teorema 3.10 (Lei dos grandes números para cadeias de Markov Ergódicas)**.** *Seja $H_j^{(n)}$ a quantidade de vezes em n passos que uma cadeia ergódica estará no estado s_j. Então para qualquer $\varepsilon > 0$:*

$$P(|H_{(j)}^n - w_j| > \varepsilon) \to 0,$$

independente de onde partiu inicialmente s_i.

3.5 Exemplos

Exemplo 3.11. A seguir temos duas figuras, uma para um esquema que representa uma cadeia ergódica e outra que representa uma cadeia não-ergódica.

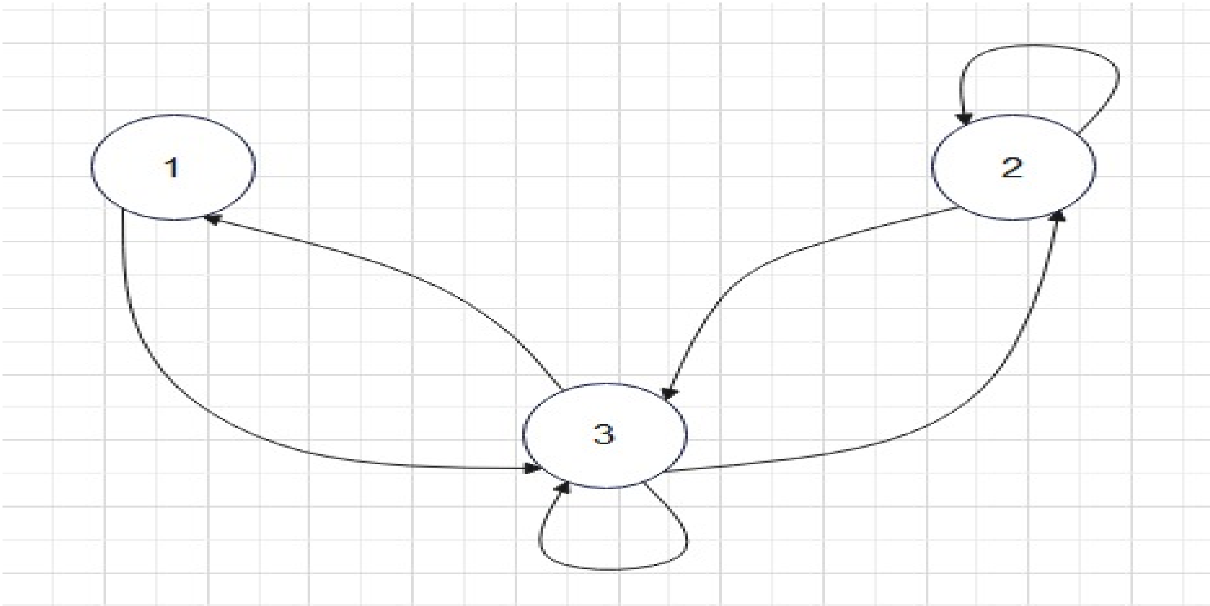

Figura 10 – Esquema com as probabilidades para a cadeia ergódica. Fonte: Autor.

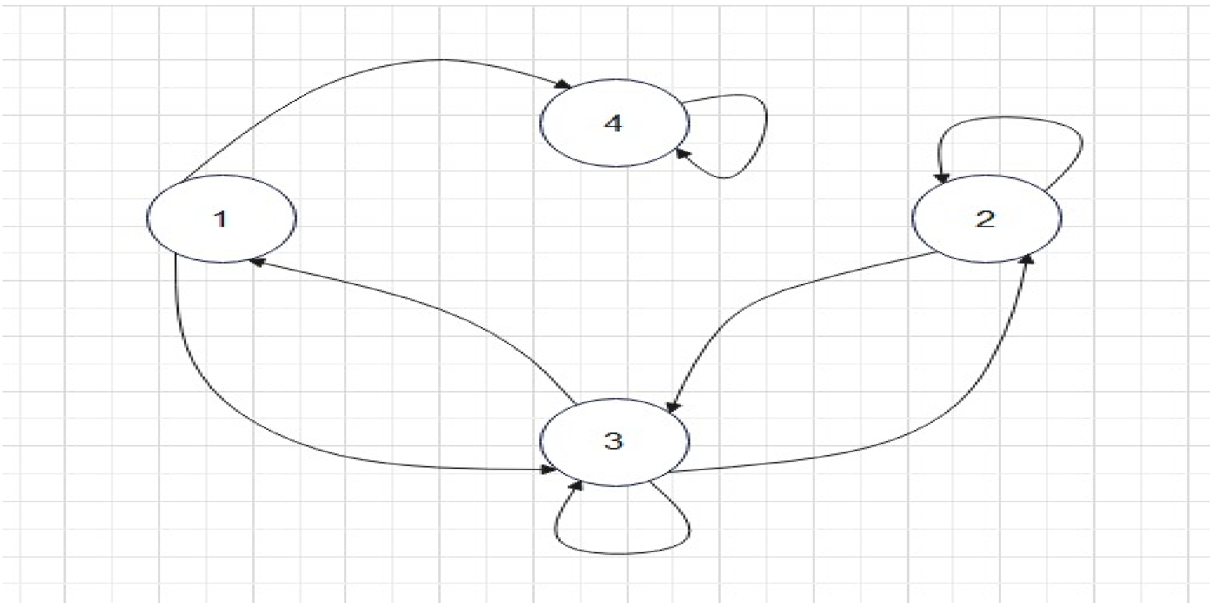

Figura 11 – Esquema com as probabilidades para uma cadeia não ergódica. Fonte: Autor.

Assim podemos ver que na figura 10 todos os estados chegam em outro estado tornando-a uma cadeia ergódica, já na figura 11 vemos que do estado 4 não da para chegar em nenhum outro portanto não é uma cadeia ergódica, porém é uma cadeia absorvente como visto anteriormente.

Exemplo 3.12. Um rato branco é colocado no labirinto da Figura 11. Existem nove salas que o rato pode transitar e em cada sala existem conexões entre ela e as demais como indicado na Figura 12. O rato pode se mover aleatoriamente entre as salas. Assim podemos dizer que ele tem k maneiras de sair de qualquer sala, e essas escolhas possuem uma probabilidade. É possível representar como uma cadeia de Markov as possíveis transições do rato tendo como matriz de transição dada por:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos notar que essa cadeia não é regular pois se partimos de um estado ímpar seus passos serão apenas para os estados pares, e se partimos de um estado par iremos apenas para um estado ímpar. Portanto iniciando no estado i o processo estará alternadamente nos estados pares e ímpares. Assim, as potências ímpares de P terão 0 para as entradas ímpares na linha 1. Porém se olharmos o labirinto podemos ver que é possível sair de qualquer estado e chegar em qualquer outro estado, tornando-a uma cadeia ergódica.

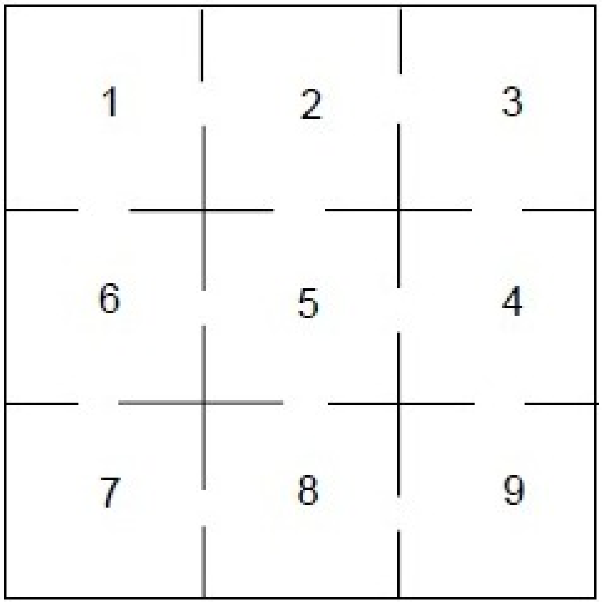

Figura 12 – Problema do Labirinto Fonte: Autor.

Como para achar o nosso vetor vamos ter que resolver 10 equações com 9 incógnitas. Assim, usaremos o fato de que os tempos gasto em cada compartimento devem, a longo prazo, serem proporcionais ao número de entradas para cada compartimento. Assim, podemos tentar encontrar o vetor cuja j-ésima componente é o número de entradas para o j-ésimo compartimento, portanto podemos dizer que:

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim é fácil mostrar que esse vetor é um vetor fixo, de modo que o único se dá quando normalizamos x, que se dá pela divisão de cada elemento pela soma deles. Portanto teremos: soma dos elementos de $x = 2+3+2+3+4+3+2+3+2 = 24$ Agora vamos dividir obtendo:

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar se w é realmente o único vetor fixo utilizando o Teorema 3.7 onde faremos $wP = w$,assim teremos:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

e realizando as multiplicação do vetor pelas colunas da matriz encontraremos o seguinte resultado:

$$wP = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Assim provamos que w é o único vetor de probabilidade fixo de P.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto nesse trabalho vimos que as cadeias de Markov são sequências numéricas que serão representadas pelas matrizes de probabilidades onde seus elementos serão as probabilidades de algo acontecer, foi apresentado também que é possível desenvolver um vetor que terá como principal função ser a representação da matriz probabilidade. Também foi possível aprender sobre alguns principais tipos de cadeias de Markov como as cadeias Absorventes.

As cadeias absorventes são todas as cadeias que possuem um estado absorvente e que podem atingir esse estado partindo de qualquer outros estado. Dessa forma foi possível aprender formas diferentes de representa-las como a forma canônica, descobrir a quantidade de passos para que a cadeia seja absorvida a partir do estado estado que iniciou e que é possível ter uma probabilidade para que os estado sejam absorvidos.

E por fim estudamos também as cadeias Ergódicas e regulares. No qual aprendemos que para uma cadeia ser ergódica é necessário que seus estados possam passar para qualquer outro estado e que para ser regular é necessário que suas matrizes de transições não tenham zeros. Foi visto também que uma cadeia ergódica é regular mas nem toda cadeia regular é ergódica. Aprendemos que as matrizes de transições tendem a ter suas linhas iguais e consequentemente suas colunas ficam constantes quando o tempo passa a tender ao infinito, assim poderemos descobrir qual são os valores das linhas dessas matrizes pelo calculo no qual o seu resultado é um vetor, chamado vetor fixo.

O capítulo 4 do livro que tivemos como inspiração para a construção desse trabalho é um capítulo de aprofundamento nas provas dos teoremas do capítulo 3. Dessa forma, seria de grande relevância realizar uma continuação para que tenhamos um estudo de forma minuciosa sobre os capítulos 4 e 5 desse livro para que aqueles que procuram aprender sobre as cadeias de Markov tenham um documento mais fácil de ser assimilado de forma semelhante a esse que está sendo apresentado.

Referências

1 Frondana, Iara Moreira. **Classificação de Biopotenciais Via Cadeia de Markov Ocultas**. Orientador: George Freitas von Borries. 2012. Dissertação (Mestrado) - Estatistica, Universidade de Brasília.

2 GRINSTEAD, Charles M.; SNELL, J. Laurice. **Introduction to Probability**. 2. ed. rev. [S. l.]: American Mathematical Society, 1997

3 Nascimento, Moysés. **O USO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO VIA CADEIA DE MARKOV NO MELHORAMENTO GENÉTICO**. Orientador: Cosme Damião Cruz. 2009. Dissertação (Pós-Graduação) - Estatística Aplicada, Universidade Federal de Viçosa.

4 Petrielli, Adriana. **Reamostragem Ponderada em Blocos para Cadeias de Markov**. 2004. Dissertação (Mestrado) - Estatística, Universidade de São Paulo.

5 Carneiro, Felipe Ribeiro. **Cadeias de Markov: Tempo de Mistura, Cuttoff e Redes**. Dissertação (Pós-Graduação) - Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo.