



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE
MODELO DE UM SISTEMA AXIOMÁTICO PARA UMA GEOMETRIA DE
INCIDÊNCIA

NAYARA SUYANNY DE OLIVEIRA LOPES

RECIFE
2017

NAYARA SUYANNY DE OLIVEIRA LOPES

**UM ESTUDO SOBRE ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE
MODELO DE UM SISTEMA AXIOMÁTICO PARA UMA GEOMETRIA DE
INCIDÊNCIA**

Dissertação de mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em
Educação Matemática e Tecnologia da
Universidade Federal de Pernambuco
como requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Educação
Matemática e Tecnologia.

Orientador: Profº Dr. Paulo Figueiredo
Lima.

RECIFE

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Katia Tavares, CRB-4/1431

L864e

Lopes, Nayara Suyanny de Oliveira.

Um estudo sobre o ensino e aprendizagem do conceito de modelo de um sistema axiomático para uma geometria de incidência. / Nayara Suyanny de Oliveira Lopes. – Recife, 2017.

94 f.: il.

Orientador: Paulo Figueiredo Lima.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2017. Inclui Referências.

1. Método lógico-dedutivo. 2. Sistema axiomático. 3. Professores - Formação. I. Lima, Paulo Figueiredo. (Orientador). II. Título.

370 (23. ed.)

UFPE (CE2023-002)



NAYARA SUYANNY DE OLIVEIRA LOPES

**UM ESTUDO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE
MODELO DE UM SISTEMA AXIOMÁTICO PARA UMA GEOMETRIA DE
INCIDÊNCIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a conclusão do Mestrado em Educação Matemática e Tecnologia.

Apresentado em: 24/05/2017.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Presidente e Orientador
Prof. Dr. Paulo Figueiredo Lima
UFPE

Examinador Externo
Prof. Dr. Airton Temístocles Gonçalves de
Castro
UFPE

Examinador Interno
Prof. Dr. Franck Gilbert René Bellamain
UFPE

Recife, 28 de abril de 2017.

AGRADECIMENTOS

A gratidão é a linguagem das almas esposas. Essa é uma expressão recorrente no interior da Comunidade Católica Shalom, porque reconhecemos o nada que somos e a grandeza de Deus em nossas vidas.

Sou grata a Deus, autor da vida, porque no Seu amor e misericórdia me conduziu até aqui, abriu as portas da Sua Divina Providência e cuidou/cuida de mim, não permitindo que nada me faltasse.

Agradeço aos meus pais, Norivan e Simone, que sempre lutaram por minha educação, fazendo dela uma alavanca para meu sucesso profissional. Eles, com amor, dedicação, esforço, sempre foram amparo na minha caminhada, não só humana, mas também profissional. Dedico-lhes, carinhosamente, esta dissertação, porque, mesmo à distância, contribuíram com palavras de incentivo para o sucesso desta missão. Por meio deles, envio meu reconhecimento, também, a toda minha família, que apostou na minha saída de casa em busca de crescimento profissional. De modo particular, sou grata à minha avó materna Argemira, minha tia Marta, seu esposo Antônio Laurindo, meu primo Antônio Filho e à minha prima Rosângela.

Gratidão, também, vai para meu irmão, Nickson Saymon, que sempre esteve na primeira cadeira, aplaudindo de pé tudo que construí até aqui. Como já disse em outras ocasiões, não tenho nem ouro nem prata, mas o que tenho dedico a você: todo o meu amor e conhecimento adquirido até aqui. Você faz parte desse trabalho. Foram essenciais para mim, todas as palavras de incentivo dadas durante o período de ausência, diante das dificuldades desse tempo. A você, também, dedico este trabalho.

Sou grata à família que ganhei em terras pernambucanas, Marcos, Maria Rita, Micael, Márcio, por me acolherem em sua casa e, mais que isso, em suas vidas, como filha e como irmã. Todo o esforço e sucesso deste trabalho também dedico a vocês.

Sou reconhecida, de forma particular, ao prof. Dr. Paulo Figueiredo, meu querido orientador, que com sua paciência e sabedoria me conduziu até aqui, à conclusão desta dissertação. Os desafios foram muitos, desde as mudanças de tema até à parte experimental da pesquisa. Valeu a pena ter recommçado a

dissertação diversas vezes. Sou eternamente grata ao seu esforço, professor, em me ajudar na elaboração deste trabalho. Conte com minhas orações.

Agradeço aos professores da banca de defesa, que dedicaram tempo à leitura do trabalho, ao prof. Dr. Airton Castro, ao prof. Dr. Franck Bellemain, à prof^a. Dra. Cibelle Assis. A contribuição de vocês fará a diferença no resultado final desta pesquisa.

Com o coração cheio de gratidão e alegria, dirijo-me aos meus irmãos da Comunidade Católica Shalom da missão do Recife, pela acolhida, pelo amor, por todas as partilhas de vida, por serem canais de Deus na minha vida, neste tempo novo. Sou reconhecida aos formadores que me acompanham, até hoje, neste tempo de formação profissional, de maneira particular, a Cristiane Maria, Juliana Keyt e Silke Neylane.

Agradeço aos meus irmãos da Comunidade de Vida, que me acolheram na casa comunitária com tanto amor, cuidado, zelo e comunhão, ensinando-me a sempre ter o olhar fixo em Deus como primazia na caminhada. No nome de Vitória Letícia, sou grata a todos, pelas partilhas de vida, as convivências fraternas, os almoços comunitários, mostrando-me a alegria da vida compartilhada.

Dedico meus agradecimentos aos meus irmãos da Comunidade Católica Shalom da missão de Mossoró, minha terra natal, por toda a abertura e escuta da vontade de Deus para minha vida, diante do novo tempo de sair da casa paterna para me lançar na aventura da vida missionária. Nas pessoas de Uelton Daltro e Nalígia Brito, agradeço a todos que acompanham minha trajetória e intercedem por mim. Obrigada irmãos, vocês são caros na minha vida.

Sou muito agradecida aos colegas de mestrado da turma de 2015 pelas trocas de experiências, durante as disciplinas cursadas, pela convivência para suavizar o estresse das exigências acadêmicas. Vocês fizeram a diferença na minha caminhada profissional e humana.

Dirijo, também, minha gratidão, a toda equipe do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, a Clara e Mário pela paciência e disponibilidade em ajudar, aos mestres que muito contribuíram no meu processo formativo, de maneira particular, a Prof^a. Dra. Verônica Gitirana, pelas palavras de apoio, durante esta trajetória e pela acolhida como sua estagiária; aos professores da linha de Didática da Matemática; a todos os que

deram suas contribuições a esta pesquisa; de modo particular, a prof^a Dra. Paula Baltar, por todas as contribuições, pelo olhar atento e de cuidado, diante dos prazos estabelecidos, pelas palavras de incentivo e por seu olhar de pesquisadora que enriqueceu nossa forma de coleta.

Na minha caminhada profissional contei sempre com a amizade, o apoio e os ensinamentos da prof^a Dra. Graciana Dias. A você, também, ofereço este trabalho, porque me acompanhou, desde a graduação, e viu meu esforço para ser melhor. A profissional que sou hoje, devo também a você, minha mestra e amiga.

Com gratidão, refiro-me aos professores e dirigentes do campus da universidade do Nordeste que acolheu a realização desta pesquisa. Em particular, sou grata aos cinco estudantes que, prontamente, se dispuseram a ser sujeitos desta investigação. Obrigada por tudo, a disponibilidade, as conversas, as cinco tardes “gastas” para a obtenção dos dados aqui apresentados.

Dedico gratidão profunda ao meu grupo de oração, Família Ronaldo Pereira. Por meio de vocês, envio meus agradecimentos a todos os jovens que passaram em minha vida, enquanto estive em solo pernambucano. Caminhar com vocês durante este tempo, deu todo o sentido à minha oferta de vida, diante da missão que Deus me confia como Carisma Shalom.

Agradeço a minhas irmãs de Casa da Aliança, Irenylle Patrício, Emanuela Lima e Paula Tarcíla, Casa da Aliança, com quem aprendo a alegria da vida comunitária, a alegria de viver em comunhão. Obrigada por todas as partilhas, por todas as convivências, por todas as vezes que me incentivaram a continuar e persistir na caminhada. Obrigada por me ajudarem a entender o meu papel de mulher consagrada a Deus.

Por fim, mas não menos importante, reconhecida aos meus amigos. Diz-se que quem encontrou um amigo encontrou um tesouro, e como sou feliz por ter tamanho tesouro que são vocês! Obrigada Wemerson pelo apoio, pelas palavras, por todo o incentivo de sempre persistir no que Deus tem para minha vida dentro da minha profissão. Obrigada Gean, por sua alegria de me ensinar a ser melhor. Obrigada Carol por ser a grande incentivadora da minha permanência na vontade de Deus. Obrigada, Thaís por suas palavras motivadoras durante esta caminhada, além de toda a ajuda com a metodologia

desta dissertação. Obrigada Fillipp, Larissa, Erialdo, Pollyanna, Milton, Natália, Marcela, por tornarem este período um tempo leve e tranquilo de ser vivido. Sou grata pela amizade de vocês.

Não poderia deixar de agradecer à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudos viabilizando minha permanência na cidade do Recife e na continuidade dos meus estudos na pós-graduação.

Ninguém consegue chegar ao conhecimento das coisas divinas e humanas se antes não aprendeu matemática solidamente.

Santo Agostinho

RESUMO

Estudos acadêmicos têm defendido o ensino do método lógico-dedutivo, amparados em argumentos da epistemologia e da didática. Na vertente da didática do método lógico-dedutivo, destacam-se os subsídios dos trabalhos de Balacheff (apud Almouloud, 2007). Há, além disso, outras pesquisas na área de Educação Matemática nas quais se defende, com muita clareza, o ensino do método dedutivo nos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Têm observado, em contrapartida, deficiências nos egressos dos cursos que foram alvo de suas investigações. Em concordância, com essas constatações, o objetivo deste trabalho é o de contribuir com a discussão do tema, julgado relevante e oportuno. Trata-se de estudo sobre o ensino e a aprendizagem de um tema específico: o método axiomático. Mais especificamente ainda, o estudo é centrado no conceito de modelo de um sistema de axiomas e, para adequar-se aos limites adequados a uma dissertação de Mestrado, escolhemos um sistema axiomático para a geometria plana de incidência. Como método, recorreremos a uma pesquisa-intervenção exploratória, dividida em duas etapas. Em uma primeira fase, elaboramos um texto versando sobre o citado tópico, tomando como aporte teórico Millman & Parker (1991) e suposto como um material pouco usual nos cursos de licenciatura; em seguida, foi ministrado um curso de curta duração tomando o material produzido como texto base. O grupo que integrou o minicurso foi constituído por nós, como pesquisadora, e por cinco estudantes de um curso de licenciatura. Os encontros do minicurso foram caracterizados por serem ocasiões de trabalhos interativos e colaborativos, acompanhados de registros escritos dos eventos e de gravação em áudio dos diálogos ocorridos. Tais observações-participantes forneceram o material para a análise posterior e a formulação de conclusões desta investigação.

PALAVRAS-CHAVE: Método lógico-dedutivo; sistema axiomático; modelo; formação do professor.

ABSTRACT

Academic studies have defended the teaching of the logical-deductive method, supported by arguments from epistemology and didactics. In the didactic aspect of the logical-deductive method, the subsidies of Balacheff's (apud Almouloud, 2007) works stand out. There is, in addition, other research in the area of Mathematics Education in which the teaching of the deductive method is very clearly defended in the university courses for Mathematics teachers. On the other hand, they have observed deficiencies in the graduates of the courses that were the target of their investigations. Accordingly, with these findings, the objective of this paper is to contribute to the discussion of the topic, deemed relevant and timely. This is a study on teaching and learning a specific topic: the axiomatic method. More specifically, the study is centered on the concept of model of a system of axioms and, to adapt to the appropriate limits for a Master's thesis, we chose an axiomatic system for plane incidence geometry. As a method, we resort to exploratory research-intervention, divided into two stages. In a first phase, we elaborated a text dealing with the mentioned topic, taking as theoretical contribution Millman & Parker (1991) and supposed as an unusual material in undergraduate courses; then, a short course was given taking the material produced as the base text. The group that participated the short course was made up of us, as a researcher, and five students from a degree course. The short course meetings were characterized by being occasions for interactive and collaborative work, accompanied by written records of the events and audio recording of the dialogues that took place. Such participant observations provided the material for further analysis and the formulation of conclusions of this investigation.

KEYWORDS: Logical-deductive method; axiomatic system; model; university courses for Mathematics teachers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Imagem do quadro da sala de aula: axiomas propostos por David Hilbert.....	41
Figura 2. Diagrama da demonstração da proposição 5.....	50
Figura 3. Solução da atividade 4 apresentada pela Estudante 3.....	56
Figura 4. Resolução da atividade 8 segundo o registro da Estudante 3.....	62

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	QUADRO TEÓRICO	22
2.1	AS QUESTÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO RACIOCÍNIO DEDUTIVO	22
2.2	BREVES COMENTÁRIOS SOBRE O MÉTODO AXIOMÁTICO	24
2.3	UMA GEOMETRIA PLANA DE INCIDÊNCIA.....	26
2.4	O CONCEITO DE MODELO	29
2.5	O CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA	30
3	OBJETIVOS.....	32
3.1	OBJETIVO GERAL.....	32
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	32
4	METODOLOGIA	33
4.1	BREVES COMENTÁRIOS SOBRE O CAMPO DA PESQUISA	35
4.2	SUJEITOS DA PESQUISA.....	36
4.3	PROCEDIMENTOS.....	37
5	REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO.....	38
5.1	PRIMEIRO ENCONTRO	38
5.2	SEGUNDO ENCONTRO.....	40
5.3	TERCEIRO ENCONTRO	45
5.4	QUARTO ENCONTRO.....	57
5.5	QUINTO ENCONTRO	60
5.6	ANÁLISE SUMÁRIA DOS ENCONTROS.....	63
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
	REFERÊNCIAS.....	71

ANEXO A – MATERIAL DIDÁTICO	75
--	-----------

1 INTRODUÇÃO

Para muitos, a Matemática nos remete a raciocínio lógico e a demonstrações. Embora essa concepção não dê conta de todas as características desse campo do conhecimento, é inegável o papel que o raciocínio dedutivo desempenha na Matemática.

Reconhecendo essa importância, as recomendações curriculares e os documentos associados à avaliação de livros didáticos dedicam bastante atenção ao desenvolvimento da competência de dedução lógica na formação da Matemática básica. A esse respeito, convém consultar BRASIL (1998), BRASIL (2000), BRASIL (2002), BRASIL (2011) e BRASIL (2012).

Em particular, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio, indica-se que o professor elabore estratégias para desenvolver no estudante a capacidade de resolver questões envolvendo o emprego do raciocínio lógico-dedutivo, como uma competência relevante:

É importante que o estudante perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000, p. 40-1).

Na literatura de educação matemática, tem havido questionamentos sobre o ensino das demonstrações nos cursos de Licenciatura em Matemática visto que, nesses, estão sendo formados os futuros docentes que atuarão na Educação Básica. Dessa forma, as questões relativas ao ensino e à aprendizagem do raciocínio dedutivo em Matemática, justificadamente, devem ser investigadas nas licenciaturas em Matemática. Nos parágrafos seguintes, procuramos estabelecer os contornos dessa problemática.

Alguns estudos como o de Sousa (2010) e Lopes (2014) apontam a necessidade de os licenciandos aprenderem a demonstrar e não serem meros reprodutores de técnicas e métodos de prova.

Sousa (2010, p. 16) afirma que existem “[...] lacunas no ensino de demonstrações em Matemática, [...] em especial, a necessidade de se trabalhar com a linguagem e com as demonstrações de forma mais detalhada”. Segundo a autora, os estudantes se prendem a métodos utilizados pelos próprios

professores, gerando réplicas daquilo que foi ensinado sem saberem dar significado aos conceitos e procedimentos matemáticos.

Em consonância com essa afirmação, Lourenço (2002) recorre à sua experiência como um estudante, que era mero reprodutor das demonstrações feitas em sala pelo professor. Ele deixa claro que é notória a necessidade de se demonstrar resultados, mas

[...] a forma segundo a qual se faz, na medida do possível, deve ser revista, sobretudo quando se trata de ensino, uma vez que a simples observação constata que essas demonstrações se mostram destituídas de significado para os estudantes. (LOURENÇO, 2002, p. 101).

Neves e Fávero (2010) apontam que, até mesmo na educação básica, essa ideia de reprodução está presente. Essas autoras enfatizam que,

[...] na escola, o ensino, em sua maioria, ainda, é praticado sob a ótica da transmissão de conhecimento dos professores aos estudantes e que estes continuam como meros repetidores de procedimentos apresentado pelo professor para a resolução das atividades. Ademais, indicam que os conteúdos são apresentados “em caixinhas”, separados uns dos outros, de modo que os estudantes não percebem as filiações entre os diferentes conceitos. (p.06).

O depoimento das autoras encontra eco em nossa experiência como estudante: endossamos a constatação dessa mera reprodução daquilo que é ministrado, destituído de significados. E mais, é concebível que esse quadro insatisfatório, prolongue-se na vivência dos futuros professores.

Outros autores reforçam o quadro acima descrito, é o caso de (SOUSA, 2010):

[...] se torna necessário o desenvolvimento de pesquisas que visem colaborar com o melhor entendimento das práticas de demonstrações, tanto por professores de Matemática, quanto por estudantes, em especial, estudantes que estejam no Ensino Superior, possibilitando-lhes perceber a importância das demonstrações, compreenderem seus significados e saberem utilizar técnicas para provar leis matemáticas, tendo como base a apropriação de uma linguagem própria. (SOUSA, 2010, p. 17-18).

Segundo Kirnev (2012, p.12) “para estudar Matemática, exige-se a compreensão e o relacionamento de sentenças e conteúdos, as demonstrações corroboram para isso.”. No entanto, a referida autora indica que os estudos relativos ao ensino de demonstrações matemáticas ainda são pouco frequentes no Brasil.

Almouloud (2007) destaca a importância de, antes de compreender o que os estudantes sabem das demonstrações, é necessário entender o que os professores aprenderam quanto ao assunto: “Qual é o nível de compreensão que professores da rede pública possuem a respeito desses processos matemáticos, como teoremas, provas e deduções?”.

Pires (2002) ao mencionar as *Competências específicas de um professor que ensina Matemática*, inclui:

- Conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação.
- Comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens.
- Compreender noções de conjectura, teorema, demonstração.
- Examinar as consequências do uso de diferentes definições.
- Analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas.
- Decidir sobre a razoabilidade de um resultado de cálculo, usando o cálculo mental, exato e aproximado, as estimativas, os diferentes tipos de algoritmos e propriedades e o uso de instrumentos tecnológicos.
- Explorar situações problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica.
- Ter confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas.
- Apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática.

(PIRES, 2002, p. 47)

Convém observar que, no elenco de nove competências citadas, cinco delas têm relação direta com o raciocínio lógico-dedutivo. Isso é uma evidência da importância desse tipo de raciocínio na formação matemática dos estudantes e, conseqüentemente, dos professores que ensinam matemática.

Em sua pesquisa, Pietropaolo (2005) faz uma proposta para “(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação

de professores de Matemática”, apoiado em diversificadas fontes documentais e entrevistas com professores. Entre suas conclusões indica um consenso entre os educadores entrevistados, no qual se considera:

[...] a “prova” como conteúdo e como um recurso pedagógico bastante rico nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, desde que se admita um sentido mais amplo para essa palavra. Não caberia a simples reprodução – pelo estudante ou professor – das provas presentes nos livros envolvendo, assim, experimentações, conjecturas, argumentações. Mas, para tal, o professor precisaria ter uma formação que levasse em conta esse princípio. (PIETROPAOLO, 2005, p. 09-10).

É consenso que as provas e/ou demonstrações são essenciais como forma de validação das proposições matemáticas. Como afirma Mello (1999, p.26): “A *demonstração* ocupa em Matemática, um lugar central porque é o método de prova que caracteriza essa disciplina no meio das ciências”. Resulta disso que é plenamente justificável que sejam desenvolvidas atividades de formação que visem ao desenvolvimento dessa competência nos estudantes de Licenciatura em Matemática. Ainda Mello (1999, p. 28) afirma que “O método demonstrativo consiste em se apoiar sobre regras, operar por dedução, isto é, demonstrar”.

Para Mortari (2001, p. 227) “[...] certas proposições são *provadas*, ou *demonstradas*, ao se mostrar que elas se seguem logicamente de algumas outras cuja verdade já foi estabelecida.”.

Na mesma direção, Gravina (2001, p. 64) adiciona: “demonstrar uma propriedade geométrica significa estabelecer sua veracidade através de argumentação lógico-dedutiva, apoiando-se nos axiomas e nos teoremas da mesma forma já demonstrados.”.

Em uma perspectiva mais ampliada, Garnica (2002) afirma que “[...] a prova rigorosa é tida como elemento fundamentalmente importante para a formação de professores.” (p.93). Para o autor, há uma nítida convergência nos discursos de professores que atuavam em cursos de Licenciatura em Matemática levando ao que ele chama de dois terrenos de leitura, os campos da técnica e da crítica, sendo o primeiro situado na produção científica e o segundo na Educação Matemática. Em suas palavras:

[...] a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica da Matemática, seria fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da “ideologia da certeza” para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais. (GARNICA, 2002, p. 94).

Segundo essa visão crítica do estudo das demonstrações em sala de aula nas Licenciaturas em Matemática, seria possível formar professores mais críticos e reflexivos nas suas práticas reais, o que propiciaria estudantes mais bem formados e com mais prazer em aprender Matemática.

Também Ferreira, Soares e Lima (2009) afirmam que

A Matemática, de forma ímpar, por ser uma ciência derivada do pensamento puro, constitui-se essencialmente em um processo de construção mental. Suas atividades se caracterizam pela formulação de conjecturas que se validam quando acompanhada das devidas demonstrações. E a resolução de seus problemas, especialmente em Geometria, pode requisitar a utilização de demonstrações. É natural, portanto, que se considere de suma importância a convivência e a prática das demonstrações por professores e estudantes, no processo educativo. (p. 186).

Ora, como os autores afirmam, as demonstrações são atividades ligadas à Matemática e cabem aos professores, no caso desta pesquisa, os futuros professores de Matemática a convivência e a prática com esses métodos.

No âmbito dos documentos oficiais, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) preconiza-se que

[...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os estudantes não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o estudante reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, 1998, p.71).

Por sua vez, o Guia de Livros Didáticos do PNLD 2012 traz, ainda, o comentário:

Desde a Grécia Antiga, o método axiomático-dedutivo foi progressivamente tornando-se o único aceito, na comunidade científica, para comprovação de um fato matemático. Os conceitos de axioma, definição, teorema, demonstração são o cerne do método. Convém ressaltar, no entanto, que se trata de um método de organização e de validação. (BRASIL, 2011, p.24).

No âmbito internacional, em pesquisas com a de Rodrigues (2012) a autora observa que o estudo das demonstrações “ocupou, durante muito tempo, um lugar de reduzida importância no currículo, quer a nível prescritivo quer a nível de concretização na prática.” (p. 57). A pesquisa foi realizada em Portugal, onde se verificou crescente valorização da demonstração, por parte da comunidade da Educação Matemática.

Neste trabalho, a autora afirma que, no ensino das demonstrações na Educação Básica, é possível ver que se:

[...] valoriza explicitamente o raciocínio matemático e a demonstração, em particular, encarando a sua aprendizagem como um processo evolutivo ao longo da escolaridade, de forma transversal a todos os domínios temáticos, em que as crianças começam por justificar as conclusões com base em exemplos particulares, evoluindo para justificações gerais. (RODRIGUES, 2012, p.57).

A mesma autora cita uma pesquisa de Harel e Sowder (2007) acerca do panorama internacional que mudou muito pouco quanto a isso. Ela diz que esses autores:

[...] apresentando o estado de arte atual relativamente à demonstração na educação Matemática, referem os resultados obtidos [...] incidentes nas práticas profissionais dos professores relativamente à demonstração, os quais indicam que a maioria dos professores não reserva tempo das suas aulas ao ensino da demonstração. Evidenciam ainda que a maioria dos docentes não encara a demonstração como sendo central na educação Matemática, considerando-a adequada apenas a uma minoria de estudantes. (RODRIGUES, 2012, p.57).

Um marco obrigatório sobre o tema da demonstração em Matemática é o trabalho de Balacheff (1982), *Um estudo dos processos de provas em matemática: entre estudantes* (tradução nossa). O estudo original de Balacheff

desdobrou-se em muitas de suas pesquisas e, dele deriva, entre outras ideias fecundas, a diferenciação entre **explicação**, **prova** e **demonstração**. Seus trabalhos posteriores sobre o tema podem ser acompanhados em extensa lista de referências, entre as quais: Balacheff (1982), (1987), (2004).

Do breve relato dos trabalhos que investigam as questões de ensino e aprendizagem do raciocínio dedutivo em Matemática, fica evidente a amplitude e a complexidade desse tema. Nos limites desta dissertação, somos levados a nos restringir a uma parte muito limitada da problemática aqui esboçada.

Em primeiro lugar, nosso foco será o ensino e a aprendizagem do **conceito de modelo de um sistema axiomático para uma geometria plana de incidência**. E mais, optamos por realizar nosso trabalho empregando a modalidade de pesquisa qualitativa denominada, por alguns estudiosos, de **pesquisa-intervenção**. Na verdade, realizamos um minicurso com um grupo de cinco estudantes de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública. A parte teórica consistiu no estudo de um texto base elaborado por nós, sobre o tema escolhido. Os dados empíricos consistiram no registro parcial das interações ocorridas, durante cinco encontros, em um grupo de trabalho interativo e colaborativo, composto por nós, como pesquisadora/coordenadora e esses cinco estudantes. Tais registros propiciaram as análises e as considerações finais do trabalho. A descrição de nossas escolhas e as justificativas esboçadas para elas serão tratadas nos capítulos seguintes desta dissertação.

Após a apresentação da problemática, nesta Introdução, delineamos o aporte teórico básico do trabalho, no segundo capítulo. Em primeiro lugar, discutimos algumas das ideias centrais de Balacheff (1982), segundo Almouloud (2007). Em seguida discorreremos, de modo resumido, sobre sistemas axiomáticos em geometria e sobre o texto didático que serviu de base para o minicurso realizado com os sujeitos do trabalho.

No Capítulo 3, apresentam-se os objetivos gerais e específicos da investigação.

Uma descrição da metodologia de pesquisa empregada é o conteúdo do Capítulo 4, seguido do capítulo de análise dos dados obtidos. As Considerações Finais encerram o corpo principal do trabalho, que inclui as referências

bibliográficas em sua parte pós-textual. Ainda nesta parte, há um anexo em que se apresenta o texto didático básico do minicurso.

2 QUADRO TEÓRICO

2.1 AS QUESTÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM DO RACIOCÍNIO DEDUTIVO

No âmbito da literatura científica em língua portuguesa, tomamos como fonte básica o já citado trabalho de Almouloud (2007). Nele podemos encontrar a discussão das ideias originais de Balacheff (1988; 2004) bem como a de outros pesquisadores sobre o tema da demonstração em Matemática e do ensino e aprendizagem dessas demonstrações.

Iniciando as discussões acerca do ensino e aprendizagem das demonstrações, Almouloud (2007) propõe a seguinte definição: “[...] demonstração consiste num procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina” (p. 02).

Para Balacheff (1988 *apud* Almouloud 2007) há uma diferenciação entre explicação, prova e demonstração. Faz-se necessário entender cada um desses conceitos para compreender o raciocínio utilizado pelos sujeitos, sejam eles estudantes de séries iniciais, sejam estudantes de graduação.

A *explicação* situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição “verdadeira” ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração. (ALMOLOUD, 2007 p. 02-3).

Adiante, o conceito de provas trazido pelo autor consiste em,

As *provas* são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. (ALMOLOUD, 2007 p.03).

Balacheff (2004) expressa preocupação com um fator pouco considerado em outras pesquisas, a questão da escrita. Alguns autores destacam a dimensão epistemológica, enquanto Balacheff amplia o enfoque para incluir a capacidade de provar e de redigir uma prova. Isso traz à tona a questão da linguagem, fator de suma importância e fonte de dificuldades evidenciadas por estudantes.

Quanto aos níveis de provas, Almoloud (2007) apoiado em Balacheff (1988) considera dois níveis de provas: as pragmáticas e as conceituais. Estas últimas, por sua vez, agrupadas em quatro categorias: empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico e experimento de pensamento:

- *Empirismo ingênuo*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.
- *Experimento crucial*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso específico, geralmente não familiar.
- *Exemplo genérico*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos.
- *Experimento de pensamento*: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos. (ALMOLOUD, 2007 p. 04).

De Villiers (2002) (Apud Almoloud, 2007) aponta que, no ensino da matemática consideram-se as demonstrações como um recurso para eliminar as dúvidas. No entanto, este autor alerta que as demonstrações têm muitas outras funções em matemática:

- i) **Verificação**: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
- ii) **Explicação**: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
- iii) **Descoberta**: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;
- iv) **Comunicação**: negociação do significado de objetos matemáticos;
- v) **Desafio intelectual**: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
- vi) **Sistematização**: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas. (ALMOLOUD, 2007 p.05).

2.2 BREVES COMENTÁRIOS SOBRE O MÉTODO AXIOMÁTICO¹

Iniciamos por discutir alguns aspectos gerais do método axiomático-dedutivo. A respeito desse método, no Guia de Livros Didáticos (2011), escreve-se:

De maneira muito simplificada, o método axiomático consiste em adotar **conceitos primitivos** (conceitos não definidos, tais como ponto, reta e plano) e **axiomas** (proposições não demonstradas, como “*Por dois pontos passa uma única reta*”). Estes representam os papéis das “peças do jogo” e das “regras do jogo”, respectivamente. Tanto umas como as outras são aceitas, sem necessidade de justificativas, para que se possa começar a “jogar”. Com base nesses elementos, **por via puramente lógica**, são definidos **conceitos derivados** (por exemplo: ângulo, quadrado, paralelismo de retas no espaço etc.) e são deduzidas proposições que são os **teoremas**, como o de Pitágoras. (BRASIL, 2011, p. 25).

Na mesma linha de ideias, Sant’Anna (2003) defende que o “[...] *método axiomático* utilizado para expor a geometria se estabeleceu por milênios, e até os dias de hoje é uma excelente ferramenta didática [...]” (p.01).

Mas o que seriam axiomas, postulados e teoremas, elementos que compõem o método axiomático?

Sobre axioma Hegenberg (1995) esclarece que:

Nos livros da Antiguidade Clássica, era habitual distinguir axiomas e postulados (grifos do autor). Axiomas seriam “verdades gerais”, independentes do tema em foco, aplicáveis em quaisquer casos. De outra parte, postulados seriam “verdades temáticas”, ou seja, verdades específicas, aplicáveis em circunstâncias determinadas e limitadas. [...] Em tempos modernos, mostrou-se que muitas “verdades” julgadas incontestáveis eram, surpreendentemente, inaplicáveis em certos domínios. [...] Diante disso, deixa de haver diferença plausível entre axiomas e postulados, de modo que os dois termos passam a ser utilizados indiferentemente, quase na condição de sinônimos. (loc. cit., p. 18).

Para o mesmo autor teorema é “qualquer proposição deduzida de axiomas (de uma teoria axiomática), sem uso de outro tipo de premissas.” (HEGENBERG, 1995, p. 208)².

Podemos citar também o que Manfio (p. viii-ix) afirma ser um sistema axiomático, para este autor,

¹ Parte das seções que se seguem é incorporada ao texto didático utilizado no minicurso que compôs esta pesquisa-intervenção.

² Neste texto, usaremos o termo ‘postulado’ como sinônimo de ‘axioma’.

[...] Consiste num conjunto de *verdades* acerca de uma determinada realidade, organizado de tal forma que todos os conceitos são definidos a partir de alguns poucos conceitos básicos, chamados *termos primitivos*, os quais não se definem e que são conhecidos intuitivamente. Esses conceitos são, então, articulados por meio de algumas proposições primitivas, chamados *axiomas*, que não se demonstram, pois sua veracidade é evidente pela intuição que temos acerca do domínio de estudo. As demais proposições, os *teoremas*, são, então, obtidos por demonstração a partir dos axiomas. Além disso, um sistema axiomático deve satisfazer três condições seguintes: ser *consistente*, ou seja, os axiomas não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas consequências; deve ser *completo*, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; por fim, cada axioma deve ser *independente* dos demais, no sentido de que não é consequência deles sob pena de ser supérfluo.

Antes de prosseguir, cabem algumas considerações adicionais sobre o método axiomático. Nos níveis de maior sistematização da Matemática, suas afirmações podem ser todas escritas na forma “Se p , então q ”, p e q representando duas proposições. Uma proposição deste tipo é chamada de **condicional**. Na proposição condicional representada acima, dizemos que p é a hipótese e q é a tese. A seguir, dois exemplos simples:

- a) Se um número natural n é múltiplo de 4, então n é par.
- b) Se um número natural n é par, então n é múltiplo de 4.

Uma demonstração, ou prova, em Matemática, é uma sequência finita de passos lógicos que permite partir de p e chegar a q . Nesses passos lógicos, só podemos utilizar: a hipótese; teoremas já demonstrados; os axiomas aceitos; e as definições já feitas. Em particular, as proposições p e q só podem envolver conceitos primitivos ou conceitos definidos com base nos primitivos.

Se uma proposição condicional é demonstrável em um sistema de axiomas dizemos que tal condicional é um **teorema** nesse sistema.

Dada uma condicional “Se p , então q ”, a condicional “Se q , então p ”, na qual as posições de p e de q foram permutadas, é dita a **recíproca** da primeira. Nos exemplos acima as condicionais (a) e (b) são recíprocas uma da outra.

Sabemos que uma condicional pode ser demonstrável e sua recíproca não ser demonstrável. Por exemplo, na axiomática dos números naturais (Axiomática de Peano) a condicional (a) é demonstrável e, portanto, um teorema

nessa axiomática. Em contrapartida, a condicional (b), que é sua recíproca, não é demonstrável nessa axiomática. Nesse caso, sabemos que tal condicional não é demonstrável no sistema porque sua negação é demonstrável. A negação é:

c) Existe um número par que não é múltiplo de 4.

De fato, podemos provar essa condicional com o simples exemplo do número natural 2.

Feitas essas considerações iniciais, neste segundo momento, vamos especificar, sumariamente, uma axiomática para a geometria plana.

Podemos, agora, apresentar uma definição central neste trabalho:

Definição:

Suponhamos dados um sistema de axiomas e uma condicional “Se p , então q ”. Se a condicional dada não é demonstrável no sistema de axiomas dizemos que “Se p , então q ” é **independente** desse sistema.

Feitas essas considerações iniciais, neste segundo momento, vamos especificar, sumariamente, uma axiomática para a geometria plana de incidência. Por evitar repetições, usaremos, algumas vezes, a expressão ‘estrutura axiomática’ como sinônimo de ‘sistema axiomático’.

2.3 UMA GEOMETRIA PLANA DE INCIDÊNCIA

Para uma breve contextualização histórica, a expressão “axiomas de **incidência**” vem sendo empregada desde o fim do Século XIX, para designar um dos agrupamentos de axiomas da geometria que resultou dos estudos dos geômetras daquela época. Nesses estudos, realizou-se uma revisão profunda dos axiomas da geometria dos *Elementos* de Euclides, destacando-se nessa fase o famoso livro de David Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, 1899. Nos *Fundamentos* de Hilbert, os demais axiomas da geometria são os de **ordem**, os de **congruência**, o das **paralelas** e o de **continuidade**.

Naturalmente, o método axiomático na geometria é muito mais antigo. Sabemos que se credita ao geômetra grego Euclides (± 330 a.C. a ± 270 a.C.), a primeira elaboração explícita desse método, com publicação de sua obra, Os

Elementos. Essa famosa obra é um tratado sobre geometria contendo treze capítulos (ou treze livros) e “nela estão demonstradas 465 proposições deduzidas de um sistema axiomático numa forma didática, [...] tal obra expõe sistematicamente toda a Matemática básica conhecida em seu tempo”. (MOREIRA, 2006, p. 04).

Ainda segundo Moreira (2006), ao longo da difusão dos *Elementos* em todo o mundo, por meio de suas numerosas traduções nas várias línguas: “Como pano de fundo ficava o postulado das paralelas, a secular dúvida se ele era ou não um axioma Euclidiano independente dos demais, sendo o mais instigante tópico de interesse dos geômetras.”. (MOREIRA, 2006, p. 06).

É a partir disso que o matemático alemão David Hilbert (1862 a 1943) inicia seus estudos na obra de Euclides apresentando um sistema de axiomas completo para a geometria euclidiana plana e espacial. Moreira (2006) sinaliza que

Isto significa que todos os resultados dos *Elementos* permaneciam válidos assumindo seus postulados. Seu sistema axiomático é um dos marcos na História da Matemática pois organiza os fundamentos da Geometria e Análise. (p. 06).

Segundo Moreira (2006, pp. 7,8,9), Hilbert organizou seus axiomas da seguinte forma:

I - Termos Indefinidos

‘Ponto’, ‘reta’, ‘pertencer’, ‘estar entre’ e ‘congruência’.

II - Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

III - Axiomas de Ordem

1. Se um ponto B está entre A e C , então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A .
2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C , existe pelo menos um ponto B pertencente à reta AC tal que B está entre A e C .
3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.
4. (Pasch) Sejam A , B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento $\overline{AB}$, ela também intercepta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.

IV - Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos distintos numa reta l e A' é um outro ponto de um reta l' , não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto B' em (um dado lado da reta) l' , tais que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sejam congruentes.

2. Se um segmento $\underline{A'B'}$ e um segmento $\underline{A''B''}$, são congruentes a um mesmo segmento $\underline{AB}$, então os segmentos $\underline{A'B'}$ e $\underline{A''B''}$ são congruentes entre si.
3. Sobre uma reta l , sejam $\underline{AB}$ e $\underline{BC}$ dois segmentos da mesma que, exceto por B não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta l , sejam $\underline{A'B'}$ e $\underline{B'C'}$ dois segmentos que, exceto por B' não têm pontos em comum. Neste caso se $\underline{AB} \cong \underline{A'B'}$ e $\underline{BC} \cong \underline{B'C'}$, então $\underline{AC} \cong \underline{A'C'}$.
4. Se $\angle ABC$ é um triângulo e se $\underline{B'C'}$ é um raio, então existe exatamente um raio $\underline{A'B'}$ em cada lado de $\underline{B'C'}$ tal que $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.
5. Se para dois triângulos ABC e $A'B'C'$ as congruências $\underline{AB} \cong \underline{A'B'}$, $\underline{AC} \cong \underline{A'C'}$ e $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ são válidos, então a congruência $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ é satisfeita.

V - Axiomas das Paralelas

1. Seja l uma reta e A um ponto não em l . Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta l .

VI - Axiomas de Continuidade

1. Axioma de Arquimedes: Se $\underline{AB}$ e $\underline{CD}$ são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de $\underline{CD}$ construídas contiguamente de A ao longo do raio $\underline{AB}$ passará além do ponto B .
2. Axioma da Completude da reta: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e de ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das paralelas) é impossível.

A lista de axiomas de Hilbert pode lastrear uma geometria plana. Por isso, tratar de todos os vários agrupamentos de axiomas extrapola qualquer possibilidade de uma investigação do tipo que desejamos fazer. Escolhemos, então, nos restringir ao primeiro bloco desses axiomas, os de incidência.

Vamos nos apoiar em MILLMAN & PARKER (1991) na apresentação de uma axiomática para a geometria plana de incidência. Tal axiomática recorre à teoria “intuitiva” dos conjuntos e em sua simbologia usual. Assim é que podemos citar:

Uma *geometria de incidência* consiste de um conjunto G cujos elementos são chamados de *pontos*, e de uma coleção L de subconjuntos (não vazios) de G , que são denominados de *retas*, tais que:

- i) Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes a G , existe uma e uma só reta r da coleção L , tal que $A \in r$ e $B \in r$.
- ii) Toda reta r contém pelo menos dois pontos.
- iii) Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

(loc. cit., p.17)

Quando lemos a citação acima, entendemos que nada foi dito quanto ao **significado** dos elementos do conjunto – os denominados *pontos* – que formam uma *geometria de incidência*. Como é usual, vamos chamar *plano de incidência* a uma geometria de incidência do tipo descrito acima. Vemos, então, que a expressão ‘plano de incidência’ não possui, também, um significado definido. Por isso, ‘plano de incidência’ e ‘ponto’ podem ser considerados *conceitos primitivos* da axiomática a ser construída.

Tampouco foi dito como são constituídos os subconjuntos que compõem a coleção das *retas*. Por isso, ‘reta’ é mais um conceito primitivo: a ele não está associada, de partida, nenhuma definição específica, além de ser um subconjunto do plano de incidência.

Na citação feita, recorre-se, ainda, ao termo ‘*pertence*’ que é um conceito primitivo da teoria dos conjuntos, simbolizado por $\in$. Igualmente, a notação usada nessa teoria pode ser empregada, a exemplo de $\notin, \cup, \cap, \subset, \subseteq, \not\subset, \emptyset$. Precisamos, também, observar que foram adotadas, no texto citado, algumas convenções: letras latinas maiúsculas representam pontos e as latinas minúsculas representam retas.

2.4 O CONCEITO DE MODELO

Passemos, agora, a refletir sobre um tema-chave de nosso trabalho. Um conceito essencial no estudo de uma axiomática é o de **modelo**. Segundo MILLMAN&PARKER (1991), “um modelo nada mais é do que um exemplo”.

Mais especificamente, vamos supor que dispomos de uma determinada estrutura axiomática. Podemos pensar nos casos do sistema composto pelos conceitos primitivos “plano de incidência”, ‘ponto’, ‘reta’ e ‘pertence’ e pelos postulados de incidência apresentados neste texto. Se atribuirmos aos conceitos primitivos um significado particular, dizemos que adotamos uma **interpretação** para esses conceitos.

Suponhamos, também, que a tradução dos postulados segundo a interpretação adotada são proposições válidas. Dizemos, então, que tal interpretação é um **modelo** do sistema de axiomas.

Vejamos um exemplo de um modelo M para a geometria de incidência que acabamos de propor neste texto. Vamos interpretar o termo primitivo ‘ponto’ como um elemento do conjunto G de letras: $G = \{A, B, C\}$ e o termo primitivo ‘reta’ por um dos elementos do conjunto L , formado por subconjuntos de G :

$$L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}.$$

Temos, assim, uma interpretação I do plano de incidência proposto. Será tal interpretação, de fato, um modelo M para a geometria de incidência proposta? Para responder a indagação temos que verificar se cada um dos três axiomas do sistema é uma proposição válida nessa interpretação, o que pode ser lido no texto que serviu de base para o minicurso vinculado ao nosso trabalho (Ver Anexo).

2.5 O CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA

Suponhamos que M é um modelo de um sistema de axiomas. Um teorema demonstrado no sistema de postulados, quando traduzido na linguagem do modelo, é uma proposição verdadeira nesse modelo. Por exemplo, tomemos a proposição demonstrável em uma geometria de incidência que afirma: “Duas retas distintas quaisquer r_1 e r_2 possuem, no máximo, um ponto em comum”. Em qualquer modelo M de uma geometria de incidência, tal proposição é verdadeira, pois é possível demonstrá-la para todos os modelos de uma só vez (Ver Anexo). Ao ser demonstrada para os sistemas de postulados – que, em certo sentido, generaliza todos os seus modelos –, a proposição passa a ser verdade em todos os modelos desse sistema de postulados.

A observação feita é fundamental para que possamos utilizar os modelos como ferramentas para testar se um dado postulado³ é independente de um sistema de axiomas.

³ Na verdade, essa ferramenta pode ser utilizada para testar se qualquer proposição em uma estrutura axiomática é demonstrável ou não nessa estrutura.

De fato, suponhamos que quiséssemos verificar se o primeiro axioma de incidência – por dois pontos distintos passa uma única reta – é ou não demonstrável com base nos outros dois postulados.

Seja M_1 a interpretação dos termos primitivos de uma geometria de incidência em que os pontos são dados por $G = \{A, B, C, D\}$ e a coleção de retas é formada por

$$L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$$

Verificamos, examinando, caso a caso, os pontos e as retas definidas acima, que M_1 é um modelo para o sistema de postulados constituído pelo Axioma de Incidência 2 e pelo Axioma de Incidência 3. Constatamos, além disso, que no modelo M_1 é verdade o Axioma de Incidência 1.

Seja, agora, M_2 a interpretação dos termos primitivos de uma geometria de incidência em que os pontos são dados por $G = \{A, B, C, D\}$ e a coleção de retas é formada por

$$L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{A, B, C\}\}$$

Em contraste como modelo anterior, M_2 , a despeito de também ser um modelo para o sistema constituído pelos axiomas 2 e 3 de incidência, nele não é verdadeiro o Axioma de Incidência 1, pois, pelos pontos A e B , passam duas retas distintas, a saber, $\{A, B\}$ e $\{A, B, C\}$.

Se o Axioma de Incidência 1 fosse demonstrável no sistema constituído apenas pelos axiomas de incidência 2 e 3, a proposição em M_2 que é tradução do primeiro postulado de incidência teria que ser verdadeira, o que não ocorre. Portanto, não podemos provar o primeiro postulado de incidência com base nos outros dois axiomas.

O que foi exposto nos parágrafos precedentes prova que o Axioma de Incidência 1 é independente dos outros dois axiomas do sistema. Em consequência, ele não é redundante no sistema de postulado de incidência apresentado.

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GERAL

Realizar um estudo sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de modelo de um sistema de axiomas para uma geometria plana de incidência, recorrendo a uma pesquisa-intervenção centrada em um minicurso sobre o tema.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Elaborar um texto didático versando sobre o conceito de modelo de um sistema de axiomas para uma geometria plana de incidência.
2. Organizar e lecionar um minicurso direcionado a estudantes de licenciatura em Matemática, utilizando o texto didático elaborado.
3. Proceder à observação-participante das reações dos sujeitos face aos conceitos-alvo do minicurso.
4. Analisar os dados obtidos e formular as conclusões da investigação.

4 METODOLOGIA

Muitos são os tipos de investigações educacionais que incluem uma parte empírica. Esses tipos podem ser categorizados segundo vários critérios, como os objetivos da pesquisa, seus procedimentos de coleta, ou ainda, as fontes de informação, ou a natureza dos dados. Por isso, o percurso metodológico adotado em uma pesquisa é um dos seus traços distintivos e deve ser apresentado ao iniciarmos a parte experimental de nosso trabalho.

Para esta investigação, optamos pelo método de uma **pesquisa-intervenção**. Levou-nos a essa escolha a ideia de observar os efeitos de um material didático em que o processo de demonstração é apresentado em um nível de rigor lógico que julgamos adequado a um curso superior de formação de professores. Tivemos a preocupação de realizar nosso experimento com licenciandos que já tivessem percorrido parte considerável de seu curso. Em particular, procuramos aqueles que já tivessem tido contato com disciplinas no campo dos fundamentos da matemática e com a prática de demonstrações, em especial em geometria. Como veremos adiante, os sujeitos da pesquisa preencheram esses requisitos.

Nos capítulos 1 (Introdução) e 2 (Quadro teórico) discutimos alguns trabalhos acadêmicos que procuram esclarecer o papel importante que deve desempenhar o estudo das demonstrações lógicas na formação universitária do futuro professor de Matemática. Simultaneamente, refletimos sobre as constatações de vários pesquisadores que indicam deficiências do ensino de demonstração, nessa fase da formação docente e, mais do que isso, da frequência elevada de um ensino que privilegia a reprodução de demonstrações lógicas de proposições.

Defendemos, apoiados na literatura consultada, ser relevante que o futuro professor estude, atribuindo significados, o tipo de validação lógica que é uma das marcas que distinguem a Matemática de outras ciências. Julgamos, então, que buscaremos observar o grau de aprendizagem que os sujeitos da investigação revelariam face ao material didático que elaboramos (Ver Anexo, p.84)

Para Rocha e Aguiar (2003),

A pesquisa-intervenção vem constituindo-se em um dispositivo de transformação vinculado tanto à formação acadêmica dos psicólogos, quanto às práticas nas instituições, possibilitando novas análises construídas entre o marco e a micropolítica. (p. 64).

Sabemos que esse tipo de pesquisa está associado às áreas sociais, humanas, mas acreditamos que ela nos traz contribuições, não só para os envolvidos nesta pesquisa, como para a Educação Matemática em geral. Como nos indica Rocha e Aguiar (2003, 65),

[...] a condição de o pesquisador estar presente no processo da investigação e que, por estar incluído no trabalho de campo, sua ação (entrevistas, questionários, dinâmicas, análises de dados e devolução das informações obtidas) modifica o objeto estudado.

Nesta pesquisa, buscamos uma interação direta nossa, na qualidade de pesquisadora, com os sujeitos da investigação, em um estudo participante de um tema pouco presente nas licenciaturas de Matemática.

Esperávamos, com isso, observar em que grau haveria compreensão das ideias a serem aprendidas, em especial, do tema-chave de **modelo de um sistema axiomático**. E mais, a partir dos resultados deste trabalho, tínhamos a expectativa de contribuir para as disciplinas da Licenciatura em Matemática, em especial, às que são, em geral, denominadas *Fundamentos da Matemática*.

Vale ressaltar que os diálogos, nesse tipo de pesquisa, são fundamentais, pois serão eles os norteadores de toda a análise do que foi coletado. Neves e Fávero (2010, p. 02) apontam que “[...] as interlocuções tomadas como atos da fala tornam-se dados importantes na consideração da avaliação da própria intervenção.”.

Diante disso, toda a intervenção foi gravada em áudio, contendo, em média, 1hora 15 min cada gravação. Ao todo foram cinco encontros, no entanto, por falhas técnicas, o primeiro e segundo áudios foram perdidos. O que atenuou a falha foi que, ao final de cada encontro, solicitamos aos estudantes um diário de cada sessão, a fim de obtermos mais informações sobre o ocorrido nesses

encontros. Apesar de não possuírem a fidelidade das conversas que as gravações favorecem, os diários ajudaram na análise dos diálogos.

4.1 BREVES COMENTÁRIOS SOBRE O CAMPO DA PESQUISA

Os sujeitos da pesquisa foram estudantes em um campus avançado de instituição federal de ensino superior.

Segundo o texto do projeto político pedagógico do curso, a região do campus avançado apresentava elevada taxa de analfabetismo, baixa expectativa de vida e alta taxa de mortalidade infantil.

A despeito da situação socioeconômica e educacional descrita no referido documento, os dirigentes do campus indicavam que estava ocorrendo, nos anos precedentes, um aumento de matrícula no ensino médio. Julgavam que, a se manterem os dados obtidos, haveria maior demanda por vagas no campus que dirigiam, nos anos à frente. Na ocasião, esse diagnóstico apontava para uma valorização do curso de licenciatura em Matemática, não apenas no que tange ao número de vagas, mas também na melhoria da qualidade da formação profissional dos futuros professores dessa disciplina escolar. Dessa forma, aquela instituição universitária estaria cumprindo o papel de contribuir com a formação dos futuros professores para o desenvolvimento educacional e social da região.

De um ponto de vista social mais amplo, um breve perfil da formação de professores em vários estados do Nordeste revelava um crescente número de professores de Matemática formados em instituições do interior. De fato, os números de concluintes em cursos de graduação presenciais levantados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP, nos anos de 2014 e 2015, revelavam crescente busca pela profissionalização por meio da educação superior, não só em universidades públicas, mas também em instituições privadas. E essa profissionalização ocorria, em grande medida, em instituições do interior.

Os dados provenientes dos estados do Nordeste deixam claro que a maioria dos concluintes das licenciaturas em Matemática são originários de instituições universitárias situadas no interior.

Esses números trouxeram uma motivação adicional à nossa escolha de realizar o experimento didático em um campus no interior do Nordeste.

4.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Iniciamos a pesquisa com seis estudantes que estavam cursando o quinto período, e um do sétimo período, de um curso de licenciatura em Matemática. Após o primeiro encontro da pesquisa, o estudante do sétimo período, por motivos profissionais, teve que se afastar, de modo que a investigação se restringiu a cinco sujeitos.

A seleção dos sujeitos foi realizada em conjunto com a professora que nos deu acolhida no campus em que realizamos a investigação. Na escolha, levamos em conta a formação acadêmica anterior dos estudantes. Optamos por estudantes que já tivessem cursado um elenco significativo de disciplinas do curso. Entre essas, podemos citar, adotando denominações genéricas: *Cálculo Diferencial e Integral (três disciplinas)*, *Geometria Analítica*, *Fundamentos da Matemática (duas disciplinas)*, *Álgebra Linear*, *História da Matemática* e *Teoria dos Números*. Nas ementas das duas disciplinas de *Fundamentos da Matemática*, incluíam-se tópicos de lógica e de teoria dos conjuntos.

Outro critério utilizado foi a proximidade de suas moradias em relação ao campus. As sessões do experimento seriam realizadas no contraturno de suas aulas habituais. Por isso, o fator proximidade era importante, sabendo-se que, nas licenciaturas ministradas no interior, há estudantes que se deslocam até centenas de quilômetros para comparecer ao curso.

O grupo era composto por duas moças e quatro rapazes. Após o primeiro encontro, ocorreu o afastamento de um dos estudantes, já mencionado. O estudante que se ausentou foi o que estava cursando o sétimo período. Os que permaneceram eram todos estudantes do quinto período, o que resultou em maior uniformidade do grupo quanto a disciplinas de semestres cursados.

Os temas incluídos na disciplina citada nos indicaram que o texto didático que foi a base de nossa pesquisa-intervenção abordaria um conteúdo que teria sido objeto de estudos anteriores dos participantes. Com base nessa suposição, julgamos ser possível abordar, tanto a geometria de incidência, quanto o

conceito de modelo, como também, os métodos de demonstração que estávamos propondo.

4.3 PROCEDIMENTOS

Para a realização desta pesquisa, utilizamos, como método, encontros semanais com os estudantes nas salas de aula da instituição de ensino em que cursava a licenciatura, com duração de duas horas cada. Foram necessários cinco encontros para completarmos nosso experimento didático.

No primeiro encontro, apresentamos a proposta de trabalho e distribuímos o texto base (ver Anexo), que foi lido pelos estudantes e, em seguida, aberto a discussões, para tratar de possíveis dúvidas que os manifestassem. Nesse texto, é explorada a ideia de **modelo**, conceito central da nossa pesquisa, como também foram discutidos os axiomas de uma geometria **de incidência**, bem como a ideia de **independência** de uma proposição relativamente a um sistema de axiomas.

Após abordarmos esses conceitos base partimos, nos encontros seguintes, para a resolução das atividades propostas no próprio texto base.

Os materiais principais coletados foram as atividades respondidas, por escrito, pelos estudantes. Julgamos, também, que seria necessário gravarmos os áudios das discussões em sala de aula, para análise posterior.

Por solicitação da professora que nos acolheu no campus, os estudantes que seguissem as aulas do minicurso, receberam um certificado de trabalho extraclasse, para preenchimento de exigências do currículo do curso. Esse fator, ao criar uma recompensa acadêmica, certamente interferiu no grau de motivação para participar do curso.

Antes do experimento, enviamos o texto base para a professora que ficou responsável pelos estudantes investigados, junto aos dirigentes do campus, para que ela nos desse um *feedback* sobre o que tínhamos preparado e sobre os objetivos de nossa pesquisa.

5 REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO

Na presente sessão, faremos uma descrição do experimento didático realizado por meio de um minicurso acompanhado de observação-participante. Iniciamos pelas análises dos eventos ocorridos em cada encontro, deixando para uma seção final deste texto, uma análise geral do experimento.

5.1 PRIMEIRO ENCONTRO⁴

Neste primeiro contato com os estudantes, a professora local fez a apresentação da pesquisadora, mas preferiu não permanecer conosco, para evitar uma interferência não prevista no experimento didático.

Apenas cinco, dos seis estudantes, puderam comparecer. O sexto teve problemas de transporte para chegar à universidade. Solicitei que os estudantes fizessem suas apresentações e mencionasse o período que estavam cursando, e comentassem as duas disciplinas do campo dos *Fundamentos da Matemática*, que sabíamos todos já terem cursado. Alguns expressaram que tiveram dificuldades na aprendizagem dessas disciplinas. Perguntei-lhes, ainda, que conteúdos haviam estudado, eles disseram que não se lembravam. Quando um deles fez menção ao estudo de tabelas verdade, os demais confirmaram a informação.

Questionei-os se haviam estudado métodos de demonstração e eles afirmaram que sim. Procurávamos saber se tinham conhecimento desses métodos, em especial, do método de redução ao absurdo, que seria utilizado no texto didático base da experiência. Não ficou claro, pelas respostas dadas, se os estudantes se recordavam desse método.

Após o nosso diálogo inicial, apresentei-lhes o texto base (Ver Anexo), falei dos conteúdos que discutiríamos naqueles encontros, referindo-me os objetivos do nosso trabalho. Pedi-lhes, então, que lessem o texto, grifassem, anotassem as possíveis dúvidas e, ao final do encontro, teríamos uma primeira discussão sobre esse texto.

⁴ Neste e no segundo encontro, não comentaremos os diálogos ocorridos, porque por uma falha técnica, os registros do áudio das duas primeiras sessões foram danificados.

Cada um dos estudantes recebeu o texto base, que vinha acompanhado das atividades propostas. Eles poderiam, livremente, utilizá-los do modo que desejassem, até mesmo, escrevendo nos espaços em branco para anotações e resoluções das atividades propostas. O texto com as anotações seria recolhido para subsidiar nossas análises, ao fim do minicurso e, posteriormente, devolvidos a eles.

Ao final da leitura, fiz-lhe uma pergunta de caráter geral, com o intuito de iniciar o diálogo: *O que vocês acharam do texto?* Após as primeiras respostas, naturalmente vagas, indagamos, mais especificamente, se as demonstrações feitas no texto estavam claras. Eles afirmaram não terem tido dúvidas, mas pediram para ler mais uma vez, para se apropriarem da linguagem, dos termos e do conteúdo novo. Uma das estudantes mencionou que havia participado de um minicurso em um evento científico sobre geometrias não euclidianas, o que a ajudou a compreender melhor a proposta do texto.

Passamos a centrar nossos diálogos em um tópico mais específico, o de um sistema de axiomas. Naturalmente, focalizamos no sistema de axiomas de uma geometria plana de incidência. Para fluência da leitura desta dissertação, é útil reproduzir, a seguir, o quadro com o sistema de axiomas de incidência, apresentado no texto base:

SISTEMA DE AXIOMAS DE UMA GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA	
TERMOS PRIMITIVOS	
Um conjunto G de elementos chamados pontos	
Uma coleção L composta de subconjuntos, não vazios, de G , que são denominados retas	
AXIOMAS	
1) Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes ao conjunto G , existe uma e uma só reta, denotada por r , da coleção L , tal que $A \in r$ e $B \in r$.	
2) Toda reta r possui pelo menos dois pontos.	
3) Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta.	

Ao longo das discussões, percebi que eles, ao lerem o quadro com os axiomas de uma geometria de incidência, relacionaram o seu conteúdo à teoria dos conjuntos. Outra estudante perguntou o que significava a afirmação, contida no texto, de que o termo ‘pertence’ era conceito primitivo para aquele material. Diante da pergunta, vi a necessidade de falar um pouco sobre a axiomática de David Hilbert, em que ‘pertence’ não é um termo primitivo, mas que tínhamos optado por uma axiomática da geometria em que os termos e proposições da

teoria dos conjuntos iriam ser tomadas como base, o que não ocorre na axiomática daquele matemático. Lembramos que a fonte para nosso texto havia sido a obra de Millman & Parker (1991).

Em seguida, fizemos uma leitura coletiva do sistema de axiomas, intercalada com pausas, para esclarecer alguma dúvida dos participantes. O tema que mais ocupou as discussões foi o fato de que nossas intuições da geometria são intrinsecamente marcadas pelos objetos da geometria euclidiana que aprendemos, desde cedo, na escola. Temos dificuldade de aceitar que um ponto possa ser interpretado por uma letra, como expomos no texto base, ou que uma reta possa ser interpretada como um conjunto contendo duas letras. Somos chamados a desconstruir essas intuições, o que é uma operação mental difícil.

À medida que discutíamos sobre as demonstrações, percebi que um dos estudantes rabiscou algo no seu material. Ao final, procuramos o estudante para saber se havia ficado alguma dúvida e ele me perguntou se o conjunto L formado pelas retas do conjunto G não seria, na verdade, subconjunto de G porque, segundo a teoria dos conjuntos os elementos de L são subconjuntos do conjunto G . Explicamos a ele que L era uma coleção de subconjunto de G e não um subconjunto de G . Ele demonstrou compreensão e afirmou que está gostando do estudo. Infelizmente, o estudante, por motivos pessoais, precisou desistir dos nossos encontros.

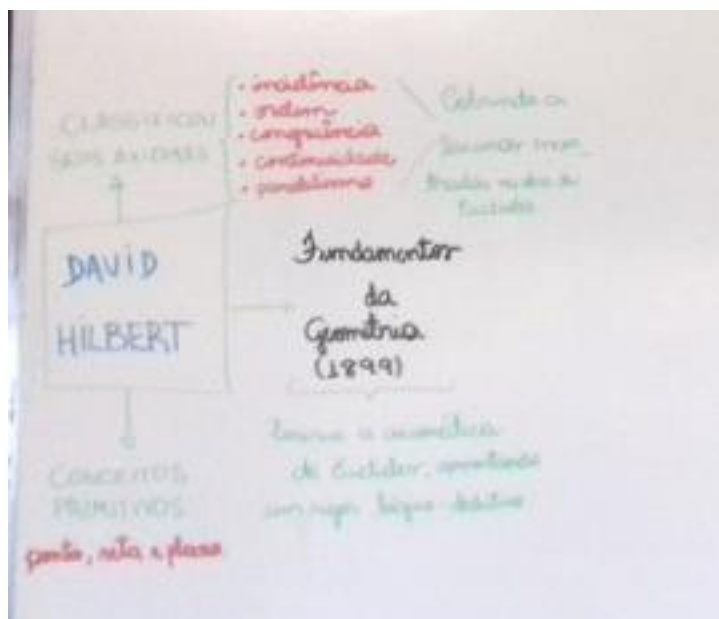
Ficou evidenciado que os estudantes não haviam, anteriormente, abordado o tema, ao menos, do modo exposto no texto didático. Foi feito um esforço, por nós, para pontuar os conceitos chave acima citados.

5.2 SEGUNDO ENCONTRO

No segundo encontro, retomamos a discussão da axiomática da geometria proposta por David Hilbert, nos seus *Fundamentos da Geometria*, na qual aparecem os axiomas de incidência. Utilizamos o quadro branco para expor um breve resumo acerca disso.

Abaixo segue uma imagem (Figura 01) do quadro branco com algumas dessas informações:

Figura 1. Imagem do quadro da sala de aula: axiomas propostos por David Hilbert



Fonte: Arquivos pessoais.

Em seguida, retomamos os axiomas de uma geometria de incidência, do modo apresentado no texto base, em que o termo ‘incidente’ utilizado por David Hilbert, é traduzido por nós por ‘pertencente’.

Com base nos três axiomas de incidência, nos propusemos a rever a demonstração, apresentada na seção 2.5 do capítulo 2, de que o Axioma de Incidência 1 é independente dos outros dois axiomas dessa geometria.

Quando estávamos verificando, axioma por axioma, diante da coleção de retas que construímos, houve uma dúvida quanto o Axioma de Incidência 3. Tal axioma assegura a existência de, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta. Deixamos essa dúvida pendente para discuti-la no encontro seguinte.

A cada demonstração que construíamos, sempre os instigava a responderem embasados no que estavam aprendendo. Ao mesmo tempo, procurava estimular para construírem ideias e argumentos próprios para resolverem as questões propostas. Queria deixá-los independentes e mais seguros do que estavam aprendendo e construindo. Afinal não queria que, ao término dos encontros, eles só reproduzissem o que estava no quadro da sala de aula ou no texto impresso.

A partir desse momento do 2º Encontro, começamos a resolução das atividades propostas no texto base.

As atividades são apresentadas a seguir:

ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 1 (Proposição 3 do texto base)

Demonstrar que, em uma geometria de incidência, para toda reta r , existe, pelo menos, um ponto P que não pertence a r .

Atividade 2 (Proposição 4 do texto base)

Demonstrar que, em uma geometria de incidência, para todo ponto P , existe pelo menos uma reta r que não passa em P .

Atividade 3 (Proposição 5 do texto base)

Demonstrar que, em uma geometria de incidência, para todo ponto P , existem pelo menos duas retas distintas passando por P .

Atividade 4

Na geometria de incidência proposta, provar que o Axioma 2 é independente dos Axiomas 1 e 3.

Atividade 5

Na geometria de incidência proposta, provar que o Axioma 3 é independente dos Axiomas 1 e 2.

Atividade 6

Suponhamos um sistema de axiomas constituído pelos três axiomas de incidência acrescido de mais um:

Axioma Projetivo das Paralelas

Duas retas quaisquer são concorrentes.

Provar que o Axioma Projetivo é independente dos três axiomas de incidência.

Atividade 7

Suponhamos um sistema de axiomas constituído pelos três axiomas de incidência acrescido de mais um:

Axioma da Existência de Paralelas

Dada uma reta qualquer r e dado um ponto qualquer P , fora de r , existe pelo menos uma paralela a r passando por P .

Encontre um modelo para os sistemas de axiomas de incidências acrescidos do Axioma da Existência de Paralelas.

Atividade 8

Suponhamos o sistema de axiomas constituído pelos três axiomas de incidência acrescido de mais o quarto axioma, citado na atividade anterior: Encontre um modelo para o sistema de axiomas de incidência acrescido do Axioma de Existência de Paralelas. Vamos representar este sistema com o símbolo E .

Consideremos, então o axioma:

Axioma Euclidiano das Paralelas

Dada uma reta qualquer r e dado um ponto qualquer P , fora de r , existe no máximo uma paralela a r passando por P .

Provar que o Axioma Euclidiano das Paralelas é independente do sistema E .

No texto base, há duas proposições que são demonstradas, detalhadamente:

Proposição 1: Se duas retas concorrentes, r e s , são distintas, então elas possuem, no máximo, um ponto em comum.

Proposição 2: Existem, pelo menos, três retas distintas que não são concorrentes.

Em um primeiro momento, solicitamos que os estudantes revissem tais demonstrações, antes de tentar demonstrar a proposição pedida na atividade **1**. Chamamos a atenção deles para o método de redução ao absurdo, utilizado nas demonstrações das proposições **1** e **2**.

Em seguida, juntos, construímos a hipótese de absurdo para a demonstração da proposição enunciada na **atividade 1**. A discussão iniciou-se por considerar a **tese** da condicional que compõem a atividade **1**:

“Para toda reta r , existe um ponto P fora de r ”

Para construir a hipótese de absurdo, deveríamos negar essa tese. O resultado dessa negação seria a proposição:

“Existe uma reta r tal que, todo ponto P pertence a r ”

Notamos, de início, que o procedimento de negar uma proposição matemática envolve, inevitavelmente, o conhecimento relativo aos quantificadores lógicos. Apesar de sabermos que esse tópico fazia parte das disciplinas cursadas pelos alunos, evidenciaram-se em alguns deles alguma dificuldade na efetivação desse procedimento.

A discussão realizada no grupo conduziu à conclusão de que a hipótese de absurdo, acima escrita – que, essencialmente, assegura que todos os pontos da geometria pertencem a uma reta – é contraditória com o Axioma 3 da geometria de incidência, em que é afirmado:

Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem à mesma reta.

A contradição implica, pelo método de redução ao absurdo, que fica demonstrada a proposição visada na atividade **1**.

Após a demonstração da proposição, solicitamos a resolução da **atividade 2**, estimulando os estudantes a trabalharem sem nossa intervenção. Os estudantes voltaram a revelar dificuldades para lidar com quantificadores lógicos no processo de negação de proposições e, assim, poder construir a hipótese de absurdo para a proposição **4**, que é o objeto na atividade **2**.

Discutindo com os estudantes, identificamos a tese da proposição 4:

“Para todo ponto P , existe pelo uma reta r que não passa em P .”

Em seguida, novamente com discussão coletiva, construímos a hipótese de absurdo, a negação da proposição acima. Tal negação deveria ser:

“Existe um ponto P tal que, toda reta r passa em P .”

No entanto, tal afirmação é contraditória com a Proposição 2, demonstrada no texto base:

“Existem pelo menos três retas distintas que não são concorrentes.”

Fica, assim, demonstrada a proposição 4, que compõe atividade 2.

Maiores dificuldades foram evidenciadas na resolução da **atividade 3**, em que pedimos para demonstrar a proposição 5 do texto base. Ocorre que uma demonstração simples dessa proposição segue o método direto, em lugar do método de redução ao absurdo, que havia sido usado nas demonstrações anteriores. Ocorreu, por isso, uma “desestabilização” do conhecimento recente dos estudantes a respeito do método de demonstração. Fizemos uma breve explanação dessa demonstração, mas as discussões sobre ela ficaram para o próximo encontro do experimento,

5.3 TERCEIRO ENCONTRO

O terceiro encontro foi iniciado com a retomada da demonstração da proposição 5, visto que havia ficado dúvidas quanto a ela. No encontro anterior, havíamos feito uma breve explanação da referida demonstração.

Logo no início, relembramos alguns pontos importantes já mencionados e dissemos que, para a demonstração da proposição 5 pelo método direto, uma sugestão seria recorrer aos axiomas da geometria de incidência e às

proposições já demonstradas. Em seguida, os estudantes foram deixados para trabalhar sem nossa intervenção.

Depois de certo tempo, tentando elaborar a demonstração da proposição 5 observei que eles estavam com dificuldade em organizar as ideias:

Estudante 03: Aí eu acho que a proposição é essa daqui “Para todo ponto P existe pelo menos uma reta que não passa em P ” (Proposição 4). Eu acho que a proposição é essa né? Aí “Para todo ponto P passam pelo menos duas retas distintas em P ” (Proposição 5 que se quer demonstrar). Aí o axioma... eu acho que o axioma... (Aqui a estudante não concluiu sua fala).

Estudante 01: A proposição não era essa 1? Porque a proposição 5 diz que “Para todo ponto P passam, pelo menos, duas retas distintas em P , aí a 1 diz “Se duas retas concorrentes, r e s , são distintas, então duas possuem, no máximo, um ponto em comum”.

Estudante 03: Sim, aí o ponto P passam pelo menos duas retas distintas em P .

Estudante 01: Aí passam duas retas distintas em um ponto comum.

Estudante 03: É, pode ser mesmo. Eu achava que era... (A estudante não concluiu sua fala).

Estudante 01: É um dos dois, ou a 4 ou a 5.

Estudante 03: Aí como é que a gente examina para saber? (Há uma pausa na fala que depois é retomada.).

Estudante 03: Ah, F...! Mas aqui no axioma 1 tem dois pontos.

Estudante 01: Hum? O axioma 1?

Estudante 03: Passa por dois pontos A e B pertencentes ao conjunto G . Existe uma única reta denotada por r , tal que $A \in r$ e $B \in r$. Dois pontos formam a reta, aí... (A não conclusão da fala parece evidenciar uma pausa para entender por que se faria uso do axioma 1 para a demonstração).

Estudante 01: Esse axioma é mais complicado.

Estudante 03: Aí sendo duas retas concorrentes, então elas possuem no máximo um ponto em comum.

Estudante 01: Um ponto em comum.

Estudante 03: Acho que não tem nada a ver com o axioma não.

Estudante 01: É.

Após todo esse diálogo houve um silêncio em sala, eles liam e reliam cada proposição e cada axioma presente no texto, buscavam qual melhor se encaixava na demonstração. À medida que os escutava, percebia que os

estudantes não avançavam na resolução da atividade. Após essa pausa eles continuaram nos diálogos.

Estudante 01: E aí L...?

Estudante 03: Eu acho que é a proposição 1 e o axioma ainda não sei. (Aqui houve uma mudança, antes a estudante estava propondo a proposição 4, mas agora propõe a proposição 1). É complicado. Porque aqui diz que “se duas retas concorrentes... possuem um ponto em comum” (Proposição 1) e aqui ele tá dizendo assim “Por dois pontos passam pelo menos duas retas distintas”, então o ponto comum é P .

Estudante 01: É. Esse ponto comum é P , pode ser, no caso aí... (A estudante o interrompe).

Estudante 03: Agora... (Há uma outra pausa).

Estudante 01: E o axioma? Qual o axioma e qual vai usar? Porque aqui ele sempre fala mais em ponto, olhe “Para quaisquer dois pontos A e B ” (Axioma 1), o primeiro. O outro diz “Se toda reta contém pelo menos dois pontos” (Axioma 2); e o outro diz “Existe pelo menos três pontos que não pertence a uma reta” (Axioma 3).

Estudante 02: Não é só para negar não?

Aqui o estudante 02 que, até então, participava das discussões de forma passiva, só observando o que seus colegas estavam debatendo, volta a insistir na demonstração por redução ao absurdo, mas os colegas procuram convencê-lo que essa demonstração deveria ser feita de forma direta. Continuando o diálogo, os estudantes continuam a discussão acerca da proposição e do axioma que serão utilizados para a demonstração.

Estudante 01: A proposição é a 4. “Para todo ponto P existe uma reta que não passa por P ”.

Estudante 03: Eu num sei não.

Estudante 01: Eu também não.

Estudante 03: Eu só achei que o negócio do... (O estudante 01 a interrompe).

Estudante 01: A proposição é a 4.

Estudante 03: Mas eu disse primeiro que era a 4.

Estudante 01: Mas por que a 4?

Estudante 03: Porque tem... porque na 4... olhe “Para todo ponto P existe pelo menos uma reta r que não passa em P ”, “Para todo ponto P passa, pelo menos, duas retas”...

Observando essa parte do diálogo é possível observar que os estudantes ainda não entendiam porque a proposição 4 seria usada nessa demonstração. Se observarmos a última fala da Estudante 03 diante do questionamento do seu colega, em que pergunta por que usar essa proposição, ela faz uma comparação entre a proposição 4 e a proposição a ser demonstrada, como se quisesse mostrar a seu colega que as proposições têm algo em comum e, por isso, se deveria usá-la. Adiante, eles prosseguem com uma possível justificativa para uso da proposição 4.

Estudante 01: Oh, vamos falar sério agora! Não, assim! Não entendi direito não!

Estudante 03: “Para todo ponto P existe pelo menos uma reta r que não passa em P”.

Estudante 01: Que não passa em P, então a gente bota o que?

Estudante 03: Tem uma reta que não passa e aqui tá dizendo que passam duas retas.

Estudante 01: Sim, a gente... (Estudante 03 interrompe seu colega).

Estudante 03: Passam duas, então em que ter pelo menos duas, e aqui tem que ter três, não?

Estudante 01: É, três retas. Não, olhe, porque na de baixo diz o que, “Para todo ponto P passa duas retas distintas pelo ponto” (Proposição 5).

Estudante 03: Pelo menos duas retas distintas.

Estudante 01: Então? Pelo menos.

Estudante 03: Pelo ponto.

Estudante 01: Sim, essa aqui diz que passa, passa distinta. (Se refere a proposição 5).

Estudante 03: É diferente.

Estudante 01: Na de cima diz que passa, que existe uma reta que não passa. (Se refere a proposição 4).

Estudante 03: Que não passa.

Estudante 01: Ou seja, ela não vai passar em nenhum ponto, mas o que é que ela não passa no ponto vai interferir na 4?

Estudante 03: Qualquer ponto passa duas, aí não passa, aí... Espere aí... Não, eu entendi, só não tô sabendo dizer. Porque assim, aqui tá dizendo que passa uma, que passa pelo menos uma, que não passa, (A estudante se refere a proposição 4) aí aqui tá dizendo que passa duas (Proposição 5), só que na de cima diz que passa só uma e tem pelo menos uma que não

passa (Proposição 4), aí aqui tá dizendo que passa uma, então uma dessas já não passa, eu digo que nega essa daqui que não passa (Proposição 4), entendeu?

Estudante 01: É.

Após 20 minutos de discussão coletiva, resolvemos intervir porque percebemos que eles não estavam conseguindo chegar à conclusão da demonstração.

Pesquisadora: Tá um pouquinho difícil?

Estudante 03: Porque assim, a gente, eu uso uma proposição e um axioma, aí a proposição a gente ficou entre a 4 e a 1, mas a gente escolheu a 4, aí só que, qual axioma a gente vai usar? Porque não tô entendendo usar o axioma, não tô ligando a ideia, entendeu?

Pesquisadora: Em relação a proposição 4, o que vocês pensam?

Estudante 03: Oh, “Para todo ponto P existe pelo menos uma reta que não passa em P ”, existe pelo menos uma reta que não passa em P , aí a proposição 5 diz “Para todo ponto P passa, pelo menos, duas retas”, passam no mínimo duas retas e a de cima diz que existe pelo menos uma que não passa, né? Aí pronto! Aí... Eu não tô conseguindo formar a ideia com o axioma e a proposição.

Pesquisadora: Certo. A proposição tá certa, é isso mesmo, é a 4.

Estudante 03: Eu fiquei na dúvida na outra que diz “Se duas retas concorrentes, r e s , são distintas então elas possuem no máximo um ponto em comum”, por essa questão de um ponto.

Pesquisadora: Sim. A minha demonstração aqui vai dizer “Seja um ponto qualquer”, então ele vai tomar um ponto qualquer P , aí ele vai dizer que pela proposição 4, como vocês falaram, vai existir uma reta que não passa em P .

Estudante 01: Que não passa por esse P .

Pesquisadora: E aí, essa reta ela possui o que?

Estudante 01: Dois pontos.

Pesquisadora: Pelo menos dois pontos.

Estudante 01: É, pelo menos dois pontos.

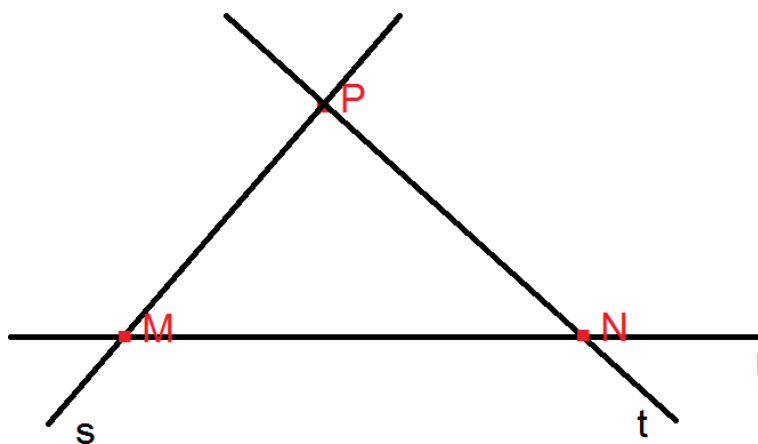
Pesquisadora: E esses dois pontos quem me garante, qual é o axioma?

Estudante 01 e 03: O 2.

Pesquisadora: Pronto. Então eu vou ter esse ponto P qualquer e eu vou ter essa reta r , pela proposição 4, que não passa nesse P e mais que isso, essa reta possui pelo menos dois pontos,

segundo o axioma 2. Aí ele vai propor uma reta que passe... Vou desenhar é mais fácil de visualizar! (Aqui eu quis desenhar para que os estudantes pudessem visualizar melhor o que a demonstração estava propondo).

Figura 2. Diagrama da demonstração da proposição 5



Fonte: Arquivos pessoais.

Pesquisadora: Vamos supor um ponto P . Pela proposição 4, existe uma reta que não passa em P . Aí, o axioma 2 garante que existem, pelo menos, dois pontos distintos nessa reta, que a gente pode chamar de M e N . Podemos dizer, que existe a reta s , que passa pelos pontos P e M ?

Estudante 01 e 03: Pode.

Pesquisadora: Pelo Axioma 1, a reta s existe e é única. Podemos obter outra reta, além de s ?

Estudante 05: NP .

Pesquisadora: Passando por P e por N , a reta t , que também pelo axioma 1, sabemos que existe e é única.

Estudante 03: Por isso essas duas retas s e t passam por P , né isso?

Pesquisadora: Isso, estamos concluindo que elas passam. E essas retas vão ser distintas. As retas s e t são duas retas o quê? Distintas né? Pois, caso contrário, P , M e N estaria numa mesma reta. O que não ocorre, pois P não está na reta r . Portanto, está feita a minha demonstração.

Depois do que foi exposto, houve um diálogo entre nós e os estudantes, tendo em conta que tiveram dificuldade de resolver autonomamente o problema. Após nossa intervenção, eles verbalizaram que haviam entendido a argumentação lógica, mas que sentiam dificuldades em encontrar o caminho para realizar a demonstração por sua própria iniciativa. O registro escrito dessa

demonstração foi outro ponto discutido, os estudantes assumindo que tinham dificuldades em redigir uma demonstração do tipo que estávamos discutindo. A seguir um pequeno extrato de diálogo sintetiza essas questões:

Pesquisadora: Aí, o negócio bonitinho, vocês escrevem aí, tá? O rigor lógico formal.

Estudante 03: O problema é esse rigor.

Pesquisadora: Vocês vão conseguir.

Insistimos que tentassem fazer o registro da demonstração. Os estudantes interagiram de modo efetivo e foram ganhando confiança na escrita da demonstração pelo trabalho em grupo e a confiança mútua entre eles. Foram progressivamente encontrando as frases adequadas ao rigor esperado:

Estudante 03: Você escreveu como, F...?

Estudante 01: Eu botei assim, “Seja um ponto P qualquer, usando a proposição 4 temos uma reta r que não passa em P ”, aí “essa reta de acordo com o Axioma 2, ela vai ter dois pontos.”. Eu escrevi o que eu vi ali. (Refere-se ao quadro, enquanto explicava como se dava a demonstração desenhei no quadro a ideia da demonstração, segundo a geometria euclidiana, para facilitar a compreensão.

Estudante 03: Aí, enrolei foi tudo! Tu é bom com essas coisas, T..., esqueci que você estava aqui.
(Pausa... Silêncio...).

Estudante 03: Terminou F...? Eu fiz uma enrolada, mas depois eu passo a limpo. Eu botei aqui, mas não sei se está certo. Conseguisse T...?

Estudante 05: Tava fazendo assim, “Seja P um ponto. Pela proposição 4 existe pelo menos uma reta r que não passa em P ”. Aí eu coloquei, “como toda reta contém pelo menos dois pontos proposto pelo Axioma 2, então existirão pontos M e N contidos na reta r ”, aí “por esse ponto pode passar outra reta”. Essa outra parte eu tinha feito, só que apaguei.
[...]

Estudante 03: Eu coloquei assim, “Dado um ponto P . A proposição 4 nos garante que existe uma reta r que não passa por P ”, aí “de acordo com o Axioma 2 existem pelo menos dois pontos M e N pertencentes a essa reta r . Supondo que exista uma reta s , tal que essa reta tenha pelo menos dois pontos M e P , como também uma reta que contenha”, espere aí, é porque não numerei a reta. “A reta s e a reta t que contém os pontos N e P . Logo, as retas NP e PM são distintas e fica provada a proposição 5”, assim, não sei colocar de todo jeito não!

Pesquisadora: Não sei colocar de todo jeito não?!

Estudante 03: Porque assim, não sei colocar de outra forma não. Daqui dava pra fazer de outra forma mais bonitinha.

Pesquisadora: Certo, só que lembrem-se, tá lindo até onde tá, tá muito bom. Ele vai dizer que passa duas retas distintas em P , espere aí, deixa eu ler aqui.

Estudante 01: Quer que eu leia a minha?

Estudante 03: Vai F..., leia aí a sua.

Estudante 01: Seja P um ponto qualquer. Usando a proposição 4 temos que uma reta r que não passa em P , essa reta, dado o Axioma 2, contém pelo menos dois pontos, M e N onde podemos criar duas novas retas, a reta s que passa por P e M , e a reta t que passa por P e N , sendo distintas já que P , M e N não pertencem a uma mesma reta.”.

Estudante 03: Assim, vamos dizer a verdade, a gente tem dificuldades, os professores da gente num trabalha isso com a gente não, porque essa parte num deu tempo. Foi no tempo da greve?

Estudante 05: A gente teve o recesso que começou em outubro.

Estudante 03: O único professor que puxou mais da gente com essa questão de provar, de escrever é M..., mesmo assim a gente não consegue provar muita coisa não porque, sei lá, o tempo é curto e a gente se apegava muito as questões de...

Estudante 01: De cálculo.

Estudante 03: De cálculo. Aí a gente às vezes para escrever fica ruim, a gente sabe, tem a ideia de como é e não sabe fazer.

Pesquisadora: Não sabe transcrever para o papel.

Estudante 05: A gente sabe, é tão óbvio.

Estudante 01: Ele disse (se refere ao professor mencionado anteriormente) que uma prova lá em que foi pedida uma questão ao estudante, aí o estudante escreveu, mas escreveu em palavras. Foi o que eu fiz na prova dele, eu sabia o que era, só que não sabia escrever do jeito que ele queria aí eu peguei e escrevi em palavras mesmo, mesmo estando errado.

Estudante 03: Até quando a gente estudou geometria euclidiana a gente estudou mais essas partes de cálculo mesmo, a parte de figuras planas, foi o que a gente viu.

Estudante 01: Mas ele escreveu, escreveu matematicamente.

Estudante 03: Foi praticamente o que a gente viu, e utilizou eles para fazer algumas coisas, somente.

É provável que esse tipo de diálogo possa ocorrer em outras licenciaturas e as ideias de demonstração estejam sendo adquiridas de modo insatisfatório como apontavam as pesquisas citadas na literatura citada no capítulo introdutório desta dissertação. Nossa experiência pessoal na formação inicial não está distante do discurso acima exposto. As ementas das disciplinas até podem conter o desenvolvimento das habilidades cognitivas formais que a Matemática nos propõe, mas o que é repassado na sala de aula parece-nos que é destituído de significado para o estudante. Mais tarde, por sua vez, caso não modifique as práticas de ensino com as quais foi ensinado, poderá continuar

repassando o conteúdo vazio de significados, até um dia encontrar uma circunstância que produza, nele, um rompimento com essas ideias.

Após a resolução das atividades 1, 2 e 3, versando sobre demonstrações de proposições presentes no texto base, dirigimos nossa atenção para a atividade 4. Na verdade, tanto esta última atividade, quanto às atividades 5 e 6, tratam do conceito de independência de uma proposição com relação a um sistema de axiomas. O método apresentado no texto base, que utilizamos na seção 2.5, do capítulo 2, deveria ser o adotado pelos estudantes. Vale ressaltar que uma das dificuldades mais evidentes, aqui, consistiu na dissociação do conhecimento novo visado e o da geometria euclidiana plana. Os estudantes, algumas vezes, não conseguiam demonstrar a independência porque queriam negar os axiomas embasados na geometria euclidiana plana.

A despeito disso, as atividades versando sobre independência revelaram-se mais acessíveis aos estudantes do que as que envolveram demonstrações no sistema axiomático com o qual lidamos. Uma possível explicação seja o fato que nas atividades comprovadoras de independência há um só método a ser seguido pelos estudantes.

Quanto à dificuldade mencionada, trazemos uma parte dos diálogos que evidenciam isso.

Pesquisadora: [...] A atividade 2, ele pede para “na Geometria de Incidência proposta” nós provarmos que o Axioma 2 é independente dos Axiomas 1 e 3, vocês lembram que a gente fez a independência do Axioma 1 em relação ao 2 e o 3? Que aí é o que está no texto. (No corpo do texto, quando se fala em independência, é dado o exemplo de como provar que o Axioma 1 é independente dos Axiomas 2 e 3.). Para este agora, pro 2 ser independente do 1 e do 3, o que é que precisa, T...?

Estudante 05: O 2 tem que ser tipo falso, e o 3 e o 1 tem que ser verdadeiro.

[...]

Estudante 01: Pro 2 ser independente, no caso, ia ter uma reta dessa contendo só um ponto, né?

Pesquisadora: Pra quê?

Estudante 01: Porque o 2 ele num diz que toda reta contém dois pontos.

Pesquisadora: Sim.

Estudante 01: A gente num quer negar ele? Então a gente vai ter que montar uma reta só com um ponto.

Pesquisadora: O que é que vocês acham?

Estudante 01: Não, porque assim, ela disse que tem que negar o 2.

Estudante 03: O 2 não é, “Toda reta contém pelo menos dois pontos”.

Estudante 01: “Toda reta contém pelo menos dois pontos”.

Estudante 03: Aí a gente tem que fazer o quê? Criar um...

Estudante 01: Um conjunto com um ponto.

Estudante 03: Uma reta que passa...

Estudante 01: Ou seja, ela... A reta no caso teria um ponto só.

Estudante 03: E como é que a gente tem um ponto só?

Estudante 01: Então seria um ponto.

Estudante 03: Aí seria um ponto não uma reta.

Estudante 01: É.

Estudante 03: Porque pra ter uma reta precisa de dois pontos.

Estudante 01: É. E como é que vai ser?

Pesquisadora: Vocês acham que tá certa a ideia de F...?

Estudante 03: Responde aí se tá certo, num é sua?

Estudante 01: Não, assim, porque a gente vai ter que supor alguma coisa, ela vai...

Estudante 05: Ou criar uma reta que tenha os mesmos...

Estudante 01: Os mesmos pontos.

Estudante 05: É, tipo assim, o conjunto $\{A, B\}$ e $\{A, B\}$ de novo. Pode isso ou não?

Pesquisadora: E as retas seriam $\{A, B\}$ e $\{A, B\}$?

Estudante 05: Sim.

Estudante 01: Mas não vai ter dois pontos?

Estudante 03: As retas seriam $\{A, B\}$ e $\{A, B\}$? Então seriam duas retas coincidentes.

Como mostrado no diálogo acima, para alguns é difícil imaginar que uma reta seja formada só por um único ponto. Da geometria euclidiana plana trazemos o conhecimento de que em uma reta existem infinitos pontos. Com esse conhecimento aprendido anteriormente, fica difícil imaginar uma reta com um único ponto. Logo no início dos nossos encontros, mencionamos que seria importante lembrar, sempre, que precisávamos desconstruir algumas ideias da geometria plana para aquelas atividades, afinal estávamos lidando com uma geometria nova.

Acredito que os questionamentos que lançava os deixavam inseguros a continuar fazendo certas afirmações, mas tentávamos exercer o papel de mediadora para que adquirissem o novo conhecimento que estava sendo construído. Não podia simplesmente chegar com as demonstrações prontas,

mas os levar a construir seus argumentos baseados em conceitos primitivos e em proposições já demonstradas.

Estudante 05: “Toda reta r contém pelo menos dois pontos”.

Estudante 03: “Pelo menos dois pontos”, aí tem que fazer (a) e (b)? Dizer que... sei não.

Pesquisadora: Tem que negar.

Estudante 03: Negar isso aí.

Estudante 01: É que “pelo menos dois”, ou seja, ela pode ter mais de dois.

Estudante 03: Ela pode ter três pontos.

Estudante 01: Ela pode ter três pontos.

Estudante 03: Aí eu tenho que botar que tem um... mas não pode ser um não, porque um não tem.

Estudante 01: Foi o que eu disse. A gente poderia supor, assim no caso, que...

Estudante 05: Que um ponto é uma reta?

A partir dessas discussões, achamos importante construir com eles, um quadro do tipo exposto no texto, para comprovar a independência do axioma 2 dos demais. Construímos o conjunto G com as letras, em seguida, o conjunto de L com a coleção de retas.

Pesquisadora: [...] Qual vai ser nosso conjunto?

Estudante 01: No caso assim...

[...]

Estudante 01: Mas ela não pode ter um.

Pesquisadora: Por quê?

Estudante 01: Porque aí ela deixa de ser reta.

Estudante 03: Ela não ia deixar de ser uma reta não? Porque a reta não precisa ter dois pontos?

Estudante 01: Não, é o que eu tô dizendo para negar isso aqui, porque ele num diz que “Toda reta contém pelo menos dois pontos”? Então, se a gente supor...

Estudante 03: Se a gente supor...

Pesquisadora: Por que a gente não pode supor?

Estudante 01: Então, eu disse se supor que ela tem uma a gente pode negar. Pode né? Talvez.

Pesquisadora: Vocês concordam que a gente pode isso?

Estudante 05: Com F... eu concordo porque ele acertou.

À medida que construímos o conjunto G e a coleção das retas, e que fomos discutindo, axioma a axioma, eles foram entendendo a demonstração da independência, foi ficando claro como se deu a negação do Axioma de Incidência

2, porque poderíamos supor que uma reta poderia ser definida por um ponto só e, ao final, conseguiram atingir o objetivo da demonstração.

Ao fim das discussões, foi apresentada uma resolução da atividade 4. Para reproduzi-la nesta dissertação, escolhemos a parte do relatório do Estudante 03, entregue ao fim do minicurso:

Figura 3. Solução da atividade 4 apresentada pela Estudante 3

Demonstração Passo-a passo – Atividade 4 (Provar que o axioma 2 é independente dos axiomas 1 e 3).

Vamos fazer um modelo para esse sistema reduzido de axiomas.

Para provar que o axioma 2 é independente dos axiomas 1 e 3, devemos construir um modelo e provar que o axioma 2 é falso enquanto os outros dois são verdadeiros. Primeiro, nós construímos um conjunto de pontos que denominaremos de G e nele colocaremos a quantidade de pontos que desejarmos. Depois construiremos uma coleção de retas, chamado L, que serão formadas a partir do conjunto G. Lembrando que devemos construí-los para fazer com que o axioma 2 seja falso e os outros dois verdadeiros. Após construirmos o conjunto de pontos e a coleção de retas, analisaremos os três axiomas para sabermos se essas condições são válidas para cada um deles.

$$G = \{A, B, C, D\}$$

$$L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{A\}\}$$

Montados o conjunto de pontos e a coleção de retas, analisaremos a seguir os três axiomas.

Olhando para o conjunto e a coleção, podemos afirmar que:

Para o Axioma de Incidência 1 é válido, pois para qualquer dois pontos do conjunto G, existe uma e só uma única reta.

Para o Axioma de Incidência 2 **NÃO** é válido, pois a reta {A} da coleção L, contém um único ponto.

Para o Axioma de incidência 3 é válido, pois existe três pontos, como por exemplo {A, B, C}, no conjunto G que não pertencem a uma mesma reta.

Portanto, o Axioma de Incidência 2 é independente do 1 e do 3. Quando fizemos a reta {A}, demos condições para que isso acontecesse.

Em virtude do tempo, deixamos as demais atividades para serem feitas no encontro seguinte. Os estudantes comprometeram-se a reler tudo que haviam feito para uma melhor compreensão.

5.4 QUARTO ENCONTRO

Neste quarto encontro, as construções fluíram de modo análogo, os estudantes trabalhando em conjunto, em cada atividade, buscando uma interpretação adequada para o conjunto G de pontos da geometria de incidência e para a coleção apropriada de subconjuntos de G que formassem as retas. Com tais interpretações buscavam verificar a validade ou não de proposições formuladas no sistema axiomático. Isso revelou que já estavam compreendendo melhor o conceito de modelo.

No quarto encontro, tratamos das atividades 5, 6 e 7.

Como o conjunto G não necessitava ser o mesmo para todos os estudantes, cada um construiu seu próprio conjunto dos pontos. Ao final, discutimos em conjunto as soluções apresentadas por eles.

Esse encontro foi mais leve, eles já conheciam a proposta, já criavam modelos com mais facilidades e não precisamos intervir tão frequentemente nas discussões.

Na **atividade 5** pedíamos para provar a independência do Axioma de Incidência 3 em relação aos axiomas 1 e 2. O Axioma 3 estabelece que

“Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta”.

Para provar sua independência em relação aos demais axiomas da geometria de incidência, bastou escolher, na coleção das retas de uma dada interpretação, uma dada reta contendo todos os pontos dessa interpretação:

$$G = \{A, B, C, D\}, \quad L = \{\{A, B, C, D\}\}$$

É evidente que os axiomas 1 e 2 de uma geometria de incidência são válidos nessa interpretação e, portanto, o axioma 3 é independente dos outros dois.

A **atividade 6** pedia para os estudantes provarem a independência do Axioma Projetivo das Paralelas levando em consideração um sistema de

axiomas constituído pelos três Axiomas de Incidência. O Axioma Projetivo das Paralelas afirma que

“Duas retas quaisquer são concorrentes”.

Quanto a essa questão, pedimos que voltassem ao texto e lessem o conceito de concorrência, assim, poderiam construir a independência baseados no conceito que o próprio texto trazia.

Estudante 03: “Duas retas quaisquer são concorrentes”.

Estudante 05: Coincidentes são aquelas tipos, $AB \square$ e $BA \square$.

Estudante 03: É.

Estudante 01: São iguais.

Estudante 05: Então.

Estudante 03: Concorrentes assim. Concorrem... (Possivelmente a estudante tenha desenhado o que sabe sobre retas concorrentes).

Pesquisadora: Tem uma página que ele dar a definição de concorrentes, logo no início. Ele dar umas três definições.

Estudante 05: Aqui, “duas retas ou mais”, “duas ou mais retas são concorrentes se existe um ponto pertencente a todas essas retas”.

Pesquisadora: Se existir um ponto pertencente a essas duas ou mais retas, elas são concorrentes.

Estudante 05: Então aqui tá dizendo “Duas retas quaisquer são concorrentes”, então a gente tem que dizer que elas não são concorrentes.

Pesquisadora: Isso, aí vocês vão montar.

Estudante 03: Aí no caso vai dizer que elas coincidem, né?

Estudante 05: Então tem um ponto que não deve pertencer às mesmas retas, né isso?

Pesquisadora: Isso.

Estudante 05: Foi tão fácil.

Pesquisadora: É, assim mesmo.

A partir daí, após discussões, e algumas intervenções nossas, surgiram interpretações que permitiram comprovar a independência, em uma geometria de incidência do Axioma Projetivo da Paralelas. Uma delas foi:

$$G = \{A, B, C, D\}, \quad L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$$

Nessa interpretação, as retas $\{A, B\}$ e $\{C, D\}$ não são concorrentes, mas todos os três axiomas de uma geometria de incidência são proposições válidas na interpretação, que se constitui em um modelo de geometria de incidência na qual não vale o Axioma Projetivo da Paralelas.

Na **atividade 7**, pedíamos para construir um para uma geometria de incidência no qual não fosse válido o Axioma da Existência de Paralelas:

“Dada uma reta qualquer r e dado um ponto qualquer P , fora de r , existe pelo menos uma paralela a r passando por P ”.

Como vemos, nessa atividade, não requeríamos uma prova de independência de alguma proposição relativamente a um sistema de axiomas provar a independência, mas construir um modelo desse novo sistema de axiomas.

Pesquisadora: Veja o que ele tá pedindo na atividade 7.

Estudante 03: “Encontre um modelo no Sistema de Axiomas de Incidência, acrescido do Axioma da Existência das Paralelas”.

Estudante 01: “Sistema de Axiomas de Incidência, acrescido do Axioma da Existência de Paralelas”.

Estudante 03: Aí ele diz das paralelas.

Estudante 05: No caso é pra provar que tudo é verdade.

Pesquisadora: Isso. Vocês vão criar agora um conjunto aí, um sistema onde os axiomas 1, 2, 3 e esse das paralelas é verdadeiro.

Estudante 05: Que tudo seja verdadeiro.

Estudante 03: Aí meu Deus do céu.

Pesquisadora: Aí na definição ele diz o que é uma paralela.

Estudante 03: Onde é que tá a definição? Ah, tá aqui. [...] “Duas retas distintas são paralelas se não possuem ponto em comum”. Né isso? P não vai ser o ponto em comum, aí você vai fazer... Pera aí, calma.

Estudante 01: Elas são paralelas.

Estudante 05: Não possuem ponto em comum.

Estudante 03: Não possuem um ponto em comum. É óbvio demais aí a pessoa não sabe provar isso não.

Estudante 01: Essas duas são paralelas.

Estudante 03: Pera aí, eu num entendi não.

Estudante 05: Então essas aqui vão ser paralelas?

Estudante 01: Qual? Elas possuem ponto em comum?

Estudante 05: Ah, é verdade.

Estudante 01: Porque elas são distintas, mas elas podem ser paralelas e distintas.

Estudante 03: Se elas são paralelas...

Após a discussão acerca de paralelas, eles observaram que a interpretação que resolveu a atividade 6 também resolve a atividade 7, pois nessa interpretação de uma geometria de incidência vale o Axioma de Existência de Paralelas. A verificação foi feita, tomando todas as possibilidades de retas e todas possibilidades de pontos fora da reta.

Com essa atividade resolvida, deixamos para o quinto e último encontro a atividade 8.

5.5 QUINTO ENCONTRO

Como combinado, neste encontro iríamos nos debruçar na **atividade 8**, que tinha como objetivo provar a independência do Axioma Euclidiano das Paralelas do sistema de axiomas constituído pelos três axiomas de incidência acrescido do Axioma da Existência de Paralelas.

No Axioma Euclidiano das Paralelas, é estabelecido:

“Dada uma reta qualquer r e dado um ponto qualquer P , fora de r , existe no máximo uma paralela a r passando por P ”.

Como vemos, o que distingue os dois axiomas de paralelas é que nesse último é exigida a unicidade da paralela a uma reta por um ponto fora dela.

Não diferente das atividades anteriores, para eles era inconcebível que, por um mesmo ponto, pudessem passar duas retas distintas e paralelas à outra reta.

Estudante 01: Existe mais de uma. “Dada uma reta qualquer... existe no máximo uma paralela passando por P ”. Como é que vai passar duas retas paralelas no mesmo ponto?

Estudante 03: É. Olha, começou a funcionar.

Pesquisadora: Como foi que vocês disseram aí que eu não prestei atenção.

Estudante 01: Como vai passar duas retas paralelas no mesmo ponto?

Estudante 03: Você faz duas retas serem coincidentes.

Estudante 01: Então elas não são paralelas.

Pesquisadora: Lembrem-se...

Estudante 03: Não. É uma reta e um ponto, aí que passa esse ponto aqui, passa só uma, aí eu posso passar duas aqui. Num é não? Isso não pode existir não, F...? Vai que exista?! Não, mas isso num vai dar certo não.

Estudante 01: Isso não são paralelas.

Estudante 03: Essas duas vão ser paralelas a essa. Ele quer uma paralela a r . Esse aqui é r , certo? E essa aqui é s . Aí pode existir uma...

Estudante 05: P .

Estudante 03: P que seja coincidente... também. Pode acontecer isso não?

(Se referem a um suposto desenho feito pela Estudante 03 o qual não tivemos acesso).

Pesquisadora: Lembrem-se que não é geometria euclidiana.

À medida que as discussões prosseguiram e as dificuldades em construir a negação do Axioma Euclidiano das Paralelas prosseguiram, resolvi ajudá-los a sair das ideias da geometria euclidiana plana, insistindo no que haviam resolvido anteriormente, neste minicurso, em que nos baseamos nos axiomas de uma geometria de incidência, com três axiomas apenas. Recordamos, também, que nessa geometria de incidência duas retas são paralelas quando não possuem ponto em comum.

A primeira coisa que propuseram para o conjunto G de pontos foi que nele houvesse quatro pontos, A , B , C e D , mas, após analisarem a coleção de retas, chegaram à conclusão que se, no conjunto, só houvesse quatro pontos não seria possível demonstrar a independência do Axioma Euclidiano das Paralelas, com isso aumentaram o conjunto para cinco pontos, A , B , C , D e E .

Essa construção foi feita todos juntos, no quadro, fui fazendo-os perceber que para cada reta que tomávamos na coleção L e um ponto fora dessa reta existiam duas paralelas, negando o Axioma Euclidiano e concluindo o que queríamos.

Pesquisadora: Cada vez que eu girar eu vou sempre encontrar quantas paralelas? (Me referia a um desenho que fizemos para visualizar melhor os pontos e as retas paralelas fora desse ponto).

Estudantes 02, 03 e 05: Duas.

Estudante 03: Que legal isso, né? Meu Deus que céu, pra provar paralelas a gente sofre.

Estudante 02: Desde que elas não passem no mesmo ponto.

Pesquisadora: Pois é. [...] Tá vendo. Foi difícil?

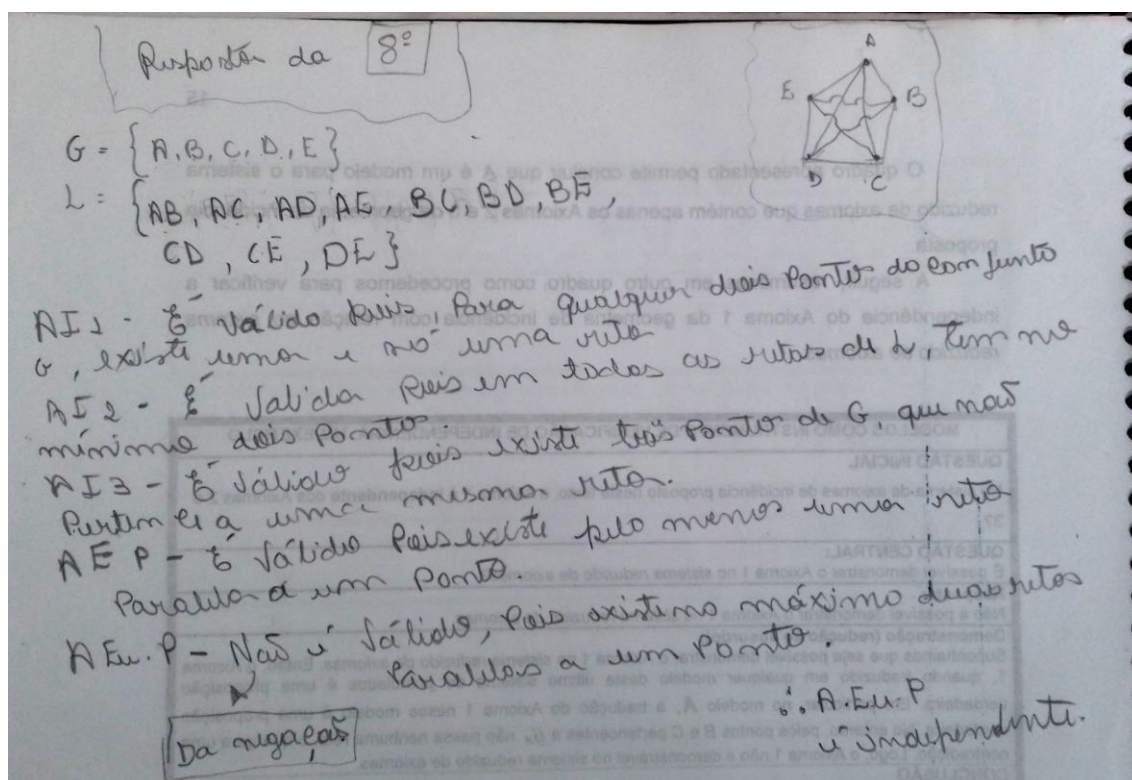
Estudante 02: Muito não.

Estudante 03: Ainda tem mais alguma coisa escondida nessa questão. Tem não, né?

Pesquisadora: Tem não.

Para registrar o trabalho coletivo feito para construir uma interpretação de uma geometria nas condições solicitadas na atividade 8, vamos reproduzir o texto que consta do relatório da estudante 03, escrito após a conclusão do minicurso:

Figura 4. Resolução da atividade 8 segundo o registro da Estudante 3



Fonte: Arquivos pessoais.

É interessante observar que sempre demonstram insegurança, mesmo diante do término da questão, chegando onde se queria demonstrar, eles não acreditam naquilo que aprenderam. É aquela frase incutida desde o início da escolaridade, se está fácil é porque está errado.

Pesquisadora: Tá vendo, foi difícil? Não, né?

Estudantes 02 e 04: Não.

Estudante 03: Não. É que a gente não é acostumado.

Estudante 02: O negócio é abrir os caminhos.

Estudante 03: É, abrir os caminhos.

Com a resolução da atividade 8, encerramos nosso minicurso e discutimos como poderíamos realizar em conjuntos e à distância um trabalho de avaliação da experiência que nos fornecesse subsídios para nossa prática de professores de Matemática.

Os procedimentos e resultados dessa etapa ocupam a próxima seção desta dissertação.

5.6 ANÁLISE SUMÁRIA DOS ENCONTROS

Ao final dos encontros, ficou estabelecido que os estudantes preparariam um relatório sumário do que havia sido trabalhado em cada encontro, o que julgavam ter aprendido e quais as dificuldades que tiveram na aprendizagem durante o minicurso. Além disso, deviam escolher uma das demonstrações estudadas no minicurso e a escreverem.

O relatório visava obter mais informações acerca do ocorrido durante o minicurso e, acima de tudo, ter uma ideia, ainda que aproximada, das reações causadas nos estudantes em face do conteúdo desse minicurso, um dos objetivos específicos desta dissertação. Ao final, recebemos apenas quatro relatórios de um total de cinco sujeitos.

Outra fonte de informações, que pudemos utilizar com o mesmo fim, decorreu do fato de que os estudantes foram estimulados a fazer anotações no texto base que lhes foi distribuído desde o primeiro encontro. Tivemos acesso a esses materiais que, depois, foram devolvidos.

Quando percorremos as seções anteriores deste capítulo, podemos ver que não há apenas um relato do experimento, mas, simultaneamente, são feitas análises dos eventos didáticos que foram se sucedendo ao longo da resolução das atividades.

Nosso objetivo, a seguir, é apresentar alguns traços gerais dessas análises que nos permitam uma visão de conjunto da experiência realizada. Escolhemos organizar por temas nossos comentários gerais.

Iniciamos pela observação de que os estudantes participantes do minicurso revelaram um grau significativo de dificuldade em lidar com o processo de **demonstração lógico-dedutiva**, que é característica da validação científica do saber matemático. Acrescente-se a esse fato, que eles já haviam percorrido boa parte de sua trajetória curricular de formação de professor de matemática, além de que já haviam cursado duas disciplinas – às quais atribuímos uma denominação genérica de *Fundamentos da Matemática* – em cujas ementas havia conteúdos de lógica e de teoria dos conjuntos, disciplinas nas quais, em geral, o método dedutivo é utilizado com mais frequência e rigor.

Indícios dessas dificuldades surgiram na utilização do método de redução ao absurdo ou na negação das proposições condicionais “Se *a*, então, *b*”, em que *a* e *b* são proposições matemáticas envolvendo quantificadores.

Também verbalizaram durante os diálogos que não achavam nada fácil “descobrir o caminho a seguir” para realizar uma demonstração do tipo da que continha a atividade 3:

*“Em uma geometria de incidência, para todo ponto *P*, existem pelo menos duas retas distintas que passam em *P*”.*

Durante o minicurso, igualmente, manifestaram que, mesmo sabendo ter a ideia de uma demonstração, não achavam nada imediato “colocarem no papel” a referida demonstração, com todos os detalhes necessários.

As dificuldades mencionadas nos parágrafos precedentes estão vinculadas às três primeiras atividades propostas aos estudantes. A seguir, comentamos as questões relacionadas às demais atividades, todas relativas aos conceitos de **sistema de axiomas** e de **modelo** de um desses sistemas.

Como dissemos em nosso objetivo geral, o foco do minicurso era o conceito de modelo de um sistema de axiomas de incidência. No sistema axiomático de incidência adotado no texto base do minicurso, há três termos primitivos e três axiomas que regem as relações entre esses termos primitivos. Uma das maiores fontes de dificuldades reveladas pelos estudantes foi romper com o conhecimento adquirido em sua formação escolar, na qual a palavra geometria está intrinsecamente associada à geometria euclidiana.

A dificuldade, várias vezes observada por nós, e verbalizada pelos estudantes, era compreender os objetos de um modelo em que pontos e retas não fossem aqueles entes que conheciam desde a geometria escolar. Vejamos, por exemplo, na atividade 4, o quanto os estudantes reagiram a construir um modelo de geometria de incidência em que uma das retas possuía apenas um ponto. Ou, de maneira análoga, quando, na atividade 5, precisavam de um modelo com apenas uma reta contendo todos os pontos da geometria.

No seu relatório, a Estudante 05 escreve em poucas palavras o pensamento que, certamente, resume o que se passou com todos os seus colegas. Ela resume que a dificuldade que encontrou no minicurso, foi:

*“**Desconstruir** os conceitos que vimos na Geometria Euclidiana Plana para formular novos conceitos mais abstratos e expor matematicamente nosso pensamento”. (grifo nosso)*

Esse processo de desconstrução citado pela estudante é, sem dúvida, um processo lento e difícil. Uma das motivações de nosso trabalho foi o de investigar os efeitos de um material que, ao mesmo tempo, estivesse contido nas ementas das disciplinas de uma licenciatura trouxesse um tema inovador que pudesse provocar algum “desequilíbrio” no conhecimento prévio dos estudantes. Esse aspecto desafiador, na nossa avaliação, provocou alguma evolução da compreensão dos participantes, ao longo do minicurso. Sinais dessa evolução são comentados no que segue.

Vamos iniciar com o depoimento contido no relatório do Estudante 02, ao escrever sobre as dificuldades que ele havia tido no início do minicurso:

“No primeiro encontro tive o primeiro contato com este tipo de matemática, o conceito muito diferente e um pouco complicado de ser entendido quando nunca tinha sido visto, mas logo após a leitura do texto comecei a entender um pouco mais os significados de cada axioma citado no texto [...]”.

O que observamos ao longo do minicurso foi uma evolução positiva na compreensão da ideia de modelo e do seu emprego como ferramenta para provar a independência de proposições relativamente a um sistema de axiomas. Novamente, recorremos ao depoimento de uma participante, a Estudante 03, ao descrever o 4º encontro em seu relatório. Nesse encontro tratamos das atividades 5, 6 e 7:

“Já estava mais familiarizada com esse processo que fazíamos com os modelos e até consegui fazer mais rápido, mas ainda encontrava dificuldade em passar esse pensamento para o papel de forma mais formal. Me compliquei mais na atividade 7, onde precisaríamos encontrar um modelo para o sistema de axiomas de incidência e acrescentando o axioma de existência das paralelas. Mas, com alguns estímulos, consegui terminar de forma organizada.”

Outro momento em que observamos uma evolução na capacidade de os estudantes recorrerem ao conceito de modelo apresentado no texto base ocorreu na atividade 8. Nela, repetiu-se o já mencionado impasse que surge quando a intuição geométrica adquirida previamente resiste à possibilidade de existência de duas paralelas a uma reta passando por um ponto fora da reta. Quando, estimulados a reverem os modelos que já haviam construído, os estudantes prosseguiram e resolveram corretamente a atividade.

Em uma intervenção no encerramento do minicurso procuramos estimular os participantes a se interessarem por aprofundar a aprendizagem das demonstrações em Matemática e, além disso, do conceito de sistema de axiomas e de modelo de um desses sistemas. Essas indicações visavam estimulá-los a fugir da abordagem desses temas de modo a se procurar reprodução sem compreensão dos significados dos conteúdos e procedimentos matemáticos.

Com essas observações, encerramos a visão sumária das análises dos eventos ocorridos durante o minicurso.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entre as várias motivações iniciais deste trabalho, havia um núcleo: defender a importância do desenvolvimento da capacidade de lidar com o método lógico-dedutivo nos cursos de formação do professor de Matemática. Essa motivação era amparada em recomendações curriculares nacionais, em documentos associados à avaliação de livros didáticos e na literatura em Educação Matemática.

Em contrapartida, essa mesma literatura incluía trabalhos revelando que nos cursos de formação inicial tal demanda não estava sendo atendida, pela predominância de um ensino que levava mais à reprodução de demonstrações do que à capacidade de construí-las.

Traçamos, então, o caminho de uma pesquisa-intervenção, de cunho exploratório, em torno de um minicurso a ser ministrado a alunos em fase intermediária de um curso de formação de professores. Fizemos a escolha de um tema pouco estudado nas disciplinas que são genericamente denominadas de *Fundamentos da Matemática*: o conceito de modelo de um sistema axiomático. Em particular, optamos por escolher um sistema axiomático de uma geometria plana de incidência.

Nossa intenção básica era realizar um trabalho colaborativo e desafiador com estudantes de licenciatura, que pudesse estimular esses futuros professores de Matemática a prosseguir suas reflexões sobre uma das características fundamentais do saber matemático: o método axiomático. É preciso alertar que isso não significava defender que esse tema viesse a ser objeto de estudo, em si mesmo, na matemática básica.

Ao final deste trabalho, podemos considerar que nossos objetivos tenham sido satisfatoriamente atingidos, dentro dos limites de uma investigação exploratória. As sessões do minicurso transcorreram dentro do planejado e com os participantes de perfil inteiramente adequado ao que desejávamos.

No âmbito pedagógico, convém salientar o ambiente de trabalho efetivamente colaborativo, não apenas entre os estudantes, mas, também, do grupo inteiro, com nossa presença. Para isso, contribuiu muito o entrosamento que os estudantes já haviam construído como colegas de classe, o que

favoreceu a ajuda mútua e os diálogos ativos e produtivos entre eles. Os estudantes foram participativos e interessados nas discussões, sem inibição de fazer perguntas, de formular conjecturas, discutir possíveis demonstrações, tudo isso em um clima leve e descontraído.

Como podemos ler nas análises dos eventos ocorridos durante o experimento, quando decorria um tempo excessivo sem que o trabalho autônomo dos estudantes progredisse para a resolução da atividade nós fazíamos uma intervenção. Iniciávamos essas intervenções estimulando os estudantes a recorrerem ao que já haviam conseguido compreender ou haviam construído nas etapas anteriores do próprio minicurso. De alguma forma, devolvíamos-lhes as dúvidas, mas com um chamado a que procurassem lidar com os novos conceitos e não com o que traziam das intuições da geometria escolar. Com isso, estimulávamos a construir ideias e argumentos próprios para resolverem as questões propostas. Procurava deixá-los independentes e mais seguros para serem ativos na aprendizagem. Afinal, não desejávamos que, ao término dos encontros, eles só reproduzissem o que estava no quadro da sala de aula ou no texto impresso.

O texto didático básico foi elaborado e utilizado intensamente durante o minicurso, incluídas leituras coletivas, intercaladas com pausas para discussões. Nessas circunstâncias, tornou-se difícil avaliar a acessibilidade do texto pelos leitores individuais. O que podemos considerar positivo é que há um texto disponível para novos experimentos e eventuais modificações, versando sobre o conceito de modelo de um sistema de axiomas para uma geometria plana de incidência.

Com respeito às reações observadas nos estudantes, procedemos, durante todo o minicurso, à observação-participante e ao exame dos diálogos gravados. Ao final de cada encontro, registramos, também, os eventos mais significativos nele observados. Esses procedimentos alimentaram as análises apresentadas nesta dissertação.

Uma visão panorâmica da análise do conjunto dos encontros mostra-nos uma fase inicial de desestabilização do conhecimento anteriormente adquirido e de verbalização pelos estudantes de que isso ocorria por deficiências na formação anterior.

Não faz parte deste trabalho validar as críticas correntemente formuladas sobre as deficiências acima referidas. Esses depoimentos, no entanto, juntam-se a conclusões da parte literatura em Educação Matemática referenciadas na Introdução desta dissertação. E, acima de tudo, na fase inicial do minicurso, observamos nítidas dificuldades dos estudantes em construir uma demonstração, em particular, em geometria.

Posteriormente, no entanto, com o prosseguimento das discussões em sala de aula e com os repetidos apelos ao texto base, a ideia de sistema axiomático e de modelo de um tal sistema assumiu contornos mais nítidos e podemos observar o desempenho satisfatório dos estudantes na resolução da última atividade.

Fica evidente que muitos desafios e questões reclamam mais investigações, desde o próprio texto base até a própria metodologia de pesquisa adotada neste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem, 2007**. Disponível em:
<http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf>
. Acesso em: 24 jul. 2014.

BALACHEFF, Nicolas. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble, n. 109, 2004.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. 2002. Disponível em:
<<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>>. Acesso em: 09 jan. 2014.

BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012**. Brasília: Secretaria da Educação Básica, 2011. Disponível em:
<<http://www.fnnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-medio>>. Acesso em: 27 maio 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática**. 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 09 jan. 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 09 jan. 2014.

FERREIRA, Emília Barra; SOARES, Adriana Benevides; LIMA, Josefino Cabral. As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a

formação de professores através do uso de novas tecnologias. **Boletim de Educação Matemática - Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 22, p.185-207, set. 2009. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221876009>>. Acesso em: 07 maio 2015.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **Boletim de Educação Matemática - Bolema**, Rio Claro, v. 18, n. 15, p.91-99, set. 2002.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 262 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/2545/000321616.pdf?sequen>>. Acesso em: 27 maio 2016.

HEGENBERG, Leonidas. **Dicionário de Lógica**. São Paulo: Epu, 1995.

KIRNEV, Debora Cristiane Barbosa. **Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas**. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/arquivos_pdf/KIRNEV_dissertacao.pdf>. Acesso em: 08 out. 2014.

LOPES, Nayara Suyanny de Oliveira. **Demonstrar: conceitos e importância no processo de ensino-aprendizagem em matemática**. 2014. 53 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, Mossoró, 2014.

LOURENÇO, Marcos Luiz. A Demonstração com a Informática Aplicada à Educação. **Boletim de Educação Matemática - Bolema**, Rio Claro, v. 18, n. 15, p.100-111, set. 2002.

MACHADO, P. F., **Fundamentos de Geometria Plana**, disponível em <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_plana.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2016.

MANFIO, Fernando. **Fundamentos da Geometria**. Disponível em: <<http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/manfio/Fundamentos.pdf>>. Acesso em: 21 mar. 2017.

MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de. **Demonstração "Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino da Geometria"**. 2009. 189 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Dissertacao_elizabet.pdf>. Acesso em: 07 dez. 2015.

MILLMAN, Richard S. & PARKER, George D., **Geometry: a metric approach with models**, 2nd. Edition, Springer-Verlag, New York, 1991,

MORTARI, Cezar Augusto. **Introdução à lógica**. São Paulo: Unesp, 2001.

NEVES, Regina da Silva Pina; FÁVERO, Maria Helena. **A pesquisa de intervenção no desenvolvimento de competências conceituais junto a estudantes repetentes em matemática**. 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T21_CC1825.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2017.

PIRES, Célia Maria Carolino, Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Escola Básica, in Educação Matemática em Revista, Edição Especial, São Paulo, 2002.

ROCHA, Marisa Lopes da; AGUIAR, Katia Faria de. **Pesquisa-Intervenção e a produção de novas análises**. 2003. Disponível em: <<http://producoes-em-institucional.webnode.com.br/news/pesquisa-intervencao-e-a-producao-de-novas-analises/>>. Acesso em: 16 jan. 2017.

RODRIGUES, Margarida. A Integração Curricular da Demonstração. **da Investigação Às Práticas: Estudo de Natureza Educacional**, Lisboa, v. 02, n. 02, p.53-77, jul. 2012. Disponível em: <<http://ojs.eselx.ipl.pt/index.php/invep/article/view/50/50>>. Acesso em: 09 dez. 2015.

SANT'ANNA, Adonai. **O que é um axioma**. Barueri: Manole, 2003.

SOUSA, Enne Karol Venancio de. **Um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas**. 2010. 133 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010. Disponível em: <http://bdtd.ufrn.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4207>. Acesso em: 18 dez. 2013.

ANEXO A – MATERIAL DIDÁTICO

O CONCEITO DE MODELO DE UM SISTEMA AXIOMÁTICO⁵

1. Comentários sobre o método axiomático

Iniciamos por discutir alguns aspectos gerais do método axiomático-dedutivo. A respeito desse método, no Guia de Livros Didáticos (2011), escreve-se:

De maneira muito simplificada, o método axiomático consiste em adotar **conceitos primitivos** (conceitos não definidos, tais como ponto, reta e plano) e **axiomas**⁶ (proposições não demonstradas, como “*Por dois pontos passa uma única reta*”). Estes representam os papéis das “peças do jogo” e das “regras do jogo”, respectivamente. Tanto umas como as outras são aceitas, sem necessidade de justificativas, para que se possa começar a “jogar”. Com base nesses elementos, **por via puramente lógica**, são definidos **conceitos derivados** (por exemplo: ângulo, quadrado, paralelismo de retas no espaço etc.) e são deduzidas proposições que são os **teoremas**, como o de Pitágoras. (BRASIL, 2011, p. 25).

Nos níveis de maior sistematização, as proposições matemáticas podem ser todas escritas na forma “Se p , então q ”, p e q representado, por sua vez, duas outras proposições. Uma proposição deste tipo é chamada de **condicional**. Na proposição condicional representada acima, dizemos que p é a **hipótese** e q é a **tese**. A seguir, dois exemplos simples:

- d) Se um número natural n é múltiplo de 4, então n é par.
- e) Se um número natural n é par, então n é múltiplo de 4.

Uma demonstração, ou prova, em Matemática, é uma sequência finita de

⁵ Este texto contou com a participação do orientador desta dissertação e, ainda, da dedicada colaboração do professor Antônio Carlos Rodrigues Monteiro, do Departamento de Matemática da UFPE.

⁶ Neste texto usaremos o termo ‘postulado’ como sinônimo de ‘axioma’.

passos lógicos que permite partir de p e chegar a q . Nesses passos lógicos, só podemos utilizar: a hipótese; teoremas já demonstrados; os axiomas aceitos; e as definições já feitas. Em particular, as proposições p e q só podem envolver conceitos primitivos ou conceitos definidos com base nos primitivos.

Se uma proposição condicional é demonstrável em um sistemas de axiomas dizemos que tal condicional é um **teorema** (ou uma **proposição**) nesse sistema.

Dada uma condicional “Se p , então q ”, a condicional “Se q , então p ”, na qual as posições de p e de q foram permutadas, é dita a **recíproca** da primeira. Nos exemplos acima as condicionais (a) e (b) são recíprocas uma da outra.

Sabemos que uma condicional pode ser demonstrável e sua recíproca não ser demonstrável. Por exemplo, na axiomática dos números naturais (Axiomática de Peano) a condicional (a) é demonstrável e, portanto, um teorema nessa axiomática. Em contrapartida, a condicional (b), que é sua recíproca, não é demonstrável nessa axiomática. Nesse caso, sabemos que tal condicional não é demonstrável no sistema porque sua negação é demonstrável. A negação é:

f) Existe um número par que não é múltiplo de 4.

De fato, podemos provar essa condicional com um exemplo: o número natural 2.

Feitas essas considerações iniciais, neste segundo momento, vamos especificar, sumariamente, uma axiomática para uma geometria plana de incidência. Por tornar menos repetitivo o texto, usaremos, algumas vezes, a expressão ‘estrutura axiomática’ como sinônimo de ‘sistema axiomático’.

2. Axiomas de incidência

Para uma breve contextualização histórica, a expressão “axiomas de **incidência**” vem sendo empregada desde o fim do Século XIX, para designar um dos agrupamentos de axiomas da geometria que resultou dos estudos dos geômetras daquela época. Nesses estudos realizou-se uma revisão profunda dos axiomas da geometria dos *Elementos* de Euclides, destacando-se nessa

fase o famoso livro de David Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, 1899. Nos *Fundamentos* de Hilbert, os demais axiomas da geometria são os de **ordem**, os de **congruência**, o das **paralelas** e o de **continuidade**.

Um sistema de axiomas de incidência pode ser chamado de uma **geometria de incidência**. Nela, lidamos com pontos, retas e tratamos de saber, inicialmente, se um certo ponto incide em uma dada reta, ou equivalentemente, se uma reta incide em um ponto. Ainda que simples, a abordagem axiomática de tais conceitos pode trazer alguma dificuldade inicial quando começamos este estudo. Ocorre uma desestabilização de nosso modo habitual de pensar, porque guardamos imagens visuais e mentais desses objetos e dessas relações que, nem sempre, correspondem às propriedades estritamente prescritas na lista de axiomas adotados para reger esses objetos e relações.

Vamos recorrer à teoria intuitiva dos conjuntos e a sua simbologia usual. Isso nos permite traduzir a expressão “um ponto incide em uma reta” pela expressão mais familiar “um ponto pertence a uma reta”; escrever “uma reta incide em um ponto” usando a expressão “a reta passa pelo ponto”.

Dito isso, os termos primitivos e o conjunto de axiomas escolhido são expressos a seguir:

SISTEMA DE AXIOMAS DE UMA GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA
Termos primitivos Um conjunto G de elementos chamados pontos Uma coleção L composta de subconjuntos, não vazios, de G , que são denominados retas
Axiomas 1) Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes ao conjunto G , existe uma e uma só reta, denotada por r , da coleção L , tal que $A \in r$ e $B \in r$. 2) Toda reta r possui pelo menos dois pontos. 3) Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

Quando lemos a citação acima, entendemos que nada foi dito quanto às possíveis interpretações para os termos ‘conjunto’ ou para seus ‘elementos’ – os denominados *pontos* – que formam uma *geometria de incidência*⁷. Por isso,

⁷ Vamos, também, chamar uma geometria de incidência de *plano de incidência*.

‘geometria de incidência’ e ‘ponto’ podem ser considerados *conceitos primitivos* da axiomática a ser construída.

Tampouco foi dito quais são os subconjuntos que compõem a coleção das *retas*. Por isso, ‘reta’ é mais um conceito primitivo: a uma reta não está associada, de partida, nenhuma definição específica, além de ser um subconjunto do plano de incidência.

Na citação feita, recorre-se, ainda, ao termo ‘*pertence*’ que é um conceito primitivo da teoria dos conjuntos, simbolizado por $\in$. Igualmente, a notação usada nessa teoria pode ser empregada, a exemplo de: $\notin, \cup, \cap, \subset, \subseteq, \varsubsetneq, \emptyset$. É útil, também, observar que foram adotadas, no texto citado, algumas convenções: letras latinas maiúsculas representam pontos e as latinas minúsculas representam retas.

Pelo exposto, um plano de incidência, como proposto acima, é o que podemos denominar um sistema axiomático (ou uma estrutura axiomática).

Seguindo o método axiomático, com base nos conceitos primitivos e nos postulados de um plano de incidência do tipo apresentado, podemos estabelecer as primeiras definições:

Definição 1. Três ou mais pontos são **colineares** se pertencem a uma mesma reta. Dizemos, também, nesse caso, que existe uma reta que **passa** pelos pontos.

Definição 2. Duas ou mais retas são concorrentes se existe um ponto pertencente a todas essas retas.

Neste último caso, também costumamos dizer: “existe um **ponto comum** às retas” ou “as retas **possuem um ponto em comum**”. Observemos que não é exigido, na Definição 2 que as retas sejam distintas. No caso em que as retas que possuem apenas um ponto em comum, P , podemos usar as expressões “as retas **encontram-se em P** ” ou **cortam-se em P** ”.

Definição 3. Duas retas distintas são **paralelas** se não possuem ponto comum.

Com esse reduzido número de conceitos primitivos, axiomas e definições, podem ser deduzidos, por via lógica, algumas **proposições** ou **teoremas**. Por exemplo, é possível fazermos uma dedução lógica da proposição

Proposição 1: Se duas retas concorrentes, r e s , são distintas, então elas possuem, no máximo, um ponto em comum.

Para demonstrar essa proposição, iniciamos traduzindo-a na forma de uma condicional: “Se p , então q ”. Como dissemos acima, o símbolo p representa uma ou mais de uma sentença enfeixadas na denominação *Hipótese*. Por seu turno, o símbolo q representa uma ou mais de uma sentença englobadas pela denominação *Tese*. Na demonstração dessa proposição recorreremos ao denominado método de redução ao absurdo.

Para isso, começamos por construir a denominada “hipótese de absurdo”. Nela, supomos que vale a hipótese original e também vale a negação da tese original. No caso em foco, supomos que valem as condições:

Hipótese de absurdo	
r e s são concorrentes (possuem um ponto em comum, denotado por P)	Hipótese original
r e s são retas distintas	
r e s possuem outro ponto Q em comum	Negação da tese original

A demonstração por absurdo consiste em deduzir uma contradição lógica. Em que consiste essa contradição? Ela é construída quando provamos que vale uma dada proposição e

também vale a sua negação. Isso leva-nos a concluir que, admitida a hipótese original não podemos agregar a ela a negação da tese sem cair em contradição. Portanto, a tese original é válida, e a condicional fica demonstrada.

No nosso caso, basta observar que, da hipótese de absurdo, resulta que r e s são duas retas **distintas** que passam pelos pontos **diferentes** P e Q . Ora, o Axioma 1 exige que só uma reta passe por dois pontos distintos. Logo, r e s são necessariamente iguais. Mas, por hipótese, elas são distintas. Essa contradição completa a demonstração desejada.

Também é possível demonstrar:

Proposição 2: Existem, pelo menos, três retas distintas que não são concorrentes.

A demonstração dessa proposição pode ser construída de modo análogo ao que usamos na proposição anterior. De fato, o Axioma 3 é único dos três axiomas da geometria de incidência proposta que assegura que tal geometria possui pontos (noutros termos, não é uma geometria sem ponto algum, que, obviamente não teria qualquer interesse). Esse Axioma nos assegura que, no pano de incidência, existem 3 pontos, que podemos etiquetar de A , B e C e que, além disso, eles não são colineares. Consequentemente, o Axioma 1 nos permite concluir que existem 3 retas:

- 1) r_{AB} que passa por A e por B ;
- 2) r_{AC} que passa por A e por C ;
- 3) r_{BC} que passa por B e por C ;

Na tese da proposição, são estabelecidas duas condições:

- (a) as três retas são, duas a duas, distintas;
- (b) as três retas não passam por um mesmo ponto.

Parte (a)

Se, por absurdo, supusermos que $r_{AB} = r_{AC}$, os três pontos A , B e C pertenceriam a uma mesma reta, o que é contraditório como o que estabelece o Axioma 3: os três pontos não são colineares. A mesma argumentação vale para as hipóteses de absurdo: i) $r_{AB} = r_{BC}$ $r_{AC} = r_{BC}$. Logo as retas são distintas duas a duas.

Parte (b)

A segunda parte da prova resulta da Proposição 1. As retas concorrentes e distintas r_{AB} e r_{AC} só podem ter em comum o ponto A , mas este ponto não pode pertencer à reta r_{BC} . O mesmo argumento pode ser usado para as retas r_{AB} e r_{BC} e para as retas r_{AC} e r_{BC} .

Com isso resulta demonstrada a Proposição 2.

Mais três proposições podem ser demonstradas:

Proposição 3: Para toda reta r , existe, pelo menos, um ponto P que não pertence a r .

Proposição 4: Para todo ponto P , existe pelo menos uma reta r que não passa em P .

Proposição 5: Para todo ponto P , existem pelo menos duas retas distintas passando por P .

3. Modelos de um sistema de axiomas

Passemos, agora, a refletir sobre um tema-chave neste texto. Um conceito essencial no estudo de uma axiomática é o de **modelo**. Segundo

MILLMAN&PARKER (1991), “um modelo nada mais é do que um exemplo”. Mais especificamente:

Suponhamos que temos uma determinada estrutura axiomática. (Podemos pensar nos casos do sistema composto pelos conceitos primitivos “plano de incidência”, ‘ponto’, ‘reta’ e ‘pertence’ e pelos postulados de incidência apresentados neste texto.)

Se atribuirmos aos conceitos primitivos um significado particular, dizemos que adotamos uma **interpretação** para esses conceitos.

Suponhamos, também, que a tradução dos postulados segundo a interpretação adotada são proposições válidas. Dizemos, então, que tal interpretação é um **modelo** do sistema de axiomas.

Vejamos um exemplo de um modelo M para a geometria de incidência proposta neste texto. Vamos interpretar o termo primitivo ‘ponto’ como um elemento do conjunto G de letras: G e o termo primitivo ‘reta’ por um dos elementos do conjunto L , formado por subconjuntos de G :

L .

Temos, assim, uma interpretação I do plano de incidência proposto. Será tal interpretação, de fato, um modelo M para a geometria de incidência proposta? Para responder a indagação temos que verificar se cada um dos três axiomas do sistema é uma proposição válida nessa interpretação. Vamos resumir em um quadro essas verificações.

GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA: Interpretação I é um modelo M			
Axioma 1	Sistema axiomático	Enunciado	Para quaisquer dois pontos A e B do conjunto G , existe uma e uma só reta, denotada por r , da coleção L , tal que $A \in r$ e $B \in r$.
	Interpretação	Enunciado	Para quaisquer dois pontos de G existe uma e uma só reta de L que passa por esses dois pontos.
		Validade/ Não validade	A afirmação na interpretação é válida. Para isso, basta testar os três pares de pontos do conjunto G e verificar que, para cada um desses pares, existe uma só reta de L que passa pelos pontos do par.
Axioma 2	Sistema axiomático	Enunciado	Toda reta r possui pelo menos dois pontos.
	Interpretação	Enunciado	Toda reta de L possui, pelo menos dois pontos.
		Validade/ Não validade	A afirmação na interpretação é válida, o que pode ser comprovado por simples verificação nas três retas que compõem L .
Axioma 3	No sistema axiomático	Enunciado	Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta.
	Na interpretação	Enunciado	O conjunto G possui, pelo menos três pontos não colineares.
		Validade/ Não validade	A afirmação na interpretação é válida, porque os três pontos de G não pertencem a nenhuma das retas de L .

A leitura do quadro acima comprova que a interpretação I é um modelo, denotado por M , para o plano de incidência proposto. Na verdade, é o plano de incidência com o menor número possível de pontos.

Agora, adotemos outra interpretação, representada por I_1 , para os termos primitivos da geometria de incidência proposta. Vamos traduzir o termo primitivo 'ponto' como um elemento do conjunto de objetos representados por letras:

$$G$$

e o termo primitivo 'reta' por um dos elementos do conjunto

Se construirmos um quadro análogo ao que apresentamos anteriormente, verificaremos que os Axiomas 2 e 3 dos sistema axiomático proposto são válidos quando adotamos a interpretação I_1 . No entanto, quando interpretado segundo I_1 , o Axioma 1 não é válido porque há dois pontos, a saber, A e B que são incidentes a duas retas distintas, a que passa pelos pontos A e B e a que incide nos pontos A , B e D . Concluimos, então, que a interpretação I_1 **não é um modelo** para a geometria de incidência aqui apresentada.

GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA: Interpretação I_1 não é um modelo			
Axiom a 1	No sistema axiomático	Enunciado	Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes ao conjunto G , existe uma e uma só reta, denotada por r , da coleção L , tal que $A \in r$ e $B \in r$.
	Na interpretação o	Enunciado	Para quaisquer dois pontos de $G = \{A, B, C, D\}$ existe uma e uma só reta de $L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{A, B, D\}\}$ que passa nesses dois pontos.
		Validade/Não validade	A afirmação na interpretação não é válida. Para isso, basta observar que há dois pontos, a saber, A e B que pertencem a duas retas distintas, a que passa pelos pontos A e B e a que incide nos pontos A , B e D .
Axiom a 2	No sistema axiomático	Enunciado	Toda reta r possui pelo menos dois pontos.
	Na interpretação o	Enunciado	Toda reta de $L = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{A, B, D\}\}$ possui, pelo menos dois pontos.
		Validade/Não validade	A afirmação na interpretação é válida, o que pode ser comprovado por simples verificação nas retas do conjunto L .
Axiom a 3	No sistema axiomático	Enunciado	Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta.
	Na interpretação o	Enunciado	O conjunto G , possui, pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.
		Validade/Não validade	A afirmação na interpretação é válida, porque os três pontos A , B e C de G , não pertencem a nenhuma das retas de L .

4. CONCEITO DE INDEPENDÊNCIA DE UMA PROPOSIÇÃO RELATIVAMENTE A UM SISTEMA DE AXIOMAS

É conhecido que os primeiros sistemas axiomáticos relativos à geometria surgiram no período clássico da civilização grega e toma-se a obra “*Elementos*” de Euclides, escrita por volta de 300 a.C., como o marco fundamental do emprego do método axiomático. Na formulação original de Euclides, havia quatro postulados⁸ relativos a conceitos primitivos da geometria e mais um, o famoso 5º Postulado (ou Postulado das Paralelas). Em uma de suas versões posteriores, tal postulado prescreve: “*Para toda reta r e para todo ponto P , fora dessa reta, existe no máximo uma paralela à reta r , passando pelo ponto P .*”.

Um dos problemas mais famosos de toda a geometria até o século XIX foi o de saber se era possível demonstrar o Postulado das Paralelas apenas recorrendo aos quatro axiomas originais de Euclides e suas consequências lógicas. Se tal demonstração fosse possível, o 5º Postulado seria redundante enquanto um axioma, e passaria a ser uma proposição demonstrável, ou seja, um teorema da geometria euclidiana. Noutros termos, os axiomas de Euclides não formariam um sistema mais reduzido possível, por conter um axioma que pode ser demonstrado com base nos demais axiomas desse sistema. Com os extraordinários trabalhos dos matemáticos Saccheri, Legendre, Gauss, Lobachevsky, Bolyai, entre outros, ficou definitivamente estabelecido que o Postulado das Paralelas não pode ser demonstrado com base nos quatro axiomas⁹ de Euclides e de suas consequências.

Pelo exposto, investigar se um dado axioma de um sistema pode ser demonstrado com base nos demais postulados é uma das questões relevantes quando se estuda o método axiomático.

Para tratar dessa questão, a definição básica desta seção é:

Definição 4

⁸ Como se mencionamos, brevemente, no início deste texto, na sua obra, *Fundamentos da Geometria*, Hilbert realiza uma retomada crítica dos *Elementos* e os quatro postulados de Euclides são completados para um conjunto maior de axiomas agrupados em categorias que incluem as denominadas de incidência, de ordem e de congruência. O Postulado das Paralelas não está incluído nesses três blocos de axiomas.

⁹ Nos termos dos *Fundamentos da Geometria*, de Hilbert, tal afirmação equivale a dizer que o Postulado das Paralelas não pode ser demonstrado com base nos axiomas de incidência, ordem e congruência.

Suponhamos dados um sistema de axiomas e uma condicional “Se p , então q ”. Se a condicional não é demonstrável no sistema de axiomas dizemos que “Se p , então q ” é **independente** desse sistema.

Um dos interesses em estudar o conceito de independência é o de buscar atender a um requisito de economia em um sistema de axiomas. Isso se traduz em procurar o menor número de axiomas com o qual podemos deduzir uma teoria com base nesses axiomas. Um **axioma** demonstrável com base nos demais axiomas do sistema pode ser considerado um **teorema** na teoria, que passará a possuir um conjunto mais reduzido de axiomas. A questão da independência aqui tratada, não é de menor importância teórica, como fica evidenciado pela história da geometria. Mais de 2 000 anos de estudos dos geômetras foi dedicado a provar que o Axioma das Paralelas era demonstrável com base nos demais axiomas da geometria euclidiana. Além disso, a prova da referida independência, só conseguida no século XIX, com base nos trabalhos de Lobachevsky, Bolyai e Gauss, constituiu-se em uma das maiores revoluções da história do conhecimento científico.

5. MODELOS COMO INSTRUMENTOS PARA TESTAR INDEPENDÊNCIA DE PROPOSIÇÕES RELATIVAMENTE A UM SISTEMA DE AXIOMAS

Suponhamos que M é um modelo de um sistema de axiomas. O ponto de partida fundamental é:

Um **teorema** (proposição demonstrada) no sistema de axiomas, quando traduzido na linguagem de um de seus modelos, é uma **proposição verdadeira** nesse modelo.

Uma explicação não-formal dessa afirmação é a que, a prova do teorema poderia ser realizada com os elementos e as relações traduzidas na interpretação (na linguagem) do próprio modelo, na medida em que, nessa

interpretação, o axiomas são proposições válidas. Por exemplo, tomemos a Proposição 1, demonstrada anteriormente em uma geometria de incidência que afirma: “Se duas retas concorrentes, r e s , são distintas, então elas possuem, no máximo, um ponto em comum.”. Em qualquer modelo M da geometria de incidência aqui proposta tal proposição é verdadeira, pois foi demonstrada para todos os modelos de uma só vez. Tal fato, além disso, traz à tona o papel unificador de um sistema de axiomas matemáticos.

A validade de um teorema – proposição matemática provada apenas com intervenção dos elementos do sistema de axiomas – quando traduzido na linguagem do modelo é fundamental para que possamos utilizar os modelos como ferramenta para testar se um dado postulado¹⁰ é **independente** de um dado sistema de axiomas.

Para esclarecer melhor o conceito de independência, vamos verificar se o primeiro axioma de incidência (Axioma 1: “Por dois pontos distintos passa uma única reta.”) é ou não demonstrável com base nos outros dois postulados (Axioma 2 e Axioma 3).

AXIOMA 1 DA GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA
Termos primitivos Um conjunto G de elementos chamados pontos Uma coleção L composta de subconjuntos, não vazios, de G , que são denominados retas
Axioma 1 Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes ao conjunto G , existe uma e uma só reta, denotada por r , da coleção L , tal que $A \in r$ e $B \in r$.

Para conseguir nosso intento, suponhamos o sistema de axiomas definido no quadro abaixo, que convencionamos chamar, neste texto, “*sistema reduzido de axiomas*”:

¹⁰ Na verdade, essa ferramenta pode ser utilizada para testar se qualquer condicional “Se p , então q ”, em uma estrutura axiomática, é demonstrável ou não nessa estrutura, como estabelecemos na Definição 4.

SISTEMA REDUZIDO DE AXIOMAS
Termos primitivos Um conjunto G de elementos chamados <i>pontos</i> Uma coleção L composta de subconjuntos, não vazios, de G , que são denominados <i>retas</i>
Axiomas i) Toda reta r possui pelo menos dois pontos. (Axioma 2 da Geometria de Incidência) ii) Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta. (Axioma 3 da Geometria de Incidência)

De início, busquemos modelos para o sistema reduzido de axiomas. Os quadros seguintes fornecem-nos esses modelos, com base em interpretações análogas às que já foram apresentadas anteriormente neste texto.

MODELO A PARA O SISTEMA REDUZIDO DE AXIOMAS		
Interpretação J		
O termo primitivo ‘ponto’ é um elemento do conjunto G_J de objetos representados por letras: G_J e o termo primitivo ‘reta’ por um dos elementos do conjunto: L_J .		
Prova de que a interpretação é um modelo		
Axioma (i) – (Axioma 2 da geometria de incidência)		
Sistema de axiomas	Enunciado	Toda reta r possui pelo menos dois pontos.
Interpretação	Enunciado	Toda reta de L_J possui pelo menos dois pontos.
Validade/Não validade	A afirmação na interpretação é válida. Para isso, basta contar os pontos das retas de L_J .	
Axioma (ii) – (Axioma 3 da geometria de incidência)		
Sistema de axiomas	Enunciado	Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta.
Interpretação	Enunciado	Existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma mesma reta de L_J .
Validade/Não validade	A afirmação na interpretação é válida. Para isso, basta observar que nenhuma reta de L_J passa pelos pontos A, B e D .	

O quadro apresentado permite concluir que J é um modelo para o sistema reduzido de axiomas que contém apenas os Axiomas 2 e 3 da geometria de incidência proposta.

A seguir, resumimos em outro quadro como procedemos para verificar a independência do Axioma 1 da geometria de incidência com relação ao *sistema reduzido de axiomas*.

MODELOS: instrumento de verificação de independência
Questão No sistema de axiomas de incidência proposto neste texto, o Axioma 1 é independente dos Axiomas 2 e 3?
Questão equivalente: É possível demonstrar o Axioma 1 no <i>sistema reduzido de axiomas</i>?
Resposta: Não é possível demonstrar o Axioma 1 no <i>sistema reduzido de axiomas</i>.
Demonstração (redução ao absurdo): Suponhamos que seja possível demonstrar o Axioma 1 no <i>sistema reduzido de axiomas</i>. Então, o Axioma 1, quando traduzido em qualquer modelo deste último sistema de postulados é uma proposição verdadeira. Em particular, no modelo J, a tradução do Axioma 1 nesse modelo é uma proposição verdadeira. No entanto, pelos pontos B e C pertencentes a G_J não passa nenhuma reta, o que gera uma contradição. Logo, o Axioma 1 não é demonstrável no sistema reduzido de axiomas e, portanto, o Axioma 1 é independente do <i>sistema de axiomas reduzido</i>, que contém apenas os Axioma 2 e 3 da geometria de incidência proposta neste texto.

ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 1

- a) Demonstrar a Proposição 3
- b) Demonstrar a Proposição 4
- c) Demonstrar a Proposição 5

Atividade 2

Na geometria de incidência proposta, provar que o Axioma 2 é independente dos Axiomas 1 e 3.

Atividade 3

Na geometria de incidência proposta, provar que o Axioma 3 é independente dos Axiomas 1 e 2.

Atividade 4

Suponhamos um sistemas de axiomas constituído pelos três axiomas de incidência acrescido de mais um:

Axioma Projetivo das Paralelas

Duas retas quaisquer são concorrentes.

Provar que o Axioma Projetivo é independente dos três axiomas de incidência.

Atividade 5

Suponhamos um sistema de axiomas constituído pelos três axiomas de incidência acrescido de mais um:

Axioma da Existência de Paralelas

Dada uma reta qualquer r e dado um ponto qualquer P , fora de r , existe pelo menos uma paralela a r passando por P .

Encontre um modelo para os sistema de axiomas de incidência acrescido do Axioma da Existência de Paralelas.

Atividade 6

Suponhamos o sistema de axiomas constituído pelos três axiomas de incidência acrescido de mais o quarto axioma, citado na atividade anterior: Encontre um modelo para o sistema de axiomas de incidência acrescido do Axioma de Existência de Paralelas. Vamos representar este sistema com o símbolo **E**.

Consideremos, então o axioma:

Axioma Euclidiano das Paralelas

Dada uma reta qualquer r e dado um ponto qualquer P , fora de r , existe no máximo uma paralela a r passando por P .

Provar que o Axioma Euclidiano das Paralelas é independente do sistema **E**.

Atividade 7

Prove que o plano cartesiano racional é um modelo de geometria de incidência.

Atividade 8

Modificando a interpretação dada por meio do plano cartesiano racional, encontre uma interpretação que não seja um modelo de geometria de incidência.