



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GUSTAVO KAYK COSTA BARROS

Métodos Estatísticos em Teoria Ergódica para Transformações Expansoras e Hiperbólicas

Recife

2022

GUSTAVO KAYK COSTA BARROS

Métodos Estatísticos em Teoria Ergódica para Transformações Expansoras e Hiperbólicas

Dissertação ao Programa de Pós-graduação em Matemático do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador (a): Ricardo Turolla Bortolotti

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

B277m Barros, Gustavo Kayk Costa
Métodos estatísticos em teoria ergódica para transformações expansoras e hiperbólicas / Gustavo Kayk Costa Barros. – 2022.
120 f.: il., fig.

Orientador: Ricardo Turolla Bortolotti.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2022.
Inclui referências e apêndice.

1. Geometria. 2. Decaimento de correlações. 3. Expansoras por partes. 4. Lacuna espectral. 5. Teorema Central do Limite. I. Bortolotti, Ricardo Turolla (orientador). II. Título.

516

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2022 - 203

GUSTAVO KAYK COSTA BARROS

*MÉTODOS ESTATÍSTICOS EM TEORIA ERGÓDICA PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS
E HIPERBÓLICAS*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 27/10/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ricardo Turolla Bortolotti (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr^a. Vanessa Ribeiro Ramos (Examinador Externo)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

Dedico aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, por tudo.

Aos meus familiares pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, Ricardo, por todo incentivo e apoio ao longo de todas conversas.

À todas as pessoas que ao longo da minha formação me ajudaram a ser um estudante melhor.

Um agradecimento especial à minha irmã e minha namorada, Kamyla e Mikaelle, por todo apoio e partilha da vida acadêmica. E ao meu amigo, Adson Palmeira, por tantas discursos matemáticas ao longo de nossas formações.

À banca por todas importantes considerações.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos ferramentas para o estudo de propriedades ergódicas e estatísticas de transformações expansoras, expansoras por partes e hiperbólicas. Conheceremos o operador de transferência, para o qual nos dedicaremos em boa parte do trabalho ao estudo do seu espectro quando atua sobre algum espaço de funções regulares (Hölder, Lipschitz, C^1 , Sobolev $W^{i,1}$, etc.). Neste estudo serão importantes as desigualdades de Lasota-Yorke, as quais implicam em diversos casos que o operador possui a propriedade de lacuna espectral – essa propriedade é obtida graças ao Teorema de Hennion. Como consequência estatística da propriedade de lacuna espectral, veremos que esta é suficiente para demonstrar o decaimento exponencial de correlações para as dinâmicas consideradas. As ferramentas citadas acima serão aplicadas para os casos de transformações expansoras e para expansoras por partes, onde obteremos a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas e o decaimento exponencial de correlações. Para algumas expansoras em dimensão 1 veremos também que a medida invariante tem densidade regular em algum espaço de Sobolev. Também apresentaremos o deslocamento de Markov como um exemplo ilustrativo da propriedade de lacuna espectral e do decaimento exponencial de correlações. Veremos também outras consequências da dinâmica ter lacuna espectral, como o Teorema Central do Limite, e como a lacuna espectral implica na dependência diferenciável de densidade invariante em relação à dinâmica, o que é conhecido como *linear response formula*. Ao final, iremos fazer um breve estudo de dinâmicas uniformemente contrativas. Aqui tomaremos espaços duais aos que foram usados para as expansoras e assim iremos obter regularidade para o operador de transferência associado à dinâmica contrativa. Com isto, daremos um exemplo de uma classe de dinâmicas hiperbólicas para a qual vamos definir uma norma de forma que temos uma desigualdade tipo Lasota-Yorke.

Palavras-chaves: decaimento de correlações; expansoras por partes; lacuna espectral; teorema central do limite; linear response formula; dinâmica hiperbólica.

ABSTRACT

In this work will present some tools for the study of ergodic and statistical properties of expanding maps and piecewise expanding maps. We will know the transfer operator, for which we will dedicate ourselves in a considerable part of this work to the study of its spectrum when acts on some space of regular functions (Hölder, Lipschitz, C^1 , Sobolev $W^{i,1}$, etc.). In this study will be important the Lasota-Yorke inequalities, which in many cases imply that the operator has spectral gap property - this property is obtained due to Hennion's Theorem. As statistical consequence of the spectral gap, we will see that this is enough to prove the exponential decay of correlations for the dynamics considered. The tools cited above will be applied for the cases of expanding maps and piecewise expanding maps, where we will obtain the existence of absolutely continuous invariant measure and exponential decay of correlations. For some one-dimensional expanding maps we will also see that the invariant measure has regular density in some Sobolev space. We will also present Markov shifts, as an illustrative example of the spectral gap property and the exponential decay of correlations. We will also see other consequences of the dynamic having spectral gap, as Central Limit Theorem, and how the spectral gap implies the differentiable dependence of the invariant density with relation to the dynamic, what is known as linear response formula. In the end, we will do a brief study of uniformly contracting dynamics. Here we will take dual spaces of those which were used for expanding maps and so we will obtain regularization for the transfer operator associated to a contracting map. With this, we will give an example of a class of hyperbolic dynamics for which we will define a norm so that we have a Lasota-Yorke type inequality.

Keywords: decay of correlations; piecewise expanding maps; spectral gap. central limit theorem; linear response formula; hyperbolic dynamic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Doubling map	29
Figura 2 – Lacuna espectral de P_T	35

LISTA DE SÍMBOLOS

P_T Operador de transferência associado à uma transformação T

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	UM POUCO DE TEORIA ERGÓDICA	15
2.1	TOPOLOGIA FRACA*	16
2.1.1	Definição e propriedades da topologia fraca*	16
2.1.2	Teorema de Portmanteau	16
2.1.3	Push-forward	18
2.2	OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA	19
2.3	TEOREMAS ERGÓDICOS	22
2.4	SISTEMAS ERGÓDICOS	23
2.4.1	Conjuntos e funções invariantes	23
2.5	DECOMPOSIÇÃO ERGÓDICA	24
2.5.1	Partições mensuráveis	25
2.6	CORRELAÇÕES	25
2.6.1	Sistemas Misturadores	26
2.6.2	Propriedades	26
3	UM PRIMEIRO EXEMPLO	28
3.1	OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA PARA TRANSFORMAÇÕES EXPAN- SORAS	28
3.2	DOUBLING MAP	29
3.2.1	Decaimento de correlações para doubling map	29
3.2.2	Propriedades Espectrais	33
3.2.3	Propriedades espectrais do doubling map	34
4	DESLOCAMENTO DE MARKOV	36
4.1	DESLOCAMENTO DE MARKOV	37
4.1.1	Ergodicidade	40
4.1.2	Mistura	43
4.2	DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES	44
5	TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS	50
5.1	DESIGUALDADE DE LASOTA YORKE PARA TRANSFORMAÇÕES EX- PANSORAS	50

5.1.1	Desigualdade de Lasota Yorke	50
5.1.2	Desigualdade de Lasota Yorke Lipschitz	52
5.2	EXISTÊNCIA DE MEDIDAS INVARIANTES REGULARES	53
5.3	CONVERGÊNCIA PARA O EQUILÍBRIO E MISTURA	54
5.3.1	Velocidade de convergência para o equilíbrio	59
5.4	DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES	60
5.4.1	Estimando $\int \psi \circ T^n g dm - \int g dm \int \psi d\mu$	60
5.4.2	Estimando $\int \psi \circ T^n g d\mu - \int g d\mu \int \psi d\mu$ (estimativa do decaimento de correlações)	61
5.5	LACUNA ESPECTRAL E O TEOREMA DE HENNION	62
5.6	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE	66
6	EXPANSORAS POR PARTES	67
6.1	ESPAÇO DE VARIAÇÃO LIMITADA E DESIGUALDADE DE LASOTA YORKE PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS POR PARTES	67
7	ESTABILIDADE E RESPOSTA PARA PERTURBAÇÕES	71
7.1	ESTABILIDADE DO PONTO FIXO	72
7.2	APLICAÇÃO PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS.	74
7.3	FAMÍLIA UNIFORME DE OPERADORES E CONTRAÇÕES UNIFORMES V_s	76
7.4	CONTINUIDADE LIPSCHITZ	79
8	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE	81
8.1	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES IDENTICAMENTE DISTRIBUIDAS	81
8.2	TEOREMA CENTRAL DO LIMITE COM LACUNA ESPECTRAL	82
9	LINEAR RESPONSE	89
9.1	APLICAÇÃO PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS EM S^1	94
9.1.1	O operador derivada e linear response para transformações expansoras	96
10	APLICAÇÕES UNIFORMEMENTE CONTRATIVAS	101
11	UMA OLHADA EM DINÂMICA HIPERBÓLICA	105
11.1	OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA ASSOCIADO A F	107
11.2	PROPRIEDADES GERAIS DAS NORMAS TIPO L^1	108
11.2.1	Convergência para o equilíbrio	109
11.3	NORMA FORTE E DESIGUALDADE DE LASOTA-YORKE	112

REFERÊNCIAS	116
APÊNDICE A – LEIS DOS GRANDES NÚMEROS	118

1 INTRODUÇÃO

A teoria ergódica tem por intuito estudar estatisticamente sistemas dinâmicos caóticos, que são imprevisíveis de maneira determinístico, mas que permitem uma análise probabilística do comportamento das órbitas. Em alguns exemplos, embora a dinâmica seja caótica, os objetos probabilísticos que descrevem o comportamento desse sistema são bastante regulares.

Buscamos fazer no Capítulo 2 uma breve apresentação dos principais conceitos e resultados em Teoria Ergódica, incluindo um operador muito importante ao longo dos nossos estudos que é o operador de transferência, pois através dele estudamos medidas invariantes absolutamente contínuas e suas propriedades.

Veremos no Capítulo 3 um exemplo simples, o *doubling map*, $T(x) = 2x \pmod{1}$. Veremos como age o operador de transferência para transformações expansoras, e teremos uma breve apresentação do que virá mais adiante, como as propriedades espectrais desse operador implicam boas propriedades estatísticas. Tais propriedades são análogas aos teoremas de probabilidade para variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas.

Outro exemplo que será abordado no Capítulo 4 será o deslocamento de Markov, que irá ilustrar as propriedades estatísticas: lacuna espectral e decaimento exponencial de correlações.

Outras ferramentas importantes que serão apresentadas no Capítulo 5 são as desigualdades do tipo Lasota-Yorke, as quais nos permitem provar a existência de medidas invariantes, através dela obteremos que o sistema é misturador. Ainda neste capítulo, veremos o Teorema de Hennion, que através dele conseguimos caracterizar a lacuna espectral do operador de transferência associado a nossa transformação, e com isto, obtemos também decaimento exponencial de correlações e o Teorema Central do Limite.

No Capítulo 6 estudaremos transformações expansoras por partes, onde estudaremos o espaço das funções de variação limitada e encontraremos uma desigualdade de Lasota-Yorke adequada para tal. No Capítulo 7 iremos estudar sobre a estabilidade e como um sistema responde ao sofrer pequenas perturbações, e buscaremos estudar a dependência das medidas invariantes em relação a essas perturbações.

No Capítulo 8 nos dedicaremos a estudar um pouco melhor uma consequência do sistema ter lacuna espectral, que é o Teorema Central do Limite, veremos também o teorema para quando temos variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas.

Por fim, buscamos no Capítulo 9 fazer um breve estudo a respeito de *linear response*, onde

buscamos estudar as propriedades estatísticas de um sistemas que foi perturbado. Parte desse estudo é baseado em (GALATOLO, 2022).

No Capítulo 10 faremos um estudo de dinâmicas uniformemente contrativas, assim como no caso de expansoras iremos encontrar propriedades de regularidades quando consideramos espaços de medida adequados, isto através da desigualdade de Lasota-Yorke. Porém neste caso não podemos esperar regularidades nos mesmos espaços. Iremos ver que considerando espaços duais aos que foram usados no caso de expansoras, é possível obter a regularização para o operador de transferência associado a uma aplicação contrativa.

Por fim, veremos um pouco sobre dinâmica hiperbólica. A abordagem de operador de transferência funciona para uma grande classe de sistemas com taxa uniforme de expansão e contração quando são considerados os espaços funcionais adequados. No Capítulo 11 estudaremos uma classe desses exemplos, que são as transformações solenoidais uniformemente hiperbólicas. Esse estudo será baseado na desintegração ao longo de variedades estáveis, e será mostrado como definir um espaço de medidas com sinal adaptado para o sistema.

2 UM POUCO DE TEORIA ERGÓDICA

Neste capítulo procuramos revisar (ou introduzir) conceitos fundamentais sobre teoria ergódica, na maior parte dos resultados não apresentaremos demonstrações, elas podem ser encontradas em (VIANA; OLIVEIRA, 2019). Ao longo do capítulo será introduzido o operador de transferência, sobre ele podem ser consultados também (LUCENA, 2014), (BOYARSKY; GORA, 1997) e mais especificamente (SARIG, 2020).

Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e seja $T : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável.

Definição 2.1. Dizemos que a medida μ é *invariante* por T se $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ para todo conjunto mensurável $E \subset M$. Podemos dizer também que T preserva μ .

Proposição 2.1. Sejam $T : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade em M . Então T preserva μ se, e somente se,

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ T d\mu$$

para toda função μ -integrável $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponhamos μ invariante. Vamos mostrar sucessivamente a igualdade para classe cada vez mais amplas. Iniciaremos mostrando para funções características. Por hipótese $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ para todo conjunto mensurável E . Como,

$$\int \mathcal{X}_E d\mu = \mu(E) \text{ e } \mu(T^{-1}(E)) = \int (\mathcal{X}_E \circ T) d\mu$$

temos que vale a igualdade para funções características. Segue da linearidade da integral, que a igualdade também é válida para funções simples. Vamos verificar agora que vale para toda função integrável. Dada qualquer função integrável $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, considere uma sequência $\{s_n\}_n$ de funções simples tal que $|s_n| \leq \phi$ onde ϕ é o limite da sequência. Daí, pelo teorema da convergência dominada,

$$\int \phi d\mu = \lim_n \int s_n d\mu = \lim_n \int (\phi \circ T) d\mu = \int (\phi \circ T) d\mu$$

O que mostra que vale a igualdade para toda função integrável se μ é invariante.

Reciprocamente, para funções características, temos $\int \mathcal{X}_E d\mu = \int (\mathcal{X}_E \circ T) d\mu$, segue que $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$, ou seja, μ é invariante. \square

2.1 TOPOLOGIA FRACA*

Nessa seção tomemos M um espaço métrico. O objetivo aqui é definir a *topologia fraca** no conjunto $\mathcal{M}_1(M)$ das medidas boleanas de probabilidade em M e discutir suas principais propriedades.

Representamos por $d(\cdot, \cdot)$ a função distância em M e por $B(x, \delta)$ a bola de centro $x \in M$ e raio $\delta > 0$. Dado $B \subset M$, denotamos $d(x, B) = \inf\{d(x, y); y \in B\}$ e chamamos δ -vizinhança de B ao conjunto B^δ dos pontos $x \in M$ tais que $d(x, B) < \delta$.

2.1.1 Definição e propriedades da topologia fraca*

Dada uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$, um conjunto finito $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ de funções contínuas limitadas $\phi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ e um número $\varepsilon > 0$, definimos

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(M); \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \varepsilon \text{ para todo } i \right\}$$

Note que a interseção de dois quaisquer conjuntos desta forma contém algum conjunto desta forma. Isto assegura que a família $\{V(\mu, \Phi, \varepsilon); \Phi, \varepsilon\}$ pode ser tomada como base de vizinhanças de cada $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$.

A *topologia fraca** é a topologia definida por estas bases de vizinhanças, isto é, os abertos da topologia fraca* são os conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(M)$ tais que para todo elemento $\mu \in \mathcal{A}$ existe algum $V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ contido em \mathcal{A} . Observe que esta topologia depende apenas da topologia de M e não da sua distância. Observe também que ela é Hausdorff.

Lema 2.1. Uma sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ na topologia fraca* se, e somente se,

$$\int \phi d\mu_n \rightarrow \int \phi d\mu \text{ para toda função contínua limitada } \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$$

2.1.2 Teorema de Portmanteau

Iremos aqui discutir algumas outras maneiras úteis de definir a topologia fraca*. Apresentaremos algumas relações que são formas naturais de se tomar vizinhanças de uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$. E pelo teorema de Portmanteau temos que todas essas vizinhanças dão origem à mesma topologia em $\mathcal{M}_1(M)$, que é a topologia fraca*.

Variações diretas da definição da topologia fraca* são obtidas tomando como base de vizinhanças dos seguintes conjuntos:

1. *Lipschitz*. Dado $\varepsilon > 0$ e $\Psi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ uma família finita de funções Lipschitz, considere

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ \eta \in \mathcal{M}_1(M); \left| \int \phi_i d\eta - \int \phi_i d\mu \right| < \varepsilon \text{ para todo } i \right\} \quad (2.1)$$

2. *Fechados em M* . Dado $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$ uma família finita de fechados, considere

$$V_f(\mu, \mathcal{F}, \varepsilon) = \{ \nu \in \mathcal{M}_1; \nu(F_i) < \mu(F_i) + \varepsilon \text{ para todo } i \} \quad (2.2)$$

3. *Abertos em M* . Dado $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ uma família finita de abertos, considere

$$V_a(\mu, \mathcal{A}, \varepsilon) = \{ \nu \in \mathcal{M}_1; \nu(A_i) > \mu(A_i) - \varepsilon \text{ para todo } i \} \quad (2.3)$$

Chamamos *conjuntos de continuidade* de μ qualquer conjunto boleteriano B tal que $\mu(\partial B) = 0$.

4. *Conjuntos de continuidade de μ* . Dado $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_N\}$ uma família finita de conjuntos de continuidades de μ , considere

$$V_c(\mu, \mathcal{B}, \varepsilon) = \{ \nu \in \mathcal{M}_1; |\mu(B_i) - \nu(B_i)| < \varepsilon \text{ para todo } i \} \quad (2.4)$$

Dadas duas topologias \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 num mesmo conjunto, dizemos que \mathcal{T}_1 é *mais fraca* que \mathcal{T}_2 (ou \mathcal{T}_2 é *mais forte* que \mathcal{T}_1) se todo subconjunto que é aberto em \mathcal{T}_1 também é aberto em \mathcal{T}_2 . E dizemos que as duas topologias são equivalentes se elas contêm exatamente os mesmos abertos.

Teorema 2.1. As topologias definidas pelas bases de vizinhanças (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) e por $V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ são todas equivalentes.

Suponhamos a partir de agora, que M seja separável, então $\mathcal{M}_1(M)$ munido da topologia fraca* é um espaço separável.

Dados $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(M)$, então

$$D(\mu, \nu) = \inf \{ \delta > 0; \mu(B) < \nu(B^\delta) + \delta \text{ e } \nu(B) < \mu(B^\delta) + \delta \text{ para todo boleteriano } B \}$$

Lema 2.2. A função D é uma distância em $\mathcal{M}_1(M)$. E é denominada *métrica de Levý-Prohorov*.

Proposição 2.2. Se M é espaço métrico separável, então a topologia induzida pela distância D coincide com a topologia fraca* em $\mathcal{M}_1(M)$.

Proposição 2.3. Se M é compacto, então toda sequência $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}_1(M)$ admite alguma subsequência que é convergente na topologia fraca*.

Teorema 2.2. Se M é compacto, então o espaço $\mathcal{M}_1(M)$ munido da topologia fraca* é compacto.

Definição 2.2. Um conjunto \mathcal{M} de medidas num espaço topológico é *justo* se para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K tal que $\mu(K^C) < \varepsilon$ para toda medida $\mu \in \mathcal{M}$.

Teorema 2.3. Seja M um espaço métrico separável completo. Um conjunto $K \subset \mathcal{M}_1(M)$ é justo se, e somente se, toda sequência em K possui alguma sequência convergente em $\mathcal{M}_1(M)$.

2.1.3 Push-forward

Dado $T : M \rightarrow M$ e qualquer medida η em M denota-se por $T_*\eta$ e chama-se *iterado* (ou *push-forward*) de η por T a medida definida por

$$T_*\eta = \eta(T^{-1}(B))$$

para cada conjunto mensurável $B \subset M$. Note que η é invariante por T se, e somente se, $T_*\eta = \eta$.

Lema 2.3. Sejam η uma medida e ϕ uma função mensurável limitada. Então

$$\int \phi dT_*\eta = \int \phi \circ T d\eta$$

Demonstração. Se $\phi = \chi_B$, então $\int \phi dT_*\eta = \int \phi \circ T d\eta$ é equivalente à $T_*\eta(B) = \eta(T^{-1}(B))$, o que de fato é verdade por definição. Segue da linearidade da integral que tal resultado é válido para funções simples. Por fim, sabemos que toda função mensurável limitada pode ser aproximada uniformemente por funções simples, e isso implica que o lema é verdadeiro em geral (de forma análoga a proposição 2.1). \square

Proposição 2.4. Se a aplicação $T : M \rightarrow M$ é contínua, então a aplicação $T_* : \mathcal{M}_1(M) \rightarrow \mathcal{M}_1(M)$ é contínua relativamente à topologia fraca*.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ uma família qualquer de funções contínuas limitadas. Por hipótese T é contínua, então a família $\Psi = \{\phi_1 \circ T, \dots, \phi_n \circ T\}$ também é de funções contínuas limitadas. Pelo lema anterior, temos

$$\left| \int \phi_i d(T_*\mu) - \int \phi_i d(T_*\nu) \right| = \left| \int (\phi_i \circ T) d\mu - \int (\phi_i \circ T) d\nu \right|$$

e, portanto, o lado esquerdo é menor que ε se o lado direito for menor que ε . Ou seja,

$$T_*(V(\mu, \Psi, \varepsilon)) \subset V(T_*\mu, \Psi, \varepsilon) \text{ para todo } \mu, \Psi \text{ e } \varepsilon.$$

Assim, T_* é contínua. □

2.2 OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA

Vamos apresentar nessa seção alguns resultados sobre um operador conhecido como *Operador de Perron-Frobenius*¹, ou como enunciamos, operador de transferência, o qual usaremos para obter propriedades estatísticas para nossa dinâmica. Além disso a construção nos dará naturalmente um espaço fraco para nossa aplicação.

Primeiramente vamos apresentar uma definição.

Definição 2.3. Uma medida μ é dita *não singular* com respeito a aplicação T , se

$$T_*\mu \ll \mu$$

onde $T_*\mu$ é uma medida em M definida por $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

Sejam (M, \mathcal{B}) um espaço mensurável, $T : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita neste espaço, e vamos supor que μ seja não singular com respeito a T .

O *operador de Koopman* é o operador linear

$$U_T : L^\infty(\mu) \rightarrow L^\infty(\mu),$$

$$U_T(\phi) = \phi \circ T$$

Temos

¹ Esse operador também é conhecido como *operador de Ruelle*, ou *operador de Ruelle-Perron-Frobenius*.

1. $\|U_T(\phi)\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty$;
2. Como as funções constantes são pontos fixos, temos $\|U\|_\infty = 1$.

Uma pergunta que podemos fazer é: será que existe um dual de U_T , ou seja, um operador $P_T : L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$ tal que para todo $\phi \in L^\infty(\mu)$ e $\psi \in L^1(\mu)$ tenhamos a seguinte relação dual

$$\int U_T(\phi) \cdot \psi d\mu = \int \phi \cdot P_T(\psi) d\mu \quad (2.5)$$

A resposta é sim, quando μ não é singular, e será dada com o seguinte resultado.

Teorema 2.4. Se μ é não singular então existe um único operador

$$P_T : L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$$

tal que para toda $\psi \in L^1(\mu)$ e para todo conjunto mensurável A , temos

$$\int U_T(\chi_A) \cdot \psi d\mu = \int \chi_A \cdot P_T(\psi) d\mu$$

Demonstração. Dada $f \in L^1(\mu)$ tal que $f \geq 0$, defina a medida μ_f por $\mu_f(E) := \int_E f d\mu$. Com esta definição e por μ ser não singular, temos $T_*\mu_f \ll \mu$. De fato, da não singularidade de μ , segue que $\mu(T^{-1}(E)) = T_*\mu(E) = 0$. Como $\mu(T^{-1}(E)) = 0$, temos $T_*\mu_f(E) = \mu_f(T^{-1}(E)) = \int_{T^{-1}(E)} f d\mu = 0$. Pelo teorema de Radon-Nykodym, está bem definida

$$P_T(f) := \frac{dT_*\mu_f}{d\mu}$$

Vejamos que, por essa definição, temos que a relação de dualidade é satisfeita quando $f \geq 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \int \chi_A \cdot P_T(f) d\mu &= \int \chi_A \cdot \frac{dT_*\mu_f}{d\mu} d\mu \\ &= \int_A \frac{dT_*\mu_f}{d\mu} d\mu \\ &= T_*\mu_f(A) \\ &= \mu_f(T^{-1}(A)) \\ &= \int_{T^{-1}(A)} f d\mu \\ &= \int f \cdot \chi_{T^{-1}(A)} d\mu \\ &= \int f \cdot \chi_A \circ T d\mu \\ &= \int f \cdot U_T(\chi_A) d\mu. \end{aligned}$$

Para $f \in L^1(\mu)$ arbitrário, decompos $f = f^+ - f^-$ e a função

$$P_T(f) := P_T(f^+) - P_T(f^-).$$

Vejamos que de fato é um operador linear, e mais que isso, que esse é o operador que queríamos.

$$\begin{aligned} \int \mathcal{X}_A \cdot P_T f d\mu &= \int \mathcal{X}_A \cdot (P_T(f^+) - P_T(f^-)) d\mu \\ &= \int \mathcal{X}_A \cdot P_T(f^+) d\mu - \int \mathcal{X}_A P_T(f^-) d\mu \\ &= \int U_T(\mathcal{X}_A) \cdot f^+ d\mu - \int U_T(\mathcal{X}_A) \cdot f^- d\mu \\ &= \int U_T(\mathcal{X}_A) \cdot (f^+ - f^-) d\mu \\ &= \int U_T(\mathcal{X}_A) \cdot f d\mu. \end{aligned}$$

Obtendo a equação desejada. □

Por fim, precisamos mostrar que o operador de transferência é linear. Para isto vamos precisar do seguinte lema.

Lema 2.4. Se f e g são funções integráveis tais que $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ para todo conjunto mensurável $A \subset M$ então $f = g$ μ -q.t.p. $x \in M$.

Demonstração. Seja $A = \{x \in M; f(x) \geq g(x)\}$. Então $(f - g)\mathcal{X}_A$ é uma função não negativa. O mesmo é verdade para $(g - f)\mathcal{X}_{A^c}$. Por hipótese, temos $\int (f - g)\mathcal{X}_A d\mu = 0$ e $\int (g - f)\mathcal{X}_{A^c} d\mu = 0$. Como são funções não negativas, segue que $f(x) = g(x)$ para μ -q.t.p. $x \in A$ e $g(x) = f(x)$ para μ -q.t.p. $x \in A^c$. Logo, $f = g$ μ -q.t.p. $x \in M$. □

Com isto, segue da dualidade que

$$\begin{aligned} \int_A P_T(f_1 + \alpha f_2) d\mu &= \int \mathcal{X}_A \cdot P_T(f_1 + \alpha f_2) d\mu \\ &= \int U_T(\mathcal{X}_A) \cdot (f_1 + \alpha f_2) d\mu \\ &= \int U_T(\mathcal{X}_A) \cdot (f_1) d\mu + \alpha \int U_T(\mathcal{X}_A) \cdot (f_2) d\mu \\ &= \int \mathcal{X}_A \cdot (P_T(f_1) + \alpha P_T(f_2)) d\mu \\ &= \int_A P_T(f_1) + \alpha P_T(f_2) d\mu \end{aligned}$$

Como vale para todo conjunto mensurável A , pelo lema anterior, temos a linearidade do operador. □

2.3 TEOREMAS ERGÓDICOS

Considere $E \subset M$ um conjunto mensurável com medida positiva e um ponto $x \in M$ qualquer, chamamos de *tempo médio de visita* de x em E o valor de

$$\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq k < n; T^k(x) \in E\}$$

Agora enunciaremos o teorema ergódico de Birkhoff (versão para tempos médios de visita).

Teorema 2.5. (Teorema Ergódico de Birkhoff) Seja $T : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante por T . Dado qualquer conjunto mensurável $E \in M$, o tempo médio de visita

$$\tau(E, x) = \lim_n \frac{1}{n} \#\{k = 0, 1, \dots, n-1; T^k(x) \in E\}$$

existe em μ -quase todo ponto $x \in M$. Além disso $\int \tau(E, x) d\mu(x) = \mu(E)$.

Temos também uma versão deste teorema para médias temporais.

Podemos ver que

$$\tau(E, x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)), \text{ onde } \varphi = \chi_E$$

então o teorema a seguir generaliza o anterior para o caso em que φ é um função integrável qualquer.

Teorema 2.6. (Teorema Ergódico de Birkhoff, para médias temporais) Seja $T : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por T . Dada qualquer função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, o limite

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) \quad (2.6)$$

existe em μ -q.t.p. $x \in M$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x)$$

A demonstração pode ser vista em (VIANA; OLIVEIRA, 2019).

Definição 2.4. Seja $T : M \rightarrow M$ e μ uma probabilidade invariante por T . Dizemos que a medida μ é uma *medida física* quando a bacia $B(\mu)$ tem volume positivo, onde a bacia de μ é dada por,

$$B(\mu) = \left\{ x; \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x))}{n} \rightarrow \int \varphi d\mu \text{ para toda } \varphi \text{ contínua.} \right\}$$

2.4 SISTEMAS ERGÓDICOS

Ao longo dessa seção suporemos que μ é uma medida de probabilidade invariante por uma transformação mensurável $T : M \rightarrow M$. Dizemos que o sistema (T, μ) é *ergódico* se, dado qualquer conjunto mensurável E , temos $\tau(E, x) = \mu(E)$ para μ -q.t.p. $x \in M$.

Nessa seção estudaremos dois tópicos: um sobre conjuntos e funções invariante, e um outro sobre caracterização espectral.

2.4.1 Conjuntos e funções invariantes

Dizemos que uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é *invariante* se $\varphi = \varphi \circ f$ em μ -q.t.p.. Ou seja, a menos de um conjunto de medida nula, a função é constante em toda trajetória de f . Além disso, dizemos que um conjunto mensurável $B \subset M$ é *invariante* se a sua função característica χ_B é uma função invariante. Em outras palavras, B é invariante se ele difere da sua pré-imagem $f^{-1}(B)$ por um conjunto de medida nula:

$$\mu(B \Delta f^{-1}(B)) = 0$$

Dizemos que uma função φ é constante em μ -q.t.p. se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = c$ para μ -q.t.p. $x \in M$.

Proposição 2.5. Seja μ uma probabilidade invariante de uma transformação mensurável $T : M \rightarrow M$. As seguintes condições são equivalentes:

1. Para todo conjunto mensurável $B \subset M$ tem-se $\tau(B, x) = \mu(B)$ para μ -q.t.p.
2. Para todo conjunto mensurável $B \subset M$ tem-se $\tau(B, \cdot)$ é constante para μ -q.t.p.
3. Para toda função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se $\tilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu$ para μ -q.t.p.
4. Para toda função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ a média temporal $\tilde{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em μ -q.t.p.
5. Para toda função integrável invariante $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se $\psi(x) = \int \psi d\mu$ para μ -q.t.p.
6. Toda função integrável invariante $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em μ -q.t.p.
7. Para todo subconjunto invariante A tem-se $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

8. Para qualquer par de conjuntos mensuráveis A e B vale

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

9. Para quaisquer funções $\varphi \in L^p(\mu)$ e $\psi \in L^q(\mu)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (U_T^j \varphi) \psi d\mu = \int \varphi d\mu \int \psi d\mu$$

Corolário 2.1. Suponha que o item 8 do teorema acima é satisfeita para todo A e B em alguma álgebra \mathcal{A} que gera a σ -álgebra dos conjuntos mensuráveis, então (T, μ) é ergódico.

Proposição 2.6. Seja μ uma probabilidade invariante, não necessariamente ergódica, por $T : M \rightarrow M$. Então, para quaisquer A e B mensuráveis, existe

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap B)$$

2.5 DECOMPOSIÇÃO ERGÓDICA

Aqui iremos enunciar o teorema de desintegração de Rokhlin, para isto precisamos de algumas noções.

Seja (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e \mathcal{P} será uma partição de M em conjuntos mensuráveis. Denotaremos por $\pi : M \rightarrow \mathcal{P}$ a projeção natural que associa a cada ponto $x \in M$ o elemento $\mathcal{P}(x)$ da partição que o contém. Essa projeção permite munir \mathcal{P} de uma estrutura de espaço de probabilidade, da seguinte forma. Primeiramente, dizemos que um conjunto \mathcal{Q} de \mathcal{P} é mensurável se, e somente se, a pré-imagem

$$\pi^{-1}(\mathcal{Q}) = \text{união dos elementos } P \text{ de } \mathcal{P} \text{ que pertencem a } \mathcal{Q}$$

é um subconjunto mensurável de M . É fácil ver que esta definição está correta: a família $\hat{\mathcal{B}}$ dos subconjuntos mensuráveis é uma σ -álgebra em \mathcal{P} . Em seguida, definimos a *medida quociente* $\hat{\mu}$ por

$$\hat{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})) \text{ para cada } \mathcal{Q} \in \hat{\mathcal{B}}.$$

Definição 2.5. Uma *desintegração* de μ relativamente a uma partição \mathcal{P} é uma família $\{\mu_P; P \in \mathcal{P}\}$ de probabilidades em M tal que, para todo conjunto mensurável $E \subset M$:

1. $\mu_P(P) = 1$ para $\hat{\mu}$ -q.t.p. $P \in \mathcal{P}$;

2. a aplicação $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $P \mapsto \mu_P(E)$ é mensurável;

3. $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\hat{\mu}(P)$.

Proposição 2.7. Suponha que a σ -álgebra \mathcal{B} admite algum gerador enumerável. Se $\{\mu_P; P \in \mathcal{P}\}$ e $\{\mu'_P; P \in \mathcal{P}\}$ são desintegrações de μ com respeito a \mathcal{P} , então $\mu_P = \mu'_P$ para $\hat{\mu}$ -q.t.p. $P \in \mathcal{P}$.

2.5.1 Partições mensuráveis

Dizemos que \mathcal{P} é uma *partição mensurável* se, restrita a algum subconjunto de M com medida total, ela é limite de uma sequência crescente de partições enumeráveis. Mais precisamente, a partição é mensurável se existe algum conjunto mensurável $M_0 \subset M$ com medida total tal que, restrito a M_0

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

para alguma sequência crescente $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \dots \prec \mathcal{P}_n \prec \dots$ de partições enumeráveis. E $\mathcal{P}_i \prec \mathcal{P}_{i+1}$ significa que todo elemento de \mathcal{P}_{i+1} está contido em algum elemento de \mathcal{P}_i . Então dizemos que \mathcal{P}_i é *menos fina* do que \mathcal{P}_{i+1} . Além disso, $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ é a partição mais fina tal que

$$\mathcal{P} \prec \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \text{ para todo } n$$

Os seus elementos são as interseções não vazias da forma $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ com $P_n \in \mathcal{P}_n$ para todo n .

Teorema 2.7 (Desintegração de Rokhlin). Suponha que M é espaço métrico completo separável e que \mathcal{P} é uma partição mensurável. Então a probabilidade μ admite alguma desintegração relativamente a \mathcal{P} .

2.6 CORRELAÇÕES

Definição 2.6. Em teoria da probabilidade, chamamos de *correlação* de duas variáveis aleatórias, X e Y , o número

$$C(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Note que a expressão $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ é positiva se X e Y estão do mesmo lado (maior ou menor) das respectivas médias, $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$, e é negativa no caso contrário.

Portanto, o sinal de $C(X, Y)$ indica se as duas variáveis apresentam, predominantemente, o mesmo comportamento ou comportamentos opostos, relativamente às suas médias; correlação próxima de zero sinaliza que os dois comportamentos estão pouco ou nada relacionados um com o outro.

Dada uma probabilidade invariante μ de um sistema dinâmico $T : X \rightarrow X$ e dadas funções mensuráveis $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ queremos analisar a evolução das correlações

$$C_k(\varphi, \psi) = C(\varphi \circ T^k, \psi)$$

quando o tempo k vai pro infinito. Então $C_k(\varphi, \psi)$ mede como o valor de φ em tempo k se correlaciona com o valor de ψ em tempo zero, até que ponto um valor tem influencia no outro.

2.6.1 Sistemas Misturadores

Sejam $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante.

Definição 2.7. A *sequência de correlações* de duas função mensuráveis $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por:

$$C_k(\varphi, \psi) = \int (\varphi \circ T^k) \psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu, \quad k \in \mathbb{N}$$

Definição 2.8. Dizemos que um sistema (T, μ) é *misturador* se

$$\lim_k C_k(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B) = \lim_k \mu(T^{-k}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B) = 0$$

2.6.2 Propriedades

Um sistema misturador é necessariamente ergódico. Com efeito, suponhamos que exista um conjunto invariante $A \subset M$ com $0 < \mu(A) < 1$. Tomando $B = A^c$ temos $T^{-n}(A) \cap B = \emptyset$ para todo n . Daí, $\mu(T^{-n}(A) \cap B) = 0$ para todo n , enquanto que $\mu(A)\mu(B) \neq 0$. Em particular, (T, μ) não é misturador.

Exemplo 2.1. Esse exemplo mostra que ergodicidade é uma propriedade estritamente mais fraca. Considere $\theta \in \mathbb{R}$ irracional. Sabemos que a rotação R_θ no círculo S^1 é ergódica para a medida de Lebesgue m . Por outro lado, (R_θ, m) não é misturador. Com efeito, sejam $A, B \subset S^1$ intervalos pequenos, podemos tomar com comprimentos menores que $1/10$, por exemplo, disto seque que $R_\theta^{-n}(A) \cap B = \emptyset$, (logo, $m(R_\theta^{-n}(A) \cap B) = 0$) para infinitos n 's.

Como $m(A)m(B) \neq 0$, temos que o limite das correlações das funções características de A e B não converge para 0.

Lema 2.5. Suponha que $\lim_n \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ para todo par de conjuntos A e B em alguma álgebra \mathcal{A} geradora da σ -álgebra dos conjuntos mensuráveis. Então (T, μ) é misturador.

3 UM PRIMEIRO EXEMPLO

Em nossos estudos iremos considerar um sistema dinâmico $T : M \rightarrow M$ que esperamos que exiba um comportamento caótico. Geralmente tomaremos M um espaço métrico compacto, e T contínua, ou pelo menos com finitos pontos de descontinuidade. E denotaremos por m a medida de Lebesgue em M .

Um motivador desse estudo é o material do Andrew Török, disponíveis no blog do Vaughn Climenhaga: (CLIMENHAGA, 2013b), (CLIMENHAGA, 2013c) e (CLIMENHAGA, 2013a).

3.1 OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS

Iremos ver alguns modelos que serão transformações expansoras (definiremos formalmente mais a frente). Essencialmente precisamos, além das hipóteses já enunciadas, que $|T'(x)| > 1, \forall x$.

Na seção 2.2 estudamos um pouco sobre o operador de transferência, vamos enunciar agora um resultado onde temos explicitamente a cara do operador de Perron-Frobenius para transformações diferenciáveis.

Proposição 3.1. Suponha que $T : M \rightarrow M$ é diferenciável, e o conjunto M seja o intervalo $[0, 1]$ ou M o círculo S^1 , e que M é a união disjunta de intervalos $\{I_j\}$ tal que T é injetiva em I_j e $T'(x) \neq 0$. Então o operador de Perron-Frobenius de T é dado pela seguinte expressão: Para todo $f \in L^1(\mu)$ e $x \in M$:

$$P_T(f)(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'(y)|}$$

Demonstração. Definindo $P_T(f)$ como acima, temos

$$\begin{aligned} \int g(x) \cdot P_T f(x) dm &= \sum_j \int_{T(I_j)} g(x) \cdot \frac{f(T_j^{-1}(x))}{|T'(T_j^{-1}(x))|} dm(x) \\ &= \sum_j \int_{I_j} g(T(x)) \cdot \frac{f(\tilde{x})}{|T'(\tilde{x})|} |T'(\tilde{x})| dm(\tilde{x}) \\ &= \sum_j \int_{I_j} g \circ T(\tilde{x}) f(\tilde{x}) dm \\ &= \int P_T g \cdot f dm. \end{aligned}$$

Assim vemos que satisfaz (2.5). □

Esse resultado será usado nos seções seguintes.

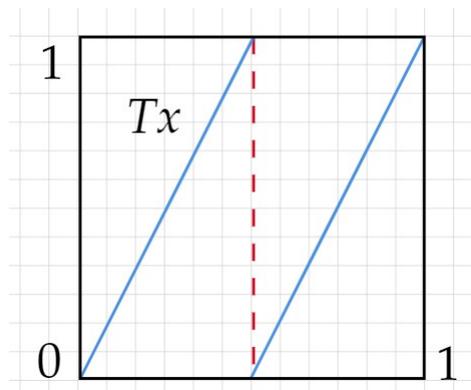
3.2 DOUBLING MAP

O primeiro modelo que iremos estudar será o *doubling map*, consideremos a aplicação $T : M \rightarrow M$, onde $M = [0, 1]$, definida por $T(x) = 2x \pmod{1}$. Esta preserva a medida de Lebesgue m .

De fato, seja $A = [a, b]$, notemos que $T^{-1}(A) = B \cup C$, onde $B = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$ e $C = \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right]$.
 Onde, $m(T^{-1}(A)) = m(B \cup C) = 2 \frac{b-a}{2} = b - a$.

Além disso $T'(x) = 2$ em quase todo ponto, T tem uma descontinuidade em $x = \frac{1}{2}$.

Figura 1 – Doubling map



Autor: Elaboração Própria

3.2.1 Decaimento de correlações para doubling map

O operador de transferência para doubling map pode ser escrito explicitamente por

$$(P_T \psi)(x) = \frac{1}{2} \left[\psi \left(\frac{x}{2} \right) + \psi \left(\frac{1+x}{2} \right) \right] \quad (3.1)$$

Notemos que a função constante $\mathbf{1}$ é ponto fixo.

$$(P_T \mathbf{1})(x) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} \left(\frac{x}{2} \right) + \mathbf{1} \left(\frac{1+x}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Que é equivalente ao fato da medida de Lebesgue m ser invariante.

O desafio agora é encontrar um espaço de Banach $B \subset L^1$ onde nosso operador de transferência P_T age como *gap spectral*.

Para nosso operador $T : M \rightarrow M$ consideremos o espaço $B = \text{Lip}$ das funções Lipschitz.

$$\text{Lip} = \{ \psi : M \rightarrow \mathbb{C}; \psi \text{ é Lipschitz} \}$$

Uma semi-norma natural para este espaço é

$$|\psi|_{\text{Lip}} = \sup_{x \neq y} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|}$$

Com efeito, dada qualquer função $\psi \in \text{Lip}$, é fácil ver que $|\psi|_{\text{Lip}} \geq 0$, note que $|\psi|_{\text{Lip}} = 0$ se, e somente se, ψ é constante.

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} |\lambda\psi|_{\text{Lip}} &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda\psi(x) - \lambda\psi(y)|}{|x - y|} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda| |\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} \\ &= |\lambda| \sup_{x \neq y} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} \\ &= |\lambda| |\psi|_{\text{Lip}} \end{aligned}$$

Dados $\psi_1, \psi_2 \in \text{Lip}$, temos

$$\begin{aligned} |\psi_1 + \psi_2|_{\text{Lip}} &= \sup_{x \neq y} \frac{|(\psi_1 + \psi_2)(x) - (\psi_1 + \psi_2)(y)|}{|x - y|} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{|\psi_1(x) - \psi_1(y) + \psi_2(x) - \psi_2(y)|}{|x - y|} \\ &\leq \sup_{x \neq y} \frac{|\psi_1(x) - \psi_1(y)|}{|x - y|} + \sup_{x \neq y} \frac{|\psi_2(x) - \psi_2(y)|}{|x - y|} \\ &= |\psi_1|_{\text{Lip}} + |\psi_2|_{\text{Lip}} \end{aligned}$$

Logo, $|\cdot|_{\text{Lip}}$ é de fato uma semi-norma. Com isto, vamos construir uma norma para Lip .

Seja

$$\|\psi\|_{\text{Lip}} = \|\psi\|_{\infty} + |\psi|_{\text{Lip}}$$

onde $\|\psi\|_{\infty} = \sup_{x \in M} |\psi(x)|$.

Proposição 3.2. $(\text{Lip}, \|\cdot\|_{\text{Lip}})$ é espaço de Banach.

Demonstração. Com efeito, seja $\{\psi_n\}_n$ de Cauchy com respeito a norma Lipschitz, $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $\|\psi_m - \psi_n\|_{\text{Lip}} < \varepsilon$. Então,

$$\|\psi_m - \psi_n\|_{\text{Lip}} = \|\psi_m - \psi_n\|_{\infty} + |\psi_m - \psi_n|_{\text{Lip}} < \varepsilon$$

De $|\psi_m - \psi_n|_{\text{Lip}} \geq 0$, segue que $\|\psi_m - \psi_n\|_{\infty} < \varepsilon$. Portanto, $\{\psi_n\}_n$ é de Cauchy com respeito a $\|\cdot\|_{\infty}$. Como $\{\psi_n\}_n$ é de Cauchy, temos que converge uniformemente, e por hipótese,

ψ_n é contínua para todo n , logo $\{\psi_n\}_n$ é equicontínua. Além disso, de $\{\psi_n\}_n$ ser de Cauchy, temos que é limitada, e em particular, existe $C > 0$ tal que $\psi_n(x) < C, \forall x \in M, \forall n$, logo $\{\psi_n\}_n$ é equilimitada. Com isto, segue do teorema de Ascoli-Arzelá, que $\{\psi_n\}_n$ possui uma subsequência uniformemente convergente, isto é,

$$\exists \psi_\infty(x) = \lim \psi_{n_k}(x)$$

Como, $\{\psi_{n_k}\}$ são Lipschitz, com $\|\psi_{n_k}\|_{\text{Lip}} \leq K$, temos

$$\frac{|\psi_{n_k}(x) - \psi_{n_k}(y)|}{|x - y|} \leq K,$$

fazendo $n_k \rightarrow \infty$ temos $|\psi_\infty|_{\text{Lip}} \leq K$, logo $\psi_\infty \in \text{Lip}$. De $\|\psi_{n_k} - \psi_n\|_{\text{Lip}} < \varepsilon$ e fazendo $n_k \rightarrow \infty$, temos $\|\psi_\infty - \psi_n\|_{\text{Lip}} \leq \varepsilon$ □

Proposição 3.3. Para T doubling map e qualquer função Lipschitz ψ , temos

$$|P_T\psi|_{\text{Lip}} \leq \frac{1}{2}|\psi|_{\text{Lip}}.$$

Demonstração. Usando (3.1) temos

$$\begin{aligned} |P_T\psi|_{\text{Lip}} &= \sup_{x \neq y} \frac{|(P_T\psi)(x) - (P_T\psi)(y)|}{|x - y|} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{1}{2} \left[\frac{\psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{1+x}{2}\right) - \psi\left(\frac{y}{2}\right) - \psi\left(\frac{1+y}{2}\right)}{|x - y|} \right] \\ &\leq \sup_{x \neq y} \frac{1}{4} \left| \frac{\psi(x) - \psi(y)}{|x - y|} \right| + \sup_{x \neq y} \frac{1}{4} \left| \frac{\psi(x+1) - \psi(y+1)}{|x - y|} \right| \\ &\leq \frac{1}{4}|\psi|_{\text{Lip}} + \frac{1}{4}|\psi|_{\text{Lip}} \\ &= \frac{1}{2}|\psi|_{\text{Lip}} \end{aligned}$$

□

Agora, indo para decaimento de correlações 2.8. Note que

$$\int (\phi \circ T^k)\psi dm = \int \phi(P_T^k\psi) dm \quad (3.2)$$

Toda $\psi \in \text{Lip}$ pode ser escrita unicamente como

$$\psi = c_\psi \mathbf{1} + \hat{\psi} \quad (3.3)$$

onde $c_\psi = \int \psi dm$ e $\int \hat{\psi} dm = 0$. Com isto, existe uma decomposição

$$\text{Lip} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus H, \quad H = \{\psi \in \text{Lip}; \int \psi dm = 0\}$$

Proposição 3.4. Essa decomposição é invariante por P_T .

Demonstração. De fato, $\mathbb{C}1$ é o autoespaço associado ao autovalor 1, então é invariante por P_T , pois $P_T 1 = 1$. Para verificar que H é invariante, observe que se $\int \psi dm = 0$, pela igualdade das integrais do operador de transferência, temos:

$$\int P_T \psi dm = \int (\mathbf{1} \circ T) \psi dm = \int \mathbf{1}(T(x)) \psi(x) dm = \int \psi dm = 0$$

□

Proposição 3.5. Dado $\hat{\psi} \in H$, temos $\|\hat{\psi}\|_\infty \leq |\hat{\psi}|_{\text{Lip}}$

Demonstração. Com efeito, $\hat{\psi}$ é contínua e existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $\hat{\psi}(x_0) = 0$. A imagem $\hat{\psi}([0, 1])$ é um intervalo que contém o 0 e o diâmetro é limitado por $|\hat{\psi}|_{\text{Lip}}$, isto é,

$$|\hat{\psi}(x_1) - \hat{\psi}(x_2)| \leq |\hat{\psi}|_{\text{Lip}} |x_1 - x_2| \leq |\hat{\psi}|_{\text{Lip}}.$$

□

Agora podemos estimar a taxa de decaimento de correlações. Pela definição 2.7 e usando (3.2) e a decomposição (3.3), temos

$$\begin{aligned} C_k(\varphi, \psi) &= \int \varphi \cdot (P_T^k(c_\psi \mathbf{1} + \hat{\psi})) dm - c_\psi \int \varphi dm \\ &= \int \varphi [c_\psi \mathbf{1} + P_T^k(\hat{\psi})] - c_\psi \varphi dm \\ &= \int \varphi \cdot P_T^k(\hat{\psi}) dm \end{aligned}$$

Usando a proposição 3.3 vamos estimar $P_T^k(\hat{\psi})$

$$\|P_T^k(\hat{\psi})\|_\infty \leq |P_T^k(\hat{\psi})|_{\text{Lip}} \leq \frac{1}{2^k} |\hat{\psi}|_{\text{Lip}} = \frac{1}{2^k} |\psi|_{\text{Lip}},$$

Disto, concluímos que para qualquer $\varphi \in L^1$ e $\psi \in \text{Lip}$, obtemos

$$|C_k(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|_1 \|P_T^k \hat{\psi}\|_\infty \leq \frac{1}{2^k} \|\varphi\|_1 |\psi|_{\text{Lip}}.$$

Ou seja, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. Toda transformação expansora *doubling map* tem decaimento exponencial de correlações, com taxa $\frac{1}{2}$ no espaço das funções Lipschitz.

3.2.2 Propriedades Espectrais

Inicialmente vamos enunciar alguns conceitos de análise funcional. ¹

Definição 3.1. Seja $T : \text{dom } T \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ linear no espaço de Banach complexo $\mathcal{B} \neq \{0\}$. O conjunto *resolvente* de T , denotado por $\rho(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador *resolvente* de T em λ

$$R_\lambda(T) : \mathcal{B} \rightarrow \text{dom } T, R_\lambda(T) := (T - \lambda \text{Id})^{-1}$$

existe e é limitado (ou seja, pertence a $B(\mathcal{B})$).

Definição 3.2. O *espectro* de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$

Definição 3.3. O *raio espectral* de $T \in B(\mathcal{B})$ é

$$r_\sigma(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Teorema 3.2. (Fórmula do raio espectral) Se $T \in B(\mathcal{B})$, então valem

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$$

Lema 3.1. Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\rho(T)$ é um conjunto aberto e $\sigma(T)$ é um conjunto fechado em \mathbb{C} . Além disso, se $|\lambda| > \|T\|$, então $\lambda \in \rho(T)$ e $\|R_\lambda(T)\| \rightarrow 0$ para $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Demonstração. do teorema

Decorre do lema acima que $r_\sigma(T) \leq \|T\|$. Nessa demonstração serão usados alguns resultados da teoria das funções holomorfas junto com o fato de que toda sequência fracamente convergente é limitada, e a seguinte observação: se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são suas raízes n -ésimas em \mathbb{C} , então

$$T^n - \lambda \mathbf{1} = T_{\lambda_1} T_{\lambda_2} \dots T_{\lambda_n}$$

oncd $T_{\lambda_i} = T - \lambda_i \mathbf{1}$ Disto segue que $\lambda \in \sigma(T^n)$ se, e somente se, $\lambda_j \in \sigma(T)$ para algum $1 \leq i \leq n$. Portanto, $\sigma(T^n) = \sigma(T)^n$, em que

$$\sigma(T)^n := \{\lambda^n; \lambda \in \sigma(T)\}$$

¹ Para um estudo maior sobre as propriedades espectrais de um operador, veja (GERALDO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2015) e (OLIVEIRA, 2015).

Desta relação conclui-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $r_\sigma(T) = r_\sigma(T^n)^{\frac{1}{n}} \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Para cada f no dual de $B(\mathcal{B})$, defina $F : \rho(T) \rightarrow \mathbb{C}$ por $F(\lambda) = f(R_\lambda(T))$, a qual é uma função holomorfa. Se $|\lambda| > \|T\|$, usando a série de Neumann², tem-se

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} f(T^n)$$

e pela unicidade da expansão por séries de Laurent, segue que a série acima converge para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ na região $|\lambda| > r_\sigma(T)$.

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, para $r_\sigma(T) < \alpha < r_\sigma(T) + \varepsilon$ e para todo $f \in B(\mathcal{B})^*$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{T^n}{\alpha^n}\right)$ converge. Assim, a sequência $\frac{T^n}{\alpha^n}$ converge fracamente a zero em $B(\mathcal{B})$ e, portanto, é limitada, de forma que existem $C = C(\alpha) > 0$ em que

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C \Rightarrow \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha C^{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{n}} = 1$, existe $N(\varepsilon) > 0$ de modo que

$$\|T^n\|^{\frac{1}{n}} < r_\sigma(T) + \varepsilon, \forall n \leq N(\varepsilon)$$

Esta relação, juntamente com $r_\sigma(T) \leq \|T\|^{\frac{1}{n}}$ verificado acima, mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe e é igual a $r_\sigma(T)$. □

Definição 3.4. Dizemos que um operador T tem *lacuna espectral (gap espectral)* quando o maior autovalor é simples, isto é, tem multiplicidade algébrica igual a 1, e o restante do espectro está contido num disco fechado com raio estritamente menor.

3.2.3 Propriedades espectrais do doubling map

O *espectro* do operador $P_T : \text{Lip} \rightarrow \text{Lip}$ é o conjunto

$$\sigma(P_T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; P_T - \lambda I \text{ é um operador não invertível em } \text{Lip}\}$$

que contém (mas não é necessariamente igual) o conjunto dos autovalores de P_T .

No nosso exemplo do doubling map, $\mathbf{1}$ é uma autofunção com autovalor 1, pela decomposição $\text{Lip} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus H$, segue que $\sigma(P_T) = \{1\} \cup \sigma(P_T|_H)$. Ou seja, além da parte do autovalor 1, o espectro fica determinado pela ação de P_T sob o subespaço H .

² A série de Neumann de T é dada por $R_\lambda T = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^j$

De análise funcional, se escrevermos $\rho(P_T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(P_T)\}$ para o *raio espectral* de P_T , temos

$$\rho(P_T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|P_T\| \quad (3.4)$$

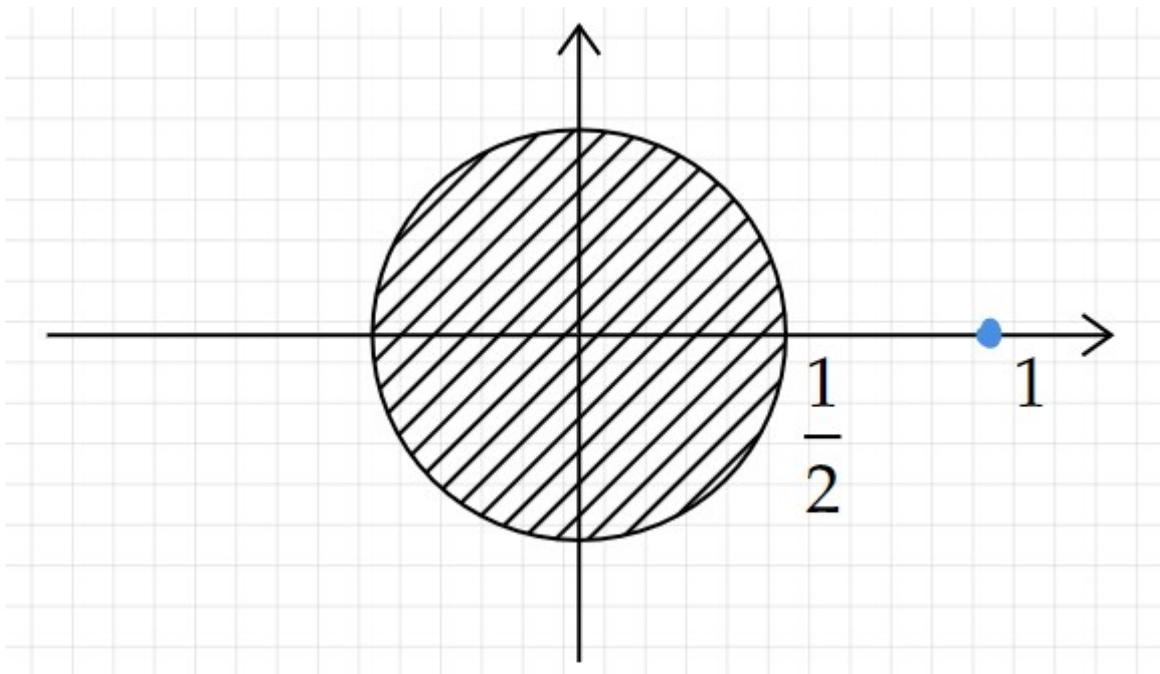
Para determinar o espectro de $P_T|_H$ podemos usar tanto a norma Lipschitz quanto a semi-norma $|\cdot|_{\text{Lip}}$, já que no subespaço H tal semi-norma se torna uma norma, então ambas são equivalentes:

$$|\hat{\psi}|_{\text{Lip}} \leq \|\hat{\psi}\|_{\text{Lip}} = \|\hat{\psi}\|_{\infty} + |\hat{\psi}|_{\text{Lip}} \leq 2|\hat{\psi}|_{\text{Lip}}$$

Isto falha fora de H , onde para aplicar (3.4) precisamos usar a norma Lipschitz.

Da proposição 3.3 e de (3.4) podemos ver que $\rho(P_T|_H) \leq \frac{1}{2}$. Desta forma o espectro de P_T tem um autovalor simples em 1 e o restante do espectro está contido em um raio de centro 0 e raio $\frac{1}{2}$, como mostra a figura abaixo.

Figura 2 – Lacuna espectral de P_T



Autor: Elaboração Própria

4 DESLOCAMENTO DE MARKOV

Iremos lembrar alguns conceitos de teoria da medida, antes de iniciarmos de fato o estudo de deslocamento de Markov.

Sejam $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, n$ espaços de medida finita. Podemos tomar o produto cartesiano das medidas um espaço de medida, isto é, $X_1 \times \dots \times X_n$. Para isso, considere em $X_1 \times \dots \times X_n$ a σ -álgebra gerada pela família de todos os conjuntos da forma $A_1 \times \dots \times A_n$ com $A_j \in \mathcal{A}_j$. Esta σ -álgebra é chamada *σ -álgebra produto* e é representada por $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$

Teorema 4.1. Existe uma única medida μ em $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$ tal que $\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j)$ para todo $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1, \dots, n$. Em particular, μ é uma medida finita.

Esta medida μ no enunciado é representada por $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ e é chamada *medida produto* das medidas μ_1, \dots, μ_n . Assim, definimos o *espaço de medida produto*

$$(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \times \dots \times \mu_n)$$

Este teorema permanece válido quando as medidas μ_j são apenas σ -finitas, exceto que neste caso a medida produto μ é apenas σ -finita.

Agora vamos descrever a construção do produto de uma família enumerável de espaços de medida. Na verdade, para isso nos restringiremos ao caso de probabilidades. Sejam $(X_j, \mathcal{B}_j, \mu_j)$, $j \in \mathcal{I}$ espaços de medida com $\mu_j(X_j) = 1$ para todo $j \in \mathcal{I}$. O conjunto de índices tanto pode ser $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ como $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$. Consideremos o produto cartesiano

$$\Sigma = \prod_{j \in \mathcal{I}} X_j = \{(x_j)_{j \in \mathcal{I}}; x_j \in X_j\}.$$

Chamamos *cilindros* de Σ os subconjuntos da forma

$$[m; A_m, \dots, A_n] = \{(x_j)_{j \in \mathcal{I}}; x_j \in A_j \text{ para } m \leq j \leq n\},$$

onde $m \in \mathcal{I}$ e $n \geq m$ e $A_j \in \mathcal{B}_j$ para $m \leq j \leq n$. Note que o próprio X é um cilindro, por exemplo, $X = [1, X_1]$. Por definição, a σ -álgebra produto em Σ é a σ -álgebra \mathcal{B} gerada pela família de todos os cilindros. A família \mathcal{A} das uniões finitas de cilindros disjuntos dois-a-dois é uma álgebra e ela gera σ -álgebra \mathcal{B} .

4.1 DESLOCAMENTO DE MARKOV

Deslocamentos de Markov podem ser usados para modelar processos, ditos com memória finita, isto é, tais que existe $k \geq 1$ tal que cada resultado depende apenas dos k resultados imediatamente anteriores.

Para definir um deslocamento de Markov, consideremos um espaço mensurável (X, \mathcal{A}) e seja $\Sigma = X^{\mathbb{N}}$ (ou $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$) o espaço das seqüências em X , munido da σ -álgebra produto. Consideraremos o deslocamento

$$\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma, \sigma((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$$

Suponha que é dada uma família $\{P(x, \cdot); x \in X\}$ de probabilidades em X , chamadas *probabilidades de transição*, dependendo mensuravelmente do ponto x . De maneira intuitiva, dado um conjunto mensurável $E \subset X$, o número $P(x, E)$ representa a probabilidade de $x_{n+1} \in E$ sabendo que $x_n = x$. Uma probabilidade p em X é chamada *medida estacionária*, relativamente à família de probabilidades de transição, se ela satisfaz

$$\int P(x, E) dp(x) = p(E), \text{ para todo conjunto mensurável } E \subset X \quad (4.1)$$

Heuristicamente, isto significa que, relativamente a p , a probabilidade do evento $x_{n+1} \in E$ é igual à probabilidade do evento $x_n \in E$.

Fixada uma medida estacionária p qualquer (supondo que existe) defina

$$\mu([m; A_m, \dots, A_n]) = \int_{A_n} dp(x_m) \int_{A_{m+1}} dP(x_m, x_{m+1}) \cdots \int_{A_n} dP(x_{n-1}, x_n) \quad (4.2)$$

para todo cilindro $[m; A_m, \dots, A_n]$ de Σ . Esta probabilidade é invariante pelo deslocamento σ , uma vez que o lado direito da definição (4.2) não depende de m . Toda medida obtida desta forma é chamada *medida de Markov*; além disso, o sistema (σ, μ) é chamado *deslocamento de Markov*.

Exemplo 4.1. (Medida de Bernoulli) Suponha que $P(x, \cdot)$ não depende de x , ou seja, existe uma probabilidade ν em X tal que $P(x, \cdot) = \nu$ para todo $x \in X$. Então

$$\int P(x, E) dp(x) = \int \nu(E) dp(x) = \nu(E)$$

para toda probabilidade p e todo conjunto mensurável $E \subset X$. Portanto, existe exatamente uma medida estacionária, a saber $p = \nu$. A definição 4.2 dá

$$\begin{aligned}\mu([m; A_m, \dots, A_n]) &= \int_{A_n} \nu(x_m) \int_{A_{m+1}} \nu(x_{m+1}) \cdots \int_{A_n} \nu(x_n) \\ &= \nu(A_m) \nu(A_{m+1}) \cdots \nu(A_n)\end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Suponha que o conjunto X é finito, digamos $X = \{1, \dots, d\}$ para algum $d \geq 2$. Qualquer família de probabilidades de transição $P(x, \cdot)$ em X fica completamente caracterizada pelos valores

$$P_{i,j} = P(i, \{j\}), 1 \leq i, j \leq d. \quad (4.3)$$

Além disso, uma medida p em X fica completamente caracterizada pelos valores $p_i = p(\{i\}), 1 \leq i \leq d$. Com esta notação, a definição 4.1 traduz-se por

$$\sum_{i=1}^d p_i P_{i,j} = p_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq d. \quad (4.4)$$

Além disso, a medida de Markov μ fica dada por

$$\mu([m; a_m, \dots, a_n]) = p_{a_m} P_{a_m, a_{m+1}} \cdots P_{a_{n-1}, a_n}$$

Na sequência iremos nos restringir a deslocamentos de Markov *finitos*, ou seja, ao contexto do exemplo 4.2. Consideramos o conjunto X munido da topologia discreta e da respectiva σ -álgebra de Borel. Observe que a matriz

$$P = (P_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$$

definida por 4.3 satisfaz as seguintes condições:

1. $P_{i,j} \geq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq d$;
2. $\sum_{j=1}^d P_{i,j} = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq d$

Dizemos que P é uma *matriz estocástica*. Reciprocamente, qualquer matriz satisfazendo as condições acima define uma família de probabilidades de transição no conjunto X . Observe também que, denotando $p = (p_1, \dots, p_d)$, a relação 4.4 corresponde a

$$P^* p = p \quad (4.5)$$

onde P^* representa a matriz transposta da matriz P . Em outras palavras, as medidas estacionárias correspondem precisamente aos autovetores da matriz transposta para o autovalor 1. O seguinte resultado clássico permite mostrar que tais autovalores sempre existem.

Teorema 4.2. (Perron-Frobenius) Seja A uma matriz $d \times d$ com entradas não-negativas. Então, existe $\lambda \geq 0$ e existe algum vetor $v \neq 0$ com entradas não-negativas tal que $Av = \lambda v$ e $\lambda \geq |\gamma|$ para todo autovalor γ de A .

Se A admite alguma potência cujas entradas são positivas, então $\lambda > 0$ e existe algum autovetor v com entradas positivas, tal que $Av = \lambda v$. De fato, $\lambda > |\gamma|$ para qualquer outro autovalor γ de A . Além disso, o autovalor λ tem multiplicidade 1 e é o único autovalor de A que admite algum autovetor com entradas não-negativas.

Uma demonstração pode ser encontrada em *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Carl D. Meyer.

Aplicando este teorema à matriz $A = P^*$, concluímos que existem $\lambda \geq 0$ e $p \neq 0$ com $P_i \geq 0$ para todo i , tais que

$$\sum_{i=1}^d p_i P_{i,j} = \lambda p_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq d$$

Somando sobre $j = 1, \dots, d$ obtemos que

$$\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d p_i P_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^d p_j$$

Usando a segunda propriedade da matriz estocástica, o lado esquerdo desta igualdade pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^d p_i \sum_{j=1}^d P_{i,j} = \sum_{i=1}^d p_i$$

Comparando as duas últimas igualdades, e lembrando que a soma das entradas de p é um número positivo, concluímos que $\lambda = 1$. Isto prova a nossa afirmação de que sempre existem vetores $p \neq 0$ satisfazendo 4.5.

Quando P^* tem entradas positivas para algum $n \geq 1$, segue do teorema 4.2 que o autovetor é único, a menos de produto por um escalar, e pode ser escolhido com entradas positivas.

Denotemos por Σ_p o conjunto de todas as sequências $(x_n)_n \in \Sigma$ que satisfazem

$$P_{x_n, x_{n+1}} > 0 \text{ para todo } n$$

ou seja, tais que todas as transições são "permitidas" por P . Da definição de Σ_p é fácil ver que é σ -invariante. E as transformações $\sigma : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$ construídas desta forma são chamadas *deslocamentos de tipo finito*.

Lema 4.1. O conjunto Σ_p é fechado em Σ e, dada qualquer solução p de $P^*p = p$ com entradas positivas, o suporte da respectiva medida de Markov μ coincide com Σ_p .

Demonstração. Seja $x^k = (x_n^k)_n, k \in \mathbb{N}$ uma sequência qualquer em Σ_P e suponha que ela converge em Σ para algum $x = (x_n)_n$. Pela definição da topologia em Σ , isto quer dizer que para todo n existe $k_n \geq 1$ tal que $x_n^k = x_n$ para todo $k \geq k_n$. Então, dado qualquer n , tomando $k \geq \max\{k_n, k_{n+1}\}$ concluímos que $P_{x_n, x_{n+1}} = P_{x_n^k, x_{n+1}^k} > 0$. Isto mostra que $x \in \Sigma_P$.

Para provar a segunda parte do lema, lembre que os cilindros $[m; x_m, \dots, x_n]$ formam uma base de vizinhanças de qualquer $x = (x_n)_n$ em Σ . Se $x \in \Sigma_P$, então

$$\mu([m; x_m, \dots, x_n]) = p_{x_m} P_{x_m, x_{m+1}} \dots P_{x_{n-1}, x_n} > 0$$

para todo cilindro e, portanto, $x \in \text{supp } \mu$. Se $x \notin \Sigma_P$, então existe n tal que $P_{x_n, x_{n+1}} = 0$. Nesse caso, $\mu([n; x_n, x_{n+1}]) = 0$ e, portanto, $x \notin \text{supp } \mu$. \square

Lema 4.2. Seja P uma matriz estocástica e seja $p = (p_1, \dots, p_d)$ uma solução de $P^*p = p$. Para cada $n \geq 0$, denote por $P_{i,j}^n, 1 \leq i, j \leq d$ as entradas da matriz P^n . Então:

1. $\sum_{j=1}^d P_{i,j}^n = 1$ para todo $1 \leq i \leq d$ e todo $n \geq 1$;
2. $\sum_{i=1}^d p_i P_{i,j}^n = p_j$ para todo $1 \leq j \leq d$ e todo $n \geq 1$;
3. o hiperplano $H = \{(h_1, \dots, h_d) : h_1 + \dots + h_d = 1\}$ é invariante por P^* .

4.1.1 Ergodicidade

Nessa seção sempre suporemos que $p = (p_1, \dots, p_d)$ é uma solução de $P^*p = p$ com $p_i > 0$ para todo i , normalizada de tal forma que $\sum_i p_i = 1$. Seja μ a respectiva medida de Markov. Queremos entender que condições a matriz estocástica P deve satisfazer para que (σ, μ) seja ergódico.

Dizemos que a matriz estocástica P é *irredutível* se para todo $1 \leq i, j \leq d$ existe $n \geq 0$ (que pode depender de i e j) tal que $P_{i,j}^n > 0$. Em outras palavras, P é irredutível se for possível passar de qualquer estado i a qualquer estado j num certo número n de passos (que depende de i e j).

Teorema 4.3. O deslocamento de Markov (σ, μ) é ergódico se, e somente se, a matriz P é irredutível.

Para mostrar o teorema, vamos primeiro provar o seguinte estimativa útil:

Lema 4.3. Sejam $A = [m; a_m, \dots, a_q]$ e $B = [r; b_r, \dots, b_s]$ cilindros de Σ com $r > q$. Então:

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \frac{P_{a_q, b_r}^{r-q}}{p_{b_r}}$$

Demonstração. Podemos escrever $A \cap B$ com uma união disjunta

$$A \cap B = \bigcup_x [m; a_m, \dots, a_q, x_{n+1}, \dots, x_{r-1}, b_r, \dots, b_s],$$

sobre todos os $x = (x_{n+1}, \dots, x_{r-1}) \in X^{r-n-1}$. Então

$$\begin{aligned} \mu(A \cap B) &= \sum_x p_{a_m} P_{a_m, a_{m+1}} \cdots P_{a_{q-1}, a_q} P_{a_q, x_{n+1}} \cdots P_{x_{r-1}, b_r} P_{b_r, b_{r+1}} \cdots P_{b_{s-1}, b_s} \\ &= \mu(A) \sum_x P_{a_q, x_{n+1}} \cdots P_{x_{r-1}, b_r} \frac{1}{p_{b_r}} \mu(B). \end{aligned}$$

A soma acima é igual a P_{a_q, b_r}^{r-q} . Portanto,

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \frac{P_{a_q, b_r}^{r-q}}{p_{b_r}}$$

, como tínhamos afirmado. □

Lema 4.4. Uma matriz estocástica P é irredutível se, e somente se,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{i,j}^l = p_j \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq d. \quad (4.6)$$

Demonstração. Supondo (4.6). Lembrando que $p_j > 0$ para todo j . Então, dados quaisquer $1 \leq i, j \leq d$, tem-se $P_{i,j}^l > 0$ para infinitos valor de l . Em particular, P é irredutível.

Reciprocamente, considere $A = [0; i]$ e $B = [0; j]$. Pelo lema anterior

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) = \frac{1}{p_j} \mu(A)\mu(B) \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{i,j}^l$$

E por 2.6, o lado esquerdo desta igualdade existe. Portanto,

$$Q_{i,j} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{i,j}^l$$

existe para todo $1 \leq i, j \leq d$. Considere a matriz $Q = (Q_{i,j})_{i,j}$, ou seja,

$$Q = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P^l \quad (4.7)$$

Usando o item 2 do lema 4.2 e tomando o limite com $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\sum_{i=1}^d p_i Q_{i,j} = p_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq d. \quad (4.8)$$

Observe também que, dado qualquer $k \geq 1$.

$$P^k Q = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P^{k+l} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P^l = Q \quad (4.9)$$

Segue que $Q_{i,j}$ não depende de i . De fato, suponha que existem r e s tais que $Q_{r,j} < Q_{s,j}$. Claro que podemos escolher s de modo que o lado direito desta desigualdade tenha o valor máximo possível. Como P é irredutível, existe k tal que $P_{s,r}^k > 0$. Logo, usando (4.9) seguida do item 1 do lema 4.2.

$$Q_{s,j} = \sum_{i=1}^d P_{s,i}^k Q_{i,j} < \left(\sum_{i=1}^d P_{s,i}^k \right) Q_{i,j} = Q_{i,j}$$

o que é contradição. Portanto $Q_{i,j}$ não depende de i . Seja $Q_j = Q_{i,j}$ para quaisquer i . A propriedade (4.8) da que

$$p_j = \sum_{i=1}^d Q_{i,j} p_i = Q_j \left(\sum_{i=1}^d p_i \right) = Q_j.$$

para todo j . Mostrando assim o lema. □

Demonstração. do teorema: Suponhamos que μ é ergódica. Seja $A = [0; i]$ e $B = [0; j]$. Pela proposição 2.5

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) = \mu(A)\mu(B) = p_i p_j$$

Por outro lado, pelo lema 4.3 temos que $\mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) = p_i P_{i,j}^l$. Substituindo na equação acima, podemos cancelar p_i em ambos os lados,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{i,j}^l = p_j$$

Note que j é arbitrário. Portanto, pelo lema anterior, isto mostra que P é irredutível.

Agora suponhamos que a matriz P é irredutível. Queremos concluir que μ é ergódica. De acordo com o corolário 2.1, basta provar que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad (4.10)$$

para quaisquer A e B na álgebra gerada pelos cilindros. O fato de que os elementos desta álgebra são as uniões finitas disjuntas de cilindros, é suficiente para que consideremos o caso em que A e B são cilindros, digamos $A = [m; a_m, \dots, a_q]$ e $B = [r; b_r, \dots, b_s]$. Observe também que a validade da equação acima não muda caso B seja substituído por alguma pré-imagem $\sigma^{-l}(B)$. Portanto, não é restrição supormos que $r > q$. Daí, pelo lema 4.3

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) = \mu(A)\mu(B) \frac{1}{p_{b_r}} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{a_q, b_r}^{r-q+l}$$

para todo n . Pelo lema 4.4

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{a_q, b_r}^{r-q+1} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{a_q, b_r}^l = p_{b_r}$$

Isto mostra que vale (4.10) para os cilindros A e B . \square

4.1.2 Mistura

Nesta seção caracterizamos os deslocamentos de Markov misturadores, em termos da respectiva matriz estocástica P . Continuamos supondo que p é uma solução normalizada de $P^*p = p$ com entradas positivas e que μ é a respectiva medida de Markov.

Dizemos que a matriz estocástica P é *aperiódica* se existe $n \geq 1$ tal que $P_{i,j}^n > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq d$. Em outras palavras, P é aperiódica se tem alguma potência P^n com entradas positivas.

Teorema 4.4. O deslocamento de Markov (σ, μ) é misturador se, e somente se, a matriz P é aperiódica.

Para a demonstração desse teorema, iremos precisar do seguinte lema

Lema 4.5. Uma matriz estocástica P é aperiódica se, e somente se,

$$\lim_l P_{i,j}^l = p_j \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq d.$$

Demonstração. Como $p_j > 0$ para todo j , por hipótese, é claro que $\lim_l P_{i,j}^l = p_j, \forall 1 \leq i, j \leq d$ implica que $P_{i,j}^l > 0, \forall 1 \leq i, j \leq d$, e todo l suficientemente grande.

Agora suponhamos que P é aperiódica. Então podemos usar o teorema de Perron-Frobenius à matriz $A = P^*$. Como p é autovetor de A com entradas positivas, obtemos que $\lambda = 1$ e todos os demais autovalores de A são menores que 1 em valor absoluto. Pelo item 3 do lema 4.2, o hiperplano H dos vetores (h_1, \dots, h_d) tais que $h_1 + \dots + h_d = 0$ é invariante por A . É claro que H é transversal à direção de p . Então a decomposição

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}p \oplus H \tag{4.11}$$

é invariante por A e a restrição de A ao hiperplano H é uma contração, no sentido de que o seu raio espectral é menor que 1. Segue deste fato que a sequência $(A^l)_l$ converge para a projeção na primeira coordenada da decomposição acima, ou seja, para a matriz B caracterizada por

$Bp = p$ e $Bh = 0$ para todo $h \in H$. Em outras palavras, $(P^l)_l$ converge para B^* . Observe que

$$B_{i,j} = p_i \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq d \quad (4.12)$$

Portanto, $\lim_n P_{i,j}^l = B_{i,j} = p_j$ para todo i, j . \square

Demonstração. do teorema:

Suponhamos que a medida μ é misturadora. Seja $A = [0; i]$ e $B = [0; j]$. Pelo lema 4.3, temos que $\mu(A \cap \sigma^{-1}(B)) = p_i P_{i,j}^l$ para todo l . Portanto,

$$p_i \lim_l P_{i,j}^l = \lim_l \mu(A \cap \sigma^{-1}(B)) = \mu(A)\mu(B) = p_{oi}p_j$$

. Cancelando p_i em ambos os lados, obtemos que $\lim_l P_{i,j}^l = p_j$. De acordo com o lema 4.5, isto prova que P é irredutível.

Agora suponhamos que a matriz P é aperiódica. Queremos mostrar que μ é misturadora. Pelo lema 2.5, basta provar que

$$\lim_l \mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) = \mu(A)\mu(B) \quad (4.13)$$

para quaisquer A e B na álgebra gerada pelos cilindros. Uma vez que os elementos desta álgebra são as uniões finitas disjuntas de cilindros, basta tratar o caso em que A e B são cilindros, digamos $A = [m; a_m, \dots, a_q]$ e $B = [r; b_r, \dots, b_s]$. Pelo lema 4.3

$$\mu(A \cap \sigma^l(B)) = \mu(A)\mu(B) \frac{1}{p_{b_r}} P_{a_q, b_r}^{r-q+1}$$

para todo $l > q - r$. Então, usando o lema acima,

$$\begin{aligned} \lim_l \mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) &= \mu(A)\mu(B) \frac{1}{p_{b_r}} P_{a_q, b_r}^{r-q+1} \\ &= \mu(A)\mu(B) \frac{1}{p_{b_r}} P_{a_q, b_r}^l \\ &= \mu(A)\mu(B) \end{aligned}$$

Mostrando assim que vale (4.13) para os cilindros A e B . \square

4.2 DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES

Nesta seção discutiremos a velocidade do decaimento das sequências de correlações, $C_k(\phi, \psi)$, num sistema misturador.

Dizemos que (T, μ) tem *decaimento exponencial de correlações* num dado espaço vetorial \mathcal{V} se existe $\lambda < 1$ e para todo $\phi, \psi \in \mathcal{V}$ existe $A(\phi, \psi) > 0$ tal que

$$|C_n(\psi, \phi)| \leq A(\phi, \psi)\lambda^n \text{ para todo } n \geq 1$$

Temos noções similares quando a exponencial λ^n é substituída por qualquer outra sequência convergindo para zero, como veremos mais a frente na definição 5.2.

Para ilustrar a teoria vamos analisar a questão do decaimento de correlações no contexto dos deslocamento de Markov unilateral. Isso nos permitirá introduzir diversas ideias que serão úteis posteriormente em situações mais gerais.

Seja $T : M \rightarrow M$ o deslocamento em $M = X^{\mathbb{N}}$, onde $X = \{1, \dots, d\}$ é um conjunto finito. Seja $P = (P_{i,j})_{i,j}$ uma matriz estocástica aperiódica e seja $p = (p_i)_i$ o autovalor positivo de P^* , normalizado por $p_1 + \dots + p_d = 1$. Seja μ a medida de Markov definida em M por 4.2.

Considere $L = G^{-1}P^*G$, onde G é uma matriz diagonal cujas entradas são p_1, \dots, p_d . As entradas de L são dadas por:

$$L_{i,j} = \frac{p_j}{p_i} P_{j,i} \text{ para cada } 1 \leq i, j \leq d.$$

Lembre que denotamos $u = (1, \dots, 1)$ e $H = \{(h_1, \dots, h_d); h_1 + \dots + h_d = 0\}$.

Seja

$$V = \{(v_1, \dots, v_d); p_1 v_1 + \dots + p_d v_d = 0\}$$

Então $G(u) = p$ e $G(V) = H$. Lembrando (4.11), segue que a decomposição

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}u \oplus V \tag{4.14}$$

é invariante por L e todos os autovalores da restrição de L a V são menores que 1 em valor absoluto.

O operador de transferência do deslocamento f é a aplicação linear P_f que a cada função $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ associa a função $P_f\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P_f\psi(x_1, \dots, x_n, \dots) = \sum_{x_0=1}^d L_{x_1, x_0} \psi(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \tag{4.15}$$

Como já vimos na seção 2.2, existe uma relação de dualidade entre o operador de Koopman e o operador de transferência. Isto é,

$$\int \varphi(P_f \psi) d\mu = \int (U_f \varphi) \psi d\mu$$

para quaisquer funções mensuráveis limitadas φ, ψ . Para verificar isso em nosso caso, basta considerar o caso em que tais funções são *localmente constante*, ou seja, funções que dependem apenas de um número finito de coordenadas. Isto é porque toda função mensurável limitada é limite uniforme de alguma sequência de funções localmente constantes. Então, considere funções φ e ψ que dependem apenas das primeiras n coordenadas. Da definição de medida de Markov, temos

$$\begin{aligned} \int \varphi(P_f \psi) d\mu &= \sum_{a_1, \dots, a_n} p_{a_1} P_{a_1, a_2} \cdots P_{a_{n-1}, a_n} \varphi(a_1, \dots, a_n) P_f \psi(a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{a_0, \dots, a_n} p_{a_0} P_{a_0, a_1} P_{a_1, a_2} \cdots P_{a_{n-1}, a_n} \varphi(a_1, \dots, a_n) \psi(a_0, a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{a_0, \dots, a_n} p_{a_0} P_{a_0, a_1} P_{a_1, a_2} \cdots P_{a_{n-1}, a_n} U_f \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) \psi(a_0, a_1, \dots, a_n) \\ &= \int (U_f \varphi) \psi d\mu. \end{aligned}$$

A segunda igualdade decorre da definição de operador de transferência. Na terceira, note que $\varphi(a_1, \dots, a_n) = U_f \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Verificando assim a dualidade.

Como consequência podemos escrever a sequência de correlações em termos dos iterados do operador de transferência:

$$C_n(\varphi, \psi) = \int (U_f^n \varphi) \psi - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu = \int \varphi \left(P_f^n \psi - \int \psi d\mu \right) d\mu$$

A propriedade $Lu = u$ significa que $\sum_j L_{i,j} = 1$ para todo j . Isto tem a seguinte consequência útil:

$$\sup |P_f \psi| \leq \sup |\psi| \text{ para todo } \psi \quad (4.16)$$

Tomando $\varphi \equiv 1$ em 4.2 obtemos o seguinte caso particular, que também será útil a seguir:

$$\int P_f \psi d\mu = \int \psi d\mu \text{ para todo } \psi \quad (4.17)$$

Agora denotemos por \mathcal{E}_0 o conjunto das funções ψ que dependem apenas da primeira coordenada. A aplicação $\psi \mapsto (\psi(1), \dots, \psi(d))$ é um isomorfismo entre \mathcal{E}_0 e o espaço euclidiano \mathbb{R}^d . Além disso, a definição

$$P_f \psi(x_1) = \sum_{x_0=1}^d L_{x_1, x_0} \psi(x_0)$$

mostra que a restrição do operador de transferência a \mathcal{E}_0 corresponde precisamente ao operador $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Note ainda que o hiperplano $V \subset \mathbb{R}^d$ corresponde ao subconjunto dos $\psi \in \mathcal{E}_0$ tais que $\int \psi d\mu = 0$. Considere em \mathcal{E}_0 a norma definida por $\|\psi\|_0 = \sup |\psi|$.

Fixe qualquer número λ entre 1 e o raio espectral de L restrito a V . Toda função $\psi \in \mathcal{E}_0$ pode ser escrita unicamente na forma:

$$\psi = c + v \text{ com } c = \int \psi d\mu \in \mathbb{R}u \text{ e } v = \psi - \int \psi d\mu \in V.$$

Note que $P_f^n \psi = c + P_f^n v$ e P_v^n aplicado em v corresponde a $L^n|_V$

Então a propriedade da lacuna espectral implica que existe $B > 1$ tal que

$$\sup \left| P_f^n \psi - \int \psi d\mu \right| \leq B \|\psi\|_0 \lambda^n \text{ para todo } n \geq 1 \quad (4.18)$$

Usando (4.2), segue que

$$|C_n(\varphi, \psi)| \leq B \|\varphi\|_0 \|\psi\|_0 \lambda^n \text{ para todo } n \geq 1$$

Desta forma, provamos que *todo deslocamento de Markov aperiódico tem decaimento exponencial de correlações em \mathcal{E}_0* .

Com um pouco mais de esforço, é possível melhorar este resultado, estendendo a conclusão a um espaço muito maior de funções. Considere em M a distância definida por

$$d((x_n)_n, (y_n)_n) = 2^{-N(x,y)}, \text{ onde } N(x,y) = \min\{n \geq 0; x_n \neq y_n\}$$

Fixe $\theta > 0$ qualquer e denote por \mathcal{E} o conjunto das funções φ que são θ -Hölder, isto é, tais que

$$K_\theta(\varphi) = \sup \left\{ \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d(x,y)^\theta}; x \neq y \right\} \text{ é finito.}$$

É claro que \mathcal{E} contém todas as funções localmente constantes. Afirmamos

Teorema 4.5. Todo deslocamento de Markov aperiódico (f, μ) tem decaimento exponencial de correlações no espaço \mathcal{E} das funções θ -Hölder, qualquer que seja $\theta > 0$.

Demonstração. Observe que $P_f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$. E primeiramente vamos mostrar que $\|\varphi\| = \sup |\varphi| + K_\theta(\varphi)$ define uma norma completa no espaço \mathcal{E} das funções θ -Hölder e o operador de transferência P_f é contínuo relativamente a esta norma.

De fato, seja $(\varphi_n)_n$ uma sequência de Cauchy relativamente à norma, dado $\varepsilon > 0$ temos $|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon$ e $|(\varphi_m - \varphi_n)(x) - (\varphi_m - \varphi_n)(y)| \leq \varepsilon d(x,y)^\theta$ para quaisquer x, y e

quaisquer m, n suficientemente grandes. Da primeira desigualdade temos que $(\varphi_n)_n$ converge uniformemente para alguma função contínua φ .

Fazendo $n \rightarrow \infty$, seque que $\|\varphi - \varphi_n\| \leq \varepsilon$ para todo n suficientemente grande e, $|(\varphi - \varphi_n)(x) - (\varphi - \varphi_n)(y)| \leq \varepsilon d(x, y)^\theta$, $\varphi \in \mathcal{E}$.

Vamos provar o teorema mostrando que este operador tem lacuna espectral em \mathcal{E} , com decomposição invariante

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}u \oplus \{\psi \in \mathcal{E}; \int \psi d\mu = 0\}.$$

Vamos estender (4.18) ao espaço \mathcal{E} .

Dados $\psi \in \mathcal{E}$ e $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in M$, temos

$$P_f^k \psi(x) = \sum_{a_1, \dots, a_k=1}^d L_{x_1, a_k} \dots L_{a_2, a_1} \psi(a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_n, \dots)$$

para todo $K \geq 1$. Então, dado $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ com $x_1 = y_1 = j$.

$$|P_f^k \psi(x) - P_f^k \psi(y)| \leq \sum_{a_1, \dots, a_k=1}^d L_{j, a_k} \dots L_{a_2, a_1} K_\theta(\psi) 2^{-k\theta} d(x, y)^\theta.$$

Usando a propriedade $\sum_{i=1}^d L_{j, i} = 1$, concluímos que

$$|P_f^k \psi(x) - P_f^k \psi(y)| \leq K_\theta(\psi) 2^{-k\theta} d(x, y)^\theta \leq K_\theta(\psi) 2^{-k\theta}. \quad (4.19)$$

Dada qualquer função φ , denotamos por $\pi\varphi$ a função que depende apenas da primeira coordenada e coincide com a média de φ em cada cilindro $[0; i]$:

$$\pi\varphi(i) = \frac{1}{p_i} \int_{[0; i]} \varphi d\mu.$$

É claro que $\sup |\pi\varphi| \leq \sup |\varphi|$ e $\int \pi\varphi d\mu = \int \varphi d\mu$. A desigualdade (4.19) implica que

$$\sup |P_f^k \psi - \pi(P_f^k \psi)| \leq K_\theta(\psi) 2^{-k\theta} \text{ para todo } k \geq 1.$$

Então, usando a propriedade 4.16, temos:

$$\sup |P_f^{k+l} \psi - P_f^l \pi(P_f^k \psi)| \leq L_\theta(\psi) 2^{-k\theta} \text{ para todo } k, l \geq 1. \quad (4.20)$$

Além disso, as propriedades (4.16) e (4.17) implicam que

$$\sup |\pi(P_f^k \psi)| \leq \sup |\psi| \text{ e } \int \pi(P_f^k \psi) d\mu = \int \psi d\mu.$$

Portanto a propriedade (4.18) dá que

$$\sup \left| P_f^n \psi - \int \psi d\mu \right| \leq B \|\psi\| \sigma^{n-1} \text{ para todo } n.$$

Com isto, o teorema se verifica pelo mesmo argumento que usamos anteriormente para \mathcal{E}_0 , usando a desigualdade acima no lugar de 4.16 □

5 TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS

Nesse capítulo iremos mostrar uma ferramenta que nos permitirá provar a existência de medidas invariantes regulares. É uma ferramenta importante a qual nos permite encontrar espaços adequados no qual o operador de transferência tem boas propriedades.

Considere a aplicação T que é expansora no nosso espaço $M = S^1$, isto é,

1. $T : M \rightarrow M$
2. $T \in C^2$
3. $|T'(x)| \geq \lambda > 1, \forall x$.

Consideremos o espaço de Banach $W^{1,1} = \{f; f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \text{ para alguma } f' \in L^1\}$, das funções absolutamente contínuas com a norma

$$\|f\|_{W^{1,1}} = \|f\|_1 + \|f'\|_1$$

5.1 DESIGUALDADE DE LASOTA YORKE PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS

Vamos mostrar que o operador de transferência é uma *regularização* para a norma $\|\cdot\|_{W^{1,1}}$. E isto implica que as iterações da medida inicial têm norma limitada, nos permitindo encontrar uma medida invariante adequada, e além disso, outras informações estatísticas à respeito do comportamento do sistema.

5.1.1 Desigualdade de Lasota Yorke

A principal ferramenta para implementar essa ideia é chamada *desigualdade de Lasota Yorke*.¹

Vamos considerar um operador P_T restrito a algum espaço vetorial normado de medida de Borel com sinal $(B_s, \|\cdot\|_s)$ (frequentemente será um espaço de Banach), e vamos considerar um outro espaço $B_w \supset B_s$ munido de uma norma mais fraca $\|\cdot\|_w$ tal que $\|P_T^n\|_{B_w \rightarrow B_s} \leq M$ é uniformemente limitado.

¹ No contexto de probabilidade, esse tipo de estimativa também é conhecida como *desigualdade de Doeblin Fortet*.

Nesse contexto, se os dois espaços estão bem definidos, é possível provar em muitos casos interessantes que existem constantes $A \geq 0$, $0 \leq \lambda \leq 1$ tais que para cada n , vale

$$\|P_T^n g\|_s \leq A\lambda^n \|g\|_s + B\|g\|_w$$

Essa classe de desigualdades acima é chamada de *desigualdade de Lasota Yorke*.

Isso significa que o iterado $P_T^n g$ tem norma forte limitada $\|\cdot\|_s$ e então por um argumento de compacidade, que veremos logo abaixo, esta desigualdade deve nos garantir a existência de uma medida invariante em B_s . Desigualdades similares podem ser provadas em muitos sistemas, e elas são a ferramenta principal para estudar propriedades estatísticas de sistemas dinâmicos.

Agora vejamos como a desigualdade acima pode ser obtida no nosso caso.

Teorema 5.1. Seja T expansora em S^1 , então existem $a \in (0, 1)$ e $B > 0$ tais que

$$\|P_T^n g\|_s \leq a^n \|g\|_s + B\|g\|_w$$

para todo $n \geq 0$, onde $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{W^{1,1}}$ e $\|\cdot\|_w = \|\cdot\|_1$.

Demonstração. No caso em que estamos considerando transformações expansoras temos uma fórmula explícita para o operador de transferência, conforme visto na seção 3.1

$$P_T f(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'(y)|}.$$

Derivando a expressão de $P_T f$, temos:

Lembre que $T'(y) = T'(T^{-1}(x))$

$$(P_T f)' = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{1}{(T'(y))^2} f'(y) - \frac{T''(y)}{(T'(y))^3} f(y).$$

Note que

$$(P_T f)' = P_T \left(\frac{1}{T'} f' \right) - P_T \left(\frac{T''}{(T')^2} f \right)$$

então

$$\begin{aligned} \|(P_T f)'\|_1 &\leq \left\| \frac{1}{T'} f' \right\|_1 + \left\| \frac{T''}{(T')^2} f \right\|_1 \\ &\leq \alpha \|f'\|_1 + \left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_\infty \|f\|_1 \end{aligned}$$

onde $\alpha = \max(\frac{1}{T'})$.

Logo

$$\|(P_T f)'\|_1 + \|P_T f\|_1 \leq \alpha \|f'\|_1 + \alpha \|f\|_1 + \left(\left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_\infty + 1 \right) \|f\|_1$$

e

$$\|P_T f\|_{W^{1,1}} \leq \alpha \|f\|_{W^{1,1}} + \left(\left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_\infty + 1 \right) \|f\|_1.$$

Iterando a desigualdade, e note que $\|P_T f\|_1 = \|f\|_1$, então

$$\begin{aligned} \|P_T^2 f\|_{W^{1,1}} &\leq \alpha \|P_T f\|_{W^{1,1}} + \widehat{B} \|P_T f\|_1 \\ &\leq \alpha^2 \|f\|_{W^{1,1}} + \alpha \widehat{B} \|f\|_1 + \widehat{B} \|f\|_1 \end{aligned}$$

para $\widehat{B} = \frac{\|T''\|}{\|(T')^2\|} + 1$.

Iterando n vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \|P_T^n f\|_{W^{1,1}} &\leq \alpha^n \|f\|_{W^{1,1}} + \widehat{B}(\alpha^{n-1} + \dots + 1) \|f\|_1 \\ &\leq \alpha^n \|f\|_{W^{1,1}} + B \|f\|_1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $B = \frac{\left(\left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_\infty + 1 \right)}{1 - \alpha}$.

□

E daí, se $f \in W^{1,1}$ todos os elementos da seqüência $P_T^n f'$ dos iterados de f estão em $W^{1,1}$, e suas normas fortes são uniformemente limitadas.

5.1.2 Desigualdade de Lasota Yorke Lipschitz

Pela equação 5.1, $\|P_T^n f\|_{W^{1,1}}$ é uniformemente limitada, então $\|P_T^n f\|_\infty$ também é. Vamos observar que desde que o operador de transferência seja positivo

$$M := \sup_{n, \|f\|_\infty=1} \|P_T^n f\|_\infty = \sup_n \|P_T^n 1\|_\infty$$

Então existe n_1 tal que $\alpha^{n_1} M < 1$.

Agora iremos considerar uma nova aplicação $T_2 = T^{n_1}$. Esta aplicação permanece com as mesmas propriedades de regularidade da anterior e é uniformemente expansora. Seja P_{T_2} seu operador de transferência. De 5.1.1 temos

$$\begin{aligned} \|(P_{T_2} f)'\|_\infty &\leq \left\| P_{T_2} \left(\frac{1}{T_2'} f' \right) \right\|_\infty + \left\| P_{T_2} \left(\frac{T_2''}{(T_2')^2} f \right) \right\|_\infty \\ &\leq \alpha^{n_1} M \|f'\|_\infty + M \left\| \frac{T_2''}{(T_2')^2} \right\|_\infty \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Então P_{T_2} satisfaz a desigualdade de Lasota Yorke, com a norma $\|\cdot\|_{\text{Lip}}$ definida por $\|\cdot\|_{\text{Lip}} = \|f'\|_{\infty} + \|f\|_{\infty}$ e $\|\cdot\|_{\infty}$, com isso

$$\|P_T^{n_1} f\|_{\text{Lip}} \leq \lambda \|f\|_1 + B \|f\|_{\infty}$$

com $\lambda = \alpha^{n_1} M < 1$. Segue que

$$\begin{aligned} \|P_T^{n_1+q} f\|_{\text{Lip}} &\leq \lambda \|P_T^q f\|_1 + B \|P_T^q f\|_{\infty} \\ &\leq \lambda^n M \|f\|_1 + BM \|f\|_{\infty} \end{aligned} \tag{5.2}$$

e então P_T também satisfaz uma desigualdade de Lasota Yorke com essas normas.

5.2 EXISTÊNCIA DE MEDIDAS INVARIANTES REGULARES

O seguinte teorema fornece um argumento sobre a compacidade para a prova de existência de medidas invariantes em L^1 .

Proposição 5.1. (Rellich-Kondrachov) $W^{1,1}$ está compactamente imerso em L^1 . Se $B \subset W^{1,1}$ é um conjunto fortemente limitado: $B \subseteq B(0, K)^2$ então para cada ε , B tem uma ε -vizinhança limitada para a topologia L^1 .

Em particular, qualquer sequência limitada $f_n \in W^{1,1}$ tem um subsequência que converge fracamente, existem f_{n_k} e $f \in L^1$ tais que

$$f_{n_k} \rightarrow f$$

em L^1 .

Agora iremos demonstrar a existência de uma medida invariante absolutamente contínua (com densidade em L^1) para transformações expansoras.

Proposição 5.2. O operador P_T associado a uma transformação expansora tem uma densidade invariante $h \in L^1$.

Demonstração. Seja

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_T^i 1$$

uma sequência onde 1 é a densidade da probabilidade de Lebesgue. Pela desigualdade de Lasota Yorke a sequência tem norma $W^{1,1}$ uniformemente limitada e pela proposição 5.1 existe uma subsequência g_{n_k} convergindo em L^1 para um limite h .

² Bola forte centrada em 0 com raio K .

Lembre que P_T é contínuo na norma L^1 . Daí,

$$P_T h = P_T \left(\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_T g_{n_k} = h$$

Então h é uma densidade invariante. \square

Proposição 5.3. A densidade h encontrada acima satisfaz as seguintes propriedades:

1. $h \in W^{1,1}$, e
2. $\|h\|_{W^{1,1}} \leq \frac{\left(\left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_{\infty} + 1 \right)}{1 - \alpha}$

Demonstração. Considere $g_{n,m} = P_T^m(g_n)$. Note que, $g_{n,m} \in W^{1,1}$ e as normas são uniformemente limitadas. Por Lasota Yorke

$$\|g_{n_1,a+m} - g_{n_2,b+m}\|_{W^{1,1}} \leq \alpha^m \|g_{n_1,a} - g_{n_2,b}\|_{W^{1,1}} + B \|g_{n_1,a} - g_{n_2,b}\|_1 \quad (5.3)$$

e observe que se $\|g_{n_k,0} - h\|_1 \leq \varepsilon$ então $\|g_{n_k,j} - h\|_1 \leq \varepsilon$ para todo $j \geq 0$. Então a sequência $g_{n_k,k} \rightarrow h$ em L^1 , e por 5.3 é sequência de Cauchy na norma $W^{1,1}$, de fato, supondo $k_1 \leq k_2$

$$\|g_{n_{k_1},k_1} - g_{n_{k_2},k_2}\|_{W^{1,1}} \leq \alpha^m \|g_{n_{k_1},0} - g_{n_{k_2},n_{k_2}-k_1}\|_{W^{1,1}} + B \|g_{n_{k_1},0} - g_{n_{k_2},n_{k_2}-k_1}\|_1$$

Como $W^{1,1}$ é completo, temos que a sequência converge em $W^{1,1}$ para algum limite que é forçado a ser h . Logo $h \in W^{1,1}$.

Por Lasota Yorke, de h ser invariante temos $\|h\|_{W^{1,1}} = \|P_T h\|_{W^{1,1}} \leq \frac{\left(\left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_{\infty} + 1 \right)}{1 - \alpha}$. \square

Observação 1. Usando as técnicas que foram expostas nessa seção, e usando a desigualdade de Lasota Yorke. É possível provar que uma aplicação expansora C^2 tem uma densidade invariante C^1 , De maneira similiar é possível provar que uma aplicação expansora C^3 no círculo S^1 tem uma densidade invariante C^2 . Nessa seção começamos com a densidade constante 1 e construímos a cada etapa uma função C^1 e controlamos ela pela norma Lipschitz, que a norma é equivalente a norma C^1 em C^1 .

5.3 CONVERGÊNCIA PARA O EQUILÍBRIO E MISTURA

Nessa seção iremos ver o conceito de convergência para o equilíbrio e como isto prova que a medida invariante absolutamente contínua para uma transformação expansora encontrada na seção anterior é única. Veremos também que uma transformação expansora com sua medida invariante absolutamente contínua é misturadora.

Consideremos um *operador de Markov*, isto é, positivo preservando integral, P agindo sobre um espaço de norma forte e um espaço de norma fraca $B_s \subseteq B_w \subseteq L^1$, com $\|\cdot\|_w \leq \|\cdot\|_s$.

Hipóteses A. Suponha que:

1. B_w contém as funções características de conjuntos mensuráveis,
2. B_s é fechado para o produto e existe $C \leq 1$ tal que para cada $f, g \in B_s$,

$$\|fg\|_s \leq C\|f\|_s\|g\|_s,$$

3. B_s é denso em B_w para a topologia $\|\cdot\|_w$,
4. para cada $f \in B_w$ $\|f\|_w \geq \int |f| dm$ e $\|\cdot\|_s \geq \|\cdot\|_{L^\infty}$.

Observação 2. Note que escalonando a hipótese $\|fg\|_s \leq K\|f\|_s\|g\|_s$, esta pode ser escrita da forma $\|fg\|_s \leq \|f\|_s\|g\|_s$. Considerando a norma $\|\cdot\|_K = K\|\cdot\|_s$ escalonada, temos

$$\|fg\|_K = K\|fg\|_s \leq K^2\|f\|_s\|g\|_s \leq \|f\|_K\|g\|_K$$

Vamos considerar os espaços forte e fraco de densidade com média zero

$$V_s = \{g \in W^{1,1}; \int g dm = 0\}$$

e

$$V_w = \{g \in L^1; \int g dm = 0\}.$$

Se a dinâmica tem alguma propriedade misturadora é esperado que os iterados de uma densidade de média zero tenha sua parte positiva se anulando com sua parte negativa e os iterados eventualmente convergem para zero em algum sentido.

Isto pode ser expressado mais geralmente para operadores de Markov e a definição geral será útil para trabalhar com dinâmicas determinísticas e aleatórias com as mesmas ferramentas e resultados gerais.

Definição 5.1. (Convergência para o equilíbrio) Dizemos que um operador de Markov $P_T : B_s \rightarrow B_s$ tem convergência para o equilíbrio se para cada $g \in V_s$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_T^n g\|_w = 0$$

Proposição 5.4. Considere B_s e B_w satisfazendo as **hipóteses A** e o operador de transferência $P_T : B_w \rightarrow B_w$ associado à transformação T tendo $\mu = hm$ com $h \in B_s$ uma probabilidade invariante. Suponha que h é limitado, e que para cada $f \in V_s$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_T^n f\|_w \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

então o sistema (T, μ) é misturador.³

Demonstração. Por hipótese, dado $f \in B_s$ com $\int f dm = 1$ a sequência $P_T^n f - h \int f dm \rightarrow 0$ em B_w .

Agora iremos considerar dois conjuntos mensuráveis E e F e as funções características $\mathcal{X}_E, \mathcal{X}_F \in B_w$. Temos

$$\begin{aligned} \mu(E \cap T^{-n}(F)) &= |hm|(E \cap T^{-n}(F)) \\ &= \int \mathcal{X}_E(\mathcal{X}_F \circ T^n) h dm \end{aligned}$$

Por densidade de B_s em B_w , consideremos $\varepsilon > 0$ e $g_\varepsilon \in B_s$ tais que $\|\mathcal{X}_E - g_\varepsilon\|_w \leq \varepsilon$ logo para cada $n \geq 0$

$$\left| \mu(E \cap T^{-n}F) - \int g_\varepsilon(\mathcal{X}_F \circ T^n) h dm \right| \leq \|\mathcal{X}_E - g_\varepsilon\|_w$$

e

$$\left| \mu(E \cap T^{-n}F) - \int \mathcal{X}_F P_T^n(hg_\varepsilon) dm \right| \leq \varepsilon$$

Por (5.4) temos $hg_\varepsilon \rightarrow h[\int(hg_\varepsilon) dm]$ em B_w , logo

$$\int \mathcal{X}_F P_T^n(hg_\varepsilon) dm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \mathcal{X}_F \left[h \int(hg_\varepsilon) dm \right] dm = \int (h\mathcal{X}_F) dm \int(hg_\varepsilon) dm$$

e como

$$\left| \int(hg_\varepsilon) dm - \int(h\mathcal{X}_F) dm \right| \leq \varepsilon$$

temos que para cada ε , eventualmente como $n \rightarrow \infty$

$$|\mu(E \cap T^{-n}F) - \mu(E)\mu(F)| \leq 3\varepsilon$$

terminando a demonstração. □

Agora iremos provar que transformações expansoras tem convergência exponencial para o equilíbrio e são misturadoras. Mais tarde veremos que a velocidade de convergência é exponencial. Vamos considerar $W^{1,1}$ e L^1 como os espaços forte e fraco, respectivamente.

³ Definição de mistura vista na definição 2.8

Proposição 5.5. Para cada $g \in V_s$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_T^n g\|_1 = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que $\|g\|_{\text{Lip}} < \infty$. Por 5.2 sabemos que os iterados de g tem norma Lip uniformemente limitada.

$$\|P_T g\|_{\text{Lip}} \leq \bar{M}$$

Denotemos por g^+ (g^-) a parte positiva (e negativa) de g . Como $g \in V_s$, temos que $\|g\|_1 = 2 \int g^+ dm$. Então existe um ponto \bar{x} tal que $g^+(\bar{x}) \geq \frac{1}{2} \|g\|_1$. Considere uma vizinhança N de \bar{x} , $N = B(\bar{x}, \frac{1}{4} \|g\|_1 \bar{M}^{-1})$. Para cada $x \in N$, tem-se $g^+(x) \geq \frac{1}{4} \|g\|_1$.

Agora seja $d = \min |T'|$, $D = \max |T'|$. Se n_1 é o menor inteiro tal que $d^{n_1} \frac{1}{2} \|g\|_1 \bar{M}^{-1} > 1$, vale

$$\begin{aligned} d^{n_1} &> 2\bar{M} \|g\|_1^{-1} \\ \Leftrightarrow n_1 \log d &> \log(2\bar{M} \|g\|_1^{-1}) \\ \Leftrightarrow n_1 &> \frac{\log(2\bar{M} \|g\|_1^{-1})}{\log d} \end{aligned}$$

$$\text{e } n_1 < 1 + \frac{\log(2\bar{M} \|g\|_1^{-1})}{\log d}.$$

Então $T^{n_1}(N) = M$ e $P_T^{n_1} g^+$ tem densidade em todo ponto maior ou igual a $\sup_{x \in N} g^+(x) \frac{1}{D^{n_1}}$ que é maior ou igual a

$$\frac{\|g\|_1}{4D^{n_1}} \geq \frac{\|g\|_1}{4De^{\log(2\bar{M} \|g\|_1^{-1}) \frac{\log D}{\log d}}} = \frac{\|g\|_1}{4D} \left(\frac{1}{2}\bar{M}^{-1} \|g\|_1\right)^{\frac{\log D}{\log d}}$$

O mesmo é válido para g^- e então, depois de iterar n_1 vezes a parte positiva da densidade, e a parte negativa correspondente, elas se anulam, e tomando $C = \frac{(2\bar{M}^{-1})^{\frac{\log D}{\log d}}}{4D}$, segue que

$$\|P_T^{n_1} g\|_1 \leq \|g\|_1 - C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d} + 1}$$

De fato, de $g = g^+ - g^-$, temos $P_T^{n_1} g = P_T^{n_1} g^+ - P_T^{n_1} g^-$. E

$$\begin{aligned} P_T^{n_1} g^+(x) &\geq C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}} \\ P_T^{n_1} g^-(x) &\geq C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}} \end{aligned}$$

De onde,

$$C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}} - P_T^{n_1} g^-(x) \leq P_T^{n_1} g(x) \leq P_T^{n_1} g^+(x) + C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}}$$

segue que

$$\begin{aligned}
|P_T^{n_1} g(x)| &\leq \min \left\{ P_T^{n_1} g^-(x) - C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}}, P_T^{n_1} g^+(x) - C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}} \right\} \\
&\leq \frac{P_T^{n_1} g^+(x) + P_T^{n_1} g^-(x)}{2} - C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}} \\
\|P_T^{n_1} g(x)\|_1 &= \int |P_T^{n_1} g(x)| \leq \frac{\int P_T^{n_1} g^+(x) + \int P_T^{n_1} g^-(x)}{2} - C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}} \\
&\leq \frac{\int g^+(x) + \int g^-(x)}{2} - C \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}} \\
&= \|g\|_1 - \|g\|_1^{\frac{\log D}{\log d}}
\end{aligned}$$

Denotemos por $g_1 = P_T^{n_1} g$. Podemos repetir a mesma construção e obter assim n_2 , de forma que

$$\|g_2\|_1 = \|P_T^{n_2} g_1\|_1 \leq \|g_1\|_1 - C \|g_1\|_1^{\frac{\log D}{\log d} + 1}$$

e assim por diante. continuando esse processo, obtemos uma sequência g_n tal que

$$\|g_{n+1}\|_1 \leq \|g_n\|_1 - C \|g_n\|_1^{\frac{\log D}{\log d} + 1}$$

Logo $\{g_n\}_n$ é decrescente e $\|g_n\|_1 \rightarrow 0$.

E mais geral, se $g \in W^{1,1}$ podemos aproximar g com uma \tilde{g} tal que $\|\tilde{g}\|_{\text{Lip}} < \infty$ de modo que $\|g - \tilde{g}\|_1 \leq \varepsilon$. Como $\|P_T\|_{L^1 \rightarrow L^1} \leq 1$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_T^n(g - \tilde{g})\|_1 \leq \varepsilon$. E assim a proposição fica verificada. \square

Dizemos que f_n converge fracamente a f em L^1 se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in L^1$. Denotamos $P_T^n f \xrightarrow{f} 0$ ou $P_T^n f \xrightarrow{\text{frac.}} 0$.

Proposição 5.6. Se o sistema tem uma medida invariante absolutamente contínua com densidade $h \in L^1$ e para todo $f \in L^1$ tal que $\int f dm = 0$

$$P_T^n f \xrightarrow{\text{frac.}} 0$$

então T é misturador.

Demonstração. Dada $f \in L^1$, tem-se $\int P_T^n f dm = \int f dm$, logo $\int [P_T^n f - h \int f dm] dm = 0$, então por hipótese a sequência $P_T^n f - h \int f dm \xrightarrow{f} 0$. Daí, $P_T^n f \xrightarrow{f} h \int f dm, \forall f \in L^1$.

Agora consideremos dois conjuntos mensuráveis E e F . Denotemos por hm , a medida com densidade h com respeito à medida de Lebesgue m .

$$\begin{aligned}
[hm](E \cap T^{-n} F) &= \int 1_E (1_F \circ T^n) h dm = \int 1_F P_T^n (h 1_E) dm \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int 1_F [h \int (h 1_E) dm] dm = \int (h 1_F) dm \cdot \int (h 1_E) dm = [hm](E)[hm](F).
\end{aligned}$$

□

Segue que

Corolário 5.1. Transformações expansoras em M , com sua medida invariante absolutamente contínua em $W^{1,1}$ são misturadoras.

Corolário 5.2. Para transformações expansoras em M , existe uma única medida invariante em $W^{1,1}$.

Demonstração. Se existem duas densidades de probabilidades invariantes h_1, h_2 então $h_1 - h_2 \in V_s$ e é P_T -invariante. Logo $h_1 - h_2 = P_T^n(h_1 - h_2) \xrightarrow{f} 0 \Rightarrow h_1 = h_2$. □

Corolário 5.3. A sequência $g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P_T^i 1$ converge para h .

Observação 3. Da proposição 5.5 segue também que, se $g \in W^{1,1}$ é uma densidade de uma probabilidade (e então $g - h \in V_s$) então $P_T^n g \rightarrow h$ na norma L^1 . Da desigualdade de Lasota Yorke conseguimos também a convergência em $W^{1,1}$. Com efeito, $\|P_T^{n+m}(g - h)\|_{W^{1,1}} \leq \lambda^n \|P_T^m(g - h)\|_{W^{1,1}} + B \|P_T^m(g - h)\|_1$, fazendo na primeira parte $m \rightarrow \infty$ e daí $n \rightarrow \infty$ conseguimos o resultado.

5.3.1 Velocidade de convergência para o equilíbrio

Para diversas aplicações é importante quantificar a velocidade da mistura ou convergência para o equilíbrio.

Vejamos como quantificar: considere dois subespaços vetoriais do espaço de medidas (complexas) com sinal em X

$$B_s \subset B_w$$

normados com a norma forte $\|\cdot\|_s$ e norma fraca $\|\cdot\|_w$, respectivamente, tal que $\|\cdot\|_s \geq \|\cdot\|_w$ em B_w .

No caso de operadores sobre um espaço de medida que não são necessariamente absolutamente contínuos dizemos que um operador é *Markov* se preserva medida positiva e para cada medida com sinal μ temos $\mu(X) = [P_T \mu](X)$.

Definição 5.2. Consideremos $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n) = 0$. Dizemos que um operador P_T tem convergência para o equilíbrio com velocidade Φ com respeito à essas normas se para

$f \in V_s$, vale

$$\|P_T^n f\|_w \leq \Phi(n)\|f\|_s. \quad (5.5)$$

Podemos observar que neste caso, se ν é uma probabilidade inicial em B_s and μ é probabilidade invariante, ainda em B_s , então $\nu - \mu \in V_s$ e então

$$\|P_T^n \nu - \mu\|_w \leq \Phi(n)\|\nu - \mu\|_s$$

e então $P_T^n \nu$ converge para μ com velocidade $\Phi(n)$. Depedendo da norma forte, em certos casos pode-se provar que $\|\nu - \mu\|_s \leq C\|\nu\|_s$ onde C não depende de ν , obtendo assim

$$\|P_T^n \nu - \mu\|_w \leq \Phi(n)\|\mu\|_s$$

5.4 DECAIMENTO DE CORRELAÇÕES

A convergência para o equilíbrio é frequentemente estimada ou aplicada na forma de integrais de correlação, como já vimos na seção 2.6. Nesta seção mostramos um exemplo de como relacionar essas estimativas de correlação com as noções de convergência ao equilíbrio que definimos acima.

Suponha que X é uma variedade, e denote por m a medida de Lebesgue normalizada, considerando uma transformação não singular, e vamos aplicar o operador de transferência à uma medida invariante absolutamente contínua. Considerando o operador de transferência sobre os espaços forte e fraco, $B_s \subseteq B_w \subseteq L^1$, onde suas normas respeitam as condições de hipótese A.

5.4.1 Estimando $\int \psi \circ T^n g dm - \int g dm \int \psi d\mu$

Aqui iremos considerar (T, μ) onde T é uma transformação que preserva μ , com $\mu = hm$ e veremos como a partir da definição de convergência para o equilíbrio podemos estimar:

$$\int \psi \circ T^n g dm - \int g dm \int \psi d\mu$$

Lema 5.1. Considere os espaços vetoriais normados $B_s \subseteq B_w$, como descrito anteriormente. Seja P_T o operador de transferência associado a uma transformação tendo $\mu = hm$ com $h \in B_s$ como probabilidade invariante. Suponha que existe $\Phi(n) \rightarrow 0$ tal que para cada $f \in V_s$ e $n \geq 0$

$$\|P_T^n f\|_w \leq \Phi(n)\|f\|_{B_s}$$

então para cada $\phi \in L^\infty, g \in B_s, n \geq 0$ temos

$$\left| \int \psi \circ T^n g dm - \int g dm \int \psi d\mu \right| \leq 2C\Phi(n) \|h\|_{B_s} \|\psi\|_\infty \|g\|_{B_s}$$

Demonstração. Se μ é invariante e $\phi \in L^\infty$

$$\begin{aligned} \left| \int \psi \circ T^n g dm - \int g dm \int \psi d\mu \right| &\leq \left| \int \psi \circ T^n g dm - \int g dm \int \psi \circ T^n h dm \right| \\ &\leq \left| \int \psi \circ T^n [g - h] dm \right| \\ &= \left| \int \psi P_T^n [g - h] dm \right| \end{aligned}$$

como $\int g dm = \int h dm$, segue que $g - h$ é uma densidade de média zero em B_s . Portanto

$$\left| \int \psi \circ T^n g dm - \int g dm \int \psi d\mu \right| \leq \|\psi\|_\infty \left\| P_T^n [g - h] \right\|_w \quad (5.6)$$

$$\leq \Phi(n) \|\psi\|_\infty \left\| g - h \right\|_{B_w} \quad (5.7)$$

e

$$\begin{aligned} \left\| (g - \int g dm) h \right\|_{B_s} &\leq \|gh\|_{B_x} + \left\| \int g dm h \right\|_{B_s} \\ &\leq 2C \|h\|_{B_s} \|g\|_{B_s} \end{aligned}$$

□

5.4.2 Estimando $\int \psi \circ T^n g d\mu - \int g d\mu \int \psi d\mu$ (estimativa do decaimento de correlações)

Suponha um sistema com medida invariante μ e convergência para o equilíbrio com respeito às normas $\|\cdot\|_w, \|\cdot\|_{B_s}$, e velocidade Φ com definida anteriormente. Para muitas aplicações é útil calcular a velocidade de decaimentos das seguintes correlações.

$$\left| \int g(\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int g d\mu \right| \quad (5.8)$$

Lema 5.2. Considere o operador de transferência P_T associado a uma transformação e $\mu - hm$ com $h \in B_s$ como a medida invariante como anteriormente. Suponha que para cada $f \in B_s$ tais que $\int f dm = 0$ e $n \geq 0$

$$\|P_T^n f\|_w \leq \Phi(n) \|f\|_{B_s}$$

Então para todo $\psi \in L^\infty, g \in B_s$ e $n \geq 0$ temos

$$\left| \int g(\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int g d\mu \right| \leq 2C [\|h\|_{B_s} + \|h\|_{B_s}^2] \Phi(n) \|\psi\|_\infty \|g\|_{B_s}$$

Demonstração. Note que somando uma constante K a g não muda a relação das correlações:

$$\begin{aligned} C_n(g + K, \psi) &= \int (g + K)(\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int (g + K) d\mu \\ &= \int g(\psi \circ T^n) d\mu + K \int (\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int g d\mu - K \int \psi d\mu \end{aligned} \quad (5.9)$$

mas, de μ ser invariante, segue que

$$K \int (\psi \circ T^n) d\mu - K \int \psi d\mu = 0$$

e daí

$$\begin{aligned} C_n(g + K, \psi) &= \left| \int (g + K)(\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int (g + K) d\mu \right| \\ &= \left| \int g(\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int g d\mu \right| \\ &= C_n(g, \psi) \end{aligned}$$

E tomando $K = - \int g d\mu$, temos que $\int g - [\int g d\mu] d\mu = 0$ e

$$\begin{aligned} \left| \int g(\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int g d\mu \right| &= \left| \int (g - \int g d\mu)(\psi \circ T^n) d\mu \right| \\ &= \left| \int \psi P_T^n [(g - \int g d\mu)h] d\mu \right| \\ &= \|\psi\|_\infty \|P_T^n [(g - \int g d\mu)h]\|_w \end{aligned}$$

e como $\int [g - \int g d\mu] h d\mu = 0$ a convergência para o equilíbrio implica que

$$\left| \int g(\psi \circ T^n) d\mu - \int \psi d\mu \int g d\mu \right| \leq \|\psi\|_\infty \Phi(n) \|(g - \int g d\mu)h\|_{B_s}$$

e

$$\begin{aligned} \|(g - \int g d\mu)h\|_{B_s} &\leq \|gh\|_{B_s} + \left\| \int g d\mu h \right\|_{B_s} \\ &\leq C\|h\|_{B_s} + \left| \int g d\mu \right| \|h\|_{B_s} \\ &\leq C[\|h\|_{B_s} + \|h\|_{B_s}^2] \|g\|_{B_s} \end{aligned}$$

□

5.5 LACUNA ESPECTRAL E O TEOREMA DE HENNION

Veremos agora resultados gerais que implicam que a taxa de convergência dos iterados do operador de transfêrencia é exponencialmente rápida.

Uma outra possível maneira de definir *lacuna espectral* é a seguinte

Definição 5.3. O operador P_T tem lacuna espectral se

$$P_T = \lambda P + N$$

onde

1. P é uma projeção (ou seja, $P^2 = P$) e $\dim(\text{Im}(P)) = 1$;
2. O raio espectral de N satisfaz $\rho(N) < |\lambda|$;
3. $PN = NP = 0$.

A seguir apresentaremos uma ferramenta elementar para verificar a lacuna espectral de P_T em B_s .

Em muitos textos o teorema a seguir é apresentado de maneira mais geral, e é enunciado por *Teorema de Hennion*, *Teorema de Hervé* ou *Teorema de Ionescu-Tulcea e Marinescu*.⁴

Teorema 5.2. Considere um operador de transferência P_T agindo sobre dois espaços vetoriais de Banach complexos ou com sinal (medida com sinal), $(B_s, \|\cdot\|_s)$ e $(B_w, \|\cdot\|_w)$, $B_s \subset B_w \subset CM(X)$ com $\|\cdot\|_s \geq \|\cdot\|_w$.

Suponha:

1. (Desigualdade de Lasota Yorke) Existem $A, B \geq 0$ e $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ tais que para cada $g \in B_s$ e para todo $n \geq 0$,

$$\|P_T^n g\|_s \leq A\lambda_1^n \|g\|_s + B\|g\|_w;$$

2. (Mistura) Para cada $g \in V_s$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_T^n g\|_w = 0;$$

3. (Inclusão compacta) O espaço V_s de média zero forte está compactamente imerso no fraco V_w (mais precisamente, a bola unitária sobre a norma forte na topologia fraca tem um número finito de ε vizinhanças para cada ε);
4. (Limitação fraca) A norma fraca do operador restrito a V_s satisfaz

$$\sup_n \|P_T^n|_{V_s}\|_w < \infty$$

⁴ Ver (SARIG, 2020), por exemplo.

Sob essas hipóteses, existem $C_2 > 0, \rho_2 < 1$ tais que para todo $g \in V_s$

$$\|P_T^n g\|_s \leq C_2 \rho_2^n \|g\|_s. \quad (5.10)$$

Demonstração. Primeiramente iremos mostrar que as afirmações 2, 3 e 4 implicam que P_T é uma contração uniforme de V_s em V_w , ou seja, que existe $n_1 > 0$ tal que $\forall g \in V_s$

$$\|P_T^{n_1} f\|_w \leq \lambda_2 B \|g\|_s \quad (5.11)$$

onde $\lambda_2 B < 1$.

Além disso, por 3, para qualquer ε existe um conjunto finito $\{g_i\}_{i \in (1, \dots, k)}$ na bola unitária forte \mathcal{B} de V_s tal que para cada $g \in \mathcal{B}$ existe um $g_i \in V_s$ tal que $\|g - g_i\|_w \leq \varepsilon$.

Logo

$$\sup_{g \in V_s, \|g\|_s \leq 1} \|P_T^n g\|_w \leq \sup_{1 \leq i \leq k, v \in \{v \in V_s \text{ t.q. } \|v\|_w \leq \varepsilon\}} \|P_T^n (g_i + v)\|_w$$

Agora, por 4, suponha que $\forall n, \|P_T^n|_{V_s}\|_w \leq M$, então

$$\sup_i \|P_T^n (g_i + v)\|_w \leq \sup_i \|P_T^n (g_i)\|_w + M\varepsilon$$

Como ε pode ser tão pequeno quanto queira e pelo item 2 para cada i , $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_T^n (g_i)\|_w = 0$ e temos (5.11). (Primeiro fixe um ε suficientemente pequeno e depois escolha i suficientemente grande).

Vamos aplicar a desigualdade de Lasota Yorke para fortalecer a (5.10) e conseguir uma estimativa para a norma forte. Para cada $f \in V_s$

$$\|P_T^{n_1+m} f\|_s \leq A\lambda_1^m \|P_T^{n_1} f\|_s + B\|P_T^{n_1} f\|_w$$

então

$$\begin{aligned} \|P_T^{n_1+m} f\|_s &\leq A\lambda_1^m \|P_T^{n_1} f\|_s + B\lambda_2 \|f\|_s \\ &\leq A\lambda_1^m [A\lambda_1^{n_1} \|f\|_s + B\|f\|_w] + B\lambda_2 \|f\|_s \end{aligned}$$

Se m é suficientemente grande

$$\|P_T^{n_1+m} f\|_s \leq \lambda_3 \|f\|_s$$

com $\lambda_3 < 1$.

Isto implica nosso resultado. De fato, tome $n_2 = n_1 + m$, para cada $k, q \in \mathbb{N}, q \leq n_2, g \in V_s$,

$$\begin{aligned} \|P_T^{kn_2+q}g\|_s &\leq \lambda_3^k \|P_T^q g\|_s \\ &\leq \lambda_3^k (\lambda_1^q \|g\|_s + B\|g\|_w). \end{aligned}$$

O que implica que para cada $g \in V_s$ existem $C_2 > 0, \rho_2 < 1$ tais que

$$\|P_T^n g\|_s \leq C_2 \rho_2^n \|g\|_s$$

□

No caso onde $(B_s, \|\cdot\|_s)$ é um espaço de Banach complexo, pelo teorema e a fórmula do raio espectral, o espectro de P_T restrito a V_s é estritamente menor que 1, e a lacuna espectral é definida como na definição 5.3, temos o seguinte

Teorema 5.3. Sob as hipóteses do teorema 5.2, se $(B_s, \|\cdot\|_s)$ é um espaço de Banach então P_T tem lacuna espectral.

Para demonstrar isso, faremos uso do seguinte lema.

Lema 5.3. Sob as hipóteses do teorema 5.2, se $(B_s, \|\cdot\|_s)$ é um espaço de Banach então P_T tem uma única probabilidade invariante em B_s .

Demonstração. A demonstração segue de maneira análoga à abordagem da seção 5.2, com a diferença na utilização da inclusão compacta (hipótese 3 do teorema 5.2) no lugar da proposição 5.1. □

Demonstração do teorema 5.2. Note que pela desigualdade de Lasota Yorke e da fórmula do raio espectral, o raio espectral de P_T em B_s não é maior que 1. Como existe uma medida invariante em B_s o raio será 1. Pela convergência para o equilíbrio (hipótese 2 do teorema 5.2), só pode existir uma probabilidade que é ponto fixo de P_T em B_s , que denotaremos por μ .

Observe que se existissem duas, bastaria tomar a diferença e iterar, como em 5.2. □

Agora observemos que todo $g \in B_s$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$g = [g - hg(X)] + [hg(X)]$$

onde $g(X)$ representa a g -medida de todo espaço.

A função $P : B_s \rightarrow B_s$ definida por

$$P(g) = hg(X)$$

é uma projeção, onde $g(X)$ denota a medida total do espaço X . A função $N : B_s \rightarrow B_s$ definida por

$$N(g) = L[g - hg(X)]$$

é tal que $N(B_s) \subseteq V_s$, $N|_{V_s} = L|_{V_s}$, e por (5.10) satisfaz $\rho(N) < |\lambda|$. Daí,

$$P_T = P + N$$

e $PN = NP = 0$. Assim, pelas hipóteses do teorema 5.2, P_T tem lacuna espectral.

Observação 4. A equação (5.10) implica diretamente a convergência exponencial para o equilíbrio.

Observação 5. Lacuna espectral para transformações expansoras: Adaptando na proposição 5.1 para V_s , considerando uma integral que preserva a projeção $\pi_2 f = \pi f - \int \pi f$, junto com a proposição 5.5 e a desigualdade de Lasota Yorke, as hipóteses do teorema 5.2 são verificadas para transformações expansoras com a norma $W^{1,1}$, com a norma L^1 como norma fraca. Então seu operador de transferência tem lacuna espectral.

5.6 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Veremos uma consequência da propriedade da lacuna espectral para estimar a flutuação de um observável, obtendo o teorema central do limite.

Teorema 5.4. Seja (X, T, μ) uma probabilidade misturadora invariante pela transformação T em algum espaço de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ contendo as funções constantes e satisfazendo

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$$

$$\|\cdot\| \geq \|\cdot\|_1$$

Seja $f \in \mathcal{B}$ limitado e $\int f d\mu = 0$. Se não existe $\nu \in \mathcal{B}$ tal que $f = \nu - \nu \circ T$ q.t.p., então $\exists \sigma > 0$ tal que para todo intervalo $[a, b]$,

$$\mu \left\{ x; \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \in [a, b] \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

Um estudo sobre esse resultado será feito mais a frente, no capítulo 8.

6 EXPANSORAS POR PARTES

Nesse capítulo iremos considerar um classe de aplicações no intervalo unitário, que são expansoras mas podem ser descontínuas. Essa classe é interessante e foi bastante estudada porque preserva um comportamento rico, e pode ser trabalhada por técnicas semelhantes às apresentadas anteriormente.

Definição 6.1. Uma aplicação injetiva $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é chamada *expansora por partes* se

1. Existe um número finito de pontos $d_1 = 0, d_2, \dots, d_n = 1$ tais que para cada i , $T_i = T|_{(d_i, d_{i+1})}$ é C^2 e $\sup_{[0,1]} \frac{|T''|}{(T')^2} dx < \infty$,
2. $\inf_{x \in [0,1]} |T'(x)| > 1$ no intervalo que esteja definido.

O operador de transferência associado a essa classe de aplicações tem propriedades gerais similares as aplicações expansoras. Se aplicarmos o operador de transferência à medidas tendo uma densidade obtemos a seguinte fórmula para o operador de transferência.

$$P_T f(x) = \sum_{i \leq n} \frac{f(T_i^{-1}x) 1_{T_i(d_i, d_{i+1})}}{|T'(T_i^{-1}x)|}. \quad (6.1)$$

Na presença de descontinuidades na aplicação, o operador de transferência não necessariamente preserva o espaço de densidades contínuas. Para isto, introduzir um espaço adequado de densidades regulares que inclua as funções descontínuas é importante.

6.1 ESPAÇO DE VARIAÇÃO LIMITADA E DESIGUALDADE DE LASOTA YORKE PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS POR PARTES

Seja $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Seja $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq [0, 1]$ uma seqüência de pontos. Definamos uma variação de ϕ com respeito a $\{x_1, \dots, x_k\}$ como

$$\text{Var}_{\{x_1, \dots, x_k\}}(\phi) = \sum_{i=1}^{k-1} |\phi(x_i) - \phi(x_{i+1})|.$$

Definimos a variação total de ϕ como o supremo de $\text{Var}_{\{x_1, \dots, x_k\}}(\phi)$ sobre toda seqüência finita $\{x_1, \dots, x_k\}$

$$\text{Var}(\phi) = \sup_{\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq [0,1]} \text{Var}_{\{x_1, \dots, x_k\}}(\phi)$$

e dizemos que ϕ tem variação limitada se $Var(\phi) < \infty$. Chamamos BV ou $BV[0, 1]$ o conjunto das funções de variação limitada no intervalo. Uma importante propriedade de funções de variação limitada é a seguinte:

Teorema 6.1. (Helly selection theorem) Seja ϕ_n uma sequência de funções com variação limitada no intervalo $[0, 1]$ tal que $Var(\phi_n) \leq M$ e $\|\phi_n\|_1 \leq M$ são uniformemente limitados.

Então, existem $\phi \in BV$ e subsequência ϕ_{n_k} tal que

$$\phi_{n_k} \rightarrow \phi$$

em L^1 .

Funções de variação limitada são preservadas pelo operador de transferência de uma transformação expansora por partes, além disso, podemos provar a seguinte Lasota Yorke.

Teorema 6.2. Seja T uma transformação expansora por partes. Seja ϕ uma densidade de variação limitada em um intervalo $[0, 1]$ e $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função expansora por partes.

Então

$$Var(P_T\phi) \leq \frac{2}{\inf_{[0,1]}(T')} Var(\phi) + \left(\sup_{[0,1]} \left(\left| \frac{T}{T'^2} \right| \right) + \frac{2}{\inf_i |I_i|} \right) \int |\phi|.$$

Antes de demonstrar, vamos observar o comportamento do operador agindo na densidade em um intervalo simples I_i .

Lema 6.1. Seja ϕ uma densidade com variação limitada em um intervalo I_i e $T : I_i \rightarrow [0, 1]$ uma função expansora invertível. Então,

$$Var(P_T\phi) \leq \frac{2}{\inf_{I_i}(T')} Var(\phi) + \left(\sup_{I_i} \left(\left| \frac{T''}{T'^2} \right| \right) + \frac{2}{|I_i|} \right) \int |\phi|.$$

Demonstração. Vamos considerar $y_1, \dots, y_k \in [0, 1]$ e suponhamos que existem h_1, h e $x_1, \dots, x_h \in I_i$ tais que

$$T^{-1}y_i = \begin{cases} \emptyset & \text{se } i < h_1 \\ x_{i-h_1+1} & \text{se } h_1 \leq i \leq h_1 + h \\ \emptyset & \text{se } i > h_1 + h \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Var_{y_1, \dots, y_k}(P_T\phi) &= \sum_1^{k-1} |P_T\phi(y_i) - P_T\phi(y_{i+1})| \\ &\leq \left| \frac{1}{T'(x_{h_1})} \phi(x_{h_1}) \right| + \left| \frac{1}{T'(x_{h_1+h})} \phi(x_{h_1+h}) \right| \\ &\quad + \sum_{h_1}^{h_1+h-1} \left| \frac{1}{T'(x_{h_1})} \phi(x_{h_1}) - \frac{1}{T'(x_{h_1+1})} \phi(x_{h_1+1}) \right| \end{aligned}$$

Tomando um $\tilde{x} \in I_i$ tal que $\phi(\tilde{x}) \leq \frac{1}{|I_i|} \int |\phi|$, então

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T'(x_{h_1})} \phi(x_{h_1}) \right| + \left| \frac{1}{T'(x_{h_1+h})} \phi(x_{h_1+h}) \right| \\ & \leq \frac{1}{\inf_{I_i}(T')} (2\phi(\tilde{x}) + |\phi(x_{h_1}) - \phi(\tilde{x})| + |\phi(x_{h_1+h}) - \phi(\tilde{x})|) \\ & \leq \frac{1}{\inf_{I_i}(T')} \text{Var}(\phi) + \frac{2}{|I_i|} \int |\phi|. \end{aligned}$$

O outro somatório pode ser limitado por

$$\begin{aligned} \sum_{h_1}^{h_1+h-1} \left| \frac{1}{T'(x_{h_1})} \phi(x_{h_1}) - \frac{1}{T'(x_{h_1+1})} \phi(x_{h_1+1}) \right| & \leq \sum_{h_1}^{h_1+h-1} \left| \frac{1}{T'(x_i)} \phi(x_i) - \frac{1}{T'(x_i)} \phi(x_{i+1}) \right| \\ & + \left| \frac{1}{T'(x_i)} \phi(x_{i+1}) - \frac{1}{T'(x_{i+1})} \phi(x_{i+1}) \right| \\ & \leq \frac{1}{\inf_{I_i}(T')} \text{Var}(\phi) \\ & + \left| \frac{1}{T'(x_i)} \phi(x_{i+1}) - \frac{1}{T'(x_{i+1})} \phi(x_{i+1}) \right| \\ & \leq \frac{1}{\inf_{I_i}(T')} \text{Var}(\phi) \\ & + \sum_{h_1}^{h_1+h-1} \left| \frac{T''(\Xi_i)}{T'(\Xi_i)} \right| |x_i - x_{i+1}| \phi(x_{i+1}) \end{aligned}$$

pelo teorema de Lagrange (valor médio), para $\Xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. E

$$\begin{aligned} \frac{1}{\inf_{I_i}(T')} \text{Var}(\phi) + \left| \frac{T''(\Xi_i)}{T'(\Xi_i)} \right| |x_i - x_{i+1}| \phi(x_{i+1}) & \leq \frac{1}{\inf_{I_i}(T')} \text{Var}(\phi) \\ & + \sup_{I_i} \left(\left| \frac{T''(\Xi_i)}{T'(\Xi_i)} \right| \right) \sum_{h_1}^{h_1+h-1} |x_i - x_{i+1}| \phi(x_{i+1}). \end{aligned}$$

Observando que para todo ε , se a subdivisão $\{x_i\}$ é suficientemente fina então $\sum_{h_1}^{h_1+h-1} |x_i - x_{i+1}| |\phi(x_{i+1})| \leq \int_{I_i} \phi + \varepsilon$ e pegando todos somatórios, concluímos o resultado. \square

Daí, podemos concluir

Demonstração do teorema 6.2. Seja $\phi_i = \phi|_{I_i}$. Temos que $\text{Var}(\phi) = \sum \text{Var}_{I_i} \phi_i$ e $\int |\phi| = \sum_i \int |\phi_i|$. Então

$$\text{Var}(P_T \phi) \leq \sum_i \text{Var} P \phi_i.$$

Pelo lema anterior

$$\sum_i \text{Var} L \phi_i \leq \sum_i \frac{2}{\inf_{I_i}(T')} \text{Var}(\phi_i) + \left(\left(\sup_{I_i} \left| \frac{T''}{T'^2} \right| \right) + \frac{2}{\inf_i |I_i|} \right) \int |\phi|.$$

\square

Podemos definir a norma de variação limitada $\|\cdot\|_{BV}$ como

$$\|f\|_{BV} = Var(f) + \|f\|_1$$

então é imediato deduzir do teorema 6.2 a desigualdade de Lasota Yorke para a norma de variação limitada: existe B tal que

$$\|P_T\phi\|_{BV} \leq \frac{2}{\inf_{I_i}(T')} \|\phi\|_{BV} + B\|\phi\|_1.$$

Assim como anteriormente para transformações expansoras, escrevendo $\lambda = \frac{2}{\inf_{I_i}(T')}$ e iterando a inequação, obtemos

$$\|P_T^n\phi\|_{BV} \leq \lambda^n \|\phi\|_{BV} + \frac{B}{1-\lambda} \|\phi\|_1.$$

Essa desigualdade é para transformações tais que $\frac{2}{\inf_{I_i}((T^n)')} < 1$.

Note que, assim como anteriormente, por cálculos simples obtém-se uma desigualdade geral de Lasota Yorke válida para qualquer transformação expansora por partes: Existem $A, B \geq 0$ e $\lambda \in [0, 1)$ tal que

$$\|P_T^n\phi\|_{BV} \leq A\lambda^n \|\phi\|_{BV} + B\|\phi\|_1 \quad (6.2)$$

A primeira consequência dessa desigualdade é a existência de uma densidade invariante com variação limitada para cada transformação expansora por partes. Por (6.2) e pelo teorema 6.1, pelo mesmo argumento usando na seção 5.2 temos a existência de uma medida invariante absolutamente contínua com densidade com variação limitada para esse tipo de transformação. Por argumentos muito parecidos com os apresentados em 5.5 (usando a norma BV como norma forte e a norma L^1 como norma fraca e a desigualdade de Lasota Yorke, e os teoremas 5.2 e 6.1 para obter a inclusão compacta) também é possível obter que uma transformação expansora por partes tem lacuna espectral no espaço de densidades de variação limitada, e se for misturadora em algum sentido, então existirá uma convergência exponencial para o equilíbrio.

Definição 6.2. Dizemos que uma aplicação expansora por partes T é topologicamente misturadora se existe um intervalo $I_* \subseteq I$ tal que $f(I_*) = I_*$, toda órbita $T^n(x), x \in [0, 1]$ eventualmente entra em I_* , e para todo aberto $J \subseteq I_*$ existe $n \geq 1$ tal que $T^n(J) = I_*$.

7 ESTABILIDADE E RESPOSTA PARA PERTURBAÇÕES

Neste capítulo iremos considerar pequenas perturbações para um sistema dado e tentar estudar a dependência da medida invariante na perturbação. Se a medida varia continuamente, sabemos que algumas propriedades estatísticas dos sistemas são estáveis sob a perturbação.

É sabido que mesmo em famílias de transformações expansoras por partes, a medida física invariante pode ser descontínua.

Veremos que sob certas hipóteses gerais relacionadas a convergência para o equilíbrio do sistema e tipo de perturbações, a medida física muda continuamente, e temos estimativas no módulo da continuidade. Sob hipóteses mais fortes, a dependência pode ser Lipschitz, ou até diferenciável.

Considere novamente dois espaços vetoriais de medida com sinal em X

$$B_s \subseteq B_w \subseteq S(X)$$

dotados com duas normas, a norma forte $\|\cdot\|_s$ em B_s e a norma fraca $\|\cdot\|_w$ em B_w , tais que $\|\cdot\|_s \geq \|\cdot\|_w$ como anteriormente. Suponha $P_\delta(B_s) \subseteq B_s$ e $P_\delta(B_w) \subseteq B_w$. Denotemos como anteriormente os espaços de média zero, V_s, V_w .

Uma família uniforme de operadores. Vamos considerar uma família uniforme de operadores de um parâmetro $P_\delta, \delta \in [0, 1)$. Suponha que:

UF1 (Desigualdade de Lasota Yorke uniforme.) Existem constantes $A, B, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 < 1$ tais que $\forall f \in B_s, \forall n \geq 1, \forall \delta \in [0, 1)$, cada operador satisfaz a desigualdade de Lasota Yorke,

$$\|P_\delta^n f\|_s \leq A\lambda_1^n \|f\|_s + B\|f\|_w. \quad (7.1)$$

UF2 Suponha que P_δ se aproxima de P_0 quando δ é pequena no seguinte sentido: existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\forall g \in B_s$:

$$\|(P_\delta - P_0)g\|_w \leq \delta C \|g\|_s \quad (7.2)$$

UF3 Suponha que P_0 tem convergência exponencial para o equilíbrio, com respeito as normas $\|\cdot\|_w$ e $\|\cdot\|_s$.

UF4 (A norma fraca não expande) Existe M tal que $\forall \delta, n, g \in B_s$

$$\|P_\delta^n g\|_w \leq M \|g\|_w.$$

Iremos ver que sob essas hipóteses podemos garantir que a medida invariante do sistema varia continuamente (na norma fraca) quando P_0 é perturbado para P_δ para δ pequeno.

Observação 6. Podemos observar que as condições **UF2**, **UF3** e **UF4** juntas implicam que o operador P_0 eventualmente contrai exponencialmente rápido o espaço de média zero V_s . Além disso, seja $f \in V_s$ usando Lasota-Yorke e a convergência para o equilíbrio

$$\begin{aligned} \|P_0^{n+m} f\|_s &\leq A\lambda_1^n \|P_0^m f\|_s + B\|P_0^m f\|_w \\ &\leq A\lambda_1^n \|P_0^m f\|_s + BE\lambda_2^m \|P_0^m f\|_s \\ &\leq A\lambda_1^n (A\lambda_1^m \|f\|_s + B\|f\|_w) + BE\lambda_2^m \|P_0^m f\|_s \\ &\leq A\lambda_1^n (A\lambda_1^m \|f\|_s + B\|f\|_s) + BE\lambda_2^m \|P_0^m f\|_s \\ &\leq A\lambda_1^n (A + B)\|f\|_s + BE\lambda_2^m \|P_0^m f\|_s, \end{aligned}$$

sendo m, n suficientemente grandes, temos $\|P_0^{n+m} f\|_s \leq \frac{1}{2}\|f\|_s$.

7.1 ESTABILIDADE DO PONTO FIXO

Iremos observar alguns resultados sobre a estabilidade do ponto fixo que satisfazem certas hipóteses. Isso será uma ferramenta flexível para obter a estabilidade de um medida invariante sob uma pequena perturbação.

Vamos considerar dois operadores P_0 e P_δ preservando um espaço de medida normado $\mathcal{B} \subseteq S(X)$ com norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, ou seja, \mathcal{B} é invariante por esses operadores. Vamos supor que $f_0, f_\delta \in \mathcal{B}$ são probabilidades fixas de P_0 e P_δ , respectivamente.

Lema 7.1. Suponha que:

1. $\|P_\delta f_\delta - P_0 f_\delta\|_{\mathcal{B}} < \infty$;
2. P_0^i é contínua em \mathcal{B} : $\exists C_i$; tal que $\forall g \in \mathcal{B}$, $\|P_0^i g\|_{\mathcal{B}} \leq C_i \|g\|_{\mathcal{B}}$.

Então para cada N

$$\|f_\delta - f_0\|_{\mathcal{B}} \leq \|P_0^N (f_\delta - f_0)\|_{\mathcal{B}} + \|P_\delta f_\delta - P_0 f_\delta\|_{\mathcal{B}} \sum_{i \in [0, N-1]} C_i \quad (7.3)$$

Demonstração. Essa demonstração segue de contas simples:

$$\begin{aligned} \|f_\delta - f_0\|_{\mathcal{B}} &\leq \|P_\delta^N f_\delta - P_0^N f_0\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \|P_0^N f_0 - P_0^N f_\delta\|_{\mathcal{B}} + \|P_0^N f_\delta - P_\delta^N f_\delta\|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Logo

$$\|f_\delta - f_0\|_{\mathcal{B}} \leq \|P_0^N(f_0 - f_\delta)\|_{\mathcal{B}} + \|P_0^N f_\delta - P_\delta^N f_\delta\|_{\mathcal{B}}$$

mas

$$P_0^N - P_\delta^N = \sum_{k=1}^N P_0^{N-k}(P_0 - P_\delta)P_\delta^{k-1}$$

e

$$\begin{aligned} (P_0^N - P_\delta^N)f_\delta &= \sum_{k=1}^N P_0^{N-k}(P_0 - P_\delta)P_\delta^{k-1}f_\delta \\ &= \sum_{k=1}^N P_0^{N-k}(P_0 - P_\delta)f_\delta \end{aligned}$$

Pela segunda hipótese

$$\begin{aligned} \|(P_0^N - P_\delta^N)f_\delta\|_{\mathcal{B}} &\leq \sum_{k=1}^N C_{N-k} \|(P_0 - P_\delta)f_\delta\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \|(P_0 - P_\delta)f_\delta\|_{\mathcal{B}} \sum_{i \in [0, N-1]} C_i \end{aligned}$$

então

$$\|f_\delta - f_0\|_{\mathcal{B}} \leq \|P_0^N(f_0 - f_\delta)\|_{\mathcal{B}} + \|(P_0 - P_\delta)f_\delta\|_{\mathcal{B}} \sum_{i \in [0, N-1]} C_i$$

□

Agora, aplicando esse resultado na nossa família de operadores satisfazendo as condições UF1,2,3,4, supondo $B_w = \mathcal{B}$. Temos o seguinte resultado.

Proposição 7.1. Suponha que P_δ é uma família de operadores satisfazendo UF1,2,3,4, f_0 é a única probabilidade invariante de P_0 , f_δ é uma probabilidade invariante de P_δ . Então,

$$\|f_\delta - f_0\|_w = \mathcal{O}(\delta \log \delta)$$

Demonstração. Observe que pela desigualdade de Lasota Yorke $\{f_\delta\}_\delta$ são uniformemente limitado ($\|f_\delta\|_\delta \leq M$).

Então

$$\|P_\delta f_\delta - P_0 f_\delta\|_w \leq \delta C M$$

(veja o primeiro item do lema 7.1). Além disso por UF4, $C_i \leq M_2$.

Logo

$$\|f_\delta - f_0\|_w \leq \delta C M M_2 N + \|P_0^N(f_0 - f_\delta)\|_w$$

Agora pela convergência exponencial para o equilíbrio para P_0

$$\begin{aligned} \|P_0^N(f_0 - f_\delta)\|_w &\leq C_2 \rho_2^N \|f_\delta - f_0\|_s \\ &\leq C_2 \rho_2^N M \end{aligned}$$

logo

$$\|f_\delta - f_0\|_w \leq \delta C M M_2 N + C_2 \rho_2^N M$$

Tomando $N = \left\lceil \frac{\log \delta}{\log \rho_2} \right\rceil$, temos:

$$\begin{aligned} \|f_\delta - f_0\|_w &\leq \delta C M M_2 \left\lceil \frac{\log \delta}{\log \rho_2} \right\rceil + C_2 \rho_2^{\left\lceil \frac{\log \delta}{\log \rho_2} \right\rceil} M \\ &\leq \delta \log \delta C M_2 M \frac{1}{\log \rho_2} + C_2 \delta M. \end{aligned}$$

□

7.2 APLICAÇÃO PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS.

Na seção anterior consideramos a estabilidade da medida invariante sob uma perturbação pequena do operador de transferência.

Vamos considerar pequenas perturbações determinísticas das nossas transformações expansoras em M . Consideremos uma família a um parâmetro T_δ , $\delta \in [0, 1]$ de transformações expansoras satisfazendo as propriedades que foram enunciadas no capítulo 5.1 e

UFM $\|T_\delta - T_0\|_{C^2} \leq K\delta$ para algum $K \in \mathbb{R}$.

Para cada um dessas transformações é associado o operador de transferência P_δ definido em $W^{1,1}$. Agora iremos provar que o operador de transferência de uma família uniforme de transformações expansoras satisfaz a propriedades **UF2** e isso nos permite aplicar nosso resultado geral da estabilidade (quantitativa).

Proposição 7.2. Se P_0 e P_δ são operadores de transferência das transformações expansoras T_0 e T_δ , satisfazendo **UFM**, então existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\forall f \in W^{1,1}$:

$$\|(P_\delta - P_0)f\|_1 \leq \delta C \|f\|_{W^{1,1}} \quad (7.4)$$

e **UF2** é satisfeita.

Demonstração. É válido que:

$$[P_\delta f](x) = \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} \quad (7.5)$$

Então

$$\begin{aligned} |[P_\delta f](x) - [P_0 f](x)| &= \left| \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} - \sum_{y \in T_0^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_0(y)|} \right| \\ &\leq \left| \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} - \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_0(y)|} \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} - \sum_{y \in T_0^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_0(y)|} \right| \end{aligned}$$

O primeiro somatório pode ser majorado por

$$\begin{aligned} \left| \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} - \sum_{y \in T_0^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_0(y)|} \right| &\leq \left| \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} \left[1 - \frac{|T'_\delta(y)|}{|T'_0(y)|} \right] \right| \\ &\leq D_1(\delta) \left| \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} \right| \\ &\leq D_1(\delta) |P_\delta f(x)| \end{aligned}$$

onde $D_1 = \sup \left| 1 - \frac{|T'_\delta(y)|}{|T'_0(y)|} \right|$ e observe que $D_1 = O(\delta)$.

Para o segundo somatório, denotemos $T_\delta^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$, $T_0^{-1}(x) = \{y_1^0, \dots, y_n^0\}$. Seja $\Delta_y = \sup_{x,i} (|y_i - y_i^0|)$ note que $\Delta_y = O(\delta)$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{y \in T_\delta^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_\delta(y)|} - \sum_{y \in T_0^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|T'_0(y)|} \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i)}{|T'_0(y_i)|} - \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i^0)}{|T'_0(y_i)|} \right| + \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i^0)}{|T'_0(y_i)|} - \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i^0)}{|T'_0(y_i^0)|} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i) - f(y_i^0)}{|T'_0(y_i)|} \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(y_i^0) \left(\frac{1}{|T'_0(y_i)|} - \frac{1}{|T'_0(y_i^0)|} \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i) - f(y_i^0)}{|T'_0(y_i)|} \right| + \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i^0)}{|T'_0(y_i^0)|} \left(\frac{|T'_0(y_i^0)|}{|T'_0(y_i)|} - 1 \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i) - f(y_i^0)}{|T'_0(y_i)|} \right| + D_2(\delta) \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(y_i^0)}{|T'_0(y_i^0)|} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \frac{\int_{y_i^0}^{y_i} f'(t) dt}{|T'_0(y_i)|} \right| + D_2(\delta) |P_0 f(x)| \end{aligned}$$

onde $D_2(\delta) := \sup \left| \frac{|T'_0(y_i^0)|}{|T'_0(y_i)|} - 1 \right| = O(\delta)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|P_\delta f - P_0 f\|_1 &\leq D_1(\delta) \|P_\delta f\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\int_{y_i^0}^{y_i} f'(t) dt}{|T'_0(y_i)|} \right\|_1 + D_2(\delta) \|P_0 f(x)\|_1 \\
&\leq (D_1(\delta) + D_2(\delta)) \|f\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\int_{y_i^0}^{y_i} f'(t) dt}{|T'_0(y_i)|} \right\|_1 \\
&\leq O(\delta) \|f\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\int_{y_i - \Delta_y}^{y_i} |f'(t)| dt}{|T'_0(y_i)|} \right\|_1 \\
&\leq O(\delta) \|f\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{[1_{[-\Delta_y, 0]} * |f'|](y_i)}{|T'_0(y_i)|} \right\|_1 \\
&\leq O(\delta) \|f\|_1 + D_3 \|P_\delta [1_{[-\Delta_y, 0]} * |f']\|_1 \\
&\leq O(\delta) \|f\|_1 + D_3 \|1_{[-\Delta_y, 0]} * |f'|\|_1 \\
&\leq O(\delta) \|f\|_1 + D_3 \|1_{[-\Delta_y, 0]} |f'|\|_1 \\
&\leq O(\delta) \|f\|_{W^{1,1}}
\end{aligned}$$

onde D_3 é uma constante e $[1_{[-\Delta_y, 0]} * |f'|]$ representa a convolução entre a função característica do intervalo $[-\Delta_y, 0]$ e $|f'|$. E assim provamos o resultado. \square

Podemos ver que a família de aplicações uniformemente expansoras satisfaz as condições **UF1**, **UF3**, **UF4**; Como **UFM** implica **UF2**, podemos aplicar a proposição 7.1 e provar a estabilidade da medida invariante para uma família de aplicações e assim ter uma estimativa para o modulo da continuidade, obtendo o seguinte corolário.

Corolário 7.1. Seja h_δ uma família de medidas invariantes em L^1 para as aplicações T_δ descrita acima. Então

$$\|h_0 - h_\delta\|_1 = O(\delta \log \delta)$$

Observação 7. O resultado também se aplica para perturbações adequadas de transformações expansoras por partes. Como visto no capítulo 6.

7.3 FAMÍLIA UNIFORME DE OPERADORES E CONTRAÇÕES UNIFORMES V_s

Agora iremos ver como uma família uniforme de operadores, não somente tem uma certa estabilidade na medida invariante como visto anteriormente, mas também uma taxa uniforme de contração do espaço V_s e isso implica a convergência uniforme para o equilíbrio para a lacuna espectral.

Novamente iremos considerar dois subespaços vetoriais de um espaço de medida com sinal em X .

$$B_s \subseteq B_w \subseteq S(X)$$

dotado de duas normas, a norma forte $\|\cdot\|_s$ em B_s e a norma fraca $\|\cdot\|_w$ em B_w , tal que $\|\cdot\|_s \geq \|\cdot\|_w$. Denotemos como anteriormente por V_s, V_w os espaços de média zero forte e fraca, respectivamente. E consideremos uma família de operadores de um parametro $P_\delta, \delta \in [0, 1)$. Suponha que satisfaçam UF1, ..., UF4.

Proposição 7.3. (Contração uniforme V_s para uma família uniforme de operadores). Sobre as hipóteses existem $\lambda_4 < 1, A_2, \delta_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\delta \leq \delta_0, f \in V_s$

$$\|P_\delta^k f\|_s \leq A_2 \lambda_4^k \|f\|_s. \quad (7.6)$$

Podemos observar que a contração do espaço de média zero para o operador P_0 pode ser obtido aplicando diretamente (7.6). Antes de demonstrar a proposição, precisamos do seguinte resultado:

Lema 7.2. Suponha que P_0 satisfaz a desigualdade de Lasota Yorke

$$\|P_0^k g\|_s \leq A \lambda_1^k \|g\|_s + B \|g\|_w$$

e

- $\forall g \in B_s, \|(P_\delta - P_0)g\|_w \leq C\delta \|g\|_s$;
- $\forall \delta, n, g \in B_s, \|P_\delta^n g\|_w \leq M \|g\|_w$ para algum $M \geq 0$;

então P_δ^n se aproxima para P_0^n no seguinte sentido: existem constantes C, D tal que $\forall g \in B_s, \forall n \geq 0$:

$$\|(P_\delta^n - P_0^n)g\|_w \leq \delta(C \|g\|_s + nD \|g\|_w) \quad (7.7)$$

Demonstração. É válido que

$$\begin{aligned}
\|(P_\delta^n - P_0^n)g\|_w &\leq \sum_{k=1}^n \|P_\delta^{n-k}(P_\delta - P_0)P_0^{k-1}g\|_w \\
&\leq M \sum_{k=1}^n \|(P_\delta - P_0)P_0^{k-1}g\|_w \\
&\leq M \sum_{k=1}^n \delta C \|P_0^{k-1}g\|_w \\
&\leq \delta MC \sum_{k=1}^n (A\lambda_1^{k-1}\|g\|_s + B\|g\|_w) \\
&\leq \delta MC \left(\frac{A}{1-\lambda_1} \|g\|_s + Bn\|g\|_w \right)
\end{aligned}$$

□

Demonstração. Da proposição 7.3. Vamos aplicar a desigualdade de Lasota-Yorka

$$\|P_\delta^{n+m}f\|_s \leq A\lambda_1^n \|P_\delta^m f\|_s + B\|P_\delta^m f\|_w$$

junto com a condição **UF3**, e então obtemos:

$$\begin{aligned}
\|P_\delta^{n+m}f\|_s &\leq A\lambda_1^m \|P_\delta^m f\|_s + B[E\lambda_2^m \|f\|_s + \delta(C\|f\|_s + mD\|f\|_w)] \\
&\leq A\lambda_1^n [A\lambda_1^m \|f\|_s + B\|f\|_w] + B[E\lambda_2^m \|f\|_s + \delta(C\|f\|_s + mD\|f\|_w)]
\end{aligned}$$

Se n, m são suficientemente grandes e δ suficientemente pequeno, então existe um $\lambda_3 < 1$ tal que para cada $f \in V_s$

$$\|P_\delta^{n+m}f\|_s \leq \lambda_3 \|f\|_s$$

daí existem $\lambda_4 < 1, A_2 \in \mathbb{R}$ tais que para cada $f \in V_s$, e δ suficientemente pequeno

$$\|P_\delta^k f\|_s \leq A_2 \lambda_4^k \|f\|_s \tag{7.8}$$

□

O lema seguinte estabelece a continuidade do resolvente quando o operador é perturbado, e será usado mais a frente.

Lema 7.3. Suponhamos B_w e B_s espaços de Banach. Considere uma família de um parâmetro P_δ , $\delta \in [0, 1)$. Suponha que eles satisfazem UF1,...,4. Considere o resolvente $(Id - P_\delta)^{-1} : V_s \rightarrow V_w$

$$(Id - P_\delta)^{-1} := \sum_{k=0}^{\infty} P_0^k$$

que está bem definido e é contínuo graças a (7.6) e pela completude de B_w . Sob as hipóteses acima, temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|(Id - P_\delta)^{-1} - (Id - P_0)^{-1}\|_{V_s \rightarrow V_w} = 0$$

Demonstração. Tome $\varepsilon > 0$ fixo e vamos provar que para um δ suficientemente pequeno

$$\|(Id - P_\delta)^{-1} - (Id - P_0)^{-1}\|_{V_s \rightarrow V_w} \leq \varepsilon$$

. Pela (7.6) existe $\bar{\delta} > 0$ e $n \geq 0$ tais que para cada

$$0 \leq \delta \leq \bar{\delta} \sum_{k=m}^{\infty} \|P_\delta^k\|_{V_s \rightarrow V_w} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

. Do lema 7.2 existe $\bar{\delta} > 0$ tal que para cada $k \leq n$,

$$\|(P_\delta^k - P_0^k)\|_{B_s \rightarrow B_w} \leq \frac{\varepsilon}{3n}$$

. Então considerando um $g \in V_s$ com $\|g\| \leq 1$ temos que para cada $0 \leq \delta \leq \bar{\delta}$

$$\begin{aligned} \|(Id - P_\delta)^{-1}g - (Id - P_0)^{-1}g\|_w &\leq \left\| \sum_{k=n}^{\infty} P_\delta^k g \right\|_w + \left\| \sum_{k=n}^{\infty} P_0^k g \right\|_w + \left\| \sum_{k=n}^{\infty} (P_\delta^k - P_0^k)g \right\|_w \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

7.4 CONTINUIDADE LIPSCHITZ

Vemos que explorando a taxa de contração uniforme de V_s e algumas suposições adicionais, podemos provar a dependência Lipschitz da medida invariante relevante sob perturbações do sistema.

Proposição 7.4. Considere uma família uniforme $P_\delta, \delta \in [0, 1)$ de operadores satisfazendo UF1,...,4. Supondo que cada operador P_0 tem uma única medida invariante h_δ em B_s e

$$\|(P_\delta - P_0)h_0\|_s \leq C_{h_0}\delta; \tag{7.9}$$

então a dependência é Lipschitz (com respeito a norma forte)

$$\|h_0 - h_\delta\| \leq O(\delta).$$

Demonstração. Denote por $\Delta h = h_\delta - h_0$:

$$\begin{aligned} (I - P_\delta)\Delta h &= (I - P_\delta)(h_\delta - h_0) \\ &= h_\delta - P_\delta h_\delta - h_0 + P_\delta h_0 \\ &= (P_\delta - P_0)h_0. \end{aligned}$$

Pela contração uniforme (5.11) segue que $(I - P_\delta)$ é invertível em V_s e $(I - P_\delta)^{-1} = \sum_0^\infty P_\delta^i$ é uniformemente limitado e existe $M_2 \geq 0$ tal que para δ suficientemente pequeno $\|(I - P_\delta)^{-1}\|_{V_s \rightarrow V_s} \leq M_2$.

Como $(P_\delta - P_0)h_0 \in V_s$, temos

$$\Delta h = (I - P_0)^{-1}(P_\delta - P_0)h_0$$

e como $\|(P_\delta - P_0)h_0\|_s \leq \delta C_{h_0}$, segue que

$$\|\Delta h\|_s \leq \delta M_2 C_{h_0}. \quad (7.10)$$

obtendo assim o resultado. □

8 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Veremos o Teorema Central do Limite em duas abordagens, primeiro veremos para o caso de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, e posterior a ela, o teorema com lacuna espectral.

8.1 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES IDENTICAMENTE DISTRIBUIDAS

A lei fraca dos grandes números diz que se X_n é uma sequência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas (IID) com $\mathbb{E}[X_n] = 0$, então escrevendo $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$, o tempo médio $\frac{1}{n}S_n$ converge para 0 em probabilidade, ou equivalentemente (desde que o limite seja uma constante), em distribuição. No caso em que $\sigma^2 = \mathbb{E}[X^2] < \infty$, o teorema central do limite deixa o mais forte o resultado para a sequência $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ converge em distribuição para $N(0, \sigma^2)$, a distribuição normal com *média* 0 e variância σ^2 . Ou seja, temos

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \leq c\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \quad (8.1)$$

para todo $c \in \mathbb{R}$.

Isso pode ser estabelecido pelo mesmo método usado para provar a lei fraca dos grandes números A, pelo estudo de funções características de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ e $N(0, \sigma^2)$. A função característica de $N(0, \sigma^2)$ é

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad (8.2)$$

argumentando como na lei fraca dos grandes números (LFGN), escrevemos φ_n para funções características de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ e observando que

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{it\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+\dots+X_n)}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}X_j}] = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (8.3)$$

onde φ é a função característica de X_j (que são indenticamente distribuídas), e na segunda igualdade é usado o fato que X_j são independentes.

Agora, usando Taylor, temos que

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \mathbb{E}\left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}X_j}\right] \\ &= 1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[X_j] - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}[X_j^2] + o(t^2) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2n}\sigma^2 + o(t^2),\end{aligned}$$

usando o fato que X_j tem média 0 e variância σ^2 , Podemos concluir por (8.3) que

$$\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2n} + o(t^2)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = \psi(t),$$

assim concluímos a prova do Teorema Central do Limite (TCL) para o caso IID.

8.2 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE COM LACUNA ESPECTRAL

Para traduzir o TCL para linguagem de sistemas dinâmicos, vamos considerar o espaço X e a aplicação $T : X \rightarrow X$ com uma medida invariante μ . De modo geral, podem existir várias medidas T -invariantes, então é importante que seja escolhida uma medida μ adequada. Por exemplo, nos casos em que sejam X um intervalo e T expansora por partes, estamos mais interessados no caso em que μ é uma probabilidade invariante absolutamente contínua (ACIP, *do ingles: absolutely continuous invariante probability*).

Dada uma aplicação mensurável $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, a seqüência de funções $h, h \circ T, h \circ T^2, \dots$ define uma seqüência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas em X , pois $\int h \circ T^k d\mu = \int h d\mu$. No entanto, elas não são independentes, e daí precisamos de algumas informações a respeito do decaimento de correlações entre elas. Em particular, podemos fazer uma prova como na seção 8.1 como o operador de transferência tem lacuna espectral.

Faremos isso no caso em que T é uma transformação expansora em um intervalo, então devido a desigualdade de Lasota Yorke para o operador P_T agindo em BV , o espaço das funções de variação limitada, e em particular, garante a existência de uma acip μ .

Teorema 8.1. Seja T uma aplicação expansora por partes em um intervalo e μ uma ACIP construída anteriormente em 6.1. Suponha que μ é misturadora. Então μ satisfaz o teorema central do limite: dada $h \in BV$ com $\int h d\mu = 0$ e escrevendo $S_n h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h \circ T^k$, temos

$$\mu\left\{x; \frac{1}{\sqrt{n}}S_n h(x) \leq c\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (8.4)$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, onde σ é dado pela fórmula de *Green-Kubo*

$$\sigma^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_X h \cdot (h \circ T^n) d\mu \quad (8.5)$$

e $\sigma = 0$ se, e somente se, existem $g \in BV$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $h = c + g \circ T - g$.

Antes de provar o teorema, faremos algumas observações a respeito da fórmula de Green-Kubo (8.5). Primeiro, note que a soma converge devido ao decaimento exponencial de correlações para funções de variação limitada. Segundo, notemos que se trocamos as funções $h \circ T^n$ com variáveis aleatórias independentes, então todos os termos com $n \neq 0$ se anulam, isto é, convergem para zero, e o termo $n = 0$ é apenas a variância $\mathbb{E}[X^2]$, como na seção anterior.

Vejamos também que usando (8.5), σ^2 pode ser escrito como

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int (S_n h)^2 d\mu$$

De fato, se $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int h(h \circ T^k) d\mu < \infty$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int (S_n h) d\mu &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \int (h \circ T^i)(h \circ T^j) d\mu \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n \int h(h \circ T^{j-i}) d\mu \\ &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} \frac{n-|k|}{n} \int h(h \circ T^k) d\mu \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int h(h \circ T^k) d\mu \end{aligned}$$

Agora provaremos o teorema central do limite (8.4). Como no caso IID, usaremos funções características

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \\ \varphi_n(t) &= \mathbb{E}_\mu \left[e^{\frac{it(S_n h)}{\sqrt{n}}} \right] = \int e^{\frac{it}{\sqrt{n}} S_n h} d\mu \end{aligned}$$

onde $\phi(t)$ é a função característica da distribuição normal e φ_n é a função característica de $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n h$, logo é suficiente mostrar que $\varphi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ para todo t .

Para provar a convergência das funções características, vamos usar os seguintes passos:

1. Escrever a função característica φ_n em termos de *operador de transferência torcido* $P_{h,t}$, onde h é a função que estamos investigando no TCL, e $t \approx 0$ é um parâmetro real pequeno. O operador $P_{h,t}$ é uma pequena perturbação do operador de transferência P_T .

2. Usar a teoria de perturbações de operadores para mostrar que $P_{h,t}$ tem lacuna espectral e para derivar assintoticamente o autovalor principal $\lambda(t)$. Em particular, relacionar $\lambda'(0)$ e $\lambda''(0)$ com a média e a variância do distribuição limitada.

Demonstração do teorema 8.1. Além do que já vimos sobre o operador de transferência nas seções 2.2 e 3.1, consideremos a expressão

$$P_T g(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{g(y) d(y)}{|T'(y)|}$$

onde d é a densidade de μ com respeito a Lebesgue. Definimos dessa maneira para que a função constante seja ponto fixo de P_T (é igual a $P_T(g)$ como na definição dada anteriormente.).

Agora, dado $h \in BV$ com $\int h d\mu = 0$ e $t \in \mathbb{R}$, definimos o operador de transferência *torcido* por

$$P_{h,t} g = P_T(e^{ith} g) \quad (8.6)$$

Para ver a utilidade dessa definição, primeiro notemos que

$$\int P_{h,t}(g) d\mu = \int P_T(e^{ith} g) \mathbf{1} d\mu = \int e^{ith} g d\mu$$

podemos ver que para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} \int P_{h,t}^2 g d\mu &= \int P_{h,t}(P_{h,t} g) d\mu \\ &= \int e^{ith} P_{h,t} g d\mu \\ &= \int e^{ith} P_T(e^{ith} g) \mathbf{1} d\mu \\ &= \int e^{ith \circ T} e^{ith} g d\mu \end{aligned}$$

continuando por indução, obtemos

$$\int P_{h,t}^n(g) = \int e^{it S_n h} g d\mu$$

Em particular, considerando a função característica φ_n , temos

$$\varphi_n(t) = \int e^{\frac{it}{\sqrt{n}} S_n h} d\mu = \int P_{h, \frac{i}{\sqrt{n}}}^n(\mathbf{1}) d\mu \quad (8.7)$$

que termina a primeira parte da demonstração, escrevendo as funções características em termos do operador de transferência torcido.

Para a segunda parte da demonstração, vamos considerar o operador de transferência torcido como uma perturbação de P_T . Da Lasota Yorke e do fato de μ ser misturadora, sabemos que o espectro de P_T tem a forma $\{1\} \cup Z$, onde z está contido em um disco de raio $r < 1$ centrado na origem.

Pela teoria de perturbações de operadores lineares¹, o espectro de $P_{h,t}$ tem a mesma forma para $|t|$ suficientemente pequeno: existe um autovalor principal $\lambda(t)$ próximo de 1, e o resto de espectro está contido no disco de raio r . Além disso, $\lambda(t)$ é analítico em relação à t para qualquer função $b \in BV$ temos

Seja $g_t \in BV$ uma autofunção de $P_{h,t}$ correspondente ao $\lambda(t)$, então

$$\begin{aligned} P_T(e^{ith} g_t) &= \lambda(t) g_t \\ \Rightarrow P_T(e^{ith} g_t) b &= \lambda(t) g_t b \\ \Rightarrow \int P_T(e^{ith} g_t) b d\mu &= \lambda(t) \int g_t b d\mu \\ \Rightarrow \int (e^{ith} g_t) (b \circ T) d\mu &= \lambda(t) \int g_t b d\mu \end{aligned}$$

Derivando com respeito a t , temos

$$\int ih(e^{ith} g_t) (b \circ T) d\mu + \int \left(e^{ith} \frac{d}{dt} g_t \right) (b \circ T) d\mu = \lambda'(t) \int g_t b d\mu + \lambda(t) \int \frac{d}{dt} g_t b d\mu$$

Para $t = 0$, temos $\lambda(0) = 1$ e $g_0 \equiv \mathbf{1}$. Daí

$$\int ih(b \circ T) d\mu + \int \frac{d}{dt} g_t|_{t=0} (b \circ T) d\mu = \lambda'(0) \int b d\mu + \int \frac{d}{dt} g_t|_{t=0} b d\mu$$

Agora, tomando $b \equiv 1$, temos

$$\lambda'(0) = \int ih d\mu = 0$$

já que por hipótese $\int h \mu = 0$.

Para encontrar $\lambda''(0)$: De

$$\int ih(b \circ T) d\mu + \int \frac{d}{dt} g_t|_{t=0} (b \circ T) d\mu = \lambda'(0) \int b d\mu + \int \frac{d}{dt} g_t|_{t=0} b d\mu$$

com $\lambda'(0) = 0$, temos

$$\int ih(b \circ T) d\mu + \int g'_0(b \circ T) d\mu = \int g'_0 b d\mu$$

onde $g'_0 = \frac{d}{dt} g_t|_{t=0} \in BV$.

¹ material complementar (JUNIOR, 2013), (JUNIOR, 2014), (TOSIO, 1980) e (CONWAY, 1978)

Façamos, ao inves de b , $b \circ T^k$ com $k \geq 1$, obtendo

$$\begin{aligned} \int ih(b \circ T^2)d\mu + \int g'_0(b \circ T^2)d\mu &= \int g'_0(b \circ T)d\mu \\ \int ih(b \circ T^3)d\mu + \int g'_0(b \circ T^3)d\mu &= \int g'_0(b \circ T^2)d\mu \\ \int ih(b \circ T^4)d\mu + \int g'_0(b \circ T^4)d\mu &= \int g'_0(b \circ T^3)d\mu \\ &\dots \end{aligned}$$

Vemos que $\sum_{k \geq 1} g'_0(b \circ T^k)$ converge, uma vez que temos decaimento exponencial de correlações.

Daí,

$$\sum_{k \geq 1} \int ih(b \circ T^k)d\mu + \int \sum_{k \geq 1} g'_0(b \circ T^k)d\mu = \int g'_0 b d\mu + \int \sum_{k \geq 1} g'_0(b \circ T^k)d\mu \quad (8.8)$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 1} \int ih(b \circ T^k)d\mu = \int g'_0 b d\mu \quad (8.9)$$

Agora, tomando $b \equiv 1$ em

$$\int ih(e^{ith} g_t)(b \circ T)d\mu + \int \left(e^{ith} \frac{d}{dt} g_t \right) (b \circ T)d\mu = \lambda'(t) \int g_t b d\mu + \lambda(t) \int \frac{d}{dt} g_t b d\mu$$

temos

$$\int ih(e^{ith} g_t)d\mu + \int (e^{ith} g'_t)d\mu = \lambda'(t) \int g_t b d\mu + \lambda(t) \int g'_t b d\mu$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} &\int (ih)^2 (e^{ith} g_t)d\mu + \int ih(e^{ith} g'_t)d\mu + \int ih(e^{ith} g'_t)d\mu + \int e^{ith} g''_t d\mu \\ &= \lambda''(t) \int g_t d\mu + \lambda'(t) \int g'_t d\mu + \lambda' \int g' d\mu + \lambda(t) \int g''_t d\mu \\ &\Rightarrow \int [(ih)^2 (e^{ith} g_t) + 2(ih)(e^{ith} g'_t) + (e^{ith} g''_t)]d\mu = \int (\lambda''(t)g_t + 2\lambda'(t)g'_t + \lambda(t)g''_t)d\mu \end{aligned}$$

Em $t = 0$, temos $g_0 \equiv 1$, $\lambda(0) = 1$, logo

$$\int (-h^2) + 2ihg'_0 d\mu = \int \lambda''(0)d\mu \Rightarrow \int (-h^2)d\mu + 2 \int ihg'_0 d\mu = \lambda''(0)$$

De (8.8) temos

$$\int (ih)g'_0 d\mu = \sum_{k \geq 1} \int (ih)(ih \circ T^k)d\mu$$

Então, por (8.8)

$$\lambda''(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int (S_n(ih))^2 d\mu = -\sigma^2.$$

Logo, os autovalores valores principais de $P_{t,h}$ são:

$$\lambda'(0) = \int (ih) d\mu = 0$$

e

$$\lambda''(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int (S_n(ih))^2 d\mu = -\sigma^2.$$

que é a origem da expressão na fórmula de Green-Kubo.

Agora usaremos cálculo funcional de Riesz, o qual recordaremos as ideias gerais aqui. Seja X um espaço de Banach $\mathcal{B}(X)$ o espaço de operadores lineares limitados em X . Dado $S \in \mathcal{B}(X)$, seja $\sigma \subset \mathbb{C}$ o espectro de S . Então existe uma única maneira de associar cada função analítica $g : \sigma \rightarrow \mathbb{C}$ a um operador $g(S)$ tal que o mapa $g \mapsto g(S)$ é um homomorfismo levando a função constante no operador identidade e a função identidade em S .

Essa aplicação pode ser definida usando integral ao longo de uma curva γ ao redor do espectro σ da seguinte forma:

$$g(S) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (S - zI)^{-1} g(z) d\gamma$$

onde lembramos que $S - zI$ é invertível para todo z no resolvente $\mathbb{C} \setminus \sigma$. Se tomarmos g como a função característica da parte do espectro, obtem-se uma projeção no autoespaço associado com esta parte.

Em particular, considerando o operador $P_{h,t}$, podemos definir $g = \mathbf{1}_{\lambda(t)}$ (alguma função de BV que vale 1 em $\lambda(1)$ e 0 no resto do espectro) e obtemos a projeção Π_t sobre o autoespaço associado a $\lambda(t)$. De maneira similar, definimos $g(z) = \mathbf{1}_{Z(t)}(z)$, onde $Z(t)$ é a parte do espectro contida no disco de raio $r > 1$, temos o operador R_t tal que

$$\Pi_t R_t = R_t z P_t = 0 \quad \|R_t\|_{BV} < r.$$

Mais ainda, temos

$$P_{h,t} = \lambda(t) \Pi_t + R_t$$

que nos permite escrever o operador em (8.7) como

$$\begin{aligned} P_{h, \frac{t}{\sqrt{n}}} &= \lambda \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \Pi_{\frac{t}{\sqrt{n}}} + R_{\frac{t}{\sqrt{n}}}^n \\ &= \left(1 + \lambda'(0) \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda''(0) t^2}{2n} + o \left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n \Pi_{\frac{t}{\sqrt{n}}} + R_{\frac{t}{\sqrt{n}}}^n \\ &= \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + o \left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n \left(\Pi_0 + O \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) + R_{\frac{t}{\sqrt{n}}}^n \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \Pi_0. \end{aligned}$$

Usamos acima o fato que $\|R_t\|_{BV} < r < 1$ que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$. Agora (8.7) nos diz

$$\varphi_n(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}} \int \Pi_0(\mathbf{1}) d\mu = e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}} = \phi(t)$$

que completa a prova do teorema central do limite. (devido ao teorema de convergência de Levy.)

□

9 LINEAR RESPONSE

Nesse capítulo iremos provar que quando o sistema tem convergência para o equilíbrio suficientemente rápida e é *perturbado suavemente com respeito a norma forte* temos que sua medida invariante muda suavemente, conseqüentemente suas propriedades estatísticas também. Isto é chamado de *Linear Response*. A seguir iremos mostrar um resultado geral e simples, os teoremas 9.1 e 9.2, permitindo provar o linear response na norma fraca para um certo conjunto de sistemas e perturbações.

Vamos observar que o teorema 9.1 se aplica para sistemas que tem convergência menor que exponencial para o equilíbrio.

Seja X um espaço métrico compacto. Considere alguns subespaços vetoriais normados e completos $(B_{ss}, \|\cdot\|_{ss}) \subseteq (B_s, \|\cdot\|_s) \subseteq (B_w, \|\cdot\|_w) \subseteq S(X)$ de um espaço de medida boreliana com sinal em X , $S(X)$, com as normas satisfazendo

$$\|\cdot\|_w \leq \|\cdot\|_s \leq \|\cdot\|_{ss}$$

Assumiremos que a forma linear $\mu \rightarrow \mu(X)$ seja contínua em B_i , para $i \in \{ss, s, w\}$. Iremos considerar, os seguintes espaços de média zero (fechados) $V_{ss} \subseteq V_s \subseteq V_w$ definidos como:

$$V_i := \{\mu \in B_i \mid \mu(X) = 0\}$$

onde $i \in \{ss, s, w\}$.

Se A, B são dois espaços vetoriais normados e $P_T : A \rightarrow B$ denotaremos a norma mista $\|P_T\|_{A \rightarrow B}$ como é linear,

$$\|P_T\|_{A \rightarrow B} := \sup_{f \in A, \|f\|_A \leq 1} \|P_T f\|_B$$

Aqui iremos considerar um sistema tendo um operador de transferência P_0 , algum $\delta_0 > 0$ e uma família "próxima" P_δ com $\delta \in [0, \bar{\delta}]$ e suponhamos que o operador P_δ preserva os espaços, isto é, são invariantes: $P_\delta(B_{ss}) \subset B_{ss}$, $P_\delta(B_s) \subset B_s$ e $P_\delta(B_w) \subset B_w$.

Agora iremos detalhar mais sobre o que signifo *linear response* e a motivação por trás de buscar resultados que estabelece o comportamento a respeito da diferenciabilidade de medidas invariantes com respeito a pequenas perturbações. Consideremos uma família de sistemas dinâmicos (X, T_δ) e suponhamos que μ_δ seja uma medida física, ou seja, que a bacia $B(\mu) = \{x, \frac{S_n \phi(x)}{n} \rightarrow \int \phi d\mu \text{ para toda } \phi \text{ contínua}\}$ tem volume positivo, para T_δ . Suponha que a medida invariante varia de maneira suave, e depois de sofrer uma perturbação p de

tamanho δ , sabemos que em algum sentido

$$\frac{\mu_\delta - \mu_0}{\delta} \rightarrow \dot{\mu} \quad (9.1)$$

Considerando um observável f e seu tempo médio $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^j(x)}{n}$. Se a topologia em que (9.1) converge é suficientemente forte, temos na bacia de f temos

$$\frac{d \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^j(x)}{n} \right)}{d\delta} = \frac{\int f d\mu_\delta - \int f d\mu_0}{\delta} \rightarrow \int f d\dot{\mu}$$

Isso mostra que o *linear response* controla o comportamento de um longo tempo médio de observáveis e o comportamento estatístico de um sistema sob perturbações.

Veremos um argumento heurístico para calcular a fórmula do *linear response*, encontrando $\dot{\mu}$ como função de um sistema inicial e da perturbação aplicada.

Assumindo que μ_0 e μ_δ são pontos fixos dos operadores de transferência P_0 e P_δ , respectivamente, obtemos

$$(\text{Id} - P_0) \frac{\mu_\delta - \mu_0}{\delta} = \frac{1}{\delta} (P_\delta - P_0) f_\delta \quad (9.2)$$

Se houver convergência para o equilíbrio suficientemente rápido, podemos mostrar que o resolvente $(\text{Id} - P_0)^{-1}$ está bem definido e é contínuo de maneira análoga ao que foi feito na prova da proposição 7.4. Aplicando o resolvente em (9.2) obtemos:

$$\begin{aligned} (\text{Id} - P_0)^{-1} (\text{Id} - P_0) \frac{\mu_\delta - \mu_0}{\delta} &= (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} \mu_\delta \\ &= (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} \mu_0 + (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} (\mu_\delta - \mu_0) \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\mu_\delta - \mu_0}{\delta} = (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} \mu_0 + (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} (\mu_\delta - \mu_0)$$

Se escolhermos a topologia correta:

- $\frac{\mu_\delta - \mu_0}{\delta}$ tende para o *linear response* $\dot{\mu}$;
- $(\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} f_0$ tende para $(\text{Id} - P_0)^{-1} \dot{P} f_0$;
- $(\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} (f_\delta - f_0)$ tende para zero.

Agora iremos usar rigorosamente esse argumento para provar um teorema geral e mostrar alguns exemplos.

O primeiro resultado que apresentaremos se aplica para sistemas que tem decaimento menos que exponencial. Na próxima seção iremos apresentar exemplos para transformações expansoras.

Observemos que a convergência para o equilíbrio (Definição 5.2) de um sistema é a velocidade em que os iterados de elementos dos espaços de média zero V_s e V_w convergem para 0. Suponhamos que a topologia de B_s é suficientemente forte para que V_s seja um subespaço fechado de B_s .

Teorema 9.1. (Linear Response, decaimento somável) Seja P_δ uma família de operadores de Markov¹ e B_{ss}, B_s e B_w invariantes por P_δ . Suponha que para cada $\delta \in [0, \bar{\delta})$ existe $f_\delta \in B_{ss}$ ponto fixo de P_δ . Suponha que o sistema satisfaz as seguintes condições:

1. (Convergência somável) Existe ϕ tal que $\sum \phi(n) < \infty$, tal que P_0 converge para o equilíbrio com respeito a B_s, B_w com velocidade ϕ . (Lembre que f_0 é o único ponto fixo de P_0)
2. (Estabilidade forte) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f_\delta - f_0\|_{ss} = 0$
3. (Operador derivada) Suponha que existe $\dot{P} : B_{ss} \rightarrow V_s$ contínuo tal que para cada $f \in B_{ss}$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{(P_\delta - P_0)}{\delta} f - \dot{P} f \right\|_s = 0$$

Então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{f_\delta - f_0}{\delta} - (1 - P_0)^{-1} \dot{P} f_0 \right\|_w = 0,$$

onde $(1 - P_0)^{-1} := \sum_0^\infty P_0^i$ é um operador contínuo de V_s em V_w .

Demonstração. Seja $f \in B_s$. Sendo $\sum_0^\infty \phi(n) < \infty$, temos que $(1 - P_0)^{-1} f = \sum_0^\infty P_0^i f$ converge em B_w e, logo, define um operador contínuo de V_s em V_w . Note também que $\|(1 - P_0)^{-1}\|_{B_s \rightarrow B_w} \leq \sum_0^\infty \phi(n)$.

¹ Operadores positivos que preservam integral.

Denote por $\Delta f = f_\delta - f_0$, então

$$\begin{aligned}
(\text{Id} - P_0) \frac{\Delta f}{\delta} &= (\text{Id} - P_0) \frac{f_\delta - f_0}{\delta} \\
&= \frac{1}{\delta} (f_\delta - P_0 f_\delta - f_0 + P_0 f_0) \\
&= \frac{1}{\delta} (P_\delta - P_0) f_\delta. \\
(1 + P_0 + \dots + P_0^n) (\text{Id} - P_0) \frac{\Delta f}{\delta} &= (1 + P_0 + \dots + P_0^n) \frac{P_\delta - P_0}{\delta} f_\delta \\
\frac{\Delta f}{\delta} - P_0^{n+1} \frac{\Delta f}{\delta} &= (1 + P_0 + \dots + P_0^n) \frac{P_\delta - P_0}{\delta} f_\delta \\
\frac{\Delta f}{\delta} - P_0^{n+1} \frac{\Delta f}{\delta} &= (1 + P_0 + \dots + P_0^n) \frac{P_\delta - P_0}{\delta} (f_\delta + f_0 - f_0) \\
(1 - P_0^{n+1}) \frac{\Delta f}{\delta} &= (1 + P_0 + \dots + P_0^n) \frac{P_\delta - P_0}{\delta} f_0 \\
&\quad + (1 + P_0 + \dots + P_0^n) \frac{P_\delta - P_0}{\delta} (f_\delta - f_0)
\end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, sendo $\Delta f \in V_s$, pela convergência para o equilíbrio, segue que $P_0^{n+1} \frac{\Delta f}{\delta} \rightarrow 0$ na norma fraca. Logo

$$\frac{P_\delta - P_0}{\delta} = (1 - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} f_0 + (1 - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} (f_\delta - f_0)$$

pertence a B_w . Pela estabilidade estatística forte, temos

$$\left\| (1 - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} (f_\delta - f_0) \right\|_w \leq \left(\sum_i \|P_0^i\|_{B_s \rightarrow B_w} \right) \|\dot{P}\|_{B_{ss} \rightarrow B_s} \|f_\delta - f_0\|_{ss} \rightarrow 0$$

Então na norma fraca, quando $\delta \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\delta} = (1 - P_0)^{-1} \dot{P} f_0.$$

□

Observação 8. Se $\|P_0^n g\|_s \leq \phi(n) \|g\|_s$ com $\phi(n)$ somável, então $(1 - P_0)^{-1}$ está definido de B_s em B_s e assim a conclusão do teorema é reforçada:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{f_\delta - f_0}{\delta} - (1 - P_0)^{-1} \dot{P} f_0 \right\|_s = 0$$

O teorema anterior requer uma hipótese fraca sobre o decaimento de correlações, que só é usada como somável e para verificar que o operador P_0 não foi perturbado, por outro lado, uma hipótese mais forte é a estabilidade forte do sistema $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f_\delta - f_0\|_{ss} = 0$.

Algumas vezes é fácil verificar algumas convergências para o equilíbrio para famílias de perturbações, como na seção 7.1. Mostraremos o *linear response* observando o resultado sobre a estimativa uniforme no lugar da estabilidade forte.

Teorema 9.2. Suponha que para todo $\delta \in [0, \bar{\delta})$ existe uma probabilidade $v_\delta \in B_s$ tal que

$$P_\delta v_\delta = v_\delta$$

e que existe $\dot{P}v_0 \in B_s$ tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 - \dot{P}v_0 \right\|_s = 0$$

Suponha que o operador resolvente é definido e limitado de V_s para V_w , isto é, $\|(\text{Id} - P_\delta)^{-1}\|_{V_s \rightarrow V_w} \leq M < \infty$ e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|(\text{Id} - P_\delta)^{-1} - (\text{Id} - P_0)^{-1}\|_{V_s \rightarrow V_w} = 0$$

Então

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{v_\delta - v_0}{\delta} - (\text{Id} - P_0)^{-1} \dot{P}v_0 \right\|_{V_w} = 0$$

Demonstração. Para $\delta \in [0, \bar{\delta})$, v_δ é ponto fixo de P_δ . Usando isto, temos

$$\begin{aligned} (\text{Id} - P_\delta) \frac{v_\delta - v_0}{\delta} &= \frac{v_\delta - v_0}{\delta} - \frac{P_\delta v_\delta - P_\delta v_0}{\delta} \\ &= \frac{-v_0 + P_\delta v_0}{\delta} \\ &= \frac{1}{\delta} (P_\delta - P_0) v_0. \end{aligned}$$

Observe que para cada δ , P_δ preserva V_s . Como para todo $\delta > 0$, $\frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \in V_s$ e $(\text{Id} - P_\delta)^{-1} : V_s \rightarrow V_w$ é um operador limitado, podemos aplicar o resolvente em ambos lados, obtendo

$$\begin{aligned} (\text{Id} - P_\delta)^{-1} (\text{Id} - P_\delta) \frac{v_\delta - v_0}{\delta} &= (\text{Id} - P_\delta)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \\ &= (\text{Id} - P_\delta)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 - (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \\ &\quad + (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Como $\|(\text{Id} - P_\delta)^{-1} - (\text{Id} - P_0)^{-1}\|_{V_s \rightarrow V_w} \rightarrow 0$ temos

$$\begin{aligned} \left\| [(\text{Id} - P_\delta)^{-1} - (\text{Id} - P_0)^{-1}] \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \right\|_w &\leq \|(\text{Id} - P_\delta)^{-1} - (\text{Id} - P_0)^{-1}\|_{V_s \rightarrow V_w} \left\| \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \right\|_s \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0$ converge em V_s , então (9.3) implica que na topologia B_w

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v_\delta - v_0}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (\text{Id} - P_0)^{-1} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \\ &= (\text{Id} - P_0)^{-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P_\delta - P_0}{\delta} v_0 \\ &= (\text{Id} - P_0)^{-1} \dot{P}v_0. \end{aligned}$$

□

9.1 APLICAÇÃO PARA TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS EM S^1

Nessa seção iremos mostrar como conseguir um *linear response* resultante de uma pequena perturbação de transformações expansoras, o que ilustra uma aplicação do teorema 9.2. Seja $T_\delta : S^1 \rightarrow S^1$ uma família de transformações expansoras C^3 , onde $\delta \in [0, \bar{\delta})$. Suponhamos que a dependência de δ é diferenciável em 0, então podemos escrever

$$T_\delta(x) = T_0(x) + \delta \dot{T}(x) + o_{C^3}(\delta) \text{ para } x \in X \quad (9.4)$$

onde $\dot{T} \in C^2(S^1, \mathbb{R})$, e $o_{C^3}(\delta)$ denota um termo cuja norma C^3 tende para zero mais rápido que δ , quando $\delta \rightarrow 0^2$. Veremos que se $\bar{\delta}$ é suficientemente pequeno, UF1, ..., UF4 são satisfeitos pelo operador de transferência associado, quando aplicado a um espaço de *Sobolev* apropriado $W^{1,1}$ e então, como temos a existência do operador derivada, então podemos aplicar o teorema 9.2.

Definição 9.1. Um conjunto $A_{M,L}$ de transformações expansoras é chamado família uniforme C^k com parâmetros $M \geq 0$ e $L > 1$ se satisfaz uniformemente as seguintes condições de expansividade e regularidade: para todo $T \in A_{M,L}$

$$\|T\|_{C^k} \leq M \quad , \quad \inf_{x \in M} |T'(x)| \geq L.$$

Já vimos a desigualdade de Lasota Yorke para o operador de transferência associada a uma transformação expansoras em relação à norma $W^{1,1}$

Em $W^{k,1}$ temos a seguinte norma: $\|f\|_{W^{k,1}} = \|f'\|_{W^{k-1,1}} + \|f\|_1$

Lema 9.1. Seja $A_{M,L}$ uma família uniforme C^k de transformações expansoras em S^1 , o operador de transferência P_T associado a $T \in A_{M,L}$ satisfaz a desigualdade de Lasota Yorke em $W^{i,1}(S^1)$: para cada $1 \leq i \leq k-1$ existem $\alpha < 1, A_i, B_i \geq 0$ tais que para cada $n \geq 0$, $T \in A_{M,L}$

$$\|P_T^n f\|_{W^{i-1,1}} \leq A_i \|f\|_{W^{i-1,1}} \quad (9.5)$$

$$\|P_T^n f\|_{W^{i,1}} \leq \alpha^{in} \|f\|_{W^{i,1}} + B_i \|f\|_{W^{i-1,1}} \quad (9.6)$$

Demonstração. Iremos demonstrar fazendo indução em $k \geq 1$. Já vimos para $k = 1$, na seção 5.1.1.

² $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\|o_{C^3}(\delta)\|_{C^3}}{\delta} = 0$

Suponhamos que a desigualdade de Lasota-Yorke seja satisfeita em $W^{k-1,1}(S^1)$ para o operador de transferência de uma aplicação expansora C^k , e considere uma transformação expansora C^{k+1} junto com sua operador de transferência. Seja $f \in W^{k,1}(S^1)$.

Queremos estimar

$$\|P_T f\|_{W^{k,1}} = \|(P_T f)'\|_{W^{k-1,1}} + \|P_T f\|_1$$

Sabemos que

$$P_T f' = P_T \left(\frac{f'}{T'} \right) + P_T \left(\frac{T''}{(T')^2} f \right)$$

, então, por hipótese de indução,

$$\|(P_T f)'\|_{W^{k-1,1}} \leq \alpha^{k-1} \left\| \frac{f'}{T'} \right\|_{W^{k-1,1}} + C'_k \|f\|_{W^{k-1,1}}$$

. Para nosso propósito, é suficiente que tenhamos informações sobre a derivada de f com maior grau, pela fórmula de Leibniz, temos

$$\left(\frac{f'}{T'} \right)^{(k-1)} = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \left(\frac{1}{T'} \right)^{k-1-l} f^{l+1} = \frac{f^k}{T'} + \dots$$

então obtemos

$$\left\| \frac{f'}{T'} \right\|_{W^{k-1,1}} \leq \left\| \frac{1}{T'} \right\|_{\infty} \|f^{(k)}\|_1 + C'_k \|f\|_{W^{k-1,1}}$$

de onde

$$\|P_T f\|_{W^{k,1}} \leq \alpha^k \|f\|_{W^{k,1}} + C_k \|f\|_{W^{k-1,1}}$$

Agora, iterando essa desigualdade, temos

$$\begin{aligned} \|P_T^2 f\| &\leq \alpha^k \|P_T f\|_{W^{k,1}} + C_k \|P_T f\|_{W^{k-1,1}} \\ &\leq \alpha^k (\alpha^k \|f\|_{W^{k,1}} + C_k \|f\|_{W^{k-1,1}}) + C_k \|P_T f\|_{W^{k-1,1}} \\ &= \alpha^{2k} \|f\|_{W^{k,1}} + \alpha^k C_k \|f\|_{W^{k-1,1}} + C_k \|P_T f\|_{W^{k-1,1}} \\ \Rightarrow \|P_T^3 f\| &\leq \alpha^k \|P_T^2 f\|_{W^{k,1}} + C_k \|P_T^2 f\|_{W^{k-1,1}} \\ &\leq \alpha^k [\alpha^{2k} \|f\|_{W^{k,1}} + \alpha^k C_k \|f\|_{W^{k-1,1}} + C_k \|P_T f\|_{W^{k-1,1}}] + C_k \|P_T^2 f\|_{W^{k-1,1}} \\ &= \alpha^{3k} \|f\|_{W^{k,1}} + C_k [\alpha^{2k} \|f\|_{W^{k-1,1}} + \alpha^k \|P_T f\|_{W^{k-1,1}} + \|P_T^2 f\|_{W^{k-1,1}}] \end{aligned}$$

...

$$\Rightarrow \|P_T^n f\|_{W^{k,1}} = \alpha^{nk} \|f\|_{W^{k,1}} + C_k \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{k(n-1-i)} \|P_T^i f\|_{W^{k-1,1}}$$

Com isto, o resultado segue da limitação de L^1 em $W^{k-1,1}$, com $B_k := \frac{A_k C_k}{1-\alpha^k}$ □

O resultado acima pode ser usado no estudo de *Quadratic Response* também, para mais informações ver (GALATOLO; SEDRO, 2020).

Pelo resultado anterior, e pela imersão compacta de $W^{k,1}$ em $W^{k-1,1}$ podemos concluir que o operador de transferência P_T de uma transformação T expansora de classe C^k tem lacuna espectral em cada $W^{i,1}(M)$, com $1 \leq i \leq k - 1$.

Como a família de transformação T_δ em (9.4) para um δ suficientemente pequeno é uma família uniforme como na definição 9.1, então aplicando o lema 9.1 nos seus operadores de transferência, vemos que UF1 e UF4 são satisfeitas, considerando $B_s = W^{1,1}$ e $B_w = L^1$. UF2 também é satisfeito pela proposição 7.2 e UF3. E desde que a lema 7.3 nos permite estabelecer a estabilidade do resolvente dessas perturbações, para aplicar o teorema 9.2 só falta verificar a existência da derivada do operador de transferência.

9.1.1 O operador derivada e linear response para transformações expansoras

Mostraremos como obter a existência do operador derivada para uma família suave de transformações expansoras. Consideremos $T_\delta : S^1 \rightarrow S^1$ uma família de transformações expansoras C^3 como em (9.4).

Então temos uma família de transformações expansoras C^3 , e cada uma dessas tem uma densidade invariante f_δ em C^2 , observação 1. A proposição a seguir apresenta detalhes da estrutura do operador $\dot{P} : C^2 \rightarrow W^{1,1}$ no nosso caso.

Proposição 9.1. Seja $w \in C^2(S^1, \mathbb{R})$. Para cada $x \in M$ podemos escrever

$$\dot{P}w(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{P_\delta w(x) - P_0 w(x)}{\delta} \right) = -P_0 \left(\frac{w \dot{T}'}{T_0'} \right) (x) - P_0 \left(\frac{\dot{T} w'}{T_0'} \right) (x) + P_0 \left(\frac{\dot{T} T_0' w}{T_0'^2} \right) (x) \quad (9.7)$$

e também converge na topologia C^1 .

Antes de apresentarmos a demonstração dessa proposição, vamos mostrar um lema técnico sobre diferenciabilidade do ramo inverso.

Lema 9.2. Seja $P_\delta : S^1 \rightarrow S^1$, onde $\delta \in (0, \bar{\delta})$ é uma família de transformações expansoras C^2 . Suponhamos que a dependência dessa família em δ seja diferenciável em 0 no seguinte sentido

$$T_\delta(x) = T_0 + \delta \dot{T}(x) + o_{C^2}(\delta), \quad (9.8)$$

onde $\dot{T} \in C^2(S^1, \mathbb{R})$, e $o_{C^2}(\delta)$ denota uma função $f(x) \in C^k(S^1)$, que satisfaz $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\|f\|_{C^2}}{\delta} = 0$. Sob tais hipóteses, se $y_i^\delta \in T_\delta^{-1}(x)$ então para $\delta \rightarrow 0$, este pode ser expandido como

$$y_i^\delta = y_i^0 + \delta \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) + o_{C^1}(\delta),$$

Demonstração. do lema Tomemos $x \in S^1$ fixo e escrevemos

$$y_i^\delta = y_i^0 + \delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x) \quad (9.9)$$

onde para cada x_i , $F_i(\delta, x) = o(\delta)$ como $\delta \rightarrow 0$. Mostraremos que $\varepsilon_i(x) = -\frac{\dot{T}(y_i^0(x))}{T_0'(y_i^0(x))}$ para cada x , então mostraremos que $F_i(\delta, x) = o_{C^1}(\delta)$.

Pela primeira condição, fiquemos $x \in S^1$. Substituindo (9.2) na identidade $T_\delta(y_i^\delta(x)) = x$ expandimos

$$x = T_\delta(y_i^\delta(x)) \quad (9.10)$$

$$= T_0(y_i^\delta(x)) + \delta \dot{T}(y_i^\delta(x)) + E(\delta, x) \quad (9.11)$$

onde $E(\delta, x) = o_{C^2}(\delta)$ e então por (9.9)

$$x = T_0(y_i^0(x) + \delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) + \delta \dot{T}(y_i^0(x) + \delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) + E(\delta, x) \quad (9.12)$$

Como $T_0 \in C^2$, podemos escrever o primeiro termo da equação acima como

$$\begin{aligned} T_0(y_i^0(x) + \delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) &= T_0(y_i^0(x)) + T_0'(y_i^0(x))(\delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) \\ &\quad + o(\delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) \end{aligned}$$

Podemos escrever o segundo termo de 9.12 como:

$$\begin{aligned} \delta \dot{T}(y_i^0(x) + \delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) &= \delta \dot{T}(y_i^0(x)) + \delta \dot{T}'(y_i^0(x))(\delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) \\ &\quad + \delta o((\delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x))) \end{aligned}$$

Daí obtemos que 9.12 fica:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta T_0'(y_i^0(x))\varepsilon_i(x) + T_0'(y_i^0(x))F_i(\delta, x) + \delta \dot{T}'(y_i^0(x)) \\ &\quad + \delta^2 \dot{T}'(y_i^0(x))\varepsilon_i(x) + \delta \dot{T}'(y_i^0(x))F_i(\delta, x) + o(\delta \varepsilon_i(x) + F_i(\delta, x)) \end{aligned}$$

Dividindo por δ e fazendo $\delta \rightarrow 0$ temos:

$$T_0'(y_i^0(x))\varepsilon_i(x) + \dot{T}'(y_i^0(x)) = 0$$

Daí $\varepsilon_i = -\frac{\dot{T}'(y_i^0(x))}{T_0'(y_i^0(x))}$. Então temos $F_i(\delta, x) = y_i^\delta(x) - y_i^0(x) + \delta \frac{\dot{T}'(y_i^0(x))}{T_0'(y_i^0(x))}$. Observamos que, como cada T_δ é uniformemente C^2 e $T' > 1$ temos que $\frac{\partial F_i(\delta, x)}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 F_i(\delta, x)}{\partial x^2}$ são uniformemente limitados para cada δ, x e i . Logo $\|\frac{F_i(\delta, x)}{\delta}\|_{C^1} \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$ e $F_i(\delta, x) = o_{C^1}(\delta)$. \square

Agora iremos provar a proposição.

Demonstração da Proposição. Denotemos por $\{y_i^\delta\}_{i=1}^d := T_\delta^{-1}(x)$ e $\{y_i^0\}_{i=1}^d := T_0^{-1}(x)$ as d preimagens de T_δ e T_0 , respectivamente, do ponto $x \in X$. Além disso, assumiremos que o índice é tomado de modo que y_i^δ é uma pequena perturbação y_i^0 , para $1 \leq i \leq d$. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{P_\delta w(x) - P_0 w(x)}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta)}{T'_\delta(y_i^\delta)} - \sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^0)}{T'_\delta(y_i^0)} \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d w(y_i^\delta) \left(\frac{1}{T'_\delta(y_i^\delta)} - \frac{1}{T'_0(y_i^\delta)} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d w(y_i^0) \left(\frac{1}{T'_0(y_i^\delta)} - \frac{1}{T'_0(y_i^0)} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta) - w(y_i^0)}{T'_0(y_i^\delta)} \right) \\ &= (I) + (II) + (III) \end{aligned}$$

Para desenvolver o primeiro termo, iremos derivar a expressão $T_\delta(x) = T_0 + \delta \dot{T}(x) + o_{C^2}(\delta)$ em x para obter

$$T'_\delta(x) = T'_0 + \delta \dot{T}'(x) + o_{C^1}(\delta)$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d w(y_i^\delta) \left(\frac{1}{T'_\delta(y_i^\delta)} - \frac{1}{T'_0(y_i^\delta)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta)}{T'_\delta(y_i^\delta)} \left(1 - \frac{T'_\delta(y_i^\delta)}{T'_0(y_i^\delta)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta)}{T'_\delta(y_i^\delta)} \left(1 - \left(\frac{T'_\delta(y_i^\delta) + \delta \dot{T}'(y_i^\delta) + o_{C^2}(\delta)}{T'_0(y_i^\delta)} \right) \right) \right) \\ &= \left(- \sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta) \dot{T}'(y_i^\delta)}{T'_\delta(y_i^\delta) T'_0(y_i^\delta)} \right) + o_{C^1}(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d w(y_i^\delta) \left(\frac{1}{T'_\delta(y_i^\delta)} - \frac{1}{T'_0(y_i^\delta)} \right) \right) &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(- \sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta) \dot{T}'(y_i^\delta)}{T'_\delta(y_i^\delta) T'_0(y_i^\delta)} \right) \\ &= -P_0 \left(\frac{w \dot{T}'}{T'_0} \right) \end{aligned}$$

e pelo lema 9.2 o limite também converge em C^1 .

Usando o lema 9.2 e de maneira análoga, para (II), obtemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left(\sum_{i=1}^d w(y_i^0) \left(\frac{1}{T'_0(y_i^\delta)} - \frac{1}{T'_0(y_i^0)} \right) \right) = P_0 \left(\frac{\varepsilon T''_0}{T'^2_0} w \right) (x)$$

em C^1 .

Para (III), usaremos o teorema de Lagrange, para qualquer h pequeno existe Ξ tal que $|\Xi| \leq |h|$ e

$$w(y_i^0 + h) = w(y_i^0) + hw'(y_i^0) + \frac{1}{2}h^2w''(\Xi)$$

considerando o lema 9.2 e tomando $h = y_i^\delta - y_i^0 = \delta \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) + o_{C^2}(\delta)$ temos

$$\begin{aligned} w(y_i^\delta) &= w\left(y_i^0 + \delta \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) + o_{C^2}(\delta)\right) \\ &= w(y_i^0) + w'(y_i^0) \left(\delta \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) \right) + o_{C^2}(\delta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\delta \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) \right)^2 + o_{C^2}^2 w''(\Xi) \end{aligned}$$

Desde que w'' é uniformemente limitado, segue que

$$w(y_i^\delta) = w(y_i^0) + w'(y_i^0) \left(\delta \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) \right) + o_{C^1}(\delta)$$

Logo

$$\begin{aligned} (III) &= \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta) - w(y_i^0)}{T_0'(y_i^\delta)} = \sum_{i=1}^d \frac{w'(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) + o_{C^1}(\delta) \\ &= -\sum_{i=1}^d \frac{\dot{T}(y_i^0)w'(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)T_0(y_i^\delta)} + o_{C^1}(\delta) \end{aligned}$$

e além disso, pontualmente e na topologia C^1

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^d \frac{w(y_i^\delta) - w(y_i^0)}{T_0'(y_i^\delta)} = -P_0 \left(\frac{\dot{T}w'}{T_0'} \right) (x)$$

Por fim, podemos escrevê-lo como

$$\begin{aligned} T_0'(y_i^\delta) &= T_0'(y_i^0) + T_0''(y_i^0) \left(\frac{dy_i^\delta}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \right) \delta + o_{C^1}(\delta) \\ &= T_0'(y_i^0) + T_0''(y_i^0) \left(-\frac{\dot{T}(y_i^0)}{T_0'(y_i^0)} \right) \delta + o_{C^1}(\delta) \end{aligned}$$

□

Podemos observar que a convergência C^1 implica na convergência na topologia $W^{1,1}$. Como podemos obter a existência do operador $\dot{P} : C^2 \rightarrow W^{1,1}$, sabemos que T_0 tem lacuna espectral daí a contração exponencial no espaço de densidades de média zero $W^{1,1}$, e assumindo 9.2 como verificado acima, podemos aplicar o teorema e obter a seguinte:

Proposição 9.2. Assumindo que T_δ é uma família C^1 de transformação expansoras C^3 como em 9.4. Seja $f_\delta \in C^2(S^1, \mathbb{R})$ uma densidade invariante de T_δ . Temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{f_\delta - f_0}{\delta} - (1 - P_0)^{-1} \dot{P} f_0 \right\|_1 = 0$$

onde \dot{P} é o operador definido na proposição 9.1. Portanto temos a fórmula para o *linear response*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f_\delta - f_0}{\delta} = (1 - P_0)^{-1} \dot{P} f_0$$

onde o limite existe em L^1 .

10 APLICAÇÕES UNIFORMEMENTE CONTRATIVAS

Esse Capítulo serve como motivação ao Capítulo 11.

Vimos como expansão ajudam a encontrar propriedades de regularidade de medida invariante quando consideramos espaços de medida adequados, isto através da desigualdade de Lasota-Yorke e outras propriedades. No caso em que a dinâmica seja contrativa não podemos esperar regularidades nos mesmos espaços.

Iremos ver que considerando espaços duais aos que foram usados no caso de expansoras, obteremos a regularização para o operador de transferência associado a uma aplicação contrativa.

Seja (X, d) um espaço métrico compacto, $g : X \rightarrow X$ uma função Lipschitz e seja $\text{Lip}(g)$ sua melhor constante Lipschitz, ou seja,

$$\text{Lip}(g) = \sup_{x, y \in X} \left\{ \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} \right\}$$

Definição 10.1. Dadas duas medidas de Borel com sinal μ e ν em X , definimos uma distância tipo *Wasserstein-Kantorovich* entre μ e ν por

$$W_1^0(\mu, \nu) = \sup_{g \text{ t.q. } \text{Lip}(g) \leq 1, \|g\|_\infty \leq 1} \left| \int g d\mu - \int g d\nu \right| \quad (10.1)$$

E denotaremos

$$\|\mu\|_W := W_1^0(0, \mu).$$

Um fato é que $\|\cdot\|_W$ define uma norma sobre um espaço vetorial de medida com sinal definida em um espaço métrico compacto.

Observação 9. O espaço das medidas com sinal não é completo com respeito a W_1^0 , e seu completamento deve ser um espaço de distribuições. Em nosso estudo, algumas vezes será suficiente considerar sequências de medidas positivas. E o espaço das medidas de Borel positivas em X é completo com respeito a distância W_1^0 .

Mostraremos que uma aplicação contrativa F tal que $\text{Lip}(F) < 1$ é, em algum sentido, regularizada pela norma $\|\cdot\|_W$.

Vamos considerar o operador de transferência P_F associado à F , ou seja, tal que

$$[P_F \mu](E) = \mu(F^{-1}(E))$$

para cada medida com sinal μ em X e para cada conjunto mensurável $E \subset X$. Sendo uma aplicação *push-forward*, a mesma função também pode ser denotada por F_* , essa notação será usada algumas vezes.

Note que ao considerar P_F sob o espaço vetorial das medidas boleanas com sinal, ou em um subespaço vetorial adequado de medidas regulares, P_F é uma transformação linear, por isso também é chamado de "operador de transferência associado à F ".

Lema 10.1. Seja $F : X \rightarrow X$ uma função Lipschitz e X um espaço métrico. Para toda medida de Borel com sinal μ , temos

$$\|P_F\mu\|_W \leq \alpha\|\mu\|_W + \mu(X) \quad (10.2)$$

onde $\alpha = \text{Lip}(F)$. Em particular, se $\mu(X) = 0$, temos $\|P_F\mu\|_W \leq \alpha\|\mu\|_W$

Demonstração. Se $\text{Lip}(g) \leq 1$ e $\|g\|_\infty \leq 1$, temos que $g \circ F$ é α -Lipschitz. Além disso, se $\|g\|_\infty \leq 1$, temos $\|g \circ F - \theta\|_\infty \leq \alpha$ para algum $\theta \leq 1$. ($\theta = g \circ F(y)$, y ponto fixado).

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \int g dP_F\mu \right| &= \left| \int g \circ F d\mu \right| \\ &= \left| \int g \circ F - \theta d\mu \right| + \left| \int \theta d\mu \right| \\ &= \alpha \left| \int \frac{g \circ F - \theta}{\alpha} d\mu \right| + \theta\mu(X) \\ &\leq \alpha\|\mu\|_W + \mu(X) \end{aligned}$$

Com isto, $\|P_F\mu\|_W \leq \alpha\|\mu\|_W + \mu(X)$. Em particular, se $\mu(X) = 0$, ficamos com $\|P_F\mu\|_W \leq \alpha\|\mu\|_W$. \square

Deste lema, segue que P_F tem lacuna espectral no espaço vetorial normado das medidas com sinal com a norma $\|\cdot\|_W$. Caso o espaço de medidas de Borel com sinal não seja completo, o que iremos mostrar é que

$$P_F = P + N \quad (10.3)$$

onde

1. P é uma projeção e $\dim(\text{Im}(P)) = 1$;
2. Existem $\alpha, C \geq 0$ tais que $\alpha < 1$ e para cada n , e cada medida de Borel com sinal μ , $\|N^n\mu\|_W \leq \alpha^n C \|\mu\|_W$;

3. $PN = NP = 0$.

Proposição 10.1. O operador de transferência P_F associado a uma aplicação contrativa F tem decomposição $P_F = P + N$ como acima.

Demonstração. Como F é uma contração, ele tem um único ponto fixo x_0 . Vamos considerar a medida de Dirac δ_{x_0} em x_0 . Esta é um ponto fixo de P_F , gerando um espaço unidimensional fixo $\mathbb{R}\delta_{x_0}$ e assim definimos P a projeção em $\mathbb{R}\delta_{x_0}$ por $\mu_0 \rightarrow \mu_0(X)\delta_{x_0}$. Agora, consideremos o espaço V de média zero, que é invariante por P_F , existe também uma projeção sobre este espaço, definido por $\mu_0 \rightarrow \mu_0 - \mu_0(X)\delta_{x_0}$, e definimos N como $N(\mu_0) = P_F\mu_0 - \mu_0(X)\delta_{x_0}$.

Assim, pelo lema anterior, temos que para qualquer medida μ , $N^n(\mu)$ converge exponencialmente para 0.

De fato,

$$\begin{aligned} N(\mu) &= P_F\mu_0 - \mu(X)\delta_{x_0} \\ \|N(\mu)\|_W &= \|P_F\mu_0 - \mu(X)\delta_{x_0}\|_W \\ &\leq \alpha\|\mu\|_W. \\ \Rightarrow \|N^n(\mu)\|_W &\leq \alpha^n\|\mu\|_W. \end{aligned}$$

□

Da proposição anterior podemos recuperar várias consequências para as propriedades estatísticas da dinâmica de aplicações contrativas, mas se a dinâmica é um pouco trivial (toda condição inicial é atraída pelo ponto fixo de F) não precisamos desta propriedade;

A ideia para encontrar o operador adequado para um sistema que expande e contrai é considerar, em algum sentido, algum espaço de medida dotado de alguma norma que se comporte como uma norma Lipschitz (ou alguma norma de Sobolev) em uma direção para a dinâmica expansora e como o seu dual, ou seja, a norma $\|\cdot\|_W$, na direção contrativa.

Observação 10. Se μ^+ e μ^- são medidas positivas tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (decomposição de Jordan de μ) então podemos definir a variação total de μ por

$$\|\mu\|_{TV} := \mu^+(X) + \mu^-(X)$$

daí, de 10.2 segue que

$$\|P_F\mu\|_W \leq \alpha\|\mu\|_W + \|\mu\|_{TV}$$

o que parece uma desigualdade de Lasota-Yorke para P_F , mas não é, caso $\|\cdot\|_{TV}$ não seja mais fraca que $\|\cdot\|_W$.

11 UMA OLHADA EM DINÂMICA HIPERBÓLICA

A abordagem de operador de transferência que foi apresentada ao longo do trabalho também funciona para uma grande classe de sistemas com taxa uniforme de expansão e contração quando são considerados os espaços funcionais adequados. Agora estudaremos um exemplo disso para uma classe de *transformações solenoidais uniformemente hiperbólicas*. Será seguida a abordagem de (GALATOLO; LUCENA, 2020), baseando na desintegração ao longo de variedades estáveis, será mostrado como definir um espaço de medida com sinal adaptado para o sistema.

Uma aplicação solenoidal é uma aplicação $F : X \rightarrow X$, de classe C^2 , onde $X = S^1 \times D^2$ é o toro sólido, tal que F é um *skew product*

$$F(x, y) = (T(x), G(x, y)) \quad (11.1)$$

onde $T : S^1 \rightarrow S^1$ e $G : X \rightarrow D^2$ são aplicações diferenciáveis. Supomos que a aplicação $T : S^1 \rightarrow S^1$ é C^2 , expansora de grau q , dando origem a uma transformação de $[0, 1]$ em $[0, 1]$, que abusando da notação chamaremos também de T e seus ramos serão denotados por T_i , $i \in [1, \dots, q]$ e façamos as seguintes hipóteses em G :

1. Considere a folheação \mathcal{F} -invariante $\mathcal{F}^s := \{\{x\} \times D^2\}_{x \in S^1}$. Suponhamos que \mathcal{F}^s é contraída: Existe $0 < \alpha < 1$ tal que para todo $x \in S^1$ temos

$$|G(x, y_1) - G(x, y_2)| \leq \alpha |y_1 - y_2|, \text{ para todo } y_1, y_2 \in D^2.$$

2. $\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\infty} < \infty$

A ideia é considerar espaços de medidas com sinal com normas adequadas constridas pela desintegração de medidas ao longo das folheações estáveis. Então a medida será uma coleção das medidas em cada folha. Na direção expansora, como temos uma aplicação expansora consideraremos a norma L^1 ou uma norma de Sobolev adequada.

Seja $SM(X)$ o conjunto das medidas de Borel com sinal em Σ . Dada $\mu \in SM(X)$ denotamos μ^+ e μ^- suas partes positivas e negativas ($\mu = \mu^+ - \mu^-$).

Denote por \mathcal{AB} o conjunto das medidas com sinal $\mu \in SM(X)$ tal que suas medidas marginais com sinal associadas $\mu_x^{\pm} = \pi_x^* \mu^{\pm}$ são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue m em S^1 , ou seja

$$\mathcal{AB} = \{\mu \in SM(X), \pi_x^* \mu^+ \ll m \text{ e } \pi_x^* \mu^- \ll m\} \quad (11.2)$$

onde $\pi_x : X \rightarrow S^1$ é a projeção definida por $\pi(x, y) = x$ e π_x^* é a aplicação *push-forward* associada.

Vamos considerar uma medida positiva finita $\mu \in \mathcal{AB}$ no espaço X folheado por folhas contrativas $\mathcal{F}^s = \{\gamma_l\}_{l \in S^1}$ tal que $\gamma_l = \pi_x^{-1}(l)$. O teorema da desintegração de Rokhlin descreve uma desintegração $(\{\mu_l\}_l, \mu_x = \phi_x m)$ por uma família $\{\mu_\gamma\}_\gamma$ de probabilidades nas folhas estáveis e uma densidade marginal não negativa $\phi_x : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ com $\|\phi_x\|_1 = \mu(X)$.

Observação 11. A desintegração da medida μ é a μ_x -única família mensurável $(\{\mu_\gamma\}_\gamma, \phi_x)$ tal que, para todo conjunto mensurável $E \subset X$ satisfaz

$$\mu(E) = \int_{S^1} \mu_\gamma(E \cap \gamma) d\mu_x(\gamma) \quad (11.3)$$

Definição 11.1. Seja $\pi_{\gamma,y} : \gamma \rightarrow D^2$ a restrição $\pi_y|_\gamma$, onde $\pi_y : X \rightarrow D^2$ é a projeção definida por $\pi_y(x, y) = y$ e $\gamma \in \mathcal{F}^s$. Dada uma medida positiva $\mu \in \mathcal{AB}$ e sua decomposição ao longo das folhas estáveis \mathcal{F}^s , $(\{\mu_\gamma\}_\gamma, \mu_x = \phi_x m_1)$ (onde m_1 é a medida de Lebesgue em S^1), definimos a *restrição de μ em γ* como a medida positiva $\mu|_\gamma$ em D^2 (não na folha γ) definida, para todo conjunto mensurável $A \subset D^2$, como

$$\mu|_\gamma(A) = \pi_{\gamma,y}^*(\phi_x(\gamma)\mu_\gamma)(A)$$

Para uma medida com sinal dada $\mu \in \mathcal{AB}$ e sua desintegração $\mu = \mu^+ - \mu^-$, definimos a *restrição de μ em γ* por

$$\mu|_\gamma = \mu^+|_\gamma - \mu^-|_\gamma \quad (11.4)$$

Definição 11.2. Seja $\mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{AB}$ definida por

$$\mathcal{L}^1 = \left\{ \mu \in \mathcal{AB}; \int_{S^1} W_1^0(\mu^+|_\gamma, \mu^-|_\gamma) dm_1(\gamma) < \infty \right\} \quad (11.5)$$

e definimos uma norma em \mathcal{L}^1 , $\|\cdot\|_{\text{"1"}} : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|\mu\|_{\text{"1"}} = \int_{S^1} W_1^0(\mu^+|_\gamma, \mu^-|_\gamma) dm_1(\gamma) \quad (11.6)$$

A notação usada é similar a da norma L^1 usual.

Depois, de modo similar será definida uma norma $\|\cdot\|_{W^{1,1}}$ que funcionará como uma norma de Sobolev.

11.1 OPERADOR DE TRANSFERÊNCIA ASSOCIADO A F

Definimos o operador de transferência associado à F , no capítulo 10. E existe uma boa caracterização do operador de transferência no nosso caso, que funciona de forma parecida com um operador de transferência unidimensional.

Lema 11.1. Para toda probabilidade $\mu \in \mathcal{AB}$ desintegrada por $(\{\mu_\gamma\}_\gamma, \phi_y)$, a desintegração $(\{(F_*\mu)_\gamma\}_\gamma, (F_*\mu)_x)$ do *push-forward* $F_*\mu$ satisfaz a seguinte relação

$$(F_*\mu)_x = P_F(\phi_x)m_1 \quad (11.7)$$

e

$$(F_*\mu)_\gamma = \nu_\gamma := \frac{1}{P_T(\phi_x)(\gamma)} \sum_{i=1}^q \frac{\phi_x}{|\det DT_i|} \circ T_i^{-1}(\gamma) \mathcal{X}_{T_i(P_i)}(\gamma) F_*\mu_{T_i^{-1}(\gamma)} \quad (11.8)$$

onde $P_T(\phi_x)(\gamma) \neq 0$. Por outro lado, se $P_T(\phi_x)(\gamma) = 0$, então ν_γ é a medida de Lebesgue em γ (a expressão $\frac{\phi_x}{|\det DT_i|} \circ T_i^{-1}(\gamma) \mathcal{X}_{T_i(P_i)}(\gamma) F_*\mu_{T_i^{-1}(\gamma)}$ é entendida por zero fora de $T_i(P_i)$ para todo $i = 1, \dots, q$.)

Demonstração. Da Proposição 2.7 a unicidade da desintegração segue de verificar a seguinte relação

$$F_*\mu(E) = \int_{S^1} \nu_\gamma(E \cap \gamma) P_F(\phi_x) dm_1(\gamma)$$

para E mensurável. Para isto, vamos definir os conjuntos $B_1 = \{\gamma \in S^1; T^{-1}(\gamma) = \emptyset\}$, $B_2 = \{\gamma \in B_1^c; P_F(\phi_x)(\gamma) = 0\}$ e $B_3 = (B_1 \cup B_2)^c$.

Podemos facilmente deduzir as seguintes relações:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ e $T^{-1}(B_i) \cap T^{-1}(B_j) = \emptyset$ para todos $1 \leq i, j \leq 3$ tais que $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^3 B_i = \bigcup_{i=1}^3 T^{-1}(B_i) = S^1$;
2. $m_1(T^{-1}(B_1)) = \phi_x m_1(T^{-1}(B_2)) = 0$.

Fazendo a mudança de variável $\gamma = T_i(\beta)$ e pela definição de ν_γ (11.7), temos

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} \nu_\gamma(E \cap \gamma) P_F(\phi_x)(\gamma) dm_1(\gamma) &= \int_{B_3} \sum_{i=1}^q \frac{\phi_x}{|\det DT_i|} \circ T_i^{-1}(\gamma) \mathcal{X}_{T_i(P_i)}(\gamma) F_* \mu_{T_i^{-1}(\gamma)} \\
&= \sum_{i=1}^q \int_{T_i(P_i) \cap B_3} \frac{\phi_x}{|\det DT_i|} \circ T_i^{-1}(\gamma) \mathcal{X}_{T_i(P_i)}(\gamma) F_* \mu_{T_i^{-1}(\gamma)} \\
&= \sum_{i=1}^q \int_{P_i \cap T_i^{-1}(B_3)} \phi_x(\beta) \mu_\beta(F^{-1}(E)) dm_1(\beta) \\
&= \int_{T^{-1}(B_3)} \phi_x(\beta) \mu_\beta(F^{-1}(E)) dm_1(\beta) \\
&= \int_{\bigcup_{i=1}^3 T^{-1}(B_i)} \mu_\beta(F^{-1}(E)) d\phi_x m_1(\beta) \\
&= \int_{S^1} \mu_\beta(F^{-1}(E)) d\phi_x m_1(\beta) \\
&= \mu(F^{-1}(E)) \\
&= F_* \mu(E)
\end{aligned}$$

□

Dáí para cada $\mu \in \mathcal{L}^1$, $F_* \mu$ pode ser decomposta como $F_* \mu = F_*(\mu^+) - F_*(\mu^-)$, então usando o lema anterior em $F_*(\mu^+)$ e $F_*(\mu^-)$, segue:

Proposição 11.1. Para uma folha $\gamma \in \mathcal{F}^s$ dada, defina a aplicação $F_\gamma : D^2 \rightarrow D^2$ por

$$F_\gamma = \pi_y \circ F|_\gamma \circ \pi_{\gamma,y}^{-1}$$

para todo $\mu \in \mathcal{L}^1$ e para quase todo $\gamma \in S^1$ temos

$$(P_F \mu)|_\gamma = \sum_{i=1}^q \frac{F_* T_i^{-1}(\gamma) \mu|_{T_i^{-1}(\gamma)}}{(T_i' \circ T_i^{-1})(\gamma)} \text{ para quase todo } \gamma \in S^1 \quad (11.9)$$

11.2 PROPRIEDADES GERAIS DAS NORMAS TIPO L^1

Observação 12. Se F é uma contração fraca ($F : X \rightarrow X$), onde X é um espaço métrico, para toda medida boreliana com sinal μ , temos

$$\|P_F \mu\|_W \leq \|\mu\|_W$$

Além disso, como F é uma contração, se $|g|_\infty \leq 1$ e $\text{Lip}(g) \leq 1$ o mesmo vale para $g \circ F$. Então

$$\left| \int g d(P_F(\mu)) \right| = \left| \int g \circ F d\mu \right| \leq \|\mu\|_W$$

Tomando a norma do sup sobre $|g|_\infty \leq 1$ e $\text{Lip}(g) \leq 1$ terminamos a prova da desigualdade.

Observação 13 (A norma fraca é contraída fracamente por P_F). Se $\mu \in \mathcal{L}^1$, temos

$$\|P_F\mu\|_{\text{“1”}} \leq \|\mu\|_{\text{“1”}} \quad (11.10)$$

Demonstração. Vamos considerar, para todo i , a mudança de variável $\gamma = T_i(\alpha)$. Da observação 13 e da equação (11.9), temos

$$\begin{aligned} \|P_F\mu\|_{\text{“1”}} &= \int_{S^1} \|(P_F\mu)|_\gamma\|_W dm_1(\gamma) \\ &\leq \sum_{i=1}^q \int_{T(\eta_i)} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma)}}{|T_i'(T_i^{-1}(\gamma))|} \right\|_W dm_1(\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^q \int_{T(\eta_i)} \|F_{*\alpha}\mu|_\alpha\|_W dm_1(\alpha) \\ &\leq \sum_{i=1}^q \int_{\eta_i} \|\mu|_\alpha\|_W dm_1(\alpha) \\ &= \int_{S^1} \|\mu|_\alpha\|_W dm_1(\alpha) \\ &= \|\mu\|_{\text{“1”}} \end{aligned}$$

□

11.2.1 Convergência para o equilíbrio

Agora provaremos que F em algum sentido tem convergência exponencial para o equilíbrio.

Proposição 11.2. Para toda medida com sinal $\mu \in \mathcal{L}^1$, temos

$$\|F_*\mu\|_{\text{“1”}} \leq \alpha\|\mu\|_{\text{“1”}} + (\alpha + 1)\|\phi_x\|_1 \quad (11.11)$$

Demonstração. Considere a medida com sinal $\mu \in \mathcal{L}^1$ e sua restrição a folha γ , $\mu|_\gamma = \pi_{\gamma,y}^*(\phi_x(\gamma)\mu_\gamma)$.

Faça

$$\bar{\mu}|_\gamma = \pi_{\gamma,y}^*\mu_\gamma$$

Se μ é uma medida positiva então $\bar{\mu}|_\gamma$ é uma probabilidade em D^2 . Além disso $\mu|_\gamma = \phi_x(\gamma)\bar{\mu}|_\gamma$.

Deste comentário acima e pela expressão (11.9), temos

$$\begin{aligned}
\|F_*\mu\|_{\text{"1"}} &\leq \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^+(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} - \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} \right\|_{\mathcal{W}} dm_1(\gamma) \\
&\leq \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^+(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} - \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} \right\|_{\mathcal{W}} dm_1(\gamma) \\
&\quad + \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} - \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} \right\|_{\mathcal{W}} dm_1(\gamma) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

onde

$$I_1 = \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^+(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} - \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} \right\|_{\mathcal{W}} dm_1(\gamma)$$

e

$$I_2 = \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} - \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(T_i^{-1}(\gamma))}{|T'_i| \circ T_i^{-1}(\gamma)} \right\|_{\mathcal{W}} dm_1(\gamma)$$

Vamos estimar I_1 e I_2 .

Usando o Lema 10.1 e fazendo mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \right\|_{\mathcal{W}} \frac{|\phi_x^+ - \phi_x^-|}{|T'_i|} \circ T_i^{-1}(\gamma) dm_1(\gamma) \\
&= \int_I \left\| F_{*\beta} \overline{\mu^+}|_{\beta} \right\|_{\mathcal{W}} |\phi_x^+ - \phi_x^-|(\beta) dm_1(\beta) \\
&= \int_I |\phi_x^+ - \phi_x^-|(\beta) dm_1(\beta) \\
&= \|\phi_x\|_1
\end{aligned}$$

E também pelo lema 10.1, temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| F_{*T_i^{-1}(\gamma)} \left(\overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} - \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \right) \right\|_W \frac{|\phi_x^-|}{|T_i'|} \circ T_i^{-1}(\gamma) dm_1(\gamma) \\
&\leq \sum_{i=1}^q \int_{S^1} \left\| F_{*\beta} \left(\overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} - \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \right) \right\|_W \phi_x^-(\beta) dm_1(\beta) \\
&\leq \alpha \int_{S^1} \left\| \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} - \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \right\| \phi_x^-(\beta) dm_1(\beta) \\
&\leq \alpha \int_{S^1} \left\| \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(\beta) - \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(\beta) \right\| dm_1(\beta) \\
&\leq \alpha \int_{S^1} \left\| \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(\beta) - \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^+(\beta) \right\| dm_1(\beta) \\
&\quad + \alpha \int_{S^1} \left\| \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^+(\beta) - \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(\beta) \right\| dm_1(\beta) \\
&= \alpha \int_{S^1} \left\| \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} (\phi_x^-(\beta) - \phi_x^+(\beta)) \right\| dm_1(\beta) \\
&\quad + \alpha \int_{S^1} \left\| \overline{\mu^+}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^+(\beta) - \overline{\mu^-}|_{T_i^{-1}(\gamma)} \phi_x^-(\beta) \right\| dm_1(\beta) \\
&\leq \alpha \|\phi_x\|_1 + \alpha \|\mu\|_{\ast 1}
\end{aligned}$$

Somando as estimativas obtidas, temos

$$\|F_*\mu\|_{\ast 1} \leq \alpha \|\mu\|_{\ast 1} + (\alpha + 1)\|\phi_x\|_1$$

□

Iterando a relação acima, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 11.1.

$$\|P_F^n \mu\|_{\ast 1} \leq \alpha^n \|\mu\|_{\ast 1} + \bar{\alpha} \|\phi_x\|_1,$$

onde $\bar{\alpha} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$.

Vamos considerar o conjunto de medidas com média zero.

$$\mathcal{V} = \{\mu \in \mathcal{L}^1; \mu(X) = 0\} \quad (11.12)$$

Como $\pi_x^* \mu = \phi_x m_1$ ($\phi_x = \phi_x^+ - \phi_x^-$) temos $\int \phi_x dm_1 = 0$. Do corolário acima, segue a convergência exponencial para o equilíbrio com respeito às normas L^1 e $W^{1,1}$

Proposição 11.3 (Convergência exponencial para o equilíbrio). Existem $D_2 \in \mathbb{R}$ e $0 < \beta_1 < 1$ tais que, para toda medida com sinal $\mu \in \mathcal{V}$, temos

$$\|P_F^n \mu\|_{\ast 1} \leq D_2 \beta_1^n (\|\mu\|_1 + \|\phi_x\|_{W^{1,1}})$$

para todo $n \geq 1$.

Provaremos a existência de uma medida invariante $\mu \in \mathcal{L}^1$ para o sistema solenoidal.

Observação 14. É possível provar que esta medida deve ser uma medida física, cuja a bacia tem volume total.

Proposição 11.4. Existe uma única $\mu \in \mathcal{L}^1$ tal que $P_F\mu = \mu$.

Demonstração. A aplicação base T é expansora e tem uma única medida absolutamente contínua. Denotaremos ela por φ_x . Considere a medida $\nu = \varphi_x \times m$ (a medida que tem φ_x como medida marginal e m é a medida de Lebesgue nas folhas estáveis) e a sequência $\nu_n = P_F^n \nu$. Pela proposição 11.3 $\|\nu_n - \nu_m\|_{\text{“}^n} \leq D_2 \beta_1^n$ e ν_n é uma sequência de Cauchy. Podemos tomar uma subsequência ν_{n_k} tal que para quase toda folha γ , $\nu_{n_k}|_\gamma$ é uma sequência de Cauchy para a norma $\|\cdot\|_W$. Da observação 9 tal sequência deve ter como limite uma medida positiva. Isto define uma medida limite μ que é invariante. A desintegração de $\|\nu_\gamma\|_W$ vem do fato de $\|\nu_{n_k}|_\gamma\|_W \leq \sup \varphi_x$ e daí é uma sequência limitada e $\|\nu_{n_k}|_\gamma\|_W$ converge pontualmente para $\|\nu_\gamma\|_W$. A unicidade segue de maneira imediata da proposição 11.3. \square

11.3 NORMA FORTE E DESIGUALDADE DE LASOTA-YORKE

Daremos um exemplo de um espaço forte que satisfaz um tipo de desigualdade de Lasota-Yorke quando temos medidas positivas.

Dada $\mu \in \mathcal{L}^1$ denotamos por ϕ_x sua densidade marginal. Consideremos o seguinte espaço de medidas

$$\text{“}W^{1,1}\text{”} = \left\{ \begin{array}{l} \mu \in \mathcal{L}^1; \phi_x \in W^{1,1} \forall \gamma_1, \lim_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \|\mu|_{\gamma_2} - \mu|_{\gamma_1}\|_W = 0 \text{ e para quase toda } \gamma_1, \\ D(\mu, \gamma_1) := \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{\mu|_{\gamma_2} - \mu|_{\gamma_1}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W < \infty \end{array} \right\}$$

Definição 11.3. Consideremos a norma

$$\|\mu\|_{\text{“}W^{1,1}\text{”}} := \|\mu\|_{\text{“}1\text{”}} + \int |D(\mu, \gamma)| d\gamma.$$

Essa norma funcionará como norma forte no caso do solenoide. Além disso, a seguinte desigualdade do tipo Lasota-Yorke pode ser provada.

Proposição 11.5. Seja F uma aplicação solenoidal, então $P_F\text{“}W^{1,1}\text{”} \subseteq \text{“}W^{1,1}\text{”}$ e existem $\lambda < 1$, $B > 0$ tais que $\forall \mu \in \text{“}W^{1,1}\text{”}$ tal que $\mu \geq 0$.

$$\|P_F\mu\|_{\text{“}W^{1,1}\text{”}} \leq \lambda(\alpha\|\mu\|_{\text{“}W^{1,1}\text{”}} + \|\phi'_\mu\|_1) + B\|\mu\|_{\text{“}1\text{”}}.$$

Demonstração. Primeiramente, note que para $\mu \in \mathcal{AB}$, temos $\phi_\mu = \frac{d\mu}{dm}$.

Daí,

$$\phi_{P_F(\mu)} = \frac{dP_F\mu}{dm} = P_F \left(\frac{d\mu}{dm} \right) = P_F\phi_\mu$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu \in "W^{1,1}" &\Rightarrow \phi_\mu \in W^{1,1} \\ &\Rightarrow P_F\phi_\mu \in W^{1,1} \text{ (Como a aplicação é } C^2 \text{ e usando 5.1.)} \\ &\Rightarrow \phi_{P_F\mu} \in W^{1,1} \text{)pela relação acima)} \end{aligned}$$

Temos também que $\lim_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \|\mu|_{\gamma_2} - \mu|_{\gamma_1}\|_W = 0$. Vamos estimar

$$\|D(P_F\mu, \gamma_1)\|_1 = \int \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{(P_F\mu)|_{\gamma_1} - (P_F\mu)|_{\gamma_2}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W dm$$

Pela relação 11.9, temos

$$(P_F\mu)|_\gamma = \sum_{i=1}^q \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma)}}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma)|} \text{ para quase toda } \gamma \in S^1. \quad (11.13)$$

Então

$$\begin{aligned} \|D(P_F\mu, \gamma_1)\|_1 &\leq \sum_{i=1}^q \int \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)}}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} - \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_2)|} \right) \right\|_W dm(\gamma_1) \\ &\leq \sum_{i=1}^q \int \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \right\|_W dm \\ &+ \int \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\| F_{*T_i^{-1}} \left(\frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} - \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_2)|} \right) \right\|_W dm \\ &\leq \sum_{i=1}^q \int \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W dm \\ &+ \int \|F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)}\|_W \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} - \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_2)|} \right) dm \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|D(P_F\mu, \gamma_1)\|_1 &\leq \sum_{i=1}^q \int \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W dm \\ &+ \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W dm \\ &+ \int \|F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)}\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)}\|_W \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} - \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_2)|} \right) dm \\ &= I + II + III \end{aligned}$$

Vamos estimar o primeiro somatório

$$I = \sum_{i=1}^q \int \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W dm$$

Pelo Lema 10.1 temos $\|F_{*\gamma} \mu\|_W \leq \alpha \|\mu\|_W + \mu(D^2)$, então

$$I \leq \sum_{i=1}^q \int \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\{ \alpha \left\| \frac{\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)} - \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W + \left| \frac{\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)}(D^2) - \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}(D^2)}{\gamma_2 - \gamma_1} \right| \right\} d\gamma_1$$

Iremos logo calcular

$$\begin{aligned} & \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left| \frac{\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)}(D^2) - \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}(D^2)}{\gamma_2 - \gamma_1} \right| \\ &= \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left| \frac{\pi_{T_i^{-1}(\gamma_2), y}^* \left(\phi_x(T_i^{-1}(\gamma_2)) \mu_{T_i^{-1}(\gamma_2)} \right) (D^2) - \pi_{T_i^{-1}(\gamma_1), y}^* \left(\phi_x(T_i^{-1}(\gamma_2)) \mu_{T_i^{-1}(\gamma_1)} \right) (D^2)}{\gamma_1 - \gamma_1} \right| \\ &= \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left| \frac{\phi_x(T_i^{-1}(\gamma_2)) \left(\pi_{T_i^{-1}(\gamma_2), y}^* \mu_{T_i^{-1}(\gamma_2)} \right) (D^2) - \phi_x(T_i^{-1}(\gamma_1)) \left(\pi_{T_i^{-1}(\gamma_1), y}^* \mu_{T_i^{-1}(\gamma_1)} \right) (D^2)}{\gamma_1 - \gamma_1} \right| \end{aligned}$$

Lembre que $\pi_{\gamma, y} \mu_\gamma$ é uma probabilidade em D^2 , segue que

$$\limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left| \frac{\phi_x(T_i^{-1}(\gamma_2)) - \phi_x(T_i^{-1}(\gamma_1))}{\gamma_2 - \gamma_1} \right| = \phi'_x(T_i^{-1}(\gamma_1)).$$

e

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{i=1}^q \int \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \left[\limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \alpha \left\| \frac{\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)} - \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)} \right\|_W \right. \\ &\quad \left. + \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left| \frac{\mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)}(D^2) - \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}(D^2)}{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)} \right| \right] d\gamma_1 \\ &\leq \sum_{i=1}^q \sup_{\gamma_1} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1} \int_{I_i} \alpha D(\mu, T_i^{-1}(\gamma_1)) + |\phi'_x(T_i^{-1}(\gamma_1))| dT_i^{-1}(\gamma_1) \end{aligned}$$

Então somando as contribuições de todos ramos T_i e intervalos I_i

$$\begin{aligned} I &\leq \sup_{\gamma_1} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[\alpha \|D(\mu, T_i^{-1}(\gamma_1))\|_1 + \|\phi'_\mu\|_1 \right] \\ &\leq \frac{1}{\inf |T'|} \left[\alpha \|D(\mu, T_i^{-1}(\gamma_1))\|_1 + \|\phi'_\mu\|_1 \right] \end{aligned}$$

Agora, olhando o segundo somatório

$$\begin{aligned}
II &\leq \sum_i \int_I \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1} \right\|_W dm \\
&\leq \sup_{i, \gamma_1} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1} \sum_i \int_I \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} \\
&\quad \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)} \right\|_W d\gamma_1 \\
&\leq \sup_{i, \gamma_1} \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1} \\
&\quad \sum_i \int_I \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \left\| \frac{F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)} - F_{*T_i^{-1}(\gamma_2)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_2)}}{T_i^{-1}(\gamma_2) - T_i^{-1}(\gamma_1)} \right\|_W dT_i^{-1}(\gamma_1) \\
&\leq \frac{1}{\inf |T'|} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_\infty \|\mu\|_1.
\end{aligned}$$

no último passo foi usado que $\mu \geq 0$. Por fim,

$$\begin{aligned}
III &\leq \sum_i \int \|F_{*T_i^{-1}(\gamma_1)} \mu|_{T_i^{-1}(\gamma_1)}\|_W \limsup_{\gamma_2 \rightarrow \gamma_1} \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_1)|} - \frac{1}{|T'_i \circ T_i^{-1}(\gamma_2)|} \right) dm(\gamma_1) \\
&\leq \|T'\|_\infty \left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_\infty \|\mu\|_1
\end{aligned}$$

Somando, obtemos

$$\begin{aligned}
\|P_F \mu\|_{W^{1,1}} &\leq \frac{1}{\inf |T'|} \left(\alpha \|\mu\|_{W^{1,1}} + \|\phi'_\mu\|_1 + \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_\infty \|\mu\|_1 \right) \\
&\quad + \left(1 + \|T'\|_\infty \left\| \frac{T''}{(T')^2} \right\|_\infty \right) \|\mu\|_1
\end{aligned} \tag{11.14}$$

□

E iterando, obtemos:

Corolário 11.2. Existem $B > 0$, $\lambda < 1$ tais que

$$\|P_F^n \mu\|_{W^{1,1}} \leq \lambda^n (\|\mu\|_{W^{1,1}} + \|\phi'_\mu\|_1) + B \|\mu\|_1.$$

Com essa desigualdade temos uma limitação regular uniforme com essa norma forte para a iteração de medidas positivas.

REFERÊNCIAS

- BOYARSKY, A.; GORA, P. *Laws of Chaos: Invariant Measure and Dynamical Systems in One Dimension*. [S.l.]: Springer, 1997.
- CLIMENHAGA, V. *Spectral methods 3 – central limit theorem*. 2013. Disponível em: <<https://vaughnclimenhaga.wordpress.com/2013/03/17/spectral-methods-3-central-limit-theorem/>>. Acesso em: 29 mai. 2022.
- CLIMENHAGA, V. *Spectral methods in dynamics*. 2013. Disponível em: <<https://vaughnclimenhaga.wordpress.com/2013/01/30/spectral-methods-in-dynamics/>>. Acesso em: 29 mai. 2022.
- CLIMENHAGA, V. *Spectral methods in dynamics (part 2)*. 2013. Disponível em: <<https://vaughnclimenhaga.wordpress.com/2013/02/08/spectral-methods-in-dynamics-part-2/>>. Acesso em: 29 mai. 2022.
- CONWAY, J. B. *Functions of a Complex Variable, Second Edition*. [S.l.]: Spring-Verlad, 1978.
- GALATOLO, S. *STATISTICAL PROPERTIES OF DYNAMICS INTRODUCTION TO THE FUNCTIONAL ANALYTIC APPROACH*. 2022. Disponível em: <<https://www.ams.org/open-math-notes/omn-view-listing?listingId=110711>>. Acesso em: 29 mai. 2022.
- GALATOLO, S.; LUCENA, R. Spectral gap and quantitative statistical stability for systems with contracting fibers and lorenz-like maps. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 40(3), jun. 2020.
- GALATOLO, S.; SEDRO, J. *QUADRATIC RESPONSE OF RANDOM AND DETERMINISTIC DYNAMICAL SYSTEMS*. 2020. Disponível em: <<http://www.weizmann.ac.il/math/sarigo/sites/math.sarigo/files/uploads/transferoperatorcourse-bonn.pdf>>. Acesso em: 09 jul. 2022.
- GERALDO, B.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. [S.l.]: SBM, 2015.
- JAMES, R. B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário, Terceira edição*. [S.l.]: Projeto Euclides - IMPA, 2010.
- JUNIOR, A. A. C. *Funções de Operador e o Estudo do Espectro*. [S.l.]: 29º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2013.
- JUNIOR, A. A. C. *Aplicações de Análise a Álgebra Linear*. [S.l.]: III Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014.
- LUCENA, R. *Spectral Gap and Stistical Properties for Piecewise Expanding Maps*. 2014. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1buh_3GWkA9nZDbuUz7k9W_duBf3pKq0x/view>. Acesso em: 29 mai. 2022.
- OLIVEIRA, C. R. D. *Introdução à Análise Funcional*. [S.l.]: IMPA, 2015.
- SARIG, O. *Introduction to the transfer operator method*. 2020. Disponível em: <<http://www.weizmann.ac.il/math/sarigo/sites/math.sarigo/files/uploads/transferoperatorcourse-bonn.pdf>>. Acesso em: 29 mai. 2022.

TOSIO, K. *Perturbation Theory for Linear Operators*. [S.l.]: Springer, 1980.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. *Fundamentos da Teoria Ergódica, Segunda edição*. [S.l.]: Fronteiras da Matemática - Sociedade Brasileira da Matemática, 2019.

APÊNDICE A – LEIS DOS GRANDES NÚMEROS

Este apêndice serve como uma preparação para o estudo do capítulo 8, que é sobre o teorema central do limite, aqui lembraremos resultados fundamentais de média de sequência de variáveis aleatórias: as leis dos grandes números, tanto a forte quanto a fraca.

Para um estudo sobre probabilidade, além dos resultados apresentados nesse trabalho, pode ser usado o livro (JAMES, 2010) da coleção projeto Euclides.

A.1 CONVERGÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓTIAS

Primeiramente iremos lembrar as diferentes maneiras que uma sequência de variáveis aleatórias podem convergir. Seja Y_n uma sequência de variáveis aleatórias reais e Y um variável aleatórias simples, para a qual queremos que a sequência Y_n convirja.

A.1.1 Convergência quase certa

A noção mais forte para convergência é a convergência "quase certa": Denotamos por $Y_n \xrightarrow{q.c.} Y$ se

$$\mathbb{P}(Y_n \rightarrow Y) = 1 \quad (\text{A.1})$$

Se Ω é um espaço de probabilidade no qual as variáveis aleatórias estão definidas e ν é uma probabilidade que define \mathbb{P} , então a condição acima pode ser reescrita como

$$\nu\{\omega \in \Omega | Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)\} = 1 \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Convergência em Probabilidades

A notação "mais fraca" de convergência é a de convergência "em probabilidade": Denotamos por $Y_n \xrightarrow{p} Y$ se

$$\mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ para algum } \varepsilon > 0. \quad (\text{A.3})$$

Em termos de Ω e ν , esta condição é

$$\nu\{\omega \in \Omega | |Y_n(\omega) - Y(\omega)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (\text{A.4})$$

O teorema de Egorov garante que a convergência quase certa implica na convergência em probabilidade, mas não vale a recíproca.

A.1.3 Convergência em Distribuições

Outra noção que também é fraca de convergência é a de convergência "em distribuições": Escrevemos $Y_n \xrightarrow{d} Y$ se, escrevendo $F_n, F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $F_n(t) = \mathbb{P}[Y_n \leq t]$ e $F(t) = \mathbb{P}[Y \leq t]$ para funções distribuição acumulada de Y_n e Y , temos que $F_n(t) \rightarrow F(t)$ em todo t para o qual $F(t)$ é contínua.

Convergência em probabilidades implica convergência em distribuições, mas o contrário não é válido, note que falha se Y não é q.c. constante.

...

A.2 LEI FRACA DOS GRANDES NÚMEROS

Dada uma sequência de variáveis aleatórias reais X_n , considere a soma

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Então $\frac{1}{n}S_n$ é a média das n primeiras observações.

Suponha que a sequência X_n seja independente e identicamente distribuída (IID) e que X_n seja integrável, ou seja, $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Então em particular a média $\mu = \mathbb{E}(X_n)$ é finita. A lei fraca dos grandes números diz que $\frac{1}{n}S_n$ converge em probabilidade para uma função constante μ . Já que a distribuição aqui é limitada, basta provar a convergência em distribuições. Isto nos leva a uma demonstração da lei fraca dos grandes números já conhecida, usando funções características.

Se uma variável aleatória Y é absolutamente contínua, isto é, se ela tem uma densidade f , então suas funções características φ_Y é a transformada de Fourier de f . Mais geralmente, a função característica de Y é

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY}) \tag{A.5}$$

As funções características estão relacionadas com a convergência em distribuições pelo *Teorema da continuidade de Lévy*¹, que diz que $Y_n \xrightarrow{d} Y$ se, e somente se, $\varphi_{Y_n}(t) \rightarrow \varphi_Y(t)$ para

¹ o teorema diz outras coisas além do fato destacado.

todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, para provar a lei fraca dos grandes números é suficiente mostrar que as funções características de $\frac{1}{n}S_n$ convergem pontualmente para a função $e^{it\mu}$.

Com efeito, seja φ a função característica de X_n , e veja que toda X_n tem a mesma função característica já que são identicamente distribuídas. Sendo φ_n a função característica de $\frac{1}{n}S_n$, então

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}(e^{\frac{it}{n}(X_1 + \dots + X_n)})$$

do fato das variáveis X_n serem independentes, segue que

$$\varphi_n(t) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(e^{\frac{it}{n}X_j}) = \varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n \quad (\text{A.6})$$

Pelo teorema de Taylor e da linearidade da esperança, para $t \approx 0$ temos que

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX_j}) = \mathbb{E}(1 + itX_j + o(t^2)) = 1 + it\mu + o(t),$$

junto com (A.6) segue que

$$\varphi_n(t) = \left(1 + \frac{it\mu}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{it\mu},$$

completando a prova.

A.3 LEI FORTE DOS GRANDES NÚMEROS E TEOREMA ERGÓDICO

A lei forte dos grandes números garante não somente a convergência de $\frac{1}{n}S_n$ para μ em probabilidade, mas também a converge quase certamente. Isto leva um pouco mais de trabalho para demonstrar. Não faremos a demonstração aqui, iremos observar que a lei forte dos grandes números pode ser vista como um caso particular do teorema ergódico de Birkhoff 2.6. Iremos enunciar aqui uma versão mais relevante no nosso caso.

Teorema A.1. Seja (X, \mathcal{F}, μ) um espaço de probabilidade e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Suponha que μ seja invariante por T e ergódica. Então para qualquer $\varphi \in L^1$, temos

$$\frac{1}{n}S_n\varphi(x) \rightarrow \int \varphi d\mu$$

para μ -q.t.p $x \in X$, onde $S_n\varphi(x) = \varphi(x) + \varphi(Tx) + \dots + \varphi(T^{n-1}x)$.

Observação 15. É possível encontrar uma discussão sobre a lei fraca e forte dos grandes números, e uma demonstração diferente no blog do Terence Tao.