



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

WILLAMS BATISTA FERREIRA DA SILVA

**PROCESSO ARMA GAMA GENERALIZADO APLICADO A IMAGENS DE
AMPLITUDE E INTENSIDADE SAR**

Recife

2022

WILLAMS BATISTA FERREIRA DA SILVA

**PROCESSO ARMA GAMA GENERALIZADO APLICADO A IMAGENS DE
AMPLITUDE E INTENSIDADE SAR**

Trabalho apresentado ao Programa de pós-graduação em Estatística do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S586p Silva, Willams Batista Ferreira da
Processo ARMA gama generalizado aplicado a imagens de amplitude e
intensidade SAR / Willams Batista Ferreira da Silva. – 2022.
59 f.:il., fig, tab.

Orientador: Abraão David Costa do Nascimento.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Estatística, Recife, 2022.

Inclui referências e apêndices.

1. Estatística Aplicada. 2. Séries temporais. I. Nascimento, Abraão David
Costa do (orientador). II. Título.

310 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2022-194

WILLAMS BATISTA FERREIRA DA SILVA

" Processo ARMA Gama Generalizado Aplicado a Imagens de Amplitude e Intensidade SAR"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em: 25 de fevereiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento
DE/UFPE

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo
UFC

Prof^a.Dr^a. Fernanda Vital de Paula
UFNT

Dedico este trabalho à minha mãe e minhas avós.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Lúcia, por todos os sacrifícios que foi e são feitos por ela diariamente, pra mim e para meu irmão. Por todo amor e cuidado que ela faz questão de nos dar. Ao meu irmão, Wellington (Etinho), pela amizade incondicional e nosso dia a dia durante esta pandemia.

Ao meu orientador, Professor Abraão Nascimento, por toda orientação durante este mestrado e antes também, pelas oportunidades e desafios propostos. Não faltaram palavras de incentivo e encorajamento em nossas reuniões, além de conversas sobre assuntos mais diversos e empolgantes de Estatística e Matemática.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFPE, em especial ao Professor Cysneiros e a Professora Audrey, que tenho um carinho enorme.

Aos meus amigos da graduação que pelos momentos que foram e são compartilhados: Pedro, Alan, Gabriel, Arthur e Joseph. Aos meus amigos do mestrado, que tivemos uma semana de aula presencial mas mantemos o contato: Rafael e Luciano. E também aos meus amigos de infância da Farroupilha, que conheço desde não sei quando: André, Gabriel, Neubert, Carlinhos e Rafaela.

À CAPES pelo apoio financeiro e aos membros da banca pelas contribuições.

RESUMO

Os problemas de sensoriamento remoto são resolvidos usando imagens de radar de abertura sintética (SAR). Porém, essas imagens sofrem com o ruído *speckle*, que exige uma certa modelagem de seus atributos (como intensidade e amplitude). É comum trabalhar com abordagens separadas para dados de intensidade e amplitude. Neste trabalho, propomos um novo processo autoregressivo de médias móveis (ARMA) com distribuição marginal Gama Generalizada ($G\Gamma$), denominado $G\Gamma$ -ARMA e conseguimos modelar ambos os atributos com o mesmo modelo. Derivamos algumas de suas propriedades matemáticas: expressões de forma fechada baseadas em momento, função escore e matriz de informação de Fisher. Um procedimento para obter estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros $G\Gamma$ -ARMA é fornecido e seu desempenho é quantificado e discutido usando experimentos de Monte Carlo, considerando (entre outras) várias funções de ligação. Por fim, a proposta é aplicada a dados reais obtidos de imagens das regiões de Munique e São Francisco. Os resultados demonstram que $G\Gamma$ -ARMA descreve as vizinhanças dos pixels da imagem SAR melhor do que o processo Γ -ARMA (que é uma referência para dados positivos assimétricos). Ao modelar raios de pixel reais, nossa proposta supera os modelos \mathcal{G}_I^0 e Γ -ARMA.

Palavras-chaves: ARMA; distribuição gama generalizada; séries temporais; radar de abertura sintética; intensidade; amplitude.

ABSTRACT

Remote sense problems are solved using synthetic aperture radar images (SAR). But, these images are suffer with a speckle noise, which requires a certain modeling of their features (such as intensity and amplitude). It is common to work with separate approaches for intensity and amplitude data. In this work, we propose a new autoregressive moving average (ARMA) process with generalized gamma ($G\Gamma$) marginal law, called $G\Gamma$ -ARMA. We derive some of its mathematical properties: Moment-based closed-form expressions, score function and Fisher information matrix. A procedure for obtaining maximum likelihood estimates of the $G\Gamma$ -ARMA parameters is provided and its performance is quantified and discussed using Monte Carlo experiments, considering (among others) various link functions. Finally, the proposal is applied to real data obtained from images of the Munich and San Francisco regions. Results demonstrate that $G\Gamma$ -ARMA describes the neighborhoods of SAR features better than the Γ -ARMA process (which is a reference for asymmetric positive data). When modeling real pixel rays, our proposal outperforms the \mathcal{G}_I^0 and Γ -ARMA models.

Keywords: generalized gamma law; ARMA; time series; synthetic aperture radar; intensity; amplitude.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geometria de obtenção da imagem SAR	17
Figura 2 – Diagrama de distribuições ilustrando alguns casos particulares do modelo $G\Gamma$ para dados SAR de amplitude e intensidade.	23
Figura 3 – (a) Imagem de Munique e (b) imagem de São Francisco com as respectivas regiões selecionadas	40
Figura 4 – Exemplo do janelamento usado	41
Figura 5 – Ajustes dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ -AR(1) nas regiões selecionadas da imagem SAR de Munique	43
Figura 6 – Ajustes dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ -AR(1) nas regiões selecionadas da imagem SAR de São Francisco	44
Figura 7 – Mapa de calor para os p-valores do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de Munique em todos os três canais de polarização PolSAR.	45
Figura 8 – Mapa de calor para os p-valores, com um <i>threshold</i> de 5%, do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de Munique em todos os três canais de polarização PolSAR.	46
Figura 9 – Mapa de calor para os p-valores do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de São Francisco em todos os três canais de polarização PolSAR.	46
Figura 10 – Mapa de calor para os p-valores, com um <i>threshold</i> de 5%, do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de São Francisco em todos os três canais de polarização PolSAR.	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Frequência em GHz das bandas dos radares	16
Tabela 2 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo AR(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = 0.5$	34
Tabela 3 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo MA(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = 0.5$	35
Tabela 4 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo ARMA(1,1) com $\alpha = 5$ e $\nu = 0.5$	36
Tabela 5 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo AR(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = -0.5$	37
Tabela 6 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo MA(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = -0.5$	38
Tabela 7 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo ARMA(1,1) com $\alpha = 5$ e $\nu = -0.5$	39
Tabela 8 – Estimação dos parâmetros dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ -AR(1) na imagem SAR de Munique	47
Tabela 9 – Medidas de qualidade de ajuste nos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), and $G\Gamma$ - AR(1) na imagem SAR de Munique	47
Tabela 10 – Estimação dos parâmetros dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1) e $G\Gamma$ -AR(1) na imagem SAR de São Francisco	48
Tabela 11 – Medidas de qualidade de ajuste nos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ - AR(1) na imagem SAR de São Francisco	48

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	Distribuição Gama
\mathcal{G}_I^0	Distribuição \mathcal{G}_I^0
\mathcal{L}	Número de <i>looks</i>
\mathcal{N}	Distribuição Normal
$\psi^{(h)}(\cdot)$	Função polygama
$\gamma(\cdot, \cdot)$	Função gamma incompleta
\mathcal{F}_{t-1}	Conjunto de informações anteriores

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	SUORTE COMPUTACIONAL	13
1.2	CONTRIBUIÇÕES DURANTE A DISSERTAÇÃO	14
2	RADAR DE ABERTURA SINTÉTICA	15
2.1	SENSORES	15
2.2	RETORNOS DE IMAGEM SAR	16
2.3	REVISÃO DE MODELOS TRATADOS NA DISSERTAÇÃO	19
2.4	APROXIMAÇÃO DO CAMPO ALEATÓRIO DE MARKOV 2D PARA ES- TRUTURAS ARMA SAZONAL	21
3	MODELO $G\Gamma$-ARMA	23
3.1	MODELO $G\Gamma$ REPARAMETRIZADO E SEU PROCESSO ARMA	23
3.2	MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA CONDICIONAL	26
3.3	ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO E RESÍDUOS	29
3.4	PREVISÃO E QUALIDADE DE AJUSTE	30
4	RESULTADOS	32
4.1	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	32
4.2	APLICAÇÃO EM DADOS DE ESPAÇO E TEMPO DE IMAGENS SAR	40
5	CONCLUSÃO	49
5.1	TRABALHOS FUTUROS	49
	REFERÊNCIAS	50
	APÊNDICE A – PROVA DO TEOREMA	53
	APÊNDICE B – INFORMAÇÃO DE FISHER PARA O $G\Gamma$-ARMA	55

1 INTRODUÇÃO

O Radar de Abertura Sintética, *Synthetic Aperture Radar* (SAR), é bastante utilizado na área de sensoriamento remoto (GAO, 2019). Os primeiros experimentos vêm desde a década de 50, trataram da aleatoriedade dos oceanos em imagens SAR e usaram inicialmente a distribuição de Rayleigh para descrever a amplitude do retorno dos radares (WARD; TOUGH; WATTS, 2006). O problema principal encontrados em imagens SAR é a presença do chamado ruído *speckle* (HAJNSEK; DESNOS, 2021)]. O *speckle* também é encontrado em outros tipos de imagens, tais como aquelas obtidas por lasers, sonares e ultrassons (OLIVER; QUEGAN, 2004). Pela recorrência deste ruído, modelos específicos foram desenvolvidos para lidar com este tipo de ruído e descrever características importantes de imagens SAR, tais como amplitude e intensidade (OLIVER; QUEGAN, 2004) e também para tratar de tarefas de pós-processamento como filtro local (DING; WEN, 2019), reconhecimento de área (TOUMI; KHENCHAF; HOELTZNER, 2012), segmentação de imagem (YANG et al., 2011), detecção de mudança (TIAN; GONG, 2018), entre outros.

Li et al. (2011) introduziram a Lei Gama Generalizada ($G\Gamma$) como uma distribuição decorrente da prática para descrever dados de intensidade (norma quadrada de um número complexo) e amplitude (norma de um número complexo) de imagens SAR. Aplicações em dados reais têm mostrado que a distribuição $G\Gamma$ é um modelo adequado para cenários com diferentes texturas, tais como regiões de oceano, florestas, pastagens e áreas urbanas Li et al. (2010). Existem várias versões da distribuição $G\Gamma$, em particular, uma das primeiras versões da distribuição $G\Gamma$ é dada por Stacy (1962); Hager e Bain (1970); Gomes, Combes e Dus-sauchoy (2008) discutiram o processo de estimação por máxima verossimilhança assumindo que os dados pertencem à distribuição $G\Gamma$. Muitas técnicas de pós-processamento em imagem usaram a distribuição $G\Gamma$ como entrada: classificadores de imagens SAR usando a distância de Kullback-Leibler (QIN et al., 2015); detecção de navios em imagens SAR (GAO et al., 2017); Estimação baseada no algoritmo EM para um modelo de mistura $G\Gamma$ aplicado a imagens médicas (BOUROUIS; SALLAY; BOUGUILA, 2021). As contribuições dessa dissertação serão feitas assumindo a distribuição Gama Generalizada proposta por Li et al. (2011).

Além do suposto probabilístico para o retorno dos radares, costuma-se também modelar estruturas de dependências nas vizinhanças das entradas da imagem. Neste sentido, os modelos espaço-temporais são bastante utilizados em muitos campos ciência, como reconhecimento

de padrões (FUKUNAGA, 1990) e processamento de imagens de radar (NEEFF et al., 2005). Por causa de sua intratabilidade analítica, costuma-se assumir que o retorno segue uma distribuição gaussiana. Porém, a natureza dos atributos como intensidade e amplitude associadas à imagens SAR impõe que as distribuições marginais não sejam gaussianas. Visando solucionar este problema, Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) propuseram um processo autoregressivo e de médias móveis condicional (ARMA) chamado ARMA Generalizado (GARMA), no qual a distribuição marginal é um membro da família exponencial (FE). A partir daí, outros trabalhos surgiram compartilhando da mesma abordagem de Benjamin para solucionar o problema de quando a distribuição marginal não é membro da FE. O modelo β -ARMA foi introduzido por Rocha e Cribari-Neto (2009). Bayer, Bayer e Pumi (2017) aplicaram o modelo Kumaraswamy ARMA ao campo da hidrologia e recentemente introduziram o modelo Rayleigh ARMA para dados de medições de vento em sequências SAR multitemporais (BAYER et al., 2020). Ainda recentemente, Almeida-Junior e Nascimento (2021) desenvolveram o modelo \mathcal{G}_I^0 -ARMA para descrever as intensidades extraídas de imagens SAR e ideia do trabalho foi decorrente do mesmo.

Neste trabalho, apresentamos um novo processo ARMA que tem como distribuição marginal a distribuição Gama Generalizada, denominado $G\Gamma$ -ARMA. Semelhante à distribuição $G\Gamma$, o processo $G\Gamma$ -ARMA pode ser utilizado para descrever os atributos tanto de amplitude quanto de intensidade, o que simplifica o processamento de imagens SAR via séries temporais como aproximação para uma vizinhança das entradas de tais imagens. Diversas propriedades matemáticas do $G\Gamma$ -ARMA são derivadas: expressões baseadas nos momentos, a função escore e a matriz de informação de Fisher (MIF). Propomos um método para obter estimativas de máxima verossimilhança (EMVs) para os parâmetros $G\Gamma$ -ARMA. As EMVs resultantes são avaliadas por experimentos de Monte Carlo. Finalmente, as aplicações são feitas para dados reais provenientes das regiões de Munique (Alemanha) e São Francisco (EUA). Os resultados mostram a importância do modelo proposto em relação aos processos Γ -ARMA e \mathcal{G}_I^0 -ARMA.

1.1 SUPORTE COMPUTACIONAL

Dentre os *software* de domínio público (gratuitos) para análise de dados, utilizamos a linguagem R. Este ambiente é *open source* e tem abertura para publicação de pacotes fundamentados por novas metodologias estatísticas. Amplamente difundido na academia e fora também. Para o desenvolvimento deste texto foi utilizado em essência o template em LaTeX

disponibilizado pelo Programa de Pós-Graduação em Estatística da UFPE encontrado no *site* do *Overleaf*.

1.2 CONTRIBUIÇÕES DURANTE A DISSERTAÇÃO

- An Extended log-Lindley-G Family: Properties and Experiments in Repairable Data - Publicado no *Mathematics* em dezembro de 2021 9(23):3108 - ISSN: 2227-7390.
- Generalized Gamma ARMA Process for Synthetic Aperture Radar Amplitude and Intensity Data - Submetido ao *Journal of Statistical Computation and Simulation* em novembro de 2021 (status: com Editor) - ISSN: 0094-9655

Esta dissertação é organizada da seguinte forma: Capítulo 1 é a introdução e encontramos o tema trabalhado, a motivação para o problema, os objetivos da dissertação e as contribuições que foram feitas durante o mestrado. O capítulo 2 é importante para esta dissertação porque introduz ao leitor como os sistemas de radar funcionam, em especial o SAR, também é exposto ao problema que são encontrados e tratados em imagens de radar de abertura sintética (SAR), além disso vemos uma forma alternativa de como tratar imagens 2D por outro método além do campo aleatório de Markov 2D. O capítulo 3 apresenta o processo $G\Gamma$ -ARMA, a reparametrização feita para que pudessemos tratar um problema de séries temporais por regressão; suas propriedades matemáticas como a Matriz de Informação de Fisher, função score e alguns resultados de valor esperado baseado nos momentos. O capítulo 4 apresenta as simulações de Monte Carlo para validar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança condicional do modelo, além disso também é mostrado aplicações em dados reais do modelo $G\Gamma$ -ARMA em comparação com seus concorrentes Γ -ARMA e o \mathcal{G}_I^0 e a construção de mapas de calor com base em testes de razão de verossimilhança para validar a adequabilidade do modelo em contraste com o Γ -ARMA para certas regiões. E por fim, no capítulo 5 tiramos nossa conclusão do trabalho condensando os resultados.

2 RADAR DE ABERTURA SINTÉTICA

2.1 SENSORES

O sensoriamento remoto tem sido uma boa ferramenta para mapear a superfície da terra. As primeiras formas de sensoriamento carregavam um custo alto de obtenção da imagem, além disso só era possível o levantamento de pequenas áreas por vez e o processo era demorado. Hoje em dia, o processo para obtenção de imagem de satélite por meio dos sensores se dá por meio de duas classes: sensores ópticos (sensoriamento passivo) e/ou sensores de radar (sensoriamento ativo). Os sensores passivos dependem de pulsos eletromagnéticos exteriores ao sensor, por exemplo os pulsos provenientes do sol, para que formem a imagem, pois ele capta os retornos refletidos pelos objetos da superfície. Os sensores ativos não dependem de uma fonte externa de energia pois eles emitem os pulsos eletromagnéticos comprimentos de onda menores que os sensores ópticos e capturam os retornos. Isso permite a captura de imagens em situações adversas como época chuvosa e/ou de alta nebulosidade. Imagens ópticas de boa qualidade em regiões como o Amazonas por exemplo, podem não ser obtidas entre os meses de junho e agosto. Ou também durante as queimadas ocorridas na Amazônia no ano de 2021, a obtenção de imagens de boa qualidade seria possível com sensores ativos. Assim, como o radar de abertura sintética [*Synthetic Aperture Radar*] (SAR) é um sensor de radar ativo, se torna bem útil.

Como os radares podem operar em diferentes bandas (e seu comprimento de onda e frequência também se altera) de acordo com a Tabela 1, cada banda é mais adequada que outra para determinado tipo de região e bandas com frequências mais baixas conseguem penetrar mais profundamente os objetos mapeados. As frequências acima da banda X se espalham na superfície dos objetos e não ultrapassa. A banda C é mais adequada para regiões planas, a banda L para regiões de florestas e a banda P é adequada para extrair informações do solo (capaz de ultrapassar o solo, neve e gelo também). A natureza do espalhamento em frequências mais altas tornam-se próximas das ondas ópticas.

Tabela 1 – Frequência em GHz das bandas dos radares

Banda	Frequência (GHz)
P	$< 0,39$
L	$0,39 \leq f < 1,55$
S	$1,55 \leq f < 3,9$
C	$3,9 \leq f < 5,75$
X	$5,75 \leq f < 10,9$

Fonte: O autor (2022)

Existem três meios de sistema que utilizam da tecnologia SAR para operar, são eles: *Ground-Based SAR* (GBSAR), *Airbornes SAR* (aerotransportados) e os *Spacebornes SAR* (espaciais). O GBSAR é um sistema sensoramento remoto terrestre, o sensor emite e recebe uma rajada de microondas, repetindo esta operação enquanto se move ao longo de uma ferrovia. O aerotransportado é o conjunto: avião em que o radar é acoplado e o radar, e tem como vantagem a liberdade geográfica para obter a imagem, dependendo apenas da condição climática para o vôo. O sistema baseado nos *Spacebornes* são os radares acoplados em satélites orbitantes. Iremos utilizar nesta dissertação imagens obtidas pelo sistema aerotransportado e operando nas bandas P, L e C para a imagem de São Francisco e P, L, C, X para a imagem de Munique.

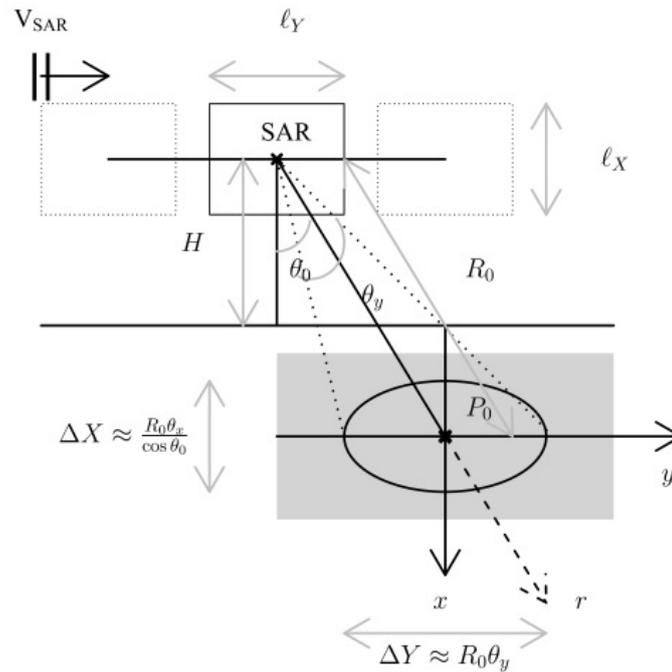
2.2 RETORNOS DE IMAGEM SAR

Os radares SAR, como comentado anteriormente, são acoplados em algum tipo de plataforma móvel. Podemos ver uma ilustração pela Figura 1. O sistema SAR está à uma altura 'H' e se move com uma velocidade ' V_{SAR} '. A emissão dos pulsos eletromagnéticos são feitos perpendicularmente à direção de vôo (movimento). O feixe emitido pela a antena do radar, representado pela reta r , faz um ângulo de inclinação θ_0 com o eixo paralelo à altura 'H'. O formato físico de abertura do radar, especificado por ℓ_X para largura e ℓ_Y para o comprimento, gera um feixe elíptico centrado em P_0 cujos comprimentos são ΔX e ΔY . A área da imagem é definida pelas aberturas da antena, θ_x e θ_y , que são dadas pelas aproximações

$$\theta_x \approx \frac{\lambda}{\ell_x} \quad \text{e} \quad \theta_y \approx \frac{\lambda}{\ell_y},$$

em que λ é o tamanho de onda correspondente à frequência do sinal transmitido (ver NASCIMENTO (2012)).

Figura 1 – Geometria de obtenção da imagem SAR



Fonte: NASCIMENTO (2012)

Porém, no processamento de imagens SAR, a imagem é contaminada por um ruído chamado *speckle*. O *speckle* é presente na imagem devido à interferência do sinal refletido aos objetos em que o sinal é enviado. O ruído *speckle* dificulta a interpretação e análise das imagens SAR impondo comportamentos multiplicativos e não gaussianos nos atributos de intensidade e amplitude dos dados, este é um dos motivos da utilização de modelos não gaussianos para modelar atributos de imagens SAR. Como o *speckle* depende da refração do sinal nas texturas há de se perguntar em que texturas há uma maior ocorrência do ruído. O ruído *speckle* interfere mais em terrenos mais heterogêneos como em cidades (área urbana) porque os sinais retornados são bem dispersos quando comparado à uma região mais homogênea como os oceanos, esta característica é chamada de rugosidade, forte e fraca (superfícies lisas), respectivamente. A área de florestas tem uma rugosidade média, pois os sinais dispersam também, mas menos do que nas urbanas e mais que nos oceanos. Assim, como visto em NASCIMENTO (2012), o sinal transmitido pela antena do radar é dado por:

$$\bar{P}_r = \frac{P_t \lambda^2 G_0^2}{(4\pi)^3 R^4} \sigma,$$

em que \bar{P}_r é a potência média recebida pela antena (em watts), P_t é a potência transmitida pela antena, λ é o comprimento de onda (em nanômetros, 10^{-9} metros), G_0 é o ganho máximo da antena (razão entre as tensões de entrada e saída), R é a distância entre a antena e o alvo

(em metros) e σ é o coeficiente de retroespalhamento. Note que, todos os elementos **exceto** o σ , são ligados ao sistema físico do radar, o que leva ao σ carregar com ele a relação com a imagem. Então, a natureza física por trás da formação de uma imagem SAR é intrinsecamente multiplicativa. Assim, para tratar do ruído *speckle* temos geralmente duas abordagens: (i) aplicar filtros para reduzir o ruído (ii) utilizar processos de múltiplas visadas (*multilook*).

Para obter propriedades que representam a Terra, o SAR assume que cada célula contém um número discreto de espalhamento. Quando o SAR emite os pulsos eletromagnéticos e os mesmos interagem com a região de interesse, cada espalhamento resulta em uma onda retroespalhada na qual as informações de fase e amplitude mudam. Assim, o retroespalhamento da onda incidente na entrada (i, j) da imagem é dado por

$$R(i, j) = A(i, j) \exp\{\sqrt{-1} \psi(i, j)\} = \sum_{k=1}^{N(i, j)} A_k(i, j) \exp\{\sqrt{-1} \psi_k(i, j)\} \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

onde $A(i, j)$ é a amplitude da onda, $\psi(i, j)$ é a fase da onda, $N(i, j)$ é o número de dispersões da célula de resolução (i, j) , e $A_k(i, j)$ e $\psi_k(i, j)$ são a amplitude e a fase, respectivamente, do k -ésimo espalhamento da célula (i, j) . A equação (2.1) permite-nos interagir entre as observações e as propriedades físicas da camada de espalhamento. Matematicamente, a equação (2.1) é um passeio aleatório no plano complexo de tal forma que qualquer espalhamento de comprimento $A_k(i, j)$ assuma uma direção completamente aleatória. Para $N(i, j)$ suficientemente grande, tem-se de Oliver e Quegan (2004, p. 88) que: i. As partes reais e imaginárias de $R(i, j)$ são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas, ii. $\psi(i, j)$ é uniformemente distribuído em $[-\pi, \pi]$ e iii. $A(i, j)$ segue a distribuição de Rayleigh. Uma propriedade física importante é o conceito de intensidade (em termos de potência ou energia), digamos $I(i, j)$, dado por (assumindo que diferentes dispersores são independentes)

$$I(i, j) = |A(i, j)|^2 = A(i, j)A^*(i, j) = \sum_{k=1}^{N(i, j)} A_k^2(i, j),$$

onde $|\cdot|$ e $(\cdot)^*$ são os operadores do módulo e do conjugado complexo. Para lidar com ruído *speckle*, é comum obter $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$ imagens de um terreno estudado em momentos diferentes, o que é denominado *processo multilook*. Este processo se caracteriza em que o radar visa \mathcal{L} vezes o relevo e então a média dos atributos de amplitude e intensidade são feitas e resultam no atributo da imagem. A amplitude e intensidade referente ao *look* \mathcal{L} são definidas como $A_{\mathcal{L}}(i, j) = \mathcal{L}^{-1} \sum_{k=1}^{\mathcal{L}} A^{(k)}(i, j)$ e $I_{\mathcal{L}}(i, j) = \mathcal{L}^{-1} \sum_{k=1}^{\mathcal{L}} I^{(k)}(i, j)$, onde \mathcal{L} é o número de *look*

(NL), $A^{(k)}(i, j)$ e $I^{(k)}(i, j)$ denotam a amplitude e intensidade da entrada (i, j) no (k) -ésimo *look*.

2.3 REVISÃO DE MODELOS TRATADOS NA DISSERTAÇÃO

Serão mencionados frequentemente três modelos de séries temporais durante a dissertação, portanto essa seção será introduzida para revisar brevemente os modelos e alguns aspectos. Primeiramente, iremos apresentar o processo ARMA. X_t é um processo ARMA(p,q) se X_t é estacionário e para cada t ,

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

em que $Z_t \sim RB(0, \sigma^2)$, ϕ 's são os parâmetros autoregressivos e os θ 's são os parâmetros de médias móveis. Duas propriedades importantes dos modelos de séries temporais são a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial. Essas funções ajudam a entender o comportamento da série e escolher quais parâmetros usar, como também indica formas de escolher a ordem dos parâmetros autoregressivos e de médias móveis. A função de autocovariância na posição (lag) h , é dada por

$$\gamma(h) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h}).$$

E a função de autocorrelação é dada pela função de autocovariância no lag h , $\gamma(h)$, dividida pela função de autocovariância no lag 0, $\gamma(0)$. Por exemplo, a função de autocovariância para o processo ARMA(1,1) é dada por

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \sigma^2 \left[1 + \frac{(\theta + \phi)^2}{1 - \phi^2} \right] \\ \gamma(1) &= \sigma^2 \left[\theta + \phi + \frac{(\theta + \phi)^2 \phi}{1 - \phi^2} \right] \\ \gamma(h) &= \phi^{h-1} \gamma(1), \quad \text{para } h \geq 2. \end{aligned}$$

Importante notar que o máximo da função de autocovariância é sempre no lag zero, portanto a função de autocorrelação é limitada em 1. Isto faz sentido dado que a medida em que duas observações estão 'distantes' uma da outra, no sentido da posição h , a correlação entre elas tende a diminuir. A função de autocorrelação parcial do processo ARMA X_t é a função $\alpha(\cdot)$, um pouco mais complicada que a autocovariância, e é definida pelas seguintes equações

$$\alpha(0) = 1$$

e

$$\alpha(h) = \phi_{hh}, \quad h \geq 1$$

em que ϕ_{hh} é o último componente do vetor $\phi_h = \Gamma_h^{-1} \gamma_h$, onde $\Gamma_h = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^h$ e $\gamma_h = [\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(h)]'$. Por exemplo, a função de autocorrelação parcial do processo AR(p) zera após o lag h, se h=p. No geral, temos alguns comportamentos baseados nas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para indicar o modelo a ser usado e a ordem, são elas para a função de autocorrelação: No AR(p) temos um decaimento exponencial da função, no MA(q) temos que a função é zerada após o lag q e no processo ARMA(p,q) temos um decaimento exponencial da função. Na função de autocorrelação parcial, temos o seguinte: No processo AR(p) a função zera após o lag p, no processo MA(q) tem um decaimento exponencial na função e para o processo ARMA(p,q) observamos um decaimento exponencial. Lembrando que tanto as funções e os gráficos das funções apresentam apenas indícios dos modelos que podem usados.

Um outro modelo utilizado é o modelo Γ -ARMA que é denotado $Z \sim \Gamma(L, \mu)$. Seja $\{Z_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série temporal de tamanho n tal que a distribuição condicional de Z_t dado um conjunto de informações anteriores, \mathcal{F}_{t-1} , segue a distribuição Γ . A função densidade reparametrizada de $[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ é dada por

$$f(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; L, \mu_t) = \frac{1}{\Gamma(L)} \left[\frac{\Gamma(L+1)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^L z_t^{L-1} \exp \left\{ - \left[\frac{\Gamma(L+1)}{\mu_t \Gamma(L)} \right] z_t \right\}. \quad (2.2)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função gama e $\mu_t, L > 0$. Temos que a média condicional e a variância condicional do modelo é dado por

$$\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t$$

e

$$\text{Var}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t^2 \left[\frac{\Gamma(L) \Gamma(L+2)}{\Gamma^2(L+1)} - 1 \right].$$

Como na abordagem do Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003) a média μ_t é relacionada com o preditor linear η_t . Assim, a estrutura geral para μ_t tem a forma

$$g(\mu_t) = \eta_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \tau_t,$$

onde $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^k$ é o vetor k -dimensional tendo as covariáveis no tempo t , $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é um vetor de parâmetros devido à parte linear, τ_t

$$\tau_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j},$$

em que $\epsilon_{t-j} = g(z_{t-1}) - \eta_{t-i}$, e $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ são coeficientes AR e MA, respectivamente.

O outro modelo utilizado para dados sob efeito do ruído *speckle* é o introduzido por Almeida-Junior e Nascimento (2021) em que seja Z_t uma série temporal tal que a distribuição condicional de Z_t dado \mathcal{F}_{t-1} segue uma distribuição \mathcal{G}_I^0 . A função de densidade do modelo \mathcal{G}_I^0 -ARMA é dada por

$$f(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}; \alpha, \gamma_t, L) = \frac{L^L \Gamma(L - \alpha)}{\gamma_t^\alpha \Gamma(-\alpha) \Gamma(L)} z_t^{L-1} [\gamma_t + L z_t]^{\alpha-L} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z_t) \quad (2.3)$$

em que $L > 0$ é o número de *looks*, $\gamma_t = -\mu_t(\alpha + 1) > 0$. A média e variância condicional são dadas por, respectivamente

$$\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t \quad \text{e} \quad \text{Var}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t^2 \left[\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) \frac{L + 1}{L} - 1 \right].$$

em que μ_t é relacionado com o preditor linear η_t da forma vista acima.

2.4 APROXIMAÇÃO DO CAMPO ALEATÓRIO DE MARKOV 2D PARA ESTRUTURAS ARMA SAZONAL

Vimos que uma imagem de radar tem sua natureza multiplicativa e também aleatória pela Eq (2.1). Portanto, a rigor, o modelo mais adequado para lidar com imagens 2D seria o campo aleatório de Markov discreto. Por causa da intratabilidade analítica dos campos aleatórios de Markov Delp, Kashyap e Robert Mitcheli (1979), foram sendo desenvolvidos meios de contornar essa situação. O processo de campos aleatórios de Markov tem a representação do pixel de interesse $I(i, j)$ com sua vizinhança de tal forma

$$I(i, j) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^a \sum_{l=0}^b \phi_{kl} I(i-k, j-l) + \epsilon(i, j), \quad \text{para } i, j = 0, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

em que ϕ_{kl} representa os parâmetros autoregressivos, $\epsilon(i, j)$ o ruído branco Gaussiano e N é a quantidade de linhas ou colunas de uma amostrada quadrada de comprimento N . De acordo

com Delp, Kashyap e Robert Mitcheli (1979) uma imagem pode ser gerada por um modelo auto regressivo. E outros autores também como McCormick e Jayaramamurthy (1974), Rangayyan (2004) desenvolveram metodologias visando aproximar a estrutura de campos aleatórios 2D pela estrutura ARMA 1D sazonal, Em geral, tinha-se

$$I(i, j) = \theta_1 I(i - 1, j) + \theta_2 I(i - 1, j - 1) + \theta_3 I(i, j - 1) + \epsilon(i, j), \quad (2.5)$$

aproximados por modelos ARMA sazonais pela relação encontrada em Delp, Kashyap e Robert Mitcheli (1979) $(i, j) \rightarrow k = (i - 1)S + j$ em que S é o número de linhas de uma submatriz

$$I(k) = \theta_1 I(k - S) + \theta_2 I(k - S - 1) + \theta_3 I(k - 1) + \epsilon(k). \quad (2.6)$$

Logo, um *pixel* é relacionado com sua vizinhança e sua relação pode ser expressa através de uma estrutura SARMA com uma função de ligação $g(\cdot)$ da média, que vamos ver a frente.

3 MODELO $G\Gamma$ -ARMA

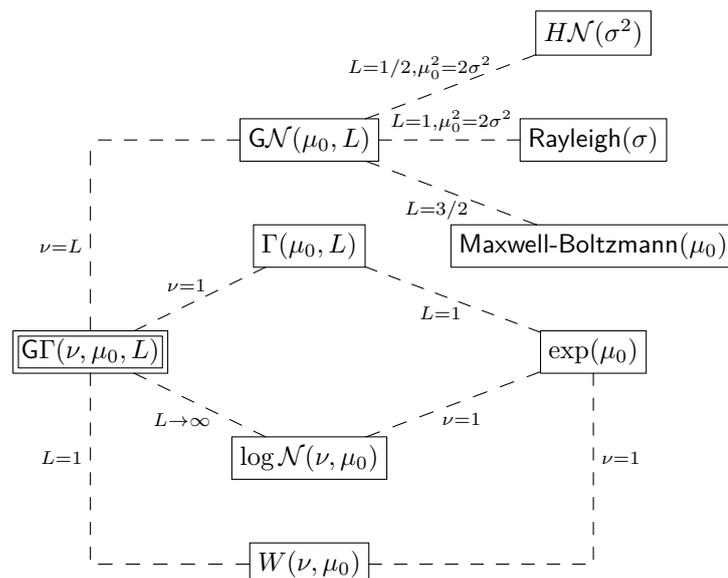
3.1 MODELO $G\Gamma$ REPARAMETRIZADO E SEU PROCESSO ARMA

Li et al. (2011) introduziram a distribuição Gama Generalizada ($G\Gamma$) com densidade

$$f_Z(z; L, \mu_0, \nu) = \frac{|\nu| L^L}{\mu_0 \Gamma(L)} \left(\frac{z}{\mu_0}\right)^{\nu L - 1} \exp\left[-L\left(\frac{z}{\mu_0}\right)^\nu\right] \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z), \quad (3.1)$$

onde $\nu \in \mathbb{R}^*$ é o parâmetro de potência, $L > 0$ é o número equivalente de *looks* (ENL) que descreve a relação sinal-ruído (ver Nascimento, Frery e Cintra (2014) e Shen et al. (2020)), e μ_0 é a média obtida da distribuição Gama. Dado que o processo de emissão de pulsos dos radares SAR são feitos por cada banda operando no radar em questão emitindo, por exemplo, 3 pulsos (em três bandas) ou 4 pulsos (em quatro bandas). A quantidade de pulsos que o radar emite num mesmo instante para formar a imagem é chamado de número de *looks*. Os *looks* (visadas) são correlacionadas, o que complica a modelagem estatística exata do resultado (OLIVER; QUEGAN, 2004). Uma das abordagens para lidar com isto é modelar dados multilook como uma média das medições e substituir o número real das amostras correlacionadas pelo número equivalente de *looks*. Várias distribuições importantes surgem como casos especiais do modelo $G\Gamma$, conforme mostrado pelo diagrama na Figura 2.

Figura 2 – Diagrama de distribuições ilustrando alguns casos particulares do modelo $G\Gamma$ para dados SAR de amplitude e intensidade.



Fonte: O autor (2022)

Podemos ver que a distribuição normal generalizada (\mathcal{GN}), a distribuição log-normal ($\log\mathcal{N}$), a distribuição *half*-normal (\mathcal{HN}), a distribuição Gama (Γ), a distribuição Weibull (\mathcal{W}), a distribuição Rayleigh, a distribuição Maxwell-Boltzmann e a distribuição Exponencial (\exp), ocorrem sob certas condições para $\nu > 0$. Além disso, assumindo $\nu < 0$, as versões recíprocas desses casos especiais são obtidas.

De acordo com Li et al. (2011), a média e a variância da distribuição $\text{G}\Gamma$ são dados, respectivamente, por

$$\mu := \mathbb{E}(Z) = \frac{\mu_0}{L^{1/\nu}} \frac{\Gamma(L + 1/\nu)}{\Gamma(L)} \text{ e } \mathbb{V}\text{ar}(Z) = \mu \left\{ \frac{\mu_0}{L^{1/\nu}} \frac{\Gamma(L + 2/\nu)}{\Gamma(L + 1/\nu)} - \mu \right\},$$

para $1/\nu > -L$. Assim, a relação entre μ_0 e μ é dada por

$$\mu_0 = \mu L^{1/\nu} \frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L + 1/\nu)}. \quad (3.2)$$

Para propor uma nova regressão e conseqüentemente o modelo ARMA, nós consideramos a seguinte reparametrização de (3.1) inserindo (3.2) na expressão, tendo então

$$f_Z(z; L, \mu, \nu) = \frac{|\nu|}{\Gamma(L)} \left[\frac{\Gamma(L + 1/\nu)}{\mu \Gamma(L)} \right]^{L\nu} z^{L\nu-1} \exp \left\{ - \left[\frac{\Gamma(L + 1/\nu)}{\mu \Gamma(L)} \right]^\nu z^\nu \right\}. \quad (3.3)$$

Denotamos então $Z \sim \text{G}\Gamma(\nu, L, \mu)$. Seja $\{Z_t; t = 1, \dots, n\}$ uma série temporal de tamanho n tal que a distribuição condicional de Z_t dado um conjunto de informações anteriores, \mathcal{F}_{t-1} , segue a distribuição $\text{G}\Gamma$. As funções de densidade e distribuição acumulada de $[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ são respectivamente dadas por

$$f(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; \nu, L, \mu_t) = \frac{|\nu|}{\Gamma(L)} \left[\frac{\Gamma(L + 1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^{L\nu} z_t^{L\nu-1} \exp \left\{ - \left[\frac{\Gamma(L + 1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu z_t^\nu \right\}. \quad (3.4)$$

e, de (QIN et al., 2013),

$$F(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; \nu, L, \mu_t) = \frac{1}{\Gamma(L)} \begin{cases} \gamma \left(L, \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} z_t \right]^\nu \right), & \text{para } \nu > 0, \\ \Gamma \left(L, \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} z_t \right]^\nu \right), & \text{para } \nu < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ é a função gama incompleta inferior e $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ é a função gama incompleta superior. A média e variância condicional associadas são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t$$

e

$$\mathbb{V}\text{ar}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_t^2 \left[\frac{\Gamma(L) \Gamma(L + 2/\nu)}{\Gamma^2(L + 1/\nu)} - 1 \right].$$

Como mostrado em Almeida-Junior e Nascimento (2021) - $V(\mu_t) := \mu_t^2$ é similar à uma função de variância e $\varphi := [\Gamma(L)\Gamma(L+2/\nu)\Gamma^{-2}(L+1/\nu) - 1]$ é o parâmetro de dispersão, que também é o coeficiente de variação quadrático $G\Gamma$ (CVQ) (LI et al., 2011). Podemos ver que à medida em que L aumenta a variância tende a ser menor. Quando o L tende a infinito, a variância tende à zero. A média μ_t tem relação com um preditor linear, η_t , pelas funções de ligação $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. As funções $g(\cdot)$ são estritamente monótonas e duplamente diferenciáveis. É importante frisar que os resultados podem ser diferentes para outras de função de ligação, $g(\cdot)$, em termos de vieses altos e convergência. Entre as funções de ligações mais conhecidas, estão

$$g(x) = \begin{cases} \log(x), \\ \sqrt{x}, \\ \text{Box-Cox}(x, \lambda) := \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}. \end{cases}$$

E foram as funções de ligação que foram usadas no trabalho. A última função é a transformação Box-Cox (BOX; COX, 1964). Assim, a estrutura geral para μ_t tem a forma

$$g(\mu_t) = \eta_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \tau_t,$$

onde $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^k$ é o vetor k -dimensional tendo as covariáveis no tempo t , $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ é um vetor de parâmetros devido à parte linear, τ_t pode ser entendido como um preditor espacial unidimensional

$$\tau_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j},$$

em que $\epsilon_{t-j} = g(z_{t-1}) - \eta_{t-i}$, e $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$ são coeficientes AR e MA, respectivamente. Nas aplicações deste trabalho não foram usadas covariadas no problema, mas a teoria foi feita incluindo as covariadas no modelo. Existem duas categorias de modelos: *innovations-based* e *data-based*. Os modelos de inovação assumem distribuições para o ruído ou para o processo de inovação e os modelos baseados nos dados assumem uma distribuição para os dados e os erros não conduzem o processo estocástico como no modelo ARMA padrão. Os resíduos do modelo ARMA padrão vem da realização de um ruído branco e em modelos baseados na proposta do Benjamin, Rigby e Stasinopoulos (2003), como este trabalho, a realização da série temporal vem de uma distribuição condicional e o erro da diferença $\epsilon_{t-j} = g(z_{t-1}) - \eta_{t-i}$, conforme discutido em Scher et al. (2020, p. 3). Zheng, Xiao e Chen (2015) introduziram uma formulação geral do modelo de Benjamin, Rigby e Stasinopoulos

(2003) em que os erros tenham a diferença de Martingale.

Os resultados da série temporal decorrentes do nosso modelo vêm de uma distribuição condicional, e o respectivo erro de média móvel ϵ_t representa a diferença entre uma quantidade observada, $g(z_t)$, e a quantidade baseada no modelo correspondente, $g(\mu_t)$. Daí, apresentamos um novo modelo de série temporal para descrever vetores de intensidades ou amplitudes de imagens SAR, $Z := I_{\mathcal{L}}$ ou $A_{\mathcal{L}}$.

Nós introduzimos alguns resultados de forma fechada baseados nos momentos que facilitam a obtenção da matriz de Informação de Fisher do modelo $G\Gamma$ -ARMA. Então, seja $Z_t \sim G\Gamma(\nu, L, \mu_t)$, o seguinte teorema fornece expressões para os valores esperados $\mathbb{E}[\log^h(\cdot) | \mathcal{F}_{t-1}]$ e $\mathbb{E}[\log^h(\cdot)(\cdot)^\nu | \mathcal{F}_{t-1}]$.

Teorema 3.1. *Seja Z_t como dado em (3.4), então*

$$\mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} \frac{D_{h-k}(L)}{\nu^{h-k}} \log^k \left(\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right)$$

e

$$\mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right) \left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right)^\nu \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = \left[\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right]^\nu \left\{ \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} \left[\frac{LD_{h-k}(L) + hD_{h-k-1}(L)}{\nu^{h-k}} \right] \log^k \left(\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right) \right\},$$

$$\text{para } \nu > -\frac{1}{L}, \text{ em que } D_h(L) = \begin{cases} D'_{h-1}(L) + \psi^{(0)}(L)D_{h-1}(L), & \text{para } h \in \mathbb{N}^* \\ 1, & \text{se } h = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

em que $D'_h(L) = dD_h(L)/dL$

e $\psi^{(0)}$ é a função poligama de ordem 0, no caso, função digama.

A prova do teorema é dada no Apêndice A.

3.2 MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA CONDICIONAL

Aqui a preocupação é com as estimativas de máxima verossimilhança condicional (EMVCs) para os parâmetros $G\Gamma$ -ARMA. Seja $z_1 \dots, z_n$ uma série temporal observada e $\delta = (L, \nu, \alpha, \beta^\top, \phi^\top, \theta^\top)^\top$ o vetor de parâmetro associado de forma que $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)^\top$ e $\theta =$

$(\theta_1, \dots, \theta_q)^\top$. A função de log-verossimilhança condicional em δ é dada, para $m = \max\{p, q\}$,

por:

$$\begin{aligned} \ell(\delta) &= \sum_{t=m+1}^n \log f_t(z_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left\{ \log \left[\frac{|\nu|}{\Gamma(L)} \right] + L\nu \log \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right] + (L\nu - 1) \log(z_t) \right. \\ &\quad \left. - z_t^\nu \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \right\}. \end{aligned}$$

O vetor escore correspondente é

$$U_\delta = \left(U_L, U_\nu, U_\alpha, U_{\beta^\top}, U_{\phi^\top}, U_{\theta^\top} \right)^\top = \left(\frac{\partial \ell}{\partial L}, \frac{\partial \ell}{\partial \nu}, \frac{\partial \ell}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell}{\partial \beta^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \phi^\top}, \frac{\partial \ell}{\partial \theta^\top} \right),$$

é determinado como segue. Para $\lambda = (\alpha, \beta^\top, \phi^\top, \theta^\top)^\top$, temos

$$\frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \lambda_i} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \mu_t} \frac{d\mu_t}{d\eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\lambda_i},$$

em que $d\mu_t/d\eta_t = 1/g'(\mu_t)$ (MCCULLOCH; SEARLE, 2004)[p. 141],

$$\frac{\partial \ell(\delta)}{\partial \mu_t} = \frac{\nu}{\mu_t} \left\{ z_t^\nu \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu - L \right\},$$

e, os termos que não são repetidos correspondem à componente sistemática

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_t}{\partial \alpha} &= 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \eta_t}{\partial \beta_l} &= x_{tl} - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{(t-i)l} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \beta_l}, \\ \frac{\partial \eta_t}{\partial \phi_i} &= g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-1}^\top \boldsymbol{\beta} - \sum_{j=1}^q \theta_j \frac{\partial \eta_{t-j}}{\partial \phi_i}, \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial \theta_j} = \epsilon_{t-j} - \sum_{i=1}^q \theta_i \frac{\partial \eta_{t-i}}{\partial \theta_j},$$

para $l = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, p$, e $j = 1, \dots, q$. Além disso,

$$\begin{aligned} U_\nu &= \sum_{t=m+1}^n \left\{ \frac{1}{\nu} + L \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} + \log z_t \right] \right. \\ &\quad \left. - z_t^\nu \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \left[\log z_t + \log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_L &= \sum_{t=m+1}^n \left\{ -\psi^{(0)}(L) + \nu \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right) + L \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \log z_t \right] + z_t^\nu \nu \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \left[\psi^{(0)}(L) - \psi^{(0)}(L+1/\nu) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Podemos obter a forma de matriz das derivadas de primeira ordem para os componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ escrevendo $\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{d}^\top \mathbf{T} \mathbf{a}$, $\mathbf{U}_\beta = \mathbf{M}^\top \mathbf{T} \mathbf{a}$, $\mathbf{U}_\phi = \mathbf{P}^\top \mathbf{T} \mathbf{a}$, e $\mathbf{U}_\theta = \mathbf{R}^\top \mathbf{T} \mathbf{a}$, em que $\mathbf{T} = \text{diag}(1/g'(\mu_{m+1}), \dots, 1/g'(\mu_n))$, $\mathbf{d} = (\partial\eta_{m+1}/\partial\alpha, \dots, \partial\eta_n/\partial\alpha)^\top$, $\mathbf{a} = (a_{m+1}, \dots, a_n)^\top$ tais que $a_t = \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\mu_t}$ e \mathbf{M} , \mathbf{P} , e \mathbf{R} são matrizes de dimensões $(n-m) \times k$, $(n-m) \times p$, $(n-m) \times q$, respectivamente, no qual os (i, j) -ésimos elementos são

$$M_{ij} = \frac{\partial\eta_i}{\partial\beta_j}, \quad P_{ij} = \frac{\partial\eta_i}{\partial\phi_j}, \quad \text{e} \quad R_{ij} = \frac{\partial\eta_i}{\partial\theta_j}.$$

O EMVC para $\boldsymbol{\delta}$ é obtido como a solução do sistema de equações $\mathbf{U}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$. A solução deve ser obtida por um método iterativo, dado que não está na forma fechada. Para otimização não linear, métodos iterativos como Newton ou Quasi-Newton podem ser usados. Usamos o método de Nelder-Mead acessível no *software* R, e como ponto inicial do processo iterativo consideramos as estimativas de mínimos quadrados ordinários para $[\alpha, \beta, \phi, \theta]$:

$$[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\theta}] = (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

em que, para $t = m+1, \dots, n$,

$$\mathbf{Z} = \left[\mathbf{1}_{n-m}, \left\{ z_{t,1} \mid \dots \mid z_{t,k} \mid g(x_{t-1}) \mid \dots \mid g(x_{t-p}) \mid r_{t-1} \mid \dots \mid r_{t-q} \right\} \right]$$

e $z_{t,j}$ é a j -ésima coluna de \mathbf{z}_t . Para os valores iniciais dos estimadores de máxima verossimilhança de (L, ν) , usamos as expressões de forma fechada fornecidas em Li et al. (2011). Após algumas manipulações algébricas, a matriz de Informação de Fisher é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\boldsymbol{\delta}) &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\boldsymbol{\delta}} \frac{\partial\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\boldsymbol{\delta}^\top} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2\ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial\boldsymbol{\delta}\partial\boldsymbol{\delta}^\top} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ &= \begin{pmatrix} K_{LL} & K_{L\nu} & K_{L\alpha} & \mathbf{K}_{L\beta} & \mathbf{K}_{L\phi} & \mathbf{K}_{L\theta} \\ K_{\nu L} & K_{\nu\nu} & K_{\nu\alpha} & \mathbf{K}_{\nu\beta} & \mathbf{K}_{\nu\phi} & \mathbf{K}_{\nu\theta} \\ K_{\alpha L} & K_{\alpha\nu} & K_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} & \mathbf{K}_{\alpha\phi} & \mathbf{K}_{\alpha\theta} \\ \mathbf{K}_{\beta L} & \mathbf{K}_{\beta\nu} & \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} & \mathbf{K}_{\beta\phi} & \mathbf{K}_{\beta\theta} \\ \mathbf{K}_{\phi L} & \mathbf{K}_{\phi\nu} & \mathbf{K}_{\phi\alpha} & \mathbf{K}_{\phi\beta} & \mathbf{K}_{\phi\phi} & \mathbf{K}_{\phi\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta L} & \mathbf{K}_{\theta\nu} & \mathbf{K}_{\theta\alpha} & \mathbf{K}_{\theta\beta} & \mathbf{K}_{\theta\phi} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

em que $K_{LL} = -(n-m)c_1$, $K_{L\nu} = K_{\nu L} = -(n-m)c_2$, $K_{L\alpha} = K_{\alpha L} = -c_3 \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_0$, $\mathbf{K}_{L\phi} = \mathbf{K}_{\phi L}^\top = -c_3 \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_1$, $\mathbf{K}_{L\theta} = \mathbf{K}_{\theta L}^\top = -c_3 \mathbf{R}^\top \mathbf{W}_1$, $\mathbf{K}_{L\beta} = \mathbf{K}_{\beta L}^\top = -c_3 \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_1$, $K_{\nu\nu} = -(n-m)c_4 + 2L \mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_2$, $K_{\nu\alpha} = K_{\alpha\nu} = \left(\frac{c_3}{\nu^2} + \frac{1}{\nu} - L \right) \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_0$, $\mathbf{K}_{\nu\phi} = \mathbf{K}_{\phi\nu}^\top = \left(\frac{c_3}{\nu^2} + \frac{1}{\nu} - L \right) \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_1$,

$\mathbf{K}_{\nu\theta} = \mathbf{K}_{\theta\nu}^\top = \left(\frac{c_3}{\nu^2} + \frac{1}{\nu} - L\right) \mathbf{R}^\top \mathbf{W}_1$, $\mathbf{K}_{\nu\beta} = \mathbf{K}_{\beta\nu}^\top = \left(\frac{c_3}{\nu^2} + \frac{1}{\nu} - L\right) \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_1$, $\mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \nu^2 L \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{d}$, $\mathbf{K}_{\alpha\phi} = \mathbf{K}_{\phi\alpha}^\top = \nu^2 L \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{P}$, $\mathbf{K}_{\alpha\theta} = \mathbf{K}_{\theta\alpha}^\top = \nu^2 L \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{R}$, $\mathbf{K}_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{\beta\alpha}^\top = \nu^2 L \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{M}$, $\mathbf{K}_{\phi\phi} = \nu^2 L \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{P}$, $\mathbf{K}_{\phi\theta} = \mathbf{K}_{\theta\phi}^\top = \nu^2 L \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{R}$, $\mathbf{K}_{\phi\beta} = \mathbf{K}_{\beta\phi}^\top = \nu^2 L \mathbf{P}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{M}$, $\mathbf{K}_{\theta\theta} = \nu^2 L \mathbf{R}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{R}$, $\mathbf{K}_{\theta\beta} = \mathbf{K}_{\beta\theta}^\top = \nu^2 L \mathbf{R}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{M}$, $\mathbf{K}_{\beta\beta} = \nu^2 L \mathbf{M}^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{M}$,
 com $\mathbf{W}_0 = \left(\frac{1}{\mu_{m+1}} \frac{1}{g'(\mu_{m+1})}, \dots, \frac{1}{\mu_n} \frac{1}{g'(\mu_n)}\right)^\top$, $\mathbf{W}_1 = \text{diag} \left[\frac{1}{\mu_{m+1}} \frac{1}{g'(\mu_{m+1})}, \dots, \frac{1}{\mu_n} \frac{1}{g'(\mu_n)}\right]$, $\mathbf{W}_2 = \text{diag} \left[\frac{1}{\mu_{m+1}^2} \frac{1}{[g'(\mu_{m+1})]^2}, \dots, \frac{1}{\mu_n^2} \frac{1}{[g'(\mu_n)]^2}\right]$, $\mathbf{A}_1 = (\log(\mu_{m+1}), \dots, \log(\mu_n))^\top$, e
 $\mathbf{A}_2 = \left(\frac{\psi^{(0)}(L)}{\nu} + \log(c) + \log(\mu_{m+1}), \dots, \frac{\psi^{(0)}(L)}{\nu} + \log(c) + \log(\mu_n)\right)^\top$. As constantes c_1, \dots, c_4 são expressadas no Apêndice B.

3.3 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO E RESÍDUOS

A partir desta análise de diagnóstico e resíduos podemos quantificar a qualidade dos ajustes Kedem e Fokianos (2005)[S. 23] dos modelos. Esta etapa é realizada considerando os resíduos. Um dos resíduos mais comumente usados é o resíduo de Pearson, que é definido como para o Γ -ARMA:

$$\hat{r}_t = \frac{Z_t - \hat{\mu}_t}{\sqrt{V(\hat{\mu}_t)}}, \quad \text{para } t = 1, \dots, n,$$

onde $V(\hat{\mu}_t) = \mu_t^2$ é a função de variância para a distribuição Γ . De acordo com Kedem e Fokianos (2005)[p. 26], $\{r_t; t = 1, \dots, n\}$ é um processo de diferença de Martingale tal que

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \mathbb{E}[r_t] = 0, \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[r_t^2] = \varphi = \left[\frac{\Gamma(L) \Gamma(L + 2/\nu)}{\Gamma^2(L + 1/\nu)} - 1 \right].$$

A função de autocorrelação no lag l da sequência $\{r_t\}$ é dada por

$$\rho(l) = \frac{1}{n} \left[\frac{\Gamma(L) \Gamma(L + 2/\nu)}{\Gamma^2(L + 1/\nu)} - 1 \right]^{-1} \sum_{t=l+1}^n r_t r_{t-l}.$$

Pelas propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança condicional, temos

$$\hat{\rho}(l) = \frac{1}{n} \left[\frac{\Gamma(\hat{L}) \Gamma(\hat{L} + 2/\hat{\nu})}{\Gamma^2(\hat{L} + 1/\hat{\nu})} - 1 \right]^{-1} \sum_{t=l+1}^n \hat{r}_t \hat{r}_{t-l},$$

em que

$$\left[\frac{\Gamma(\hat{L}) \Gamma(\hat{L} + 2/\hat{\nu})}{\Gamma^2(\hat{L} + 1/\hat{\nu})} - 1 \right] = \left(\frac{1}{N - (p + q + k + 1)} \sum_{t=1}^n \hat{r}_t^2 \right). \quad (3.7)$$

De Merkle (2005) e Li et al. (2011) o termo $\Gamma(L) \Gamma(L + 2/\nu) \Gamma^{-2}(L + 1/\nu)$ é conhecido como razão de Gurland e pode ser aproximada por $1 + (L\nu^2)^{-1}$. Assim,

$$\hat{L} \approx \left(\frac{\hat{\nu}^2}{N - (p + q + k + 1)} \sum_{t=1}^n \hat{r}_t^2 \right)^{-1},$$

é um estimador consistente para L . A última expressão é muito importante e abre um ramo para que possamos estimar o *number of looks* (NL), um dos fatores que controlam o efeito *speckle* em imagens SAR.

3.4 PREVISÃO E QUALIDADE DE AJUSTE

A equação de predição do modelo $G\Gamma$ -ARMA estende a dos modelos ARMA gaussianos como

$$\begin{aligned}\mu_t &= g^{-1}(\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= g^{-1}\left(\delta + \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{t-i}) - \mathbf{x}_{t-i}^\top \boldsymbol{\beta}] + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j}\right).\end{aligned}$$

Assim, considerando a predição num horizonte $h = 1, 2, \dots, h_0$, a equação de predição do modelo $G\Gamma$ -ARMA, μ_{n+h} , é dada por

$$\mu_{n+h} = g^{-1}\left(\delta + \mathbf{x}_{n+h}^\top \boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{n+h-j} + \sum_{i=1}^p \phi_i [g(z_{n+h-i}) - \mathbf{x}_{n+h-i}^\top \boldsymbol{\beta}]\right),$$

em que $g(z_{n+h-j})$ é substituído por $g(\mu_{n+h-j})$ para $j < h$ e

$$\epsilon_{n+h-j} = \begin{cases} g(z_{n+h-j}) - \eta_{n+h-j}, & \text{se } h \leq j < (n-1), \\ g(\mu_{n+h-j}) - \eta_{n+h-j} = 0, & \text{se } j < h. \end{cases}$$

Nas últimas décadas, muitas medidas de precisão foram propostas para avaliar o desempenho de métodos de previsão (Chen, Twycross e Garibaldi (2017)). A medida dependente de escala mais comumente usada é o erro quadrático médio (MSE) e a raiz do erro quadrático médio (RMSE). Para destacar diferentes detalhes, outras medidas não dependentes de escala também foram consideradas, como o erro percentual absoluto médio simétrico (sMAPE), erro absoluto médio escalado (MASE) e o erro absoluto relativo limitado médio não escalonado (UMBRAE). A seguir, as medidas acima são definidas:

$$\begin{aligned}\text{RMSE} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2}, & \text{sMAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|z_t|}, \\ \text{MASE} &= \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |e_t|}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |e_t^*|} \right) & \text{e } \text{UMBRAE} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|e_t| + |e_t^*|}}{1 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{|e_t| + |e_t^*|}},\end{aligned}$$

onde $e_t = z_t - \widehat{z}_t$ e $e_t^* = z_t - z_{t-1}$. Nesta dissertação, usamos essas quatro medidas como métricas de desempenho para avaliar o efeito de diferentes funções de ligamento no ajuste dos modelos considerados.

4 RESULTADOS

4.1 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Este estudo tem como objetivo quantificar o desempenho dos EMVCs para os parâmetros Γ -ARMA. Para este fim, três funções de ligação são consideradas: (i) $\log(\cdot)$, (ii) $\sqrt{\cdot}$, e (iii) $\text{Box-Cox}(\cdot, 1/2)$. Os seguintes modelos particulares são usados:

- Γ -AR(1): $\delta = (L, \nu, \alpha, \phi): g(\mu_t) = \alpha + \phi g(y_{t-1})$,
- Γ -MA(1): $\delta = (L, \nu, \alpha, \theta): g(\mu_t) = \alpha + \theta[g(y_{t-1}) - g(\mu_{t-1})]$,
- Γ -ARMA(1,1): $\delta = (L, \nu, \alpha, \phi, \theta): g(\mu_t) = \delta + \phi g(y_{t-1}) + \theta[g(y_{t-1}) - g(\mu_{t-1})]$,

em que $\phi, \theta \in \{-0.8, -0.5, 0.5, 0.8\}$, $L \in \{4, 8\}$, $\nu = \{-0.5, 0.5\}$ e tamanho da série $n = 49, 121, 529$. Os janelamentos quadrados utilizados na simulação são propositais, a ideia é ser semelhante aos janelamentos utilizados no trabalho para a criação dos mapas de calor na próxima seção. Porém, podem ser quaisquer valores usados para simulação, desde que carregue a forma de aumento do tamanho da amostra. Os valores para L utilizados foram idealmente também para representar imagens SAR que foram obtidas com o número de *looks* iguais a 4 ou 8, por exemplo. Apesar de nós termos utilizados imagens com número de *looks* 3 e 4 no trabalho, existe também com 8 *looks*. Em todos os casos de simulação, usamos mil réplicas de Monte Carlo. A ocorrência frequente de outliers nos cenários da simulação nos levou a escolher as medidas mais robustas como a mediana e a raiz do erro médio quadrático relativo (RMSRE) para quantificar o desempenho das estimativas de máxima verossimilhança. As ocorrências de *outliers* foram mais recorrentes para o parâmetro L do que em relação aos outros parâmetros. As estimativas do modelo usando a função de ligação $\log(\cdot)$ tiveram a maior presença de *outliers* e as estimativas dos modelos utilizando a função de ligação $\sqrt{\cdot}$ tiveram a menor presença de *outliers*. Despotovic et al. (2016) adota o RMSRE como um dos indicadores estatísticos para avaliar diferentes modelos difusos de radiação solar e a medida RMSRE é definida como

$$RMSRE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \left(\frac{e_t}{\hat{z}_t} \right)^2}.$$

As tabelas 2 - 7 mostram os valores medianos e RMSRE para as EMVC nos modelos Γ -AR(1), Γ -MA(1) e Γ -ARMA(1,1). A presença de *outliers* pode interferir em cenários com tamanho de amostra médio, mas no geral, os valores RMSRE diminuem com o aumento do

tamanho da amostra. O viés em relação à mediana é pequeno na maioria dos casos, mesmo para pequenas amostras. As estimativas para o parâmetro L são atualmente caracterizadas por um viés alto nas estimativas, mas tanto o viés quanto o valor RMSRE diminuem com o aumento do tamanho da amostra, como esperado. A função de ligação log para cenários onde $\nu = -0,5$ era geralmente aquele com maior viés para o parâmetro L , para $L = 4$ e $L = 8$. Para $\nu = -0,5$ e para $\nu = 0,5$ a função de ligação log geralmente era a que apresentava o maior viés para o parâmetro L apenas nos cenários em que $L = 4$. No geral, a função de ligação $\log(\cdot)$ foi a que pior performou com relação ao viés e também a medida de variabilidade usada, RMSRE. À medida que o tamanho da amostra aumenta, as variações entre as funções de ligação não são tão diferentes. Também podemos notar pelas tabelas que, em geral, comparando o $\text{RMSRE}(\hat{L})$ aos dois cenários de $L = 4$ e $L = 8$ e as amostras pequenas (tamanho do janelamento pequeno) temos que o valor do RMSRE para $L = 4$ é maior que os valores para $L = 8$. Logo, vemos que quanto maior o número de *looks* temos estimativas mais precisas, que se dá ao fato de que quanto maior o número de *looks* maior é a resolução da imagem como consequência prática do fenômeno, como também é evidenciado na teoria em que a variância do modelo diminui. Logo, com esse comportamento gera-se uma imagem mais limpa, resultado em estatísticas menos problemáticas. No geral, a função de ligação $\sqrt{\mu}$ foi a que performou melhor em questão de viés para os modelos utilizados.

Tabela 2 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo AR(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = 0.5$.

$g(\mu)$	Medidas	n	L = 4				L = 8			
			ϕ				ϕ			
			-0.8	-0.5	0.5	0.8	-0.8	-0.5	0.5	0.8
log(μ)	Mediana(\hat{L})	49	3.5855	3.6582	3.9653	3.9266	8.1705	8.0175	7.488	8.1317
		121	4.2307	3.7885	4.1177	4.0731	7.9956	8.0249	8.2103	7.9755
		529	3.9359	3.9008	3.8998	3.9384	7.9876	8.0068	7.9698	8
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.5559	0.5243	0.5219	0.5353	0.4956	0.4988	0.5413	0.503
		121	0.4883	0.5213	0.4955	0.4944	0.509	0.5006	0.4955	0.521
		529	0.5041	0.5049	0.5045	0.5032	0.5039	0.5027	0.5027	0.4999
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.948	4.9854	5.0378	5.0545	4.9725	4.9803	5.0007	4.9988
		121	4.977	4.9969	5.0437	5.0402	4.9819	5.0027	5.0297	5.029
		529	4.9959	4.9976	5.0118	5.0146	4.9921	5.0027	5.02	5.0512
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.7932	-0.4974	0.4968	0.7991	-0.7956	-0.4916	0.4987	0.7991
		121	-0.7962	-0.5011	0.4943	0.798	-0.7972	-0.5021	0.4977	0.798
		529	-0.7998	-0.5005	0.4987	0.7975	-0.798	-0.4983	0.4977	0.7977
	RMSRE(\hat{L})	49	5.3628	5.3459	4.472	3.6199	3.6826	3.456	2.6523	2.2838
		121	3.5574	3.1889	2.7185	2.3165	2.8163	2.8353	2.1289	1.7083
		529	0.8255	0.8168	0.6543	0.671	1.0457	1.015	0.981	0.7722
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	7.3761	6.3211	1.9594	3.7088	6.5641	3.346	4.3474	2.3924
		121	0.679	0.6549	0.5048	0.4825	0.706	0.7516	0.699	0.599
		529	0.3959	0.3783	0.2317	0.2292	0.3311	0.2903	0.295	0.2684
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.101	0.6643	0.1331	0.1512	0.0538	0.0674	0.1001	0.086	
	121	0.0392	0.0472	0.1022	0.1019	0.0307	0.048	0.0898	0.0786	
	529	0.0306	0.0406	0.0601	0.0823	0.0161	0.0228	0.061	0.0673	
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	0.1952	5.6608	0.3304	1.0356	0.4561	0.5421	0.2894	0.0765	
	121	0.1098	0.1878	0.1176	0.0289	0.1273	0.2678	0.3578	0.0436	
	529	0.0838	0.1734	0.0663	0.0229	0.0597	0.0698	0.0641	0.0178	
$\sqrt{\mu}$	Mediana(\hat{L})	49	4.0712	3.6521	3.6854	4.0264	7.9972	7.2053	8.1768	8.1217
		121	4.0908	3.6872	4.0559	3.88	7.9076	7.9443	8.1499	7.9874
		529	3.9958	4.1345	4.0136	4.0492	8.0367	7.9438	7.9595	7.9896
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.5064	0.5395	0.5508	0.5129	0.5186	0.5469	0.5046	0.4935
		121	0.5028	0.534	0.504	0.5156	0.5151	0.5196	0.5184	0.5076
		529	0.4981	0.4943	0.494	0.4962	0.4999	0.5076	0.4999	0.5002
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9586	4.9812	5.1841	5.2553	4.9989	4.9473	5.1923	5.4178
		121	4.9916	4.9858	5.0766	5.2374	4.9783	4.9847	5.1347	5.1762
		529	4.9911	5.0021	5.0253	5.0611	5.0001	5.0017	5.0256	5.0442
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.7946	-0.5036	0.4668	0.7758	-0.7983	-0.4896	0.4659	0.7679
		121	-0.7988	-0.4998	0.4821	0.7766	-0.7954	0.4985	0.4807	0.7816
		529	-0.7986	-0.5008	0.4964	0.7948	-0.8006	-0.5002	0.4961	0.7963
	RMSRE(\hat{L})	49	5.4696	5.1278	4.8205	4.278	3.7083	3.3512	3.569	2.7967
		121	3.8299	3.1049	3.1208	3.0853	2.9995	2.7801	2.612	2.3233
		529	0.6783	0.7805	0.7023	0.6584	1.0575	1.0289	0.9136	0.7704
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	5.8868	4.7664	6.5401	5.0852	6.0645	4.8055	1.4932	5.7201
		121	0.6311	0.6619	0.6911	0.6064	0.722	0.6901	0.642	0.7442
		529	0.1131	0.244	0.2526	0.2289	0.3037	0.3169	0.289	0.2809
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.8297	0.1064	0.6206	0.3448	0.0656	0.0984	0.2388	0.3657	
	121	0.0474	0.0632	0.2438	0.2126	0.0365	0.0561	0.1584	0.3043	
	529	0.0473	0.0241	0.0757	0.1005	0.0168	0.0228	0.078	0.1064	
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	15.683	0.9393	0.6903	0.3868	0.3303	0.7403	0.3544	0.2206	
	121	0.1606	0.5196	0.4641	0.1402	0.1617	0.2373	0.1954	0.1785	
	529	0.0446	0.034	0.1009	0.0586	0.0175	0.0504	0.0926	0.0462	
Cox($\mu, 1/2$)	Mediana(\hat{L})	49	4.0198	3.918	3.8554	3.7194	8.0461	7.9761	8.7639	8.0527
		121	4.2998	3.8878	3.7585	3.8706	7.9974	7.4148	8.7752	8.0086
		529	3.9829	4.0271	3.9716	3.8902	7.9992	8.0759	7.807	7.9371
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.5093	0.5295	0.5321	0.5179	0.4986	0.5186	0.4937	0.5047
		121	0.4943	0.514	0.5243	0.5249	0.5068	0.5264	0.4807	0.4986
		529	0.5016	0.4976	0.5025	0.5092	0.4998	0.4964	0.506	0.5058
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9115	4.9789	5.0796	5.3189	4.9217	4.9413	5.257	5.4199
		121	5.0032	4.9751	5.0819	5.1705	4.9872	4.9935	5.0967	5.2091
		529	4.9947	4.9919	5.0199	5.0292	5.0068	4.9989	5.0148	5.0423
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.7912	-0.5059	0.4659	0.7637	-0.7896	-0.5021	0.4624	0.7645
		121	-0.8011	-0.5007	0.4786	0.7748	-0.7992	-0.5016	0.4883	0.7838
		529	-0.7996	-0.4995	0.4962	0.7957	-0.8007	-0.4998	0.4981	0.7971
	RMSRE(\hat{L})	49	5.7996	5.4495	5.2432	4.0895	3.9187	3.6849	3.6609	3.0528
		121	3.3043	3.4486	3.579	2.7085	2.9312	2.9789	2.8336	2.5354
		529	0.7058	0.6929	0.7441	0.6502	1.2304	1.1324	0.9786	0.8828
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	4.1321	6.2301	6.3267	7.6556	4.4339	1.8844	4.8344	1.4095
		121	0.5805	1.8244	0.7446	0.7844	0.707	0.7186	0.6339	0.6872
		529	0.2541	1.0299	0.3106	0.3032	0.3318	0.3056	0.2908	0.281
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.1931	4.1064	0.6099	0.7737	0.0844	0.1346	0.2362	0.3262	
	121	0.0654	0.4501	0.1513	0.3666	0.049	0.0613	0.1486	0.2097	
	529	0.0324	0.1258	0.0775	0.1	0.0234	0.0274	0.0714	0.1085	
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	0.416	14.4463	2.7693	12.2614	0.0979	0.4248	0.462	0.3396	
	121	0.0505	1.5836	0.2574	0.2626	0.0875	0.1845	0.1988	0.1276	
	529	0.0235	0.2905	0.1015	0.0641	0.0174	0.0487	0.0871	0.0474	

Fonte: O autor (2022)

Tabela 3 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo MA(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = 0.5$.

$g(\mu)$	Medidas	n	L = 4				L = 8			
			θ				θ			
			-0.8	-0.5	0.5	0.8	-0.8	-0.5	0.5	0.8
log(μ)	Mediana(\hat{L})	49	5.3536	4.2361	3.6896	3.7876	11.8686	9.3979	8.1803	6.9961
		121	4.625	4.1552	3.9256	4.1808	10.8706	9.1089	7.9402	7.384
		529	4.1433	4.0411	4.0131	3.9866	8.3034	7.9462	7.9996	8.0067
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.4452	0.501	0.5134	0.497	0.3891	0.4664	0.5407	0.5424
		121	0.4678	0.4921	0.527	0.5151	0.4033	0.4585	0.4958	0.5166
		529	0.4904	0.4998	0.5031	0.4992	0.4579	0.502	0.4945	0.4952
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	5.0216	4.999	4.9314	4.897	5.03	5.0028	4.9607	4.9473
		121	5.0087	4.9985	4.9776	4.9664	5.0137	5.0012	4.9845	4.9648
		529	5.0028	4.9973	4.9944	4.9927	5.0036	5.0008	4.9953	4.9928
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.7819	-0.5181	0.4827	0.7512	-0.7499	-0.5292	0.4736	0.716
		121	-0.7921	-0.5054	0.4915	0.7755	-0.7719	-0.5103	0.4891	0.7649
		529	-0.7968	-0.5038	0.4976	0.7947	-0.793	-0.5006	0.4987	0.7888
	RMSRE(\hat{L})	49	6.7832	5.4471	5.0847	5.3253	4.8222	3.6425	2.9109	3.2296
		121	4.9564	3.2818	2.9278	3.4024	4.4796	2.9485	2.3491	2.6241
		529	0.9568	0.689	0.8542	0.8948	2.2659	1.0195	0.7023	1.0236
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.7683	5.8093	4.4046	7.7336	1.4925	4.3974	5.9222	5.3136
		121	0.5647	0.8729	0.6565	0.6579	0.6423	0.6533	1.0031	1.0074
		529	0.3347	0.2888	0.3579	0.3417	0.3112	0.3316	0.3079	0.2995
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	44.9724	0.0274	0.1856	0.081	0.0189	0.1603	0.0387	0.0498	
	121	1.9968	0.0187	0.032	0.0379	0.0088	0.0103	0.0285	0.033	
	529	0.0046	0.0058	0.0151	0.0244	0.0027	0.0092	0.0165	0.0123	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	85.2531	0.3887	0.3818	0.2447	0.2472	1.0302	0.3392	0.2803	
	121	3.3282	0.1794	0.192	0.1329	0.1205	0.1783	0.2347	0.1281	
	529	0.0378	0.073	0.0806	0.047	0.0443	0.0838	0.085	0.0422	
$\sqrt{\mu}$	Mediana(\hat{L})	49	4.7742	4.052	4.5699	4.5891	7.9178	8.0125	7.9007	7.9371
		121	3.8806	3.9188	3.8965	3.9281	8.0356	7.9792	7.9654	8.1055
		529	4.1345	4.0472	4.0084	3.987	8.0064	8.0273	7.984	7.9962
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.4688	0.5016	0.4754	0.4765	0.569	0.5212	0.5327	0.5363
		121	0.5113	0.5143	0.5146	0.511	0.4993	0.5057	0.5082	0.4944
		529	0.4928	0.4982	0.5034	0.5008	0.4988	0.4989	0.5026	0.4998
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9926	4.9785	4.9194	4.9064	4.9961	4.9966	4.973	4.9357
		121	4.9999	4.995	4.9781	4.9747	4.9987	4.9988	4.9815	4.9666
		529	4.9996	5.004	4.9947	4.9943	4.9997	5.0009	4.9965	4.9877
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.8111	-0.5339	0.5141	0.8064	-0.8349	-0.535	0.5027	0.8066
		121	-0.8	-0.5082	0.5039	0.8029	-0.8053	-0.511	0.499	0.8016
		529	-0.7997	-0.5019	0.4996	0.8001	-0.8001	-0.5027	0.5011	0.8004
	RMSRE(\hat{L})	49	5.3902	5.6074	5.3799	5.4251	2.9806	3.2292	3.4686	3.3068
		121	2.6441	3.1664	2.9672	3.2639	2.3429	2.4952	2.8673	2.7161
		529	0.5859	0.7174	0.7634	0.627	0.8818	0.7789	1.0124	0.8701
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	5.6944	4.0853	6.1995	4.2761	2.2368	1.8254	6.6598	8.3774
		121	0.5619	0.806	0.73	0.9761	0.7117	0.9562	0.8207	0.7153
		529	0.216	0.385	0.3181	0.2336	0.2995	0.4437	0.2922	0.297
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.5478	0.0457	0.3784	2.1208	34.7831	0.036	0.0799	0.1053	
	121	0.034	0.0265	0.1172	0.9265	0.0094	0.0192	0.0573	0.0971	
	529	0.002	0.0167	0.0348	0.0347	0.0026	0.0148	0.0243	0.0273	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	2.2674	0.3023	1.1479	56.4156	118.0938	0.4402	1.196	0.1587	
	121	1.2326	0.2068	0.3443	0.6969	0.091	0.1824	0.2092	0.103	
	529	0.0156	0.0615	0.0872	0.0181	0.0228	0.0703	0.0745	0.0245	
Cox($\mu, 1/2$)	Mediana(\hat{L})	49	4.1869	4.4372	3.4976	3.8844	8.024	8.0045	8.1189	7.9238
		121	4.1319	3.8198	3.9661	4.0556	7.8799	8.0162	7.9832	8.0593
		529	4.063	4.0424	4.0201	4.025	8.0232	8.0069	8.0212	7.987
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.4957	0.495	0.559	0.5332	0.5295	0.528	0.5193	0.5121
		121	0.4998	0.5185	0.4989	0.505	0.5178	0.4997	0.5026	0.4883
		529	0.4953	0.4992	0.4979	0.499	0.4978	0.4971	0.498	0.5045
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9846	4.9771	4.9209	4.8745	4.9974	4.9914	4.985	4.9138
		121	4.9951	4.9967	4.9864	4.9396	4.9989	4.9968	4.9686	4.9267
		529	5.0001	4.9982	5.017	5.0021	5.0006	4.9986	4.9927	5.0002
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.8108	-0.5248	0.4983	0.7978	-0.8261	-0.5385	0.5062	0.7997
		121	-0.8011	-0.5061	0.5009	0.8005	-0.8061	-0.5115	0.503	0.7981
		529	-0.8	-0.501	0.5013	0.8006	-0.8009	-0.5032	0.4994	0.7991
	RMSRE(\hat{L})	49	5.6339	5.3702	5.4998	5.774	3.4672	3.5688	3.3511	3.5527
		121	3.0694	3.2658	3.6142	3.5886	2.1078	2.7932	3.1056	2.9341
		529	0.6204	0.7289	0.9377	0.8194	0.7552	1.0873	1.0156	1.1409
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	8.7042	8.1601	8.3246	6.5919	6.4898	3.0535	3.9695	4.4775
		121	0.7985	0.7214	0.6807	0.5825	0.7674	1.0619	0.8244	0.7729
		529	0.2097	0.231	0.2939	0.2224	0.2922	0.3994	0.3487	0.387
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	4.6941	1.6169	0.2777	0.1749	5.2727	0.0545	0.1134	0.1201	
	121	0.0208	0.0426	0.1608	0.0533	0.0128	0.0287	0.0727	0.0775	
	529	0.0042	0.0153	0.1022	0.0451	0.0046	0.0122	0.0351	0.0589	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	1.1244	92.0042	0.3687	0.2037	171.4315	0.3717	0.3225	0.137	
	121	0.0757	0.167	0.1701	0.162	0.0703	0.1807	0.1818	0.093	
	529	0.0183	0.0478	0.0762	0.017	0.0226	0.0704	0.0783	0.0641	

Tabela 4 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo ARMA(1,1) com $\alpha = 5$ e $\nu = 0.5$.

$g(\mu)$	Medidas	n	L = 4				L = 8			
			$\phi = \theta$				$\phi = \theta$			
			-0.8	-0.5	0.5	0.8	-0.8	-0.5	0.5	0.8
log(μ)	Mediana(\hat{L})	49	4.7069	3.5509	3.5192	4.0257	11.2237	7.6964	10.8343	9.4779
		121	4.547	3.8256	3.7588	3.9437	9.0594	8.234	8.0045	8.8381
		529	4.1578	4.0327	3.9715	4.025	8.7242	7.9938	8.002	8.7307
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.5037	0.5673	0.5486	0.5183	0.419	0.5917	0.4486	0.4716
		121	0.4689	0.5171	0.5166	0.499	0.4662	0.4914	0.4953	0.4671
		529	0.4891	0.4982	0.501	0.496	0.4729	0.5006	0.5002	0.4769
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	5.1356	5.1128	4.6307	4.3122	5.2043	5.2116	4.5213	4.2643
		121	5.0521	5.0514	4.7561	4.4148	5.0952	5.16	4.6218	4.2922
		529	5.0178	5.0179	4.9444	4.7735	5.0305	5.0447	4.8483	4.5349
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.8418	-0.5375	0.5384	0.8313	-0.8605	-0.562	0.5524	0.8333
		121	-0.8156	-0.5176	0.5262	0.8276	-0.8299	-0.548	0.5405	0.8307
		529	-0.8052	-0.5059	0.5055	0.8108	-0.8091	-0.5137	0.5165	0.8202
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.7923	-0.5171	0.4734	0.7768	-0.742	-0.4888	0.4663	0.7651
		121	-0.7944	-0.5026	0.4871	0.7857	-0.7719	-0.485	0.4684	0.7743
		529	-0.7969	-0.4961	0.495	0.7932	-0.79	-0.4936	0.489	0.7893
	RMSRE(\hat{L})	49	6.5204	5.3291	5.6183	4.6569	4.7863	3.7377	3.3162	2.8663
		121	4.6816	3.2054	2.3958	2.1733	4.4069	2.8392	2.2116	2.0864
		529	1.2908	0.5603	0.6517	0.5823	2.1599	1.0307	0.7325	0.7694
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	10.8266	16.6025	8.0691	3.6789	8.2112	8.1217	5.9245	2.3248
		121	0.5745	0.6797	0.6714	0.5342	0.6661	0.6692	0.8117	0.5688
		529	0.2339	0.2499	0.3089	0.2115	0.3124	0.2909	0.3341	0.2491
	RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.0569	0.1016	0.1693	0.2252	0.0668	0.0861	0.1557	0.1994
		121	0.0342	0.0625	0.1286	0.1619	0.0346	0.0641	0.1298	0.1771
		529	0.016	0.0318	0.0762	0.0925	0.0157	0.0316	0.0828	0.122
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	0.1213	0.3101	0.3966	0.109	0.2111	0.4311	0.1919	1.2524	
	121	0.0689	0.1879	0.182	0.0979	0.081	0.1988	0.1855	0.0654	
	529	0.0358	0.1013	0.1209	0.0275	0.0332	0.0917	0.1509	0.0334	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	0.269	0.4733	0.3593	0.2469	0.349	0.4545	0.3535	0.2751	
	121	0.1061	0.2102	0.1979	0.1018	0.1232	0.2148	0.1955	0.1138	
	529	0.0372	0.0931	0.0892	0.0356	0.0442	0.0945	0.1153	0.0413	
$\sqrt{\mu}$	Mediana(\hat{L})	49	3.988	3.4083	3.7598	3.5549	7.9489	7.991	6.7769	7.82
		121	3.9269	3.9902	3.8787	4.1288	8.0001	8.2079	8.2239	8.0016
		529	3.9737	3.9369	4.0036	3.975	8.0153	7.9727	7.9741	8.0121
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.5291	0.5634	0.5363	0.4982	0.5323	0.5381	0.5666	0.5529
		121	0.5115	0.5062	0.5143	0.539	0.5027	0.4931	0.513	0.5116
		529	0.5071	0.5057	0.5026	0.5036	0.4982	0.5031	0.497	0.4986
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9879	4.98	4.9071	4.8937	5.015	4.9792	5.0305	4.9137
		121	4.989	5.0046	4.9693	4.9779	4.9985	5.0057	4.9716	4.9401
		529	4.9934	5.0012	5.0254	4.9954	4.994	5.0047	4.9941	4.9853
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.7951	-0.4914	0.496	0.8093	-0.8013	-0.4902	0.4946	0.7979
		121	-0.7943	-0.5	0.4944	0.7968	-0.7993	-0.5018	0.4969	0.808
		529	-0.798	-0.501	0.4977	0.8008	-0.7981	-0.5006	0.4982	0.7988
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.7999	-0.5096	0.5054	0.8011	-0.795	-0.5159	0.5127	0.7993
		121	-0.8002	-0.5023	0.5038	0.7999	-0.7987	-0.5001	0.5015	0.8005
		529	-0.8001	-0.4997	0.5017	0.8001	-0.8	-0.4999	0.5015	0.8001
	RMSRE(\hat{L})	49	5.9229	5.4587	5.7568	5.7034	3.795	3.7462	3.5593	3.486
		121	3.2076	3.4817	3.148	2.4453	2.7629	2.8125	2.5205	2.5612
		529	0.7441	0.6287	0.5661	0.6299	1.6642	0.9213	0.8693	0.9726
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	7.5837	7.8557	13.615	4.3659	6.78	4.9728	7.3926	6.1674
		121	0.581	0.6246	0.7376	0.6584	0.7281	0.6505	0.9576	0.7503
		529	0.2384	0.2618	0.2241	0.1822	0.3057	0.2944	0.437	0.282
	RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	1.2911	0.1488	0.9381	0.1785	0.0967	1.5949	0.629	0.2137
		121	0.9644	0.0631	0.1629	0.0854	0.0422	0.0555	0.2701	0.1202
		529	0.0256	0.0251	0.0712	0.0612	0.0169	0.0975	0.0893	0.044
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	2.5343	0.5649	10.5682	0.2831	0.326	14.2463	2.7269	0.2155	
	121	0.8013	0.2299	0.2936	0.1298	0.091	0.2357	0.4882	0.1014	
	529	0.0633	0.1852	0.118	0.1232	0.0341	0.1424	0.2264	0.0407	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	2.7898	2.4682	90.0867	0.107	0.1357	89.6202	1.147	0.0975	
	121	0.1319	0.1346	0.1537	0.0282	0.0399	0.1534	0.4206	0.0365	
	529	0.0098	0.0404	0.0552	0.0074	0.0077	0.1	0.1232	0.0104	
Cox($\mu, 1/2$)	Mediana(\hat{L})	49	3.9256	3.664	3.7476	3.9422	8.0246	7.9892	8.3036	6.7654
		121	3.8427	3.8723	3.9287	3.9695	8.1628	7.9892	8.1929	7.8722
		529	3.9993	3.9686	3.9666	3.9518	8.0264	7.9635	8.0142	8.0681
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	0.5222	0.5492	0.5441	0.5453	0.4991	0.5212	0.5304	0.5686
		121	0.5168	0.5115	0.5228	0.507	0.4823	0.5136	0.4993	0.5015
		529	0.5	0.5111	0.5055	0.505	0.4988	0.504	0.4923	0.5034
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	5.0037	4.9574	4.9761	4.8554	4.983	4.9914	5.014	4.8118
		121	4.9851	4.989	4.933	4.9034	5.017	5.0282	4.9783	4.952
		529	4.9983	4.9947	4.9818	4.9917	5.0049	4.9992	5.0141	4.9868
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.8001	-0.497	0.5015	0.8017	-0.7889	-0.4962	0.486	0.7997
		121	-0.7941	-0.4973	0.4913	0.7948	-0.8032	-0.5052	0.4939	0.8015
		529	-0.7993	-0.4985	0.5034	0.7987	-0.8013	-0.5003	0.4978	0.8016
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.7964	-0.5088	0.5141	0.8012	-0.7964	-0.5125	0.508	0.8007
		121	-0.7997	-0.4998	0.5059	0.7995	-0.7986	-0.4979	0.5052	0.7998
		529	-0.7999	-0.5	0.4978	0.7998	-0.7998	-0.5001	0.502	0.7996
	RMSRE(\hat{L})	49	6.1945	5.3221	6.1094	5.9236	4.0975	3.999	3.7872	3.8823
		121	3.2539	3.3091	3.7395	3.3586	3.3203	2.9739	3.0125	2.8556
		529	0.6837	0.6539	0.646	0.6337	1.7691	1.1284	0.7781	0.9072
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.7687	9.3642	12.468	9.1559	4.462	9.5606	8.1582	8.657
		121	0.5364	0.6534	0.685	0.9587	0.671	0.8071	0.7513	0.7035
		529	0.2338	0.2403	0.2736	0.2919	0.3556	0.3402	0.3291	0.2944
	RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.8409	0.162	0.2616	2.1241	4.7258	0.139	0.2797	0.215
		121	0.6628	0.0819	0.2533	0.6068	0.0434	0.0648	0.1595	0.1238
		529	0.0257	0.0297	0.2397	0.1119	0.0187	0.0235	0.0855	0.044
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	1.1979	0.4175	0.5141	16.8646	31.7836	1.1852	0.4578	0.264	
	121	0.4491	0.3095	0.2918	0.7767	0.0833	0.1939	0.242	0.1085	
	529	0.0474	0.0532	0.2316	0.1459	0.0351	0.1165	0.1132	0.043	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	1.9126	0.5388	0.3582	98.491	191.095	1.1311	0.3928	0.275	
	121	0.8415	0.2095	0.2407	0.7689	0.0471	0.1661	0.164	0.0352	
	529	0.0086	0.0321	0.1961	0.0786	0.0085	0.044	0.0716	0.011	

Tabela 5 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo AR(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = -0.5$.

$g(\mu)$	Medidas	n	L = 4				L = 8			
			ϕ				ϕ			
			-0.8	-0.5	0.5	0.8	-0.8	-0.5	0.5	0.8
μ	Mediana(\hat{L})	49	3.3516	3.8096	3.8116	4.3159	8.0131	7.9991	6.9532	7.9942
		121	3.8782	3.6349	4.044	3.8248	7.9156	8.5048	7.9864	7.9857
		529	3.9565	4.0183	3.8938	3.9226	8.0787	7.9907	7.9926	7.969
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.5433	-0.5266	-0.5237	-0.4875	0.5144	-0.5128	-0.5615	-0.5336
		121	-0.5165	-0.5371	-0.5069	-0.5154	-0.512	-0.4874	-0.5136	-0.5145
		529	-0.5037	-0.4993	-0.5056	-0.5064	-0.4978	-0.4991	-0.5023	-0.5036
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	5.0009	5.0225	5.268	5.2176	4.978	4.9932	5.1326	5.1074
		121	4.9918	5.0256	5.1208	5.1792	4.9908	5.0029	5.0805	5.0387
		529	5.0021	4.9996	5.0337	5.0627	4.9952	4.9998	5.004	5.0211
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.7866	-0.4994	0.4791	0.7916	-0.7909	-0.4961	0.4865	0.796
		121	-0.7966	-0.502	0.4897	0.7921	-0.7978	-0.5006	0.4915	0.7984
		529	-0.7988	-0.4992	0.4981	0.798	0.7989	-0.4992	0.499	0.7991
$\log(\mu)$	RMSRE(\hat{L})	49	4.7515	4.674	4.503	3.5055	3.8008	3.4445	2.8267	2.2151
		121	3.2115	3.0425	2.2594	2.027	2.7157	2.8452	2.0136	1.6731
		529	0.6102	0.5369	0.5054	0.4965	0.9196	1.0956	0.7853	0.6485
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.3577	1.2631	1.0935	0.8575	1.4326	1.8144	1.5062	1.9589
		121	0.8023	0.7439	0.5677	0.5282	0.7322	0.6448	0.662	0.5971
		529	0.4152	0.457	0.2189	0.2116	0.3219	0.2851	0.2746	0.2663
	RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.2089	0.3089	0.225	0.2003	0.0563	0.0659	0.1141	0.0947
		121	0.0979	0.2885	0.1303	0.1329	0.0337	0.0463	0.0985	0.0884
		529	0.0209	0.1033	0.0596	0.0849	0.0168	0.0237	0.0595	0.0713
	RMSRE($\hat{\phi}$)	49	0.2806	5.8439	0.6279	0.232	0.1852	0.1863	0.7236	0.0967
		121	0.1364	0.2084	0.1227	0.2574	0.0722	0.1365	0.3291	0.0997
		529	0.1067	0.19	0.0659	0.0239	0.0349	0.0709	0.0625	0.0866
$\sqrt{\mu}$	Mediana(\hat{L})	49	4.0982	3.9691	3.8208	3.7657	8.009	8.1705	8.4084	7.9928
		121	4.139	4.1468	3.6304	4.1523	8.0177	8.0686	7.9559	8.0041
		529	3.9594	4.0617	3.9581	3.9609	8.0294	8.007	8.1037	7.9684
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.4851	-0.5046	-0.5248	-0.5332	-0.5048	-0.5024	-0.5214	-0.5178
		121	-0.5041	-0.4934	-0.5329	-0.4958	-0.5041	-0.5058	-0.4928	-0.5123
		529	-0.5023	-0.4988	-0.5032	-0.5025	-0.4988	-0.4934	-0.4987	-0.5055
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9916	4.9835	5.4369	5.5368	4.9802	5.0031	5.3107	5.4913
		121	4.9633	4.971	5.181	5.1863	4.9825	4.9876	5.1069	5.2528
		529	5.0009	5.002	5.0403	5.0523	4.9996	4.993	5.0228	5.0485
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.801	-0.5101	0.4943	0.7715	-0.7963	-0.5067	0.4769	0.7675
		121	-0.795	-0.4997	0.4924	0.785	-0.7972	-0.4997	0.4866	0.7827
		529	-0.8002	-0.4987	0.4989	0.7976	-0.8001	-0.4998	0.4956	0.7966
RMSRE(\hat{L})	49	5.5549	5.3616	5.098	4.1654	3.7694	3.5822	3.3532	3.1256	
	121	3.1321	3.5095	3.0286	3.1105	2.7967	3.1178	2.9008	2.4497	
	529	0.6847	0.6607	0.5945	0.6676	1.0193	1.0722	0.9542	0.9637	
RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.6649	6.0406	1.5798	1.3054	1.5179	2.0105	1.7518	1.3671	
	121	0.8838	0.8129	0.8977	0.7614	0.6602	0.8205	0.6371	0.7013	
	529	0.2201	0.1618	0.2712	0.2674	0.2768	0.3122	0.2998	0.2883	
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	1.3169	0.5271	0.8117	0.7337	0.0931	0.1678	0.2777	0.3462	
	121	0.2138	0.2148	1.012	0.2948	0.0508	0.1294	0.1895	0.2173	
	529	0.0574	0.2082	0.0891	0.1085	0.022	0.0259	0.091	0.1055	
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	11.6099	4.0052	18.9552	0.7285	0.1067	16.5686	2.9008	0.1809	
	121	2.1325	0.5587	0.3732	0.6909	0.0549	2.2838	0.9542	0.1068	
	529	0.0577	0.4977	0.2094	0.0984	0.0223	0.0335	0.9325	0.0506	
$Cox(\mu, 1/2)$	Mediana(\hat{L})	49	3.9314	4.3052	4.0857	3.88	8.4065	8.1353	6.9176	7.9494
		121	3.7826	4.1238	4.0479	3.836	7.9901	7.9015	8.0907	8.3153
		529	3.9864	3.9006	3.8942	3.9951	8.0349	8.0858	7.9867	7.8257
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.5182	-0.4836	-0.506	-0.5053	-0.5058	-0.4736	-0.5605	-0.5278
		121	-0.5177	-0.5004	-0.502	-0.5175	-0.5108	-0.5122	-0.498	-0.4901
		529	-0.5036	-0.5065	-0.5065	-0.5001	-0.4918	-0.4982	-0.5029	-0.5041
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	5.011	4.9623	5.2442	5.5218	4.9801	4.963	5.3201	5.4355
		121	4.9962	4.9328	5.1529	5.2032	4.9996	5.0165	5.1708	5.2605
		529	4.9856	5.0049	5.0177	5.0549	4.992	5.0061	5.0061	5.0512
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.8024	-0.5075	0.482	0.7621	-0.8007	-0.5033	0.4638	0.7712
		121	-0.7985	-0.4972	0.4901	0.7918	-0.7999	-0.503	0.4749	0.7809
		529	-0.7988	-0.5001	0.5009	0.7988	-0.7991	-0.4998	0.4975	0.7963
RMSRE(\hat{L})	49	5.3894	5.6522	5.2341	5.0101	3.5452	3.9174	3.6882	3.0498	
	121	3.3005	3.537	3.2334	3.4684	2.9305	2.9364	3.0312	2.8641	
	529	0.5544	0.5793	0.6985	0.5915	1.0979	1.1233	1.0834	0.9302	
RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.2171	1.0278	2.1555	1.6985	1.7848	1.3684	2.4782	1.6307	
	121	0.5707	0.5919	0.7361	0.985	0.7152	0.6884	0.8181	1.1396	
	529	0.2173	0.2121	0.233	0.2288	0.286	0.3161	0.2987	0.2887	
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	2.1135	2.0962	0.7608	2.6826	0.1577	0.1288	0.2879	0.364	
	121	0.2614	0.9788	0.3717	0.428	0.0864	0.0765	0.1693	0.2242	
	529	0.0894	0.0792	0.1001	0.1128	0.032	0.0358	0.0738	0.1014	
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	1.3118	9.5646	2.9939	43.484	0.1793	0.1892	0.4744	0.7717	
	121	0.1879	0.2627	0.3171	0.3574	0.0668	0.0995	0.3537	0.5826	
	529	0.0639	0.0581	0.1202	0.0872	0.0232	0.0345	0.0908	0.0498	

Fonte: O autor (2022)

Tabela 6 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo MA(1) com $\alpha = 5$ e $\nu = -0.5$.

$g(\mu)$	Medidas	n	L = 4				L = 8			
			θ				θ			
			-0.8	-0.5	0.5	0.8	-0.8	-0.5	0.5	0.8
$\log(\mu)$	Mediana(\hat{L})	49	6.0771	4.3198	4.6539	7.4298	7.7856	7.2572	9.0181	14.8851
		121	4.9511	4.1013	4.4386	5.3927	7.9185	8.1626	8.7583	12.103
		529	4.1738	4.1189	4.1148	4.4593	7.9829	8.018	8.2265	8.9624
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.4319	-0.5046	-0.4662	-0.3684	-0.5298	-0.5627	-0.4547	-0.3349
		121	-0.4561	-0.4845	-0.4825	-0.4339	-0.5142	-0.4957	-0.4807	-0.3987
		529	-0.4912	-0.4954	-0.4933	-0.4722	-0.5084	-0.5019	-0.4918	-0.4732
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9804	4.9666	4.8942	4.7078	5.0237	4.9971	4.9538	4.8918
		121	4.9941	4.9915	4.9526	4.8269	5.0087	5.0045	4.9821	4.9523
		529	4.9994	4.999	4.9781	4.9507	5.0026	4.9998	4.997	4.9795
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.8045	-0.5281	0.4819	0.7597	-0.7589	-0.5198	0.4788	0.7116
		121	-0.7966	-0.5057	0.4927	0.7827	-0.7857	-0.5092	0.4876	0.7636
		529	-0.7982	-0.5008	0.5	0.795	-0.7953	-0.5045	0.4966	0.7906
$\sqrt{\mu}$	RMSRE(\hat{L})	49	5.1824	5.2212	5.0706	6.4473	2.9751	3.2776	3.6925	4.6411
		121	3.094	3.0689	3.4828	4.7157	2.4067	2.1969	2.8958	4.2301
		529	0.5499	0.654	0.6296	1.4297	0.8941	0.6019	0.9295	2.2153
	RMSRE($\hat{\nu}$)	49	0.8517	0.8406	1.0698	0.869	1.3484	1.6146	1.6731	1.1511
		121	0.4443	0.5521	0.5755	0.4613	0.6208	0.6869	0.7971	0.6773
		529	0.1989	0.2782	0.2291	0.2175	0.2953	0.2566	0.2765	0.3022
	RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	60.295	0.05	0.2431	0.6488	0.0353	0.0262	0.0693	0.0537
		121	0.0157	0.0347	0.1124	0.2427	0.0081	0.0122	0.0698	0.0331
		529	0.0063	0.0212	0.0348	0.0763	0.0028	0.005	0.0131	0.0163
	RMSRE($\hat{\theta}$)	49	364.678	0.3794	0.3321	0.2073	0.2516	0.3883	0.3302	0.2214
		121	0.1061	0.1737	0.1914	0.0896	0.1006	0.1724	0.1688	0.1189
		529	0.0349	0.0839	0.0747	0.0671	0.0352	0.0778	0.0749	0.0436
$Cox(\mu, 1/2)$	Mediana(\hat{L})	49	3.2404	3.3118	3.8495	3.8673	7.3388	7.9033	7.6373	8.4958
		121	3.694	3.856	4.0739	3.8644	7.8887	7.932	7.9818	7.9705
		529	3.8736	4.0829	3.9564	3.9869	7.9961	8.0103	8.0338	8.0274
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.5653	-0.5444	-0.5291	-0.5258	-0.5747	-0.538	-0.533	-0.4719
		121	-0.5254	-0.5189	-0.4947	-0.5152	-0.5157	-0.5078	-0.5127	-0.5089
		529	-0.5072	-0.4945	-0.5045	-0.4998	-0.5034	-0.5046	-0.5016	-0.5
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9742	5.001	5.0319	4.9058	4.9893	5.0059	4.9742	4.9737
		121	4.9949	5.0135	4.9592	4.9791	4.9994	5.007	4.999	4.9642
		529	5.0003	4.9928	4.9721	4.9962	4.9996	4.9991	5.0008	4.9936
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.8171	-0.5239	0.5169	0.8054	-0.8169	-0.5235	0.5077	0.8074
		121	-0.801	-0.5066	0.5071	0.8032	-0.8047	-0.5075	0.4982	0.7992
		529	-0.8004	-0.4987	0.5001	0.8006	-0.8004	-0.5001	0.5018	0.8007
RMSRE(\hat{L})	49	3.6019	4.9729	5.0417	5.1762	2.9681	3.1449	3.0549	3.713	
	121	2.9755	2.7187	3.7837	2.6368	2.2797	2.4346	2.7655	2.8438	
	529	1.3508	0.5565	0.6145	0.5233	0.8483	0.8274	1.0802	1.0476	
RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.187	1.1271	1.1329	1.0644	1.9394	3.1589	1.7764	2.6403	
	121	0.4718	0.3906	0.9568	0.4895	0.7328	0.6388	0.718	0.6455	
	529	0.2358	0.2184	0.2129	0.2042	0.2725	0.2861	0.2848	0.2909	
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	3.6512	4.1102	0.5402	0.2245	12.3582	0.0546	0.1704	0.1365	
	121	0.0703	0.1413	0.4395	0.1264	0.0064	0.022	0.0783	0.074	
	529	0.0199	0.0192	0.0791	0.0808	0.0024	0.0106	0.0316	0.034	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	74.2439	161.5361	1.2008	55.5375	356.6839	0.7211	0.321	0.1516	
	121	0.0922	0.1702	0.377	0.0509	0.0534	0.1011	0.1736	0.0647	
	529	0.0272	0.0484	0.0611	0.0277	0.0174	0.0362	0.0729	0.0222	
$Cox(\mu, 1/2)$	Mediana(\hat{L})	49	3.5046	3.684	3.2774	4.1382	8.2616	7.8866	8.3472	6.9989
		121	3.8322	3.9098	3.9347	3.9943	7.8937	7.9106	8.0013	7.9448
		529	3.9327	4.0392	4.0821	4.0456	7.9901	8.001	8.0415	8.0107
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.5435	-0.5406	-0.5626	-0.5051	-0.5467	-0.5367	-0.4987	-0.56
		121	-0.5178	-0.5137	-0.5047	0.5055	-0.5218	-0.5158	-0.4942	-0.5109
		529	-0.506	-0.5002	-0.4995	-0.5	-0.4936	-0.4985	-0.4984	-0.5011
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9653	4.9692	5.0128	4.6755	4.9958	5.0225	4.9727	4.8616
		121	4.995	4.984	4.9179	4.8815	4.9982	5.0055	4.9821	4.9746
		529	4.9999	4.9953	4.9964	4.9713	5.0001	5.0005	4.9874	4.9846
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.8092	-0.5147	0.5166	0.7949	-0.8129	-0.5217	0.5138	0.7977
		121	-0.8005	-0.5009	0.5011	0.7976	-0.8008	-0.5057	0.4988	0.8038
		529	-0.7999	-0.4993	0.5013	0.7993	-0.7997	-0.5014	0.4984	0.8001
RMSRE(\hat{L})	49	4.7248	4.2366	4.8997	4.8137	2.9876	3.2077	3.5937	3.6914	
	121	2.2587	2.8624	2.7738	3.1665	2.4463	2.7097	2.747	2.7161	
	529	0.4814	0.6054	0.6465	0.5204	0.9138	1.0745	1.2649	1.0124	
RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.0295	1.0672	1.2507	0.8511	5.0593	1.6592	2.0198	2.7091	
	121	0.4663	0.5023	0.5974	0.5525	0.693	0.8004	0.7092	0.669	
	529	0.2469	0.2451	0.4142	0.1894	0.2614	0.3318	0.35	0.2725	
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	32.7074	0.1282	1.8925	2.3262	11.4731	2.0859	0.2448	4.0898	
	121	0.0149	0.0642	0.3573	0.1762	0.0087	0.032	0.11	0.1311	
	529	0.0033	0.0273	0.1156	0.0773	0.0031	0.0203	0.072	0.0488	
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	559.8237	1.5341	91.7624	80.8845	135.0369	91.5185	0.3453	56.4491	
	121	0.0563	1.1635	0.1612	0.0497	0.052	0.1053	0.1796	0.0611	
	529	0.0153	0.049	0.0671	0.0182	0.0175	0.0445	0.0745	0.0216	

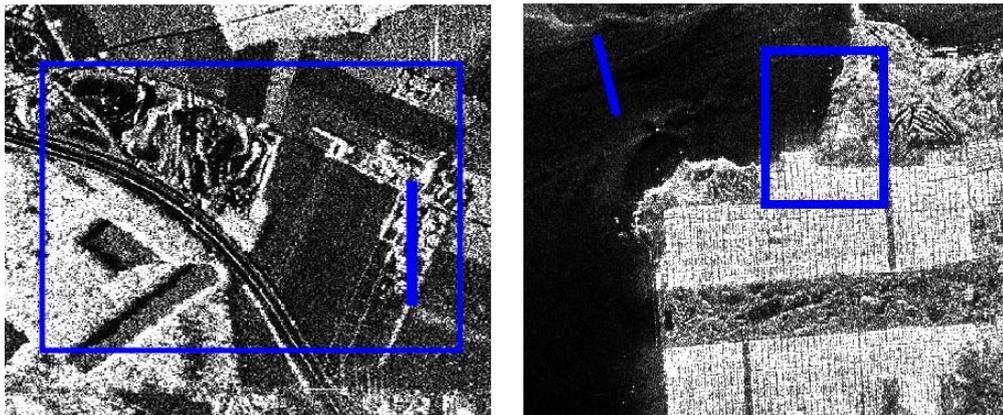
Tabela 7 – Mediana e RMSRE das estimativas dos parâmetros para o processo ARMA(1,1) com $\alpha = 5$ e $\nu = -0.5$

$g(\mu)$	Medidas	n	L = 4				L = 8				
			$\phi = \theta$				$\phi = \theta$				
			-0.8	-0.5	0.5	0.8	-0.8	-0.5	0.5	0.8	
log(μ)	Mediana(\hat{L})	49	4.9048	4.0917	3.7923	4.8648	8.0697	8.0816	7.8001	7.9919	
		121	4.731	4.0372	4.1387	4.4893	7.8263	8.0382	7.9617	7.7597	
		529	4.1382	4.0091	4.0552	4.2454	7.873	8.0006	8.0074	8.0385	
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.5014	-0.52	-0.531	-0.4797	-0.5578	-0.5521	-0.5384	-0.5343	
		121	-0.4636	-0.5052	-0.5016	-0.4814	-0.5234	-0.5116	-0.5252	-0.5207	
		529	-0.4958	-0.4993	-0.4964	-0.4899	-0.5072	-0.4963	-0.5005	-0.4968	
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	5.1004	5.1436	4.8407	4.2556	5.1695	5.221	4.6249	4.2122	
		121	5.0261	5.0703	4.8503	4.458	5.0795	5.1103	4.699	4.2569	
		529	5.0059	5.0223	4.9418	4.7013	5.0159	5.0381	4.7782	4.5091	
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.8425	-0.5486	0.5332	0.8365	-0.8508	-0.5734	0.5424	0.8356	
		121	-0.8107	-0.523	0.5194	0.8273	-0.8219	-0.5358	0.5331	0.8333	
		529	-0.8008	-0.5062	0.5084	0.8149	-0.8045	-0.511	0.5233	0.8222	
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.8047	-0.5152	0.4843	0.7777	-0.7623	-0.499	0.4625	0.7645	
		121	-0.7971	-0.4933	0.4906	0.7892	-0.778	-0.4917	0.4768	0.7813	
		529	-0.7976	-0.5	0.4933	0.7916	-0.7921	-0.4966	0.4867	0.7902	
	$\sqrt{\mu}$	RMSRE(\hat{L})	49	5.532	5.2726	5.2327	3.941	3.5738	3.7852	2.9223	2.1397
			121	3.3657	3.5643	2.2228	2.2405	2.9544	3.0661	2.198	1.5633
			529	0.5903	0.5957	0.5551	0.4356	0.9454	1.0692	0.7263	0.6464
RMSRE($\hat{\nu}$)		49	0.9583	1.2625	1.1995	0.963	1.7542	2.4911	2.4292	1.4909	
		121	0.4475	0.5589	0.4982	0.4391	0.7574	0.6598	0.7281	0.612	
		529	0.2571	0.2281	0.2161	0.1852	0.3202	0.2978	0.2681	0.2272	
RMSRE($\hat{\alpha}$)		49	0.0567	0.1387	0.2445	0.3442	2.8093	0.0905	0.156	0.2162	
		121	0.0343	0.0788	0.1878	0.2324	0.0336	0.0603	0.1229	0.2016	
		529	0.0174	0.0347	0.0789	0.1091	0.0166	0.0313	0.0825	0.1469	
RMSRE($\hat{\phi}$)		49	0.1367	0.3029	0.2531	0.2004	13.8639	0.388	0.6404	0.1643	
		121	0.0778	0.19	0.1876	0.1598	0.0704	0.1717	0.1393	0.1174	
		529	0.0323	0.0881	0.0858	0.0338	0.0335	0.0906	0.0879	0.0411	
RMSRE($\hat{\theta}$)		49	0.3037	0.496	0.3552	0.2569	0.3864	0.4758	0.4083	0.2553	
		121	0.108	0.2206	0.2011	0.0845	0.1114	0.2171	0.1932	0.1162	
		529	0.0408	0.0911	0.0864	0.035	0.0392	0.095	0.0939	0.0382	
Cox($\mu, 1/2$)		Mediana(\hat{L})	49	4.4463	4.136	3.6782	4.0878	8.6155	8.0709	7.7256	7.8567
			121	4.1269	3.9711	3.7333	3.9645	8.0483	8.0218	7.8146	7.9902
			529	3.989	4.0595	3.8646	4.0513	8.0002	7.9998	8.0231	8.0324
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.5058	-0.4974	-0.531	-0.5101	-0.4949	-0.5354	-0.5512	-0.5492	
		121	-0.4859	-0.5061	-0.531	-0.5075	-0.479	-0.5006	-0.5249	-0.514	
		529	-0.4928	-0.4991	-0.5126	-0.4981	-0.4991	-0.4976	-0.5014	-0.5004	
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.8804	5.0015	5.389	4.9838	4.9814	4.9989	5.158	4.9866	
		121	4.9433	4.9621	5.1395	4.9467	5.0019	4.9944	5.0291	4.9533	
		529	4.9751	4.9904	5.0207	4.9844	4.9931	4.9969	5.0003	4.9974	
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.7618	-0.5167	0.5153	0.8092	-0.7945	-0.4999	0.4897	0.8063	
		121	-0.7801	-0.495	0.4845	0.7958	-0.7986	-0.4989	0.5049	0.8014	
		529	-0.7925	-0.4988	0.509	0.7982	-0.7977	-0.4996	0.5009	0.799	
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.7995	-0.5082	0.521	0.8042	-0.7955	-0.5094	0.5176	0.8021	
		121	-0.7991	-0.5042	0.5073	0.8	-0.7988	-0.5046	0.5025	0.8019	
		529	-0.7999	-0.4997	0.4997	0.7999	-0.8001	-0.4998	0.5005	0.7997	
	RMSRE(\hat{L})	49	6.2856	5.8739	5.4492	5.1101	4.078	3.9888	3.743	3.5393	
		121	3.9857	3.5009	3.0971	3.0388	3.6498	3.1299	2.6714	2.6889	
		529	1.438	0.5524	0.5861	0.5846	2.2487	1.0166	0.8243	0.8442	
RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.2606	1.3351	1.547	1.8254	2.7332	2.5052	3.6483	2.7962		
	121	0.5194	0.5974	0.5749	0.6799	0.636	0.6414	0.7788	0.69		
	529	0.2258	0.2135	0.2321	0.2939	0.3063	0.2852	0.2834	0.2912		
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	2.4448	0.5966	1.2888	0.6718	0.3436	2.3841	0.2717	0.2527		
	121	0.227	0.4454	0.2999	0.4416	0.0564	0.0677	0.1649	0.148		
	529	0.059	0.0594	0.0883	0.3212	0.0237	0.027	0.0814	0.0622		
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	11.9167	2.0314	6.4573	2.7947	0.7628	24.9885	0.4403	0.3406		
	121	0.3976	0.8386	0.5487	1.6337	0.1122	0.4008	0.2814	0.1401		
	529	0.1179	0.1199	0.1882	1.5247	0.0474	0.0595	0.1217	0.0617		
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	79.7377	1.1553	89.9091	1.2606	0.1613	126.6873	0.2966	0.2925		
	121	0.1124	0.6638	0.1644	0.762	0.0398	0.168	0.1773	0.0362		
	529	0.0101	0.0332	0.0469	0.0251	0.0102	0.0414	0.07	0.0124		
Cox($\mu, 1/2$)	Mediana(\hat{L})	49	4.3665	4.0263	3.8444	4.3489	8.5132	8.0016	6.425	8.3563	
		121	4.2926	3.815	3.9735	3.9906	8.3014	7.9337	8.0097	8.0665	
		529	4.0704	3.9337	4.0613	3.9328	8.0716	7.9999	8.0068	8.0089	
	Mediana($\hat{\nu}$)	49	-0.4748	-0.5136	-0.5269	-0.4969	-0.4933	-0.5248	-0.587	-0.5196	
		121	-0.4842	-0.515	-0.5096	-0.5125	-0.4827	-0.5183	-0.5171	-0.4908	
		529	-0.4943	-0.5035	-0.4965	-0.5061	-0.4888	-0.5014	-0.5013	-0.5004	
	Mediana($\hat{\alpha}$)	49	4.9125	5.0418	5.1838	4.6701	5.022	4.9577	5.0793	4.8987	
		121	4.8981	5.0092	4.9516	4.9339	5.0089	5.0107	5.0181	4.9349	
		529	4.9855	4.9995	5.0219	4.9961	4.9915	5.0034	4.9984	5.0012	
	Mediana($\hat{\phi}$)	49	-0.7725	-0.5149	0.5414	0.7741	-0.802	-0.4956	0.5121	0.8185	
		121	-0.7709	-0.5045	0.5104	0.8054	-0.8013	-0.5034	0.4974	0.8035	
		529	-0.7957	-0.5004	0.4998	0.8006	-0.7971	-0.5014	0.4983	0.7995	
	Mediana($\hat{\theta}$)	49	-0.7996	-0.5127	0.507	0.8005	-0.7959	-0.5144	0.5053	0.8015	
		121	-0.7994	-0.5011	0.5062	0.7999	-0.797	-0.4989	0.502	0.8005	
		529	-0.7999	-0.4996	0.501	0.7998	-0.7999	-0.5	0.5016	0.8003	
	RMSRE(\hat{L})	49	6.3383	5.4217	6.1481	6.6099	4.1541	4.1922	3.6042	4.1667	
		121	3.4416	3.4525	3.0674	3.5472	3.7372	3.0496	3.0595	2.9047	
		529	1.3232	0.677	0.6241	0.6368	2.6253	0.9775	0.8292	0.8718	
RMSRE($\hat{\nu}$)	49	1.1955	1.3458	1.4136	1.0802	2.5476	2.2843	2.8154	2.5762		
	121	0.5951	0.7456	0.7642	0.5859	0.6757	0.7249	0.6957	0.6223		
	529	0.2264	0.2278	0.2228	0.3208	0.3444	0.2907	0.3049	0.2998		
RMSRE($\hat{\alpha}$)	49	0.7283	3.0213	3.8323	1.6892	9.0506	0.2309	0.3022	0.3263		
	121	0.2845	0.2926	0.4563	0.3561	0.0636	0.0782	0.1667	0.1434		
	529	0.0633	0.0702	0.1103	0.1983	0.0263	0.0305	0.0891	0.0614		
RMSRE($\hat{\phi}$)	49	1.3895	34.2369	26.2615	5.3408	14.0788	6.0946	0.4854	0.4116		
	121	0.527	7.3907	0.7416	1.5657	0.1123	0.1644	0.2569	0.1418		
	529	0.1172	0.1186	0.1815	0.2003	0.0484	0.0577	0.1274	0.062		
RMSRE($\hat{\theta}$)	49	1.6025	132.5695	89.7178	57.1565	254.3111	92.6645	0.2857	0.1181		
	121	0.1203	1.2185	1.2252	0.1144	0.0664	0.1542	0.1662	0.0367		
	529	0.0092	0.0335	0.0488	0.0086	0.0088	0.041	0.0723	0.0131		

4.2 APLICAÇÃO EM DADOS DE ESPAÇO E TEMPO DE IMAGENS SAR

Agora estamos em posição de podermos aplicar nosso modelo a dados reais obtidos de imagens SAR. As imagens SAR com as quais trabalhamos podem ser encontradas na Figura 3. A Figura 4(a) refere-se à cidade de Munique, Alemanha, extraída do sensor Experimental Airborne SAR (E-SAR) com o número de *looks* igual à três. A Figura 4(b) mostra as imagens da cidade de São Francisco, EUA, tiradas pelo sensor AIRSAR para NL igual à quatro. Modelamos as intensidades (uma vez que este recurso é obtido a partir dos dados sem aplicar nenhuma transformação) da imagem SAR, mas o modelo $G\Gamma$ -ARMA também pode ser usado para modelar diretamente a amplitude em imagens SAR, aplicando diretamente a transformação raiz quadrada nos dados.

Figura 3 – (a) Imagem de Munique e (b) imagem de São Francisco com as respectivas regiões selecionadas



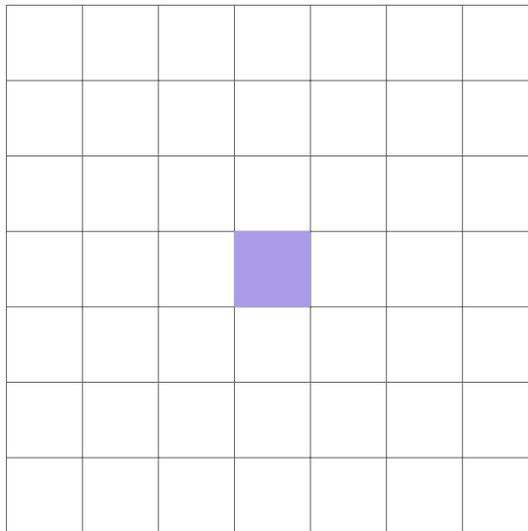
(a) Imagem SAR de Munique com a região selecionada (linha em azul) (b) Imagem SAR de São Francisco com a região selecionada (linha em azul)

Fonte: O autor (2022)

Na Figura 3 podemos ver os raios e retângulos selecionados em ambas as imagens do SAR. O raio selecionado na imagem de Munique é uma textura de cidade e tem um tamanho de 102 observações em que cada observação é um pixel da imagem e o valor da observação é o atributo de intensidade no (i,j) -ésimo pixel. O raio selecionado na imagem de São Francisco refere-se à uma textura do oceano e tem um tamanho de 96 observações. Os dois retângulos foram escolhidos para acomodar todos os tipos de texturas e essa foi a área utilizada para a construção do mapa de calor dos valor-p. Então, os raios de intensidade foram usados para uma modelagem local para corroborar nossa proposta, enquanto retângulos são usados para uma análise geral da vizinhança de intensidade.

Nas figuras 6(a) e 7(a), as séries das observações são representadas tanto quanto seu ACF e PACF, referentes as imagens de Munique e São Francisco, respectivamente. Nas Figuras 6(a) e 7(a), uma pequena correlação pode ser vista, e em ambas as regiões o teste Ljung-Box é rejeitado com significância de 5%. Ajustamos os três modelos com as três funções de ligação diferentes, como podemos ver nas Figuras 5 e 6 para Munique e São Francisco, respectivamente. Em ambos os cenários, usamos os modelos autorregressivos de primeira ordem. O processo AR(1) seria o mais adequado de acordo com as Figuras 6(a) e 7(a), mas o método de seleção automática baseado nos Critérios de Informação de Akaike (AIC) também nos indicou o mesmo resultado.

Figura 4 – Exemplo do janelamento usado

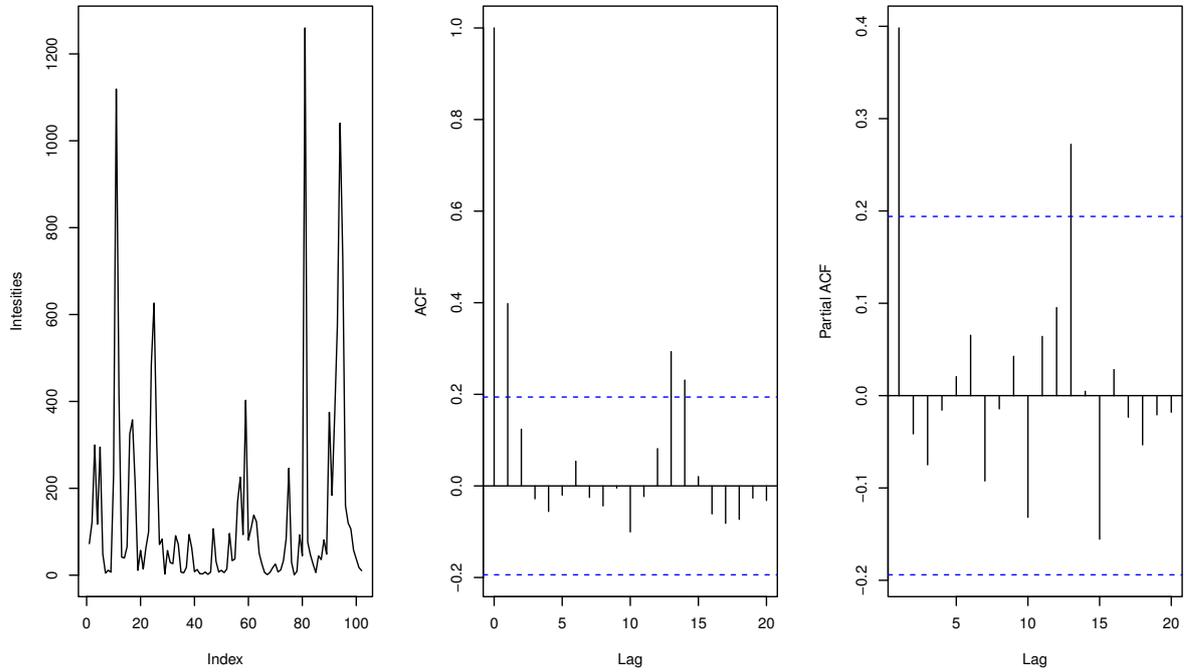


Fonte: O autor (2022)

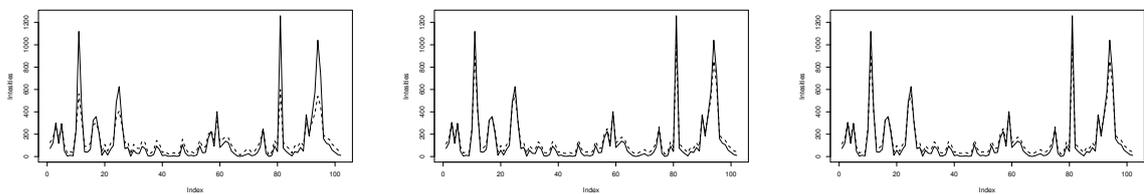
Construímos mapas de calor para demonstrar a adequação de nosso modelo em comparação com o modelo Γ -ARMA. Na maioria dos casos, o modelo Γ -ARMA tem um desempenho tão bom quanto nosso modelo nas duas imagens, exceto nos casos em que a textura sofre a interferência humana. Isso mostra que o método $G\Gamma$ -ARMA pode ser realmente eficaz para texturas de cidades. Os mapas de calor gerados são mostrados nas Fig. 7 - 10 e foram criados de tal forma que para cada pixel de interesse (ver Fig. 4, quadrado roxo), foi criada uma vizinhança de 7×7 como em janelas tendo o pixel de interesse centralizado no janelamento, e daí a vizinhança foi concatenada pelas colunas dessas janelas gerando uma série temporal, como em Delp, Kashyap e Robert Mitcheli (1979), de tamanho $N = 49$. Cada quadrado na Fig. 4 representa um pixel da imagem, o pixel em roxo é o pixel de interesse. Em seguida, fizemos o teste da razão de verossimilhança (TRV) para cada pixel de interesse em que testamos

$H_0 : \nu = 1 \times H_1 : \nu \neq 1$, onde $\nu = 1$ a distribuição da hipótese nula é a distribuição Γ -ARMA com número equivalente de *looks* estimável e a distribuição da estatística da razão de verossimilhança sob a hipótese alternativa é a distribuição do modelo $G\Gamma$ -ARMA. Figs. 7 e 9 são os mapas de calor dos respectivos p-valores resultantes dos TRVs sucessivos para cada pixel nas imagens de Munique e São Francisco. Nas Figs.8 e 10, os mapas de calor referem-se às decisões a um nível de significância de 5%, com as áreas azuis representando a rejeição da hipótese nula e as áreas vermelhas representando a não rejeição com significância de 5%. Os mapas de calor indicam que o modelo é estatisticamente significativo para as texturas da cidade ao nível de significância de 5%.

Figura 5 – Ajustes dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ -AR(1) nas regiões seleccionadas da imagem SAR de Munique



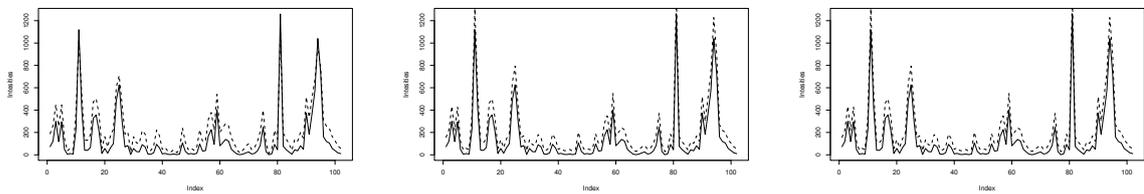
(a) Série temporal observada da imagem SAR de Munique e seu ACF e PACF amostral



(b) Modelo Γ -AR(1) com a função de ligação $\log(\mu)$

(c) Modelo Γ -AR(1) com a função de ligação $\sqrt{\mu}$

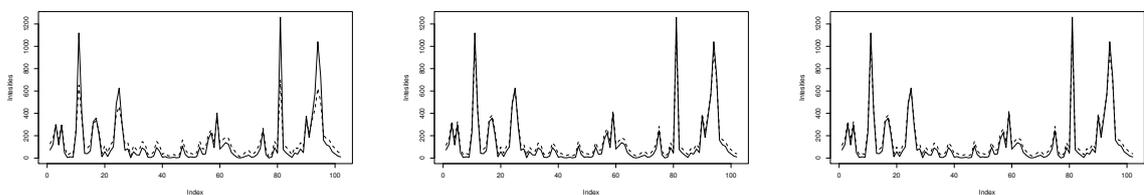
(d) Modelo Γ -AR(1) com a função de ligação $\text{Cox}(\mu, 1/2)$



(e) Modelo \mathcal{G}_0^I -AR(1) com a função de ligação $\log(\mu)$

(f) Modelo \mathcal{G}_0^I -AR(1) com a função de ligação $\sqrt{\mu}$

(g) Modelo \mathcal{G}_0^I -AR(1) com a função de ligação $\text{Cox}(\mu, 1/2)$



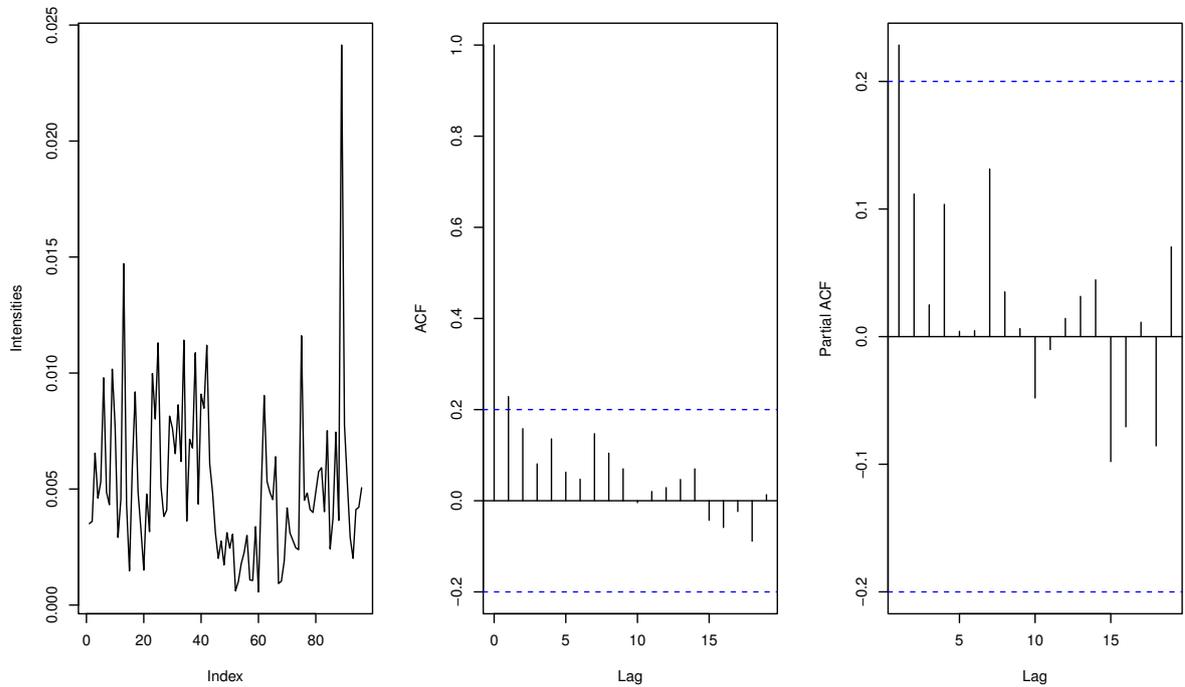
(h) Modelo $G\Gamma$ -AR(1) com a função de ligação $\log(\mu)$

(i) Modelo $G\Gamma$ -AR(1) com a função de ligação $\sqrt{\mu}$

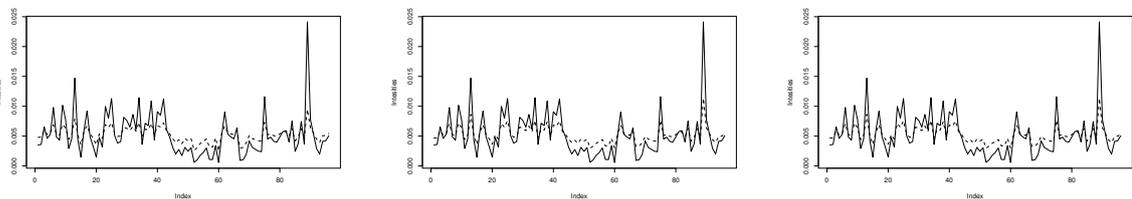
(j) Modelo $G\Gamma$ -AR(1) com a função de ligação $\text{Cox}(\mu, 1/2)$

Fonte: O autor (2022)

Figura 6 – Ajustes dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ -AR(1) nas regiões seleccionadas da imagem SAR de São Francisco



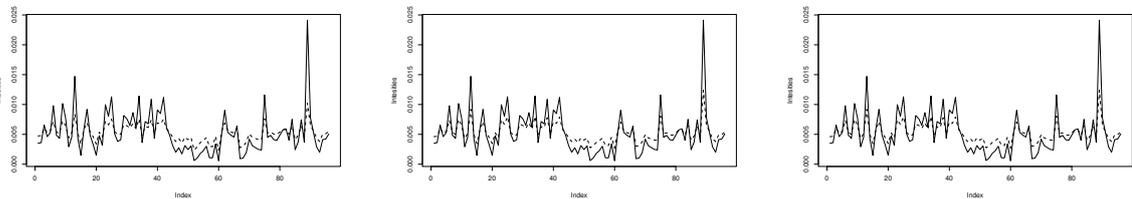
(a) Série temporal observada da imagem de São Francisco e seu ACF e PACF amostral



(b) Modelo Γ -AR(1) com a função de ligação $\log(\mu)$

(c) Modelo Γ -AR(1) com a função de ligação $\sqrt{\mu}$

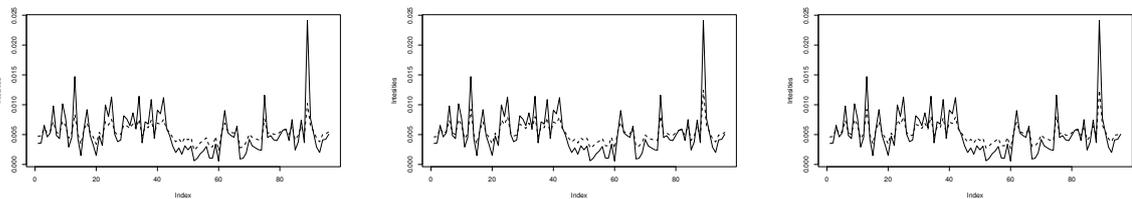
(d) Modelo Γ -AR(1) com a função de ligação $\text{Cox}(\mu, 1/2)$



(e) Modelo \mathcal{G}_0^I -AR(1) com a função de ligação $\log(\mu)$

(f) Modelo \mathcal{G}_0^I -AR(1) com a função de ligação $\sqrt{\mu}$

(g) Modelo \mathcal{G}_0^I -AR(1) com a função de ligação $\text{Cox}(\mu, 1/2)$



(h) Modelo $G\Gamma$ -AR(1) com a função de ligação $\log(\mu)$

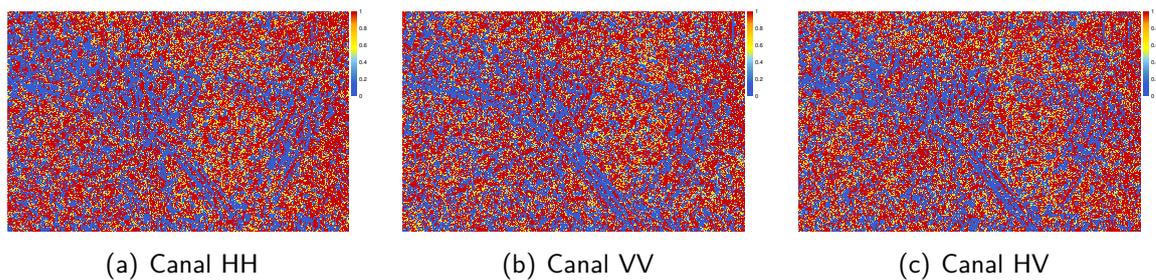
(i) Modelo $G\Gamma$ -AR(1) com a função de ligação $\sqrt{\mu}$

(j) Modelo $G\Gamma$ -AR(1) com a função de ligação $\text{Cox}(\mu, 1/2)$

Fonte: O autor (2022)

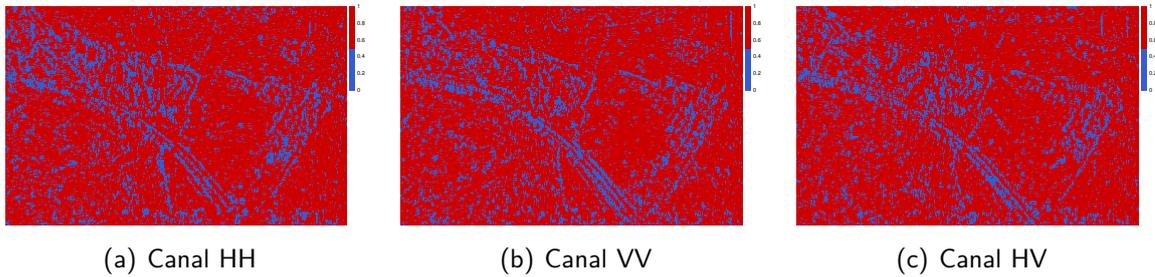
Todos os parâmetros dos nove modelos das duas imagens são significativos, com base nas tabelas 8 e 10, em particular os parâmetros autoregressivos são significativos implica em que existe uma dependência entre as observações corroborando a proposta do nosso modelo com dependência ao contrário do modelo com abordagem independente proposto por Stacy (1962). As estimativas para os parâmetros do intercepto α e autoregressivo ϕ foram similares entre os modelos e ligações na cidade de São Francisco, diferindo no parâmetro que retrata o equivalente número de *looks* (ENL) e o parâmetro ν . Podemos notar que na textura de cidade observa-se uma maior estimativa do parâmetro ϕ do que as estimativas na textura de oceano, isto ocorre por que a textura de cidade é mais heterogênea e o fator autoregressivo se torna mais expressivo. Isto implica também nas estimativas para o parâmetro de equivalente número de *looks*, L , que pode ser observado altos valores para L em texturas de cidade quando comparado com as texturas de oceano. O parâmetro α no \mathcal{G}_0^I de Almeida-Junior e Nascimento (2021) é o ν nesse trabalho. A partir das tabelas 9 e 11, podemos ver que o modelo $G\Gamma$ -ARMA tem melhor desempenho do que os modelos Γ -ARMA e \mathcal{G}_0^I . Os melhores resultados são obtidos com as funções de ligação $\sqrt{\mu}$ e $\text{Box-Cox}(\mu, 1/2)$. Para todos os modelos selecionados $G\Gamma$ -ARMA, os valores p do teste Ljung-Box para os primeiros 20 *lags* são maiores do que $\alpha = 10\%$. Portanto, não podemos rejeitar a hipótese nula de que os resíduos são independentes em todos os casos.

Figura 7 – Mapa de calor para os p-valores do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de Munique em todos os três canais de polarização PolSAR.



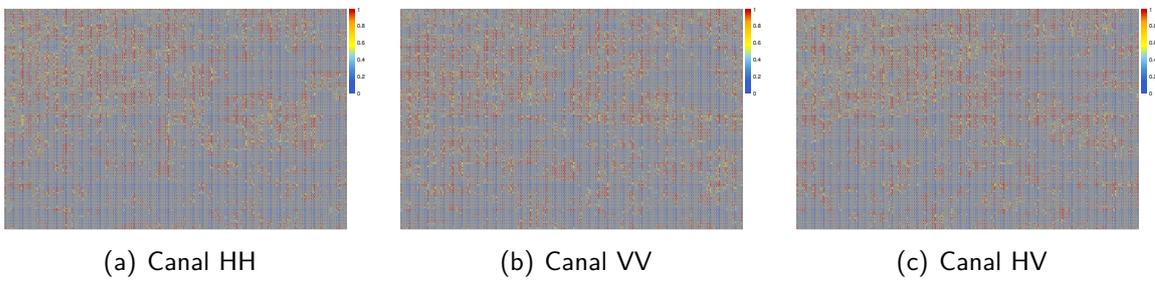
Fonte: O autor (2022)

Figura 8 – Mapa de calor para os p-valores, com um *threshold* de 5%, do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de Munique em todos os três canais de polarização PolSAR.



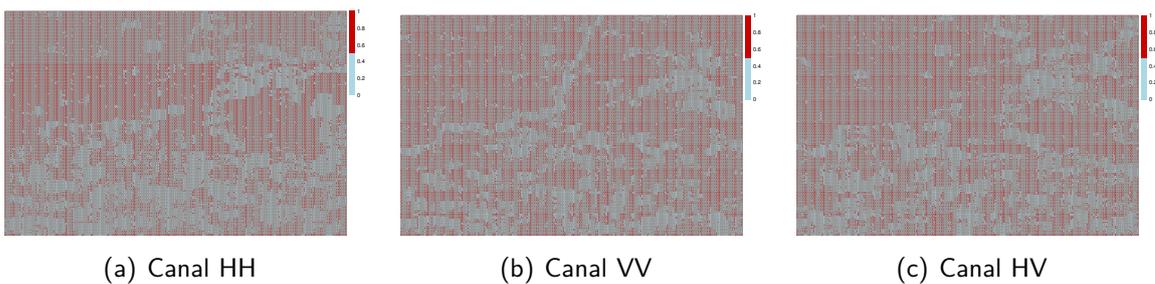
Fonte: O autor (2022)

Figura 9 – Mapa de calor para os p-valores do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de São Francisco em todos os três canais de polarização PolSAR.



Fonte: O autor (2022)

Figura 10 – Mapa de calor para os p-valores, com um *threshold* de 5%, do teste de razão de máxima verossimilhança na imagem de São Francisco em todos os três canais de polarização PolSAR.



Fonte: O autor (2022)

Tabela 8 – Estimação dos parâmetros dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ -AR(1) na imagem SAR de Munique

Modelo	$g(\mu)$	$\hat{\alpha}$ (s.e)	$\hat{\phi}$ (s.e)	\hat{L} (s.e)	$\hat{\nu}$ (s.e)
Γ -ARMA	$\log(\mu)$	2.48 (0.16)	.55 (.04)	-	-
	$\sqrt{\mu}$	3.95 (.46)	.79 (.07)	-	-
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	7.47 (.84)	.79 (.07)	-	-
\mathcal{G}_0^I -ARMA	$\log(\mu)$	2.71 (.04)	0.61 (.01)	-	-1.3 (.02)
	$\sqrt{\mu}$	4.14 (.11)	.95 (.01)	-	-1.38 (.02)
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	8.18 (.41)	.95 (.01)	-	-1.38 (.02)
$G\Gamma$ -ARMA	$\log(\mu)$	2.32 (.34)	.59 (.08)	44.09 (.54)	.12 (.01)
	$\sqrt{\mu}$	3.46 (.86)	.85 (.14)	45.02 (.44)	.12 (.01)
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	6.62 (1.77)	.85 (.15)	40.83 (.41)	.12 (.01)

Fonte: O autor (2022)

Tabela 9 – Medidas de qualidade de ajuste nos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), and $G\Gamma$ -AR(1) na imagem SAR de Munique

Modelo	$g(\mu)$	Medidas				Teste Ljung-Box	
		RMSE	sMAPE	MASE	UMBRAE	Estatística χ^2	p-valor
Γ -ARMA	$\log(\mu)$	115.292	.7428	.4978	1.0276	31.414	.05
	$\sqrt{\mu}$	50.6496	.6738	.3076	.8666	31.394	.0502
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	50.6444	.6738	.3076	.8665	31.394	.0502
\mathcal{G}_0^I -ARMA	$\log(\mu)$	102.0378	.9621	.7358	1.6236	22.098	.3352
	$\sqrt{\mu}$	91.8817	.9004	.6566	1.5147	63.969	.0001
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	91.8796	.9004	.6566	1.5147	63.97	.0001
$G\Gamma$ -ARMA	$\log(\mu)$	98.1836	.7264	.4531	1.0026	29.833	.0726
	$\sqrt{\mu}$	38.4985	.6602	.2813	.8628	27.131	.1316
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	38.4862	.6597	.281	.8618	27.177	.1303

Fonte: O autor (2022)

Tabela 10 – Estimação dos parâmetros dos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1) e $G\Gamma$ -AR(1) na imagem SAR de São Francisco

Modelo	$g(\mu)$	$\hat{\alpha}$ (s.e)	$\hat{\phi}$ (s.e)	\hat{L} (s.e)	$\hat{\nu}$ (s.e)
Γ -ARMA	$\log(\mu)$	-3.34 (.43)	.35 (.08)	-	-
	$\sqrt{\mu}$	0.05 (.01)	.4 (.1)	-	-
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	-1.12 (.18)	.4 (.1)	-	-
\mathcal{G}_0^I -ARMA	$\log(\mu)$	-3.1 (.06)	.4 (.01)	-	-9.55 (1.49)
	$\sqrt{\mu}$.04 (.001)	.45 (.01)	-	-9.09 (1.16)
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	-1.02 (.01)	.45 (.01)	-	-9.06 (1.25)
$G\Gamma$ -ARMA	$\log(\mu)$	-3.1 (.52)	.4 (.09)	17.67 (.74)	.39 (.03)
	$\sqrt{\mu}$.04 (.01)	.45 (.11)	21.91 (1.85)	.34 (.03)
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$	-1.01 (.21)	.45 (.11)	15.17 (1.49)	.41 (.04)

Fonte: O autor (2022)

Tabela 11 – Medidas de qualidade de ajuste nos modelos Γ -AR(1), \mathcal{G}_0^I -AR(1), e $G\Gamma$ -AR(1) na imagem SAR de São Francisco

Modelo	$g(\mu)$	Medidas				Teste Ljung-Box	
		RMSE	sMAPE	MASE	UMBRAE	Estatística χ^2	p-valor
Γ -ARMA	$\log(\mu)$.0024	.3504	.5622	.7785	8.5262	.9878
	$\sqrt{\mu}$.0022	.3397	.5343	.7465	12.082	.9132
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$.0022	.3397	.5342	.7465	12.081	.9132
\mathcal{G}_0^I -ARMA	$\log(\mu)$.0022	.3313	.5243	.7393	7.7262	.9935
	$\sqrt{\mu}$.002	.3179	.4888	.7028	11.372	.936
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$.002	.3179	.4888	.7028	11.37	.9361
$G\Gamma$ -ARMA	$\log(\mu)$.0022	.332	.5253	.7405	7.7339	.9935
	$\sqrt{\mu}$.002	.3171	.4867	.7011	11.323	.9374
	$\text{Cox}(1/2, \mu)$.002	.3177	.4871	.7022	11.301	.938

Fonte: O autor (2022)

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos um novo modelo denominado processo $G\Gamma$ -ARMA com o *equivalent number of looks* (ENL) estimável. Propriedades matemáticas do modelo tais como o vetor escore, a matriz de informação de Fisher e também expressões gerais baseadas nos momentos foram calculadas. Experimentos de Monte Carlo foram realizados com diferentes funções de ligamento para avaliar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do $G\Gamma$ -ARMA. Aplicações a dados reais foram feitas. Em particular, mapas de calor foram realizados, ilustrando a importância da nossa proposta na descrição de dependências em áreas urbanas, em comparação com seu modelo concorrente e particular Γ -ARMA. Os resultados da modelagem de raios de intensidade SAR mostram que nossa proposta tem um desempenho melhor do que os modelos Γ -ARMA e \mathcal{G}_0^I -ARMA, sobretudo em áreas urbanas.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Algumas das pesquisas futuras que ficam em aberto são

- Estimadores de forma fechada baseado nos log cumulantes
- Correção de Viés para os parâmetros, em particular interesse o parâmetro L .
- Teste de hipótese para identificação de textura em imagens SAR.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA-JUNIOR, P. M.; NASCIMENTO, A. D. C. \mathcal{G}_I^0 ARMA process for speckled data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 9, p. 3125–3153, 2021.
- BAYER, F.; BAYER, D. M.; PUMI, G. Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded environmental data. *Journal of Hydrology*, v. 555, p. 385–396, 2017.
- BAYER, F. M.; BAYER, D. M.; MARINONI, A.; GAMBA, P. A novel Rayleigh dynamical model for remote sensing data interpretation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 58, p. 4989–4999, 2020.
- BENJAMIN, M. A.; RIGBY, R. A.; STASINOPOULOS, D. M. Generalized autoregressive moving average models. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 98, p. 214–223, 2003.
- BOUROUIS, S.; SALLAY, H.; BOUGUILA, N. A competitive generalized gamma mixture model for medical image diagnosis. *IEEE Access*, v. 9, p. 13727–13736, 2021.
- BOX, G. E. P.; COX, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 26, p. 211–243, 1964.
- CHEN, C.; TWYXCROSS, J.; GARIBALDI, J. A new accuracy measure based on bounded relative error for time series forecasting. *PLoS ONE*, v. 12, 2017.
- DELP, E. J.; KASHYAP, R. L.; Robert Mitcheli, O. Image data compression using autoregressive time series models. *Pattern Recognition*, v. 11, p. 313–323, 1979.
- DESPOTOVIC, M.; NEDIC, V.; DESPOTOVIC, D.; CVETANOVIC, S. Evaluation of empirical models for predicting monthly mean horizontal diffuse solar radiation. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 56, p. 246–260, 2016. ISSN 1364-0321.
- DING, B.; WEN, G. Combination of global and local filters for robust SAR target recognition under various extended operating conditions. *Information Sciences*, v. 476, p. 48–63, 2019. ISSN 0020-0255.
- FUKUNAGA, K. Chapter 1 - introduction. In: FUKUNAGA, K. (Ed.). *Introduction to Statistical Pattern Recognition (Second Edition)*. Second edition. Boston: Academic Press, 1990. p. 1–10.
- GAO, G. *Characterization of SAR Clutter and Its Applications to Land and Ocean Observations*. Singapore: Springer Singapore, 2019.
- GAO, G.; OUYANG, K.; LUO, Y.; LIANG, S.; ZHOU, S. Scheme of parameter estimation for generalized gamma distribution and its application to ship detection in SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 55, n. 3, p. 1812–1832, 2017.
- GOMES, O.; COMBES, C.; DUSSAUCHOY, A. Parameter estimation of the generalized gamma distribution. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 79, p. 955–963, 2008.
- HAGER, H. W.; BAIN, L. J. Inferential procedures for the generalized gamma distribution. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 65, p. 1601–1609, 1970.

- HAJNSEK, I.; DESNOS, Y. *Polarimetric Synthetic Aperture Radar: Principles and Application*. Switzerland: Springer International Publishing, 2021.
- KEDEM, B.; FOKIANOS, K. *Regression Models for Time Series Analysis*. Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 2005. (Wiley Series in Probability and Statistics). ISBN 978-0-471-36355-2.
- LI, H.; HONG, W.; WU, Y.; FAN, P. An efficient and flexible statistical model based on generalized gamma distribution for amplitude SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 48, p. 2711–2722, 2010.
- LI, H.-C.; HONG, W.; WU, Y.-R.; FAN, P.-Z. On the empirical-statistical modeling of SAR images with generalized gamma distribution. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, v. 5, p. 386–397, 2011.
- MCCORMICK, B. H.; JAYARAMAMURTHY, S. N. Time series model for texture synthesis. *International Journal of Computer & Information Sciences*, v. 3, p. 329–343, 1974.
- MCCULLOCH, C. E.; SEARLE, S. R. *Generalized, linear, and mixed models*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
- MERKLE, M. Gurland's ratio for the gamma function. *Computers & Mathematics With Applications*, v. 49, p. 389–406, 2005.
- NASCIMENTO, A. D. C. Teoria estatística da informação para dados de radar de abertura sintética univariados e polarimétricos. *Universidade Federal de Pernambuco (Tese de Doutorado)*, 2012.
- NASCIMENTO, A. D. C.; FRERY, A. C.; CINTRA, R. J. Bias correction and modified profile likelihood under the Wishart complex distribution. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 52, p. 4932–4941, 2014.
- NEEFF, T.; BIGING, G. S.; DUTRA, L. V.; FREITAS, C. C.; dos Santos, J. R. Markov point processes for modeling of spatial forest patterns in Amazonia derived from interferometric height. *Remote Sensing of Environment*, v. 97, p. 484–494, 2005. ISSN 0034-4257.
- OLIVER, C.; QUEGAN, S. *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Wellesley Park N Raleigh: SciTech Publ., 2004. (EngineeringPro collection). ISBN 9781891121319.
- QIN, X.; ZHOU, S.; ZOU, H.; GAO, G. A CFAR detection algorithm for generalized gamma distributed background in high-resolution SAR images. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 10, p. 806–810, 2013.
- QIN, X.; ZOU, H.; ZHOU, S.; JI, K. Region-based classification of SAR images using Kullback–Leibler distance between generalized gamma distributions. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, v. 12, n. 8, p. 1655–1659, 2015.
- RANGAYYAN, R. M. *Biomedical image analysis*. [S.l.]: CRC press, 2004.
- ROCHA, A.; CRIBARI-NETO, F. Beta autoregressive moving average models. *TEST*, v. 18, p. 529–545, 11 2009.
- SCHER, V. T.; CRIBARI-NETO, F.; PUMI, G.; BAYER, F. M. Goodness-of-fit tests for β -arma hydrological time series modeling. *Environmetrics*, v. 31, p. e2607, 2020.

SHEN, P.; WANG, C.; FU, H.; ZHU, J.; HU, J. Estimation of equivalent number of looks in time-series Pol(In)SAR data. *Remote Sensing*, v. 12, n. 17, 2020. ISSN 2072-4292.

STACY, E. W. A Generalization of the Gamma Distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 33, p. 1187 – 1192, 1962.

TIAN, D.; GONG, M. A novel edge-weight based fuzzy clustering method for change detection in SAR images. *Information Sciences*, v. 467, p. 415–430, 2018. ISSN 0020-0255.

TOUMI, A.; KHENCHAF, A.; HOELTZENER, B. A retrieval system from inverse synthetic aperture radar images: Application to radar target recognition. *Information Sciences*, v. 196, p. 73–96, 2012. ISSN 0020-0255.

WARD, K. D.; TOUGH, R. J. A.; WATTS, S. Sea clutter: Scattering, the K distribution and radar performance. *Waves in Random and Complex Media*, v. 17, p. 233 – 234, 2006.

YANG, D.; JIAO, L.; GONG, M.; LIU, F. Artificial immune multi-objective SAR image segmentation with fused complementary features. *Information Sciences*, v. 181, n. 13, p. 2797–2812, 2011. ISSN 0020-0255. Including Special Section on Databases and Software Engineering.

ZHENG, T.; XIAO, H.; CHEN, R. Generalized arma models with martingale difference errors. *Journal of Econometrics*, v. 189, n. 2, p. 492–506, 2015. ISSN 0304-4076. Frontiers in Time Series and Financial Econometrics.

APÊNDICE A – PROVA DO TEOREMA

Seja $f_{Z_t}(z_t | \mathcal{F}_{t-1}; \nu, L, \mu_t)$ como dada em Eq (3.4) e Z_{0t} uma variável aleatória contínua com densidade

$$f_{Z_{0t}}(z_{0t} | \mathcal{F}_{t-1}; \nu, L, \mu_t) = \frac{|\nu|}{\Gamma(L)\mu_t} \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \exp\left\{-\left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu\right\}. \quad (1)$$

Então, suponha que $Z_t = \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^{-1} Z_{0t}$,

$$F_{Z_t}(z_t) = \mathbb{P}(Z_t \leq z_t) = \mathbb{P}\left(Z_{0t} \leq \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right] z_t\right) = F_{Z_{0t}}\left(\left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right] z_t\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_{Z_t}(z_t) &= \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right] f_{Z_{0t}}\left(\left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right] z_t\right) \\ &= \frac{|\nu|}{\Gamma(L)\mu_t} \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^{L\nu} \left(\frac{z_t}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \exp\left\{-\left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^\nu \left(\frac{z_t}{\mu_t}\right)^\nu\right\} \end{aligned}$$

Então, a distribuição de Z_t é dada pela transformação linear $Z_t = \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^{-1} Z_{0t}$.

Também temos que se $\frac{Z_t}{\mu_t} = \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^{-1} \frac{Z_{0t}}{\mu_t}$,

$$\begin{aligned} F_{\frac{Z_t}{\mu_t}}(z_t^*) &= \mathbb{P}(Z_t \leq \mu_t z_t^*) = \mathbb{P}\left(Z_{0t} \leq \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right] \mu_t z_t^*\right) \\ &= F_{Z_{0t}}\left(\left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right] \mu_t z_t^*\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_{\frac{Z_t}{\mu_t}}(z_t^*) &= \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)\mu_t}{\Gamma(L)}\right] f_{Z_{0t}}\left(\left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)\mu_t}{\Gamma(L)}\right] z_t^*\right) \\ &= \frac{|\nu|}{\Gamma(L)} \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^{L\nu} (z_t^*)^{L\nu-1} \exp\left\{-\left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^\nu (z_t^*)^\nu\right\}. \end{aligned}$$

Na qual é a distribuição de $\frac{Z_{0t}}{\mu_t}$. Então, a distribuição de $\frac{Z_t}{\mu_t}$ também é dada pela transformação linear $\frac{Z_t}{\mu_t} = \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)}\right]^{-1} \frac{Z_{0t}}{\mu_t}$.

Proof. Sabemos que

$$\int_0^\infty f_{Z_{0t}}(z_{0t}) dz_{0t} = 1 \therefore \int_0^\infty \frac{|\nu|}{\Gamma(L)\mu_t} \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \exp\left\{-\left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu\right\} dz_{0t} = 1 \quad (2)$$

$$\therefore \int_0^\infty \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \exp\left\{-\left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu\right\} dz_{0t} = \frac{\Gamma(L)\mu_t}{|\nu|} \quad (3)$$

Então, derivando ambos os lados h -ésima vezes a Eq. (3) em relação à L , temos

$$\int_0^\infty \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \log^h \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right) \nu^h \exp \left\{ \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right\} dz_{0t} = \frac{\Gamma^{(h)}(L)\mu_t}{|\nu|} = \frac{\Gamma(L)D_h(L)\mu_t}{|\nu|}$$

$$\therefore \mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_{0t}}{\mu_t}\right) \right] = \frac{D_h(L)}{\nu^h}$$

onde $D_h(L) = \begin{cases} D'_{h-1}(L) + \psi^{(0)}(L)D_{h-1}(L), & \text{para } h \in \mathbb{N}^* \\ 1, & \text{se } h = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$. Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_t}{\mu_t}\right) \right] &= \mathbb{E} \left\{ \left[\log \left(\frac{Z_{0t}}{\mu_t}\right) + \log \left(\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)}\right) \right]^h \right\} \\ &= \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} \mathbb{E} \left[\log^{h-k} \left(\frac{Z_{0t}}{\mu_t}\right) \right] \log^k \left(\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} \frac{D_{h-k}(L)}{\nu^{h-k}} \log^k \left(\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)}\right) \end{aligned}$$

Para $\mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_t}{\mu_t}\right) \left(\frac{Z_t}{\mu_t}\right)^\nu \right]$ nós temos que derivando $h-1$ vezes a Eq. (3) em relação à L e derivando mais uma vez o resultado da expressão com relação à ν nós temos o seguinte

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \log^{h-1} \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right) \left[\log \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right) \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \exp \left\{ -\left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right\} L + \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \exp \left\{ -\left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right\} \right. \\ \left. \left(-\log \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right) \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right) \right] dz_{0t} = -\Gamma(L)D_{h-1}(L)\mu_t h \frac{\nu^{2-h}}{|\nu|^3} \\ \therefore \int_0^\infty \log^h \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^{L\nu-1} \exp \left\{ -\left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right\} \left[L - \left(\frac{z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right] dz_{0t} = -\frac{\Gamma(L)D_{h-1}(L)\mu_t h}{|\nu| \nu^h} \\ \therefore \mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_{0t}}{\mu_t}\right) \left(\frac{Z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right] = \frac{LD_h(L) + hD_{h-1}(L)}{\nu^h}. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_t}{\mu_t}\right) \left(\frac{Z_t}{\mu_t}\right)^\nu \right] = \mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{cZ_{0t}}{\mu_t}\right) \left(\frac{cZ_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right],$$

onde $c = \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right]^{-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\log^h \left(\frac{Z_t}{\mu_t}\right) \left(\frac{Z_t}{\mu_t}\right)^\nu \right] &= c^\nu \mathbb{E} \left[\left(\log \left(\frac{Z_{0t}}{\mu_t}\right) + \log(c) \right)^h \left(\frac{Z_{0t}}{\mu_t}\right)^\nu \right] \\ &= c^\nu \sum_{k=0}^h \binom{h}{k} \frac{[LD_{h-k}(L) + hD_{h-k-1}(L)]}{\nu^{h-k}} \log^k(c). \end{aligned}$$

□

APÊNDICE B – INFORMAÇÃO DE FISHER PARA O GI-ARMA

Da segunda derivada de ℓ_t em relação à ν , $U_{\nu\nu}$, podemos escrevê-la da seguinte forma

$$\begin{aligned}
U_{\nu\nu} &= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} + \frac{L}{\nu^3} \psi^{(1)}(L+1/\nu) - \left[\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right]^{-\nu} \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right)^\nu \{ \log^2(z_t) \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \left(1 + \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) + \log(z_t) \right) \\
&\quad + \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 + \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) + \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu^3} \} \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} + \frac{L}{\nu^3} \psi^{(1)}(L+1/\nu) - \left[\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right]^{-\nu} \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right)^\nu \left\{ \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu^3} \right. \\
&\quad + \log^2(z_t) + \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) + 2 \log(z_t) \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) - 2 \log(z_t) \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \left(1 + \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) + \log(z_t) \right) \\
&\quad + \left. \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 \right\} \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} + \frac{L}{\nu^3} \psi^{(1)}(L+1/\nu) - \left[\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right]^{-\nu} \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right)^\nu \left\{ \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu^3} \right. \\
&\quad + \log^2 \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) - 2 \log(z_t) \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) + 2 \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) - 2 \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \left[1 + \log \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) \right] \\
&\quad + \left. \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 \right\} \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} + \frac{L}{\nu^3} \psi^{(1)}(L+1/\nu) - \left[\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right]^{-\nu} \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right)^\nu \left\{ \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu^3} \right. \\
&\quad + \log^2 \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) - 2 \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \log \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) + 2 \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \left[1 + \log \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) \right] \\
&\quad + \left. \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Seja $\left[\frac{\Gamma(L)}{\Gamma(L+1/\nu)} \right] = c$. Então, aplicando o Teorema, $\mathbb{E}[U_{\nu\nu}]$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_{\nu\nu}] &= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} + \frac{L}{\nu^3} \psi^{(1)}(L+1/\nu) - c^{-\nu} \left\{ \mathbb{E} \left[\log^2 \left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right) \left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right)^\nu \right] \right. \\
&\quad + \left\{ \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu^3} + 2 \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \right. \\
&\quad + \left. \left. \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 \right\} \mathbb{E} \left[\left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right)^\nu \right] \right. \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} - \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \right] \mathbb{E} \left[\log \left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right) \left(\frac{Z_t}{\mu_t} \right)^\nu \right] \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} + \frac{L}{\nu^3} \psi^{(1)}(L+1/\nu) - c^{-\nu} \left\{ c^\nu L \left\{ \left[\frac{\psi^{(1)}(L) + (\psi^{(0)}(L))^2 \right] \right. \right. \\
&\quad + 2\psi^{(0)}(L)/L \\
&\quad + 2 \left[\frac{\psi^{(0)}(L) + 2/L}{\nu} \right] \log(c) + \log^2(c) \left. \right\} + c^\nu L \left\{ \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu^3} + 2 \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \right. \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] + \left. \left. \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 \right\} \right. \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} - \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \right] c^\nu L \left[\frac{\psi^{(0)}(L) + 1/L}{\nu} + \log(c) \right] \left. \right\} \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} + \frac{L}{\nu^3} \psi^{(1)}(L+1/\nu) - c^{-\nu} \left\{ c^\nu L \left\{ \left[\frac{\psi^{(1)}(L) + (\psi^{(0)}(L))^2 \right] \right. \right. \\
&\quad + 2\psi^{(0)}(L)/L \\
&\quad + 2 \left[\frac{\psi^{(0)}(L) + 2/L}{\nu} \right] \log(c) + \log^2(c) \left. \right\} + c^\nu L \left\{ \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu^3} + 2 \log^2 \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \right. \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] + \left. \left. \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 \right\} \right. \\
&\quad + 2 \left[\log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} - \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \right] c^\nu L \left[\frac{\psi^{(0)}(L) + 1/L}{\nu} + \log(c) \right] \left. \right\} \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\frac{1}{\nu^2} - L \left\{ \frac{\psi^{(0)}(L)}{\nu^2} + \left[\frac{\psi^{(0)}(L) - \psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 + \frac{4}{\nu L} - \log(c) \right. \\
&\quad + 2\psi^{(0)}(L) \frac{\nu+L}{\nu L} - \frac{2\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \left[1 + \frac{1}{\nu L} + \log(c) \right] \\
&\quad \left. - 2 \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \left[\frac{\psi^{(0)}(L)}{\nu} + \log(c) - \log \left(\frac{1}{\mu_t} \right) \right] \right\} \\
&= (n-m)c_4 - 2L\mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_2,
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
c_4 &= -\frac{1}{\nu^2} - L \left\{ \frac{\psi^{(0)}(L)}{\nu^2} + \left[\frac{\psi^{(0)}(L) - \psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right]^2 + \frac{4}{\nu L} - \log(c) \right. \\
&\quad \left. + 2\psi^{(0)}(L) \frac{\nu+L}{\nu L} - \frac{2\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \left[1 + \frac{1}{\nu L} + \log(c) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Da segunda derivada de ℓ_t em relação à L , U_{LL} , nós temos

$$\begin{aligned}
U_{LL} &= \sum_{t=m+1}^n -\psi^{(1)}(L) + \nu \left\{ \psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) + \psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right. \\
&\quad + L \left[\psi^{(1)}(L+1/\nu) - \psi^{(1)}(L) \right] \left. \right\} + z_t^\nu \nu \left\{ \nu \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\psi^{(0)}(L) - \psi^{(0)}(L+1/\nu) \right] + \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \left[\psi^{(1)}(L) - \psi^{(1)}(L+1/\nu) \right] \right\} \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\psi^{(1)}(L) + \nu \left[2 \left(\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right) + L \left[\psi^{(1)}(L+1/\nu) - \psi^{(1)}(L) \right] \right] \\
&\quad + \nu z_t^\nu \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \left\{ -\nu \left[\psi^{(0)}(L) - \psi^{(0)}(L+1/\nu) \right]^2 + \psi^{(1)}(L) - \psi^{(1)}(L+1/\nu) \right\}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_{LL}] &= \sum_{t=m+1}^n -\psi^{(1)}(L) + \nu \left[2 \left(\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right) + L \left(\psi^{(1)}(L+1/\nu) - \psi^{(1)}(L) \right) \right] \\
&\quad + \nu L \left\{ -\nu \left[\psi^{(0)}(L) - \psi^{(1)}(L+1/\nu) \right]^2 + \psi^{(1)}(L) - \psi^{(1)}(L+1/\nu) \right\} \\
&= \sum_{t=m+1}^n \underbrace{2\nu \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] - \nu^2 L \left[\psi^{(0)}(L) - \psi^{(1)}(L+1/\nu) \right]^2 - \psi^{(1)}(L)}_{c_1}.
\end{aligned}$$

Para a segunda derivada de ℓ_t com respeito à ν e L , $U_{\nu L}$, temos

$$\begin{aligned}
U_{\nu L} &= \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \nu \partial L} = \sum_{t=m+1}^n \log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} + \log(z_t) \\
&\quad + L \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) - \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] - z_t^\nu \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \\
&\quad \cdot \left\{ \nu \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] \left[\log(z_t) + \log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \right. \\
&\quad \left. + \psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) - \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu} \right\} \\
&= \sum_{t=m+1}^n -\log(c) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} + \log \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) + L \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) - \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \\
&\quad - \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right)^\nu c^{-\nu} \cdot \left\{ \nu \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] \left[\log \left(\frac{z_t}{\mu_t} \right) - \log(c) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] \right. \\
&\quad \left. + \psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) - \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu} \right\}.
\end{aligned}$$

Então, $\mathbb{E}(U_{\nu L})$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_{\nu L}) &= \sum_{t=m+1}^n \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] \left[L + 1 - \frac{1}{\nu} \right] \\
&\quad + L \left\{ \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right]^2 - \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu} \right\},
\end{aligned}$$

e

$$c_2 = \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] \left[L+1 - \frac{1}{\nu} \right] + L \left\{ \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right]^2 - \frac{\psi^{(1)}(L+1/\nu)}{\nu} \right\}.$$

Para as componentes da matriz de Informação de Fisher do modelo $G\Gamma$ que pertencem à componente sistemática nós temos o seguinte: Seja $\lambda_i, \lambda_j \in (\alpha, \phi, \theta, \beta)$, portanto

$$\begin{aligned} U_{\lambda_i \lambda_j} &= \sum_{t=m+1}^n \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \\ &= \sum_{t=m+1}^n \left\{ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \mu_t^2} \left[\frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \right]^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \left[\frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Sob as condições de regularidade, $\mathbb{E} \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \mu_t} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0$ então

$$\mathbb{E} [U_{\lambda_i \lambda_j}] = \sum_{t=m+1}^n \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \mu_t^2} \right] \left[\frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \right]^2 \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_j} \right\},$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \mu_t^2} &= \frac{\partial}{\partial \mu_t} \left\{ \frac{\nu}{\mu_t} \left[z_t^\nu \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu - L \right] \right\} \\ &= \frac{\nu z_t^\nu}{\mu_t^2} \left\{ \frac{L}{z_t^\nu} - \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu (\nu+1) \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema

$$\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\delta})}{\partial \mu_t^2} \right] = -\frac{\nu^2 L}{\mu_t^2}.$$

Para $U_{\lambda_i L}$, temos

$$U_{\lambda_i L} = \sum_{t=m+1}^n \frac{\nu}{\mu_t} \left\{ \nu z_t^\nu \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu - 1 \right\} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_{\lambda_i L}] &= \sum_{t=m+1}^n \underbrace{\nu \left\{ \nu L \left[\psi^{(0)}(L+1/\nu) - \psi^{(0)}(L) \right] - 1 \right\}}_{c_3} \frac{1}{\mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= c_3 \sum_{t=m+1}^n \frac{1}{\mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$

Para $U_{\lambda_i \nu}$, temos

$$U_{\lambda_i \nu} = \left\{ \frac{\nu z_t^\nu}{\mu_t} \left[\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right]^\nu \left[\frac{1}{\nu} + \log(z_t) \log \left(\frac{\Gamma(L+1/\nu)}{\mu_t \Gamma(L)} \right) - \frac{\psi^{(0)}(L+1/\nu)}{\nu} \right] - \frac{1}{\mu_t} \right\} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_{\lambda_i, \nu}] &= \sum_{t=m+1}^n \left\{ \frac{\nu L}{\mu_t} \left[\frac{\psi^{(0)}(L) - \psi^{(0)}(L + 1/\nu) + 1}{\nu} \right] \right\} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i} \\ &= - \left[\frac{c_3}{\nu^2} + \frac{1}{\nu} - L \right] \sum_{t=m+1}^n \frac{1}{\mu_t} \frac{\partial \mu_t}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \lambda_i}. \end{aligned}$$