



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DANIEL CÉSAR PEREIRA LOPES

**Estimativas de Decaimento Inferiores e Superiores para as soluções das Equações
de Navier-Stokes no espaço $\dot{H}^m$**

Recife

2022

DANIEL CÉSAR PEREIRA LOPES

**Estimativas de Decaimento Inferiores e Superiores para as soluções das Equações
de Navier-Stokes no espaço $\dot{H}^m$**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato

:

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

L864e Lopes, Daniel César Pereira
 Estimativas de decaimento inferiores e superiores para as soluções das equações de Navier-Stokes no espaço H_m / Daniel César Pereira Lopes. – 2022.
 87 f.

 Orientador: Cilon Valdez Ferreira Perusato.
 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Estatística, Recife, 2022

 Inclui referências e apêndices.

 1. Análise. 2. Equações. I. Perusato, Cilon Valdez Ferreira (orientador). II. Título.

 515 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2022-179

DANIEL CÉSAR PEREIRA LOPES

*ESTIMATIVAS DE DECAIMENTO INFERIORES E SUPERIORES PARA AS SOLUÇÕES DAS
EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES NO ESPAÇO H^m*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 28/07/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Cilon Valdez Ferreira Perusato (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. César Javier Niche (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Clessius Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Dedico ao meu avô João

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus. Depois agradeço à minha família, que apesar dos percalços, esteve sempre ao meu lado ao longo desses anos tão complicados para o mundo. Sou grato em especial às Marias (avó e mãe), Bruno, Ismael, Eduarda, Anderson e Alania. Agradeço à minha namorada Ewelim por todo apoio dado e todo companheirismo durante esse tempo.

Sou eternamente grato ao meu orientador Cilon Perusato por ter sido um orientador incrível que sempre me ajudou muito ao longo desse curso. Agradeço, também, ao meu orientador do tempo de graduação Clessius Silva, por ter contribuído de forma muito importante na minha formação e me apresentado ao mundo das EDP's.

Agradeço a todos os professores que tive no programa pelas experiências passadas. Todos eles, de alguma forma, me fizeram crescer. Alguns desses mestres para sempre serão inspiração para minha carreira, especialmente o professor Cilon.

Também não poderia esquecer os amigos que fiz na matemática, em especial os amigos que estiveram comigo no mestrado, como: Hugo, Willikat, entre outros. Obrigado pelos ótimos momentos pelos quais me fizeram passar durante esse curso.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro dado ao longo desse mestrado.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentarmos estimativas para o decaimento em L^2 de todas as derivadas para as soluções fracas das equações de Navier-Stokes, seguindo as linhas de (GUTERRES et al., 2022). De forma mais precisa, partindo de condições iniciais dadas em L^2_σ , buscamos estimar o decaimento (para tempo grande) das soluções na norma $\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)$, para cada $m \geq 0$ inteiro. Para isso, aplicamos para as equações de Navier-Stokes os resultados gerais originalmente para uma classe de EDP's parabólicas obtidos em (GUTERRES et al., 2022). Neste caso, apresentamos uma prova mais simples dos resultados. Ao longo desse trabalho, assumimos sempre a hipótese do fluido ser incompressível. Além do mais, ao longo do texto demonstramos alguns resultados auxiliares de interesse como: ferramentas de análise, resultados sobre o comportamento assintótico para a equação do calor e desigualdades do tipo Sobolev. Em particular, mostramos a desigualdade do tipo Sobolev desenvolvida em (SILVA; ZINGANO; ZINGANO, 2019).

Palavras-chaves: problema de Leray; taxas de decaimento; desigualdades de Sobolev; equações de Navier-Stokes.

ABSTRACT

The objective of this work is to present estimates for the decay in L^2 of the all derivatives for the weak solutions of the Navier-Stokes equations, following the lines of (GUTERRES et al., 2022). More precisely, starting from initial conditions given in L^2_σ , we seek to estimate the decay (for long time) of the solutions in the norm $\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)$, for each integer $m \geq 0$. For this, we apply to the Navier-Stokes equations the general results originally for a class of parabolic EDP's obtained in (GUTERRES et al., 2022). In this case, we present a simpler proof of the results. Throughout this work, we have always assumed the fluid to be incompressible. Furthermore, throughout the text we proof some auxiliary results of interest such as: analysis tools, results on the asymptotic behavior for the heat equation and Sobolev-type inequalities. In particular, we show the Sobolev-type inequality developed in (SILVA; ZINGANO; ZINGANO, 2019).

Keywords: Leray's problem; decay rates; Sobolev inequalities; Navier-Stokes equations.

LISTA DE SÍMBOLOS

$$\mathbf{u}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t));$$

$$\nabla \mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n D_i u_i(x, t) \hat{e}_i \text{ denota o gradiente espacial de } \mathbf{u}(x, t);$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n D_i u_i(x, t) \text{ denota o divergente espacial de } \mathbf{u}(x, t);$$

$$L^p_\sigma(\mathbb{R}^n) \text{ denota o espaço das funções } \mathbf{u} \in L^p(\mathbb{R}^n), \text{ com } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0;$$

$$\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \text{ com } 1 \leq p < \infty, \text{ denota a norma tradicional do espaço de Lebesgue};$$

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{u : u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^p} < \infty\};$$

$$\|\mathbf{u}(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |u_i(x, t)|^p dx \right\}^{1/p};$$

$$\|D\mathbf{u}(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_j u_i(x, t)|^p dx \right\}^{1/p};$$

$$\|D^m \mathbf{u}(x, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{i,j_1,\dots,j_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_{j_1} \dots D_{j_m} u_i(x, t)|^p dx \right\}^{1/p};$$

$$\text{Se } p = \infty, \text{ temos a definição do chamado supremo essencial de } \mathbf{u}(x, t);$$

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max \|u_i(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} : 1 \leq i \leq n;$$

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max \|D_j u_i(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} : 1 \leq i, j \leq n;$$

$$\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \max \|D_{j_1} \dots D_{j_m} u_i(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} : 1 \leq i, j_1, \dots, j_m \leq n;$$

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}|^2 d\xi, \text{ para todo } s \geq 0;$$

$$\|D^m f\|_{L^2} = \|f\|_{\dot{H}^m}, \text{ para todo } m \geq 0 \text{ inteiro.}$$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	RESULTADOS PRELIMINARES	14
2.1	TRANSFORMADA DE FOURIER EM L^2	14
2.1.1	Definição e Propriedades	14
2.1.2	Solução Fundamental para a Equação do Calor	18
3	ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR	20
3.1	PRELIMINARES E PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS PARA A EQUAÇÃO DO CALOR	20
3.2	ESTIMATIVAS SUPERIORES	35
3.3	ESTIMATIVAS INFERIORES	38
4	ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	41
4.1	ESTIMATIVAS SUPERIORES	49
4.2	ESTIMATIVAS INFERIORES	70
	REFERÊNCIAS	78
	APÊNDICE A – RESULTADOS DE ANÁLISE E TEORIA DA MEDIDA	80
	APÊNDICE B – ESPAÇO DE SOBOLEV HOMOGÊNEO $\dot{H}^s$	84

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, encontramos estimativas de decaimento superiores e inferiores para as derivadas das soluções das equações de Navier-Stokes. Aqui, aplicamos os resultados obtidos em (GUTERRES et al., 2022) para as equações de Navier-Stokes. Deste modo, mostramos algumas propriedades assintóticas (para tempo grande) para soluções fracas globais de Leray-Hopf das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis no espaço tridimensional

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, & t > 0; \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & t \geq 0; \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (1.1)$$

com $\nu > 0$ constante (de viscosidade), $\mathbf{f}$ uma função correspondente às forças externas, e $L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ corresponde ao espaço das funções $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ tais que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, ou seja, o fluido nesse caso é incompressível. Aqui, trabalhamos com casos onde as forças externas $\mathbf{f}$ não são consideradas.

Seja uma EDP evolutiva

$$\mathbf{u}_t = F(x, t, \mathbf{u}, D\mathbf{u}, D^2\mathbf{u}, \dots, D^m\mathbf{u}) \quad (1.2)$$

com soluções globais definidas em L^2 para todo $t > 0$. Dizemos que a EDP dada em (1.2) satisfaz a **Propriedade de Leray** quando

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_L^2 \rightarrow 0 \text{ ao } t \rightarrow \infty.$$

Quando a EDP em (1.2) for a equação de Navier-Stokes chamaremos de **Problema de Leray**.

As equações advindas da Dinâmica dos Fluidos (ou mesmo de outros modelos físicos) são estudadas de forma ampla durante os dias atuais. Com isso, compreender o comportamento qualitativo de suas soluções é o primeiro passo para compreender o fenômeno descrito por tais modelos. Em 1934, Leray mostrou em seu famoso artigo (LERAY, 1934) a existência de soluções fracas globais para as equações de Navier-Stokes $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ que satisfazem

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, \infty), \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$$

e são fracamente contínuas em $L^2(\mathbb{R}^3)$, com $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Leray ainda mostrou que vale a desigualdade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, em sua construção, Leray em (LERAY, 1934) mostrou que sempre existe um $t_* > 0$ suficientemente grande que depende da condição inicial $\mathbf{u}_0$ tal que se $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [t_*, \infty))$, e, para cada inteiro $m \geq 1$, vale

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty([t_*, T], H^m(\mathbb{R}^3)),$$

para cada $t_* < T < \infty$, isto é, $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L_{loc}^\infty([t_*, \infty), H^m(\mathbb{R}^3))$.

Recentemente, foi mostrado no artigo (ALBRITTON; BRUÉ; COLOMBO, 2022) que tais soluções (na presença de certas forças externas) não são únicas. O problema continua em aberto para o caso sem termo forçante. A existência global de soluções clássicas é um problema em aberto, isso torna a compreensão teórica dessas soluções incompleta. Além do mais, tal problema pertence ao quadro de problemas do milênio, atribuído pelo *Clay Mathematics Institute*.

Em (LERAY, 1934), Leray deixou na última página a seguinte nota:

J'ignore si $W(t)$ ¹ tend nécessairement vers 0 quand t augmente indéfiniment.

Em outras palavras, Leray deixou em aberto se é válido ou não que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0. \quad (1.3)$$

Apenas em 1984, ou seja, cinquenta anos depois, o problema foi resolvido, e positivamente, por Kato (KATO, 1984) e no mesmo ano por Masuda (MASUDA, 1984) posteriormente. Além do mais, a abordagem de Masuda se aplica a domínios mais gerais. Para maiores detalhes sobre as técnicas envolvidas nos dois trabalhos citados anteriormente, recomenda-se a revisão (BRANDOLESE; SCHONBEK, 2018).

Partindo disso, Maria Schonbek (SCHONBEK, 1986) mostrou que para dados exclusivamente em L_σ^2 o decaimento para tempo grande sem uma taxa uniforme é o melhor esperado. Além disso, Schonbek (SCHONBEK, 1985) mostrou que ao considerar dados iniciais em $L^1 \cap L_\sigma^2$, obtém-se um decaimento algébrico da ordem de $O(t^{-\frac{3}{4}})$.

¹ $W(t)$ é definido em (LERAY, 1934) como quadrado da norma L^2 da solução $\mathbf{u}$ das equações de Navier-Stokes.

O método conhecido como *Fourier Splitting* (FS), usado em (SCHONBEK, 1985), foi desenvolvido primeiramente em (SCHONBEK, 1980) para se obter taxas algébricas de decaimento para leis de conservação parabólicas. O método *Fourier Splitting* se aplica a uma grande classe de sistemas difusivos. Assim, existem diversas aplicações de *Fourier Splitting* para se estimar o comportamento das derivadas de ordem mais alta (**Problema de Leray em $\dot{H}^m$**), veja os trabalhos (SCHONBEK, 1995) e (SCHONBEK; WIEGNER, 1996).

Um outro trabalho, devido a C. Niche e M. E. Schonbek em (NICHE; SCHONBEK, 2015), refina e estende mais ainda os resultados para as derivadas. Neste trabalho, importantes contribuições foram dadas, onde os autores estenderam e refinaram a técnica conhecida como *Decay Character*. Esta teoria é fundamental para garantir que algumas hipóteses feitas aqui são não vazias, pois garante estimativas superiores e inferiores para a norma L^2 (inclusive para a norma H^m) das soluções, dependendo da condição inicial (veja a hipótese do Teorema 4.11, por exemplo).

Nesta dissertação, mostramos que as soluções de Leray para as equações de Navier-Stokes decaem com certas taxas no espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^m$. Mostramos estimativas superiores para esse tipo de solução, que nos dizem que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)} = \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_m t^{-\alpha - \frac{m}{2}}, \text{ para todo } m \geq 1 \text{ inteiro,}$$

assim como estimativas inferiores

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^3)} = \|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_m t^{-\alpha - \frac{m}{2}}, \text{ para todo } m \geq 1 \text{ inteiro.}$$

Em ambos os casos temos certas hipóteses acerca da solução de Leray $\mathbf{u}(\cdot, t)$. Para chegarmos nesses resultados, trilhamos um caminho que se iniciou no *Capítulo 2*, onde mostramos algumas propriedades importantes sobre a transformada de Fourier em L^2 . O resultado mais impactante nessa parte inicial foi o Teorema de Plancherel.

No *Capítulo 3*, obtemos com a equação do calor homogênea, onde a partir de propriedades assintóticas e alguns resultados preliminares, mostramos o problema de Leray. Antes de chegar no problema de Leray, mostramos também a igualdade de energia. Além disso, chegamos a demonstrar as estimativas superiores e inferiores para a solução de Leray para a equação do calor.

No *Capítulo 4*, obtemos os principais resultados desta dissertação. Onde as técnicas utilizadas na demonstração desses resultados encontram-se em (KREISS et al., 2003). Neste

capítulo, obtemos com as equações de Navier-Stokes. Inicialmente, mostramos resultados sobre a regularidade das soluções para a equação de Navier-Stokes a partir de um tempo t_* suficientemente grande. Depois disso, obtemos a igualdade de energia, o problema de Leray para as equações de Navier-Stokes, entre outros resultados. Para mostrarmos alguns desses resultados, tivemos o auxílio de desigualdades do tipo Sobolev obtidas no artigo (SILVA; ZINGANO; ZINGANO, 2019). Com isso, finalmente, chegamos nas estimativas que queríamos demonstrar. Assim como, também mostramos algumas estimativas reversas.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 TRANSFORMADA DE FOURIER EM L^2

2.1.1 Definição e Propriedades

O estudo das transformadas de Fourier tem suma importância na demonstração dos resultados presentes neste trabalho, especificamente a transformada de Fourier em L^2 . Inicialmente, vamos definir a transformada de Fourier em L^1 .

Definição 2.1. (Transformada de Fourier em L^1) Sejam $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $i = \sqrt{-1}$, definimos a transformada de Fourier de u por

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos também a transformada de Fourier inversa de u por

$$\check{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} u(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Uma observação é que como $|e^{\pm ixy}| = 1$ e $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, as integrais convergem para cada $y \in \mathbb{R}^n$.

Adiante vamos estender tal definição para funções $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Para tanto, veremos o teorema de Plancherel, que é um importante resultado acerca da transformada de Fourier.

Teorema 2.1. (Plancherel) Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (2.1)$$

Demonstração. Primeiramente, note que se $v, w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos que $\hat{v}, \hat{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) \hat{w}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(y) w(y) dy, \quad (2.2)$$

com a expressão igual

$$\frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} v(x) w(y) dx dy.$$

Além disso, temos que é válida a seguinte identidade (mostraremos posteriormente)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \quad (t > 0).$$

Consequentemente, se $\epsilon > 0$ e $v_\epsilon(x) = e^{-\epsilon|x|^2}$, temos

$$\hat{v}_\epsilon(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}}}{(2\epsilon)^{\frac{n}{2}}}.$$

Logo, de (2.2) temos que para cada $\epsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y) e^{-\epsilon|y|^2} dy = \frac{1}{(2\epsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} dx. \quad (2.3)$$

Agora tome $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e seja $v(x) = \bar{u}(-x)$. Seja também $w = u * v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ e temos que

$$\hat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Porém,

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \bar{u}(-x) dx = \bar{\hat{u}}(y)$$

e então $\hat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{u}|^2$.

Como w é contínua, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\epsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon}} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w(0).$$

Como $\hat{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{u}|^2 \geq 0$ deduzimos para $\epsilon \rightarrow 0^+$ em (2.3) que $\hat{w}$ é somável, com

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} w(0).$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx.$$

Portanto,

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Para $\check{u}$, basta usar um argumento análogo.

□

Definição 2.2. (Transformada de Fourier em L^2) Da igualdade (2.1) podemos definir a transformada de Fourier de uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Considere uma sequência $\{u_k\}_{k=1}^\infty \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ com

$$u_k \rightarrow u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema de Plancherel,

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{u_k - u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

então $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, essa sequência converge, definimos que convirja para $\hat{u}$, daí

$$\hat{u}_k \rightarrow \hat{u} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n)$$

A definição de $\hat{u}$ não depende da escolha da sequência aproximada $\{\hat{u}_k\}_{k=1}^\infty$. Similarmente define-se $\check{u}$.

Adiante, veremos um resultado que traz algumas propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.2. *Sejam $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, Então*

1. $\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}} dy.$
2. $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \hat{u}$, para cada multiindexado α tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
3. $(u * v)^\wedge = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v}.$
4. $u = (\hat{u})^\check{}$.

Demonstração. (1) Sejam $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Daí

$$\|u + \alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u} + \widehat{\alpha v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|u|^2 + |\alpha v|^2 + \bar{u}(\alpha v) + u(\bar{\alpha v})) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{u}|^2 + |\widehat{\alpha v}|^2 + \bar{\hat{u}}(\widehat{\alpha v}) + \hat{u}(\bar{\widehat{\alpha v}})) dy,$$

então, pelo teorema de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \bar{u} v + \bar{\alpha} u \bar{v}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \bar{\hat{u}} \hat{v} + \bar{\alpha} \hat{u} \bar{\hat{v}}) dy.$$

Tomando $\alpha = 1, i$ na equação acima, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}} dy.$$

(2) Suponha que $u \in C^\infty$ e também suponha que u tem suporte compacto, logo

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha u}(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} D^\alpha u(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (e^{-ixy}) u(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} (iy)^\alpha u(x) dx \\ &= (iy)^\alpha \hat{u}(x).\end{aligned}$$

Por aproximação, segue que essa igualdade é válida para $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(3) Temos, para $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e $y \in \mathbb{R}^n$, que

$$\begin{aligned}(\widehat{u * v})(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}^n} u(z) v(x-z) dz dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z+x-z)y} \int_{\mathbb{R}^n} u(z) v(x-z) dz dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-izy} u(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-z)y} v(x-z) dx \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-izy} u(z) dz \cdot \hat{v}(y) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}(y) \hat{v}(y).\end{aligned}$$

(4) Fixe $z \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ e defina

$$v_\epsilon(x) = e^{ixz - \epsilon|x|^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\hat{v}_\epsilon(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix(y-z) - \epsilon|x|^2} dx \\ &= \frac{1}{(2\epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x-z|^2}{4\epsilon}},\end{aligned}$$

essa igualdade segue dos argumentos usados na demonstração do teorema de Plancherel. De (2.2), deduzimos para $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) e^{izy - \epsilon|y|^2} dy = \frac{1}{(2\epsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{\frac{-|x-z|^2}{4\epsilon}} dz.$$

Pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue a expressão da direita converge para $(2\pi)^{\frac{n}{2}} u(z)$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$, para cada ponto de Lebesgue de u .

Portanto,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y) e^{ixy} dy = u(z).$$

□

2.1.2 Solução Fundamental para a Equação do Calor

Considere o problema de valor inicial para a equação do calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty); \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Para auxiliar na solução do problema (2.4), vamos precisar do seguinte resultado:

Lema 2.3. *É válido que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy-t|y|^2} dy = \prod_{l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_l y_l - t|y_l|^2} dy_l = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $b > 0$, daí, tome $z = b^{\frac{1}{2}}x - \frac{a}{2b^{\frac{1}{2}}}i$, com $i^2 = -1$. Logo, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx = \frac{e^{\frac{-a^2}{4b}}}{b^{\frac{1}{2}}} \int_{\Omega} e^{-z^2} dz,$$

em que Ω denota o contorno $\left\{Im(z) = -\frac{a}{2b^{\frac{1}{2}}}\right\}$ no plano complexo. Transformando Ω na reta real, temos que

$$\int_{\Omega} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx = e^{-\frac{a^2}{4b}} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy-t|y|^2} dy = \prod_{l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_l y_l - t|y_l|^2} dy_l = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

□

Agora, vamos resolver o problema (2.4) usando a transformada de Fourier em L^2 . Para tanto, note $\hat{u}$ sendo a transformada de Fourier de u . Logo

$$\begin{cases} \hat{u}_t + |y|^2 \hat{u} = 0 & \text{para } t > 0; \\ \hat{u} = \hat{g} & \text{para } t = 0, \end{cases}$$

onde $\hat{u} = e^{-t|y|^2} \hat{g}$.

Consequentemente, $u = (e^{-t|y|^2}\hat{g})^\vee$, e, portanto

$$u = \frac{g * F}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad (2.5)$$

em que $\hat{F} = e^{-t|y|^2}$.

Logo, para $i = \sqrt{-1}$ e pelo Lema 2.3, temos que

$$\begin{aligned} F &= (e^{-t|y|^2})^\vee \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy-t|y|^2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_l y_l - t|y_l|^2} dy_l \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{(2t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Por (2.5), obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} g(y) dy,$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

3 ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR

3.1 PRELIMINARES E PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

Vamos estudar neste capítulo a equação do calor, tal equação é dada por

$$u_t = \Delta u. \quad (3.1)$$

Aqui neste capítulo, estamos interessados no caso em que $f \equiv 0$, ou seja, no caso em que a equação do calor é homogênea. O caso com $f \neq 0$ (não-homogêneo) não será analisado nesse trabalho.

A equação (3.1) está sujeita a condições iniciais e, em alguns casos, também condições de fronteira. Temos, em (3.1), que $t > 0$ e $x \in \Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Além do mais, temos também que $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, t) = u$, e Δ é o Laplaciano com respeito a variável espacial $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ tal que

$$\Delta u = \Delta_x u = \sum_{j=1}^n u_{x_j x_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Por fim, temos, também, que a função f (termo forçante) é uma função dada da forma $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Considere o problema de valor inicial (problema de Cauchy) para a equação do calor homogênea

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty); \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Sabemos que a solução fundamental da equação do calor é da forma

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{para } x \in \mathbb{R}^n, t > 0; \\ 0, & \text{para } x \in \mathbb{R}^n, t < 0. \end{cases}$$

Logo, temos que a função $(x, t) \mapsto \psi(x, t)$ é solução da equação do calor fora da singularidade em $(0, 0)$. Assim, temos que $(x, t) \mapsto \psi(x - y, t)$, para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fixo, é solução. Portanto, a convolução

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - y, t) g(y) dy \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy, \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (3.3)$$

também é uma solução da equação do calor.

Teorema 3.1. *Sejam $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e defina u por (3.2). Então*

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \text{ e } u_t(x, t) = \Delta u(x, t),$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Demonstração. Temos que a função $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ é infinitamente diferenciável com derivadas de todas as ordens uniformemente limitadas em $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ para cada $\delta > 0$, daí, segue que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

Mais ainda, temos

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} ((\psi_t - \Delta_x \psi)(x - y, t)) g(y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t), \text{ com } x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

A igualdade anterior é válida, pois ψ é solução da equação do calor. □

Considere um outro problema de valor inicial envolvendo a equação do calor

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \nu \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \text{ e } \nu > 0 \\ u(\cdot, t) = u_0, & \text{com } u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (3.4)$$

Assim como no caso anterior, temos um resultado com respeito a suavidade da solução u desse problema.

Teorema 3.2. *Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.*

Demonstração. O argumento para demonstrar esse resultado é análogo ao argumento usado na demonstração do teorema anterior. Observe que, nesse caso (3.4), a solução fundamental é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\nu t}} u_0(y) dy.$$

Daí, como $\frac{1}{(\nu t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\nu t}}$ é uma função infinitamente diferenciável com as derivadas de todas as ordens uniformemente limitadas em $(\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty))$ para cada $\delta > 0$, assim como no Teorema 3.1.

Portanto, segue que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

□

Agora, veremos mais alguns resultados com respeito a solução $u(x, t)$ do problema (3.4), que corresponde a um problema de Cauchy para a equação do calor com condição inicial u_0 em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.3. *Seja $u(\cdot, t)$ solução de (3.4). Então vale a identidade de energia*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

para $0 \leq t_0 < t$.

Demonstração. Note que o problema (3.4) está definido em todo o $\mathbb{R}^n$. Para auxiliar na demonstração dessa igualdade, considere a função de corte

$$\psi_R = \begin{cases} e^{-\delta\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\delta\sqrt{1+R^2}}, & \text{se } |x| < R \\ 0, & \text{se } |x| \geq R, \end{cases}$$

para $\delta, R > 0$.

Daí, multiplicando $2u\psi_R$ na equação do calor dada em (3.4), temos

$$2uu_t\psi_R = 2\nu u\Delta u\psi_R,$$

observe que $2uu_t = \frac{\partial}{\partial t}(u^2)$, ao integrarmos de t_0 a t e em $\mathbb{R}^n$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e Teorema de Fubini, temos que

$$\int_{|x|<R} u(\cdot, t)^2 \psi_R dx = 2\nu \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} u\Delta u\psi_R dx d\tau + \int_{|x|<R} u(\cdot, t_0)^2 \psi_R dx.$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito da igualdade anterior e usando o fato de que ψ_R se anula em $|x| = R$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} u(\cdot, t)^2 \psi_R dx + 2\nu \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u(\cdot, \tau)|^2 \psi_R dx d\tau = \\ & - \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \langle \nabla \psi_R, \nabla u(\cdot, \tau)^2 \rangle dx d\tau + \int_{|x|<R} u(\cdot, t_0)^2 \psi_R dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes novamente, temos

$$\int_{|x|<R} u(\cdot, t)^2 \psi_R dx + 2\nu \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u(\cdot, \tau)|^2 \psi_R dx d\tau = \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Delta \psi_R u(\cdot, \tau)^2 dx d\tau - \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} \left\langle \nabla \psi_R, \frac{x}{R} \right\rangle u(\cdot, \tau)^2 d\sigma(x) d\tau \\ & + \int_{|x|<R} u(\cdot, t_0)^2 \psi_R dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \int_{|x|<R} u(\cdot, t)^2 \psi_R dx + 2\nu \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} |\nabla u(\cdot, \tau)|^2 \psi_R dx d\tau = \int_{t_0}^t \int_{|x|<R} \Delta \psi_R u(\cdot, \tau)^2 dx d\tau \\ & + \delta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} e^{-\delta\sqrt{1+R^2}} \sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} u(\cdot, \tau)^2 dx d\tau + \int_{|x|<R} u(\cdot, t_0)^2 \psi_R dx. \end{aligned}$$

Queremos fazer $R \rightarrow \infty$. Porém, precisamos analisar se o termo de fronteira irá divergir.

Para tanto, note que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ implica que $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, basta observar que $\|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2$ (isso vale pois a solução $u(\cdot, t)$ é decrescente na norma L^2). Logo,

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx d\tau < \infty.$$

Assim, usando coordenadas polares e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx d\tau &= \int_{t_0}^t \int_0^\infty \int_{|x|=r} u^2 d\sigma(x) dr d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_{t_0}^t \int_{|x|=r} u^2 d\sigma(x) d\tau dr < \infty. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{t_0}^t \int_{|x|=r} u^2 d\sigma(x) d\tau \right] = 0.$$

Daí, existe subsequência R_k tal que

$$\lim_{R_k \rightarrow \infty} \left[\int_{t_0}^t \int_{|x|=R_k} u^2 d\sigma(x) d\tau \right] = 0. \quad (3.6)$$

Como,

$$\delta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} e^{-\delta\sqrt{1+R^2}} \sqrt{\frac{R^2}{1+R^2}} u(\cdot, \tau)^2 d\sigma(x) d\tau \leq \delta \int_{t_0}^t \int_{|x|=R} u(\cdot, \tau)^2 d\sigma d\tau. \quad (3.7)$$

Logo, fazendo $R_k \rightarrow \infty$ em (3.5), pelo Teorema da Convergência Dominada no primeiro e no último termo de (3.5), usando (3.6) e (3.7) no termo de fronteira de (3.5) e usando o Teorema da Convergência Monótona nos termos restantes de (3.5), temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\sqrt{1+|x|^2}} u(\cdot, t)^2 dx + 2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\sqrt{1+|x|^2}} |\nabla u(\cdot, \tau)|^2 dx d\tau = \\ & \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-\delta\sqrt{1+|x|^2}}) u(\cdot, \tau)^2 dx d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\sqrt{1+|x|^2}} u(\cdot, t_0)^2 dx. \end{aligned}$$

Como,

$$|u^2 \Delta(e^{-\delta \sqrt{1+|x|^2}})| \leq \delta u^2,$$

sem perda de generalidade, suponha que $0 < \delta \leq 1$. Daí, fazendo $\delta \rightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada no termo que contém o laplaciano na igualdade acima e usando o Teorema da Convergência Monótona nos demais termos, obtemos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

□

Corolário 3.4. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema (3.4). Então $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em relação ao tempo t .*

Demonstração. Suponha $0 < t_1 \leq t_2$ e $u(\cdot, t)$ solução da equação do calor em (3.4). Logo, pela identidade de energia (Proposição 3.3), temos

$$\|u(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Daí, como $2\nu \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq 0$, segue que

$$\|u(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|u(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Logo,

$$\|u(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto, $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em relação ao tempo.

□

Proposição 3.5. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema (3.4). Então vale a identidade*

$$(t - t_0) \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau,$$

para todo $t \geq t_0$.

Demonstração. Seja $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ uma função de corte tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1; \\ \phi(x), & \text{se } 1 \leq |x| < 2; \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2, \end{cases}$$

em que $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função qualquer de classe C^2 . Defina

$$\varphi_R = \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right), \quad \text{para } R > 0.$$

Derivando a equação do calor no problema (3.4) em relação a x_i e multiplicando por $2(t - t_0)\varphi_R D_i u$, temos

$$2(t - t_0)\varphi_R D_i u(D_i u) = 2\nu(t - t_0)\varphi_R D_i u \Delta(D_i u).$$

Integrando em $[t_0, t] \times \mathbb{R}^n$, temos

$$\int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \varphi_R (D_i u)^2 d\tau dx = \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t 2\nu(\tau - t_0) \varphi_R D_i u \Delta(D_i u) d\tau dx.$$

Integrando por partes o lado esquerdo da expressão anterior, temos que

$$\begin{aligned} (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \varphi_R (D_i u(x, t))^2 dx &= 2\nu \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \varphi_R D_i u \Delta(D_i u) d\tau dx \\ &+ \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \varphi_R (D_i u(x, \tau))^2 d\tau dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes em $\mathbb{R}^n$ no primeiro termo do lado direito da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \varphi_R (D_i u(x, t))^2 dx &= - \int_{|x| < 2R} \langle \nabla \varphi_R, \nabla (D_i u)^2 \rangle dx \\ &- 2\nu \int_{|x| < 2R} \varphi_R |\nabla (D_i u)|^2 dx + 2\nu \int_{|x|=2R} \varphi_R D_i u \nabla (D_i u) d\sigma(x) \\ &+ \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \varphi_R (D_i u(x, \tau))^2 d\tau dx. \end{aligned}$$

Novamente integrando por partes em $\mathbb{R}^n$ no primeiro termo do lado direito, temos

$$\begin{aligned} (t - t_0) \int_{|x| < 2R} \varphi_R (D_i u(x, t))^2 dx + 2\nu \int_{|x| < 2R} \varphi_R |\nabla (D_i u)|^2 dx &= \quad (3.8) \\ \int_{|x| < 2R} \Delta \varphi_R (D_i u)^2 dx - \int_{|x|=2R} \left\langle \nabla \varphi_R, \frac{x}{R} \right\rangle (D_i u)^2 d\sigma(x) \\ + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \varphi_R (D_i u(x, \tau))^2 d\tau dx. \end{aligned}$$

Note que $\nabla \varphi_R = 0$, para todo $|x| > 2R$. Temos que, em particular, $\varphi_R \in C^1$, daí

$$\nabla \varphi_R|_{|x|=2R} = \lim_{|x| \rightarrow 2R^+} \nabla \varphi_R = 0.$$

Logo, a equação (3.8) fica

$$(t - t_0) \int_{|x| < 2R} \varphi_R (D_i u(x, t))^2 dx + 2\nu \int_{|x| < 2R} \varphi_R |\nabla (D_i u)|^2 dx = \quad (3.9)$$

$$\int_{|x| < 2R} \Delta \varphi_R (D_i u)^2 dx + \int_{|x| < 2R} \int_{t_0}^t \varphi_R (D_i u(x, \tau))^2 d\tau dx.$$

Como $\varphi \in C^2$, o laplaciano de φ atinge o máximo em $|x| < 2R$. Assim,

$$|\Delta \varphi_R (D_i u)^2| < \frac{M}{R^2} |D_i u|^2, \text{ em } |x| < 2R.$$

Onde $M > 0$ é o máximo de $\Delta \varphi$. Pela Proposição (3.3), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u|^2 dx < \infty.$$

Deste modo, quando $R \rightarrow \infty$, pelo Teorema da Convergência Dominada no primeiro termo do lado direito de (3.9), usando a Proposição 3.3 no primeiro termo do lado esquerdo e último do lado direito e o Teorema da Convergência Monótona no termo restante, segue que

$$(t - t_0) \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

□

O resultado seguinte tem uma demonstração que segue argumentos parecidos com os argumentos utilizados na demonstração da Proposição 3.5. Entretanto, por questão de simplicidade, vamos omitir as funções de corte usadas para justificar as integrações por partes na demonstração.

Corolário 3.6. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema (3.4). Então vale a identidade*

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|Du(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

para $t \geq t_0$.

Demonstração. Considere a equação do calor dada no problema (3.4). Inicialmente, derivando a equação (3.4), e aplicando o operador $2D_i u$ na equação do calor, ou seja, derivando a equação do calor e multiplicando por 2, temos

$$2D_i u D_i u_t = 2\nu D_i u D_i \Delta u.$$

Note que $2D_i u D_i u_t = \frac{\partial}{\partial t} (D_i u^2)$, e integrando de t_0 a t e em $\mathbb{R}^n$, e também pelo Teorema de Fubini, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} (D_i u(x, t)^2) d\tau dx = 2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} D_i u D_i \Delta u dx d\tau.$$

Integrando por partes o termo do lado direito da igualdade anterior, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} (D_i u(x, t)^2) d\tau dx = -2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (D_j D_j u)^2 dx d\tau.$$

Por fim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_i (u(x, t)^2) dx - \int_{\mathbb{R}^n} (D_i u(x, t_0)^2) dx = -2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (D_j D_j u)^2 dx d\tau.$$

Logo,

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 - \|Du(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = -2\nu \int_{t_0}^t \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Portanto, segue o resultado

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|Du(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

□

Corolário 3.7. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema (3.4). Então $\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em relação ao tempo t .*

Demonstração. Seja $0 < t_1 \leq t_2$ e $u(\cdot, t)$ solução da equação do calor homogênea (3.4). Daí, temos, pela identidade de energia para derivadas, que

$$\|Du(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_1}^{t_2} \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|Du(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

Como $2\nu \int_{t_1}^{t_2} \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq 0$, segue que

$$\|Du(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|Du(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

Assim,

$$\|Du(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Portanto, $\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em relação ao tempo t .

□

Observação 3.8. De forma geral, vale que $\|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em relação ao tempo t , para todo $m \geq 0$. Os casos para $m = 0$ e $m = 1$, mostramos no Corolário 3.4 e no Corolário 3.7, respectivamente. Para mostrar os demais casos, basta aplicarmos um argumento análogo ao usado nos corolários anteriores.

Os próximos resultados nos dizem que as soluções das equações decaem ao longo do tempo. Mais do que isso, mostraremos que as soluções decaem arbitrariamente lentamente ao longo do tempo t .

Teorema 3.9. *Seja $u(x, t)$ solução do problema (3.4), então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Demonstração. Seja $\hat{u}$ a transformada de Fourier definida da seguinte forma

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi t} u(\xi) d\xi,$$

com $i = \sqrt{-1}$.

Aplicando a transformada de Fourier em (3.4), temos que

$$\begin{cases} \hat{u}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases}$$

Resolvendo o problema acima, temos

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi).$$

Pelo teorema de Plancherel, temos que $\|u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$. Daí,

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Pelo lema (de medida), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| < \delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < \frac{\epsilon}{2}.$$

Note que $e^{-2|\xi|^2 t} \leq 1$ para todo $t > 0$. Note, também, que dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$t_0 = \ln \left(\frac{2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2\delta^2}}$$

de modo que para todo $t \geq t_0$, temos

$$e^{-2\delta t} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ e $t_0 > 0$ tal que para todo $t \geq t_0$, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi &= \int_{|\xi| < \delta} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq \delta} e^{-2|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq \int_{|\xi| < \delta} 1 \cdot |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + e^{-2\delta^2 t} \int_{|\xi| \geq \delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + e^{-2\delta^2 t} \int_{|\xi| \geq \delta} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema de Plancherel, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

□

Proposição 3.10. *Seja $T > 0$ suficientemente grande e dado $0 < \lambda < 1$, então existe $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ tal que*

$$\|u(x, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \lambda.$$

Demonstração. Construiremos tal função por Transformada de Fourier. Defina

$$\hat{u}_0(\xi) = \begin{cases} c(r, n), & |\xi| \leq r; \\ 0, & |\xi| > r, \end{cases}$$

em que $c(r, n) = \sqrt{\frac{n}{r^n \omega_n}}$, com $\omega_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, com Γ sendo a função Gamma de Euler. Então, aplicando o teorema de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}
 \|u(x, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\hat{u}(\xi, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 &= \int_{|\xi| \leq r} e^{-2|\xi|^2 T} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
 &\geq e^{-2r^2 T} \int_{|\xi| \leq r} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \geq \lambda^2,
 \end{aligned}$$

pois fixado $0 < \lambda < 1$, existe $r > 0$ tal que $e^{-r^2 T} \geq \lambda$.

Portanto, existe $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, com $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ de modo que

$$\|u(x, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \lambda.$$

□

Teorema 3.11. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema (3.4), então vale que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

para todo $m \geq 0$ inteiro, onde $\dot{H}^m$ corresponde ao espaço de Sobolev homogêneo.

Demonstração. Pelo Teorema 3.9, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon,$$

para todo $t > t_0$. Logo, pela identidade de energia (Proposição 3.3), temos

$$\int_{t_0}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau < \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (3.10)$$

Pela Proposição 3.5, obtemos que

$$(t - t_0) \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = t \left(\frac{t - t_0}{t} \right) \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Daí,

$$t \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \left(\frac{t}{t - t_0} \right) \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Note que $\frac{t}{t - t_0} \leq 2$, para $t \geq 2t_0$, assim

$$t \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \epsilon^2.$$

Logo,

$$t^{\frac{1}{2}} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

Portanto, o resultado vale para $m = 1$.

Agora, por (3.10) e Proposição 3.5, temos

$$\int_{t_0}^t (\tau - t_0) \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Logo, ainda pela Proposição 3.5, temos

$$(t - t_0) \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = t^2 \left(\frac{t - t_0}{t} \right)^2 \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Deste modo,

$$t^2 \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \left(\frac{t}{t-t_0}\right)^2 \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Como $\left(\frac{t}{t-t_0}\right)^2 \leq 2$, para $t \geq \sqrt{2}t_0$, segue que

$$t^2 \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < \epsilon^2.$$

Logo,

$$t \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

Portanto, o resultado é válido para $m = 2$.

Repetindo o argumento m vezes de forma análoga, concluímos que o resultado é válido para todo $m \geq 1$. Para $m = 0$, o resultado segue pelo Teorema 3.9.

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} \|u(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

para todo $m \geq 0$ inteiro.

□

Teorema 3.12. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema*

$$\begin{cases} u_t = \nu \Delta u, & u \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \ \nu > 0; \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Então existe constante $C > 0$ tal que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(t+1)^{-\frac{n}{4}},$$

para todo $n \geq 1$ inteiro.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que o resultado é válido para $n = 3$. Para tanto, usando o teorema de Plancherel e pela identidade de energia, temos

$$\frac{d}{dt} (\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2) \leq -\nu \|\widehat{\nabla u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Seja $S_3(t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| \leq r(t)\}$, em que $r(t) = \left(\frac{3}{\nu(t+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2) &= -\nu \int_{S_3(t)^C} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi - \nu \int_{S_3(t)} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -\nu \int_{S_3(t)^C} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -\frac{3}{t+1} \int_{S_3(t)^C} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

pois $-|\xi|^2 \leq -\frac{3}{t+1}$ se $\xi \in S_3(t)^C$. Daí, como $\mathbb{R}^3 = S_3(t)^C \cup S_3(t)$, temos

$$\frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2) \leq -\frac{3}{t+1} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi + \frac{3}{t+1} \int_{S_3(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Deste modo,

$$\frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2) + \frac{3}{t+1} \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \frac{3}{t+1} \int_{S_3(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Multiplicando a desigualdade anterior pelo fator integrante $(t+1)^3$, temos que

$$(t+1)^3 \frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2) + 3(t+1)^2 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq 3(t+1)^2 \int_{S_3(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^3 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2] \leq 3(t+1)^2 \int_{S_3(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi. \quad (3.11)$$

Além disso, temos que

$$|\hat{u}(\xi, t)|^2 \leq C|\xi|^{-2}, \quad (3.12)$$

para todo $\xi \in S_3(t) \setminus \{0\}$ e para todo $t \geq 0$. Pelas desigualdades (3.11) e (3.12), obtemos

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^3 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2] \leq 3C(t+1)^2 \int_{S_3(t)} |\xi|^{-2} d\xi.$$

Calculando a integral $\int_{S_3(t)} |\xi|^{-2} d\xi$ por coordenadas esféricas, concluímos que

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^3 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2] \leq C(t+1)^2 r(t)^3.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^3 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2] \leq C(t+1)^2 (t+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^3 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2] \leq C(t+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando com relação a t e novamente pelo teorema de Plancherel, segue que

$$(t+1)^3 \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C(t+1)^{\frac{3}{2}}.$$

Logo,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C(t+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Deste modo,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C(t+1)^{-\frac{3}{4}}.$$

Portanto, o resultado vale para $n = 3$.

Agora, vamos verificar que é válido para $n = 4$. Novamente pelo teorema de Plancherel e pela identidade de energia, temos que

$$\frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2) \leq -\nu \|\widehat{\nabla u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2 = -\nu \int_{\mathbb{R}^4} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Considere $S_4(t) = \{\xi \in \mathbb{R}^4 : |\xi| \leq r(t)\}$, em que $r(t) = \left(\frac{4}{\nu(t+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2) &= -\nu \int_{S_4(t)^C} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi - \nu \int_{S_4(t)} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -\nu \int_{S_4(t)^C} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -\frac{4}{t+1} \int_{S_4(t)^C} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

uma vez que $-|\xi|^2 \leq -\frac{4}{t+1}$ se $\xi \in S_4(t)^C$. Logo, como $\mathbb{R}^4 = S_4(t)^C \cup S_4(t)$, temos que

$$\frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2) \leq -\frac{4}{t+1} \int_{\mathbb{R}^4} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi + \frac{4}{t+1} \int_{S_4(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2) + \frac{4}{t+1} \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2 \leq \frac{4}{t+1} \int_{S_4(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Multiplicando a desigualdade anterior pelo fator integrante $(t+1)^4$, obtemos

$$(t+1)^4 \frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2) + 4(t+1)^3 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2 \leq 4(t+1)^3 \int_{S_4(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^4 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2] \leq 4(t+1)^3 \int_{S_4(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi. \quad (3.13)$$

Pelas desigualdades (3.12) e (3.13), temos

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^4 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2] \leq 4C(t+1)^3 \int_{S_4(t)} |\xi|^{-2} d\xi.$$

Calculando a integral $\int_{S_4(t)} |\xi|^{-2} d\xi$, temos

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^4 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2] \leq C(t+1)^3 r(t)^4.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^4 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2] \leq C(t+1)^3 (t+1)^{-2}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}[(t+1)^4 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2] \leq C(t+1).$$

Integrando com relação a t e pelo teorema de Plancherel, segue que

$$(t+1)^4 \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2 \leq C(t+1)^2.$$

Assim,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2 \leq C(t+1)^{-2}.$$

Deste modo,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq C(t+1)^{-\frac{4}{2}}.$$

Logo, o resultado é válido para $n = 4$.

Finalmente, vamos fazer a demonstração do caso geral. Pelo teorema de Plancherel e pela identidade de energia, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) &\leq -\nu \|\widehat{\nabla u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= -\nu \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Considere $S_n(t) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq r(t)\}$, em que $r(t) = \left(\frac{n}{\nu(t+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$, daí

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) &= -\nu \int_{S_n(t)^C} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi - \nu \int_{S_n(t)} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -\nu \int_{S_n(t)^C} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq -\frac{n}{t+1} \int_{S_n(t)^C} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

pois $-|\xi|^2 \leq -\frac{n}{t+1}$, se $\xi \in S(t)^C$. Logo,

$$\frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) + \frac{n}{t+1} \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{n}{t+1} \int_{S_n(t)} |\hat{u}(\xi, t)|^2 d\xi. \quad (3.14)$$

Agora, note que $\hat{u} \in L^\infty$. De fato, pois pela transformada de Fourier da equação do calor, temos

$$\hat{u}_t = -\nu |\xi|^2 \hat{u},$$

Logo,

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\nu |\xi|^2 t} \hat{u}_0.$$

Daí, como $|e^{-\nu |\xi|^2 t}| \leq 1$, para todo $t \geq 0$, temos

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq |\hat{u}_0| \leq \|\hat{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Assim,

$$\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Deste modo, voltando para (3.14), temos que

$$\frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) + \frac{n}{t+1}\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \frac{n}{t+1} \cdot C \cdot r(t)^n.$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $(t+1)^n$, temos

$$(t+1)^n \frac{d}{dt}(\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) + n(t+1)^{n-1}\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq n(t+1)^{n-1} \cdot C \cdot r(t)^n.$$

Deste modo,

$$\frac{d}{dt}((t+1)^n \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \leq C \cdot (t+1)^{n-1} \cdot (t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}((t+1)^n \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \leq C \cdot (t+1)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Integrando com relação a t e pelo teorema de Plancherel, obtemos

$$(t+1)^n \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C(t+1)^{\frac{n}{2}}.$$

Deste modo,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C(t+1)^{-\frac{n}{2}}.$$

Logo,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(t+1)^{-\frac{n}{4}}.$$

Logo, o resultado é válido para todo $n \geq 1$ inteiro.

□

3.2 ESTIMATIVAS SUPERIORES

Visto os resultados sobre as condições para as soluções da equação do calor com condição inicial em $L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos iniciar o estudo acerca das estimativas superiores (*upper bounds*) para as derivadas da solução de tal equação. Enfatizando que aqui, neste trabalho, sempre estamos trabalhando com a equação do calor homogênea, ou seja, com o termo forçante f nulo ($f \equiv 0$).

Relembrando o problema da equação do calor homogênea

$$\begin{cases} u_t = \nu \Delta u \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (3.15)$$

onde $u = u(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e $\nu > 0$.

Além disso, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e $u(\cdot, t) \in C^0((0, \infty), H^m(\mathbb{R}^n))$, para todo $m \geq 0$.

Teorema 3.13. *Seja $u(\cdot, t)$ solução do problema (3.15) tal que*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\alpha},$$

para todo $t \geq T_0$, com $C, T_0, \alpha > 0$. Então

$$\|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}_m \nu^{-\frac{m}{2}} t^{-\alpha - \frac{m}{2}},$$

para todo $t > T_m$ e para todo $m \geq 1$, com $\tilde{C}_m > 0$.

Demonstração. Seja $\gamma > 2\alpha$. Multiplicando a equação do calor em (3.15) por $2(t - t_0)^\gamma u$, temos

$$2(t - t_0)^\gamma u u_t = 2\nu(t - t_0)^\gamma u \Delta u.$$

Daí,

$$(t - t_0)^\gamma \frac{\partial(u(x, t)^2)}{\partial t} = 2\nu(t - t_0)^\gamma u \Delta u.$$

Integrando em $\mathbb{R}^n \times (t_0, t)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \frac{\partial(u(x, \tau)^2)}{\partial \tau} d\tau dx = 2\nu \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma u \Delta u d\tau dx.$$

Fazendo integração por partes, usando o Teorema de Fubini e Teorema Fundamental do Cálculo na equação anterior, temos

$$\begin{aligned} (t - t_0)^\gamma \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau &\leq \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \\ &\leq C \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-2\alpha-1} d\tau, \end{aligned}$$

pois, por hipótese, $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{-\alpha}$. Logo, temos que

$$(t - t_0)^\gamma \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \tilde{C}_1 (t - t_0)^{\gamma-2\alpha},$$

em que $\tilde{C}_1 = \frac{C}{\gamma-2\alpha}$. Daí, temos

$$\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \tilde{C}_1 \nu^{-1} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}. \quad (3.16)$$

Agora, derivando a equação do calor em (3.15) em relação a x_l e multiplicando o resultado por $2(t - t_0)^{\gamma+1} D_l u(x, t)$, temos

$$2(t - t_0)^{\gamma+1} D_l u D_l u_t = 2\nu(t - t_0)^{\gamma+1} D_l u D_l \Delta u.$$

Logo,

$$(t - t_0)^{\gamma+1} \frac{\partial}{\partial t} (D_l (u(x, t)^2)) = 2\nu(t - t_0)^{\gamma+1} D_l u D_l \Delta u.$$

Integrando em $\mathbb{R}^n \times (t_0, t)$, usando integração por partes e o teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} (t - t_0)^{\gamma+1} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau &\leq \\ &\leq (\gamma + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Daí,

$$(t - t_0)^{\gamma+1} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (\gamma + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Logo, voltando para (3.16), temos

$$(t - t_0)^{\gamma+1} \|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \tilde{C}_1 \nu^{-1} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Assim,

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}_1 \nu^{-\frac{1}{2}} t^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Portanto, o resultado é válido para $m = 1$.

Vamos verificar o resultado para $m = 2$. Para tanto, derivando a equação do calor em (3.15) com relação a x_{l_1} e x_{l_2} e multiplicando o resultado por $2(t - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} u(x, t)$, temos

$$2(t - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} u D_{l_1} D_{l_2} u_t = 2\nu(t - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} u D_{l_1} D_{l_2} \Delta u.$$

Daí,

$$(t - t_0)^{\gamma+2} \frac{\partial}{\partial t} (D_{l_1} D_{l_2} (u(x, t)^2)) = 2\nu(t - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} u D_{l_1} D_{l_2} \Delta u.$$

Integrando em $\mathbb{R}^n \times (t_0, t)$, integrando por partes, usando o Teorema de Fubini e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$(t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq$$

$$\leq (\gamma + 2) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Deste modo,

$$(t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (\gamma + 2) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Além disso, por (3.17), temos que

$$2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq (\gamma + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma} \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau.$$

Daí, pelo caso $m = 1$ e integrando o lado direito da desigualdade anterior, segue

$$\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \leq \tilde{C}_2 \nu^{-2} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Logo,

$$(t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \tilde{C}_2 \nu^{-2} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Assim,

$$\|D^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}_2 \nu^{-1} t^{-\alpha-1}.$$

Portanto, o resultado é válido para $m = 2$.

Repetindo esse argumento m vezes, concluimos que

$$\|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{C}_m \nu^{-\frac{m}{2}} t^{-\alpha-\frac{m}{2}},$$

para todo $m \geq 1$ inteiro, e $\tilde{C}_m > 0$ constante.

□

Observação 3.14. O Teorema 3.13 também é válido no caso em que $\alpha = 0$. Note também que, assumindo $u(\cdot, t) = o(t^{-\alpha})$ quando $t \rightarrow \infty$, para algum $\alpha \geq 0$, então temos que $\|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = o(t^{-\alpha-\frac{m}{2}})$ para todo $m \geq 1$ inteiro.

3.3 ESTIMATIVAS INFERIORES

Seja a equação do calor homogênea

$$\begin{cases} u_t = \nu \Delta u \\ u(\cdot, 0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

com $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $\nu > 0$ constante. Além disso, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ e $u(\cdot, t) \in C^0((0, \infty), H^m(\mathbb{R}^n))$, para todo $m \geq 0$.

Teorema 3.15. *Seja $u(\cdot, t)$ solução da equação do calor homogênea. Se*

1. $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 t^{-\alpha}$, para todo $t \geq T_0$, com $C_0, T_0, \alpha > 0$ constantes;

2. $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c_0 t^{-\alpha}$, para todo $t \geq t_0$, com $c_0, t_0, \alpha > 0$ constantes.

Então $\|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c(m, \nu) t^{-\alpha-m/2}$, para todo $t > t_m$, $c(m, \nu) > 0$.

Demonstração. Pela identidade de energia, pela segunda hipótese, tomando $M > 1$ a ser escolhido e sendo $t_1 = \max\{t_0, T_0, \tau_0\}$, temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t/M}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|u(\cdot, t/M)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq c(0, \nu)^2 \left(\frac{t}{M}\right)^{-2\alpha}.$$

Daí, pela primeira hipótese, temos

$$2\nu \int_{t/M}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq c(0, \nu)^2 \left(\frac{t}{M}\right)^{-2\alpha} - C_0^2 t^{-2\alpha}.$$

Logo,

$$2\nu \int_{t/M}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq c(0, \nu)^2 M^{2\alpha} t^{-2\alpha} - C_0^2 t^{-2\alpha}.$$

Escolhendo M de modo que $c(1, \nu)^2 = c(0, \nu)^2 M^{2\alpha} - C_0^2 > 0$, então

$$2\nu \int_{t/M}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq c(1, \nu)^2 t^{-2\alpha}.$$

Agora, usando o fato de que $\|Du(\cdot, t)\|_{L^2}$ é decrescente em relação ao tempo, temos

$$2\nu \int_0^t \|Du(\cdot, t/M)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq 2\nu \int_{t/M}^t \|Du(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq c(1, \nu)^2 t^{-2\alpha}.$$

Assim,

$$2\nu t \|Du(\cdot, t/M)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq c(1, \nu)^2 t^{-2\alpha}.$$

Tomando $s = t/M$, concluímos que

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq c(1, \nu)^2 t^{-2\alpha-1}.$$

Deste modo,

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c(1, \nu) t^{-\alpha-1/2}.$$

Portanto, o resultado vale para $m = 1$.

Para mostrarmos que é válido para $m = 2$, usaremos a seguinte identidade de energia

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t/M}^t \|D^2u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau = \|Du(\cdot, t/M)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Tome $M > 1$ que será escolhido posteriormente e considere $t_2 = \max\{t_1, T_1, \tau_1\}$. Pelo o que mostramos anteriormente (para $m = 1$), temos que

$$\|Du(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\nu \int_{t/M}^t \|D^2u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq c(1, \nu)^2 t^{-2\alpha-1}.$$

Daí,

$$2\nu \int_{t/M}^t \|D^2u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq (c(1, \nu)^2 M^{2\alpha+1} - C_1^2) t^{-2\alpha-1}.$$

Escolha M tal que $c(2, \nu)^2 = c(1, \nu)^2 M^{2\alpha+1} - C_1^2 > 0$, logo

$$2\nu \int_{t/M}^t \|D^2u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq c(2, \nu)^2 t^{-2\alpha-1}.$$

Como $\|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em relação ao tempo, temos

$$2\nu \int_0^t \|D^2u(\cdot, t/M)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq 2\nu \int_{t/M}^t \|D^2u(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\tau \geq c(2, \nu)^2 t^{-2\alpha-1}.$$

Logo,

$$2\nu t \|D^2u(\cdot, t/M)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq c(2, \nu)^2 t^{-2\alpha-1}.$$

Novamente tomando $s = t/M$, temos que

$$t \|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq c(2, \nu)^2 t^{-2\alpha-1}.$$

Assim,

$$\|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq c(2, \nu)^2 t^{-2\alpha-2}.$$

Deste modo,

$$\|D^2u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c(2, \nu) t^{-\alpha-1}.$$

Portanto, o resultado é válido para $m = 2$.

Repetindo esse argumento m vezes, concluimos que é válido

$$\|D^m u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c(m, \nu) t^{-\alpha-m/2},$$

para todo $m \geq 1$ inteiro.

□

4 ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Estudaremos neste capítulo as equações de Navier Stokes. Tais equações são dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}; \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, com $n = 3$, $t > 0$ e $\nu > 0$ constante (de viscosidade). O σ na condição inicial em L^2 ocorre por conta da condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, ou seja, $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$. Além disso, aqui $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é uma solução de Leray, assim existe $t_* > 0$ tal que

$$\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (t_*, \infty)),$$

$$\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0((t_*, \infty), H^m(\mathbb{R}^n)), \quad \forall m \geq 0,$$

mostraremos esse fato adiante. Em seu trabalho (LERAY, 1934), Leray demonstrou a existência de soluções fracas globais para as equações de Navier-Stokes em 3 dimensões. Ademais, o método de compacidade apresentado por Leray, serve de modelo para a construção de soluções fracas globais para diversas EDP's não-lineares. Leray chamou essas soluções fracas de soluções turbulentas, agora conhecidas como soluções de Leray ou soluções de Leray-Hopf, reconhecendo a contribuição de Hopf em domínios limitados em (HOPF, 1951).

Definição 4.1. Sejam $T > 0$ e $\mathbf{u}_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$. Uma solução de Leray-Hopf em $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ com condição inicial $\mathbf{u}_0$ e

$$u(\cdot, t) \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$$

tais que

- (i) Pertence a $C_w([0, T]; L^2(\mathbb{R}^3))$ e alcança a condição inicial $\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$, ou seja, $\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \mathbf{u}_0\|_{L^2} \rightarrow 0$ ao $t \rightarrow 0^+$;
- (ii) É solução da equação (4.1) no sentido das distribuições em $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ para alguma pressão $p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times (0, T))$;

(iii) Satisfaz a desigualdade de energia para todo $t \in (0, T]$

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Agora, vamos mostrar que, de fato, a solução de Leray $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave para tempo t grande. Para tanto, serão usados resultados obtidos por Leray em (LERAY, 1934). Com isso, a demonstração dos três teoremas a seguir, podem ser encontradas em (LERAY, 1934). Aqui, considere $\|\cdot\|$ como $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

Teorema 4.1. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray do problema (4.1). Então $\mathbf{u}(\cdot, t)$ satisfaz*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + 2 \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq \|\mathbf{u}_0\|^2,$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Encontra-se em (LERAY, 1934). □

Teorema 4.2 (Soluções fortes). *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray tal que $\mathbf{u}_0 \in L_\sigma^2(\mathbb{R}^3) \cap H^1(\mathbb{R}^3)$. Então existe $T > 0$ tal que $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0([0, T], H_\sigma^1(\mathbb{R}^3))$ e a solução de Leray é única em $[0, T]$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em (LERAY, 1934). □

Teorema 4.3 (Suavidade de soluções fortes). *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray tal que $\mathbf{u}(\cdot, t) \in L^\infty((t_0, t_1), H^1(\mathbb{R}^3))$ para algum $0 \leq t_0 < t_1$. Então $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (t_0, t_1))$ e $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0((t_0, t_1), H^m(\mathbb{R}^3))$ para cada $m \geq 0$.*

Demonstração. Veja em (LERAY, 1934). □

Teorema 4.4 (Existência de soluções fortes globais para condição inicial pequena). *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray do problema (4.1) de forma que existe $\epsilon > 0$ tal que se $\mathbf{u}_0 \in H_\sigma^1(\mathbb{R}^3)$ satisfaz $\|\mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{2}} < \epsilon$, existe apenas uma solução de Leray para o problema (4.1) e tal solução satisfaz $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0([0, \infty), H^1(\mathbb{R}^3))$.*

Demonstração. Dado $\mathbf{u}_0 \in H_\sigma^1(\mathbb{R}^3)$ e seja $T > 0$ tal que $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0([0, T], H^1(\mathbb{R}^3))$. Pelo Teorema 4.3, $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é suave para $0 < t \leq T$, daí podemos derivar a seguinte desigualdade de energia para $D\mathbf{u}(\cdot, t)$,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + 2 \int_0^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq \|D\mathbf{u}_0\|^2 + K \int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\| \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\| d\tau, \quad (4.2)$$

para todo $0 < t \leq T$, onde $K = 4\sqrt{3}$. Usando a estimativa elementar (surge a partir da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev), temos

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}\| \|D^2\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}\|^2.$$

Por (4.2), obtemos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + 2 \int_0^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq \|D\mathbf{u}_0\|^2 + K \int_0^t F(\tau) \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \quad (4.3)$$

onde $F(\tau) = \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^{\frac{1}{2}}$. Além disso, se $\|\mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}_0\|^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$, isto é, $F(0) < \frac{1}{2\sqrt{3}}$, temos que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 + \alpha \int_0^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq \|D\mathbf{u}_0\|^2, \quad (4.4)$$

para todo $0 < t \leq T$, onde $\alpha = 2 - KF(0) > 0$.

De fato, temos que $2 - KF(t) > \frac{\alpha}{2}$ para todo $0 < t \leq T$, pois, caso contrário, existiria $t_0 \in (0, T]$ tal que $2 - KF(t_0) = \frac{\alpha}{2}$ e $2 - KF(t) > \frac{\alpha}{2}$ para todo $0 \leq t < t_0$. Por (4.3), temos $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\| \leq \|D\mathbf{u}_0\|$ para todo $0 \leq t \leq t_0$. Daí, em particular, $F(t_0) \leq F(0)$, e isso não pode acontecer, uma vez que $2 - KF(t_0) = \frac{\alpha}{2}$. Logo, temos $2 - KF(t) > \frac{\alpha}{2}$ para todo $0 \leq t \leq T$.

Por outro lado, por (4.3), vale $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\| \leq \|D\mathbf{u}_0\|$ para todo $0 \leq t \leq T$, assim temos $F(t) \leq F(0)$ para todo $0 \leq t \leq T$. Deste modo, (4.4) é válido para cada $t \in [0, T]$.

Em particular, temos $\mathbf{u}(\cdot, t) \in H_\sigma^1(\mathbb{R}^3)$ satisfazendo $\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, T)\|^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$, daí a solução $\mathbf{u}(\cdot, t)$ pode ser estendida num intervalo maior $[0, T_1] \supset [0, T]$, com $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0([0, T_1], H_\sigma^1(\mathbb{R}^3))$ satisfazendo (4.4) para todo $0 \leq t \leq T_1$. Aplicando o mesmo argumento anterior, podemos estender a solução $\mathbf{u}(\cdot, t)$ para um intervalo ainda maior, digamos $[0, T_2] \supset [0, T_1]$. Repetindo esse argumento, concluímos que existe uma solução $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0([0, \infty), H_\sigma^1(\mathbb{R}^3))$ que satisfaz (4.4) para todo $t \geq 0$.

Portanto, pelo Teorema 4.2 e pelo Teorema 4.3, segue o resultado.

□

Teorema 4.5 (Soluções de Leray eventualmente suaves). *Para alguma solução de Leray do problema (4.1), existe $t_* \geq 0$ tal que $\mathbf{u}(\cdot, t) \in C^0((t_*, \infty), H^1(\mathbb{R}^3))$. (Mais ainda, Leray mostrou que $t_* \leq K \|\mathbf{u}_0\|^4$ para alguma constante absoluta $K > 0$.)*

Demonstração. Pelo Teorema 4.1, temos que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \in L^1(0, \infty)$. Assim, segue que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\| = 0.$$

De fato, pois, caso contrário, existiria constante $M > 0$ tal que $\|D\mathbf{u}\|^2 \geq M$ implica $\int_0^\infty \|D\mathbf{u}\|^2 ds \rightarrow \infty$, o que contradiz o fato de que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|^2 \in L^1(0, \infty)$.

Logo, tomando $t_* > 0$ suficientemente grande tal que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_*)\| < \frac{1}{12\|\mathbf{u}_0\|}$ e usando o Teorema 4.4, segue o resultado. □

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que podemos encontrar estimativas superiores e estimativas inferiores para as normas $\dot{H}^m$ das soluções do problema (4.1). Antes de partirmos para os resultados principais, precisamos demonstrar que a hipótese usada em alguns desses teoremas é não-vazia. Para tanto, observe o teorema a seguir:

Teorema 4.6. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray do problema*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}; \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (4.5)$$

Então

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\frac{3}{4}},$$

para $t > t_*$ e com $C > 0$ constante que depende das normas L^1 e L^2 de $\mathbf{u}_0$.

Demonstração. Reescrevendo a equação (4.5) coordenada a coordenada e multiplicando $2u_i$, temos

$$2u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 2u_i u_j D_j u_i + 2u_i D_i p = 2\nu \sum_{j=1}^3 u_i D_j D_j u_i.$$

Integrando em $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} 2u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 2u_i u_j D_j u_i dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} u_i D_i p dx = 2\nu \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 u_i D_j D_j u_i dx.$$

Integrando por partes

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} u_i^2 dx - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 2u_i D_j u_j u_i dx}_{=0} - 2 \int_{\mathbb{R}^3} D_i u_i p dx = -2\nu \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j u_i)^2 dx.$$

Somando em i , temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 dx - 2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 D_i u_i p dx}_{=0} = -2\nu \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 dx = -2\nu \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 dx.$$

Aplicando o Teorema de Plancherel, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi = -2\nu \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}|^2 d\xi.$$

Considere $S(t)$ a bola de centro na origem e raio

$$r(t) = \left[\frac{3}{2\nu t} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi &= -2\nu \int_{S(t)} |\xi|^2 |\hat{u}|^2 d\xi - 2\nu \int_{S(t)^c} |\xi|^2 |\hat{u}|^2 d\xi \\ &\leq -2\nu \int_{S(t)^c} |\xi|^2 |\hat{u}|^2 d\xi \\ &\leq \frac{3}{t} \int_{S(t)^c} |\hat{u}|^2 d\xi \\ &= \frac{3}{t} \int_{S(t)^c} |\hat{u}|^2 d\xi - \frac{3}{t} \int_{S(t)} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{3}{t} \int_{S(t)} |\hat{u}|^2 d\xi \\ &= -\frac{3}{t} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{3}{t} \int_{S(t)} |\hat{u}|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{3}{t} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi \leq \frac{3}{t} \int_{S(t)} |\hat{u}|^2 d\xi. \quad (4.7)$$

Agora, vamos usar um estimativa que provaremos mais adiante

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq C|\xi|^{-1}, \text{ se } \xi \in S(t). \quad (4.8)$$

Assim, voltando para (4.7) e usando (4.8), temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{3}{t} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi \leq \frac{3}{t} \int_{S(t)} C^2 |\xi|^{-2} d\xi.$$

Daí,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{3}{t} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi \leq \frac{C}{t} \int_{S(t)} |\xi|^{-2} d\xi.$$

Multiplicando pelo fator integrante t^3 , temos que

$$t^3 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi + 3t^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^2 \int_{S(t)} |\xi|^{-2} d\xi.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \left[t^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi \right] \leq Ct^2 \int_{S(t)} |\xi|^{-2} d\xi.$$

Usando coordenadas esféricas na integral do lado direito da desigualdade acima, temos

$$Ct^2 \int_{S(t)} |\xi|^{-2} d\xi \leq C\omega_0 t^2 r(t)^3,$$

onde ω_0 é o volume da bola unitária e $r(t)$ é definido por (4.6). Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[t^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi \right] &\leq C\omega_0 t^2 \left(\left[\frac{3}{2\nu t} \right]^{\frac{1}{2}} \right)^3 \\ &\leq Ct^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Integrando no tempo t , temos

$$t^3 \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}|^2 d\xi \leq Ct^{\frac{3}{2}}.$$

Daí,

$$t^3 \|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq Ct^{\frac{3}{2}}.$$

Deste modo,

$$\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq Ct^{-\frac{3}{2}}.$$

Logo,

$$\|\hat{u}(\xi, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\frac{3}{4}}.$$

Pelo Teorema de Plancherel, segue que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\frac{3}{4}}.$$

Vamos mostrar agora que a estimativa (4.8) é válida. De fato, aplicando a Transformada de Fourier em (4.5), temos

$$\hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} = G(\xi, t), \tag{4.9}$$

onde

$$G(\xi, t) = -\mathcal{F}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \xi \mathcal{F}(p),$$

em que $\mathcal{F}$ é a Transformada de Fourier. Multiplicando o fator integrante $e^{|\xi|^2 t}$ em (4.9), obtemos

$$e^{|\xi|^2 t} \hat{u}_t + |\xi|^2 e^{|\xi|^2 t} \hat{u} = e^{|\xi|^2 t} G(\xi, t).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} [e^{|\xi|^2 t} \hat{u}] = e^{|\xi|^2 t} G(\xi, t).$$

Integrando com relação ao tempo t

$$e^{|\xi|^2 t} \hat{u} = \hat{u}_0 + \int_0^t e^{|\xi|^2 \tau} G(\xi, \tau) d\tau.$$

Logo,

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq e^{-|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)| + \int_0^t e^{|\xi|^2 (t-\tau)} |G(\xi, \tau)| d\tau. \quad (4.10)$$

Assumindo a seguinte estimativa que mostraremos adiante

$$|G(\xi, t)| \leq C|\xi|, \quad (4.11)$$

e usando (4.10) e (4.11), obtemos

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq e^{-|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)| + C \int_0^t e^{|\xi|^2 (t-\tau)} |\xi| d\tau. \quad (4.12)$$

Como $\mathbf{u}_0 \in L^1$, temos que sua Transformada de Fourier pertence a L^∞ , ou seja,

$$|\hat{u}_0(\xi)| \leq C, \quad (4.13)$$

para todo ξ e para algum $C > 0$. Daí, calculando a integral em (4.12) e usando (4.13), temos

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq C e^{-|\xi|^2 t} + \frac{C}{|\xi|} (1 - e^{-|\xi|^2 t}).$$

Logo, como o raio de $S(t)$ é uniformemente limitado em t , segue que

$$|\hat{u}(\xi, t)| \leq C|\xi|^{-1}.$$

Assim, (4.8) é válido.

Finalmente, vamos mostrar (4.11). Para tanto, vamos analisar cada termo de $G(\xi, t)$ separadamente. Primeiro com o termo convectivo, integrando por partes e usando que $\nabla \cdot u = 0$,

obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} (u_j D_j u_i) dx \right| \\
&= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} (D_j (u_j u_i)) dx \right| \\
&= \left| i \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j e^{-i\xi x} u_j u_i dx \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_j| |u_j| |u_i| dx \\
&\leq |\xi| \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |u_j| |u_i| dx \\
&\leq |\xi| \|\mathbf{u}(x, t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq |\xi| \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 \\
&= C|\xi|
\end{aligned}$$

Aqui, usamos que

$$\|u_i(\cdot, t) u_j(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_j(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Logo, segue

$$|\mathcal{F}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})| \leq C|\xi|. \quad (4.14)$$

Por outro lado, note que

$$\Delta p = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j).$$

Tomando a Transformada de Fourier da equação anterior, temos

$$|\xi|^2 \mathcal{F}(p) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j \mathcal{F}(u_i u_j).$$

Como $\mathcal{F}(u_i u_j) \in L^\infty$, segue que

$$\mathcal{F}(p) \leq C. \quad (4.15)$$

De (4.14) e (4.15), concluímos que

$$|G(\xi, t)| \leq C|\xi|.$$

Assim, segue o resultado.

□

4.1 ESTIMATIVAS SUPERIORES

Considere o problema (4.1). Nesta seção o principal foco é mostrar que sendo $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de (4.1), caso $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(\nu)t^{-\alpha}$ com $C, \alpha > 0$, então vale que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_m(\nu)t^{-\alpha-m/2}, \text{ para todo } m \geq 0 \text{ inteiro.}$$

Equivalentemente, queremos mostrar que

$$\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_m(\nu)t^{-\alpha-m/2}.$$

Para mostrarmos esse fato, precisamos mostrar alguns resultados preliminares. Como a identidade de energia para as equações de Navier-Stokes (4.1), algumas consequências, entre outros resultados.

Proposição 4.7 (Identidade de Energia para as equações de Navier-Stokes). *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray de (4.1), então é válido que*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2,$$

para $t > t_0 > t_*$

Demonstração. Defina a função de corte $\varphi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \|x\| \leq R; \\ \phi(x), & \text{se } R < \|x\| < R+1; \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq R+1, \end{cases}$$

onde $R > 0$.

Multiplicando $2u_i\varphi_R$ em (4.1) e integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$, temos

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R \frac{\partial(u_i)}{\partial t} d\tau dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i d\tau dx}_{(2)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R D_i p d\tau dx}_{(3)} = \\ & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R \nu \sum_{j=1}^3 D_j D_j u_i d\tau dx}_{(4)}. \end{aligned}$$

Vamos trabalhar com cada termo separadamente.

$$\begin{aligned}
 (1) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R \frac{\partial(u_i)}{\partial t} d\tau dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t \varphi_R \frac{\partial(u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_R \int_{t_0}^t \frac{\partial(u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_R [u_i(\cdot, t)^2 - u_i(\cdot, t_0)^2] dx \\
 &= \int_{\|x\| < R+1} \varphi_R [u_i(\cdot, t)^2 - u_i(\cdot, t_0)^2] dx;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i d\tau dx \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} \varphi_R \sum_{j=1}^3 2u_i u_j D_j u_i dx d\tau \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} \varphi_R \sum_{j=1}^3 u_j(\cdot, \tau) D_j (u_i(\cdot, \tau)^2) dx d\tau \\
 &= \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \left[\underbrace{\int_{\|x\|=R+1} (\varphi_R u_j) u_i^2 dS}_{=0} - \int_{\|x\| < R+1} u_i^2 D_j (\varphi_R u_j) dx \right] d\tau \\
 &= - \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} u_i^2 [D_j (\varphi_R) u_j + \underbrace{\varphi_R D_j (u_j)}_{=0}] dx d\tau \\
 &= - \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} u_i(\cdot, \tau)^2 D_j (\varphi_R) u_j(\cdot, \tau) dx d\tau;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R D_i p d\tau dx \\
 &= 2 \int_{t_0}^t \left[\underbrace{\int_{\|x\|=R+1} u_i \varphi_R p dS}_{=0} - \int_{\|x\| < R+1} D_i (u_i \varphi_R) p dx \right] d\tau \\
 &= -2 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} D_i (u_i \varphi_R) p dx d\tau \\
 &= -2 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} [D_i (u_i) \varphi_R p + u_i D_i (\varphi_R) p] dx d\tau;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2u_i \varphi_R \nu \sum_{j=1}^3 D_j D_j u_i d\tau dx \\
&= 2\nu \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} u_i \varphi_R D_j D_j u_i dx d\tau \\
&= 2\nu \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \left[\underbrace{\int_{\|x\|=R+1} u_i \varphi_R D_j(u_i) dS}_{=0} - \int_{\|x\| < R+1} D_j(u_i \varphi_R) D_j(u_i) dx \right] d\tau \\
&= -2\nu \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} D_j(u_i \varphi_R) D_j(u_i) dx d\tau \\
&= -2\nu \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} [(D_j(u_i))^2 \varphi_R + u_i D_j(\varphi_R) D_j(u_i)] dx d\tau.
\end{aligned}$$

Juntando os termos, temos que

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{\|x\| < R+1} \varphi_R [u_i(\cdot, t)^2 - u_i(\cdot, t_0)^2] dx}_{(I)} - \underbrace{\sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} u_i(\cdot, \tau)^2 D_j(\varphi_R) u_j(\cdot, \tau) dx d\tau}_{(II)} \\
&\quad - \underbrace{2 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} [D_i(u_i) \varphi_R p + u_i D_i(\varphi_R) p] dx d\tau}_{(III)} = \\
&= -2\nu \underbrace{\sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} [(D_j(u_i))^2 \varphi_R + u_i D_j(\varphi_R) D_j(u_i)] dx d\tau}_{(IV)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $R \rightarrow +\infty$ e seguindo um argumento análogo ao usado no capítulo da equação do calor, temos que $D_j(\varphi_R) \rightarrow 0$. Além disso, usando o teorema da convergência monótona e trabalhando com cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned}
(I) : \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\|x\| < R+1} \varphi_R [u_i(\cdot, t)^2 - u_i(\cdot, t_0)^2] dx &= \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\cdot, t)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\cdot, t_0)^2 dx \\
&= \|u_i(\cdot, t)\|_{L^2}^2 - \|u_i(\cdot, t_0)\|_{L^2}^2;
\end{aligned}$$

$$(II) : \lim_{R \rightarrow +\infty} - \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} u_i(\cdot, \tau)^2 D_j(\varphi_R) u_j(\cdot, \tau) dx d\tau = 0;$$

$$(III) : \lim_{R \rightarrow +\infty} -2 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} [D_i(u_i) \varphi_R p + \underbrace{u_i D_i(\varphi_R) p}_{=0}] dx d\tau = -2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} D_i(u_i) p dx d\tau;$$

$$(IV) : \lim_{R \rightarrow +\infty} -2\nu \sum_{j=1}^3 \int_{t_0}^t \int_{\|x\| < R+1} [(D_j(u_i))^2 \varphi_R + \underbrace{u_i D_j(\varphi_R) D_j(u_i)}_{=0}] dx d\tau =$$

$$= -2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j(u_i))^2 dx d\tau.$$

Juntando os termos e somando em i , temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\sum_{i=1}^3 D_i(u_i) p}_{=0} dx d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Portanto, segue que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

□

Corolário 4.8. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray de (4.1). Então $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em relação ao tempo t .*

Demonstração. Tome $t_1, t_2 > 0$ tais que $t_2 \geq t_1 \geq t_*$. Suponha que $\mathbf{u}(\cdot, t)$ é solução das equações de Navier-Stokes (4.1). Daí, pela identidade de energia

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_1}^{t_2} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Como

$$2\nu \int_{t_1}^{t_2} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq 0,$$

temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Deste modo,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Portanto, conclui-se que $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em relação ao tempo t .

□

Lema 4.9. *Seja uma função $f(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > t_*$ e*

$$\int_0^{+\infty} f(\cdot, s) ds < +\infty.$$

Então

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(\cdot, t) = 0.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq \beta,$$

com $\beta > 0$ constante. Logo, existe $\hat{t} > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{\hat{t}}^{\infty} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \geq \int_{\hat{t}}^{\infty} \beta ds.$$

Isso implica que

$$\int_{\hat{t}}^{\infty} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds \rightarrow +\infty.$$

O que é uma contradição, pois $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

□

Proposição 4.10. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ uma solução de Leray do problema (4.1), então é válido*

$$t^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Pela identidade de energia, temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Daí,

$$2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Assim,

$$\int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \frac{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2\nu}.$$

Como o lado direito da desigualdade anterior não depende de t , temos

$$\int_0^{+\infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \frac{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2\nu} < +\infty.$$

Agora, vamos mostrar que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em relação ao tempo t , ou seja, dados $t_1, t_2 > 0$ tais que $t_1 \geq t_2 \geq t_*$, então $\|D\mathbf{u}(\cdot, t_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

De fato, reescrevendo as equações (4.1) coordenada a coordenada e multiplicando por $2D_l u_i D_l$, temos

$$2D_l u_i D_l \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 2D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) + 2D_l u_i D_l D_i p = 2\nu \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (D_j D_j u_i).$$

Integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ e usando o teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2D_l u_i D_l \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 2D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2D_l u_i D_l D_i p d\tau dx = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} 2\nu \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (D_j D_j u_i) dx d\tau. \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t \frac{\partial (D_l u_i^2)}{\partial t} d\tau dx + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau \\ & - 2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t D_l D_i u_i D_l p d\tau dx}_{=0} \leq -2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_l D_j u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} & \|D_l u_i(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_l D_j u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau \leq \\ & \leq \|D_l u_i(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Note que

$$\begin{aligned} & -2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau \\ & = -2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l u_j D_j u_i + \sum_{j=1}^3 D_l u_i u_j D_j D_l u_i \right] dx d\tau \\ & = -2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{j=1}^3 D_j D_l u_i D_l u_j u_i + \underbrace{\sum_{j=1}^3 D_j u_j (D_l u_i)^2}_{=0} \right] dx d\tau \\ & = 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_j D_l u_i D_l u_j u_i dx d\tau \\ & \leq 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \|u_i(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau. \end{aligned}$$

Voltando para (4.16) e somando $i, l = 1, 2, 3$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ & + 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 \|u_i(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau. \end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Hölder no último termo da desigualdade anterior, temos que

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 \|u_i(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau \leq \\
& \leq 2 \sum_{i,j,l=1}^3 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau = \\
& = 2 \sum_{i,l=1}^3 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau \leq \\
& \leq 2 \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{j=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau \leq \\
& \leq 2 \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau = \\
& = 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau \leq \\
& \leq 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{i,j,l=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i,j,l=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau \leq \\
& \leq 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau.
\end{aligned}$$

Agora, usando as desigualdades do tipo GNS (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev), temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} & \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Deste modo, concluímos que

$$\begin{aligned}
& \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\
& + 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$.

Como $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em relação a t , temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau &\leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\ &+ 2 \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Além disso, pelo lema anterior, como

$$\int_0^{+\infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \frac{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2}{2\nu} < +\infty,$$

temos que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = 0.$$

Logo, existe $t_{**} > 0$ suficientemente grande tal que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t_{**})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} < \frac{\nu}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.18)$$

Vamos mostrar que $\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} < \frac{\nu}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}}$, para todo $s \geq t_0 \geq t_{**}$ suficientemente grande.

De fato, suponha, por contradição, que existe $\hat{s} = t_0$ tal que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} < \frac{\nu}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}}, \text{ para todo } \hat{s} > s \geq t_{**}, \text{ e}$$

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, \hat{s})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} = \frac{\nu}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.19)$$

Fazendo $t = \hat{s}$ em (4.17), temos que

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{u}(\cdot, \hat{s})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{\hat{s}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau &\leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\ &+ 2 \int_{t_0}^{\hat{s}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Daí, por (4.19)

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{u}(\cdot, \hat{s})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{\hat{s}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau &\leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\ &+ 2 \int_{t_0}^{\hat{s}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}} \right) \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, \hat{s})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{\hat{s}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^{\hat{s}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.$$

Logo,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, \hat{s})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

De (4.18) e (4.19), temos que

$$\frac{\nu^2}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} < \frac{\nu^2}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}.$$

Contradição.

Deste modo, voltando para (4.17), temos

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau &\leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \\ &+ 2\delta \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau, \end{aligned}$$

com $\nu > \delta > 0$.

Tome $\tilde{\nu} = \nu - \delta$, daí

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\tilde{\nu} \int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Assim,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Logo,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|D\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $t \geq t_0$.

Portanto, $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente com relação ao tempo t .

Por fim, como $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente, temos que vale

$$\begin{aligned} t\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= 2 \int_{\frac{t}{2}}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &\leq 2 \int_{\frac{t}{2}}^t \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow +\infty$.

Consequentemente

$$t^{\frac{1}{2}}\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0 \text{ ao } t \rightarrow +\infty.$$

□

Teorema 4.11 (Estimativas Superiores para as Equações de Navier-Stokes). *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray de (4.1) tal que*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_\nu t^{-\alpha}.$$

Então

$$\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{m,\nu} t^{-\alpha - \frac{m}{2}},$$

para todo $m \geq 1$ inteiro.

Demonstração. Vamos mostrar esse resultado por indução em m . Inicialmente, vamos reescrever as equações de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j D_j u_i + D_i p = \nu \sum_{j=1}^3 D_j D_j u_i.$$

Multiplicando $2(t - t_0)^\gamma u_i$ na equação anterior, integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ e usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma 2u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \sum_{j=1}^3 2u_i u_j D_j u_i d\tau dx + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^\gamma 2u_i D_i p dx d\tau = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} 2\nu (\tau - t_0)^\gamma \sum_{j=1}^3 u_i D_j D_j u_i dx d\tau. \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \frac{\partial (u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \sum_{j=1}^3 2u_i D_j u_j u_i d\tau dx}_{=0} + \\ & - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^\gamma 2D_i u_i p dx d\tau = -2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^\gamma \sum_{j=1}^3 (D_j u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, integrando por partes e somando em i , temos

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\ & - 2 \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^\gamma \sum_{i=1}^3 D_i u_i p dx d\tau}_{=0} = -2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(t - t_0)^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &+ 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \\
&= \gamma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
&\leq C_{\nu, \gamma} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \tau^{-2\alpha} d\tau \\
&= C_{\nu, \gamma} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-1} \tau^{-2\alpha} \cdot \frac{(\tau - t_0)^{-2\alpha}}{(\tau - t_0)^{-2\alpha}} d\tau \\
&\leq C_{\nu, \gamma} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-2\alpha-1} \tau^{-2\alpha} \tau^{2\alpha} d\tau \\
&= C_{\nu, \gamma} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-2\alpha-1} d\tau.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(t - t_0)^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-2\alpha-1} d\tau.$$

Logo, integrando o termo do lado direito da desigualdade anterior, temos

$$(t - t_0)^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}. \quad (4.20)$$

Agora, multiplicando $2(t - t_0)^{\gamma+1} D_l u_i D_l$ em (4.1) e integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} 2D_l u_i D_l \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \sum_{j=1}^3 2D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) d\tau dx + \\
&\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} 2D_l u_i D_l D_i p d\tau dx = 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l D_j D_j u_i dx d\tau.
\end{aligned}$$

Integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \frac{\partial (D_l u_i(\cdot, \tau))^2}{\partial t} d\tau dx - \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} 2D_l D_i u_i D_l p dx d\tau = \quad (4.21) \\
&-2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_l D_j u_i)^2 dx d\tau - \underbrace{\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 2D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau}_{=(I)}.
\end{aligned}$$

Trabalhando com (I), temos

$$\begin{aligned}
(I) &= - \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 2D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau \\
&= -2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l u_j D_j u_i + \sum_{j=1}^3 D_l u_i u_j D_j D_l u_i \right] dx d\tau \\
&= -2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} - \left[\sum_{j=1}^3 D_j D_l u_i D_l u_j u_i + \underbrace{\sum_{j=1}^3 D_j u_j (D_l u_i)^2}_{=0} \right] dx d\tau \\
&= 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_j D_l u_i D_l u_j u_i dx d\tau \\
&\leq 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \|u_i(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau.
\end{aligned}$$

Voltando para (4.21), pelo Teorema Fundamental do Cálculo e somando $1 \leq i, l \leq 3$, temos

$$\begin{aligned}
&(t - t_0)^{\gamma+1} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\
&\leq (\gamma + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\
&+ 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 \|u_i(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Hölder no último termo da desigualdade anterior, temos

$$\begin{aligned}
&2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l=1}^3 \|u_i(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau \leq \\
&\leq 2 \sum_{i,j,l=1}^3 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau = \\
&= 2 \sum_{i,l=1}^3 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)| |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau \leq \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{j=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau \leq \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau = \\
&= 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j,l=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\sum_{i,j,l=1}^3 |D_l u_j(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i,j,l=1}^3 |D_j D_l u_i(\cdot, \tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx d\tau \leq \\
&\leq 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} d\tau.
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, concluímos que

$$(t - t_0)^{\gamma+1} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
&(\gamma + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\
&2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 4.10 e por (4.20), temos que

$$(t - t_0)^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Daí,

$$\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Usando esse fato em (4.22), temos

$$\begin{aligned}
(t - t_0)^{\gamma+1} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &+ 2\tilde{\nu} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\
&\leq (\gamma + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^\gamma \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
&\leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(t - t_0)^{\gamma+1} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Assim,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{-2\alpha-1}.$$

Daí,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando $\left(\frac{t}{t}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ na desigualdade anterior, temos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{t}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Deste modo,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} \left(\frac{t - t_0}{t} \right)^{-\alpha - \frac{1}{2}} t^{-\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t - t_0}{t} \right)^{-\alpha - \frac{1}{2}} = 1,$$

podemos considerar

$$C_{\nu, \gamma, \alpha} \left(\frac{t - t_0}{t} \right)^{-\alpha - \frac{1}{2}} = C.$$

Portanto, segue que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C \cdot t^{-\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Assim, o resultado é válido para $m = 1$.

Agora, vamos mostrar que o resultado vale para $m = 2$. Para tanto, multiplicando $2(t - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2}$ na equação (4.1) e integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$, temos que

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} 2D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx}_{=(II)} \\ & + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \sum_{j=1}^3 2D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} u_j D_j u_i d\tau dx}_{=(III)} \\ & + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} 2D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} D_i p d\tau dx}_{=(IV)} = \\ & = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2\nu (\tau - t_0)^{\gamma+2} \sum_{j=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} D_j D_j u_i d\tau dx}_{=(V)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Vamos trabalhar com cada termo separadamente

$$\begin{aligned} (II) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} 2D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx \\ &= \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \frac{\partial D_{l_1} D_{l_2} (u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(III) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \sum_{j=1}^3 2D_{l_1} D_{l_2} u_i (D_{l_1} D_{l_2} u_j D_j u_i) d\tau dx \\
&= 2 \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{\gamma+2} \sum_{j=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} u_i (D_{l_1} D_{l_2} u_j D_j u_i) dx d\tau \\
&= 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} u_i [D_{l_1} D_{l_2} u_j D_j u_i + D_{l_2} u_j D_{l_1} D_j u_i \\
&\quad + D_{l_1} u_j D_{l_2} D_j u_i + u_j D_{l_1} D_{l_2} D_j u_i] dx d\tau \\
&= -2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 u_i D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} u_j dx d\tau + \\
&\quad -2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_2} u_j D_{l_1} u_i dx d\tau + \\
&\quad -2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} u_j D_{l_2} u_i dx d\tau + \\
&\quad -2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\sum_{j=1}^3 D_j u_j (D_{l_1} D_{l_2} u_i)^2}_{=0} dx d\tau \\
&= -2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 [u_i D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} u_j + D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_2} u_j D_{l_1} u_i \\
&\quad + D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} u_j D_{l_2} u_i] dx d\tau;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(IV) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} 2D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} D_i p d\tau dx \\
&= -2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} D_i u_i D_{l_1} D_{l_2} p d\tau dx;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(V) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t 2\nu (\tau - t_0)^{\gamma+2} \sum_{j=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} D_j D_j u_i d\tau dx \\
&= 2\nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\tau - t_0)^{\gamma+2} \sum_{j=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} D_j D_j u_i dx d\tau \\
&= -2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_{l_1} D_{l_2} D_j u_i)^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Daí, juntando os termos e reescrevendo (4.23), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \frac{\partial D_{l_1} D_{l_2} (u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx - 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 [u_i D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} u_j + \\
&\quad + D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_2} u_j D_{l_1} u_i + D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} u_j D_{l_2} u_i] dx d\tau + \\
&-2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} D_i u_i D_{l_1} D_{l_2} p d\tau dx = -2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_{l_1} D_{l_2} D_j u_i)^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} D_{l_1} D_{l_2} (u_i(\cdot, t))^2 dx + \\
& + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_{l_1} D_{l_2} D_j u_i)^2 dx d\tau + \\
& - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} D_{l_1} D_{l_2} D_i u_i D_{l_1} D_{l_2} p d\tau dx \leq \\
& \leq (\gamma + 2) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \int_{\mathbb{R}^3} D_{l_1} D_{l_2} (u_i(\cdot, t))^2 dx d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 [u_i D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} u_j + \\
& + D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_2} u_j D_{l_1} u_i + D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} u_j D_{l_2} u_i] dx d\tau.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Somando em i, l_1, l_2 , tomando o módulo no último termo da desigualdade anterior e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, temos

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l_1,l_2=1}^3 [u_i D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} u_j + \\
& D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_2} u_j D_{l_1} u_i + D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} u_j D_{l_2} u_i] dx d\tau = \\
& = 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l_1,l_2=1}^3 u_i D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} u_j dx d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l_1,l_2=1}^3 D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_2} u_j D_{l_1} u_i dx d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l_1,l_2=1}^3 D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} u_j D_{l_2} u_i dx d\tau \leq \\
& \leq 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l_1,l_2=1}^3 |u_i(\cdot, \tau)| |D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i(\cdot, \tau)| |D_{l_1} D_{l_2} u_j(\cdot, \tau)| dx d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l_1,l_2=1}^3 |D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i(\cdot, \tau)| |D_{l_2} u_j(\cdot, \tau)| |D_{l_1} u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j,l_1,l_2=1}^3 |D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i(\cdot, \tau)| |D_{l_1} u_j(\cdot, \tau)| |D_{l_2} u_i(\cdot, \tau)| dx d\tau \leq \\
& \leq K \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \\
& + \|D \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau,
\end{aligned}$$

com $K > 0$ constante. Voltando para (4.24), temos

$$(t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{j,l_1,l_2=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \underbrace{\sum_{i=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} D_i u_i D_{l_1} D_{l_2} p}_{=0} d\tau dx \leq \\
& \leq (\gamma + 2) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\
& + K \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \\
& + \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau.
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, o último termo de (4.25) fica

$$\begin{aligned}
& K \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \\
& + \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau \leq \\
& \leq \tilde{K} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} [\|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \\
& + \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}] d\tau = \\
& = 2\tilde{K} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2}$ é decrescente, temos que

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}.$$

E pelo o que mostramos na Proposição 4.10, temos

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} < \frac{\eta}{\tilde{K} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}},$$

para todo $s \geq t_0, \eta > 0, \tilde{K} > 0$. Voltando para (4.25), tomando $\nu > \eta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\
& \leq (\gamma + 2) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\
& + 2\tilde{K} \int_{t_0}^t \frac{\eta}{\tilde{K} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \underbrace{(\nu - \eta)}_{=\mu} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \quad (4.26) \\
& \leq (\gamma + 2) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Além disso, pelo caso $m = 1$ é válido que

$$\begin{aligned}
 (t - t_0)^{\gamma+1} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &+ 2\tilde{\nu} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\
 &\leq (\gamma + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
 &\leq C_{\nu, \gamma, \alpha} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma} (\tau - t_0)^{-2\alpha-1} d\tau \\
 &= C_{\nu, \gamma, \alpha} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-2\alpha-1} d\tau \\
 &= C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.
 \end{aligned}$$

Deste modo,

$$(t - t_0)^{\gamma+1} \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\tilde{\nu} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+1} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Assim,

$$\int_{t_0}^t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Voltando para (4.26), temos

$$(t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\mu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+2} \|D^3\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Daí,

$$(t - t_0)^{\gamma+2} \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Assim,

$$\|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{-2\alpha-2}.$$

Logo,

$$\|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{-\alpha-1}.$$

Deste modo,

$$\|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} t^{-\alpha-1}.$$

Portanto, o resultado vale para $m = 2$.

Agora, vamos mostrar que o resultado é válido para todo $m \geq 1$. Suponha que o resultado é válido para m , ou seja,

$$\|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_m t^{-\alpha-\frac{m}{2}}.$$

Queremos mostrar que o resultado vale para $m + 1$. Multiplicando

$$2(t - t_0)^{\gamma+m+1} D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_{m+1}} u_i D_{l_1} D_{l_2} \dots D_{l_{m+1}}$$

em (4.1), integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t_0, t]$ e seguindo um argumento análogo aos casos anteriores, temos

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\
& \leq (\gamma + m + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} (\|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
& + \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^m\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^{m-1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \dots + \\
& + \|D^{\frac{m+1}{2}}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^{\frac{m+1}{2}}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}) d\tau,
\end{aligned}$$

onde $\frac{m+1}{2}$ é inteiro. Pelas desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, que dizem

$$\|D^l\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^{m+1+l}\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^{m+2}\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $m \geq 0$, $0 \leq l \leq m$. Como $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em relação a t , temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \quad (4.27) \\
& \leq (\gamma + m + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Além disso, pela hipótese de indução e identidade de energia, temos que

$$\begin{aligned}
& (t - t_0)^{\gamma+m} \|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\
& \leq (\gamma + m) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m-1} \|D^m\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\
& \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m-1} (\tau - t_0)^{-2\alpha-m} d\tau \\
& = C_{\nu, \gamma, \alpha} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma-2\alpha-1} d\tau \\
& = C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(t - t_0)^{\gamma+m} \|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Daí,

$$\int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}. \quad (4.28)$$

Pela Proposição 4.10, vale que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} < \frac{\eta}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}},$$

para todo $s \geq t_0$, $\eta > 0$. Assim, voltando para (4.27), e tomando $\nu > \eta > 0$, temos

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\ & \leq (\gamma + m + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau + \\ & + 2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\eta}{\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}} \right] \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Daí, por (4.28)

$$\begin{aligned} & (t - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \underbrace{2(\nu - \eta)}_{=\sigma} \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \\ & \leq (\gamma + m + 1) \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ & \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}. \end{aligned}$$

Assim,

$$(t - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\sigma \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+2}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Logo,

$$(t - t_0)^{\gamma+m+1} \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{\gamma-2\alpha}.$$

Daí,

$$\|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{-2\alpha - (m+1)}.$$

Deste modo,

$$\|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} (t - t_0)^{-\alpha - \frac{(m+1)}{2}}.$$

Assim, segue que

$$\|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_{\nu, \gamma, \alpha} t^{-\alpha - \frac{(m+1)}{2}}.$$

Portanto, é válido que

$$\|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_m t^{-\alpha - \frac{m}{2}},$$

para todo $m \geq 1$ inteiro.

□

Corolário 4.12. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray de (4.1). Então vale que*

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\alpha-\frac{3}{4}},$$

para todo $t \geq t_m \geq t_*$, com $C > 0$ constante.

Demonstração. Pelo Teorema 4.11, temos que

$$\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\alpha-\frac{m}{2}}, \quad (4.29)$$

para todo $m \geq 1$. Além disso, tome $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ e pela desigualdade do tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}.$$

Daí,

$$t^\gamma \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq (t^{4\gamma_1} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{1}{4}} (t^{\frac{4}{3}\gamma_2} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)})^{\frac{3}{4}} \leq C.$$

Quando $m = 0$ em (4.29), temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\alpha} \Leftrightarrow t^\alpha \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C.$$

Daí,

$$4\gamma_1 = \alpha \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\alpha}{4}.$$

Por outro lado, quando $m = 2$ em (4.29), tem-se

$$\|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\alpha-1} \Leftrightarrow t^{\alpha+1} \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C.$$

Assim,

$$\frac{3}{4}\gamma_2 = \alpha + 1 \Rightarrow \gamma_2 = \frac{3\alpha}{4} + \frac{3}{4}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 \\ &= \frac{\alpha}{4} + \frac{3\alpha}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \alpha + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq Ct^{-\alpha-\frac{3}{4}},$$

□

Teorema 4.13. *Seja $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ tal que*

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_1 t^{-\alpha_1},$$

para todo $t > T_1$ e com $C_1, T_1 > 0$ constantes. Então

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_0 t^{-\alpha_1+\frac{1}{2}},$$

para todo $t > T_0$, com $C_0 = C_0(C_1, \alpha_1, \nu)$ e $T_0 = T_0(t_, T_1, \alpha_1, \nu, \tau_0)$.*

Demonstração. Sejam $T_0 = \max\{T_1, t_*, \tau_0\}$ e $T > t > t_0$. Pela identidade de energia, temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Por hipótese e usando o fato de que $\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ ao $T \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= 2\nu \int_t^\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &\leq 2\nu \int_t^\infty C_1^2 \tau^{-2\alpha_1} d\tau \\ &= \frac{2C_1^2 \nu}{2\alpha_1 - 1} t^{-2\alpha_1+1}. \end{aligned}$$

Tomando $C_0^2 = \frac{2C_1^2 \nu}{2\alpha_1 - 1}$, temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq C_0 t^{-2\alpha_1+1}.$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_0 t^{-\alpha_1+\frac{1}{2}}.$$

□

4.2 ESTIMATIVAS INFERIORES

Lema 4.14. *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray de (4.1). Então existe $\tau_m \geq t_*$ tal que*

$$\left| \sum_{l_1, \dots, l_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_{l_1} \dots D_{l_m} \mathbf{u}(\cdot, t), D_{l_1} \dots D_{l_m} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle dx \right| \leq \nu \|D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

para cada $m \geq 0$ e para todo $t \geq \tau_m$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{l_1, \dots, l_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_{l_1} \dots D_{l_m} \mathbf{u}(\cdot, t), D_{l_1} \dots D_{l_m} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle dx \right| = \\
& = \left| \sum_{i,j,l_1, \dots, l_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} D_{l_1} \dots D_{l_m} u_i D_{l_1} \dots D_{l_m} u_j D_j u_i dx \right| \\
& \leq \sum_{i,j,l_1, \dots, l_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |D_{l_1} \dots D_{l_m} u_i D_{l_1} \dots D_{l_m} u_j D_j u_i| dx \\
& \leq \|D^{m+1} \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} (\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|D^m \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|D\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|D^{m-1} \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\
& \quad + \|D^2 \mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|D^{m-2} \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \dots + \|D^{\frac{m}{2}} \mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|D^{\frac{m}{2}} \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}),
\end{aligned}$$

onde $\frac{m}{2}$ é inteiro.

Pelas desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e como $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente para $t \geq t_*$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \delta_1.$$

Pela Proposição 4.10, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \delta_2.$$

Tomando $\nu = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, concluímos

$$\left| \sum_{l_1, \dots, l_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_{l_1} \dots D_{l_m} \mathbf{u}(\cdot, t), D_{l_1} \dots D_{l_m} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle dx \right| \leq \nu \|D^{m+1} \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

para cada $m \geq 0$.

□

Teorema 4.15 (Estimativas Inferiores para as Equações de Navier-Stokes). *Seja $\mathbf{u}(\cdot, t)$ solução de Leray de (4.1). Sejam*

1. $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C_0 t^{-\alpha}$, para todo $t \geq T_0$, onde $C_0, T_0, \alpha > 0$;
2. $\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_0 t^{-\alpha}$, para todo $t \geq t_0$, em que $c_0, t_0, \alpha > 0$.

Então

$$\|D^m \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_m t^{-\alpha - \frac{m}{2}},$$

para todo $t > t_m$, com constantes $c_m > 0$, $t_m > t_0$, para todo $m \geq 1$ inteiro.

Demonstração. Vamos mostrar por indução que o resultado é válido para todo $m \geq 1$ inteiro.

Considere $M_1 \geq 1$ tal que $T = M_1 t$ a ser escolhido adiante. Tome $t \geq t_1 = \max\{t_0, T_0, t_*, \tau_0\}$.

Multiplicando $2u_i$ na equação (4.1) e integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t, T]$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T 2u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \sum_{j=1}^3 2u_i u_j D_j u_i d\tau dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T 2u_i D_i p d\tau dx = 2\nu \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \sum_{j=1}^3 u_i D_j D_j u_i d\tau dx. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Fubini e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \frac{\partial(u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \sum_{j=1}^3 u_j (D_j u_i(\cdot, \tau)^2) d\tau dx + \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T D_i u_i p d\tau dx = -2\nu \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\cdot, T)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} u_i(\cdot, t)^2 dx - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \sum_{j=1}^3 D_j u_j u_i(\cdot, \tau)^2 d\tau dx}_{=0} + \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T D_i u_i p d\tau dx = -2\nu \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Somando em i , temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \sum_{i=1}^3 D_i u_i p d\tau dx}_{=0}.$$

Daí,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq c_0^2 t^{-2\alpha}.$$

Assim,

$$2\nu \int_t^T \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq c_0^2 t^{-2\alpha} - C_0^2 M_1^{-2\alpha} t^{-2\alpha}.$$

Logo,

$$2\nu \int_t^T \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq (c_0^2 - C_0^2 M_1^{-2\alpha}) t^{-2\alpha}.$$

Escolhendo $M_1 = \left[\frac{\sqrt{2}C_0}{c_0} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$ e usando o fato de que $\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $t > t_1$, temos

$$2\nu \int_0^T \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq 2\nu \int_t^T \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_0^2}{2} t^{-2\alpha}.$$

Daí,

$$2\nu T \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_0^2}{2} t^{-2\alpha}.$$

Deste modo,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_0^2}{4M\nu} t^{-2\alpha-1}.$$

Tome $c_1^2 = \frac{c_0^2}{4M\nu}$. Assim,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq c_1 t^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Logo, o resultado é válido para $m = 1$.

Tome $M_2 > 1$ com $T = M_2 t$ a ser escolhido. Multiplicando $2D_l u_i D_l$ na equação (4.1) e integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t, T]$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T 2D_l u_i D_l \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx + \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \sum_{j=1}^3 2D_l u_i D_l u_j D_j u_i d\tau dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T 2D_l u_i D_l D_i p d\tau dx = 2\nu \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l D_j D_j u_i d\tau dx. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini e integrando por partes

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \frac{\partial (D_l u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx + 2 \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau + \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T D_l D_i u_i D_l p d\tau dx = -2\nu \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j D_l u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} D_l u_i(\cdot, T)^2 dx + 2\nu \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j D_l u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau + \\ & - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T D_l D_i u_i D_l p d\tau dx = \int_{\mathbb{R}^3} D_l u_i(\cdot, t)^2 dx - 2 \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_l u_i D_l (u_j D_j u_i) dx d\tau. \end{aligned}$$

Somando em $i, l = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned} & \|D\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau - 2 \sum_{l=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \underbrace{\sum_{i=1}^3 D_l D_i u_i D_l p}_{=0} d\tau dx = \\ & = \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \int_t^T \sum_{l=1}^3 \langle D_l \mathbf{u}, D_l (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.14, temos que

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2\nu \int_t^T \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.$$

Logo,

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\nu \int_t^T \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Pelo caso $m = 1$ e Teorema 4.11, temos

$$\begin{aligned} 4\nu \int_t^T \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau &\geq c_1^2 t^{-2\alpha-1} - C_1^2 M_2^{-2\alpha-1} t^{-2\alpha-1} \\ &= (c_1^2 - C_1^2 M_2^{-2\alpha-1}) t^{-2\alpha-1}. \end{aligned}$$

Escolhendo $M_2 = \left[\frac{\sqrt{2}C_1}{c_1} \right]^{\frac{2}{2\alpha+1}}$ e usando o fato de que $\|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $t > t_2$ com $t_2 = \max\{t_1, T_1, t_*, \tau_1\}$, temos

$$4\nu \int_0^T \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq 4\nu \int_t^T \|D^2\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_1^2}{2} t^{-2\alpha-1}.$$

Assim,

$$4\nu T \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_1^2}{2} t^{-2\alpha-1}.$$

Daí,

$$t \|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{c_1^2}{8M_2\nu} t^{-2\alpha-1}.$$

Tomando $c_2^2 = \frac{c_1^2}{8M_2\nu}$, temos

$$\|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq c_2^2 t^{-2\alpha-2}.$$

Deste modo,

$$\|D^2\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_2 t^{-\alpha-1}.$$

Portanto, o resultado é válido para $m = 2$.

Vamos mostrar agora que o resultado é válido para $m = 3$. Multiplicando $2D_{l_1}D_{l_2}u_iD_{l_1}D_{l_2}$ na equação (4.1), integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t, T]$, onde $T = M_3t$ com $M_3 > 1$ a ser escolhido adiante e usando o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T 2D_{l_1}D_{l_2}u_iD_{l_1}D_{l_2} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau dx + \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 2D_{l_1}D_{l_2}u_iD_{l_1}D_{l_2}(u_jD_ju_i) dx d\tau + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T 2D_{l_1}D_{l_2}u_iD_{l_1}D_{l_2}D_ip d\tau dx = 2\nu \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_{l_1}D_{l_2}u_iD_{l_1}D_{l_2}D_jD_ju_i dx d\tau. \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \frac{\partial(D_{l_1}D_{l_2}u_i(\cdot, \tau)^2)}{\partial t} d\tau dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T D_{l_1}D_{l_2}D_iu_iD_{l_1}D_{l_2}p d\tau dx =$$

$$= -2\nu \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau - 2 \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} (u_j D_j u_i) dx d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} D_{l_1} D_{l_2} u_i(\cdot, T)^2 dx + 2\nu \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 (D_j D_{l_1} D_{l_2} u_i(\cdot, \tau))^2 dx d\tau + \\ & -2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T D_{l_1} D_{l_2} D_i u_i D_{l_1} D_{l_2} u_i p d\tau dx = \int_{\mathbb{R}^3} D_{l_1} D_{l_2} u_i(\cdot, t)^2 dx + \\ & -2 \int_t^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} u_i D_{l_1} D_{l_2} (u_j D_j u_i) dx d\tau. \end{aligned}$$

Somando $i, l_1, l_2 = 1, 2, 3$, temos que

$$\begin{aligned} & \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau - 2 \sum_{l_1, l_2=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \int_t^T \underbrace{\sum_{i=1}^3 D_{l_1} D_{l_2} D_i u_i D_{l_1} D_{l_2} p}_{=0} d\tau dx = \\ & = \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \int_t^T \sum_{l_1, l_2=1}^3 \langle D_{l_1} D_{l_2} \mathbf{u}, D_{l_1} D_{l_2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.14, segue

$$\|D^2 \mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2\nu \int_t^T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau.$$

Daí,

$$\|D^2 \mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\nu \int_t^T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Pelo caso $m = 2$ e Teorema 4.11, temos

$$\begin{aligned} 4\nu \int_t^T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau & \geq c_2^2 t^{-2\alpha-2} - C_2^2 M_3^{-2\alpha-2} t^{-2\alpha-2} \\ & = (c_2^2 - C_2^2 M_3^{-2\alpha-2}) t^{-2\alpha-2}. \end{aligned}$$

Escolhendo $M_3 = \left[\frac{\sqrt{2}C_2}{c_2} \right]^{\frac{2}{2\alpha+2}}$ e como $\|D^3 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $t > t_2$ onde $t_3 = \max\{t_2, T_2, t_*, \tau_2\}$, segue que

$$4\nu \int_0^T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq 4\nu \int_t^T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_2^2}{2} t^{-2\alpha-2}.$$

Daí,

$$4\nu T \|D^3 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_2^2}{2} t^{-2\alpha-2}.$$

Logo,

$$\|D^3 \mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{c_2^2}{8M_3\nu} t^{-2\alpha-3}.$$

Tome $c_3^2 = \frac{c_2^2}{8M_3\nu}$, daí

$$\|D^3\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_3 t^{-\alpha-\frac{3}{2}}.$$

Logo, o resultado é válido para $m = 3$.

Agora, suponha que o resultado é válido para m , isto é,

$$\|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_m t^{-\alpha-\frac{m}{2}}.$$

Queremos mostrar que o resultado vale para $m+1$. Para tanto, multiplicando $2D_{l_1}D_{l_2}\dots D_{l_m}u_i D_{l_1}D_{l_2}\dots D_{l_m}$ na equação (4.1), integrando em $\mathbb{R}^3 \times [t, T]$, com $T = M_{m+1}t$, onde $M_{m+1} > 1$ a ser escolhido adiante e seguindo um argumento análogo aos casos anteriores, temos que

$$\begin{aligned} & \|D^m\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \\ & = \|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2 \int_t^T \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=1}^3 \langle D_{l_1}D_{l_2}\dots D_{l_m}\mathbf{u}, D_{l_1}D_{l_2}\dots D_{l_m}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle d\tau. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.14, temos

$$\begin{aligned} & \|D^m\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ & = \|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 - 2\nu \int_t^T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|D^m\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\nu \int_t^T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|D^m\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Pela hipótese de indução e pelo Teorema 4.11, temos

$$\begin{aligned} 4\nu \int_t^T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau & \geq c_m^2 t^{-2\alpha-m} - C_m^2 M_{m+1}^{-2\alpha-m} t^{-2\alpha-m} \\ & = (c_m^2 - C_m^2 M_{m+1}^{-2\alpha-m}) t^{-2\alpha-m}. \end{aligned}$$

Escolhendo $M_{m+1} = \left[\frac{\sqrt{2}C_m}{c_m} \right]^{\frac{2}{2\alpha+m}}$ e como $\|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $t > t_{m+1}$ onde $t_{m+1} = \max\{t_m, T_m, t_*, \tau_m\}$, segue que

$$4\nu \int_0^T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq 4\nu \int_t^T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_m^2}{2} t^{-2\alpha-m}.$$

Deste modo,

$$4\nu T \|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \geq \frac{c_m^2}{2} t^{-2\alpha-m}.$$

Assim,

$$\|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq \frac{c_m^2}{8M_{m+1}\nu} t^{-2\alpha-(m+1)}.$$

Tomando $c_{m+1}^2 = \frac{c_m^2}{8M_{m+1}\nu}$, temos que

$$\|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq c_{m+1}^2 t^{-2\alpha-(m+1)}.$$

Logo,

$$\|D^{m+1}\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_{m+1} t^{-\alpha-\frac{m+1}{2}}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo $m \geq 1$ inteiro.

□

Teorema 4.16. *Seja $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ tal que*

$$\|D\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_1 t^{-\alpha_1},$$

para todo $t > t_1$ e com $c_1, t_1 > 0$ constantes. Então

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_0 t^{-\alpha_1+\frac{1}{2}},$$

para todo $t > t_0$, com $c_0 = c_0(c_1, \alpha_1, \nu) > 0$ e $t_0 = t_0(t_, c_1, C_1, t_1, T_1, \alpha_1, \nu, \tau_0)$, onde $C_1, T_1 > 0$ são dados no Teorema 4.13.*

Demonstração. Sejam $t_0 = \max\{T_1, t_*, T_0, \tau_0\}$ e $T > t > t_0$. Pela igualdade de energia, temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 2\nu \int_t^T \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Por hipótese e como $\|\mathbf{u}(\cdot, T)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow \infty$, vale

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 &= 2\nu \int_t^\infty \|D\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \\ &\geq 2\nu \int_t^\infty c_1^2 \tau^{-2\alpha_1} d\tau \\ &= \frac{2c_1^2\nu}{2\alpha_1 - 1} t^{-2\alpha_1+1}. \end{aligned}$$

Tomando $c_0^2 = \frac{2c_1^2\nu}{2\alpha_1 - 1}$, temos

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \geq c_0^2 t^{-2\alpha_1+1}.$$

Portanto,

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_0 t^{-\alpha_1+\frac{1}{2}}.$$

□

REFERÊNCIAS

- ALBRITTON, D.; BRUÉ, E.; COLOMBO, M. Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier-Stokes equations. *Annals of Mathematics*, Department of Mathematics of Princeton University, v. 196, n. 1, p. 415–455, 2022.
- BRANDOLESE, L.; SCHONBEK, M. *Large time behavior of the Navier-Stokes flow*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2018.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2010.
- EVANS, L. C.; GARZEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. [S.l.]: Routledge, 2018.
- FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations*. [S.l.]: Holt, Rinehart and Winston, 1969.
- GUTERRES, R.; NICHE, C.; PERUSATO, C.; ZINGANO, P. Upper and lower $\dot{H}^m$ estimates for solutions to parabolic equations. (*Submetido*) Disponível em <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.11979>, 2022.
- HOPF, E. On the initial value problem for the basic equations of hydrodynamics. *Math. Nachr*, v. 4, p. 213, 1951.
- KATO, T. Strong p -solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 187, n. 4, p. 471–480, 1984.
- KREISS, H.-O.; HAGSTROM, T.; LORENZ, J.; ZINGANO, P. Decay in time of incompressible flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, v. 5, n. 3, p. 231–244, 2003.
- LERAY, J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, v. 63, n. 1, p. 193–248, 1934. ISSN 0001-5962. Available at: <<https://doi.org/10.1007/BF02547354>>.
- MASUDA, K. Weak solutions of Navier-Stokes equations. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, Mathematical Institute, Tohoku University, v. 36, n. 4, p. 623–646, 1984.
- NICHE, C. J.; SCHONBEK, M. E. Decay characterization of solutions to dissipative equations. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 91, n. 2, p. 573–595, 2015.
- PERUSATO, C. V. F. O problema de Leray para a equação de Navier-Stokes e algumas generalizações. (*Dissertação de Mestrado*) UFRGS, Porto Alegre, 2014.
- PERUSATO, C. V. F. Contribuições à teoria matemática de escoamentos magneto-micropolares. (*Tese de Doutorado*) UFRGS, Porto Alegre, 2018.
- SCHONBEK, M. E. Decay of solution to parabolic conservation laws. *Communications in Partial Differential Equations*, Taylor & Francis, v. 5, n. 4, p. 449–473, 1980.
- SCHONBEK, M. E. L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Archive for rational mechanics and analysis*, Springer, v. 88, n. 3, p. 209–222, 1985.
- SCHONBEK, M. E. Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations. *Communications in partial differential equations*, Taylor & Francis, v. 11, n. 7, p. 733–763, 1986.

SCHONBEK, M. E. Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations in H spaces. *Communications in Partial Differential Equations*, Taylor & Francis, v. 20, n. 1-2, p. 103–117, 1995.

SCHONBEK, M. E.; WIEGNER, M. On the decay of higher-order norms of the solutions of Navier–Stokes equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 126, n. 3, p. 677–685, 1996.

SILVA, P. Braz e; ZINGANO, J.; ZINGANO, P. A note on the regularity time of Leray solutions to the Navier-Stokes equations. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, v. 21, n. 1, p. 1–7, 2019.

TAYLOR, M. E. *Partial Differential Equations. Vol. 3, TAM 23*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 2011.

TAYLOR, S. J. *Introduction to measure and integration*. [S.l.]: CUP Archive, 1973.

APÊNDICE A – RESULTADOS DE ANÁLISE E TEORIA DA MEDIDA

Neste apêndice enunciaremos diversos resultados de análise que foram utilizados como apoio para algumas demonstrações ao longo do texto.

Teorema A.1 (Identities de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^1$. Se $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$(i) \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

$$(ii) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$

$$(iii) \int_{\Omega} (u \nabla v - v \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Onde $\frac{\partial w}{\partial \nu} \nabla w \cdot \nu$ é a derivada normal de w , ou seja, derivada direcional de w na direção de ν .

Demonstração. Ver apêndice C da referência (EVANS, 2010). □

Lema A.2. *Se $f \in L^p(\mathbb{E})$ para $1 \leq p \leq \infty$, então dado $\epsilon > 0$ existe um conjunto $K \subset \mathbb{E}$ com $|K| < \infty$ tal que*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{E})} < \|f\|_{L^p(K)} + \epsilon.$$

Lema A.3. *Se $f \in L^p(\mathbb{E})$ para $1 \leq p \leq \infty$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $H \subset \mathbb{E}$ e*

$$\mu(H) < \delta \Rightarrow \int_H |f|^p d\mu < \epsilon.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma sequência de conjuntos encaixados tal que $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E$, com

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n} \text{ e } \int_{E_n} |f|^p d\mu \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja agora

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k,$$

daí $F_{n+1} \subset F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(F_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$ com $\int_{F_n} |f|^p d\mu \geq \epsilon$. Logo, segue

$$\mu\left(\bigcap_n F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = 0$$

e como a integral é uma medida, podemos fazer a manipulação

$$\epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F_n} |f|^p d\mu = \int_{\cap_n F_n} |f|^p d\mu = 0.$$

Contradição. Portanto, o resultado é válido.

□

Teorema A.4 (Teorema de Fubini). *Seja $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para quase todo $(x, y) \in (\Omega_1 \times \Omega_2)$, temos:*

$$(i) \quad F(x, y) \in L_y^1(\Omega_2) \text{ e } \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L_x^1(\Omega_1);$$

$$(ii) \quad F(x, y) \in L_x^1(\Omega_1) \text{ e } \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L_y^1(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx.$$

Teorema A.5 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $f, g \in L^2(\Omega)$, então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema A.6 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Pode ser encontrada em (TAYLOR, 1973).

□

Teorema A.7 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então $f + g \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema A.8 (Teorema Fundamental do Cálculo). *(i) Seja f contínua em $[a, b]$, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$.

(ii) Seja f contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

onde $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

Teorema A.9 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções integráveis tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e

$$\int f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx.$$

Demonstração. Veja em (EVANS; GARZEPY, 2018). □

Teorema A.10 (Teorema da Convergência Monótona). Seja $(f_n)_n$ uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \mathbf{X})$ que converge para f , então

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Pode ser encontrada em (EVANS; GARZEPY, 2018). □

Lema A.11. Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ com $D^n f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}} \|D^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. A demonstração desse resultado por ser encontrada em (FRIEDMAN, 1969). □

Lema A.12. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para cada $p \leq q \leq \infty$ e

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{p}{q}}.$$

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (PERUSATO, 2018). □

Lema A.13. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Veja em (PERUSATO, 2014). □

Lema A.14 (Lema de Interpolação). *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ com $s_1 > 0$, então $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ para cada $0 < s < s_1$, com*

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{s_1}} \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{s_1}}.$$

Demonstração. Vamos usar a desigualdade de Hölder para integrais que nos diz que: "sejam $f \in L^p$, $g \in L^q$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$\left| \int_V f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_V |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Note que $2 = \frac{2}{p} + \frac{2}{q}$, deste modo

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q}} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p}} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{q}} d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{p}})^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^{\frac{2}{q}})^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2sp} |\hat{f}(\xi)|^2) d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^2) d\xi \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Tomando $sp = s_1$, temos

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^2) d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s_1} |\hat{f}(\xi)|^2) d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $sp = s_1$, temos que $p = \frac{s_1}{s}$, daí $\frac{1}{p} = \frac{s}{s_1}$. Juntando esse fato com o fato de que p e q são conjugados, podemos reescrever a expressão da forma

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\hat{f}(\xi)|^2) d\xi \right)^{1-\frac{s}{s_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s_1} |\hat{f}(\xi)|^2) d\xi \right)^{\frac{s}{s_1}} \\ &= \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{s_1}} \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{s_1}}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Plancherel, temos que $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Portanto, segue que

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{s}{s_1}} \|f\|_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{s_1}}.$$

□

APÊNDICE B – ESPAÇO DE SOBOLEV HOMOGÊNEO $\dot{H}^s$

Aqui daremos uma noção dos espaços que serão considerados ao longo do texto, iniciando pelo espaço de Lebesgue L^p que corresponde ao espaço "trivial" de Sobolev. O espaço de Lebesgue L^p é o espaço das funções f tal que $\int |f|^p dx < \infty$, para $p \in [1, \infty)$. No caso em que $p = \infty$, é usada a norma do supremo, isto é, $\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C \in \mathbb{R}^+ : |f| < C\}$ e o conjunto $\{x : |f(x)| > C\}$ é nula.

Deste modo, podemos introduzir os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, que também denotamos por $H^m(\Omega)$ quando $p = 2$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, o que significa que a função que pertence a esse espaço e todas as suas derivadas espaciais fracas de ordem até m pertencem a L^p , onde $m \geq 1$ inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Com isso, vamos definir o espaço de Sobolev homogêneo $\dot{H}^m$.

Definição B.1. Os espaços homogêneos de Sobolev $\dot{W}^{m,p}$, similarmente $\dot{H}^m$, é o espaço das funções m vezes fracamente diferenciáveis f tal que $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$, em outras palavras,

$$\|f\|_{\dot{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^m \int_{\Omega} |D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_m} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Podemos generalizar esse conceito por transformada de Fourier.

Definição B.2. Dado $s > 0$, denotaremos por $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções f tais que

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

em que $\hat{f}(\xi)$ é a seguinte transformada de Fourier

$$\mathbf{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \mathbf{u}(x) dx.$$

Uma boa motivação para estudar tais espaços homogêneos, é que eles preservam boas propriedades de escala. Adiante apresentaremos uma série de resultados que nos auxiliarão para uma melhor compreensão do texto.

Inicialmente, precisaremos das seguintes desigualdades elementares de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (GNS) para funções $\mathbf{u} \in H^2(\mathbb{R}^3)$ quaisquer:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \quad (\text{B.1})$$

para a demonstração dessa desigualdade veja (TAYLOR, 2011), e

$$\|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.2})$$

que é obtida usando a transformada de Fourier. Por (B.1) e (B.2), obtém-se

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (\text{B.3})$$

Para demonstrarmos (B.3), note que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^2\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Nosso objetivo é derivar desigualdades do tipo (B.3). Com isso, vamos apresentar um resultado mais geral obtido em (SILVA; ZINGANO; ZINGANO, 2019).

Lema B.1 (P. Braz e Silva, J. Zingano e P.R. Zingano, 2019). *Sejam $m, l \in \mathbb{N}$ tais que $0 < l < m - 1$ e $m \geq 1$, então vale a seguinte desigualdade*

$$\|D^l\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad (\text{B.4})$$

para todo $\mathbf{u} \in H^{m+1}$.

Demonstração. Inicialmente, note que aplicando sucessivamente a desigualdade (B.2), temos

$$\|D^l\mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{m+1-l}{m+1}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{l}{m+1}}, \quad (\text{B.5})$$

$$\|D^l\mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|D\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{m+1-l}{m}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{l-1}{m}}, \quad (\text{B.6})$$

$$\|D^{l+2}\mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{m-l-1}{m+1}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{l+2}{m+1}}, \quad (\text{B.7})$$

$$\|D^{l+2}\mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|D\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{m-l-1}{m}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{l+1}{m}}, \quad (\text{B.8})$$

$$\|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{l+1}{m+1}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{m-l}{m+1}}, \quad (\text{B.9})$$

$$\|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2} \leq \|D\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{l+1}{m}} \|D^{m+1}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{m-l-1}{m+1}}. \quad (\text{B.10})$$

Por outro lado, pela desigualdade (B.1), temos

$$\begin{aligned} \|D^l\mathbf{u}\|_{L^\infty} \|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2} &\leq \|D^l\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|D^{l+2}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2} \\ &\leq \underbrace{\|D^l\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{a}{4}}}_{(I)} \underbrace{\|D^l\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{(1-a)}{4}}}_{(II)} \underbrace{\|D^{l+2}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{3b}{4}}}_{(III)} \underbrace{\|D^{l+2}\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{3(1-b)}{4}}}_{(IV)} \underbrace{\|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2}^c}_{(V)} \underbrace{\|D^{m-l}\mathbf{u}\|_{L^2}^{1-c}}_{(VI)}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

para algum $(a, b, c) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ a serem escolhidos de forma conveniente. De fato, substituindo (B.5) em (I), (B.6) em (II), (B.7) em (III), (B.8) em (IV), (B.9) em (V) e (B.10) em (VI) na desigualdade (B.11), obtemos

$$\begin{aligned} & \|D^l \mathbf{u}\|_{L^\infty} \|D^{m-l} \mathbf{u}\|_{L^2} \\ & \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{a}{4} \cdot \frac{m+1-l}{m+1} + \frac{3b}{4} \cdot \frac{m-l-1}{m+1} + c \cdot \frac{l+1}{m+1}} \\ & \cdot \|D\mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{1-a}{4} \cdot \frac{m+1-l}{m} + \frac{3(1-b)}{4} \cdot \frac{m-l-1}{m} + (1-c) \cdot \frac{l+1}{m}} \\ & \cdot \|D^{m+1} \mathbf{u}\|_{L^2}^{\frac{a}{4} \cdot \frac{l}{m+1} + \frac{1-a}{4} \cdot \frac{l-1}{m} + \frac{3b}{4} \cdot \frac{l+2}{m+1} + \frac{3(1-b)}{4} \cdot \frac{l+1}{m} + c \cdot \frac{m-l}{m+1} + (1-c) \cdot \frac{m-l-1}{m+1}}. \end{aligned}$$

Temos que escolher $a, b, c \in [0, 1]$ tais que para m e l , sob as hipóteses da desigualdade (B.4), tenha

$$\begin{cases} \frac{a}{4} \cdot \frac{m+1-l}{m+1} + \frac{3b}{4} \cdot \frac{m-l-1}{m+1} + \frac{c(l+1)}{m+1} = \frac{1}{2} \\ \frac{1-a}{4} \cdot \frac{m+1-l}{m} + \frac{3(1-b)}{4} \cdot \frac{m-l-1}{m} + \frac{(1-c)(l+1)}{m} = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{4} \cdot \frac{l}{m+1} + \frac{1-a}{4} \cdot \frac{l-1}{m} + \frac{3b}{4} \cdot \frac{l+2}{m+1} + \frac{3(1-b)}{4} \cdot \frac{l+1}{m} + \frac{c(m-l)}{m+1} + \frac{(1-c)(m-l-1)}{m+1} = 1. \end{cases}$$

Ao mostrarmos a existência de a, b e c satisfazendo o sistema anterior, a desigualdade (B.4) estará demonstrada. É possível escolher tais constantes para cada m e l . Sejam $m \geq 1$ e $0 < l < m - 1$, então o sistema

$$\begin{cases} \frac{m-l+1}{4(m+1)} \cdot a + \frac{3(m-l-1)}{4(m+1)} \cdot b + \frac{(l+1)}{m+1} \cdot c = \frac{1}{2} \\ \frac{m-l+1}{4m} \cdot a + \frac{3(m-l-1)}{4m} \cdot b + \frac{(l+1)}{m} \cdot c = \frac{m+1}{2m} \\ \frac{m-l+1}{4(m^2+m)} \cdot a + \frac{3(m-l-1)}{4(m^2+m)} \cdot b + \frac{1}{m+1} \cdot c = \frac{3m-2l-1}{2(m^2+m)} \end{cases}$$

tem solução $(a, b, c) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. De fato, escrevendo o sistema anterior na forma matricial e escalonando a matriz, temos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ \frac{-l+m+1}{4m} & \frac{-3l+3m-3}{4m} & \frac{l+1}{m} & \frac{m+1}{2m} \\ \frac{-l+m+1}{4m^2+4m} & \frac{-3l+3m-3}{4m^2+4m} & \frac{1}{m+1} & \frac{-2l+3m-1}{2m^2+2m} \end{pmatrix} \\ & \blacksquare \quad L_2 - \left(\frac{m+1}{m}\right) L_1 \rightarrow L_2 \\ & \begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-l+m+1}{4m^2+4m} & \frac{-3l+3m-3}{4m^2+4m} & \frac{1}{m+1} & \frac{-2l+3m-1}{2m^2+2m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad L_3 - \left(\frac{1}{m}\right) L_1 \rightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-l+m-1}{m^2+m} & \frac{-l+m-1}{m^2+m} \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-l+m+1}{4m+4} & \frac{-3l+3m-3}{4m+4} & \frac{l+1}{m+1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-l+m-1}{m^2+m} & \frac{-l+m-1}{m^2+m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que, por sua vez, possui solução geral

$$\begin{pmatrix} \frac{4l-2m+2}{l-m-1} - \frac{3l-3m+3}{l-m-1} \cdot b \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, o sistema possui solução para cada m e l . Consequentemente, a desigualdade (B.4) é válida.

□