

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA
CURSO DE ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

ANDRÉ VICTOR SILVA MENEZES

**METODOLOGIA PARA IMPLANTAÇÃO DE UMA REDE PLANIMÉTRICA DE
PRECISÃO**

RECIFE
2017

ANDRÉ VICTOR SILVA MENEZES

**METODOLOGIA PARA IMPLANTAÇÃO DE UMA REDE PLANIMÉTRICA DE
PRECISÃO**

Monografia apresentada ao Curso de Graduação de Engenharia Cartográfica, do Centro de Tecnologia e Geociências, da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Engenheiro Cartógrafo.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Jaime Bezerra
Mendonça

RECIFE

2017

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

M543m Menezes, André Victor Silva.
Metodologia para implantação de uma rede planimétrica de precisão / André
Victor Silva Menezes. – 2017.
56 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Jaime Bezerra Mendonça.
TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Departamento de Engenharia Cartográfica e de Agrimensura, 2017.
Inclui Referências e Anexos.

1. Engenharia cartográfica. 2. Precisão. 3. Método dos mínimos quadrados.
4. Levantamento planimétrico. I. Mendonça, Francisco Jaime Bezerra.
(Orientador). II. Título.

UFPE

526.1 CDD (22. ed.)

BCTG/2017-413

ANDRÉ VICTOR SILVA MENEZES

**METODOLOGIA PARA IMPLANTAÇÃO DE UMA REDE
PLANIMÉTRICA DE PRECISÃO**

Monografia apresentada ao Curso de Graduação de Engenharia Cartográfica, do Centro de Tecnologia e Geociências, da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Engenheiro Cartógrafo, defendida no Departamento de Engenharia Cartográfica no dia 13 de dezembro de 2017.

Banca Examinadora

Orientador: Prof. Dr. Francisco Jaime Bezerra Mendonça
Departamento de Engenharia Cartográfica - Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dra. Maria de Lourdes de Aquino Macedo Gonçalves
Departamento de Engenharia Cartográfica - Universidade Federal de Pernambuco

Apresentado em: ____ / ____ / 2017

Conceito: _____

RECIFE

2017

Trabalho dedicado aos meus pais Marcelo Áureo e Margarida Maria, meu irmão Adriano José, meus queridos amigos e a minha companheira Amanda Yasmin, que em todo tempo me deram apoio e forças para continuar e conseguir alcançar essa vitória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me dado forças, perseverança e determinação nos momentos difíceis e de fraqueza, me fazendo levantar e seguir em frente.

Aos meus pais, Marcelo Áureo e Margarida Maria, por sempre me guiar, ensinar, cuidar e encorajar nessa minha trajetória de vida desde o dia em que nasci.

Ao meu irmão, Adriano José, que desde pequeno, me orienta, dá força e sempre está ao meu lado, seja lá qual for o momento triste ou alegre.

Ao meu amor, Amanda Yasmin, que me faz crescer cada dia mais, me ajudando a crescer e enxergar o quanto posso lutar, mesmo em momentos árduos e pela enorme força que ela sempre exerce em mim, me encorajando a ser sempre obstinado.

Aos familiares que me ajudaram durante meu percurso, trilhado na universidade.

Aos meus amigos, Camila Ribeiro, Fabio Marley, Laisa Mirelly, Raquel Vila Nova e Tácito Richarles, que desde os primórdios desse caminho, estiveram presentes comigo, lado a lado, onde juntos passamos por situações e turbulências durante essa jornada, obrigado pela força, auxílio, amizade e carinho.

Ao meu orientador, professor Dr. Francisco Jaime, pelos ensinamentos, suporte, acolhida e orientação prestada.

A professora Dra. Maria de Lourdes, por participar da banca examinadora e pelos diálogos descontraídos nos corredores do departamento.

Aos meus colegas de curso e professores, sem eles eu não teria tido as experiências, aprendizado e convivência por esses anos todos, onde cada um pôde me ensinar coisas novas que serão refletidas no futuro.

Aos laboratórios, LATCGEO, LACCOST, LATOP e LAGEO, pelos auxílios e aprendizados aos trabalhos realizados nessa graduação, pelas longas horas de estudo e convívio com os demais colegas.

A persistência é o caminho do êxito.

Charles Chaplin

RESUMO

Realizou-se o levantamento de uma rede planimétrica, um quadrilátero com dois pontos conhecidos e duas incógnitas, no campus Reitor Joaquim Amazonas da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), com o objetivo de implantar pontos de precisão para trabalhos de engenharia e afins. Consideraram-se vários procedimentos afim de minimizar os inevitáveis erros acidentais: na centragem forçada; medição do ângulo horizontal e da respectiva distância horizontal em duas séries de medidas, nas posições diretas e inversas da luneta da Estação Total e medições realizadas á noite para reduzir ao máximo os erros sistemáticos decorrentes da refração atmosférica e reduzir a variação térmica, incidente nos aparelhos durante o período diurno. As observações foram processadas considerando o Método dos Mínimos Quadrados nos métodos paramétricos, segundo os modelos de trilateração, triangulação e triangulateração e os cálculos foram realizados no software gratuito Scilab. Os resultados apresentam precisão milimétrica e as diferenças entre os métodos estudados são discutidas.

Palavras-chave: Precisão. Método dos mínimos quadrados. Levantamento planimétrico

ABSTRACT

A planimetric network, a quadrilateral with two well-known points and two unknowns, was carried out at the Rector Joaquim Amazonas campus of the Federal University of Pernambuco (UFPE), aiming to establish precision points for engineering and related works. Several procedures were considered in order to minimize the inevitable accidental errors: on forced centering; measurement of the horizontal angle and its horizontal distance in two series of measurements in the direct and reverse positions of the Total Station telescope and measurements taken at night to minimize systematic errors due to atmospheric refraction and to reduce the thermal variation of the apparatus during the daytime period. The observations were processed considering the least squares method in the parametric methods, according to the trilateration, triangulation and triangulation models, and the calculations were performed in the free Scilab software. The results show millimetric precision and the differences between the methods studied are discussed.

Keywords: Accuracy. Least square method. Planimetric survey

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Ilustração do método de Trilateração.....	21
Figura 2. Medida da distância IJ	21
Figura 3. Relação entre azimutes e ângulo a ser calculado α	24
Figura 4. Esquema de uma rede planimétrica por Triangulação.....	27
Figura 5. Fluxograma da metodologia	33
Figura 6. Imagem da área de estudo	34
Figura 7. Imagem dos equipamentos	35
Figura 8. Ponto materializado no ponto P1.....	35
Figura 9. Componentes da Centragem forçada. Fabricante Zeiss	36
Figura 10. Componentes da Centragem forçada. Fabricante Leica	36
Figura 11. Aplicação do procedimento em campo	37
Figura 12. Base nivelante centrada para levantamento.....	38
Figura 13. Caderneta de Campo da estação no ponto P1.....	39
Figura 14. Equipamento devidamente posicionado para realizar as medições	40
Figura 15. Croqui da rede calculada somente com ângulos.....	40
Figura 16. Monografia do marco geodésico EPS04.....	53
Figura 17. Monografia do marco geodésico EPS07.....	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Relação entre quadrante, C e azimute.....	25
Tabela 4.1. Resultados da Trilateração no Plano UTM.....	41
Tabela 4.2. Resultados da Trilateração no Plano Topocêntrico.....	42
Tabela 4.3. Resultados da Triangulação no Plano UTM.....	43
Tabela 4.4. Resultados da Triangulação no Plano Topocêntrico	44
Tabela 4.5. Resultados da Triangulateração no Plano UTM.....	45
Tabela 4.6. Resultados da Triangulateração no Plano Topocêntrico	46
Tabela 4.7. Resultados da Triangulação por Correlatos.....	47

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GNSS	Global NavigationSatelite System (Sistema Global de Navegação por Satélite)
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
UTM	Universal Transversa de Mercator
MVC	Matriz Variância-Covariância
DE	Distanciômetro eletrônico
INCRA	Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
PT	Plano Topocêntrico
PPM	Parte Por Milhão
CTG	Centro de Tecnologia e Geociências
RU	Restaurante Universitário
CAC	Centro de Artes e Comunicação

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	13
1.1.1	Objetivo Geral	13
1.1.2	Objetivos Específicos	13
2	EMBASAMENTO TEÓRICO	14
2.1	LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO.....	14
2.1.1	Medição de Distâncias	14
2.1.2	Medição de Ângulo	15
2.2	AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES.....	16
2.2.1	Trilateração	21
2.2.2	Triangulação	24
2.2.3	Triangulateração	27
2.3	MÉTODO DOS CORRELATOS	27
2.4	CÁLCULO EM SCILAB.....	32
3	METODOLOGIA	33
3.1	ÁREA DE ESTUDO	33
3.2	EQUIPAMENTOS UTILIZADOS	34
3.3	IMPLANTAÇÃO DOS PONTOS	35
3.4	CENTRAGEM FORÇADA.....	36
3.5	PROCESSO DE MEDIÇÃO.....	37
3.6	MEDIÇÃO NOTURNA	39
4	RESULTADOS	41
5	DISCUSSÕES	48
5.1	TRILATERAÇÃO	48
5.2	TRIANGULAÇÃO	48
5.3	TRIANGULATERAÇÃO.....	49
5.4	TRIANGULAÇÃO COM MODELO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO OU CORRELATOS	49
6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	50
	REFERÊNCIAS	51
	ANEXOS	53

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, tem-se cada vez mais a necessidade de pontos planimétricos de precisão para a área industrial e serviços especializados (metrô, túneis). A tecnologia mais utilizada é o levantamento com GNSS, que utiliza rastreamento de satélites. Essa tecnologia é comprovadamente precisa, mas não pode ser aplicada em locais cobertos ou próximos a edificações e vegetação.

A metodologia proposta permite complementar uma rede de pontos com coordenadas precisas a partir de pontos previamente levantados por pontos GNSS.

Implantou-se e foi medida uma rede materializada por quatro pontos, utilizou-se a Estação Total GPT 3200N de precisão angular 5" e linear 3mm+2ppm, para medir distâncias e ângulos horizontais.

Admitindo a existência de erros randômicos e observações superabundantes, utilizou-se o Método dos Mínimos Quadrados – MMQ para a determinação da estimativa única dos parâmetros ajustados (coordenadas planimétricas dos pontos). O princípio fundamental do MMQ, é que a soma dos quadrados dos resíduos seja mínimo (GEMAEL, 1994; DALMOLIN, 2004). Consideraram-se os modelos de Trilateração, Triangulação e Triangulateração.

1.1. Objetivos do trabalho

1.1.1. Objetivo Geral

Estudar e avaliar a metodologia que melhor se aplica ao levantamento de uma rede planimétrica de precisão.

1.1.2. Objetivos específicos

- testar e analisar as diferenças entre os métodos paramétricos de ajustamento de uma poligonal;
- estudo das metodologias usadas, tendo realizado um levantamento noturno;
- calcular os dados em dois *softwares* para comparação;
- analisar as diferenças entre o uso de coordenadas em UTM e em plano topocêntrico.

2. EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1. Levantamento Topográfico

Na Topografia trabalha-se com medidas (lineares e angulares) realizadas sobre a superfície da Terra e a partir destas medidas são calculadas áreas, volumes, coordenadas, etc. Além disto, estas grandezas poderão ser representadas de forma gráfica através de mapas ou plantas. Para tanto é necessário um sólido conhecimento sobre instrumentação, técnicas de medição, métodos de cálculo e estimativa de precisão (KAHMEN; FAIG, 1988).

Conforme VEIGA et al (2007), o objetivo principal é efetuar o levantamento (executar medições de ângulos, distâncias e desníveis) que permita representar uma porção da superfície terrestre em uma escala adequada. Às operações efetuadas em campo, com o objetivo de coletar dados para a posterior representação, denomina-se de levantamento topográfico.

De acordo com a NBR 13133 (ABNT, 1991, p. 3), Norma Brasileira para execução de Levantamento Topográfico, o levantamento topográfico é definido por:

“Conjunto de métodos e processos que, através de medições de ângulos horizontais e verticais, de distâncias horizontais, verticais e inclinadas, com instrumental adequado à exatidão pretendida, primordialmente, implanta e materializa pontos de apoio no terreno, determinando suas coordenadas topográficas. A estes pontos se relacionam os pontos de detalhe visando a sua exata representação planimétrica numa escala pré-determinada e à sua representação altimétrica por intermédio de curvas de nível, com equidistância também pré-determinada e/ou pontos cotados.”

Tradicionalmente o levantamento topográfico pode ser dividido em duas partes: o levantamento planimétrico, onde se procura determinar a posição planimétrica dos pontos (coordenadas X e Y) e o levantamento altimétrico, onde o objetivo é determinar a cota ou altitude de um ponto (coordenada Z). A realização simultânea dos dois levantamentos dá origem ao chamado levantamento planialtimétrico (VEIGA, L. et al, 2007).

2.1.1 Medição de Distâncias

Em conformidade com JELINEK (2009), a medida entre dois pontos, em topografia, corresponde à medida da distância horizontal entre esses dois pontos, mesmo que o terreno

seja inclinado. A medição de uma distância pode ser efetuada por processo direto, por processo indireto ou, por processos eletrônicos, sendo este último o mais moderno e mais preciso.

a) Medida direta de distâncias

A determinação da extensão de um alinhamento pode ser feita por medida direta quando o instrumento é aplicado no terreno ao longo do alinhamento.

b) Medida indireta de distâncias

O processo de medida é indireto quando a distância é obtida em função da medida de outras grandezas, não havendo, portanto, necessidade de percorrer a distância. A medida indireta das distâncias é baseada na resolução de triângulos isósceles ou retângulos.

c) Medida eletrônica de distâncias Instrumentos

O distanciômetro eletrônico (DE) é o instrumento utilizado na medição eletrônica de distâncias. O primeiro distanciômetro eletrônico surgiu em 1943, graças ao cientista sueco E. Bergstran, que projetou o primeiro DE, que recebeu o nome de Geodimeter NASM-2.

O aparecimento dos DEs facilitou muito a medição de distâncias, além de aumentar a qualidade das medidas. A precisão das medidas de distâncias saltou da ordem do milímetro para décimos de milímetros. O DE, que inicialmente, devido às suas dimensões, era utilizado sozinho, com o avanço da tecnologia, passou a ser montado sobre um teodolito. Essa combinação, evidentemente aumentou a eficiência da coleta de dados nos trabalhos topográficos.

A combinação de um teodolito eletrônico com um distanciômetro eletrônico em um único instrumento denomina-se “estação total” (do inglês “total station”). A estação total tem a facilidade de um controle central único.

2.1.2 Medição de Ângulo

Com base em FONTE (2006/2007) e FREITAS (2011), tratando-se da forma, é uma figura formada por duas retas com um ponto em comum. Em relação a medida, é o afastamento entre estas duas retas ao longo de uma circunferência. Em topografia consideram-se apenas dois tipos de ângulos, contidos em dois planos:

- Horizontal (planimetria) - É um ângulo formado sobre qualquer plano de referência horizontal (azimutal).
- Ângulo Vertical - É um ângulo construído sobre qualquer plano de referência vertical (zenital).

2.2. Ajustamento das observações

No caso de observações diretas as nossas incógnitas são os valores observados ajustados. Já no caso de observações indiretas, queremos estimar grandezas que se vinculam às observados; para distingui-las das primeiras é usual designá-las de parâmetros, o que explica a denominação, mais corrente em nossos dias, de método paramétrico (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015).

Os testes paramétricos baseiam-se em medidas intervalares da variável dependente (um parâmetro ou característica quantitativa de uma população) e a utilização deste tipo de testes exige que sejam cumpridos três pressupostos, ou requisitos (TUCKMAN, 2000).

Sejam:

L_b = Vetor ($n \times 1$) dos valores observados;

V = Vetor ($n \times 1$) dos resíduos;

L_a = Vetor ($n \times 1$) dos valores observados ajustados.

$$L_a = L_b + V \quad (2.1)$$

X_0 = Vetor ($u \times 1$) com valores aproximados dos parâmetros;

X = Vetor correção ($u \times 1$);

X_a = Vetor dos parâmetros ajustados (um dos objetivos).

$$X_a = X_0 + X \quad (2.2)$$

De acordo com (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015), quando os valores observados ajustados (2.1) podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados (2.2), isto é, quando se verifica o modelo matemático: dizemos que o ajustamento se processa pelo método paramétrico.

$$L_a = F(X_a) \quad (2.3)$$

Substituindo o primeiro membro e linearizando o segundo:

Metodologia para implementação de uma rede planimétrica de precisão

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0 = X_0} * X \quad (2.4)$$

Designando a função dos parâmetros aproximados (2.3), por L_0 :

$$L_0 = F(X_0) \quad (2.5)$$

e a matriz das derivadas parciais:

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0 = X_0} \quad (2.6)$$

tem-se:

$$L_b + V = L_0 + AX \text{ ou } V = AX + L_0 - L_b \quad (2.7)$$

Fazendo-se:

$$L = L_0 - L_b \quad (2.8)$$

Obtém-se o modelo matemático linearizado do método dos parâmetros:

$${}_n V_1 = {}_n A_u * {}_u X_1 + {}_n L_1 \quad (2.9)$$

Sintetizando a (2.9), na extraordinária concisão da linguagem matricial em n equações de observações, teremos:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_{a1}} & \frac{\partial f_1}{\partial X_{a2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{an}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_{a1}} & \frac{\partial f_2}{\partial X_{a2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{an}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_{a1}} & \frac{\partial f_n}{\partial X_{a2}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_{an}} \end{bmatrix}_{X_0} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

O índice na parte inferior direita da matriz dos coeficientes das incógnitas lembra que as derivadas parciais são calculadas numericamente com os valores aproximados das incógnitas.

$$\text{Fazendo: } a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_{aj}} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, u \\ j = 1, 2, \dots, u \end{cases} \quad (2.11)$$

A primeira linha se escreve:

$$V_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1u}X_u + l_1 \quad (2.12)$$

e assim por diante.

a) Considerações sobre a Matriz dos Pesos

Segundo (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015), se as observações não

oferecem o mesmo “grau de confiança”, podemos “homogeneizá-las” multiplicando-as por “pesos”, isto é, por valores tanto maiores, quanto maior a confiança que inspiram (quanto menor o valor de σ^2)

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma L_b \quad (2.13)$$

Se a matriz Q for não singular admitirá uma inversa

$$Q^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma L_b^{-1} = P \quad (2.14)$$

que recebe o nome de matriz dos pesos.

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (2.15)$$

b) Equações Normais

Minimizando a forma quadrática fundamental, obtemos sucessivamente:

$$\phi = V^T P V = (A X + L)^T P (A X + L) = \min \quad (2.16)$$

$$\phi = (X^T A^T + L^T) P (A X + L) = X^T A^T P A X + X^T A^T P L + L^T P A X + L^T P L = \min$$

onde segundo e terceiro termos são iguais... ($1X_u * uX_n * nX_n * nX_1$)

$$\phi = X^T A^T P A X + 2X^T A^T P L + L^T P L = \min \quad (2.17)$$

Igualando a zero a derivada primeira em relação a X :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 2A^T P A X + 2A^T P L = 0 \quad \rightarrow \quad X = -(A^T P A)^{-1} \cdot (A^T P L) \quad (2.18)$$

Fazendo:

$$N = A^T P A \quad (2.19)$$

$$U = A^T P L \quad (2.20)$$

Resulta:

$$X = -N^{-1} U \quad (2.21)$$

cujas componentes convertem os parâmetros aproximados em ajustados:

$$X_a = X_0 + X \quad (2.22)$$

c) Matriz Variância-Covariância (MVC)

Em (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015), temos que:

- I. Antes do ajustamento necessitamos estimar a precisão das medidas efetuadas para compor a matriz variância-covariância dos valores observados (ΣL_b) e, a partir desta e da variância da unidade de peso a priori (σ_0^2), chega à matriz dos pesos:

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1} \quad (2.23)$$

II. MVC das correções Σx , introduzindo a (2.20) na (2.22):

$$X = -N^{-1}U = -N^{-1}A^T P L = -N^{-1}A^T P(L_0 + L_b) \quad (2.24)$$

$$X = -N^{-1}A^T P L_0 + N^{-1}A^T P L_b \quad (2.25)$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias:

$$\Sigma x = G \Sigma_{L_b} G^T \quad (2.26)$$

com

$$G = N^{-1}A^T P \quad (2.27)$$

E por serem P e N^{-1} matrizes simétricas:

$$G^T = P^T A N^{-1} = P A N^{-1} \quad (2.28)$$

Substituindo na (2.26):

$$\Sigma x = (N^{-1}A^T P) \Sigma_{L_b} (P A N^{-1}) \quad (2.29)$$

Considerando ainda que a (2.23) seja escrita como:

$$\Sigma_{L_b} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (2.30)$$

Resulta:

$$\Sigma x = (N^{-1}A^T P) \sigma_0^2 P^{-1} (P A N^{-1}) = \sigma_0^2 N^{-1} A^T P P^{-1} P A N^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1} N N^{-1} \quad (2.31)$$

$$\Sigma x = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (2.32)$$

III. MVC dos parâmetros

Na equação (2.22) o vetor X_0 é constante, onde:

$$\Sigma x_a = \Sigma x = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} \quad (2.33)$$

IV. MVC dos valores observados ajustados

$$\begin{aligned} L_a &= L_b + V = L_b + AX + L = L_b + AX + L_0 - L_b \\ L_a &= AX + L_0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Aplicando a lei de propagação:

$$\Sigma L_a = A \Sigma_x A^T \quad (2.35)$$

$$\Sigma L_a = \hat{\sigma}_0^2 A N^{-1} A^T \quad (2.36)$$

V. MVC dos resíduos

Reformulando a (2.1) para:

$$\begin{aligned} V &= L_a - L_b \\ \Sigma_V &= \Sigma_{L_a} - \Sigma_{L_b} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\Sigma v = \hat{\sigma}_0^2 (A N^{-1} A^T - P^{-1}) \quad (2.38)$$

VI. Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u} = \frac{V^T P V}{v} \quad (2.39)$$

n = equações de observação

V = resíduos

u = parâmetros

P = matriz dos pesos

n-u = v = graus de liberdade

$$V^T P V = X^T U + L^T P L \quad (2.40)$$

Segundo (MACHADO, 2011) e (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015) a análise da Variância a posteriori: estimador imparcial da variância a priori (σ_0^2)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u} = \frac{V^T P V}{v}$$

Qualidade do ajustamento: Comparação entre σ_0^2 e $\hat{\sigma}_0^2$

Se $\sigma_0^2 > \hat{\sigma}_0^2$

→ A qualidade das observações é inferior do que a estimada. Observações foram subestimadas!

Se $\sigma_0^2 < \hat{\sigma}_0^2$

→ A qualidade das observações é superior do que a estimada. Observações foram superestimadas!

Qualidade do ajustamento: Teste de hipótese

Hipótese básica $H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa: $H_1 : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Cálculo →

$$X^{*2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} v = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} \quad (2.41)$$

A hipótese básica não é rejeitada, ao nível de significância α , se:

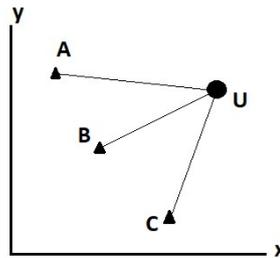
$$X_{v, \frac{\alpha}{2}}^2 < X^{*2} < X_{v, 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \quad (2.42)$$

No caso contrário deve-se proceder a uma análise cuidadosa do ajustamento; pode haver erro na MVC dos valores observados; ou podem os resíduos estar excessivamente grandes em decorrência de uma falta grosseria ou de erros sistemáticos; pode o modelo matemático não ser consistente com as observações; ou o sistema ser mal condicionado; etc (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015).

2.2.1 Trilateração

Conforme (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015), na Trilateração é necessário se observar três distâncias, a partir de uma estação desconhecida para três conhecidas, conforme a figura a seguir:

Figura 1 - Ilustração do método de Trilateração

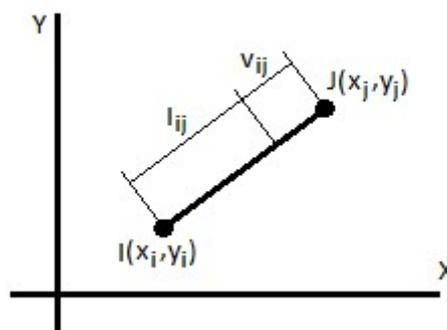


Fonte: GEMAEL, MACHADO e WANDERSEN (2015)

Na figura acima, são conhecidas as coordenadas dos pontos A, B e C e observadas as distâncias UA, UB e UC, a partir da estação desconhecida U, cujas coordenadas se pretende estimar. No ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, são escritas no caso três equações de observação de distâncias com seus respectivos desvios padrão para posterior ajustamento do valor mais provável para as coordenadas (x,y) da estação desconhecida, que nesse caso são os dois parâmetros envolvidos.

A figura 2, mostra a medida de uma distância IJ.

Figura 2 - Medida da distância IJ



Fonte: GEMAEL, MACHADO e WANDERSEN (2015)

A equação de observação de distância para a linha IJ pode ser escrita como:

$$l_{ij} + v_{l_{ij}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (2.43)$$

Onde l_{ij} é a medida do comprimento da linha entre as estações I e J, $v_{l_{ij}}$ o resíduo na medida x_i, y_i, x_j, y_j , os valores mais prováveis para as coordenadas das estações respectivamente I e J. A equação (2.43) é uma função não linear envolvendo as variáveis x_i, y_i, x_j, y_j , que pode ser

escrita como:

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = l_{ij} + v_{l_{ij}} \quad (2.44)$$

Onde

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (2.45)$$

A função linear F pode ser representada pelo desenvolvimento de Taylor de primeira ordem, isto é, até as derivadas de primeira ordem como:

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 dy_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0 dx_j + \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)_0 dy_j \quad (2.46)$$

Onde $x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}$ são os valores aproximados das incógnitas x_i, y_i, x_j e y_j ; $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0$ e $\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)_0$ são as derivadas parciais de F em relação a x_i, y_i, x_j e y_j , respectivamente, calculados usando valores aproximados dos parâmetros incógnitos, e dx_i, dy_i, dx_j e dy_j são as correções às aproximações iniciais, de modo que:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i0} + dx_i, & y_i &= y_{i0} + dy_i \\ x_j &= x_{j0} + dx_j, & y_j &= y_{j0} + dy_j \end{aligned} \quad (2.46)$$

Considerando a F dada na (2.44), as derivadas parciais podem ser obtidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} [2(x_j - x_i)(-1)] \therefore \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{-x_j + x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} = \frac{x_i - x_j}{d_{IJ}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_i} &= \frac{1}{2} \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} [2(y_j - y_i)(-1)] \therefore \\ \frac{\partial F}{\partial y_i} &= \frac{-y_j + y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} = \frac{y_i - y_j}{d_{IJ}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Analogamente, para as outras duas derivadas:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{x_j - x_i}{d_{IJ}} ; \quad \frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{y_j - y_i}{d_{IJ}} \quad (2.49)$$

Se as equações (2.48) e (2.49) forem substituídas na equação (2.46) e o resultado substituindo na equação (2.45), resultam as equações de observação de distâncias lineares:

$$\frac{x_{i0} - x_{j0}}{(d_{IJ})_0} dx_i + \frac{y_{i0} - y_{j0}}{(d_{IJ})_0} dy_i + \frac{x_{j0} - x_{i0}}{(d_{IJ})_0} dx_j + \frac{y_{j0} - y_{i0}}{(d_{IJ})_0} dy_j = k_{l_{ij}} + v_{l_{ij}} \quad (2.50)$$

Onde k

$$k_{l_{ij}} = l_{ij} - (d_{IJ})_0 \text{ e } (d_{IJ})_0 = F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}) = \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2} \quad (2.51)$$

Consideremos a trilateração apresentada na Figura 1, onde as distâncias são medidas a partir de três estações, A, B e C, com coordenadas conhecidas a uma estação U com coordenadas desconhecidas (três distâncias observadas), isto resulta em uma medida redundante. Isto permite que se possa aplicar o MMQ a fim de ajustar as coordenadas da estação U, com um grau de redundância (três distâncias observadas e duas coordenadas como parâmetros).

As equações de observações são obtidas a partir das equações (2.51), por exemplo, e a equação para as distâncias AU é formada pela troca do subscrito I por A e do subscrito J por U na equação (2.51). De forma similar, uma equação pode ser criada para cada medida de distância, usando as seguintes substituições de subscritos:

I	J
A	U
B	U
C	U

Neste exemplo, a estação U toma sempre a posição de J na equação (2.51) e, desta forma, são usados somente os coeficientes d_{x_j} e d_{y_j} . Usando as substâncias apropriadas, são obtidas as três equações de observações (de distância):

$$\begin{aligned}
 \frac{x_{u0} - x_a}{(d_{AU})_0} dx_u + \frac{y_{u0} - y_a}{(d_{AU})_0} dy_u &= (l_{au} - (d_{AU})_0) + v_{l_{au}} \\
 \frac{x_{u0} - x_b}{(d_{BU})_0} dx_u + \frac{y_{u0} - y_b}{(d_{BU})_0} dy_u &= (l_{bu} - (d_{BU})_0) + v_{l_{bu}} \\
 \frac{x_{u0} - x_c}{(d_{CU})_0} dx_u + \frac{y_{u0} - y_c}{(d_{CU})_0} dy_u &= (l_{cu} - (d_{CU})_0) + v_{l_{cu}}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

onde

$$\begin{aligned}
 (d_{AU})_0 &= \sqrt{(x_{u0} - x_a)^2 + (y_{u0} - y_a)^2} \\
 (d_{BU})_0 &= \sqrt{(x_{u0} - x_b)^2 + (y_{u0} - y_b)^2} \\
 (d_{CU})_0 &= \sqrt{(x_{u0} - x_c)^2 + (y_{u0} - y_c)^2}
 \end{aligned}$$

l_{au} , l_{bu} e l_{cu} são as distâncias medidas; os v 's são os resíduos; e x_{u0} e y_{u0} são as coordenadas aproximadas para a estação desconhecida U.

As equações (2.52) podem ser representadas na forma matricial:

$$AX + L = V \tag{2.53}$$

Onde A é a matriz das derivadas parciais das observações em relação aos parâmetros, X é o vetor das correções dx_u e dy_u , $L = L_0 - L_b$ e V o vetor dos resíduos. O sistema (2.53), transformando na forma matricial (2.53), fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_{u0} - x_a}{(d_{AU})_0} & \frac{y_{u0} - y_a}{(d_{AU})_0} \\ \frac{x_{u0} - x_b}{(d_{BU})_0} & \frac{y_{u0} - y_b}{(d_{BU})_0} \\ \frac{x_{u0} - x_c}{(d_{CU})_0} & \frac{y_{u0} - y_c}{(d_{CU})_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_u \\ dy_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (d_{AU})_0 - l_{au} \\ (d_{BU})_0 - l_{bu} \\ (d_{CU})_0 - l_{cu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{l_{au}} \\ v_{l_{bu}} \\ v_{l_{cu}} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

2.2.2 Triangulação

Segundo (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015), a triangulação é um procedimento muito utilizado em levantamento planimétrico. No entanto, a combinação da trilateração (medida de lados) com triangulação (medida de ângulo) é também muito comum. Uma aplicação de mínimos quadrados em triangulação pode usar equações de condição ou equações de observações escrevendo-as em termos de azimutes e/ou ângulos. O procedimento envolve um ajustamento paramétrico, no qual os parâmetros são coordenadas em um sistema cartesiano no espaço bidimensional.

A equação de azimute pode assumir a forma:

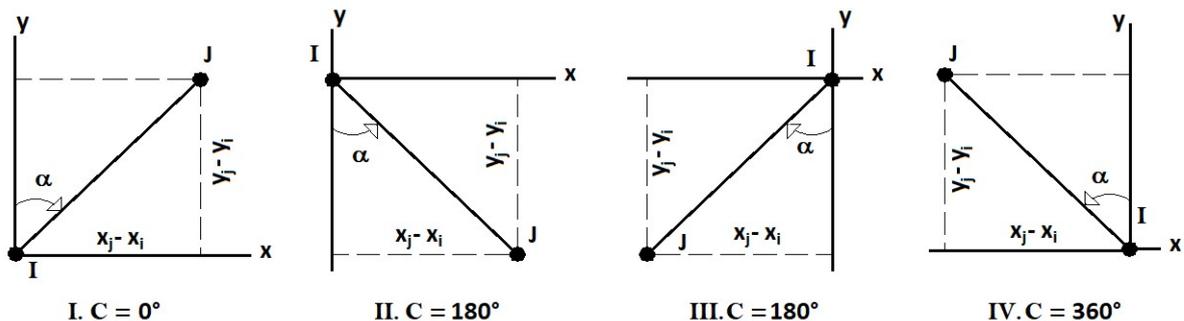
$$\text{Azimute} = \alpha + C \quad (2.55)$$

Onde

$$\alpha = \arctg\left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right) \quad (2.56)$$

E x_i e y_i são as coordenadas da estação ocupada I; x_j e y_j são as coordenadas da estação visada J, e C é uma constante que depende do quadrante topográfico no qual o ponto J está localizado conforme na figura 3.

Figura 3 - Relação entre azimutes e ângulo a ser calculado α



A partir da figura 3, cria-se a Tabela 2.1, a qual mostra o sinal algébrico α do ângulo a ser calculado, e com isso o valor de C, possibilitando dessa forma o cálculo do azimute da direção IJ.

Tabela 2.1 - Relação entre quadrante, C e azimute.

Quadrante	Sinal de $(x_j - x_i)$	Sinal de $(y_j - y_i)$	Sinal de α	C	Azimute
I	+	+	+	0°	α
II	+	-	-	180°	$\alpha + 180^\circ$
III	-	-	+	180°	$\alpha + 180^\circ$
IV	-	+	-	360°	$\alpha + 360^\circ$

- **Linearização das equações de observação de azimute**

A equação de observação para o azimute da direção IJ é:

$$\text{arc tan} \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right) + C = Az_{ij} + v_{ij} \quad (2.57)$$

Onde Az_{ij} é o azimute da direção IJ; $v_{Az_{ij}}$ é o resíduo do azimute; (x_i, y_i) são os valores mais prováveis para as coordenadas da estação I; (x_j, y_j) os valores mais prováveis para as coordenadas da estação J. A (2.57) representa a forma não linear das equações de observação, envolvendo as variáveis x_i, y_i, x_j, y_j e pode ser reescrita como:

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = Az_{ij} + v_{Az_{ij}} \quad (2.58)$$

Onde

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = \text{arc tan} \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right) + C$$

As equações (2.58) podem ser linearizadas usando a aproximação de Taylor de primeira ordem, isto é, a expansão da série de Taylor até as derivadas de primeira ordem:

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = F(x_{i0}, y_{i0}, x_{j0}, y_{j0}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_0 dx_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \right)_0 dy_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_0 dx_j + \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \right)_0 dy_j \quad (2.59)$$

Onde $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \right)_0$, são as derivadas parciais de F em relação respectivamente a, avaliadas para a aproximação inicial após cada iteração, tal que:

$$\begin{aligned}
x_i &= x_{i0} + dx_i \\
y_i &= y_{i0} + dy_i \\
x_j &= x_{j0} + dx_j \\
y_j &= y_{j0} + dy_j
\end{aligned}
\tag{2.60}$$

A derivada do arco tangente de uma função u é:

$$\frac{d}{dx} (\text{arc tan } u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \tag{2.61}$$

Usa-se a (2.61) para obter as derivadas parciais da (2.59). Desta forma, na (2.58), faça-se

$$u = \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \tag{2.62}$$

Derivando u parcialmente em relação à x_i :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{(y_j - y_i)(-1) - (x_j - x_i) \cdot 0}{(y_j - y_i)^2} = -\frac{y_j - y_i}{(y_j - y_i)^2} = -\frac{1}{y_j - y_i} \tag{2.63}$$

A substituição das (2.62) e (2.63) na (2.61), resulta para a derivada parcial em relação à x_j , na função F , dada em (2.59):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}\right)^2} \cdot \frac{(-1)}{y_j - y_i} = \frac{-1}{\frac{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2}{(y_j - y_i)^2} \cdot (y_j - y_i)} \\
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{y_j - y_i}{(y_j - y_i)^2 + (x_j - x_i)^2} = \frac{y_j - y_i}{(IJ)^2}
\end{aligned}
\tag{2.64}$$

Analogamente, empregando o mesmo procedimento, encontram-se as demais derivadas parciais:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{x_j - x_i}{(IJ)^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{y_j - y_i}{(IJ)^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{x_j - x_i}{(IJ)^2} \tag{2.65}$$

A substituição das equações (2.63) e (2.64) na (2.59), resulta nas equações linearizadas de observação de azimute:

$$\frac{y_{j0} - y_{i0}}{(IJ_0)^2} dx_i + \frac{x_{j0} - x_{i0}}{(IJ_0)^2} dy_i + \frac{y_{j0} - y_{i0}}{(IJ_0)^2} dx_j + \frac{x_{i0} - x_{j0}}{(IJ_0)^2} dy_j = k_{Az_{ij}} + v_{Az_{ij}} \tag{2.66}$$

Onde

$$k_{Az_{ij}} = Az_{ij} - \text{arc tan} \left(\frac{x_{j0} - x_{i0}}{y_{j0} - y_{i0}} \right) + C$$

e

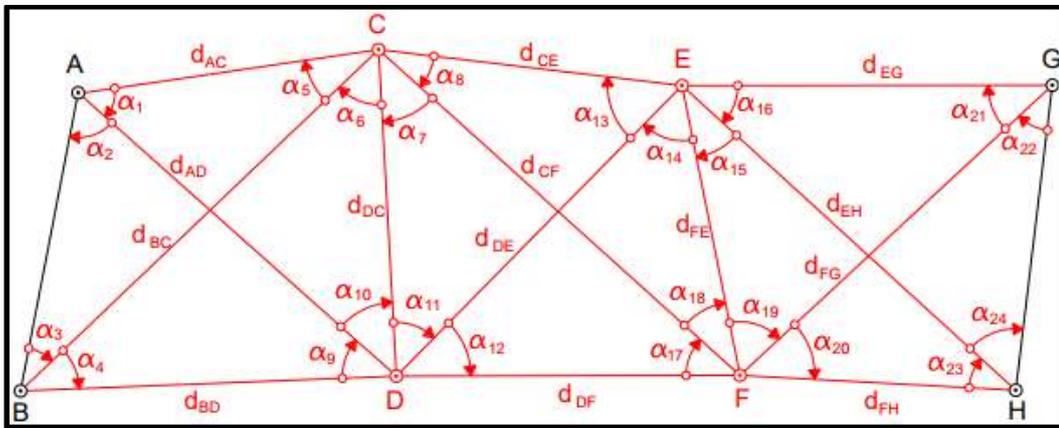
$$(IJ_0)^2 = (x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2$$

2.2.3 Triangulação

O método abrange as formulações e cálculos usados em ambos os métodos (Trilateração e Triangulação), tornando-se um método combinado.

Na Triangulação são observados ângulos e distâncias entre os vértices intervisíveis de uma rede de triângulos (figura 4). Em função da praticidade em se medir distâncias e ângulos com estações totais, aliada à possibilidade de processamento automatizado de um grande volume de dados, a Triangulação, quando comparada com a Trilateração e Triangulação, se destaca por possibilitar uma melhor precisão e melhor análise estatística das observações e das coordenadas, tendo em vista o elevado número de observações redundantes (INCRA, 2013).

Figura 4 - Esquema de uma rede planimétrica por Triangulação



Fonte: INCRA (2013)

2.3 Método dos Correlatos

Segundo (GEMAEL, MACHADO e WANDRESEN, 2015), medindo um ou mais ângulos de um triângulo, tais medidas não comportam uma verificação por serem funcionalmente independentes.

Se, porém, estendermos a mensuração aos três ângulos do triângulo, a situação se altera significativamente, pois sabemos existir agora uma dependência matemática entre eles. Em outras palavras, os valores observados, depois de ajustados, deverão satisfazer ao modelo matemático:

$$(A)^a + (B)^b + (C)^c - (180^\circ + \epsilon) = 0 \quad (2.67)$$

Sendo ϵ o excesso esférico; o mesmo não ocorre com os valores simplesmente observados:

$$(A) + (B) + (C) - (180^\circ + \epsilon) \neq 0 \quad (2.68)$$

que não anulam o modelo dando lugar a um “erro de fechamento” que serve como indicador preliminar da precisão das medidas.

Analogamente, conduzindo um nivelamento geométrico ao longo de um circuito fechado, a soma de todos os desníveis deveria ser teoricamente nula. As falhas na mensuração, entretanto, introduzem também um erro de fechamento.

Estes e outros exemplos congêneres que podemos formular com os conhecimentos de Geodésia, não envolvem “parâmetros”, mas tão somente “observações”; e observações sujeitas a conhecidas injunções de natureza matemática. Dizemos, em tais casos, tratar-se de observações diretas condicionadas (sujeitas a equações de condição); o afastamento a tais condições é traduzido pelo erro de fechamento que deverá ser eliminado no ajustamento.

O modelo matemático que caracteriza as observações condicionadas, sob notação matricial:

$$F(L_a) = 0 \quad (2.69)$$

synetiza o conjunto de equações (de condição) a serem satisfeitas pelas observações ajustadas.

O método que estamos abordando para ajustar esse tipo de observação é denominado método das equações de condição ou método dos correlatos.

a) Modelo Matemático

No método dito dos correlatos (ou das equações de condição) não tratamos com “parâmetros”; o modelo matemático envolve apenas os valores observados ajustados (incógnitas) como em (2.69):

$$F(L_a) = 0$$

no qual F simboliza r funções e o vetor L_a tem dimensões $n \times 1$; o modelo matricial (2.69) representa, pois, r “equações naturais de condição” ligando n incógnitas (L_a).

Interessa-nos envolver no modelo os valores observados para obter as equações de condição transformadas, com outras incógnitas (os resíduos v_i). Fazendo, como no método dos parâmetros:

$$L_a = L_b + V \quad (2.70)$$

a (2.69) pode ser reescrita:

$$F(L_b + V) = 0 \quad (2.71)$$

e aplicando a aproximação linear da série de TAYLOR em forma matricial

$$F(X) = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_0} \Delta X :$$

$$F(L_a) = F(L_b + V) \cong F(L_b) + \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} (L_a - L_b) = 0 \quad (2.72)$$

A função $F(L_b)$, dos valores observados, tem o significado de um erro de fechamento e será designada por W :

$$W = F(L_b) \quad (2.73)$$

Indicando ainda por B a matriz das derivadas parciais

$${}_r B_n = \left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b} \quad (2.74)$$

Resulta em:

$$BV + W = 0 \quad (2.75)$$

que é o modelo linearizado do método dos correlatos, representativo de r equações de condição transformada, ligando n incógnitas (v_i);

Dimensões:

$${}_r B_{nn} V_1 + {}_r W_1 = {}_r 0_1 \quad (2.76)$$

b) Equações Normais

Para que as incógnitas se subordinem ao MMQ e ao mesmo tempo satisfaçam às equações de condição, vamos utilizar a técnica lagrangiana em forma matricial definindo a função \emptyset :

$$\emptyset = V^T P V - 2K^T (BV + W) = \text{mínimo} \quad (2.77)$$

sendo K o vetor ($r \times 1$) dos “multiplicados de Lagrange” (ou “correlatos”) e a quantidade entre parêntesis o primeiro membro da (2.75).

Igualando a zero as derivadas parciais em relação a V e a K :

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial V} = 2PV - 2B^T K + 0 \therefore PV - B^T K = 0 \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial K} = -2(BV + W) = 0 \therefore BV + W = 0 \quad (2.79)$$

A primeira dessas equações matriciais

$${}_n P_{nn} V_1 - {}_r B_n^T {}_r K_1 = 0 \quad (2.80)$$

representa n equações algébricas e a segunda

$${}_n B_{nn} V_1 + {}_r W_1 = 0 \quad (2.81)$$

r equações lineares, compondo ambas um sistema compatível de $n + r$ equações a $n + r$ incógnitas (são desconhecidos os vetores V e K).

Considerando “supermatrizes” (matrizes cujos elementos são matrizes), o sistema mencionado assume a forma:

$$\begin{bmatrix} P & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ -K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

com solução teórica imediata:

$$\begin{bmatrix} V \\ -K \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} P & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ W \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

porém não prática, por implicar a inversão de matrizes excessivamente grandes.

Resolvendo a (2.80) em relação a V :

$$V = P^{-1}B^TK \quad (2.84)$$

e introduzindo este vetor na (2.81):

$$BP^{-1}B^TK + W = 0 \quad (2.85)$$

Obtemos a equação matricial representativa do sistema de r equações normais que proporciona os r multiplicadores de Lagrange (correlatos):

$$K = -(BP^{-1}B^T)^{-1}W \quad (2.86)$$

ou

$$K = -M^{-1}W \quad (2.87)$$

com

$$M = BP^{-1}B^T \quad (2.88)$$

c) Valores Observados Ajustados

Obtido o vetor dos correlatos K pela (2.86), solução das equações normais, a (2.84) proporciona o vetor dos resíduos:

$$V = P^{-1}B^TK$$

Através do qual pode ser calculado o vetor dos valores observados ajustados:

$$L_a = L_b + V$$

d) MVC dos Valores Ajustados

Substituindo na expressão:

$$L_a = L_b + V = L_b + P^{-1}B^TK \quad (2.89)$$

O vetor dos correlatos pelo seu valor dado em (2.87), resulta:

$$L_a = L_b + P^{-1}B^TM^{-1}W \quad (2.90)$$

Propagação:

$$\Sigma_{L_a} = D \Sigma_{L_b} D^T \quad (2.91)$$

com

$$D = \frac{\partial L_a}{\partial L_b} = I - P^{-1} B^T M^{-1} \frac{\partial W}{\partial L_b} \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial W}{\partial L_b} = \frac{\partial [F(L_b)]}{\partial L_b} = B \quad (2.93)$$

$$D = I - P^{-1} B^T M^{-1} B \quad (2.94)$$

Introduzindo na (2.91):

$$\Sigma_{L_a} = (I - P^{-1} B^T M^{-1} B) \Sigma_{L_b} (I - B^T M^{-1} B P^{-1}) \quad (2.95)$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 [(I - P^{-1} B^T M^{-1} B) P^{-1} (I - B^T M^{-1} B P^{-1})] \quad (2.96)$$

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 [P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}] \quad (2.97)$$

Considerando a parte central do último termo

$$B P^{-1} B^T M^{-1} = M M^{-1} + I \quad (2.98)$$

Vemos que esse termo é igual ao anterior a menos do sinal; donde:

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 [P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}] \quad (2.99)$$

Reescrevendo:

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 P^{-1} [I - B^T M^{-1} B P^{-1}] \quad (2.100)$$

$$\Sigma_{L_a} = \Sigma_{L_b} [I - B^T M^{-1} B P^{-1}] \quad (2.101)$$

O segundo termo do segundo membro representa, como se vê, a “melhoria” introduzida com o ajustamento.

e) MVC dos Resíduos

Demonstra-se que:

$$\Sigma_V = -\sigma_0^2 P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} \quad (2.102)$$

Comparando com a (2.50) resulta:

$$\Sigma_{L_a} = \Sigma_{L_b} + \Sigma_V \quad (2.103)$$

f) Variância da Observação de Peso Unitário a Posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{s} \quad (2.104)$$

$S = r$ = número de equações de condição = número de observações superabundantes = número de graus de liberdade.

Para obter a forma quadrática de maneira mais simples utilizamos a (2.84):

$$\begin{aligned} V^T P V &= (P^{-1} B^T K)^T P P^{-1} B^T K = K^T B P^{-1} B^T K = K^T B P^{-1} B^T K = K^T M K \\ V^T P V &= -K^T W \end{aligned} \quad (2.105)$$

3.4 Processamento dos métodos em Scilab

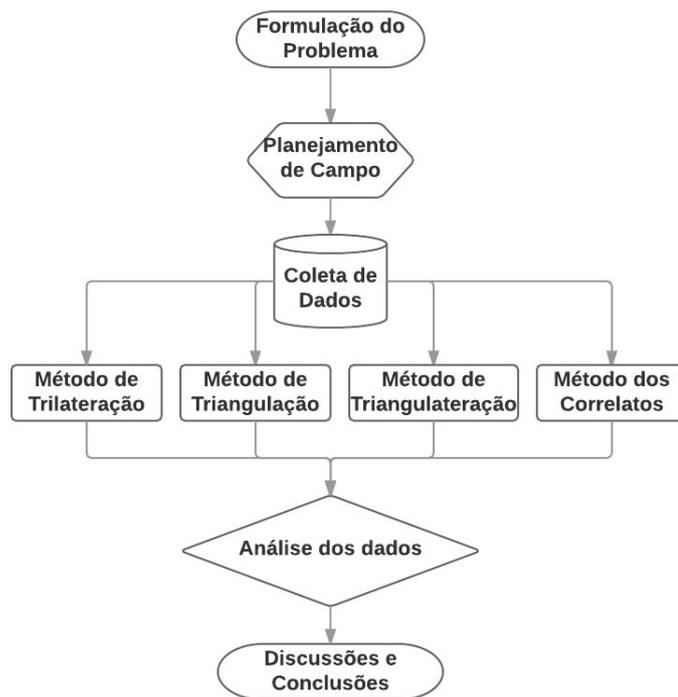
Scilab é um programa de código aberto gratuito, distribuído com a licença Open Source CeCill. É um software de cálculo numérico que fornece um poderoso ambiente de desenvolvimento para aplicações científicas e de engenharia. Possui uma comunidade de colaboradores que participam do desenvolvimento através da contribuição no próprio código fonte, na criação de módulos externos e na tradução e divulgação do sistema (CALADO et al, 2016).

Em cada *software*, foram criados programas, com os modelos matemáticos, vistos no embasamento teórico, necessários para os cálculos e empregabilidade dos métodos. Para cada um, foi imposto uma iteração (um processo repetitivo) para que os dados chegassem dentro das precisões estimadas e seu valor de correção fosse tão pequeno, que não mais interfere nos valores ajustados.

3. METODOLOGIA

A metodologia foi organizada de acordo com a figura 5, que apresenta as etapas executadas neste trabalho, onde seguiu os procedimentos listados, buscando a ordem e entendimento de cada meta alcançada.

Figura 5 - Fluxograma da metodologia



Fonte: Autor.

3.1 Área de Estudo

A área em questão (figura 6), está situada entre o canteiro central do Campus Joaquim Amazonas da UFPE e o estacionamento do bloco CTG, localize-se em frente aos prédios do RU e CAC. No campus concentra-se porções de área verde com aglomerações de árvores em volta. A área em questão possui boa visibilidade entre os pontos, com baixo relevo e foi alvo de levantamento topográfico planimétrico usando-se os métodos citados no embasamento teórico.

Figura 6 - Imagem da área de estudo



Fonte: Autor.

3.2 Equipamentos utilizados

- (uma) Estação Total GPT 3200N, de precisão angular 5" e linear 3mm+2ppm;
- (dois) Tripés de madeira Topcon TP-5;
- (três) Suportes para prisma;
- (três) Bases nivelantes Topcon - Modelo 20;
- (três) Prismas circulares EPEX com constante 0-30mm;
- (cinco) Lanternas de Led;
- Software: Scilab (versão 5.5.2).

Na figura 7, vemos os equipamentos usados no levantamento da rede.

Figura 7 - Imagem dos equipamentos



Fonte: Autor.

3.3 Implantação dos pontos

Para a implantação dos pontos P1 e P2, foram postos piquetes testemunhos juntamente com ao ponto (figura 8), materializado com uma haste de ferro, enquanto a luminosidade do local se era clara e visivelmente agradável, facilitando assim sua localização durante o levantamento noturno.

Figura 8 - Ponto materializado no ponto P1



Fonte: Autor.

3.4 Centragem Forçada

O método da triangulação e trilateração com centragem forçada requer certos cuidados para que durante o procedimento de medição a base nivelante permaneça centrada e nivelada, mesmo depois da troca entre o sistema de prisma, acoplado ao adaptador base-prisma, e a alidade do equipamento de medição. Aconselha-se sempre verificar a centralização e a horizontalização do instrumento durante o procedimento topográfico.

As figuras 9 e 10 apresentam dois tipos de sistemas de encaixe entre a alidade do equipamento e o sistema base-prisma. Na Figura 9 tem-se um sistema de centragem forçada com um encaixe e conexão cilíndrica com a base nivelante (patente da Firma Zeiss).

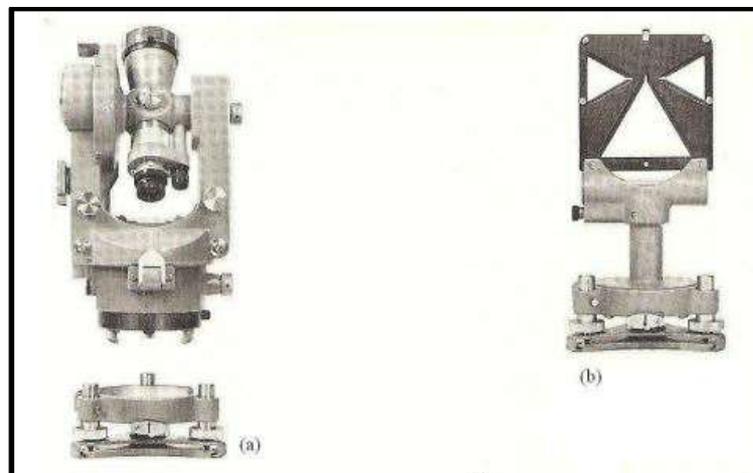
Figura 9 - Componentes da Centragem forçada. Fabricante Zeiss.



Fonte: KAHMEN (1997).

Na figura 10 tem-se um sistema de centragem forçada com um encaixe e conexão em três orifícios (cavidades) com a base nivelante (patente da Firma antiga Wild atualmente Leica). O encaixe e conexão com a base nivelante realizada por esta Estação Total é semelhante à patente da Firma Zeiss apresentada na figura 9.

Figura 10 - Componentes da Centragem forçada. Fabricante Leica



Fonte: WILD HEERBRUG Ltda (1980).

A centragem forçada é descrita em (KAHMEN, 1997). Segundo o autor a centragem forçada garante uma centragem, a qual não deve se modificar durante o procedimento de medição, de modo que durante as medições, o taqueômetro ou Estação Total, distanciômetros, prismas e sinalizadores de alvos possam ser trocados um com o outro. O tripé centrado permanece fixo sobre o vértice topográfico até que as medições sejam finalizadas, garantindo uma precisão de centragem de 0,03 a 0,1mm.

Para o procedimento foi necessária a utilização de lanterna para visualização do ponto materializado, para posteriormente visualização do mesmo por prumo óptico, para então realizar a devida horizontalização do equipamento a ser instalado (figura 11).

Figura 11 - Aplicação do procedimento em campo



Fonte: Autor.

3.5 Processo de medição

Tendo como base MENDONÇA et al. (2010), no objetivo de determinar as coordenadas planimétricas precisas de dois novos pontos: P1 e P2, foram medidas cinco distâncias horizontais, entre esses pontos e dois pilares da rede cadastral do campus. Os pilares da rede utilizados foram o EPS7 e o EPS4.

O levantamento foi realizado, no dia 17 de setembro de 2016, tendo início as 18:30. Foi aferido duas visadas PD e PI, a afim de controlar os erros e aumentar a qualidade dos dados.

Metodologia para implementação de uma rede planimétrica de precisão

Iniciou-se a medição a partir do ponto P1 (figura 12), com visadas em sentido horário, nos demais pontos; e a troca de estações em sentido anti-horário, tendo como última estação no marco EPS07 (monografia do marco em anexo).

Foi utilizado o procedimento da centragem forçada (como já descrito), nos pontos a determinar, foi instalado um tripé com uma base nivelante. As medições foram realizadas sem que os tripés tenham sido deslocados. As observações foram distâncias horizontais, verticais e distâncias já reduzidas ao horizonte pela própria estação total, levando em conta os correspondentes valores de temperatura e pressão, no instante da observação.

Figura 12 - Base nivelante preparada para levantamento



Fonte: Autor.

Na figura 13, mostra o modelo da caderneta de campo usada no levantamento, onde nela contém as informações necessárias para a captação dos dados necessários para o processamento em laboratório.

Figura 13 - Caderneta de Campo da estação no ponto P1.

Caderneta de Campo - Rede Planimétrica - Tópicos de Ajustamento				
Instrumento				Data: 14/09/16
Equipe Técnica				
Estação	Ponto	HZ (PD)	V (PD)	Dist (PD)
P1	EPS07	0° 0' 0"	00° 00' 25"	193.022
P1	EPS04	32° 53' 56"	27° 58' 30"	79.412
Estação	Ponto	HZ (PI)	V (PI)	Dist (PI)
P1	EPS04	219° 23' 12"	230° 01' 23"	78.412
P1	EPS07	187° 00' 02"	264° 53' 56"	179.022
Estação	Ponto	HZ (PD)	V (PD)	Dist (PD)
P1	EPS07	0° 0' 0"	30° 05' 49"	194.021
P1	EPS04	34° 48' 06"	09° 58' 30"	79.412
Estação	Ponto	HZ (PI)	V (PI)	Dist (PI)
P1	EPS04	214° 54' 18"	230° 01' 23"	78.412
P1	EPS07	180° 01' 02"	264° 53' 56"	179.022
$r_{\text{m}} = 3^{\text{m}} - 00$				
Estação	Ponto	HZ (PD)	V (PD)	Dist (PD)
P1	EPS04	0° 0' 0"	00° 51' 43"	40.412
P1	P2	02° 56' 03"	00° 02' 59"	64.519
Estação	Ponto	HZ (PI)	V (PI)	Dist (PI)
P1	P2	272° 56' 03"	263° 51' 43"	64.519
P1	EPS04	180° 01' 02"	270° 01' 44"	78.412
Estação	Ponto	HZ (PD)	V (PD)	Dist (PD)
P1	EPS04	0° 01' 01"	00° 52' 37"	40.411
P1	P2	02° 56' 01"	00° 02' 48"	64.524
Estação	Ponto	HZ (PI)	V (PI)	Dist (PI)
P1	P2	274° 56' 01"	263° 51' 37"	64.524
P1	EPS04	180° 01' 02"	270° 01' 44"	78.412

Fonte: Autor.

3.6 Medição Noturna

No presente trabalho, as atividades de medições foram todas realizadas durante a noite; a fim de minimizar erros sistemáticos decorrentes da refração atmosférica que é acentuadamente maior durante o dia e a dilatação térmica sofrida pelos equipamentos ao receberem insolação.

Durante o procedimento, em cada ponto, foi necessário o uso de lanternas de LED para facilitar a iluminação dos prismas, e auxiliar na localização e visualização dos mesmos (figura 14). Como a medição foi dentro do campus, a iluminação no mesmo também ajudou a equipe em campo.

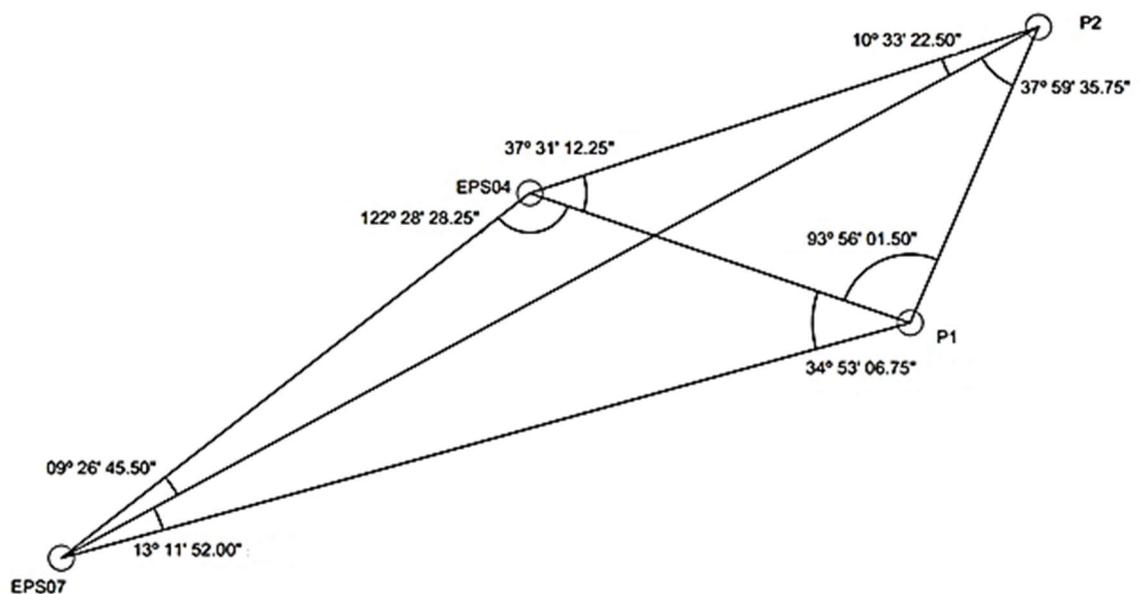
Figura 14 - Equipamento devidamente posicionado para realizar as medições



Fonte: Autor.

Na figura 15, está representada a rede planimétrica calculada, com a amostragem dos ângulos horizontais internos levantados em campo.

Figura 15 - Croqui da rede calculada, somente com ângulos



Fonte: Autor.

4. RESULTADOS

Os resultados estão na forma de sete tabelas, apresentadas a seguir.

Tabela 4.1 – Resultados da Trilateração no Plano UTM

Dados de entrada			
Coordenadas fixas UTM			
EPS04		EPS07	
E = 284742,576 m		E = 284650,091 m	
N = 9109481,118 m		N = 9109407,837 m	
Observação das distâncias			
Lb (m)	Alinhamento	Precisão do equipamento	
D1 = 174,022	P1-EPS7	3 mm + 2ppm	
D2 = 79,413	P1-EPS4	3 mm + 2ppm	
D3 = 64,534	P1-P2	3 mm + 2ppm	
D4 = 220,279	P2-EPS7	3 mm + 2ppm	
D5 = 105,698	P2-EPS4	3 mm + 2ppm	
Resultados			
P1 (m)	Desvio padrão	P2 (m)	Desvio padrão
E = 284817,58622	0,00936	E = 284842,89043	0,01963
N = 9109455,03502	0,02750	N = 9109514,39900	0,03723
Observação das distâncias ajustadas		Resíduo	Variância Posteriori
La (m)	Desvio padrão		
D1 = 174,01811	0,01233	-0,00389	14,91807
D2 = 79,41571	0,01190	0,00271	Qui- Quadrado
D3 = 64,53205	0,01193	-0,00195	14,91807
D4 = 220,28863	0,00915	0,00963	Grau de Liberdade
D5 = 105,69111	0,01031	-0,00689	1

Tabela 4.2 – Resultados da Trilateração no Plano Topocêntrico

Dados de entrada			
Coordenadas fixas Topocêntricas			
EPS04		EPS07	
X: 149811,215 m		X: 149718,398 m	
Y: 249927,136 m		Y: 249854,310 m	
Observação das distâncias			
Lb (m)	Alinhamento	Precisão do equipamento	
D1 = 174,022 m	P1-EPS7	3 mm + 2ppm	
D2 = 79,413 m	P1-EPS4	3 mm + 2ppm	
D3 = 64,534 m	P1-P2	3 mm + 2ppm	
D4 = 220,279 m	P2-EPS7	3 mm + 2ppm	
D5 = 105,698 m	P2-EPS4	3 mm + 2ppm	
Resultados			
P1 (m)	Desvio padrão	P2 (m)	Desvio padrão
X = 149886,11189	0,00301	X = 149911,67528	0,00625
Y = 249900,73491	0,00882	Y = 249959,98919	0,01197
Observação das distâncias ajustadas		Resíduo	Variância Posteriori
La (m)	Desvio padrão		
D1 = 174,02075	0,00395	-0,00125	1,53317
D2 = 79,41387	0,00381	0,00087	Qui- Quadrado
D3 = 64,53337	0,00382	-0,00062	1,53317
D4 = 220,28209	0,00293	0,00309	Grau de Liberdade
D5 = 105,69579	0,00331	-0,00221	1

Tabela 4.3 - Resultados da Triangulação no Plano UTM

Dados de entrada			
Coordenadas fixas UTM			
EPS04		EPS07	
E = 284742,576 m		E = 284650,091 m	
N = 9109481,118 m		N = 9109407,837 m	
Observação dos ângulos			
Lb (°)	Alinhamento	Precisão do equipamento	
A1 = 34,88521	EPS7-P1-EPS4	5"	
A2 = 93,93375	EPS4-P1-P2	5"	
A3 = 37,99326	P1-P2-EPS4	5"	
A4 = 10,55715	EPS7-P2-EPS4	5"	
A5 = 37,52007	P2-EPS4-P1	5"	
A6 = 122,47375	P1-EPS4-EPS7	5"	
A7 = 9,44597	EPS4-EPS7-P2	5"	
A8 = 13,19778	P2-EPS7-P1	5"	
Resultados			
P1 (m)	Desvio padrão	P2 (m)	Desvio padrão
E = 284817,61847	0,01168	E = 284842,90597	0,01713
N = 9109455,08269	0,00601	N = 9109514,46853	0,00655
Observação dos ângulos ajustados		Resíduo (")	Variância Posteriori
La (°)	Desvio padrão (")		
A1 = 34,8831	8,03455	-7,44100	4,21244
A2 = 93,9314	7,98619	-8,58092	Qui- Quadrado
A3 = 37,9912	7,61191	-7,51292	
A4 = 10,5565	5,55704	-2,51699	16,84974
A5 = 37,5210	7,93795	3,36083	Grau de Liberdade
A6 = 122,4745	8,05840	2,71012	
A7 = 9,4480	6,24896	7,44604	4
A8 = 13,1943	6,09016	-12,46516	

Tabela 4.4 - Resultados da Triangulação no Plano Topocêntrico

Dados de entrada			
Coordenadas fixas Topocêntricas			
EPS04		EPS07	
X: 149811,215 m		X: 149718,398 m	
Y: 249927,136 m		Y: 249854,310 m	
Observação dos ângulos			
Lb (°)	Alinhamento	Precisão do equipamento	
A1 = 34,88521	EPS7-P1-EPS4	5"	
A2 = 93,93375	EPS4-P1-P2	5"	
A3 = 37,99326	P1-P2-EPS4	5"	
A4 = 10,55715	EPS7-P2-EPS4	5"	
A5 = 37,52007	P2-EPS4-P1	5"	
A6 = 122,47375	P1-EPS4-EPS7	5"	
A7 = 9,44597	EPS4-EPS7-P2	5"	
A8 = 13,19778	P2-EPS7-P1	5"	
Resultados			
P1 (m)	Desvio padrão	P2 (m)	Desvio padrão
X = 149886,11908	0,01165	X = 149911,68503	0,01715
Y = 249900,74770	0,00606	Y = 249960,00168	0,00650
Observação dos ângulos ajustados		Resíduo (")	Variância Posteriori
La (°)	Desvio padrão (")		
A1 = 34,8831	8,03455	-7,44100	4,21244
A2 = 93,9314	7,98619	-8,58092	Qui- Quadrado
A3 = 37,9912	7,61191	-7,51292	
A4 = 10,5565	5,55704	-2,51699	16,84974
A5 = 37,5210	7,93795	3,36083	Grau de Liberdade
A6 = 122,4745	8,05840	2,71012	
A7 = 9,4480	6,24896	7,44604	4
A8 = 13,1943	6,09016	-12,46516	

Tabela 4.5 - Resultados da Triangulação no Plano UTM

Dados de entrada			
Coordenadas fixas UTM			
EPS04		EPS07	
E = 284742,576 m		E = 284650,091 m	
N = 9109481,118 m		N = 9109407,837 m	
Observação dos ângulos e das distâncias			
Lb (° e m)	Alinhamento	Precisão do equipamento	
A1 = 34,88521	EPS7-P1-EPS4	5"	
A2 = 93,93375	EPS4-P1-P2	5"	
A3 = 37,99326	P1-P2-EPS4	5"	
A4 = 10,55715	EPS7-P2-EPS4	5"	
A5 = 37,52007	P2-EPS4-P1	5"	
A6 = 122,47375	P1-EPS4-EPS7	5"	
A7 = 9,44597	EPS4-EPS7-P2	5"	
A8 = 13,19778	P2-EPS7-P1	5"	
D1 = 174,022	P1-EPS7	3 mm + 2ppm	
D2 = 79,413	P1-EPS4	3 mm + 2ppm	
D3 = 64,534	P1-P2	3 mm + 2ppm	
D4 = 220,279	P2-EPS7	3 mm + 2ppm	
D5 = 105,698	P2-EPS4	3 mm + 2ppm	
Resultados			
P1 (m)	Desvio padrão	P2 (m)	Desvio padrão
E = 284817,59255	0,00593	E = 284842,87011	0,00747
N = 9109455,09160	0,00579	N = 9109514,45862	0,00829
Observação dos ângulos e distâncias ajustadas		Resíduo (" e m)	Variância Posteriori
La (° e m)	Desvio padrão (" e m)		
A1 = 34,8883	8,52483	11,26280	14,3276572
A2 = 93,9297	14,09601	-14,41441	
A3 = 37,9905	12,69835	-9,99952	
A4 = 10,5577	8,91097	1,89479	Qui- Quadrado
A5 = 37,5221	12,33938	7,26914	
A6 = 122,4744	13,48656	2,51484	
A7 = 9,4458	8,24271	-0,67877	128,9489148
A8 = 13,1914	4,89539	-22,84888	
D1 = 174,03955	0,00542	0,01755	
D2 = 79,40312	0,00646	-0,00988	Grau de Liberdade
D3 = 64,5244	0,00649	-0,00960	
D4 = 220,29969	0,00685	0,02069	
D5 = 105,69061	0,00698	-0,00739	9

Tabela 4.6 - Resultados da Triangulação no Plano Topocêntrico

Dados de entrada			
Coordenadas fixas Topocêntricas			
EPS04		EPS07	
X: 149811,215 m		X: 149718,398 m	
Y: 249927,136 m		Y: 249854,310 m	
Observação dos ângulos e das distâncias			
Lb (° e m)	Alinhamento	Precisão do equipamento	
A1 = 34,88521	EPS7-P1-EPS4	5"	
A2 = 93,93375	EPS4-P1-P2	5"	
A3 = 37,99326	P1-P2-EPS4	5"	
A4 = 10,55715	EPS7-P2-EPS4	5"	
A5 = 37,52007	P2-EPS4-P1	5"	
A6 = 122,47375	P1-EPS4-EPS7	5"	
A7 = 9,44597	EPS4-EPS7-P2	5"	
A8 = 13,19778	P2-EPS7-P1	5"	
D1 = 174,022 m	P1-EPS7	3 mm + 2ppm	
D2 = 79,413 m	P1-EPS4	3 mm + 2ppm	
D3 = 64,534 m	P1-P2	3 mm + 2ppm	
D4 = 220,279 m	P2-EPS7	3 mm + 2ppm	
D5 = 105,698 m	P2-EPS4	3 mm + 2ppm	
Resultados			
P1 (m)	Desvio padrão	P2 (m)	Desvio padrão
X = 149886,11197	0,00283	X = 149911,67486	0,00356
Y = 249900,75015	0,00277	Y = 249959,99914	0,00396
Observação dos ângulos e distâncias ajustadas		Resíduo (" e m)	Variância Posteriori
La (° e m)	Desvio padrão (" e m)		
A1 = 34,8846	4,07024	-2,26278	3,26669
A2 = 93,9306	6,73071	-11,34478	
A3 = 37,9912	6,06327	-7,35245	
A4 = 10,5567	4,25442	-1,49035	Qui- Quadrado
A5 = 37,5214	5,89178	4,93758	
A6 = 122,4745	6,43992	2,58454	
A7 = 9,4474	3,93636	4,96823	29,40023
A8 = 13,1936	2,33777	-15,03999	
D1 = 174,02489	0,00259	0,00289	
D2 = 79,40887	0,00308	-0,00413	Grau de Liberdade
D3 = 64,52832	0,00310	-0,00568	
D4 = 220,28649	0,00327	0,00749	
D5 = 105,69849	0,00333	0,00049	9

Tabela 4.7 - Resultados do Triangulação por Correlatos

Dados de entrada		
Observação dos ângulos		
Lb (°)	Alinhamento	Precisão do equipamento
A1 = 34,88521	EPS7-P1-EPS4	5"
A2 = 93,93375	EPS4-P1-P2	5"
A3 = 37,99326	P1-P2-EPS4	5"
A4 = 10,55715	EPS7-P2-EPS4	5"
A5 = 37,52007	P2-EPS4-P1	5"
A6 = 122,47375	P1-EPS4-EPS7	5"
A7 = 9,44597	EPS4-EPS7-P2	5"
A8 = 13,19778	P2-EPS7-P1	5"
Resultados		
Observação dos ângulos ajustados	Resíduo (")	Variância Posteriori
La (°)		
A1 = 34,88314	-7,44143208	4,21244
A2 = 93,93137	-8,580741613	Qui-Quadrado
A3 = 37,99118	-7,512990639	
A4 = 10,55645	-2,516627535	16,84974
A5 = 37,521	3,360359787	
A6 = 122,4745	2,709374016	Grau de Liberdade
A7 = 9,44804	7,446893732	
A8 = 13,19432	-12,46483567	4

5. DISCUSSÕES

São analisados, separadamente, os modelos: Trilateração, triangulação, triangulateração e a triangulação com o método dos correlatos.

5.1 Trilateração

Observaram-se cinco distâncias horizontais, entre os quatro pontos da rede, excluindo a distância entre os pontos de controle. Os dados encontram-se nas tabelas 4.1 e 4.2.

O cálculo da trilateração considerou duas variações nas coordenadas dos pontos de controle: pontos de controle com coordenadas planas UTM e com coordenadas planas topocêntricas.

As duas soluções apresentam diferenças significativas com relação a precisão. Com o apoio em coordenadas no plano topocêntrico os desvios padrão das coordenadas ajustadas é da ordem de milímetros, com somente um de 1,1cm e o valor calculado do qui-quadrado é de 1,53, ver tabela 4.2. Entretanto quando o apoio está com coordenadas no Plano UTM os desvios padrão das coordenadas ajustadas são da ordem de centímetros e enquanto que valor calculado do qui-quadrado é de 14,92, ver tabela 4.1, que diferentemente do valor anterior não passa no teste do qui-quadrado e a hipótese básica é rejeitada ao nível de significância de 5% indicando a presença de erro sistemático, já identificado em MENDONÇA et al. (2010).

5.2 Triangulação

Observou-se os oito ângulos horizontais da rede. Os valores observados são valores médios de duas séries com posição direta e inversa da luneta. O cálculo da triangulação também considerou duas variações nas coordenadas dos pontos de controle: pontos de controle com coordenadas planas UTM e com coordenadas planas topocêntricas. As duas soluções não apresentaram nenhuma diferença com relação a precisão, ou seja, na triangulação o ajustamento independe da escala dos pontos de controle. Ambas apresentaram os desvios padrão das coordenadas ajustadas menores que dois centímetros, tabelas 4.3 e 4.4 e o mesmo valor calculado para o qui-quadrado de 16,85, que com quatro graus de liberdade e ao nível de significância de 5% não deveria ser superior a 11,14, sendo então rejeitada a hipótese básica. A análise da rejeição chega à conclusão que a mesma é motivada pela estimativa da precisão da medição angular de 5", prevista na Estação Total, não ter sido

obtida em campo. Com 7" o valor passa no teste com 8,6 sem alterações nas outras soluções.

5.3. Triangulação

Considera-se o termo “triangulação” quando são consideradas as cinco distâncias horizontais e os oito ângulos em um cálculo conjunto considerando o modelo paramétrico de ajustamento. O cálculo da triangulação também considerou duas variações nas coordenadas dos pontos de controle: pontos de controle com coordenadas planas UTM e com coordenadas planas topocêntricas. As soluções apresentaram valores melhores para a precisão dos resultados, nos dois casos, tanto para as fixas em UTM, tabela 4.5, quanto nas fixas no plano topocêntrico, tabela 4.6, os valores dos desvios padrão das coordenadas ajustadas são menores que 1 cm. O que significa que o aumento dos graus de liberdade para nove é um fator importante no processo. O efeito do erro sistemático das coordenadas UTM aparece nos cálculos dos valores do qui-quadrado que fica em 128,95, totalmente fora do valor crítico, que com nove graus de liberdade e ao nível de 5% de significância é de 19,02. Quando calculado para coordenadas topocêntricas, embora seja bem menor de 29,40, também não passa a análise de sua rejeição chega à conclusão que a mesma é motivada pela estimativa da precisão da medição angular de 5", prevista na Estação Total, não ter sido obtida em campo. Com 7" o valor crítico de 19 sem alterações nas outras soluções

5.4 Triangulação com modelo das equações de condição ou correlatos.

Quando os oito ângulos horizontais observados são ajustados pelo Método dos Mínimos Quadrados considerando o modelo das equações de condição ou dos correlatos, a solução apresenta os mesmos valores para os resíduos obtidos quando calculado pela triangulação, tabelas 4.3, 4.4 e 4.7. Confirmando que no caso das observações angulares o ajustamento independe dos pontos de controle.

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Após estudos, análises e verificações quanto a literatura, de acordo com os resultados obtidos, neste trabalho, que a metodologia empregada em um levantamento de campo planimétrico, interfere diretamente nos resultados processados pós campo. Deve-se levar em consideração todos os parâmetros previstos, além dos equipamentos, métodos de levantamento e pós processamento empregados em tal, afim de obter um resultado com boa acurácia.

Conforme esperado, por realizar as medições no período noturno, a precisão calculada doravante resultados, mostrou que o levantamento foi de alta precisão, mesmo contando com erros sistemáticos. Dentre os métodos estudados e realizados, ficou comprovado que o método da triangulação foi o mais preciso. O ajustamento dos dados se fez conclusivo, em relação aos graus de liberdade, utilizados na formulação do método, sendo um importante fator para o mesmo.

Por fim, recomenda-se que para continuidade da pesquisa, seja realizada uma nova medição da mesma rede durante o período diurno; levando em consideração toda metodologia e condições vistas neste trabalho. A fim de comparar os dados, relacionando as diferenças entre os erros que incidem no período do levantamento e sua influência nos resultados.

REFERÊNCIAS

- ABNT - ABNT. NBR 13133. Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 13133: Execução de Levantamento Topográfico**. Rio de Janeiro, 1994.
- CALADO, L. G. L. P, MENDONÇA, F. J. B, MENDONÇA, R. L, MELO, W. D. A. **Cálculo de uma poligonal enquadrada no plano topográfico com software livre pelo método dos mínimos quadrados**. VI Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, Recife – PE, 24-25 de agosto de 2016.
- DALMOLIN, Q. **Ajustamento por mínimos quadrados**. Departamento de Geomática – UFPR. Curitiba, 2002.
- FREITAS, Elisabete. **Apresentações teóricas no âmbito da disciplina de Topografia**. Universidade do Minho. 2011.
- FONTE, Cidália C. **Textos de apoio de Topografia**. Departamento de Matemática da FCTUC, Universidade de Coimbra. 2006/2007.
- GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Editora da UFPR, 1994. 319p.
- GEMAEL, C, MACHADO, A. M. L, WANDRESEN, R. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Editora UFPR. 2 ed. Curitiba-PR, 2015. 430p.
- INCRA, **Manual Técnico de Posicionamento: Georreferenciamento de Imóveis Rurais**. 1 ed. Brasília-GO, 2013. 34p.
- JELINEK, A. R. **Apostila - Engenharia De Materiais, TOPOGRAFIA I**. INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS: DEPARTAMENTO DE GEODÉSIA, UFRGS. Julho de 2009. 74p.
- KAHMEN, H, FAIG, W. **Surveying**. Ed. de Gruyter, Berlin, 1988.
- MACHADO, A. M. L. **Ajustamento II – GA110**. Notas de aula, Setor de ciências da Terra: Departamento de Geomática, UFPR. Setembro de 2014. 50p.
- MENDONÇA, F. J. B, GARNÉS, S. J. A, PEREIRA, C. M., BARROSO NETO, J. A., MELO, W. D. A. **Análise do ajustamento por mínimos quadrados de uma trilateração topográfica com injunções nos planos UTM e topocêntrico**. III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, Recife – PE, 27-30 de Julho de 2010.
- SCILAB. **Histoire**. Disponível em: <<http://www.scilab.org/fr>> Acesso: 03 de dezembro de 2017.
- SILVA, I, SEGANTINE, P. C. L. **Topografia para Engenharia. Teoria e Prática de Geomática**. 1. ed. Editora Elsevier. Rio de Janeiro, 2015.
- UFPE. **Laboratório de Topografia (LATOP)**. Departamento de Engenharia Cartográfica e de Agrimensura - CTG. Acesso em 30 de novembro de 2017, disponível em <https://www.ufpe.br/latop/marcos-geodesicos>

Metodologia para implementação de uma rede planimétrica de precisão

VEIGA. Luis A. K. et. al. **Fundamentos de Topografia** – Engenharia Cartográfica e de Agrimensura. Universidade Federal do Paraná. 2007. 195 p.

ANEXOS

Figura 16. Monografia do marco geodésico EPS04

MONOGRAFIA DE MARCO GEODÉSICO DA REDE DE REFERÊNCIA CADASTRAL DA UFPE		
Nome da Estação: EPS04		Obra / Ano: TCC - VILA FLOR / 2010
DADOS GERAIS	SISTEMA DE PROJEÇÃO-UTM	COORDENADAS
Município: Recife Localidade: Várzea a – Campus Recife da UFPE TCC (VILA FLOR, 2010)	Meridiano Central = 33° W Origem N (Equador) = 10000000 m Origem E (MC 33° W) = 500000 m K0 = 0.9996 DATUM H SIRGAS2000 DATUM V Imituba/SC	* LAT. = 8°03' 05,84148"S * LONG. = 34°57' 11,62465"W * N = 9109481,118 m * E = 284742,576 m * H (GEOM) = 4,892 m
SISTEMA TOPOCÊNTRICO LOCAL		
* Origem: RECF Latitude: 8° 03'03,46970"S Longitude: 34° 57'05,45910"W Altitude: 4,217 m		Coordenadas Topocêntricas: * X: 149811,215 m * Y: 249927,136 m
Descrição: Cilindro de concreto, medindo 30 cm de diâmetro, altura de 1,17 m e base retangular de 0,97 m x 1,03 m x 0,16 m. Possui no seu topo base metálica com pino de centragem forçada com rosca universal. Chapa cravada estampada no pilar: UFPE- RRC- EPS04. Obs: * (MENDONÇA, GARNÉS et al., 2010)		
CROQUI	ITINERÁRIO	
	Estação EPS04 está localizada no canteiro central, a 42 m a leste do prédio do Centro de Artes e Comunicação - CAC, no Campos da Universidade Federal de Pernambuco.	
	FOTO	
		
Fonte: VILA FLOR (2010)		
	Data da foto: Maio de 2017	
Monografia elaborada em (Souza, 2017) - PIBIC - Propesq / UFPE		

Figura 17. Monografia do marco geodésico EPS07

MONOGRAFIA DE MARCO GEODÉSICO DA REDE DE REFERÊNCIA CADASTRAL DA UFPE		
Nome da Estação: EPS07		Obra / Ano: TCC - VILA FLOR / 2010
DADOS GERAIS	SISTEMA DE PROJEÇÃO-UTM	COORDENADAS
Município: Recife Localidade: Várzea a – Campus Recife da UFPE TCC (VILA FLOR, 2010)	Meridiano Central = 33° W Origem N (Equador) = 10000000 m Origem E (MC 33° W) = 500000 m K0 = 0.9996 DATUM H SIRGAS2000 DATUM V Imbituba/SC	* LAT. = 8°03' 08,21201"S * LONG. = 34°57' 14,65599"W * N = 9109407,837 m * E = 284650,091 m * H (GEOM) = 4,637 m
SISTEMA TOPOCÊNTRICO LOCAL		
* Origem: RECF Latitude: 8° 03'03,46970"S Longitude: 34° 57'05,45910"W Altitude: 4,217 m		Coordenadas Topocêntricas: * X: 149718,398 m * Y: 249854,310 m
Descrição: Cilindro de concreto, medindo 30 cm de diâmetro, altura de 1,20 m e base retangular de 0,95 m x 0,97 m x 0,19 m. Possui no seu topo base metálica com pino de centragem forçada com rosca universal. Chapa cravada estampada na base: UFPE- RRC- M032- EPS07. Obs: * (MENDONÇA, GARNÉS et al., 2010)		
CROQUI	ITINERÁRIO	
	Estação EPS07 está localizada a 55 m além do prédio do Centro de Tecnologia e Geociências - CTG, a 27 m da lateral do prédio do Departamento de Eletrônica e Sistemas - LDN, no campos da Universidade Federal de Pernambuco.	
	FOTOS	
		
		
	Data da foto: Maio de 2017	
Monografia elaborada em (Souza, 2017) - PIBIC - Propesq / UFPE		