



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

IZABELLY CRISTINA NASCIMENTO SILVA

**Estabilidade Linear de Equilíbrios Relativos Formados por dois Triângulos  
Equiláteros**

Recife

2022

IZABELLY CRISTINA NASCIMENTO SILVA

**Estabilidade Linear de Equilíbrios Relativos Formados por dois Triângulos  
Equiláteros**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

**Área de Concentração:** Análise

**Orientador:** Eduardo Shirlippe Goes Leandro

Recife

2022

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Luiza Maria Pereira de Oliveira, CRB4-1316

S586e Silva, Izabelly Cristina Nascimento  
*Estabilidade linear de equilíbrios relativos formados por dois triângulos equiláteros /*  
Izabelly Cristina Nascimento. – 2022.  
73 f.: il., fig., tab.

Orientador: Eduardo Shirlippe Goes Leandro  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática,  
Recife, 2022.

Inclui referências.

1. Equilíbrios relativos. 2. Estabilidade linear. 3. Teoria de representação de grupos. 4. Técnica de Vicent I. Leandro, Eduardo Shirlippe Goes (orientador). II. Título.

515                      CDD (23. ed.)                      UFPE - CCEN 2022-172

# **IZABELLY CRISTINA NASCIMENTO SILVA**

## *ESTABILIDADE LINEAR DE EQUILÍBRIOS RELATIVOS FORMADOS POR DOIS TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS*

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 28/07/2022

### **BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Eudes Naziazano Galvão (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Jair Koiller (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos (Examinador Externo)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

A Tereza Cristina.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise da estabilidade linear de equilíbrios relativos formados por dois triângulos equiláteros. Esses tipos de equilíbrios relativos são divididos em dois casos: triângulos equiláteros concêntricos homotéticos e triângulos equiláteros concêntricos onde um é a rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  do outro. Mais especificamente, temos os primeiros três corpos fixos nos vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 1 e que possuem massas iguais a 1. As posições dos outros três corpos estão fixas nos vértices do outro triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de raio  $r$  de mesmo centro e com massas iguais a  $m$ . Obtemos equações que fornecem os valores da massa  $m$  em função do raio  $r$  e, através de mudanças de variáveis adequadas e da utilização da técnica de Vincent, conhecemos os intervalos onde temos equilíbrios relativos. Munidos destes resultados preliminares, utilizamos a técnica onde se deduz a fatoração do polinômio de estabilidade de cada um dos casos. Essa técnica é uma aplicação da teoria de representação de grupos e é usada para obter fórmulas explícitas para os autovalores dos equilíbrios relativos que, juntamente com condições para a estabilidade e a técnica de Vincent, permite obter conclusões significativas sobre a estabilidade linear de cada problema. No caso dos triângulos equiláteros concêntricos homotéticos, conseguimos concluir a instabilidade dos equilíbrios relativos para qualquer valor de  $r$  onde a massa  $m > 0$ . No caso dos dois triângulos equiláteros concêntricos rotacionados, concluimos a instabilidade dos equilíbrios relativos para qualquer valor de  $r$  onde  $m > 0$ , exceto em dois pequenos intervalos, onde nada conseguimos concluir a respeito da estabilidade linear.

**Palavras-chaves:** equilíbrios relativos; estabilidade linear; teoria de representação de grupos; técnica de Vincent.

## ABSTRACT

The goal of this work is to perform a linear stability analysis of relative equilibria formed by two equilateral triangles. The relative equilibria are separated in two cases: homothetical concentric equilateral triangles and concentric equilateral triangles where one is the rotation of  $\frac{2\pi}{3}$  of the other. More specifically, the first three bodies are fixed in the vertices of an equilateral triangle inscribed in a circle of radius 1 and have masses equal to 1. The positions of the other three bodies are the vertices of another equilateral triangle, inscribed in a circle of radius  $r$  and same center and have masses equal to  $m$ . We obtained equations for the mass  $m$  as a function of the radius  $r$  and, via adequate change of coordinates and by using Vincent's technique, we found the intervals in which there are relative equilibria. After these preliminary results, we use a technique which determines a factorization of the stability polynomial of each case. This technique is an application of group representation theory and is used to obtain explicit formulae for the eigenvalues of the relative equilibria which, together with adequate stability conditions and Vincent's technique, allowed us to reach meaningful conclusions regarding the linear stability of each problem. In the case of the homothetic concentric equilateral triangles, we were able to conclude the instability of relative equilibria for any value of  $r$  and a positive mass  $m$ . In the case of two rotated concentric equilateral triangles, we concluded the instability of relative equilibria for any value of  $r$  and  $m$  is positive, with the exception of two small intervals, in which nothing could be proved regarding linear stability.

**Keywords:** relative equilibria; linear stability; group representation theory; Vincent's technique.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema anular do tipo $(0, 2, 0)$ e seus respectivos planos tangentes. . . . .	21
Figura 2 – Visão geométrica do deslocamento $\delta$ . . . . .	21
Figura 3 – Deslocamentos $\delta_{x_1}$ , $\delta_{x_4}$ e $\delta_{x_1} + \delta_{x_4}$ , respectivamente. . . . .	25
Figura 4 – Deslocamento $p^T(\delta_{x_1} + \delta_{x_4}) = \varkappa$ . . . . .	25
Figura 5 – Configuração formada pelos Vértices de dois triângulos equiláteros concêntricos homotéticos. . . . .	28
Figura 6 – Gráfico que representa os valores da massa $m$ em função da variável $x$ variando no intervalo $[-1, 1]$ . Observamos uma assíntota vertical em $x = x_0 < 0$ . . . . .	30
Figura 7 – Sistema anular com uma coroa anular em branco que não possui equilíbrios relativos. . . . .	31
Figura 8 – Gráfico que representa os valores da função $\xi_3$ na variável $x$ variando no intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	39
Figura 9 – Gráfico que representa os valores da função $\xi_4$ na variável $x$ variando no intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	39
Figura 10 – Gráficos das funções $\xi_3$ e $\xi_4$ com $x$ variando no intervalo $[-1, -c]$ . . . . .	40
Figura 11 – Gráficos das funções $\xi_3$ e $\xi_4$ com $x$ variando no intervalo $[c, 1]$ . . . . .	40
Figura 12 – Gráfico da função $\xi$ com $x$ variando no intervalo $[-1, 0)$ . . . . .	45
Figura 13 – Gráfico da função $\xi$ com $x$ variando no intervalo $(0, 1]$ . . . . .	46
Figura 14 – Configuração formada pelos Vértices de dois Triângulos Equiláteros Concêntricos Rotacionados. . . . .	47
Figura 15 – Gráfico que representa os valores da massa $m$ em função da variável $x$ variando no primeiro intervalo. . . . .	50
Figura 16 – Gráfico que representa os valores da massa $m$ em função da variável $x$ variando no segundo intervalo. . . . .	50
Figura 17 – Gráfico que representa os valores da massa $m$ em função da variável $x$ variando no terceiro intervalo. . . . .	51
Figura 18 – Sistema anular com duas coroas anulares em branco que não possuem equilíbrios relativos. . . . .	51

Figura 19 – Gráfico que representa os valores da função $\xi_3$ na variável $x$ variando no intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	60
Figura 20 – Gráfico que representa os valores da função $\xi_4$ na variável $x$ variando no intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	60
Figura 21 – Gráfico que representa os valores da função $\xi_\Delta$ na variável $x$ variando no intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	61
Figura 22 – Gráficos das funções $\xi_3$ , $\xi_4$ e $\xi_\Delta$ variando no intervalo $[-1, c_1]$ . . . . .	64
Figura 23 – Gráficos das funções $\xi_3$ , $\xi_4$ e $\xi_\Delta$ variando no intervalo $[-c_2, c_2]$ . . . . .	64
Figura 24 – Gráficos das funções $\xi_3$ , $\xi_4$ e $\xi_\Delta$ variando no intervalo $[-c_1, 1]$ . . . . .	65
Figura 25 – Gráficos das funções $\xi_4$ e $\xi_\Delta$ onde mostra a separação das raízes $\nu_2$ e $\nu_4$ . . . . .	65
Figura 26 – Gráfico da função $\xi$ com $x$ variando no intervalo $[-1, 1]$ . . . . .	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Representações Irredutíveis do grupo $D_3$ . . . . .	23
Tabela 2 – Sinal da função massa na variável $t$ . . . . .	34
Tabela 3 – Comportamento das funções $\xi_3, \xi_4$ no intervalo $[-1, -c]$ . . . . .	41
Tabela 4 – Comportamento das funções $\xi_3, \xi_4$ no intervalo $[c, 1]$ . . . . .	42
Tabela 5 – Sinal da função massa na variável $x$ . . . . .	53
Tabela 6 – Comportamento das funções $\xi_3, \xi_4$ e $\xi_\Delta$ no intervalo $[-1, c_1]$ . . . . .	63
Tabela 7 – Comportamento das funções $\xi_3, \xi_4$ e $\xi_\Delta$ no intervalo $[-c_2, c_2]$ . . . . .	63
Tabela 8 – Comportamento das funções $\xi_3, \xi_4$ e $\xi_\Delta$ no intervalo $[-c_1, 1]$ . . . . .	64

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>EQUILÍBRIOS RELATIVOS E ESTABILIDADE LINEAR</b> . . . . .	<b>16</b>
2.1	EQUILÍBRIOS RELATIVOS . . . . .	16
2.2	ESTABILIDADE LINEAR . . . . .	18
<b>3</b>	<b>FATORAÇÃO DO POLINÔMIO DE ESTABILIDADE DE UM SIS- TEMA ANULAR</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1	SISTEMA ANULAR E O ESPAÇO DOS SEUS DESLOCAMENTOS PLA- NARES . . . . .	20
3.2	REPRESENTAÇÕES LINEARES DE GRUPOS FINITOS . . . . .	22
3.3	FATORAÇÃO DO POLINÔMIO DE ESTABILIDADE . . . . .	24
<b>4</b>	<b>TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS CONCÊNTRICOS HOMOTÉTICOS</b>	<b>28</b>
4.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	28
4.2	ANÁLISE GRÁFICA DO PROBLEMA . . . . .	30
4.3	ANÁLISE EXATA DO PROBLEMA . . . . .	31
4.4	RESULTADOS SOBRE A ESTABILIDADE DO PROBLEMA . . . . .	34
<b>4.4.1</b>	<b>Bloco <math>V^\tau \oplus V^\alpha</math></b> . . . . .	<b>34</b>
<b>4.4.2</b>	<b>Bloco <math>V^\sigma</math></b> . . . . .	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS CONCÊNTRICOS ROTACIONA- DOS</b> . . . . .	<b>47</b>
5.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	47
5.2	ANÁLISE GRÁFICA DO PROBLEMA . . . . .	48
5.3	ANÁLISE EXATA DO PROBLEMA . . . . .	52
5.4	RESULTADOS SOBRE A ESTABILIDADE LINEAR DO PROBLEMA . . . . .	56
<b>5.4.1</b>	<b>Bloco <math>V^\tau \oplus V^\alpha</math></b> . . . . .	<b>56</b>
<b>5.4.2</b>	<b>Bloco <math>V^\sigma</math></b> . . . . .	<b>66</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>72</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Um equilíbrio relativo é uma solução plana do problema de  $N$  corpos onde cada corpo está em rotação em torno do centro de massa com a mesma velocidade angular  $\omega$ . O estudo de equilíbrios relativos começou com o trabalho de Euler (EULER, 1767) e Lagrange (LAGRANGE, 1772) no século XVIII. Euler encontrou os equilíbrios relativos colineares no problema de três corpos e Lagrange descobriu os equilíbrios relativos em forma de triângulo equilátero também no problema de três corpos. Após o trabalho de Euler e Lagrange, muitos exemplos especiais de equilíbrios relativos foram encontrados. Lehmann-Filhes generalizou o caso colinear de Euler para um  $N$  arbitrário em (LEHMANN-FILHÉS, 1891) e Moulton fez uma análise mais completa em (MOULTON, 1910). Os equilíbrios relativos formados por um polígono regular de  $n$  lados sem e com uma massa central são estudados em (HOPPE, 1879), entretanto, este último caso foi estudado anteriormente por Maxwell em seu trabalho sobre os anéis de Saturno (MAXWELL, 1859).

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise da estabilidade dos equilíbrios relativos formados por dois triângulos equiláteros concêntricos. O primeiro passo desta análise é estudar os autovalores da linearização de uma equação diferencial, ou seja, estudar a questão da estabilidade linear. Moeckel conjecturou que um equilíbrio relativo pode ser linearmente estável apenas se contiver uma massa significativamente maior que as outras (MOECKEL, 1994). (MAXWELL, 1859) contém uma análise da estabilidade linear do polígono regular de  $n$  lados com uma massa central. Maxwell concluiu que esse equilíbrio relativo é linearmente estável desde que a massa central seja suficientemente grande. Moeckel fornece uma análise completa do problema de estabilidade em geral, fazendo uso de propriedades especiais da matriz da linearização para obter uma fatoração do polinômio característico (MOECKEL, 1995). Como uma correção ao estudo de Maxwell, Moeckel revela que o equilíbrio relativo formado por um polígono regular de  $n$  lados com uma massa central é linearmente estável para uma massa central suficientemente grande somente quando  $n \geq 7$ . Em (LEANDRO, 2019) se discute propriedades básicas e estuda-se a estabilidade linear da família dos losangos, assumindo que as forças de interação dependem das distâncias mútuas elevadas a um expoente real arbitrário. Leandro utiliza a técnica descrita por ele mesmo em (LEANDRO, 2017), onde se deduz a fatoração do polinômio de estabilidade do losango como uma aplicação da teoria da representação de grupos (SERRE, 1977). Esta fatoração é usada para obter fórmulas explícitas para os auto-

valores do losango e condições de estabilidade linear. Iremos utilizar essa mesma técnica para estudar a estabilidade linear de duas famílias de equilíbrios relativos: dois triângulos equiláteros concêntricos homotéticos e dois triângulos equiláteros concêntricos onde um é a rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  do outro. É importante comentarmos que o estudo da estabilidade linear apenas no plano se deve a equilíbrios relativos serem estáveis na direção perpendicular ao plano que os contêm, para uma leitura mais aprofundada ver (LEANDRO, 2019).

No capítulo 2 fazemos uma breve apresentação do conceito de equilíbrio relativo do problema planar de  $N$  corpos e suas principais propriedades, falamos sobre estabilidade linear e exibimos a expressão do seu polinômio de estabilidade comentando sobre as principais condições para o estudo da estabilidade linear.

O objetivo do capítulo 3 é apresentar a técnica vista em (LEANDRO, 2017) adequada aos casos que serão estudados nesse trabalho. Sabemos que essa técnica é uma aplicação da teoria de representação de grupos, com isso apresentaremos conceitos e resultados importantes vistos em (STERNBERG, 1995) e (SERRE, 1977). O principal destes conceitos, que será base de toda a técnica vista neste capítulo, é o de representação linear de um grupo finito em um espaço vetorial de dimensão finita. Iremos considerar o grupo diedral  $D_3$  e um subconjunto finito  $\chi \subset \mathbb{R}^2$   $D_3$ -simétrico que chamaremos de sistema anular, definiremos uma representação canônica  $\rho_E$  do grupo  $D_3$  em um espaço vetorial específico, que é chamado de espaço dos deslocamentos planares de  $\chi$  e é denotado por  $\Gamma(E)$ . Utilizando resultados da teoria de representação de grupos e resultados demonstrados em (LEANDRO, 2017), se conclui que existe uma decomposição do espaço  $\Gamma(E)$  em subespaços com características importantes que são chamados de subespaços isotípicos e usando o isomorfismo natural entre os espaços  $\mathbb{R}^{12}$  e  $\Gamma(E)$  e um produto interno dependente das massas, chamado de  $M$ -produto interno, conseguimos uma decomposição de  $\mathbb{R}^{12}$  em subespaços que vão ser invariantes por um operador específico do tipo  $A + \kappa J$ , onde  $A$  simétrico em relação ao  $M$ -produto interno,  $J$  antissimétrico em relação ao  $M$ -produto interno e  $\kappa$  é uma constante. Esse operador aparece na expressão do polinômio de estabilidade. Exibimos uma base  $M$ -ortogonal para cada subespaço isotípico e assim podemos bloco diagonalizar o operador  $A + \kappa J$ . Com essa bloco diagonalização conseguimos uma fatoração para o polinômio de estabilidade de cada caso estudado nesse trabalho, o que irá facilitar a análise das suas raízes posteriormente.

No capítulo 4 apresentamos o estudo do primeiro caso: equilíbrios relativos formados por dois triângulos equiláteros concêntricos homotéticos. Mais especificamente, são equilíbrios relativos onde as posições dos três primeiros corpos estão fixas nos vértices de um triângulo

equilátero inscrito em uma circunferência de raio 1 e que possuem massas iguais a 1. As posições dos outros três corpos estão fixas nos vértices de um outro triângulo equilátero homotético ao primeiro, com massas iguais a  $m$ , inscrito em uma circunferência de raio  $r$  de mesmo centro. Substituindo a respectiva configuração na equação de equilíbrios relativos, obtemos uma função que fornece os valores da massa  $m$  que depende da variável  $r$ . Para estudar o comportamento dessa função, primeiro fazemos uma mudança de variável utilizando a transformação de Möbius dada por

$$r = \frac{1+x}{1-x},$$

onde leva o intervalo  $[-1, 1]$  no semi-eixo positivo. Com essa mudança de variável, podemos ter uma visão gráfica melhor do comportamento da massa em função do raio do segundo triângulo, ajudando no estudo das suas raízes e sinais. A partir daqui, todos os resultados obtidos vão ser dados considerando-se a nova variável  $x$ . A técnica que utilizamos para fazer o estudo das raízes desta função é a técnica do matemático Alexandre Vincent que fornece o número exato de raízes positivas e negativas e efetua a sua separação. O teorema de Vincent, resultado da década de 1830, afirma que o número de variações de sinais dos coeficientes de um polinômio de uma variável com coeficientes reais sem raízes múltiplas, pode ser reduzido a zero ou a um através de uma sucessão de aplicações de transformações de Möbius simples, (USPENSKY, 1948) (VINCENT, 1834). É importante comentarmos que o teorema de Vincent fornece um eficiente algoritmo de separação de raízes que supera o algoritmo baseado no método de Sturm (AKRITAS, 1989). Na expressão da função a ser estudada aparece o radical  $\sqrt{x^2 + 3}$  e, a fim de eliminá-lo da expressão, fazemos mais uma mudança de variável utilizando a função

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{z^2 - 1}{z} \right),$$

que leva de maneira bijetiva o intervalo  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$  em  $(-1, 1)$ , e assim aplicamos a técnica de Vincent no polinômio que está no numerador desta composição. Após esses estudos, conseguimos concluir que há dois subintervalos em  $[-1, 1]$  em que o valor da massa  $m$  é positivo e um subintervalo em que a massa  $m$  é negativa. Ou seja, há dois subintervalos em  $[-1, 1]$  em que as configurações correspondentes vão ser equilíbrios relativos. Munido destas informações preliminares a respeito dos equilíbrios relativos, a última seção do capítulo 4 tem o objetivo de mostrar a análise da estabilidade linear desses equilíbrios relativos. O estudo está dividido em duas partes. Primeiro, estudamos as raízes do polinômio de estabilidade do bloco referente à

soma direta dos subespaços isotípicos denotada por  $V^\tau \oplus V^\alpha$ . O segundo bloco a ser analisado é o referente ao segundo subespaço isotípico, denotado por  $V^\sigma$ . O polinômio de estabilidade é um polinômio par, pois é o polinômio característico de uma matriz hamiltoniana (MEYER; OFFIN, 2017). Um equilíbrio relativo é linearmente estável se, e somente se,  $\lambda^2$  é zero ou real e negativo, para todo  $\lambda$  solução do seu polinômio de estabilidade. A ideia que utilizamos consiste em classificar os valores de  $\lambda^2$  em real e negativo e não-real. No primeiro bloco, referente ao subespaço  $V^\tau \oplus V^\alpha$ , utilizamos o resultado visto em (LEANDRO, 2019) que fornece uma condição suficiente e necessária para que os  $\lambda^2$  sejam reais e negativos. Encontramos funções que dependem das variáveis  $r$  e  $m$  que, utilizando a equação que fornece os valores da massa  $m$  em função de  $r$ , podemos escrevê-las de forma tal que só dependam da variável  $r$ . O objetivo é estudar os sinais dessas funções e para isso seguimos o mesmo método citado anteriormente: primeiro fazemos a mudança para a variável  $x$ , depois, para eliminar o radical  $\sqrt{x^2 + 3}$ , fazemos a mudança para a variável  $z$  e apliquemos a técnica de Vincent. Os resultados que seguem também serão dados considerando a variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ . Conseguimos concluir que existem dois subintervalos em  $[-1, 1]$  em que os  $\lambda^2$  correspondentes são não-reais e um subintervalo em que nada conseguimos concluir sobre os  $\lambda^2$  correspondentes. Para estudar o polinômio de estabilidade referente ao segundo bloco, utilizamos uma condição necessária para que todos os  $\lambda^2$  sejam reais e negativos. Essa condição também foi utilizada em (ROBERTS, 1999) no estudo da instabilidade espectral dos equilíbrios relativos no problema planar de  $N$  corpos considerando as massas iguais. Basicamente, utilizamos a conhecida relações de Girard para soma das raízes de um polinômio. Obtemos uma determinada função e seguimos o método anterior para estudar seus sinais. Essa análise elimina a possibilidade de  $\lambda^2$  ser real e negativa, para todo  $\lambda$  solução do polinômio de estabilidade, considerando todos equilíbrios relativos. Ou seja, concluimos assim a instabilidade linear de todos os equilíbrios relativos desse problema.

O último capítulo apresenta o estudo da estabilidade linear da segunda família de equilíbrios relativos. São equilíbrios relativos onde as posições dos três primeiros corpos estão fixos nos vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 1 e que possuem massas iguais a 1. As posições dos outros três corpos, com massas iguais a  $m$ , estão fixas nos vértices de um outro triângulo equilátero, concêntrico ao primeiro, inscrito em uma circunferência de raio  $r$  e que é a rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  do outro triângulo. O estudo desse problema segue os mesmos passos do estudo feito no caso anterior. Todos os resultados são consequências de estudos de sinais de determinadas funções e seguem o método descrito no parágrafo anterior,

isto é, são feitas mudanças de variáveis adequadas e a utilização da técnica de Vincent. Todos os resultados também são dados em termos da variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ . Conseguimos concluir a instabilidade linear dos equilíbrios relativos, a menos de dois subintervalos pequenos de  $[-1, 1]$ , onde nada conseguimos concluir a respeito da estabilidade linear dos seus equilíbrios relativos correspondentes.

É importante comentarmos que todos os cálculos deste trabalho foram feitos com a ajuda dos softwares Maple e SageMath e que algumas expressões foram ocultadas por serem expressões complicadas, mais especificamente, expressões de polinômios de graus muito elevados e que possuem coeficientes com muitos algarismos. O software SageMath foi de extrema importância para aplicarmos a técnica de Vincent. Utilizamos um programa <sup>1</sup> no SageMath que, dado qualquer polinômio de uma variável com coeficientes reais, informa a quantidade de coeficientes positivos e negativos e a quantidade das variações de sinais dos seus coeficientes, assim como também informa os monômios em que acontecem essas variações.

---

<sup>1</sup> Crédito ao Professor Doutor Marcelo Pedro, UFRPE. A autora deixa os sinceros agradecimentos por todo auxílio e por disponibilizar o programa.

## 2 EQUILÍBRIOS RELATIVOS E ESTABILIDADE LINEAR

Neste capítulo apresentaremos o conceito de equilíbrios relativos do problema planar de  $N$  corpos e suas principais propriedades, deduziremos a expressão para o seu polinômio característico e exibiremos as condições essenciais para o estudo da estabilidade linear de um equilíbrio relativo. Para uma leitura mais aprofundada sobre os assuntos indico as principais referências (MEYER; OFFIN, 2017), (MOECKEL, 1995) e (ROBERTS, 1999).

### 2.1 EQUILÍBRIOS RELATIVOS

Consideremos  $N$  corpos com massas positivas  $m_1, \dots, m_N$  ocupando posições  $q_1, \dots, q_N \in \mathbb{R}^2$ . Os corpos estão sujeitos à atração gravitacional uns dos outros e seus movimentos são governados pelas equações diferenciais de segunda ordem:

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^3} (q_j - q_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Temos que  $\sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^3} (q_j - q_i)$  é o gradiente da **função potencial**

$$U(q) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|},$$

onde  $q = (q_1, \dots, q_N)$  e  $q_i \neq q_j$  para todos  $i \neq j$ . Considere  $p_i = m_i \dot{q}_i$  o momento do corpo de posição  $q_i$  e seja  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2N}$ . A equação (2.1) pode ser escrita como um sistema Hamiltoniano dado por

$$\begin{aligned} \dot{q} &= M^{-1} p = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= \nabla U(q) = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

onde  $M$  é a matriz diagonal  $\text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N)$  e a função Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \sum_{i=1}^N \frac{\|p_i\|^2}{2m_i} - U(q) \\ &= \frac{1}{2} p^T M^{-1} p - U(q). \end{aligned}$$

Sendo

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

utilizamos a matriz  $e^{\omega Kt}$  para obter novas coordenadas dadas por  $\mathbf{x}_i = e^{\omega Kt} q_i$  e  $\mathbf{y}_i = e^{\omega Kt} p_i$  que giram uniformemente em torno da origem com período  $2\pi/\omega$ . Nestas novas coordenadas o sistema Hamiltoniano do problema planar de  $N$  corpos torna-se

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \omega J \mathbf{x} + M^{-1} \mathbf{y} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{y}} &= \nabla U(\mathbf{x}) + \omega J \mathbf{y} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde  $J$  é a matriz bloco principal  $2N \times 2N$  com  $K$  em sua diagonal principal e  $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é a função Hamiltoniana

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T M^{-1} \mathbf{y} - U(\mathbf{x}) - \omega \mathbf{x}^T J \mathbf{y}.$$

Usando o fato de  $JM = MJ$  e  $J^2 = -I$ , temos que um equilíbrio  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  do sistema (2.2) satisfaz  $\mathbf{y} = -\omega M J \mathbf{x}$  e

$$\nabla U(\mathbf{x}) + \omega^2 M \mathbf{x} = 0.\tag{2.3}$$

Um **equilíbrio relativo** é uma solução  $\boldsymbol{\varkappa} = (x_1, \dots, x_N)$  da equação (2.3) para algum valor constante  $\omega$ . Cada componente  $x_i$  do equilíbrio relativo  $\boldsymbol{\varkappa}$  deve satisfazer a equação de **configurações centrais**

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_j m_i}{\|x_i - x_j\|^3} (x_j - x_i) = -\omega^2 m_i x_i, \quad i = 1, \dots, N.\tag{2.4}$$

O centro de massa de qualquer equilíbrio relativo é o seu centro de rotação, que no nosso caso é a origem. Isso vem do fato de que se somarmos todas as componentes da equação de equilíbrio relativo obtemos

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = 0.$$

Os equilíbrios relativos são invariantes por rotação, translação e dilatação, isto é, as configurações  $\mathbf{k}\boldsymbol{\varkappa}$  e  $R\boldsymbol{\varkappa}$ , com  $\mathbf{k}$  qualquer constante e  $R$  uma transformação de rotação ou dilatação, também são soluções da equação (2.3). Dois equilíbrios relativos são considerados equivalentes se um deles pode ser obtido do outro por meio de uma rotação, translação ou dilatação no plano. No estudo de equilíbrios relativos, basta considerar classes de equivalência módulo essas transformações.

## 2.2 ESTABILIDADE LINEAR

Um equilíbrio relativo  $\varkappa$  é **linearmente estável** se a origem é uma solução estável da linearização do sistema (2.2) em  $\varkappa$ . Fazendo a linearização desse sistema Hamiltoniano em  $\varkappa$  obtemos a matriz  $4N \times 4N$  dada por

$$L(\varkappa) = \begin{bmatrix} -\omega J & M^{-1} \\ D\nabla U(\varkappa) & -\omega J \end{bmatrix}.$$

O **polinômio de estabilidade** de um equilíbrio relativo  $\varkappa$  é, por definição, o polinômio característico da matriz  $L(\varkappa)$ , ou seja,

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - L(\varkappa)),$$

onde  $\mathbf{I}$  representa a identidade  $4N \times 4N$ . Fazendo uma simples manipulação, podemos escrever o determinante acima da seguinte forma

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} O_{2N} & -M^{-1} \\ -D\nabla U(\varkappa) + M(\lambda I + \omega J)^2 & O_{2N} \end{bmatrix},$$

e assim

$$p(\lambda) = \det(M^{-1}D\nabla U(\varkappa) + (\omega^2 - \lambda^2)I + 2\lambda\omega J), \quad (2.5)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade  $2N \times 2N$ . Chamaremos as raízes de (2.5) de **autovalores** de  $\varkappa$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $\varkappa$  seja linearmente estável é que todos seus autovalores sejam zero ou imaginários puros. O polinômio  $p(\lambda)$  é um polinômio de grau  $4N$ , par, pois a matriz  $L(\varkappa)$  é Hamiltoniana, assim, podemos concluir que  $\varkappa$  é equilíbrio relativo linearmente estável se, e somente se,  $\lambda^2$  é zero ou real e negativo, para todo  $\lambda$  raiz do polinômio  $p(\lambda)$ . A partir de agora, quando o equilíbrio relativo for linearmente estável, diremos apenas que  $\varkappa$  é estável. Se  $\varkappa$  não for estável, diremos que  $\varkappa$  é instável.

Os vetores  $(\varkappa, 0)$ ,  $(0, M\varkappa)$ ,  $(J\varkappa, 0)$  e  $(0, JM\varkappa)$  são autovetores da matriz  $L(\varkappa)$  com respectivos autovalores  $0, 0, \pm\omega i$ . Sendo  $u = (1, 0, 1, 0, \dots)$  e  $v = (0, 1, 0, 1, \dots)$ , os vetores  $(u, 0)$ ,  $(0, Mu)$ ,  $(v, 0)$  e  $(0, Mv)$  também são autovetores de  $L(\varkappa)$  com autovalores  $\pm\omega i, \pm\omega i$ , respectivamente. Esses autovalores surgem das simetrias clássicas do problema de  $N$  corpos, da homogeneidade da função potencial correspondente e da invariância da função potencial com

respeito a translações e rotações. Eles são compartilhados por todos os equilíbrios relativos e, juntamente com os seus autovetores associados, são desconsiderados na análise de estabilidade. Em (MOECKEL, 1995) se encontra uma explicação mais detalhada sobre esse fato.

### 3 FATORAÇÃO DO POLINÔMIO DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA ANULAR

Apresentaremos a noção de sistema anular formado por um subconjunto  $D_3$ -simétrico de  $\mathbb{R}^2$  e seu espaço dos deslocamentos planares que, junto com alguns conceitos e resultados de teoria de representação de grupos finitos, fornecem um método de bloco-diagonalização de matrizes da forma  $M^{-1}D\nabla U(\varkappa) + \kappa J$ . As principais referências para um estudo mais aprofundado sobre os conceitos e resultados citados nesse capítulo são (LEANDRO, 2017) e (SERRE, 1977).

#### 3.1 SISTEMA ANULAR E O ESPAÇO DOS SEUS DESLOCAMENTOS PLANARES

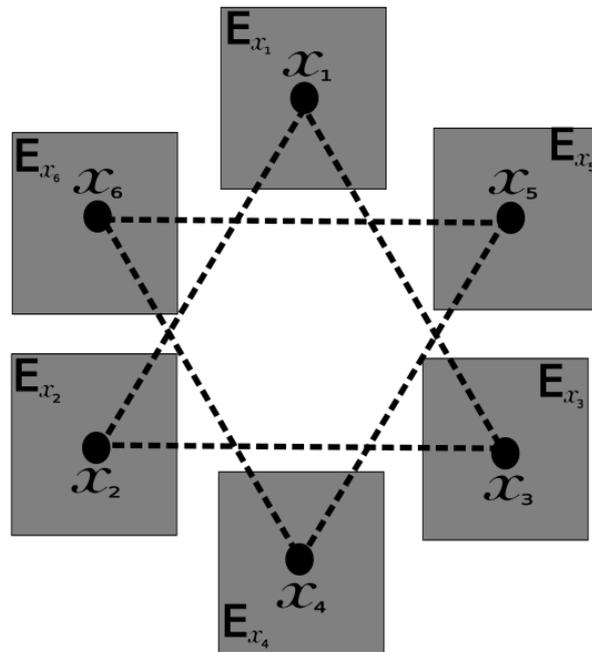
Considere o grupo diedral  $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$ , onde  $r$  é rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  em torno da origem do  $\mathbb{R}^2$  e  $s$  a reflexão em torno do eixo das ordenadas, e  $\chi = \{x_1, \dots, x_6\} \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto  $D_3$ -simétrico. Um conjunto finito  $D_3$ -simétrico consiste de  $\mathbf{a} = 0$  ou  $\mathbf{a} = 1$  ponto na posição  $O$ ,  $\mathbf{b}$  triângulos regulares e  $\mathbf{c}$  hexágonos, tendo  $O$  como centro comum. Neste caso dizemos que  $\chi$  é um **sistema anular** do tipo  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ . De agora em diante iremos considerar  $\chi$  um sistema anular do tipo  $(0, 2, 0)$ . Os **deslocamentos** de  $\chi$  são descritos por meio de uma escolha de uma família de espaços vetoriais reais,  $\{E_{x_i} : i = 1, \dots, 6\}$ , onde cada  $E_{x_i} = \mathbb{T}_{x_i}\mathbb{R}^2$  é o plano tangente à  $x_i$ , e então a união disjunta  $E = \cup_{i=1}^6 E_{x_i} = \mathbb{T}\mathbb{R}^2|_{\chi}$  é um fibrado vetorial sobre  $\chi$ , para uma visão geométrica ver figura 1. O conjunto formado pelas funções do tipo  $\delta : \chi \rightarrow E$  tal que  $\delta(x_i) \in E_{x_i}, \forall i = 1, \dots, 6$ , é um espaço vetorial,  $\Gamma(E)$ , chamado de **espaço dos deslocamentos planares** de  $\chi$ . Os vetores do espaço  $\Gamma(E)$  são chamados de **deslocamentos** de  $\chi$  em  $E$ . A figura 2 mostra a visão geométrica de um deslocamento  $\delta$  definido por  $\delta(x_1) = \mathbf{v}$ ,  $\delta(x_5) = \mathbf{w}$  e  $\delta(x_j) = \vec{0} \forall j \neq 1, 5$ , com  $\mathbf{v} \in E_{x_1}$  e  $\mathbf{w} \in E_{x_5}$ . Existe um isomorfismo natural entre os espaços  $\Gamma(E)$  e  $\mathbb{R}^{12}$  definido por  $\delta \mapsto (\delta(x_1), \dots, \delta(x_6))$ , logo um elemento em  $\mathbb{R}^{12}$  pode ser visto como um deslocamento quando assim for conveniente, assim como um deslocamento pode ser visto como um elemento do  $\mathbb{R}^{12}$ .

Agora, considere a configuração

$$\varkappa = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^{12}$$

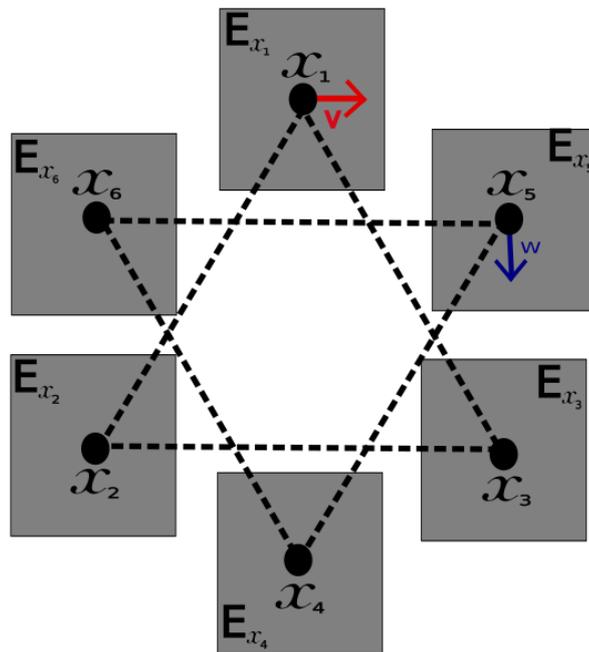
e  $m_i > 0$  a massa do corpo de posição  $x_i$ , para cada  $i = 1, \dots, 6$ . Dizemos que  $\varkappa$  é uma  **$D_3$ -configuração simétrica** se o conjunto  $\chi = \{x_1, \dots, x_6\} \subset \mathbb{R}^2$  é  $D_3$ -simétrico. Como o

Figura 1 – Sistema anular do tipo  $(0, 2, 0)$  e seus respectivos planos tangentes.



Fonte: Autora.

Figura 2 – Visão geométrica do deslocamento  $\delta$ .



Fonte: Autora.

grupo  $D_3$  age permutando os elementos de  $\chi$ , então faz sentido escrever  $g \cdot x_j = x_{g(j)}$ , para todo  $g \in D_3$ . Por todo restante deste texto iremos supor

$$m_{g(i)} = m_i, \forall g \in D_3, i = 1, \dots, 6.$$

Podemos definir um  $M$ -produto interno em  $\Gamma(E)$  dado por

$$\langle \delta, \varepsilon \rangle_M = m_1 \delta_1 \cdot \varepsilon_1 + m_1 \delta_2 \cdot \varepsilon_2 + m_1 \delta_3 \cdot \varepsilon_3 + m_2 \delta_4 \cdot \varepsilon_4 + m_2 \delta_5 \cdot \varepsilon_5 + m_2 \delta_6 \cdot \varepsilon_6,$$

onde  $\cdot$  represente o produto interno canônico do  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.2 REPRESENTAÇÕES LINEARES DE GRUPOS FINITOS

Uma **representação linear** de um grupo finito  $G$  em um espaço vetorial  $V$  é um homomorfismo  $\rho$  de  $G$  no grupo dos isomorfismos de  $V$  em  $V$ , denotado por  $Aut(V)$ . Suponha que  $\dim V = n$ . Dizemos que  $n$  é o **grau** da representação  $\rho$ . Uma **subrepresentação** da representação  $\rho$  é uma representação de  $G$  em  $V$  dada pela restrição de  $\rho$  por um subespaço  $W$  de  $V$  que é  $\rho$ -invariante, ou seja,  $\rho(g)(W) \subset W$  para todo  $g \in G$ . A representação é dita **irredutível** se, e somente se, as suas únicas subrepresentações são os subespaços triviais,  $\{0\}$  e  $V$ . A cardinalidade de um grupo finito  $G$  é denotada por  $|G|$ . Suponha que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão  $|G|$  com base  $\{e_g\}_{g \in G}$ . A representação  $\rho_G^{Reg} : G \rightarrow Aut(V)$  tal que, para cada  $g \in G$ , temos

$$\rho_G^{Reg}(g)(e_h) = e_{gh}, \forall h \in G,$$

é chamada de **representação regular de  $G$** . Considere duas representações  $\rho_1 : G \rightarrow Aut(V)$  e  $\rho_2 : G \rightarrow Aut(W)$  do grupo  $G$ . Dizemos que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são **isomorfos (ou equivalentes)** se existir um isomorfismo  $\phi : V \rightarrow W$  tal que para todo  $g \in G$ , vale

$$\phi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \phi$$

e denotamos por  $\rho_1 \simeq \rho_2$ . Toda representação  $\rho$  de um grupo finito  $G$  pode ser escrita de maneira única como soma direta de subrepresentações equivalentes às representações irredutíveis do grupo  $G$ .

Sejam  $\rho_1, \dots, \rho_r$  as representações irredutíveis de um grupo  $G$ , a menos de isomorfismos, e seja  $\rho$  uma representação de  $G$  em  $V$ . Agora considere  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ , uma decomposição de  $V$  em subrepresentações irredutíveis. O espaço  $V_{\rho_k}$  definido pela soma direta dos subespaços  $W_j$  tais que  $\rho$  restrito a cada  $W_j$  é equivalente a representação irredutível  $\rho_k$  é chamado de **componente isotípica** de  $\rho$  e a decomposição

$$V = V_{\rho_1} \oplus \dots \oplus V_{\rho_r}$$

é dita **decomposição isotípica** de  $V$ . Para cada representação irredutível  $\rho_1, \dots, \rho_r$  de  $G$ , a teoria de representação de grupos finitos fornece uma família de operadores projeções cujas as suas imagens decompõem cada componente isotípica  $V_{\rho_k}$  em subespaços especiais. Estas projeções desempenham um papel fundamental neste trabalho.

No caso do grupo  $D_3$  a tabela 1 fornece a lista completa das representações matriciais das classes de isomorfismos de suas representações irredutíveis

Tabela 1 – Representações Irredutíveis do grupo  $D_3$

	$r^j$	$r^j s$
$\tau$	1	1
$\alpha$	1	-1
$\sigma$	$\begin{bmatrix} \cos(j\frac{2\pi}{3}) & -\text{sen}(j\frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}(j\frac{2\pi}{3}) & \cos(j\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos(j\frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(j\frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen}(j\frac{2\pi}{3}) & -\cos(j\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$

. A representação  $\tau$  é chamada de representação trivial de  $D_3$  e tem grau um, a  $\alpha$  é chamada de representação alternada e também tem grau um, já a representação  $\sigma$  tem grau dois e é conhecida por representação padrão do  $D_3$ . As projeções são definidas da seguinte forma

$$p^\tau = \frac{1}{6} \left( \sum_{j=1}^3 \rho(r^j) \right) (\rho(e) + \rho(s)),$$

$$p^\alpha = \frac{1}{6} \left( \sum_{j=1}^3 \rho(r^j) \right) (\rho(e) - \rho(s)),$$

$$p_{11}^\sigma = \frac{1}{3} \left( \sum_{j=1}^3 \cos(j\frac{2\pi}{3}) \rho(r^j) \right) (\rho(e) + \rho(s)),$$

$$p_{22}^\sigma = \frac{1}{3} \left( \sum_{j=1}^3 \cos(j\frac{2\pi}{3}) \rho(r^j) \right) (\rho(e) - \rho(s)),$$

então obtemos três componentes isotípicas  $V^\tau$ ,  $V^\alpha$  e  $V^\sigma = V_1^\sigma \oplus V_2^\sigma$ , tais que  $\text{Img}(p^\tau) = V^\tau$ ,  $\text{Img}(p^\alpha) = V^\alpha$  e  $\text{Img}(p_{ii}^\sigma) = V_i^\sigma$ , para  $i = 1, 2$ , onde  $\text{Img}$  denota a imagem da projeção.

A **representação canônica** de  $D_3$  no espalo de deslocamentos  $\Gamma(E)$  é  $\rho_E : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(E))$ , definida por

$$[\rho_E(g)(\delta)](x) = \sigma(g)\delta(g^{-1}x), \forall g \in D_3, \forall \delta \in \Gamma(E), \forall x \in \chi,$$

onde  $\sigma$  é a representação padrão do  $D_3$  definida na tabela 1. Um resultado importante em (LEANDRO, 2017) diz que  $\rho_E \simeq 2\rho_{D_3}^{\text{Reg}}$  para sistemas anulares formados por dois triângulos. E um resultado da teoria de representação de grupo finitos diz que  $\rho_{D_3}^{\text{Reg}} \simeq \tau \oplus \alpha \oplus 2\sigma$ . Com isso,

sendo  $V^\tau$ ,  $V^\alpha$  e  $V^\sigma$  as componentes isotópicas da representação  $\rho_E$ , pode-se concluir que

$$\dim(V^\tau) = \dim(V^\alpha) = 2,$$

$$\dim(V_1^\sigma) = \dim(V_2^\sigma) = 4$$

e assim temos que

$$\Gamma(E) = V^\tau \oplus V^\alpha \oplus V^\sigma.$$

### 3.3 FATORAÇÃO DO POLINÔMIO DE ESTABILIDADE

Suponha que  $\chi = \{x_1, \dots, x_6\} \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto  $D_3$ -simétrico e um sistema anular do tipo  $(0, 2, 0)$ . A fim de estudar a estabilidade linear do equilíbrio relativo do tipo  $\varkappa = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^{12}$ , onde  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  e  $m_4 = m_5 = m_6 = m > 0$ , nosso objetivo inicial é bloco-diagonalizar a matriz do operador  $A + \kappa J$ , sendo  $A = M^{-1} D \nabla U(\varkappa)$  e  $\kappa = 2\lambda\omega$ , através de uma decomposição dos subespaços isotópicos que seja invariante por  $A$  e  $J$ , e assim fazer uma análise das raízes do polinômio de estabilidade (2.5).

O espaço dos deslocamentos planares de  $\chi$  possui uma decomposição em componentes isotópicas dada por

$$\Gamma(E) = V^\tau \oplus V^\alpha \oplus V^\sigma, \text{ onde } V^\sigma = V_1^\sigma \oplus V_2^\sigma.$$

O subespaço  $V^\tau \oplus V^\alpha$  é invariante pelos operadores  $A$  e  $J$ , e  $JV^\tau = V^\alpha$ . Nosso objetivo inicial é encontrar uma base  $M$ -ortogonal para  $V^\tau \oplus V^\alpha$ , isto é, uma base ortogonal em relação ao  $M$ -produto interno em  $\Gamma(E)$  definido na secção 3.1.

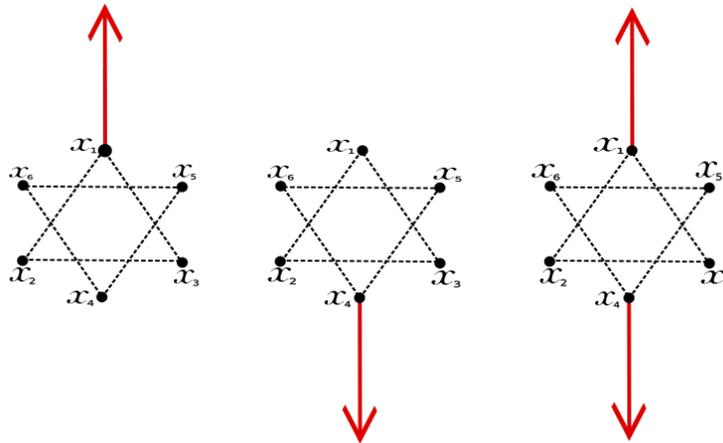
Em primeiro lugar vamos obter uma base para  $V^\tau$ , para isto considere  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  as duas órbitas do sistema anular  $\chi$  e  $O = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i$  seu baricentro. Aplicando a projeção  $p^\tau$  no deslocamento  $\delta_{x_1} + \delta_{x_4}$ , onde  $x_1 \in \mathcal{O}_1$  e  $x_4 \in \mathcal{O}_2$ , e

$$\delta_{x_1}(x_j) = \begin{cases} 3(x_j - O), & \text{se } j = 1 \\ 0, & \text{se } j \neq 1 \end{cases},$$

$$\delta_{x_4}(x_j) = \begin{cases} 3(x_j - O), & \text{se } j = 4 \\ 0, & \text{se } j \neq 4 \end{cases},$$

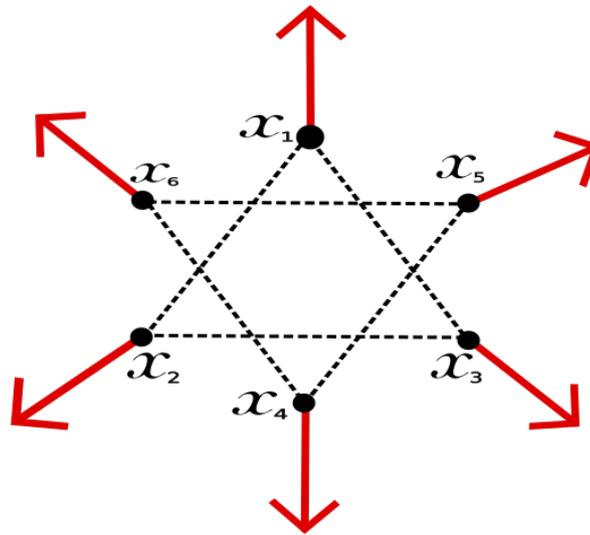
temos que  $p^\tau(\delta_{x_1} + \delta_{x_4}) = \varkappa$ , visto como um deslocamento.

Figura 3 – Deslocamentos  $\delta_{x_1}$ ,  $\delta_{x_4}$  e  $\delta_{x_1} + \delta_{x_4}$ , respectivamente.



Fonte: Autora.

Figura 4 – Deslocamento  $p^\tau(\delta_{x_1} + \delta_{x_4}) = \varkappa$ .



Fonte: Autora.

Note que  $J^T M = M J^T = -M J$  e  $A^T M = M A^T$ . Isso mostra que  $J$  é antissimétrico e  $A$  é simétrico com respeito ao  $M$ -produto interno. Por isso estamos interessados em encontrar uma base  $M$ -ortogonal. Iremos definir

$$\varkappa_1 = p^\tau(\delta_{x_1}) + c p^\tau(\delta_{x_4}),$$

com  $c = -\frac{1}{m r^2}$  tal que  $\langle \varkappa, \varkappa_1 \rangle_M = 0$ .

Pela homogeneidade da função potencial  $U$ , pode-se concluir que  $\varkappa$  e  $J\varkappa$  são autovetores do operador  $A$ . Como  $V^\tau$  tem dimensão 2 e  $\langle \varkappa, \varkappa_1 \rangle_M = 0$ , temos que  $\varkappa_1$  também é um autovetor de  $A$ , logo  $\{\varkappa, \varkappa_1\}$  é uma base  $M$ -ortogonal de autovetores de  $A$ . Conseqüentemente, o conjunto  $\{J\varkappa, J\varkappa_1\}$  forma uma base  $M$ -ortogonal de autovetores de  $A$  para o subespaço

$V^\alpha$ , pois  $J$  é antissimétrico com respeito ao  $M$ -produto interno. Portanto, já podemos concluir que a matriz do operador  $A + \kappa J$  em relação à base  $\{J\mathcal{X}, \mathcal{X}, J\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1\}$  do subespaço  $V^\tau \oplus V^\alpha$  tem a forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \kappa \\ 0 & 0 & -\kappa & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $\lambda_4$  são os respectivos autovalores dos autovetores  $J\mathcal{X}, \mathcal{X}, J\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1$ . É sabido que  $\lambda_1 = -\omega^2$  e  $\lambda_2 = 2\omega^2$ . Por outro lado, os valores de  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  devem ser encontrados aplicando o operador  $A$  a seus respectivos autovetores.

Agora precisamos encontrar uma base para o subespaço  $V^\sigma = V_1^\sigma \oplus V_2^\sigma$  sabendo que  $JV_1^\sigma = V_2^\sigma$  e que  $V_j^\sigma$  é  $A$ -invariante, para todo  $j = 1, 2$ . Consideremos inicialmente os deslocamentos correspondentes às translações horizontais e verticais de  $\chi$ ,  $\Delta_h$  e  $\Delta_v$ , onde  $\Delta_h \in V_1^\sigma$ ,  $\Delta_v \in V_2^\sigma$  e  $\Delta_v = J\Delta_h$ . Vamos denotar por  $\delta_h^i$  e  $\delta_v^i$ , com  $i = 1, 2$ , os deslocamentos correspondentes as translações horizontais e verticais de cada órbita definidos da seguinte forma

$$\delta_h^i(x_j) = \begin{cases} e_1, & \text{se } x_j \in \mathcal{O}_i \\ 0, & \text{se } x_j \notin \mathcal{O}_i \end{cases}$$

e

$$\delta_v^i(x_j) = \begin{cases} e_2, & \text{se } x_j \in \mathcal{O}_i \\ 0, & \text{se } x_j \notin \mathcal{O}_i \end{cases},$$

onde  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ .

Definimos

$$\Delta_h^2 = \delta_h^1 + c\delta_h^2,$$

com  $c$  escolhido de tal forma que  $\langle \Delta_h, \Delta_h^2 \rangle_M = 0$ . Temos que  $\Delta_h^2 \in V_1^\sigma$ , então  $\Delta_v^2 = J\Delta_h^2 \in V_2^\sigma$ . Os outros quatro elementos que vão compor essa base são definidos da seguinte forma

$$\epsilon_h^1(x_j) = \begin{cases} \cos\left(\frac{4\pi j}{3}\right)e_1 + \text{sen}\left(\frac{4\pi j}{3}\right)e_2, & \text{se } x_j \in \mathcal{O}_1 \\ 0, & \text{se } x_j \notin \mathcal{O}_1 \end{cases}$$

e

$$\epsilon_h^2(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j \notin \mathcal{O}_2 \\ \cos\left(\frac{4\pi j}{3}\right)e_1 + \text{sen}\left(\frac{4\pi j}{3}\right)e_2, & \text{se } x_j \in \mathcal{O}_2 \end{cases},$$

sendo  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . Temos que  $\epsilon_h^i \in V_1^\sigma$ , então  $J\epsilon_h^i = \epsilon_v^i \in V_2^\sigma$ , deste modo segue que o conjunto

$$\{\Delta_v, \Delta_h, \epsilon_v^1, \Delta_v^2, \epsilon_v^2, \epsilon_h^1, \Delta_h^2, \epsilon_h^2\}$$

é uma base  $M$ -ortogonal do subespaço  $V^\sigma$ . Os deslocamentos  $\Delta_v$  e  $\Delta_h$  são autovetores de  $A$  associados ao autovalor 0. Sabendo que o operador  $A$  é simétrico com respeito ao  $M$ -produto interno, a matriz do operador  $A + \kappa J$  em relação a essa base é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa & b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Mais adiante, observamos que todas as entradas  $b_{ij}$  são determinadas pelas entradas  $a_{ij}$ .

## 4 TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS CONCÊNTRICOS HOMOTÉTICOS

Apresentaremos nesse capítulo a primeira família de sistemas anulares a ser estudado nesta tese. Consiste de uma análise da estabilidade linear de sistemas anulares com dois triângulos equiláteros concêntricos homotéticos.

### 4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considere soluções de equilíbrios relativos do problema seis corpos onde suas posições,  $q_1, \dots, q_6$ , são vértices de dois triângulos equiláteros concêntricos homotéticos e  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$  são os valores das respectivas massas. Temos que

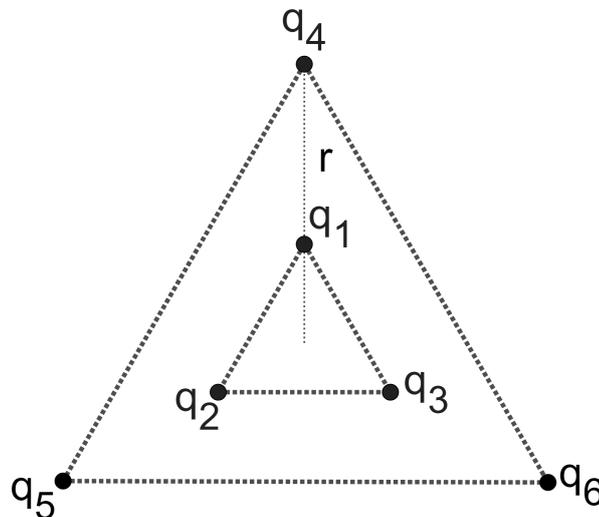
$$q_1 = r_1(0, 1), \quad q_2 = r_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad q_3 = r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$q_4 = r_2(0, 1), \quad q_5 = r_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad q_6 = r_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

onde  $r_1$  e  $r_2$  representam as distâncias dos corpos ao centro dos triângulos equiláteros (ver figura 5). Iremos supor  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  e  $m_4 = m_5 = m_6 = m > 0$ . Neste caso, podemos considerar, sem perda de generalidade,  $r_1 = 1$  e  $r_2 = r > 0$ .

A fim de que tal configuração seja equilíbrio relativo, cada corpo  $q_i$  deve ser solução da equação de equilíbrios relativos (2.4). Considerando o centro de massa na origem, e substi-

Figura 5 – Configuração formada pelos Vértices de dois triângulos equiláteros concêntricos homotéticos.



Fonte: Autora.

tuindo  $q_1$  na equação, encontramos

$$(0, -\omega^2) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{m(r-1)}{|r-1|^3} - \frac{m(r+2)}{(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Logo,

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{m(r-1)}{|r-1|^3} + \frac{m(r+2)}{(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.1)$$

De maneira similar, substituindo o  $q_4$  na equação de equilíbrios relativos, chegaremos em

$$(0, -r\omega^2) = \left(0, \frac{1-r}{|r-1|^3} + \frac{-2r-1}{(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m\sqrt{3}}{3r^2}\right).$$

Então,

$$\omega^2 = \frac{r-1}{r|r-1|^3} + \frac{2r+1}{r(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m\sqrt{3}}{3r^3} \quad (4.2)$$

Comparando as equações (4.1) e (4.2), podemos encontrar uma expressão para a massa  $m$  em função do raio  $r$

$$m = \frac{\left[(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}(|r-1|^3\sqrt{3}r - 3r+3) - 6|r-1|^3\left(r+\frac{1}{2}\right)\right]r^2}{3\left(\frac{|r-1|^3\sqrt{3}}{3} + r^3(r-1)\right)(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}} - 3(r+2)|r-1|^3r^3}. \quad (4.3)$$

Assim, equilíbrios relativos desse problema estão diretamente identificados por pares  $(r, m)$  que satisfazem a equação (4.3). Definimos o conjunto

$$\mathfrak{R} = \{(r, m) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / (r, m) \text{ satisfaz (4.3)}\}$$

e iremos provar uma propriedade básica desse conjunto que facilitará o estudo mais específico a respeito do comportamento da função (4.3).

**Lema 4.1.1.** *A inversão  $i : (r, m) \mapsto (\frac{1}{r}, \frac{1}{m})$  é um mapa bijetivo de  $\mathfrak{R}$  em  $\mathfrak{R}$ .*

*Demonstração.* Fazendo a substituição  $r \rightarrow \frac{1}{r}$  em (4.3), após simplificações, obtemos

$$\frac{3\left(\frac{|r-1|^3\sqrt{3}}{3} + r^3(r-1)\right)(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}} - 3(r+2)|r-1|^3r^3}{\left[(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}(|r-1|^3\sqrt{3}r - 3r+3) - 6|r-1|^3\left(r+\frac{1}{2}\right)\right]r^2} = \frac{1}{m}$$

□

## 4.2 ANÁLISE GRÁFICA DO PROBLEMA

Faremos uma mudança de variável adequada na função (4.3), utilizando a seguinte transformação de Möbius

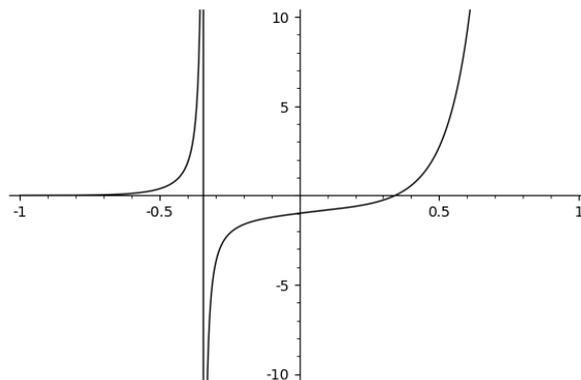
$$r = \frac{1+x}{1-x} \quad (4.4)$$

que leva o intervalo  $[-1, 1]$  no semi-eixo positivo  $[0, \infty)$  e converte a inversão  $r \mapsto \frac{1}{r}$  na reflexão  $x \mapsto -x$ . Sob esta transformação, a equação (4.3) assume a forma

$$m = \frac{\left[ 12(x+3)(x-1)^3|x|^3 + (4\sqrt{3}(x+1)|x|^3 + 3(x-1)^3x)(x^2+3)^{\frac{3}{2}} \right] (x+1)^2}{\left[ 12(x+1)^3(x-3)|x|^3 - (4\sqrt{3}(x-1)|x|^3 - 3(x+1)^3x)(x^2+3)^{\frac{3}{2}} \right] (x-1)^2} \quad (4.5)$$

que facilita a visão gráfica e nos fornece uma ideia do comportamento dessa função (ver figura 6).

Figura 6 – Gráfico que representa os valores da massa  $m$  em função da variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ . Observamos uma assíntota vertical em  $x = x_0 < 0$ .

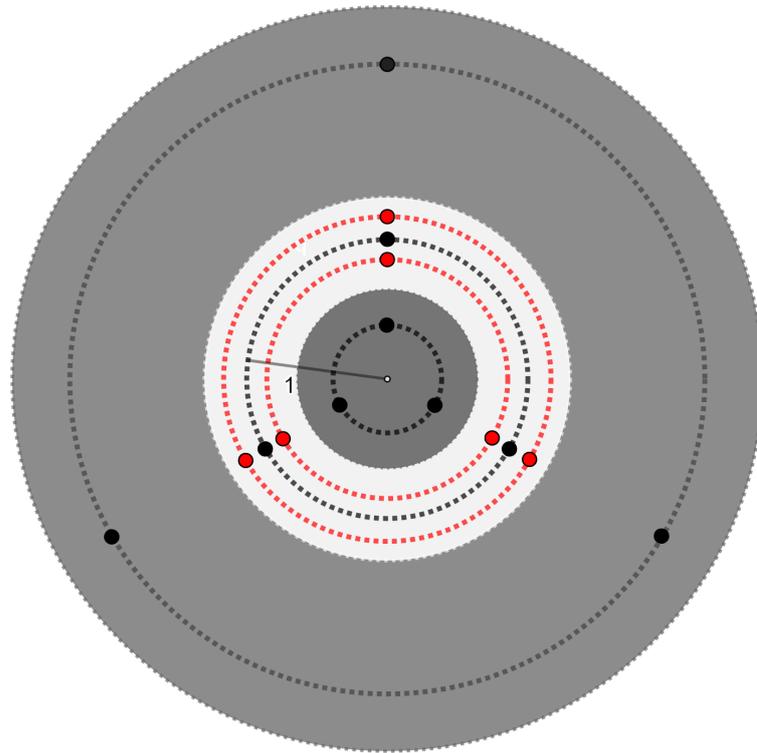


Fonte: Autora.

Assim já podemos fazer uma análise gráfica do comportamento das configurações desse problema. Temos os primeiros três corpos fixos nos vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 1 e que possuem massas iguais a 1. As posições dos outros três corpos estão fixas nos vértices de um outro triângulo equilátero, homotético ao primeiro e inscrito em uma circunferência de raio  $r$  de mesmo centro. Os valores da massa  $m$  dependem unicamente dos valores de  $r$ .

O gráfico mostrado na figura 6, embora estando em função da variável  $x$ , nos fornece uma excelente ideia dos valores da massa  $m$  em função da variável inicial  $r$ . Nesse sistema anular vai existir apenas uma coroa anular cujo interior é formado por configurações que são equilíbrios

Figura 7 – Sistema anular com uma coroa anular em branco que não possui equilíbrios relativos.



Fonte: Autora.

relativos, pois os valores da massa  $m$  são negativos. Nesta coroa está a circunferência de raio 1, isto quer dizer que quando os valores se aproximam de  $r = 1$  não temos equilíbrios relativos, o que faz sentido pois os corpos estão próximos de uma colisão. Por outro lado, temos um disco de raio  $r_0 = 1$  onde  $m$  tem valores positivos, logo, todas as configurações dentro desse círculo são equilíbrios relativos. Note que antes de entrar na coroa circular onde  $m < 0$ , o valor da massa tende para infinito. Por último, temos uma região ilimitada onde todas as configurações são equilíbrios relativos e o valor da  $m$  explode novamente. A figura 7 mostra o sistema anular desse problema, com os três primeiros corpos fixos na circunferência de raio 1 e os outros três corpos em movimento, perceba que a coroa em branco é onde esses corpos possuem massas negativas (configuração em vermelho) e nas regiões em cinza é onde temos equilíbrios relativos.

### 4.3 ANÁLISE EXATA DO PROBLEMA

Nosso objetivo agora é estudar as raízes e, conseqüentemente, os sinais da função (4.5). Mais especificamente, utilizaremos o técnica do matemático Alexandre Vincent (VINCENT,

1838), (VINCENT, 1834) que fornece o número exato de raízes positivas e negativas, bem como efetuar a sua separação. Este teste utiliza a Regra dos Sinais de Descartes (USPENSKY, 1948). Podemos resumir esse procedimento em dois resultados.

**Teorema 4.3.1.** *Um polinômio com coeficientes reais não pode ter mais raízes positivas (contando as multiplicidades) que o número de variações de sinal dos seus coeficientes.*

**Teorema 4.3.2 (REGRA DOS SINAIS).** *A diferença entre o número de variações de sinal e o número de raízes positivas de um polinômio com coeficientes reais é um inteiro positivo par.*

Para mais detalhes histórico e demonstrações sobre essa técnica, indico as seguintes referências (VINCENT, 1838), (VINCENT, 1834) e (USPENSKY, 1948). Para essa análise precisaremos fazer uma nova mudança de variável na função (4.5), para assim trabalharmos com polinômios de uma variável e coeficientes reais. Considere a função

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{z^2 - 1}{z} \right), \quad (4.6)$$

que leva de maneira bijetiva o intervalo  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$  em  $(-1, 1)$ . Primeiro, iremos estudar as raízes da função numerador de (4.5)

$$n(x) = \left( 12(x+3)(x-1)^3|x|^3 + \left( 4\sqrt{3}(x+1)|x|^3 + 3(x-1)^3x \right) (x^2+3)^{\frac{3}{2}} \right) (x+1)^2,$$

provando que ela possui uma única raiz  $c$  em  $(-1, 1)$ , mais especificamente  $c \in (0, 1)$ . Pelo lema 4.1.1 e pelo fato da transformação (4.4) converter a inversão  $r \mapsto \frac{1}{r}$  na reflexão  $x \mapsto -x$ , temos que  $-c \in (-1, 0)$  será a única raiz da função denominador de (4.5) que é exatamente onde essa função tem uma assíntota vertical. Fazendo a composição com a função (4.6), considerando  $z > 0$ , e pegando apenas o numerador dessa composição, obtemos a seguinte função na variável  $z$

$$n_1(z) = 243\sqrt{3}z^{18} - \dots + 108 \left( 9z^{16}(\sqrt{3}+1) + \dots + 9\sqrt{3}-9 \right) |z^2-1| + 486z + 243\sqrt{3}.$$

Agora, faremos o estudo das raízes de  $n_1(z)$  primeiro no intervalo  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ , que equivale ao estudo das raízes de  $n(x)$  no intervalo  $(-1, 0)$  na variável  $x$ .

**Proposição 4.3.1.** *A função  $n_1(z)$  não possui raízes no intervalo  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ .*

*Demonstração.* Considere a transformação

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}t + 3}{3(t+1)},$$

que leva o semi-eixo positivo  $[0, \infty)$  em  $(\sqrt{3}/3, 1]$ . A função  $n_1(z)$ , sob esta transformação, assume a forma de uma função racional, cujo numerador é o polinômio

$$p_1(t) = -131072t^{15}(9\sqrt{3} - 17) + \dots + 373248t^2(4\sqrt{3} + 11) - 373248t(\sqrt{3} - 3).$$

Todos coeficientes do polinômio acima são positivos, logo, pela regra dos sinais,  $p_1$  não possui raízes reais positivas e assim provamos que  $n_1(z)$  não têm zeros no intervalo  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ .  $\square$

Já podemos concluir então que a função (4.5) não possui zeros em  $(-1, 0)$ , como podemos verificar na figura 6. Agora, utilizando a mesma ideia, iremos provar que a mesma possui um único zero em  $(0, 1)$ .

**Proposição 4.3.2.** *Considere a função  $n_1(z)$ . Existe um único  $z_1 \in (1, \sqrt{3})$  que é raiz de  $n_1$ .*

*Demonstração.* Aqui, iremos considerar a transformação

$$T_2 = \frac{\sqrt{3}t + 1}{t + 1}$$

que leva o semi eixo positivo  $[0, \infty)$  no intervalo  $[1, \sqrt{3})$ . De maneira similar ao que foi feito na proposição passada, iremos obter o polinômio

$$p_2(t) = 31850496t^{18} + \dots - 221184t^8(11197\sqrt{3} - 19929) - 55296t^7(5169\sqrt{3} - 5153) + \dots,$$

que possui apenas uma variação de sinal em seus coeficientes: os coeficientes dos monômios de grau menor ou igual 7 são negativos e os coeficientes dos monômios de grau maior ou igual a 8 são positivos. Concluimos que  $p_2$  tem apenas uma raiz positiva real e, conseqüentemente,  $n_1$  possui apenas uma raiz em  $[1, \sqrt{3})$ .  $\square$

Acabamos de provar que existe um único  $c \in (-1, 1)$  que é raiz da função (4.5), mais ainda, temos que  $c \in (0, 1)$ . Desse modo, temos que  $-c \in (-1, 0)$  é a única raiz da função do denominador

$$d(x) = \left(12(x+1)^3(x-3)|x|^3 - \left(4\sqrt{3}(x-1)|x|^3 - 3(x+1)^3x\right)(x^2+3)^{\frac{3}{2}}\right)(x-1)^2.$$

Portanto, podemos deduzir os sinais da função (4.5) como é mostrado na tabela 2.

Para finalizar esse estudo, queremos encontrar uma aproximação adequada para o valor numérico de  $c$ . Para isso, inicialmente iremos aproximar o valor de  $z_1$ , que é a única raiz da função  $n_1(z)$  no intervalo  $(1, \sqrt{3})$ .

Tabela 2 – Sinal da função massa na variável  $t$ .

funções	$[-1, -c]$	$[-c, 0]$	$[0, c]$	$[c, 1]$
$n(x)$	positiva	positiva	negativa	positiva
$d(x)$	positiva	negativa	positiva	positiva
$m(x)$	positiva	negativa	negativa	positiva

**Proposição 4.3.3.** *Considere o  $z_1$  encontrado na proposição 4.3.2. Então, o valor numérico aproximado de  $z_1$  é 1,225. Em consequência, temos que  $c \cong 0,35394$ .*

*Demonstração.* Vamos provar que  $z_1$  pertence ao intervalo  $I = [\frac{6}{5}, \frac{5}{4}]$ . Para isto, seja a transformação

$$T_3 = \frac{25t + 24}{20(t + 1)},$$

que leva o semi eixo positivo em  $I$ . Como feito anteriormente, iremos fazer a composição com a função  $n_1(z)$ , e assim estudar as variações de sinais dos coeficientes do polinômio

$$\begin{aligned} p_3(t) = & 926971435546875 t^{18} (2316250821357 \sqrt{3} - 1606476899396) + \dots \\ & + 106168320000000 t^7 (353854232255167692 \sqrt{3} - 593362685599219403) \\ & + 56623104000000 t^6 (366465737319953140 \sqrt{3} - 651458282752883493) + \dots \end{aligned}$$

que é o numerador dessa composição. Concluímos que  $p_3$  possui apenas uma variação de sinal do coeficiente de grau 7 para o coeficiente de grau 6, assim ele possui uma única raiz real positiva. Logo, temos que  $z_1 \in I$ . O que nos diz que  $z_1 \cong 1,225$ .  $\square$

#### 4.4 RESULTADOS SOBRE A ESTABILIDADE DO PROBLEMA

Nesta seção faremos um estudo da estabilidade do sistema anular dividida em duas partes. Primeiro, estudaremos as raízes do polinômio de estabilidade do bloco referente ao subespaço  $V^\tau \oplus V^\alpha$ . O segundo o bloco a ser analisado é o referente ao subespaço  $V^\sigma$ .

##### 4.4.1 Bloco $V^\tau \oplus V^\alpha$

Considere  $\varkappa$  o equilíbrio relativo dado por

$$\varkappa = \left(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, r, \frac{-r\sqrt{3}}{2}, -\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}, -\frac{r}{2}\right) \in \mathbb{R}^{12},$$

$A = M^{-1}D\nabla U(\varkappa)$  e  $\kappa = -2\lambda\omega$ . Já sabemos que a matriz do operador  $A + \kappa J$  restrito ao subespaço  $V^\tau \oplus V^\alpha$  com respeito à base  $\{J\varkappa, \varkappa, J\varkappa_1, \varkappa_1\}$ , é uma matriz do tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \kappa & 0 & 0 \\ -\kappa & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \kappa \\ 0 & 0 & -\kappa & \lambda_4 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Fazer o estudo do polinômio de estabilidade desse bloco se resume a estudar o polinômio de estabilidade do bloco

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & \kappa \\ -\kappa & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

que é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda^2) &= \det(B_1 + (\omega^2 - \lambda^2)I) \\ &= (\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\lambda_3 + \lambda_4 - 4\omega^2)(\omega^2 - \lambda^2) + \lambda_3\lambda_4 + 4\omega^4. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Em (LEANDRO, 2019) vemos condições suficientes para que os valores de  $\lambda^2$  sejam reais e negativos enunciadas a seguir.

**Proposição 4.4.1.** *Cada afirmação a seguir é uma condição suficiente para que  $\lambda^2$  seja uma solução real e negativa do polinômio (5.7):*

1.  $\lambda_3 + \omega^2 < 0$  e  $\lambda_4 + \omega^2 < 0$
2.  $\lambda_3 + \omega^2 > 0$  e  $\lambda_4 + \omega^2 > 0$  e  $\Delta > 0$ , onde  $\Delta = (\lambda_3 - \lambda_4)^2 - 8\omega^2(\lambda_3 + \lambda_4)$ .

Se  $\Delta < 0$  ou se  $\lambda_3 + \omega^2$  e  $\lambda_4 + \omega^2$  possuírem sinais opostos, então  $\lambda^2$  não é real.

Precisamos agora achar os valores de  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  e para isso iremos calcular a matriz hessiana  $B = D\nabla U(\varkappa)$  dada por

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ B_{15} & B_{25} & B_{35} & B_{45} & B_{55} & B_{56} \\ B_{16} & B_{26} & B_{36} & B_{46} & B_{56} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

com

$$B_{jk} = \frac{m_j m_k}{\|x_k - x_j\|^3} [I - 3u_{jk}u_{jk}^T], \quad j \neq k,$$

onde  $u_{jk} = \frac{x_k - x_j}{\|x_k - x_j\|}$  é o vetor unitário na direção de  $x_j$  para  $x_k$  e

$$B_{kk} = -\sum_{j \neq k} B_{jk}.$$

Encontramos,

$$B_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{36} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5\sqrt{3}}{36} \end{bmatrix},$$

$$B_{13} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5\sqrt{3}}{36} \end{bmatrix},$$

$$B_{14} = \begin{bmatrix} \frac{m}{|r-1|^3} & 0 \\ 0 & -\frac{2m}{|r-1|^3} \end{bmatrix},$$

$$B_{15} = \begin{bmatrix} -\frac{m(5r^2-4r-4)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} & -\frac{3mr\sqrt{3}(r+2)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3mr\sqrt{3}(r+2)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m(r^2-8r-8)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$B_{16} = \begin{bmatrix} \frac{m\left(1-\frac{9r^2}{4(r^2+r+1)}\right)}{(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{3mr\sqrt{3}(r+2)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3mr\sqrt{3}(r+2)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m\left(1-\frac{3(r+2)^2}{4(r^2+r+1)}\right)}{(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$B_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{9} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{9} \end{bmatrix},$$

$$B_{24} = \begin{bmatrix} \frac{m\left(1-\frac{9}{4r^2+4r+4}\right)}{(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{3m\sqrt{3}(2r+1)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3m\sqrt{3}(2r+1)}{4(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m\left(1-\frac{3(2r+1)^2}{4(r^2+r+1)}\right)}{(r^2+r+1)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$B_{25} = \begin{bmatrix} -\frac{5m}{4|r-1|^3} & -\frac{3m\sqrt{3}(r-1)^2}{4|r-1|^5} \\ -\frac{3m\sqrt{3}(r-1)^2}{4|r-1|^5} & \frac{m}{4|r-1|^3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_{26} &= \begin{bmatrix} -\frac{5m(r^2 + \frac{14}{5}r + 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3m\sqrt{3}(r^2 - 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3m\sqrt{3}(r^2 - 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m(r^2 + 10r + 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix}, \\
B_{34} &= \begin{bmatrix} \frac{m(4r^2 + 4r - 5)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3m\sqrt{3}(2r + 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3m\sqrt{3}(2r + 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} & -\frac{2m(r^2 + r - \frac{1}{8})}{(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix}, \\
B_{35} &= \begin{bmatrix} -\frac{5m(r^2 + \frac{14}{5}r + 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} & -\frac{3m\sqrt{3}(r^2 - 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3m\sqrt{3}(r^2 - 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m(r^2 + 10r + 1)}{4(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix}, \\
B_{36} &= \begin{bmatrix} -\frac{5m}{4|r-1|^3} & \frac{3m\sqrt{3}(r-1)^2}{4|r-1|^5} \\ \frac{3m\sqrt{3}(r-1)^2}{4|r-1|^5} & \frac{m}{4|r-1|^3} \end{bmatrix}, \\
B_{45} &= \begin{bmatrix} \frac{m^2\sqrt{3}}{36r^3} & -\frac{m^2}{4r^3} \\ -\frac{m^2}{4r^3} & -\frac{5m^2\sqrt{3}}{36r^3} \end{bmatrix}, \\
B_{46} &= \begin{bmatrix} \frac{m^2\sqrt{3}}{36r^3} & \frac{m^2}{4r^3} \\ \frac{m^2}{4r^3} & -\frac{5m^2\sqrt{3}}{36r^3} \end{bmatrix}, \\
B_{56} &= \begin{bmatrix} -\frac{2m^2\sqrt{3}}{9r^3} & 0 \\ 0 & \frac{m^2\sqrt{3}}{9r^3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Aplicando  $A$  nos vetores

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 &= \left( 0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{mr}, \frac{\sqrt{3}}{2mr}, \frac{1}{2mr}, -\frac{\sqrt{3}}{2mr}, \frac{1}{2mr} \right), \\
J\mathcal{X}_1 &= \left( -1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{mr}, 0, -\frac{1}{2mr}, \frac{\sqrt{3}}{2mr}, -\frac{1}{2mr}, -\frac{\sqrt{3}}{2mr} \right),
\end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= -\frac{\left( \frac{\sqrt{3}(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}}}{3} - 1 - \frac{5r^3 m}{2} + (2m - 1)r^2 + \left(2m - \frac{11}{2}\right)r \right) |r - 1|^3}{(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} r |r - 1|^3} \\
&+ \frac{(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} (mr - 1)}{(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} r |r - 1|^3},
\end{aligned}$$

$$\lambda_4 = \frac{2 \left( \frac{\sqrt{3}(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}}{3} r - 1 - \frac{r^3 m}{4} + (2m-1)r^2 + \left(2m - \frac{13}{4}\right)r \right) |r-1|^3}{(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}} r |r-1|^3} + \frac{2(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}}(mr-1)}{(r^2+r+1)^{\frac{5}{2}} r |r-1|^3}.$$

Usando a expressão de  $\omega^2$  juntamente com a equação (4.3) para  $m$ ,  $\lambda_3 + \omega^2$ ,  $\lambda_4 + \omega^2$ , tornam-se funções que dependem apenas da variável  $r$ . Fazendo a composição dessas duas funções com a transformação de Möbius (4.4), o nosso estudo se resume em analisar os sinais dessas duas funções no intervalo  $[-1, 1]$ . Chamaremos, respectivamente, as funções  $\lambda_3 + \omega^2$  e  $\lambda_4 + \omega^2$ , agora na variável  $x$ , de

$$\xi_3 = \frac{f_3(x)}{g(x)}, \quad \xi_4 = \frac{f_4(x)}{g(x)},$$

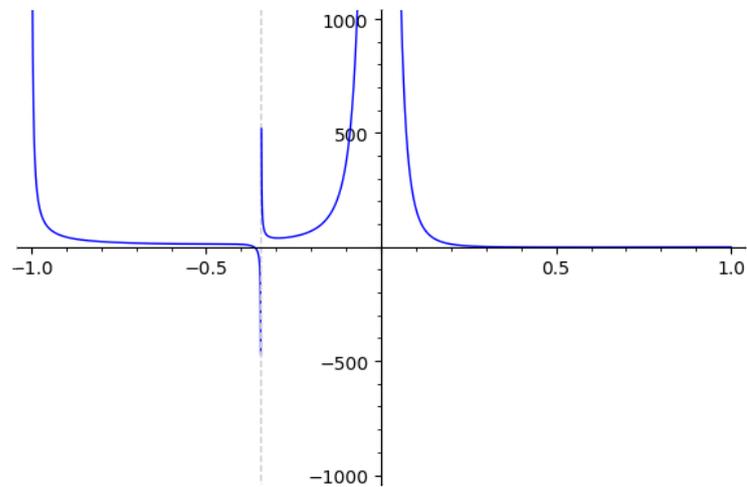
onde

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 48(7x^2 - 15)(x+1)^3(x-1)^6|x|^6 + 3(x^2+3)^3(x+1)^3|x-1|^6 \\ &\quad - 4\sqrt{3}(x^4+10x^2+5)(x^2+3)^3|x-1|^3|x|^3 + \\ &\quad \left[ 12(7x^3+4x^2-15x+12)(x+1)^3|x-1|^3 - 16\sqrt{3}(5x^4+10x^2+1) \right. \\ &\quad \left. (7x^2-15)|x|^3 \right] (x-1)^4 \sqrt{\frac{x^2+3}{(x-1)^2}} |x|^3, \\ f_4(x) &= 4 \left[ 3(x^3-8x^2+39x-24)(x+1)^3|x-1|^3 + 4\sqrt{3}(5x^4+10x^2+1) \right. \\ &\quad \left. (5x^2-21)|x|^3 \right] (x-1)^4 \sqrt{\frac{x^2+3}{(x-1)^2}} |x|^3 \\ &\quad + (3(x^2+3)^2(3x-2)(x+1)^3|x-1|^6 - 48(x^4-10x^2-7)(x+1)(x-1)^4|x|^6 \\ &\quad + 8\sqrt{3}(x^4+10x^2+5)(x^2+3)^2|x-1|^3|x|^3)(x^2+3), \\ g(x) &= 4 \left[ 12(x+1)^3(x-1)^2(x-3)|x|^3 + (4\sqrt{3}(x-1)^4|x|^3 + 3(x+1)^3|x-1|^3) \right. \\ &\quad \left. (x^2+3) \sqrt{\frac{x^2+3}{(x-1)^2}} \right] (x^2+3)(x+1)(x-1)^2 \sqrt{\frac{x^2+3}{(x-1)^2}} |x|^3. \end{aligned}$$

Iremos estudar os sinais das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  nos intervalos  $[-1, -c]$  e  $[c, 1]$  em que a função (4.5) toma valores positivos. Embora esse estudo não seja fácil, podemos ter uma ideia do comportamento de cada uma delas observando seus gráficos (ver figuras 8 e 9).

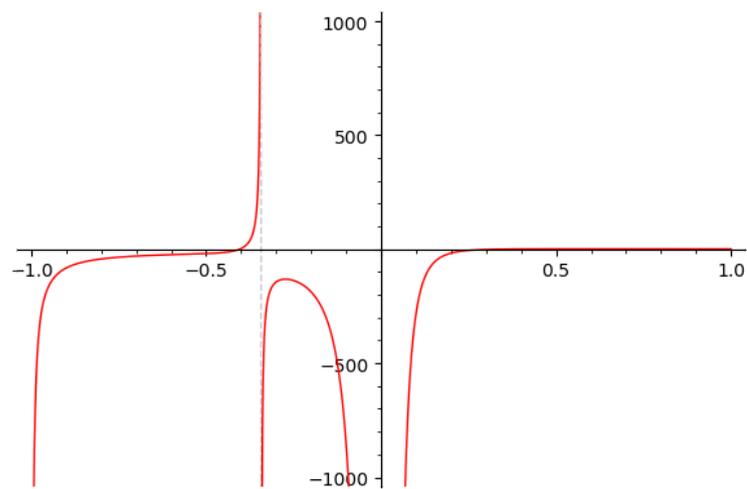
Nosso objetivo é encontrar subintervalos dentro dos intervalos  $[-1, -c]$  e  $[c, 1]$  onde as funções  $\xi_3$  e  $\xi_4$  têm sinais opostos e assim caracterizar a solução  $\lambda^2$  do polinômio de estabilidade

Figura 8 – Gráfico que representa os valores da função  $\xi_3$  na variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ .



Fonte: Autora.

Figura 9 – Gráfico que representa os valores da função  $\xi_4$  na variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ .



Fonte: Autora.

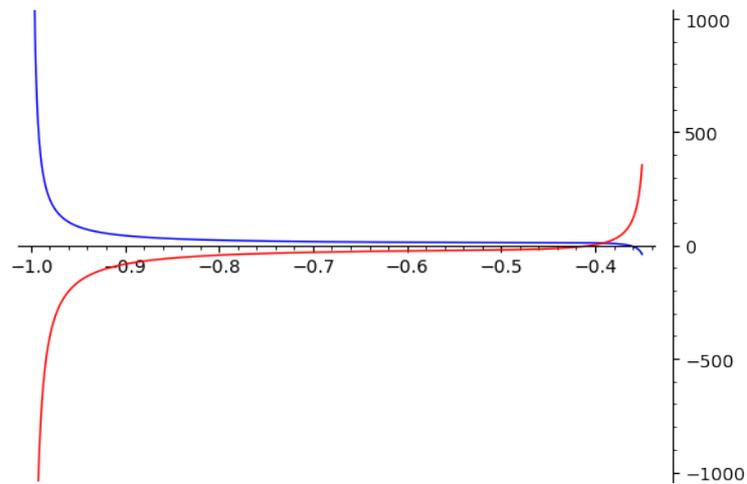
(4.9) utilizando a proposição 4.4.1. Vamos ver que, embora seja imperceptíveis nos gráficos 8 e 9, existem subintervalos em que essas duas funções são simultaneamente positivas. As figuras 10 e 11 mostram com mais detalhes os gráficos das funções  $\xi_3$  e  $\xi_4$  nos intervalos  $[-1, -c]$  e  $[c, 1]$ , respectivamente.

**Proposição 4.4.2.** *A função  $g(x)$  no denominador de  $\xi_3$  e  $\xi_4$  não possui raízes nos intervalos  $(-1, -c)$  e  $(c, 1)$ .*

*Demonstração.* Considere as transformações de Möbius

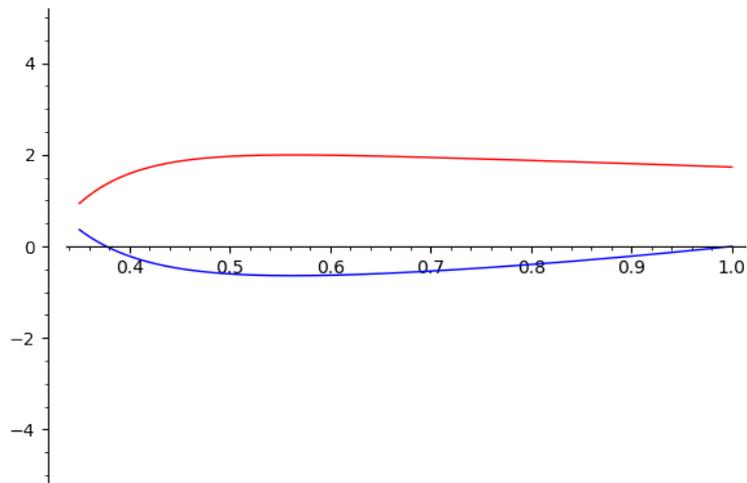
$$T_4 = \frac{63t + 25\sqrt{3}}{75(t+1)}, \quad (4.11)$$

Figura 10 – Gráficos das funções  $\xi_3$  e  $\xi_4$  com  $x$  variando no intervalo  $[-1, -c]$ .



Fonte: Autora.

Figura 11 – Gráficos das funções  $\xi_3$  e  $\xi_4$  com  $x$  variando no intervalo  $[c, 1]$ .



Fonte: Autora.

$$T_5 = \frac{5\sqrt{3}t + 6}{5(t + 1)}. \quad (4.12)$$

A transformação  $T_4$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{84}{100})$  e a transformação  $T_5$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $[\frac{6}{5}, \sqrt{3})$ . Seja a função numerador da composição da função  $g(x)$  com a função (4.6), que leva o intervalo  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$  em  $(-1, 1)$ . Pegando o numerador da composição dessa função com  $T_4$  se conclui que não existe variações de sinais dos seus coeficientes, o que prova que a função  $g(x)$  não possui raiz em  $(-1, -c)$ . Ao fazer a composição com a transformação  $T_5$  se conclui o mesmo, isso implica que  $g(x)$  não possui raiz em  $(c, 1)$ .  $\square$

**Proposição 4.4.3.** *As funções  $\xi_3$  e  $\xi_4$  possuem uma única raiz em  $(-1, -c)$ .*

*Demonstração.* Seguiremos a mesma ideia da demonstração da proposição anterior. Primeiro, considere as funções numeradores das composições de  $f_3$  e  $f_4$  com (4.6), respectivamente. Pegamos o numerador da composição dessas duas funções com a transformação (4.11) e concluímos que ambas funções possuem uma única variação de sinal dos seus coeficientes. Logo, a função  $\xi_4$  possui uma única raiz  $\nu_1$  em  $(-1, -c)$  e a função  $\xi_3$  possui uma única raiz  $\nu_2$  em  $(-1, -c)$ .  $\square$

**Proposição 4.4.4.** *A função  $\xi_3$  não possui raiz no intervalo  $(c, 1)$ . Por outro lado, a função  $\xi_4$  possui uma única raiz  $\nu_3$  nesse mesmo intervalo.*

*Demonstração.* Pegando a função numerador da composição de  $f_4$  com (4.6), depois fazendo a composição dessa função com a transformação (4.12), obtemos um polinômio em seu numerador que não tem nenhuma variação de sinal dos seus coeficientes. Isso prova a primeira afirmação da proposição. Seguindo o mesmo passo com a função  $f_3$ , percebemos que o polinômio tem uma única variação de sinal dos seus coeficientes, isso implica que  $\xi_4$  tem uma única raiz em  $(c, 1)$  o que prova a proposição.  $\square$

Sendo  $\nu_1$  a raiz de  $\xi_4$  em  $(-1, -c)$ ,  $\nu_2$  a raiz de  $\xi_3$  em  $(-1, -c)$  e  $\nu_3$  a raiz de  $\xi_3$  em  $(c, 1)$ , temos que

$$\xi_4(-0, 41) < 0 \text{ e } \xi_4(-0, 4) > 0,$$

$$\xi_3(-0, 4) > 0 \text{ e } \xi_3(-0, 38) < 0,$$

$$\xi_3(0, 36) > 0 \text{ e } \xi_3(0, 4) < 0,$$

o que prova que  $-0, 41 < \nu_1 < -0, 4$ ,  $-0, 4 < \nu_2 < -0, 38$ , e  $0, 36 < \nu_3 < 0, 4$ . A próximas tabelas 3 e 4, mostram os sinais das funções  $\xi_3$  e  $\xi_4$  em cada intervalo,  $(-1, -c)$  e  $(c, 1)$ , e caracterizam a solução  $\lambda^2$  de acordo com com a proposição 4.4.1.

Tabela 3 – Comportamento das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  no intervalo  $[-1, -c]$ .

	$(-1, \nu_1)$	$(\nu_1, \nu_2)$	$(\nu_2, -c)$
$\xi_3$	positiva	positiva	negativa
$\xi_4$	negativa	positiva	positiva
$\lambda^2$	não real	nada podemos afirmar	não real

Tabela 4 – Comportamento das funções  $\xi_3, \xi_4$  no intervalo  $[c, 1]$ .

	$(c, \nu_3)$	$(\nu_3, 1)$
$\xi_3$	positiva	negativa
$\xi_4$	positiva	positiva
$\lambda^2$	nada podemos afirmar	não real

#### 4.4.2 Bloco $V^\sigma$

Nossa finalidade aqui é estudar a estabilidade do problema quando  $A + \kappa J$  é restrito ao subespaço  $V^\sigma$ , assim como foi feito na análise do bloco  $V^\tau \oplus V^\alpha$ . Estudaremos as raízes do polinômio de estabilidade do bloco

$$B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \kappa & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & \kappa & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -\kappa & 0 & b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -\kappa & b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

isto é, faremos um estudo das raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \det(B_2 + (\omega^2 - \lambda^2)I). \quad (4.14)$$

Antes de calcular  $p(\lambda)$ , precisamos encontrar as entradas  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  da matriz  $B_2$ , para isso lembremos da base do espaço  $V^\sigma = V_1^\sigma \oplus V_2^\sigma$  dada por

$$\{\Delta_v, \Delta_h, \epsilon_v^1, \Delta_v^2, \epsilon_v^2, \epsilon_h^1, \Delta_h^2, \epsilon_h^2\}.$$

Os elementos

$$\epsilon_v^1, \Delta_v^2, \epsilon_v^2 \in V_2^\sigma,$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_v^1 &= (0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \Delta_v^2 &= (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}), \\ \epsilon_v^2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

são  $M$ -ortogonais e  $A$ -invariantes, então podemos encontrar as entradas  $a_{ij}$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\langle A\epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, & a_{12} &= \frac{\langle A\Delta_v^2, \epsilon_v^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, \\ a_{22} &= \frac{\langle A\Delta_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}{\langle \Delta_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}, & a_{13} &= \frac{\langle A\epsilon_v^2, \epsilon_v^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, \\ a_{23} &= \frac{\langle A\epsilon_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}{\langle \Delta_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}, & a_{33} &= \frac{\langle A\epsilon_v^2, \epsilon_v^2 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^2, \epsilon_v^2 \rangle_M}, \end{aligned}$$

o que nos fornecem as seguintes expressões em função de  $r$  e  $m$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}|r-1|^3}{3} + m \right) + 2m|r-1|^3}{2(r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} |r-1|^3}, \\ a_{12} &= \frac{3 \left[ (r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} - |r-1|^3 (r^2 - 2r - 2) \right] (m+1)}{2(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} |r-1|^3}, \\ a_{22} &= \frac{(r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} \left[ -\frac{m\sqrt{3}(m-1)|r-1|^3}{9} + r^3 \left( m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \right) \right] + 2 \left( m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} \right) |r-1|^3 r^3}{(r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} (m+1) r^3 |r-1|^3}, \\ a_{13} &= -\frac{\left( (r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} - |r-1|^3 \right) m}{2(r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} |r-1|^3}, \\ a_{23} &= \left[ \frac{(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} \left( m\sqrt{3} (m-1) |r-1|^3 - 9r^3 (m+1) \right)}{6(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} (m+1) r^3 |r-1|^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{18|r-1|^3 r^3 \left( r^2 + r - \frac{1}{2} \right) (m+1)}{6(r^2 + r + 1)^{\frac{5}{2}} (m+1) r^3 |r-1|^3} \right] m, \\ a_{33} &= \frac{(r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} \left[ m\sqrt{3} (m+2) |r-1|^3 + 9r^3 \right] + 18|r-1|^3 r^3}{18(r^2 + r + 1)^{\frac{3}{2}} |r-1|^3 r^3}. \end{aligned}$$

Para encontrarmos as entradas  $b_{ij}$  seguiremos o mesmo procedimento, lembrando que

$$\epsilon_h^1, \Delta_h^2, \epsilon_h^2 \in V_1^\sigma,$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_h^1 &= \left( 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right), \\ \Delta_h^2 &= \left( 1, 0, 1, 0, 1, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}, 0 \right), \\ \epsilon_h^2 &= \left( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \end{aligned}$$

são  $M$ -ortogonais e  $A$ -invariantes. Calculando os produtos internos

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\langle A\epsilon_h^1, \epsilon_h^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_h^1, \epsilon_h^1 \rangle_M}, & b_{12} &= \frac{\langle A\Delta_h^2, \epsilon_h^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_h^1, \epsilon_h^1 \rangle_M}, \\ b_{22} &= \frac{\langle A\Delta_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}{\langle \Delta_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}, & b_{13} &= \frac{\langle A\epsilon_h^2, \epsilon_h^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, \\ b_{23} &= \frac{\langle A\epsilon_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}{\langle \Delta_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}, & b_{33} &= \frac{\langle A\epsilon_h^2, \epsilon_h^2 \rangle_M}{\langle \epsilon_h^2, \epsilon_h^2 \rangle_M}, \end{aligned}$$

encontramos as seguintes correspondências

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{22} = b_{22}, \quad a_{33} = b_{33}, \quad a_{12} = -b_{12}, \quad a_{13} = b_{13}, \quad a_{23} = -b_{23},$$

logo, podemos reescrever a matriz (4.13) da seguinte forma

$$B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \kappa & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & \kappa & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ 0 & -\kappa & 0 & -a_{12} & a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & -\kappa & a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Então, o polinômio (4.14), que é um polinômio par, é da forma

$$p(\lambda) = \lambda^{12} + (6\omega^2 - 2a_{11} - 2a_{22} - 2a_{33})\lambda^{10} + \dots \quad (4.16)$$

A fim de obter uma condição necessária para que  $\lambda^2$  seja real e negativa, para todo  $\lambda$  solução de  $p(\lambda)$ , utilizaremos a relação de Girard para soma das raízes de um polinômio, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \lambda_i^2 &= - (6\omega^2 - 2a_{11} - 2a_{22} - 2a_{33}) \\ &= 2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - 6\omega^2, \end{aligned}$$

seguindo a mesma ideia utilizada em (ROBERTS, 1999). Portanto, para que  $\lambda^2$  seja real e negativa, para todo  $\lambda$  solução de  $p(\lambda)$ , é necessário que

$$2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - 6\omega^2 < 0. \quad (4.17)$$

Nosso objetivo agora é estudar os sinais da expressão

$$2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - 6\omega^2 \quad (4.18)$$

nos intervalos em que temos  $m > 0$ . Devemos lembrar que (4.18) é uma expressão em função das variáveis  $r$  e  $m$  que, utilizando a equação (4.3), se transforma em uma expressão em função apenas da variável  $r$ . A partir de agora, o procedimento será o mesmo que já usamos anteriormente, primeiro faremos a composição com transformação de Möbius (4.4) que nos fornece a seguinte função na variável  $x$

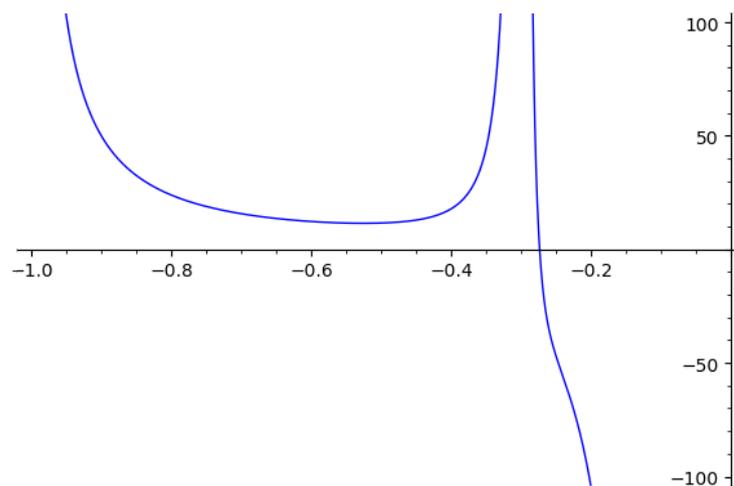
$$\xi = \frac{\xi_n}{\xi_d},$$

onde

$$\begin{aligned} \xi_n &= -3688x^{28} + \dots + 255879x^2 - 4(1777\sqrt{3}x^{27} + \dots - 107163\sqrt{3}x^2)|x| \\ &\quad + 16(418\sqrt{3}x^{27} + \dots - 13122\sqrt{3}x^4 - 3(93x^{26} - \dots - 2916x^2)|x|) \\ &\quad \sqrt{x^2 + 3} - 19683x - 19683, \\ \xi_d &= -9792\sqrt{3}x^{28} + \dots - 209952\sqrt{3}x^5 + 72(163x^{27} + \dots - 2187x^3)|x| \\ &\quad - 288(73x^{27} - \dots + 729x^5 - 16(\sqrt{3}x^{26} - \dots - 243\sqrt{3}x^6)|x|)\sqrt{x^2 + 3}. \end{aligned}$$

As figuras mostram o gráfico da função  $\xi$  nos intervalos  $[-1, 0)$  e  $(0, 1]$ , respectivamente, e já podemos perceber que nos intervalos  $[-1, -c]$  e  $[c, 1]$  ela tem valores positivos.

Figura 12 – Gráfico da função  $\xi$  com  $x$  variando no intervalo  $[-1, 0)$ .

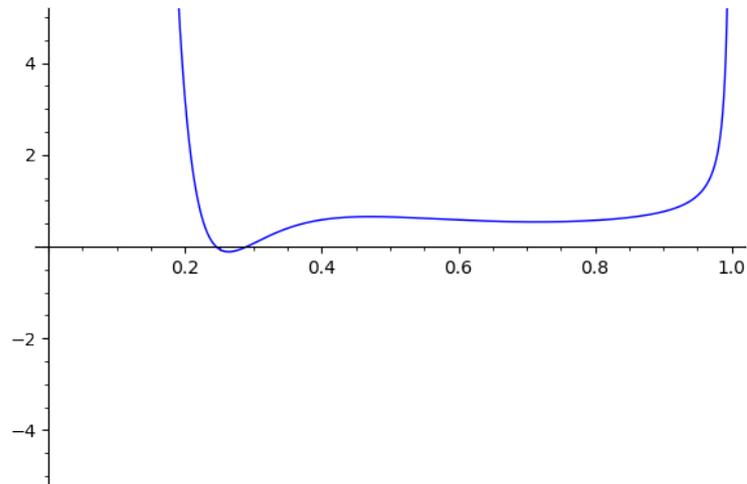


Fonte: Autora.

Iremos compor  $\xi_n$  e  $\xi_d$  com (4.6) e, utilizando transformações de Möbius, estudaremos as raízes das funções numeradores dessas composições em dois intervalos específicos.

**Proposição 4.4.5.** *A função  $\xi$  é positiva nos intervalos  $(-1, -c)$  e  $(c, 1)$ .*

Figura 13 – Gráfico da função  $\xi$  com  $x$  variando no intervalo  $(0, 1]$ .



**Fonte:** Autora.

*Demonstração.* Considere as seguintes transformações de Möbius,

$$T_6 = \frac{63t + 25\sqrt{3}}{75(t+1)},$$

$$T_7 = \frac{5\sqrt{3}t + 6}{5(t+1)}.$$

A transformação  $T_6$  leva o semi-eixo positivo no intervalo  $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{84}{100})$  e a transformação  $T_7$  leva o semi-eixo positivo no intervalo  $[\frac{6}{5}, \sqrt{3})$ . Sejam as duas funções numeradores da composição de  $\xi_n$  e  $\xi_d$  com (4.6). Fazendo a composição delas com a transformação  $T_6$ , os seus respectivos numeradores não possuem variações dos sinais de seus coeficientes. Isso prova que  $\xi_n$  e  $\xi_d$  não possuem raízes no intervalo  $[-1, -c]$ . Calculando essas funções em qualquer valor nesse intervalo, percebemos que ambas possuem o mesmo sinal e portanto  $\xi$  é positiva nesse intervalo. De maneira análoga, dessa vez utilizando a transformação  $T_7$  se conclui que  $\xi$  é positiva no intervalo  $[c, 1]$ .  $\square$

A proposição anterior nos diz que, considerando todos os equilíbrios relativos desse problema, seus respectivos polinômios de estabilidades, (4.14), devem admitir ao menos uma solução  $\lambda$  tal que  $\lambda^2$  é não real. Isso ocorre pois a desigualdade (4.17) não é satisfeita nos intervalos em que temos equilíbrios relativos. Concluímos que os equilíbrios relativos são todos instáveis.



$$\begin{aligned}\omega^2 &= 3^{-1/2} + m(r+1)^{-2} + m(2-r)(r^2 - r + 1)^{-3/2} \\ &= \frac{1}{r} \{ (1+r)^{-2} + (2r-1)(r^2 - r + 1)^{-3/2} \} + m3^{-1/2}r^{-3}.\end{aligned}$$

Assim, colocando  $m$  em função de  $r$ , obtemos a nossa primeira função desse problema

$$m = \frac{(1+r)^{-2} + (2r-1)(r^2 - r + 1)^{-3/2} - 3^{-1/2}r}{r\{(r+1)^{-2} + (2-r)(r^2 - r + 1)^{-3/2} - 3^{-1/2}r^{-3}\}}. \quad (5.1)$$

Portanto, também podemos identificar os equilíbrios relativos desse problema por pares  $(r, m)$  que satisfazem a função (5.1). Definimos o conjunto

$$\mathfrak{R} = \{(r, m) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / (r, m) \text{ satisfaz (5.1)}\}$$

e iremos provar uma propriedade básica similar ao que já foi feito no problema anterior.

**Lema 5.1.1.** *A inversão  $i : (r, m) \mapsto (\frac{1}{r}, \frac{1}{m})$  é um mapa bijetivo de  $\mathfrak{R}$  em  $\mathfrak{R}$ .*

*Demonstração.* Substituindo  $r \rightarrow \frac{1}{r}$  em (5.1) obtemos

$$\frac{r\{(r+1)^{-2} + (2-r)(r^2 - r + 1)^{-3/2} - 3^{-1/2}r^{-3}\}}{(1+r)^{-2} + (2r-1)(r^2 - r + 1)^{-3/2} - 3^{-1/2}r} = \frac{1}{m}$$

□

## 5.2 ANÁLISE GRÁFICA DO PROBLEMA

Consideremos a transformação de Möbius

$$r = \frac{1+x}{1-x} \quad (5.2)$$

que leva o intervalo  $[-1, 1]$  no semi-eixo positivo  $[0, \infty]$ , e converte a inversão  $r \mapsto \frac{1}{r}$  na reflexão  $x \mapsto -x$ . Fazendo a composição com essa transformação, a equação (5.1) assume a forma

$$m(x) = \frac{\left(12(3x+1)(x-1)^3 + (3(x-1)^3 + 4\sqrt{3}(x+1))(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)(x+1)^2}{\left(12(3x-1)(x+1)^3 - (3(x+1)^3 + 4\sqrt{3}(x-1))(3x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)(x-1)^2}.$$

Podemos ainda escrevê-la da seguinte forma

$$m(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{n(x)}{d(x)}, \quad (5.3)$$

onde

$$n(x) = \frac{1}{4} + \frac{(3x+1)}{\sqrt{(3x^2+1)^3}} - \frac{(1+x)}{\sqrt{3}(1-x)^3}$$

e

$$d(x) = \frac{1}{4} + \frac{(1-3x)}{\sqrt{(3x^2+1)^3}} - \frac{(1-x)}{\sqrt{3}(1+x)^3},$$

com  $-1 < x < 1$ .

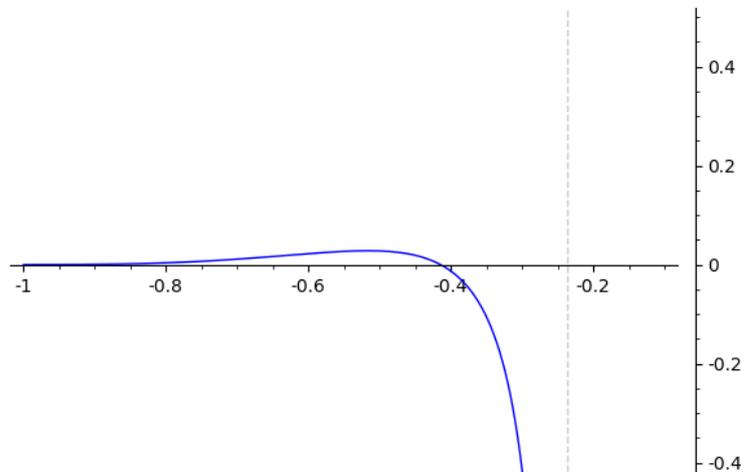
Desta forma, já podemos ter uma visão gráfica do comportamento das configurações desse problema. O gráfico da função (5.3) é um pouco mais complicado que o do triângulos homotéticos. A fim de mostrar seu comportamento de maneira detalhada, dividimos em três domínios, com o  $x$  variando em três intervalos (ver figuras 15, 16 e 17). Ainda assim, podemos ter uma excelente ideia do comportamento dos valores da massa  $m$  em função da variável inicial  $r$ .

Observe que vão existir dois intervalos no eixo positivo em que a função (5.1), que fornece os valores da massa  $m$  em função dos raios  $r$ , terá valores negativos, ou seja, as configurações  $q = (q_1, \dots, q_6)$  não serão equilíbrios relativos.

Geometricamente, podemos fazer uma análise mais detalhada do comportamento dessas configurações. O problema que estamos estudando trata-se de três corpos, com massas iguais a 1, onde suas posições são vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 1 centrada na origem, e outros três corpos, com massas iguais a  $m$ , com posições nos vértices de triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio  $r$  centrada na origem, suas posições dependem do valor do raio  $r$ . O gráfico da função (5.3) nos diz que existem duas coroas circulares em que as configurações correspondentes não são equilíbrios relativos, pois os corpos que são vértices dos triângulos inscritos nas circunferências contidas nesses anéis possuem massas negativas. Por outro lado, existem regiões onde as configurações correspondentes são equilíbrios relativos, essas regiões são indicadas em cinza na figura 18. A primeira região é um disco centrado na origem de raio menor que  $1/2$ . À medida que o raio  $r$  vai crescendo, o valor da massa  $m$  sai do valor nulo, cresce, atinge um máximo, depois decresce repetindo seus valores, e volta para o valor nulo. Depois, vem uma das coroas circulares onde  $m < 0$ . Logo em seguida, vem uma coroa circular onde à medida que o raio  $r$  cresce, o valor de  $m$  decresce, atinge um mínimo bem próximo da circunferência de raio 1, cresce um pouco repetindo seus valores e chega em  $m = 1$ , quando  $r = 1$ . Neste caso, temos a configuração onde as posições são vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência de raio 1 e todas as massas iguais a 1. A partir desse ponto, ainda dentro dessa

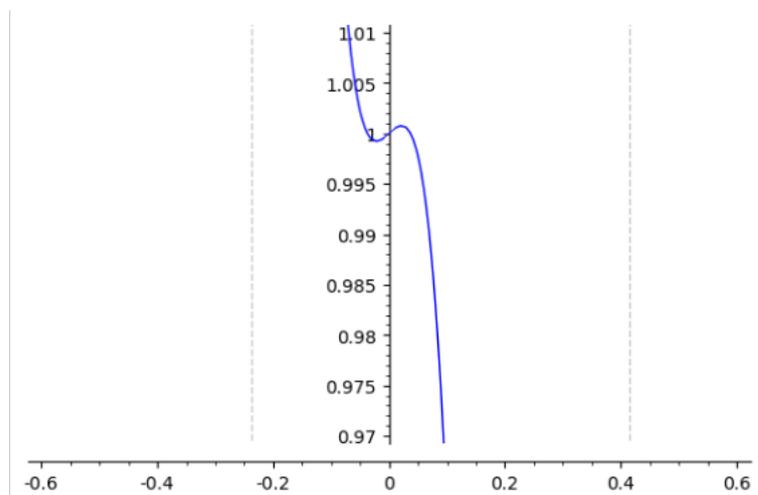
mesma coroa circular,  $m$  atinge os valores inversos, ou seja,  $m$  cresce, chega em um máximo (próximo da circunferência de raio 1) e decresce até se anular. Finalmente, vem a segunda coroa circular onde  $m$  toma valores negativos, seguidamente da última região ilimitada, onde todas configurações correspondente são equilíbrios relativos. Nesta última, a massa  $m$  assume os valores inversos das massas contidas no primeiro disco, portanto,  $m$  decresce vindo do infinito, atinge um mínimo, e depois explode para o infinito novamente.

Figura 15 – Gráfico que representa os valores da massa  $m$  em função da variável  $x$  variando no primeiro intervalo.



Fonte: Autora.

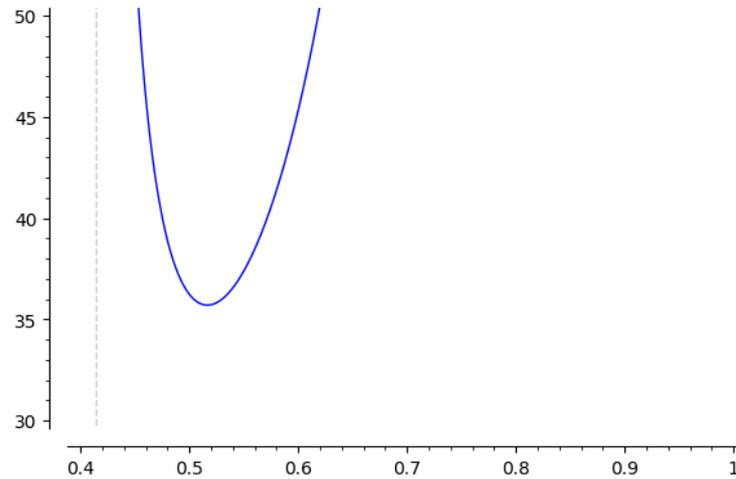
Figura 16 – Gráfico que representa os valores da massa  $m$  em função da variável  $x$  variando no segundo intervalo.



Fonte: Autora.

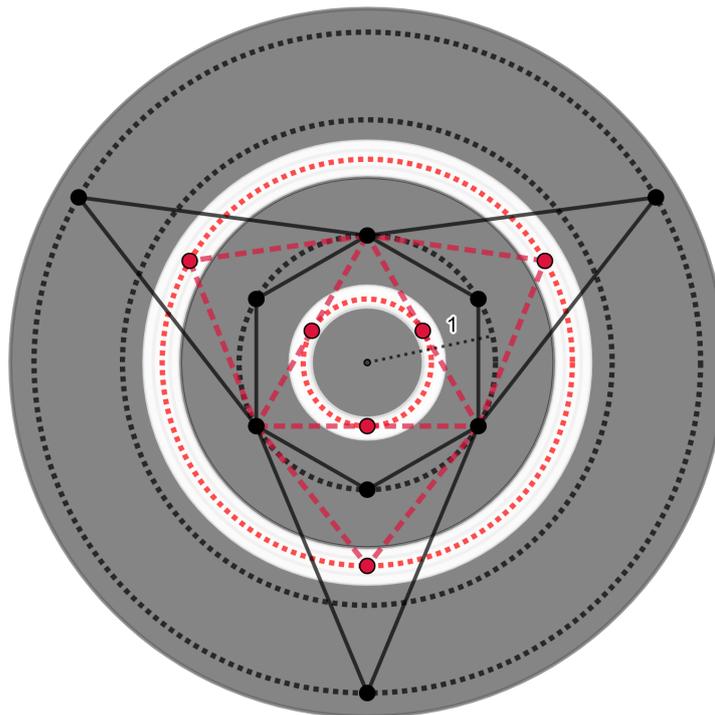
Vamos considerar as bifurcações, ou seja, os valores da massa para os quais há uma mudança do número de equilíbrios relativos correspondentes. Faremos uma análise do que acon-

Figura 17 – Gráfico que representa os valores da massa  $m$  em função da variável  $x$  variando no terceiro intervalo.



Fonte: Autora.

Figura 18 – Sistema anular com duas coroas anulares em branco que não possuem equilíbrios relativos.



Fonte: Autora.

tece com o número de equilíbrios relativos em uma vizinhança dos pontos críticos da função (5.3). A análise será feita apenas nos pontos críticos pertencentes ao primeiro quadrante, pois, pela simetria existente nesta função, esses pontos estão relacionados com os outros pontos críticos que pertencem ao segundo quadrante. Na figura 16 observamos que a massa  $m$  atinge um valor de máximo local, chamaremos esse valor de  $m^*$ . Note que para  $m = m^*$  existem dois

equilíbrios relativos correspondentes. Há uma mudança para três equilíbrios relativos quando consideramos o valor da massa suficientemente menor do que o  $m^*$ . Na figura 17 percebemos que a massa atinge um valor de mínimo local. Em uma vizinhança desse ponto crítico ocorre o mesmo fenômeno citado anteriormente, ou seja, há a mesma mudança do número de equilíbrios relativos correspondentes à uma mesma massa. Neste caso, existem três equilíbrios relativos considerando o valor da massa suficientemente maior que o valor de mínimo local.

### 5.3 ANÁLISE EXATA DO PROBLEMA

Vamos estudar as raízes e os sinais da função (5.3), utilizando o mesmo procedimento feito na seção 4.3. Considere a função

$$x = \frac{z^2 - 1}{2\sqrt{3}z}, \quad (5.4)$$

que leva o intervalo  $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$  em  $(-1, 1)$ . Após a mudança de variável definida por essa função, considerando  $z > 0$ , a função (5.3) se transforma em uma função racional,  $h(z) = \frac{n_1(z)}{d_1(z)}$ , cujo o numerador é o polinômio

$$n_1(z) = -\sqrt{3}z^{16} + 6z^{15} + 2z^{14}(13\sqrt{3} - 48) - \dots - 2z^3(176\sqrt{3} + 75) - 26\sqrt{3}z^2 + 6z + \sqrt{3}.$$

**Proposição 5.3.1.** *A função (5.3) possui duas únicas raízes em  $(-1, 1)$ , uma raiz  $c_1$  em  $(-1, 0)$  e a outra  $c_2$  em  $(0, 1)$ .*

*Demonstração.* Considere a transformação

$$T_1 = \frac{(\sqrt{3} + 2)t + 1}{t + 1}, \quad (5.5)$$

que leva o intervalo o eixo positivo  $[0, \infty)$  no intervalo  $[1, 2 + \sqrt{3})$ . O nosso objetivo se resume em estudar as raízes positivas da composição  $n_1(T_1)$  que é uma função racional na variável  $t$ , onde seu polinômio numerador é dado por

$$n_2(t) = -589824t^{16}(18817\sqrt{3} + 32592) - \dots + 2304t(19\sqrt{3} + 273) - 9216\sqrt{3} + 34560.$$

O polinômio  $n_2(t)$  possui apenas uma variação de sinal dos seus coeficientes: do coeficiente de grau 5, que é positivo, para o coeficiente de grau 6, que é negativo. Assim, pela regra dos sinais, podemos concluir que  $n_2(t)$  possui uma única raiz real positiva. Logo, o polinômio  $n_1(z)$  possui uma única raiz  $[1, 2 + \sqrt{3})$ . De maneira similar, iremos concluir que o polinômio  $n_1(z)$  possui uma única raiz no intervalo  $(2 - \sqrt{3}, 1]$ . Dessa vez iremos considerar a transformação

$$T_2 = \frac{t(2 - \sqrt{3}) + 1}{t + 1},$$

que leva o semi eixo positivo  $[0, \infty)$  no intervalo  $(2 - \sqrt{3}, 1]$  e assim estudar as raízes reais positivas do polinômio numerador da função racional  $n_1(T_2)$  que é dado por

$$n_3(t) = 196608 t^{13} (6811 \sqrt{3} - 11797) + \dots - 2304 t (197 \sqrt{3} - 423) - 9216 \sqrt{3} + 34560.$$

O polinômio  $n_3(t)$  possui apenas uma variação de sinal dos seus coeficientes: o coeficiente de grau 7, que é positivo, para o coeficiente de grau 8, que é negativo. Assim, concluímos que o polinômio  $n_1(z)$  possui uma única raiz no intervalo  $(2 - \sqrt{3}, 1]$ . Com isso provamos que a função  $m(x)$ , possui uma única raiz  $c_1$  em  $(-1, 0)$  e uma única raiz  $c_2$  em  $(0, 1)$ .

□

Nosso objetivo agora é estudar os sinais da função  $m(x)$ , ou seja, os intervalos em que é positiva e os intervalos em que é negativa. Considere as raízes  $c_1$  e  $c_2$  da função  $m(x)$ , essas são raízes da função  $n(x)$ , e então  $-c_1$  e  $-c_2$  são as raízes da função  $d(x)$ , pois

$$n(-x) = d(x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Temos que a função  $n(x)$  é negativa nos intervalos  $(-1, c_1)$  e  $(c_2, 1)$  e positiva no intervalo  $(c_1, c_2)$ . Conseqüentemente, a função  $d(x)$  é negativa nos intervalos  $(-c_1, 1)$  e  $(-1, -c_2)$  e é positiva no intervalo  $(-c_2, -c_1)$ . Concluímos que a função  $m(x)$  é negativa nos intervalos  $(c_1, -c_2)$  e  $(c_2, -c_1)$  e positiva nos demais intervalos, tendo duas assíntotas verticais, uma em  $-c_2$  e outra em  $-c_1$ . Podemos ver essas conclusões detalhadamente na tabela 5.

Tabela 5 – Sinal da função massa na variável  $x$ .

funções	$[-1, c_1]$	$[c_1, -c_2]$	$[-c_2, c_2]$	$[c_2, -c_1]$	$[-c_1, 1]$
$n(x)$	negativa	positiva	positiva	negativa	negativa
$d(x)$	negativa	negativo	positiva	positiva	negativa
$m(x)$	positiva	negativa	positiva	negativa	positiva

Pretendemos agora estudar os pontos de máximos e mínimos locais da função  $m(x)$ . Para isto, basta analisar esses pontos no intervalo  $[0, 1)$ . Ou seja, se  $x_0 \in (0, 1)$  é um ponto de máximo (mínimo) local de  $m(x)$ , então  $-x_0$  é um ponto de mínimo (máximo) local.

**Proposição 5.3.2.** *A função  $m(x)$  possui dois únicos pontos críticos no intervalo  $[0, 1)$ .*

*Demonstração.* Nosso objetivo aqui é analisar os zeros da derivada da função  $h(z)$ . Perceba que, para isto, basta analisar as raízes no intervalo  $[1, 2 + \sqrt{3})$  do polinômio numerador da função racional  $h'(z)$ . Ou seja, se resume a estudar as raízes em  $[1, 2 + \sqrt{3})$  do polinômio

$$p(z) = z^{20} - 12z^{19} - 2z^{18}(80\sqrt{3} + 43) - \dots - 4z^3(160\sqrt{3} - 173) - 2z^2(80\sqrt{3} + 43) - 12z + 1.$$

Vamos analisar as variações de sinais do polinômio numerador da função racional  $p(T_1)$  que é

$$n_4(t) = -9437184t^{20}(1088893\sqrt{3} + 1886018) - \dots + 811008\sqrt{3} - 1410048.$$

$n_4(t)$  possui duas únicas variações de sinais dos seus coeficientes. Logo ou  $p(z)$  possui duas raízes em  $[1, 2 + \sqrt{3})$  ou  $p(z)$  não possui nenhuma raiz nesse mesmo intervalo. Iremos provar que a primeira opção é a verdadeira. Considere as seguintes transformações

$$T_3 = \frac{\left(\frac{11}{10}t + 1\right)}{(t + 1)}$$

e

$$T_4 = \frac{\left(\frac{23}{10}t + \frac{22}{10}\right)}{(t + 1)}.$$

Temos que  $T_3$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $\left[1, \frac{11}{10}\right)$  e  $T_4$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $\left[\frac{22}{10}, \frac{23}{10}\right)$ . Estudaremos as variações de sinais dos coeficientes dos polinômios numerador das funções racionais  $p(T_3)$  e  $p(T_4)$  que são, respectivamente,

$$\begin{aligned} n_5(t) = & 9t^{20}(23963536128048542154096000\sqrt{3} - 40659219354032218507295591) \\ & + 15120t^{19}(271643353502228054208400\sqrt{3} - 462007287420171041037781) + \dots \\ & \dots + 81100800000000000000000000000000\sqrt{3} - 1410048000000000000000000000 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} n_6(t) = & 9t^{20}(60334538321090600918740464000\sqrt{3} - 122019201575080753710856170071) \\ & + 21600t^{19}(495617076884521595612650040\sqrt{3} - 988471491208223625477242263) \dots \\ & \dots + 48318382080t(163822141805818229800\sqrt{3} - 266263388794085266563) \\ & + 388419866061546787329540096000\sqrt{3} - 625508948364659013077207875584. \end{aligned}$$

Temos que  $n_5(t)$  e  $n_6(t)$  possuem apenas uma única variação de sinal dos seus coeficientes, ou seja, podemos concluir que  $p(z)$  possui uma única raiz no intervalo  $\left[1, \frac{11}{10}\right)$  e uma única raiz no intervalo  $\left[\frac{22}{10}, \frac{23}{10}\right)$ . Portanto, a função  $m(x)$  possui dois únicos pontos críticos no intervalo  $[0, 1)$ .  $\square$

Para concluir que tais pontos críticos são pontos de máximo ou mínimo locais, devemos analisar os sinais da função  $h'(z)$  nos intervalos  $[1, \frac{11}{10})$  e  $(\frac{22}{10}, \frac{23}{10})$ , onde cada um deles possuem uma única raiz de  $h'(z)$ . Temos que o ponto crítico que está no interior do primeiro intervalo é um ponto de máximo local, pois

$$h'(1) > 0$$

e

$$h'(\frac{11}{10}) < 0.$$

Já o ponto crítico no interior do segundo intervalo é um ponto de mínimo local, pois

$$h'(\frac{22}{10}) < 0$$

e

$$h'(\frac{23}{10}) > 0.$$

Sendo  $x_1$  o ponto de máximo local da função  $m(x)$  e  $x_2$  o ponto de mínimo local da função  $m(x)$ , no intervalo  $[0, 1)$ , então  $-x_1$  é um ponto de mínimo local e  $-x_2$  é um ponto de máximo local no intervalo  $(-1, 0]$ . Todo o estudo feito até agora a respeito do comportamento da função  $m(x)$  pode ser constatado ao observarmos o seu gráfico figuras 15, 16 e 17.

Para finalizarmos esse estudo inicial, iremos encontrar uma aproximação numérica para as raízes  $c_1$  e  $c_2$  da função  $m(x)$ .

**Proposição 5.3.3.** *Considere  $z_1 \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  e  $z_2 \in (1, 2 + \sqrt{3})$  as raízes da função  $n_1(z)$ . Então  $z_1 \cong 0,5$  e  $z_2 \cong 1,5$ . Consequentemente,  $c_1 \cong -0,433$  e  $c_2 \cong 0,2405$ .*

*Demonstração.* Iremos provar que  $z_1 \in [\frac{23}{50}, \frac{27}{50}]$  e  $z_2 \in [\frac{71}{50}, \frac{38}{25}]$ . Para isto iremos considerar duas transformações

$$T_5 = \frac{27t + 23}{50(t + 1)}$$

e

$$T_6 = \frac{76t + 71}{50(t + 1)}.$$

$T_5$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $[\frac{23}{50}, \frac{27}{50}]$  e  $T_6$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $[\frac{71}{50}, \frac{38}{25}]$ . Fazendo a composição com a função  $n_1(z)$  obteremos duas funções racionais cujo os numeradores possuem apenas uma variação de sinal nos seus coeficientes o que implica o resultado da proposição.  $\square$

## 5.4 RESULTADOS SOBRE A ESTABILIDADE LINEAR DO PROBLEMA

Nesta secção faremos estudo da estabilidade seguindo os mesmos procedimentos utilizados no problema dos triângulos homotéticos. Para que não haja confusão, devemos informar ao leitor que, por conveniência, usaremos as mesmas notações que foram usadas na secção 4.4.1. Aqui, iremos considerar  $\varkappa$  o equilíbrio relativo dado por

$$\varkappa = \left(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, -r, \frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right) \in \mathbb{R}^{12}$$

e, assim como anteriormente,  $A = M^{-1}D\nabla U(\varkappa)$  e  $\kappa = 2\lambda\omega$ .

### 5.4.1 Bloco $V^\tau \oplus V^\alpha$

A estabilidade do problema quando  $A + \kappa J$  restrito ao subespaço  $V^\tau \oplus V^\alpha$ , se resume ao estudo do polinômio de estabilidade do bloco

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & \kappa \\ -\kappa & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

que é dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda^2) &= \det(B_1 + (\omega^2 - \lambda^2)I) \\ &= (\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\lambda_3 + \lambda_4 - 4\omega^2)(\omega^2 - \lambda^2) + \lambda_3\lambda_4 + 4\omega^4. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Iremos utilizar as mesmas condições vistas na proposição 4.4.1, para assim caracterizar os valores  $\lambda^2$  em real e negativo ou não real. Já vimos que a matriz hessiana  $B = D\nabla U(\varkappa)$  tem a forma

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ B_{15} & B_{25} & B_{35} & B_{45} & B_{55} & B_{56} \\ B_{16} & B_{26} & B_{36} & B_{46} & B_{56} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

com

$$B_{jk} = \frac{m_j m_k}{\|x_k - x_j\|^3} [I - 3u_{jk}u_{jk}^T], \quad j \neq k,$$

onde  $u_{jk} = \frac{x_k - x_j}{\|x_k - x_j\|}$  é o vetor unitário na direção de  $x_j$  para  $x_k$  e

$$B_{kk} = -\sum_{j \neq k} B_{jk}.$$

Calculando cada bloco obtemos

$$B_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{36} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5\sqrt{3}}{36} \end{bmatrix},$$

$$B_{13} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{36} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5\sqrt{3}}{36} \end{bmatrix},$$

$$B_{14} = \begin{bmatrix} \frac{m}{(1+r)^3} & 0 \\ 0 & -\frac{2m}{(1+r)^3} \end{bmatrix},$$

$$B_{15} = \begin{bmatrix} -\frac{m(5r^2+4r-4)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & -\frac{3mr\sqrt{3}(r-2)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3mr\sqrt{3}(r-2)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m(r^2+8r-8)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$B_{16} = \begin{bmatrix} \frac{m\left(1-\frac{9r^2}{4(r^2-r+1)}\right)}{(r^2-r+1)^{\frac{3}{2}}} & \frac{3mr\sqrt{3}(r-2)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3mr\sqrt{3}(r-2)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m\left(1-\frac{3(r-2)^2}{4(r^2-r+1)}\right)}{(r^2-r+1)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$B_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{9} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{9} \end{bmatrix},$$

$$B_{24} = \begin{bmatrix} \frac{m\left(1-\frac{9}{4r^2-4r+4}\right)}{(r^2-r+1)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{3m\sqrt{3}(-2r+1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3m\sqrt{3}(-2r+1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m\left(1-\frac{3(-2r+1)^2}{4(r^2-r+1)}\right)}{(r^2-r+1)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$B_{25} = \begin{bmatrix} -\frac{5m}{4(1+r)^3} & -\frac{3m\sqrt{3}}{4(1+r)^3} \\ -\frac{3m\sqrt{3}}{4(1+r)^3} & \frac{m}{4(1+r)^3} \end{bmatrix},$$

$$B_{26} = \begin{bmatrix} -\frac{5\left(r^2-\frac{14}{5}r+1\right)m}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3m\sqrt{3}(r^2-1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3m\sqrt{3}(r^2-1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m(r^2-10r+1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B_{34} &= \begin{bmatrix} \frac{m(4r^2-4r-5)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & -\frac{3m\sqrt{3}(2r-1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3m\sqrt{3}(2r-1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & -\frac{2m(r^2-r-\frac{1}{8})}{(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix}, \\
B_{35} &= \begin{bmatrix} -\frac{5(r^2-\frac{14}{5}r+1)m}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & -\frac{3m\sqrt{3}(r^2-1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3m\sqrt{3}(r^2-1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} & \frac{m(r^2-10r+1)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \end{bmatrix}, \\
B_{36} &= \begin{bmatrix} -\frac{5m}{4(1+r)^3} & \frac{3m\sqrt{3}}{4(1+r)^3} \\ \frac{3m\sqrt{3}}{4(1+r)^3} & \frac{m}{4(1+r)^3} \end{bmatrix}, \\
B_{45} &= \begin{bmatrix} \frac{m^2\sqrt{3}}{36r^3} & -\frac{m^2}{4r^3} \\ -\frac{m^2}{4r^3} & -\frac{5m^2\sqrt{3}}{36r^3} \end{bmatrix}, \\
B_{46} &= \begin{bmatrix} \frac{m^2\sqrt{3}}{36r^3} & \frac{m^2}{4r^3} \\ \frac{m^2}{4r^3} & -\frac{5m^2\sqrt{3}}{36r^3} \end{bmatrix}, \\
B_{56} &= \begin{bmatrix} -\frac{2m^2\sqrt{3}}{9r^3} & 0 \\ 0 & \frac{m^2\sqrt{3}}{9r^3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Aplicando  $A$  nos vetores

$$\begin{aligned}
\mathcal{x}_1 &= (0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{mr}, -\frac{\sqrt{3}}{2mr}, -\frac{1}{2mr}, \frac{\sqrt{3}}{2mr}, -\frac{1}{2mr}), \\
J\mathcal{x}_1 &= (-1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{mr}, 0, \frac{1}{2mr}, -\frac{\sqrt{3}}{2mr}, \frac{1}{2mr}, \frac{\sqrt{3}}{2mr}),
\end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{m}{(1+r)^3} + \frac{m(5r^2+4r-4)}{2(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(1+r)^3 r} + \frac{5r^2+4r-4}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}} r} \\
&\quad - \frac{9(r-2)}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}}, \\
\lambda_4 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2m}{(1+r)^3} - \frac{m(r^2+8r-8)}{2(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{(1+r)^3 r} + \frac{\frac{9r}{4} - \frac{9}{2}}{(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad - \frac{r^2+8r-8}{4(r^2-r+1)^{\frac{5}{2}} r}.
\end{aligned}$$

Usando a expressão de  $\omega^2$  juntamente com a (5.1) para deixar tudo na variável  $r$  obtemos três funções a serem estudadas  $\lambda_3 + \omega^2$ ,  $\lambda_4 + \omega^2$ , e  $\Delta$ . Para facilitar a visão gráfica do comportamento dessas funções faremos uma mudança de variável utilizando a transformação de Möbius (5.2) e assim nosso estudo se resume em analisar os sinais dessas funções no

intervalo  $[-1, 1]$ . Chamaremos, respectivamente, as funções  $\lambda_3 + \omega^2$ ,  $\lambda_4 + \omega^2$ , e  $\Delta$ , agora na variável  $x$ , de

$$\xi_3 = \frac{f_3(x)}{4g(x)}, \quad \xi_4 = \frac{f_4(x)}{4g(x)}, \quad \xi_\Delta = \frac{f_\Delta(x)}{g(x)^2},$$

onde

$$f_3(x) = \left[ 12(x+1)^3(x-1)^3 + \left( 3(x+1)^3(x-1)^3 + 4\sqrt{3}(5x^4 + 10x^2 + 1) \right) \right] \\ (\sqrt{3x^2 + 1}) \left[ (3x^2 + 1)^{\frac{5}{2}} - 60x^2 + 28 \right],$$

$$f_4(x) = \left[ 27x^{10} - 63x^8 - 498x^6 + 450x^4 - 8\sqrt{3}(5x^4 + 10x^2 + 1) \right. \\ \left. (3x^2 + 1)^2 - 57x^2 + 141 \right] (3x^2 + 1) - 4 \left[ 3(18x^4 - 27x^2 + 1)(x+1)^3 \right. \\ \left. (x-1)^3 - 4\sqrt{3}(5x^4 + 10x^2 + 1)(21x^2 - 5) \right] (\sqrt{3x^2 + 1}),$$

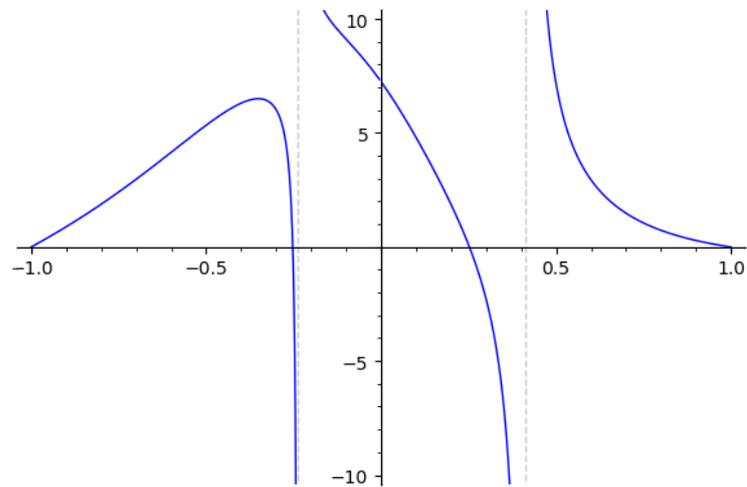
$$f_\Delta(x) = 19683x^{22} + 363042x^{20} + 3413907x^{18} + 5696892x^{16} + 15286374x^{14} \\ + 20620764x^{12} + 17852382x^{10} - 4559856x^8 - 2506665x^6 + 331954x^4 \\ + 85231x^2 + 2\sqrt{3}(10935x^{22} + 10935x^{20} - 238383x^{18} + 627993x^{16} \\ + 731430x^{14} - 1705914x^{12} + 1056642x^{10} - 436110x^8 - 115277x^6 \\ + 65875x^4 - 6627x^2 - 1499 + 2(2187x^{22} - 12393x^{20} + 21141x^{18} \\ - 808623x^{16} - 4483890x^{14} - 5280282x^{12} - 4358358x^{10} + 691458x^8 \\ - 150729x^6 + 230931x^4 - 9807x^2 + \sqrt{3}(32805x^{20} - 43740x^{18} - 102789x^{16} \\ + 142560x^{14} - 517950x^{12} - 54264x^{10} + 1071654x^8 - 655040x^6 + 159817x^4 \\ - 27468x^2 - 5585) + 2589)\sqrt{3x^2 + 1} + 19396,$$

$$g(x) = \left[ 12(3x-1)(x+1)^3 - \left( 3(x+1)^3 + 4\sqrt{3}(x-1) \right) (3x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] (3x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \\ (x+1).$$

Nosso objetivo agora é estudar os sinais das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  nos intervalos em que a função (5.3) possui valores positivos, isto é, em  $[-1, c_1]$ ,  $[-c_2, c_2]$  e  $[-c_1, 1]$  como mostrado na tabela 5. Pela expressão de cada função, percebe-se que esse estudo não é fácil, entretanto temos uma pequena ideia do comportamento delas observando o gráfico das três funções (ver figuras 19, 20 e 21). As três funções possuem as mesmas assíntotas verticais da função  $m(x)$ , em  $-c_2$  e  $-c_1$ , para concluir isso basta observar o fator comum em seus denominadores.

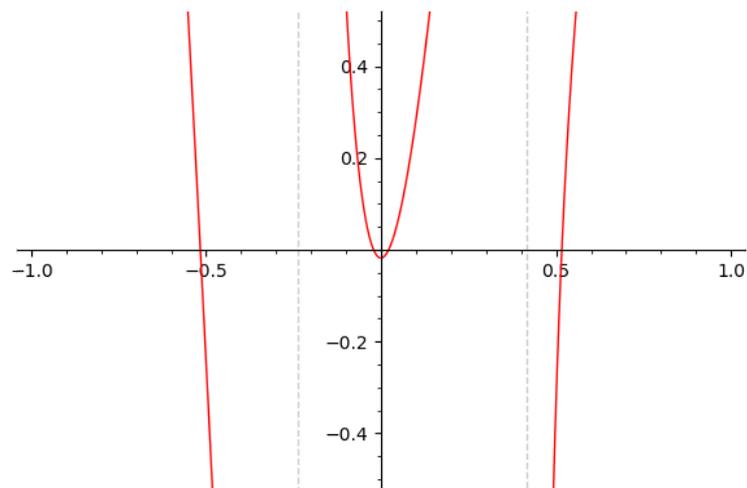
Para estudar as raízes dessas funções, basta analisar apenas as raízes em  $[0, 1]$ , pois as suas respectivas funções numerador são funções pares. Aplicaremos o método da regra dos

Figura 19 – Gráfico que representa os valores da função  $\xi_3$  na variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ .



Fonte: Autora.

Figura 20 – Gráfico que representa os valores da função  $\xi_4$  na variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ .

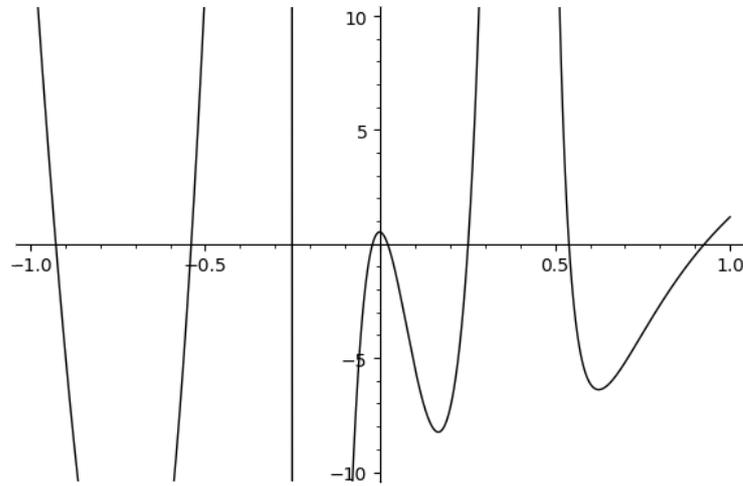


Fonte: Autora.

sinais para estudarmos as raízes dos polinômios numerador das composições das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  com (5.4) no intervalo  $(1, \sqrt{3} + 2)$ .

**Proposição 5.4.1.** *A função  $\xi_3$  possui uma única raiz  $\nu_1$  no intervalo  $[0, 1]$  e  $\nu_1 \cong 0.25197$ . Consequentemente,  $-\nu_1$  também é a única de raiz  $\xi_3$ . em  $(-1, 0]$ .*

Figura 21 – Gráfico que representa os valores da função  $\xi_\Delta$  na variável  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ .



Fonte: Autora.

*Demonstração.* O polinômio numerador da composição de  $\xi_3$  com (5.4) é

$$\begin{aligned} h(z) = & -z^{24} - 8z^{23} - 4z^{22}(20\sqrt{3} - 9) + 456z^{21} - 2z^{20}(1040\sqrt{3} - 463) \\ & + 8z^{19}(1600\sqrt{3} - 1363) - 4z^{18}(2436\sqrt{3} + 15899) + 40z^{17}(4288\sqrt{3} + 3503) \\ & - z^{16}(20864\sqrt{3} - 1174673) - 48z^{15}(40480\sqrt{3} + 20159) \dots \\ & \dots - 2z^4(1040\sqrt{3} - 463) + 456z^3 - 4z^2(20\sqrt{3} - 9) - 8z - 1 \end{aligned}$$

Fazendo a composição de  $h(z)$  com a transformação (5.5), o polinômio numerador tem apenas uma variação de sinal dos seus coeficientes, o que prova  $h(z)$  possui uma única raiz no intervalo  $(1, \sqrt{3} + 2)$ . Logo  $\xi_3$  possui uma única raiz em  $[0, 1)$ . Para achar a aproximação, utilizamos a transformação

$$T_7 = \frac{306t + 305}{200(t + 1)},$$

que leva o eixo positivo no intervalo  $[\frac{1525}{1000}, \frac{153}{100}]$ . Concluímos também que o polinômio numerador tem uma única variação de sinal dos seus coeficientes, o que leva ao resultado.  $\square$

**Proposição 5.4.2.** *A função  $\xi_4$  possui duas únicas raízes  $\nu_2$  e  $\nu_3$  no intervalo  $[0, 1)$ . Além disso,  $0,017069 < \nu_2 < 0,021594$  e  $0,51604 < \nu_3 < 0,51778$ . Conseqüentemente,  $-\nu_2$  e  $-\nu_3$  também são as únicas duas raízes de  $\xi_4$  em  $(-1, 0]$ .*

*Demonstração.* Considere o polinômio

$$\begin{aligned} h_1(z) = & -z^{24} + 16z^{23} + 4z^{22}(40\sqrt{3} + 9) - 1008z^{21} + 2z^{20}(2080\sqrt{3} + 1231) - \dots \\ & \dots - 16z^{17}(18080\sqrt{3} + 16387) + z^{16}(41728\sqrt{3} + 111761) + \dots \\ & \dots + 2z^4(2080\sqrt{3} + 1231) - 1008z^3 + 4z^2(40\sqrt{3} + 9) + 16z - 1 \end{aligned}$$

que é o numerador da composição de  $\xi_4$  com a função (5.4). A composição de  $h_1(z)$  com a transformação (5.5) nos fornece um polinômio no numerador que tem duas variações de sinais nos seus coeficientes, logo concluímos que  $h_1(z)$  tem nenhuma ou duas únicas raízes reais em  $[1, \sqrt{3} + 2)$ . Iremos concluir que a segunda possibilidade é a verdadeira. Temos que  $h_1(1,03) < 0$  e  $h_1(1,0381) > 0$  isso diz que a primeira raiz está no entre os números 1,03 e 1,0381. Por outro lado,  $h_1(2,235) > 0$  e  $h_1(2,24) < 0$ , concluímos que a segunda raiz certamente está entre os números 2,235 e 2,24. Deste modo, podemos concluir que  $\xi_4$  possui duas únicas raízes em  $[0, 1)$ . Sendo  $\nu_2$  e  $\nu_3$  essas raízes, então  $0,017069 < \nu_2 < 0,021594$  e  $0,51604 < \nu_3 < 0,51778$ .  $\square$

**Proposição 5.4.3.** *A função  $\xi_\Delta$  possui quatro únicas raízes no intervalo  $[0, 1)$ . Sendo  $\nu_4, \nu_5, \nu_6$  e  $\nu_7$  essas raízes, podemos concluir também que  $0,021594 < \nu_4 < 0,021816$ ,  $0,24057 < \nu_5 < 0,26122$ ,  $0,53846 < \nu_6 < 0,54189$  e  $0,92479 < \nu_7 < 0,92790$ . Consequentemente,  $-\nu_4, -\nu_5, -\nu_6$  e  $-\nu_7$  são as únicas raízes de  $\xi_\Delta$  no intervalo  $(-1, 0]$ .*

*Demonstração.* O polinômio

$$\begin{aligned} h_2(z) = & z^{46} + z^{45}(10\sqrt{3} + 9) + z^{44}(180\sqrt{3} - 89) - 2z^{43}(50\sqrt{3} - 897) \dots \\ & \dots - 2z^3(50\sqrt{3} - 897) + z^2(180\sqrt{3} - 89) + z(10\sqrt{3} + 9) + 1 \end{aligned}$$

é o polinômio numerador da composição de  $\xi_\Delta$  com a função (5.4). Considere as duas seguintes transformações

$$T_8 = \frac{2t + 1}{t + 1}$$

e

$$T_9 = \frac{t(\sqrt{3} + 2) + 2}{t + 1}.$$

A transformação  $T_8$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $[1, 2)$  e a transformação  $T_9$  leva o semi eixo positivo no intervalo  $[2, \sqrt{3} + 2)$ . O numerador da composição de  $h_2$  com  $T_8$

possui duas únicas variações de sinais dos seus coeficientes, assim também acontece com o numerador da composição com  $T_9$ . Temos ainda que

$$h_2(1, 0381) > 0 \text{ e } h_2(1.0385) < 0,$$

$$h_2(1, 5) < 0 \text{ e } h_2(1.55) > 0,$$

$$h_2(2, 3) > 0 \text{ e } h_2(2, 31) < 0,$$

$$h_2(3, 49) < 0 \text{ e } h_2(3, 5) > 0,$$

o que leva ao resultado da demonstração.  $\square$

Assim, concluímos o estudo das raízes das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  no intervalo  $(-1, 1)$ . Utilizando a proposição 4.4.1, já podemos fornecer informações a respeito das soluções do polinômio de estabilidade dado pela equação (5.7). Mais precisamente, podemos concluir se  $\lambda^2$  é uma solução real e negativa ou uma solução não real, considerando os valores no intervalo onde a massa é positiva, ou seja, onde temos equilíbrios relativos. As próximas três tabelas fornecem, respectivamente, os sinais de cada uma dessas funções dentro de cada intervalo onde temos a massa positiva,  $[-1, c_1]$ ,  $[-c_2, c_2]$  e  $[-c_1, 1]$ . A última linha de cada tabela vai caracterizar a solução  $\lambda^2$  de acordo com a proposição 4.4.1.

Tabela 6 – Comportamento das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  no intervalo  $[-1, c_1]$ .

	$(-1, -\nu_7)$	$(-\nu_7, -\nu_6)$	$(-\nu_6, -\nu_3)$	$(-\nu_3, c_1)$
$\xi_3$	positiva	positiva	positiva	positiva
$\xi_4$	positiva	positiva	positiva	negativa
$\xi_\Delta$	positiva	negativa	positiva	positiva
$\lambda^2$	real e negativa	não real	real e negativa	não real

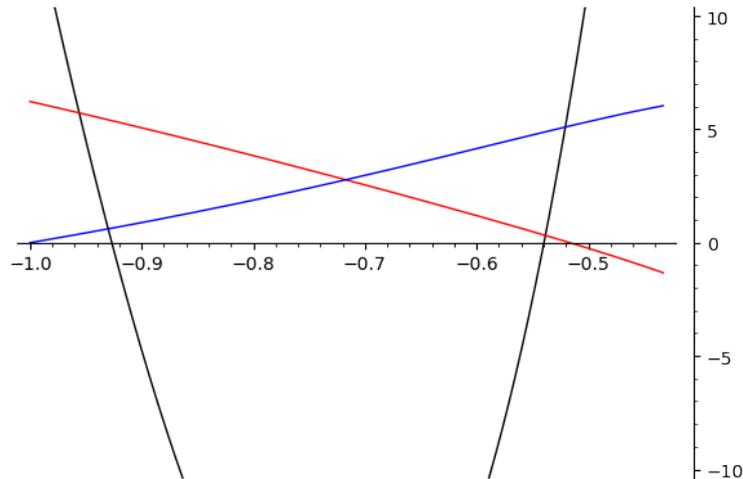
Tabela 7 – Comportamento das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  no intervalo  $[-c_2, c_2]$ .

	$(-c_2, -\nu_4)$	$(-\nu_4, -\nu_2)$	$(-\nu_2, \nu_2)$	$(\nu_2, \nu_4)$	$(\nu_4, c_2)$
$\xi_3$	positiva	positiva	positiva	positiva	positiva
$\xi_4$	positiva	positiva	negativa	positiva	positiva
$\xi_\Delta$	negativa	positiva	positiva	positiva	negativa
$\lambda^2$	não real	real e negativa	não real	real e negativa	não real

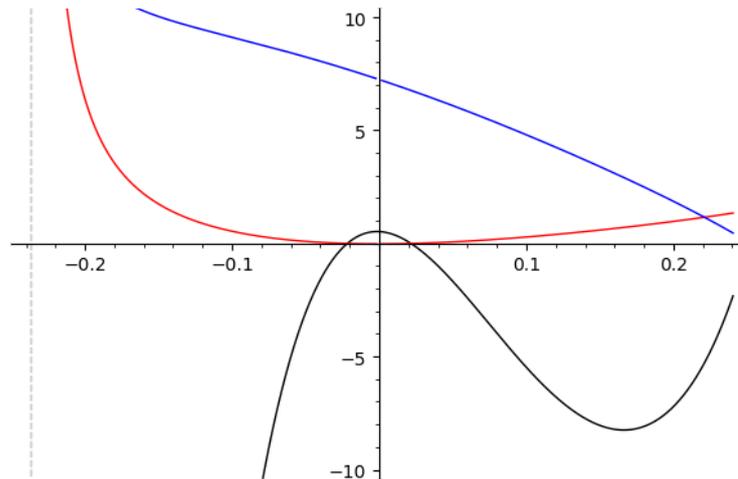
Para uma visão gráfica, as figuras 22, 23 e 24 mostram os gráficos das três funções em cada intervalo citado, lembrando que as curvas de cor azul, vermelha e preta correspondem, respectivamente, as funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$ .

Tabela 8 – Comportamento das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  no intervalo  $[-c_1, 1]$ .

	$(-c_1, \nu_3)$	$(\nu_3, \nu_6)$	$(\nu_6, \nu_7)$	$(\nu_7, 1)$
$\xi_3$	positiva	positiva	positiva	positiva
$\xi_4$	negativa	positiva	positiva	positiva
$\xi_\Delta$	positiva	positiva	negativa	positiva
$\lambda^2$	não real	real e negativa	não real	real e negativa

Figura 22 – Gráficos das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  variando no intervalo  $[-1, c_1]$ .

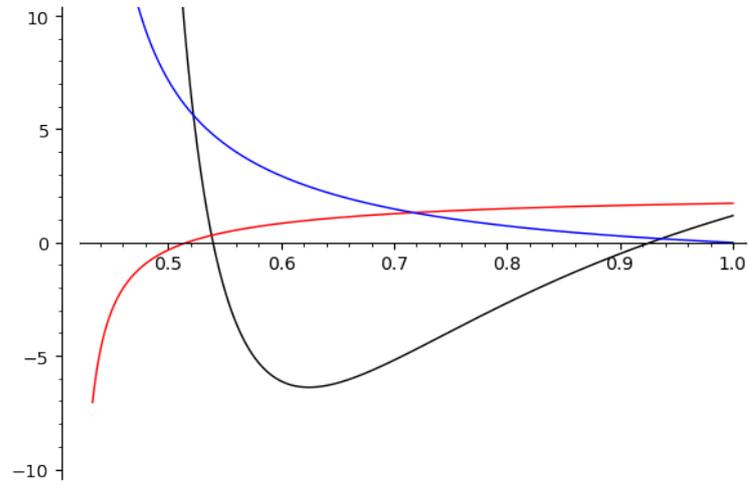
Fonte: Autora.

Figura 23 – Gráficos das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  variando no intervalo  $[-c_2, c_2]$ .

Fonte: Autora.

**Observação 5.4.1.** A raiz  $\nu_2$  da função  $\xi_4$  e a raiz  $\nu_4$  da função  $\xi_\Delta$  são muito próximas, tão próximas a ponto dos intervalos  $(-\nu_4, -\nu_2)$  e  $(\nu_2, \nu_4)$  serem imperceptíveis na figura 23. Podemos perceber de maneira mais clara a separação dessas duas raízes nas proposições 5.4.2 e 5.4.3, basta observarmos os intervalos em que cada uma pertence. Para uma visão gráfica,

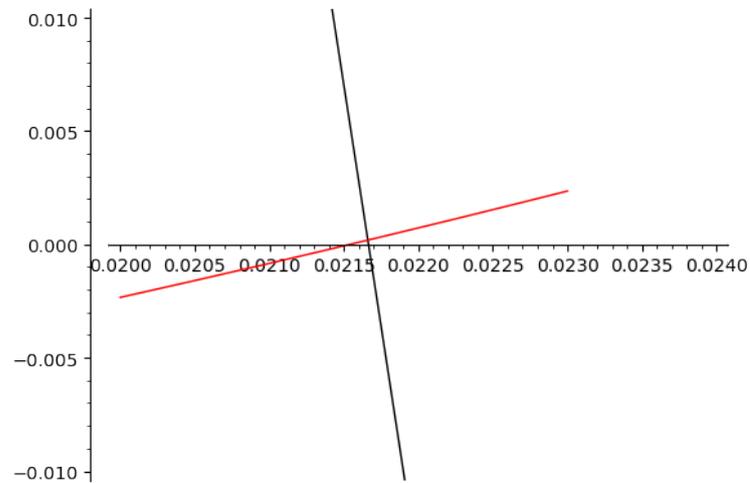
Figura 24 – Gráficos das funções  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  variando no intervalo  $[-c_1, 1]$ .



Fonte: Autora.

a figura 25 mostra o intervalo  $(\nu_2, \nu_4)$  aproximado.

Figura 25 – Gráficos das funções  $\xi_4$  e  $\xi_\Delta$  onde mostra a separação das raízes  $\nu_2$  e  $\nu_4$ .



Fonte: Autora.

### 5.4.2 Bloco $V^\sigma$

Estamos interessados em estudar a estabilidade do problema quando  $A + \kappa J$  restrito ao subespaço  $V^\sigma$ . Considere o bloco

$$B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \kappa & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & \kappa & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -\kappa & 0 & b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -\kappa & b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

O polinômio de estabilidade relacionado a esse bloco é dado por

$$p(\lambda) = \det(B_2 + (\omega^2 - \lambda^2)I). \quad (5.10)$$

Para encontrar as entradas  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  da matriz  $B_2$ , faremos o mesmo procedimento da secção 4.4.2, lembrando que nesse caso a base do espaço  $V^\sigma = V_1^\sigma \oplus V_2^\sigma$  é dada por

$$\{\Delta_v, \Delta_h, \epsilon_v^1, \Delta_v^2, \epsilon_v^2, \epsilon_h^1, \Delta_h^2, \epsilon_h^2\},$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_v^1 &= (0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \Delta_v^2 &= (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}), \\ \epsilon_v^2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), \\ \epsilon_h^1 &= (1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \Delta_h^2 &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}, 0, -\frac{1}{m}, 0), \\ \epsilon_h^2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \end{aligned}$$

são  $M$ -ortogonais e  $A$ -invariantes. Portanto, utilizando

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\langle A\epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, & a_{12} &= \frac{\langle A\Delta_v^2, \epsilon_v^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, \\ a_{22} &= \frac{\langle A\Delta_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}{\langle \Delta_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}, & a_{13} &= \frac{\langle A\epsilon_v^2, \epsilon_v^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, \\ a_{23} &= \frac{\langle A\epsilon_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}{\langle \Delta_v^2, \Delta_v^2 \rangle_M}, & a_{33} &= \frac{\langle A\epsilon_v^2, \epsilon_v^2 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^2, \epsilon_v^2 \rangle_M}, \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\left((1+r)^3 \sqrt{3} + 3m\right) (r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}} + 2m(1+r)^3}{6(r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}}(1+r)^3}, \\
a_{12} &= -\frac{3(m+1) \left[-(r^2 - r + 1)^{\frac{5}{2}} + (r^2 + 2r - 2)(1+r)^3\right]}{2(r^2 - r + 1)^{\frac{5}{2}}(1+r)^3}, \\
a_{22} &= \frac{-(r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}} \left[m(1+r)^3(-1+m)\sqrt{3} - 9\left(m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right)r^3\right]}{9(r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}}(m+1)r^3(1+r)^3} \\
&\quad + \frac{18\left(m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right)r^3(1+r)^3}{9(r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}}(m+1)r^3(1+r)^3}, \\
a_{13} &= \frac{m \left[(-r^2 + r - 1)\sqrt{r^2 - r + 1} + (1+r)^3\right]}{2(r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}}(1+r)^3}, \\
a_{23} &= \frac{m \left[m(1+r)^3(-1+m)\sqrt{3} - 9r^3(m+1)\right] (r^2 - r + 1)^{\frac{5}{2}}}{6(r^2 - r + 1)^{\frac{5}{2}}(m+1)r^3(1+r)^3} \\
&\quad - \frac{m18 \left[(m+1)r^3\left(r^2 - r - \frac{1}{2}\right)(1+r)^3\right]}{6(r^2 - r + 1)^{\frac{5}{2}}(m+1)r^3(1+r)^3}, \\
a_{33} &= \frac{\left[m(1+r)^3(m+2)\sqrt{3} + 9r^3\right] (r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}} + 18r^3(1+r)^3}{18(r^2 - r + 1)^{\frac{3}{2}}r^3(1+r)^3}.
\end{aligned}$$

E, considerando que

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{\langle A\epsilon_h^1, \epsilon_h^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_h^1, \epsilon_h^1 \rangle_M}, & b_{12} &= \frac{\langle A\Delta_h^2, \epsilon_h^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_h^1, \epsilon_h^1 \rangle_M}, \\
b_{22} &= \frac{\langle A\Delta_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}{\langle \Delta_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}, & b_{13} &= \frac{\langle A\epsilon_h^2, \epsilon_h^1 \rangle_M}{\langle \epsilon_v^1, \epsilon_v^1 \rangle_M}, \\
b_{23} &= \frac{\langle A\epsilon_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}{\langle \Delta_h^2, \Delta_h^2 \rangle_M}, & b_{33} &= \frac{\langle A\epsilon_h^2, \epsilon_h^2 \rangle_M}{\langle \epsilon_h^2, \epsilon_h^2 \rangle_M},
\end{aligned}$$

encontramos as seguintes correspondências

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{22} = b_{22}, \quad a_{33} = b_{33}, \quad a_{12} = -b_{12}, \quad a_{13} = b_{13}, \quad a_{23} = -b_{23}.$$

Nossa matriz (5.9) se reescreve da seguinte forma

$$B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \kappa & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & \kappa & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ 0 & -\kappa & 0 & -a_{12} & a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & -\kappa & a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

O polinômio (5.10), é da forma

$$p(\lambda) = \lambda^{12} + (6\omega^2 - 2a_{11} - 2a_{22} - 2a_{33})\lambda^{10} + \dots \quad (5.12)$$

e, seguindo a mesma condição necessária vista na secção 4.4.2, para que  $\lambda^2$  seja real e negativa, para todo  $\lambda$  solução de  $p(\lambda)$ , é necessário que

$$2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - 6\omega^2 < 0. \quad (5.13)$$

Nosso objetivo agora é estudar os sinais da expressão

$$2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - 6\omega^2 \quad (5.14)$$

nos intervalos em que temos  $m > 0$ . Devemos lembrar que (5.14) é uma expressão em função das variáveis  $r$  e  $m$  que, utilizando a equação (5.1), se transforma em uma expressão em função apenas da variável  $r$ . A partir de agora, o procedimento será o mesmo, primeiro faremos a composição com transformação de Möbius (5.2) que nos fornece a seguinte função na variável  $x$

$$\xi = \frac{\xi_n}{\xi_d},$$

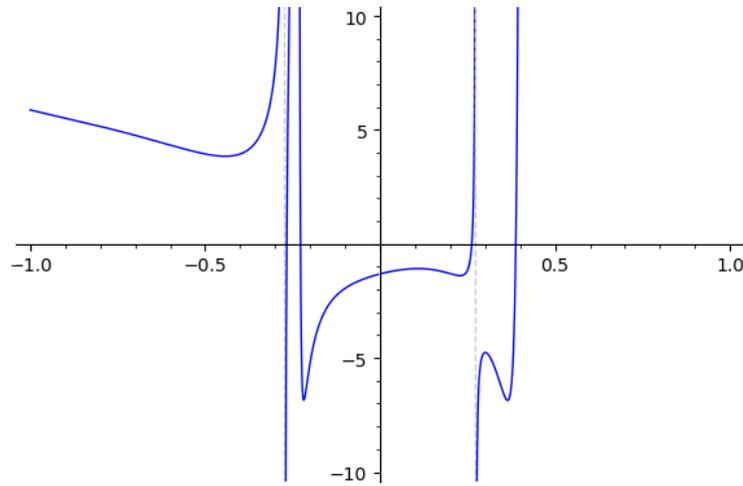
onde

$$\begin{aligned} \xi_n = & -19683x^{28} - 19683x^{27} - 19683x^{26}(4\sqrt{3} - 13) - 2187x^{25}(20\sqrt{3} - 189) + \dots \\ & - 4374x^{23}(232\sqrt{3} + 375) + 1458x^{22}(564\sqrt{3} - 5299) + \dots \\ & - 36x^{14}(2195092\sqrt{3} + 5054265) + 12x^{13}(6192148\sqrt{3} + 7174845) + \dots \\ & + 15x^2(15372\sqrt{3} - 66467) + 3x(12300\sqrt{3} + 6457) \\ & - 16(8748x^{24} + \dots - 4116\sqrt{3} + 1593)\sqrt{3x^2 + 1} + 16320\sqrt{3} - 111336, \\ \xi_d = & 157464x^{24} + 944784x^{23} - 104976x^{22}(2\sqrt{3} - 21) - \dots - 144x^5(1996\sqrt{3} - 3025)\dots \\ & - 288(729x^{22} + 5832x^{21} - \dots - 24\sqrt{3} + 105)\sqrt{3x^2 + 1} + 16224\sqrt{3} - 14040, \end{aligned}$$

o que já podemos ter uma visão gráfica do comportamento de  $\xi$  no intervalo  $[-1, 1]$  (ver figura 26). Agora, iremos compor  $\xi_n$  e  $\xi_d$  com (5.4) onde iremos obter duas funções na variável  $z$ . Estudaremos agora, os sinais da função  $\xi$  nos intervalos  $(-1, c_1)$  e  $(-c_1, 1)$ .

**Proposição 5.4.4.** *A função  $\xi$  é positiva nos intervalos  $[-1, c_1]$  e  $[-c_1, 1]$ .*

Figura 26 – Gráfico da função  $\xi$  com  $x$  variando no intervalo  $[-1, 1]$ .



Fonte: Autora.

*Demonstração.* Considere os polinômios numeradores da composição de  $\xi_n$  e  $\xi_d$  com (5.4). Primeiro, iremos fazer a composição de cada um deles com a transformação

$$T_9 = \frac{27t - 50\sqrt{3} + 100}{50(t + 1)},$$

que leva o semi eixo positivo no intervalo  $[2 - \sqrt{3}, \frac{27}{50})$ . Concluimos que os respectivos numeradores dessas composições não possuem variações dos sinais de seus coeficientes. Isso prova que  $\xi_n$  e  $\xi_d$  não possuem raízes no intervalo  $[-1, c_1]$ . Calculando essas funções em qualquer valor nesse intervalo, percebemos que ambas são positivas e portanto  $\xi$  também o é. De maneira análoga, dessa vez utilizando a transformação

$$T_{10} = \frac{10t(\sqrt{3} + 2) + 19}{10(t + 1)},$$

que leva o semi eixo positivo no intervalo  $[\frac{19}{10}, \sqrt{3} + 2)$ , se conclui que  $\xi$  é positiva no intervalo  $[-c_1, 1]$ .  $\square$

A proposição anterior nos diz que os equilíbrios relativos correspondentes aos intervalos  $[-1, c_1]$  e  $[-c_1, 1]$  são instáveis, pois certamente a desigualdade (5.13) não acontece, o que significa dizer que deve existir uma solução  $\lambda$  para o polinômio (5.12), onde  $\lambda^2$  é não real. Por outro lado, quando se trata do intervalo  $[-c_2, c_2]$ , a tabela 7 mostra três subintervalos em que temos instabilidades dos seus respectivos equilíbrios relativos e dois subintervalos,  $(-\nu_4, -\nu_2)$  e  $(\nu_2, \nu_4)$ , que são possíveis a terem equilíbrios relativos estáveis. O gráfico 26, mostra que a função  $\xi$  tem valores negativos nesses dois intervalos e com isso nada podemos afirmar sobre a estabilidade desses equilíbrios relativos.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese de doutorado assumiu como objetivo apresentar o estudo sobre estabilidade linear de duas famílias de equilíbrios relativos: dois triângulos equiláteros concêntricos homotéticos e dois triângulos equiláteros concêntricos onde um é a rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  do outro. Para tal, apoiou-se em uma importante aplicação da teoria de representação de grupos finitos que fornece uma fatoração do polinômio de estabilidade. Essa fatoração vem da bloco-diagonalização da matriz  $A + \kappa J$  que depende da decomposição do espaço dos deslocamentos planares de um sistema anular em soma de subespaços isotípicos que, por sua vez, são invariantes por  $A + \kappa J$ . Lembremos que  $A$  é a matriz hessiana do potencial multiplicada pela matriz inversa das massas e  $J$  é a matriz bloco-diagonal cuja diagonal principal é formada pela matriz  $2 \times 2$  que realiza a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em torno da origem no sentido anti-horário.

Após a fatoração do polinômio de estabilidade, a análise resumiu-se em estudar raízes e sinais de funções específicas com expressões complicadas. É esperado que qualquer estudo a respeito das soluções do problema planar de seis corpos forneça expressões complicadas a serem analisadas, por conta da quantidade de corpos do problema. Entretanto vimos que, através de mudanças de variáveis adequadas, utilizando algumas transformações de Möbius, além da observação de algumas simetrias existentes em algumas expressões, conseguimos resumir o estudo em uma análise de zeros de polinômios de uma variável e coeficientes reais, a qual, por sua vez, é feito de maneira bastante eficiente utilizando a técnica de Vincent.

Sem dúvidas, a maior dificuldade foi a análise da estabilidade linear referente ao bloco do subespaço isotípico  $V^\sigma$  de dimensão 8. Isso se deu pela não existência de uma condição necessária e suficiente para a estabilidade linear. A condição necessária que utilizamos nessa análise foi totalmente eficaz para provarmos a instabilidade linear de todos os equilíbrios relativos do primeiro caso. Contudo, não obtemos total eficiência no segundo caso, pois ficamos com dois subintervalos que embora pequenos, permaneceram além do alcance dos nossos métodos. Tudo isso nos faz pensar na dificuldade de aplicarmos essa técnica considerando um sistema anular com mais anéis, o que implicaria em subespaços isotípicos com dimensões maiores e expressões mais difíceis de serem analisadas.

Apesar das limitações verificadas, considera-se que essa teoria, unida a novos resultados, métodos e técnicas, permaneça uma ferramenta de alto nível no âmbito do estudo de estabilidade linear de equilíbrios relativos formados por sistema anulares, deixando assim um

esperançoso mecanismo para futuros desfechos.

## REFERÊNCIAS

- AKRITAS, A. *Elements of computer algebra with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- EULER, L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, p. 144–151, 1767.
- HOPPE, R. Erweiterung der bekannten speciallösung des dreikörperproblems. *Arch. Math. Phys*, v. 64, p. 218, 1879.
- LAGRANGE, J. Essai sur le problème des trois corps, vol. 6, oeuvres de lagrange. *Gauthier-Villars, Paris*, p. 229, 1772.
- LEANDRO, E. S. G. Factorization of the stability polynomials of ring systems. *arXiv preprint arXiv:1705.02701*, 2017.
- LEANDRO, E. S. G. Structure and stability of the rhombus family of relative equilibria under general homogeneous forces. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 31, n. 2, p. 933–958, 2019.
- LEHMANN-FILHÉS, R. Ueber zwei fälle des vielkörperproblems. *Astronomische Nachrichten*, WILEY-VCH Verlag Altona, v. 127, n. 9, p. 137–143, 1891.
- MAXWELL, J. C. *On the Stability of the Motion of Saturn's Rings...* [S.l.]: Macmillan and Company, 1859.
- MEYER, K. R.; OFFIN, D. C. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. [S.l.]: Springer Cham, 2017.
- MOECKEL, R. Linear stability of relative equilibria with a dominant mass. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Springer, v. 6, n. 1, p. 37–51, 1994.
- MOECKEL, R. Linear stability analysis of some symmetrical classes of relative equilibria. In: *Hamiltonian Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer, 1995. p. 291–317.
- MOULTON, F. R. The straight line solutions of the problem of n bodies. *The Annals of Mathematics*, v. 12, n. 1, p. 1–17, 1910.
- ROBERTS, G. E. Spectral instability of relative equilibria in the planar n-body problem. *Nonlinearity*, v. 12, n. 4, p. 757, 1999.
- SERRE, J.-P. *Linear representations of finite groups*. [S.l.]: Springer, 1977. v. 42.
- STERNBERG, S. *Group theory and physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- USPENSKY, J. V. *Theory of equations*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1948.
- VINCENT, A. J. H. Note sur la résolution des équations numériques. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1834.
- VINCENT, A. J. H. Addition à une précédente note relative à la résolution des équations numériques. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, p. 235–243, 1838.