



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

THIAGO RODRIGUES ALVES SOUZA

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE MOTOR FOGUETE A PROPELENTE  
LÍQUIDO RESFRIADO POR VÓRTICE BIDIRECIONAL**

Recife  
2019

THIAGO RODRIGUES ALVES SOUZA

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE MOTOR FOGUETE A PROPELENTE  
LÍQUIDO RESFRIADO POR VÓRTICE BIDIRECIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
à Universidade Federal de Pernambuco como  
requisito parcial para obtenção do título de Ba-  
charel em Engenharia Mecânica.

**Orientador:** Prof. Dr. Marcus Costa de Araújo

**Coorientador:** Prof. Dr. Alex Maurício Araújo

Recife  
2019

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Maria Luiza de Moura Ferreira, CRB-4 / 1469

S729s Souza, Thiago Rodrigues Alves.  
Simulação computacional de motor foguete a propelente líquido resfriado por vórtice bidirecional / Thiago Rodrigues Alves Souza. - 2019.  
76 folhas, il., tab., abr. sigl. e símb.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Costa de Araújo.  
Coorientador: Prof. Dr. Alex Maurício Araújo.

TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Departamento de Graduação em Engenharia Mecânica, 2019.  
Inclui Referências e Apêndice.

1. Engenharia Mecânica. 2. Câmara. 3. Combustão. 4. Vórtice.  
5. Resfriamento. 6. Motor. 7. Foguete. I. Araújo, Marcus Costa de (Orientador).  
II. Araújo, Alex Maurício (Coorientador). III. Título.

UFPE

621 CDD (22. ed.)

BCTG/2019-462

THIAGO RODRIGUES ALVES SOUZA

**SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE MOTOR FOGUETE A PROPELENTE  
LÍQUIDO RESFRIADO POR VÓRTICE BIDIRECIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
à Universidade Federal de Pernambuco como  
requisito parcial para obtenção do título de Ba-  
charel em Engenharia Mecânica.

Aprovado em: 06 / 12 / 2019 .

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Marcus Costa de Araújo (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Alex Maurício Araújo (Coorientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Guilherme Barbosa Lopes Júnior (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

*À minha mãe,  
que sempre fazia bolo de chocolate  
quando me via estressado com o TCC.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcus Costa de Araújo, por apoiar a pesquisa aeroespacial no ambiente acadêmico e pelo tempo dedicado durante o processo de realização desta pesquisa.

Ao Prof Dr. Alex Maurício de Araújo, meu coorientador, por disponibilizar a estrutura do Laboratório de Fluidos do DEMEC-UFPE em horário integral para a realização das simulações computacionais.

Ao projeto de extensão Asa Branca Rocket Design, por despertar em mim a paixão por engenharia aeroespacial.

A ANSYS, Inc., por fornecer versão estudantil dos seus softwares de simulação numérica e por permitir o uso das figuras dos resultados como cortesia.

Por fim, ao graduando Victor Veloso Assunção, por incentivar e sugerir modificações geométricas importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Recentemente, com a exploração econômica dos lançamentos feitos a partir da Terra, a ênfase da corrida espacial se voltou para a diminuição de custo. Neste trabalho de pesquisa, o conceito de câmara de vórtice criado por Dawson em 1960 é utilizado para avaliar uma configuração de injeção dos propelentes que mira o resfriamento completo do motor. A diminuição dos esforços térmicos no motor possibilita maior flexibilidade na escolha de materiais de menor peso e custo, além de promover a reutilização das partes. A análise é feita à partir de uma simulação computacional compressível com um Modelo de Tensão de Reynolds para turbulência e o Modelo de Flâmulas Laminares para a combustão, utilizando o software ANSYS® CFX® 2019 R3. Os resultados mostram que as modificações propostas melhoram o resfriamento do prato superior da câmara quando comparado a estudos anteriores. Por fim, uma solução com resfriamento regenerativo para o bocal é apresentada para atingir o resfriamento completo do motor.

**Palavras-chave:** Câmara. Combustão. Vórtice. Resfriamento. Motor. Foguete.

## **ABSTRACT**

In recent years, with the economic exploitation of Earth launches, the emphasis of the space race has turned to cost reduction. In this research, the concept of vortex chamber created by Dawson in 1960 is used to evaluate a propellant injection configuration that targets full engine cooling. Reducing the engine's thermal stress allows for greater flexibility in selecting materials of lower weight and cost, as well as promoting the reuse of parts. The analysis is made using computational simulation of a compressible flow with Reynolds Stress Model for turbulence and Laminar Flamelet Model for combustion with ANSYS® CFX® 2019 R3 software. The results show that the proposed modifications improve the cooling of the upper chamber plate when compared to previous studies. Finally, a regenerative cooling solution for the nozzle is presented to achieve complete engine cooling.

**Keywords:** Chamber. Combustion. Vortex. Cooling. Motor. Rocket.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Velocidade de uma partícula na sua trajetória . . . . .	21
Figura 2 – Deformação angular de uma partícula de fluido . . . . .	23
Figura 3 – Variação da densidade com o número de Mach . . . . .	26
Figura 4 – Esquemático de um motor foguete a propelente líquido . . . . .	28
Figura 5 – Esquemático simplificado de uma câmara de vórtice . . . . .	29
Figura 6 – Bocal convergente-divergente . . . . .	30
Figura 7 – Resfriamento regenerativo do bocal . . . . .	31
Figura 8 – Técnicas de resfriamento de filme . . . . .	32
Figura 9 – Representação do conceito de flâmulas laminares . . . . .	38
Figura 10 – Metodologia de solução do problema . . . . .	39
Figura 11 – Geometria de referência . . . . .	40
Figura 12 – Metodologia de solução numérica . . . . .	41
Quadro 1 – Diferenças entre a metodologia de referência e a metodologia do autor . . .	42
Figura 13 – Geometria da Etapa 1 . . . . .	42
Figura 14 – Geometria da Etapa 2 . . . . .	43
Figura 15 – Domínio computacional da Etapa 1 . . . . .	44
Figura 16 – Estudo da malha . . . . .	45
Figura 17 – Malha em perspectiva e seção transversal . . . . .	45
Figura 18 – Linhas de corrente da Etapa 1 coloridas pela fração mássica de H <sub>2</sub> O . . . . .	50
Figura 19 – Gráfico da velocidade axial no plano XZ para a Etapa 1 . . . . .	51
Figura 20 – Gráfico das forças de empuxo na direção $z$ para a Etapa 1 . . . . .	51
Figura 21 – Gráfico da velocidade axial obtido por Fang, Majdalani e Chiaverini (2004)	52
Figura 22 – Manta de separação dos vórtices na Etapa 1 . . . . .	52
Figura 23 – Gráfico da velocidade tangencial no plano XZ para a Etapa 1 . . . . .	53
Figura 24 – Gráfico da velocidade radial no plano XZ para a Etapa 1 . . . . .	54
Figura 25 – Gráfico da pressão estática absoluta no plano XZ para a Etapa 1 . . . . .	54
Figura 26 – Contornos de pressão no início e no fim da seção reta do bocal . . . . .	55
Figura 27 – Número de Mach no plano XZ para a Etapa 1 . . . . .	56
Figura 28 – Temperatura no plano XZ da câmara nas Etapas 1 e 2 . . . . .	56
Figura 29 – Temperatura no prato superior nas Etapas 1 e 2 . . . . .	57
Figura 30 – Fração mássica de O <sub>2</sub> e H <sub>2</sub> no plano XZ na Etapa 2 . . . . .	58
Figura 31 – Fração mássica de H <sub>2</sub> O no plano XZ nas Etapas 1 e 2 . . . . .	58
Figura 32 – Resfriamento do bocal com injeção na parte convergente . . . . .	59
Figura 33 – Modelo da câmara de vórtice com resfriamento regenerativo . . . . .	60
Figura 34 – Resultados preliminares da câmara de vórtice com resfriamento regenerativo	60

Figura 35 – Modelo esquemático da câmara de combustão . . . . . 68

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variação da pressão nas entradas e saída da câmara em relação a pressão média	55
Tabela 2 – Propriedades do escoamento na saída para as Etapas 1 e 2 . . . . .	59

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

NASA	National Aeronautics and Space Administration
SNC	Sierra Nevada Corporation
ORBITEC	Orbital Technologies Corporation
VCCW	Vortex Combustion Cold-Wall Chamber
TTR	Teorema de Transporte de Reynolds
CFD	Computational Fluid Dynamics
RSM	Reynolds Stress Method
BSL-RSM	Baseline Reynolds Stress Method
SST	Shear-Stress-Transport Method
PDF	Probability Density Function

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Raio máximo da câmara.
$\alpha$	Raio de separação dos vórtices.
$A$	Área.
$b$	Raio máximo da garganta.
$\beta$	Razão entre o raio da câmara e o raio do bocal.
$B$	Constante genérica.
$C$	Constante genérica.
$C_\mu$	Constante do modelo $\kappa - \varepsilon$ .
$\delta$	Parâmetro geométrico do fluxo de entrada.
$D$	Constante genérica.
$\varepsilon$	Dissipação da turbulência.
$e$	Energia por unidade de massa.
$E$	Energia total.
$\phi$	Propriedade na equação de transporte.
$\Phi$	Função dissipação viscosa.
$F$	Força.
$\gamma$	Razão dos calores específicos.
$\Gamma$	Coefficiente de difusividade na equação de transporte.
$g$	Gravidade.
$G$	Função linear em $\psi$ .
$i$	Energia interna.
$J_{1/2}$	Função de Bessel de meia ordem.
$k$	Condutividade térmica.
$\kappa$	Energia cinética turbulenta.
$l$	Comprimento da câmara.
$\lambda$	Constante da função de Bessel.
$L$	Dimensão característica da câmara.
$\mu$	Viscosidade dinâmica.
$\mu_t$	Viscosidade turbulenta.

$M$	Número de Mach.
$\hat{n}$	Direção normal.
$\eta$	Propriedade intensiva.
$N$	Propriedade extensiva.
$\omega$	Frequência turbulenta.
$\dot{W}$	Fluxo de trabalho realizado.
$p$	Pressão.
$\psi$	Função de linha de Stokes.
$P$	Momento linear.
$\dot{Q}$	Fluxo de calor recebido.
$\dot{Q}_i$	Fluxo de fluido na entrada.
$\dot{Q}_o$	Fluxo de fluido na saída.
$r$	Raio na seção cilíndrica da câmara.
$\rho$	Densidade.
$Re$	Número de Reynolds.
$\sigma$	Tensão normal.
$S$	Termo de geração.
$t$	Tempo.
$\theta$	Ângulo azimutal no plano transversal da câmara.
$\tau$	Tensão cisalhante.
$T$	Temperatura.
$u$	Componente da velocidade na direção $x$ .
$U$	Velocidade média de injeção de fluido.
$v$	Componente da velocidade na direção $y$ .
$V$	Velocidade.
$V_\infty$	Velocidade do fluxo livre.
$\forall$	Volume.
$w$	Componente da velocidade na direção $z$ .
$\zeta$	Vorticidade.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>16</b>
1.1	OBJETIVOS . . . . .	17
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivo Geral</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>20</b>
3.1	PRINCÍPIOS FÍSICOS . . . . .	20
<b>3.1.1</b>	<b>Teorema de Transporte de Reynolds</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Conservação da Massa</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Conservação do Momento</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>3.1.4</b>	<b>Conservação da Energia</b> . . . . .	<b>22</b>
3.2	ESCOAMENTO EM VÓRTICE . . . . .	23
<b>3.2.1</b>	<b>Vórtice Forçado</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Vórtice Livre</b> . . . . .	<b>24</b>
3.3	SIMPLIFICAÇÕES . . . . .	24
<b>3.3.1</b>	<b>Regime Permanente</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Escoamento Incompressível</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Escoamento Invíscido</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>3.3.4</b>	<b>Equações de Navier-Stokes</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.3.5</b>	<b>Equação de Euler</b> . . . . .	<b>28</b>
3.4	MOTOR FOGUETE A PROPELENTE LÍQUIDO . . . . .	28
<b>3.4.1</b>	<b>Câmara de Combustão</b> . . . . .	<b>28</b>
3.4.1.1	Câmara de Vórtice . . . . .	29
<b>3.4.2</b>	<b>Bocal Convergente-Divergente</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>3.4.3</b>	<b>Resfriamento</b> . . . . .	<b>30</b>
3.4.3.1	Resfriamento Regenerativo . . . . .	31
3.4.3.2	Resfriamento de Filme . . . . .	31
3.5	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	32
<b>3.5.1</b>	<b>Equação do Transporte</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Método dos Volumes Finitos</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3.5.3</b>	<b>Modelos de Turbulência</b> . . . . .	<b>34</b>
3.5.3.1	Modelos de Viscosidade Turbulenta . . . . .	36
3.5.3.2	Modelos de Tensão de Reynolds . . . . .	37
<b>3.5.4</b>	<b>Modelos de Combustão</b> . . . . .	<b>37</b>
3.5.4.1	Modelo de Flâmulas Laminares . . . . .	37

<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>39</b>
4.1	ANÁLISE DO PROBLEMA DE REFERÊNCIA	40
4.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA	41
<b>4.2.1</b>	<b>Especificação do Problema</b>	<b>42</b>
4.2.1.1	Geometria da Etapa 1	42
4.2.1.2	Geometria da Etapa 2	43
<b>4.2.2</b>	<b>Domínio Computacional</b>	<b>44</b>
<b>4.2.3</b>	<b>Discretização</b>	<b>44</b>
<b>4.2.4</b>	<b>Condições de Contorno</b>	<b>46</b>
<b>4.2.5</b>	<b>Fluidos</b>	<b>47</b>
<b>4.2.6</b>	<b>Flutuabilidade</b>	<b>47</b>
<b>4.2.7</b>	<b>Escoamento de 1ª Ordem <math>\kappa - \omega</math></b>	<b>48</b>
<b>4.2.8</b>	<b>Escoamento de 1ª Ordem RSM</b>	<b>49</b>
<b>4.2.9</b>	<b>Escoamento de 2ª Ordem RSM</b>	<b>49</b>
<b>4.2.10</b>	<b>CrITÉrios de Convergência</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>50</b>
5.1	ETAPA 1	50
5.2	ETAPA 2	56
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>62</b>
6.1	TRABALHOS FUTUROS	62
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>63</b>
	<b>APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA</b>	<b>65</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No passado, o desenvolvimento de novos sistemas de propulsão para foguetes focava principalmente na confiabilidade, enquanto a redução de custo e a performance tinham papéis secundários. Recentemente, a ênfase da corrida espacial se voltou para a diminuição de custo. Para tal, o primeiro estágio dos veículos lançados, normalmente o maior e mais caro, necessita ser recuperável e reutilizável (SUTTON, 2016).

Em 2017, o foguete Falcon 9 da empresa americana SpaceX foi o primeiro foguete orbital da história a pousar seu primeiro estágio e reutilizá-lo. Décadas de avanço tecnológico permitiram que seu custo de desenvolvimento estimado fosse de U\$ 390 milhões de dólares (NASA, 2011), enquanto o programa espacial americano Apollo, o qual levou o homem a lua em 1969, custou U\$ 25.4 bilhões de dólares (United States, 1973), equivalente a U\$ 112 bilhões de dólares atuais.

Segundo Sutton (2016), até 2016 todos os lançamentos a partir da terra utilizaram sistemas de propulsão química. Nesses sistemas, propelentes sólidos, líquidos ou gasosos são utilizados para armazenar e fornecer energia. A queima do propelente produz gases quentes de alta pressão que são acelerados e expulsos pelo bocal. Uma vez que a temperatura desses gases na câmara de combustão pode atingir duas vezes a temperatura de fusão do aço, é necessário o resfriamento de todas as superfícies expostas.

A necessidade de utilização de materiais com alta resistência ao calor, como o aço, e possivelmente de um sistema de resfriamento, adiciona peso, complexidade e custo à estrutura dos motores. Sendo assim, as agências espaciais buscaram uma solução para o problema de superaquecimento das câmaras de combustão que contribuísse para a redução de custo dos motores de foguete a propelente líquido.

Com essa motivação, o conceito de câmara de vórtice em sistemas propulsivos bilíquidos surgiu com Dawson (1960) em um relatório privado da NASA, citado em Trinh, Knuth e Michaels (2000). Na câmara de vórtice, um dos propelentes é injetado tangencialmente ao diâmetro interno da câmara, formando um vórtice mais externo que espirala em direção ao topo. Na parte superior, o vórtice externo flui para dentro formando um vórtice interno em espiral descendente. Graças à natureza do fluxo do vórtice bidirecional, gases mais frios escoam pelas paredes da câmara, resultando em um resfriamento de filme, enquanto gases mais quentes percorrem seu centro. Ademais, o caminho percorrido pelas partículas de fluido e o tempo de residência na câmara aumentam, permitindo que comprimentos de câmara mais curtos sejam utilizados.

Atualmente a Sierra Nevada Corporation (SNC) em conjunto com o Laboratório de Pesquisa da Força Aérea americana (do inglês *Air Force Research Laboratory*) desenvolve os motores de vórtice VR35K-A, com 35000 lbf de empuxo, na intenção de comercializá-los para empresas que realizam lançamentos de veículos espaciais. Segundo a SNC, o menor tamanho do motor de vórtice o torna até 50% mais barato (Sierra Nevada Corporation, 2018).

Os estudos sobre câmara de vórtice de Trinh, Knuth e Michaels (2000), Chiaverini et al. (2002), Chiaverini et al. (2003), Fang e Majdalani (2003), Fang, Majdalani e Chiaverini (2004) e Majdalani e Chiaverini (2017) analisam as configurações de injeção de propelente na câmara. Nesses estudos, as paredes da seção cilíndrica da câmara são resfriadas pelo filme de oxidante, porém o prato superior e o bocal ainda permanecem diretamente expostos à chama.

Em modelo simulado computacionalmente, a presente pesquisa visa expandir o resfriamento em câmaras de vórtice para todas as áreas que antes ficariam em contato com a chama, nomeadamente o prato superior e o bocal. Consoante Fang e Majdalani (2003), a diminuição dos esforços térmicos no motor não só reduz as necessidades de resfriamento das paredes do conjunto, mas também possibilita maior flexibilidade na escolha de materiais de menor peso e custo, além de promover a reutilização das partes.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

O trabalho de pesquisa tem como objetivo geral avaliar uma configuração de injeção de combustível e oxidante que possibilite o resfriamento completo da câmara de combustão a partir da simulação computacional do escoamento de um vórtice bidirecional em motor de foguete a propelente líquido.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

1. Simular o modelo de câmara de vórtice proposto por Fang, Majdalani e Chiaverini (2004), reproduzido em Majdalani e Chiaverini (2017), e contrapor os resultados obtidos;
2. Modificar a disposição dos injetores visando obter resfriamento de filme em toda a câmara de combustão;
3. Avaliar o desempenho térmico e propulsivo da nova configuração.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Em Trinh, Knuth e Michaels (2000), nota-se que os estudos sobre câmaras de vórtice iniciaram-se na década de 1960 através de relatórios privados da NASA em parceria com o exército americano e, mais recentemente, com a empresa privada Orbital Technical Corporation (ORBITEC). Constatou-se que essas câmaras apresentam potencialmente uma série de vantagens sobre as câmaras convencionais. A saber, o desempenho dos motores analisados se mostrou alto mesmo em uma baixa razão entre comprimento e diâmetro da câmara, com eficiências combustivas de até 98%.

Entre as propostas conceituais elencadas no estudo, a Câmara de Combustão de Vórtice de Paredes Frias ou VCCW (do inglês *Vortex Combustion Cold-Wall Chamber*), foi aquela que chegou mais próxima de um motor foguete totalmente resfriado. Injetando oxigênio gasoso tangencialmente ao diâmetro interno da câmara na porção convergente do bocal e hidrogênio gasoso axialmente na parte superior, em razão próxima a estequiométrica, os testes realizados pela ORBITEC conseguiram manter paredes de acrílico relativamente frias sem o uso de resfriamento externo. Apesar disso, nesse esquema, parte do bocal e o prato superior ainda necessitaram de resfriamento ablativo.

Avançando no conceito da VCCW, Chiaverini et al. (2002) realizou testes para caracterizar a melhor disposição dos injetores e a influência da geometria da câmara. Observou-se que a injeção radial de hidrogênio no tampo superior da câmara produziu a melhor combinação de performance e baixa temperatura de parede, enquanto a injeção axial, inicialmente proposta, se mostrou a pior das opções. Câmaras menores também apresentaram paredes mais frias que as de maior dimensão, fato atribuído a uma maior velocidade angular do fluido no vórtice externo e menor superfície para resfriar. O estudo mostrou que temperaturas de parede da ordem de 100°C podem ser mantidas a uma pressão de até 400 psia.

Posteriormente, Chiaverini et al. (2003) buscou analisar estatisticamente a influência dos diversos fatores de projeto no desempenho e na resposta térmica dos componentes. Da análise de sensibilidade concluiu-se que um menor número de injetores de combustível é crítico em ambos os casos. O comportamento térmico das partes que necessitavam de resfriamento ablativo em Trinh, Knuth e Michaels (2000) foi caracterizado nesse estudo.

Uma melhor resposta térmica do prato superior foi encontrada com menores diâmetros de câmara e jatos mais largos de hidrogênio. O bocal e a garganta puderam ser resfriados pelo oxidante quando o mesmo foi injetado dentro do diâmetro de convergência do bocal. Embora nessa configuração parte do oxidante escoe em direção a saída sem reagir ocasionando perda parcial de desempenho, a possibilidade de simplificar o resfriamento do bocal pode vir a ser vantajosa no presente trabalho de pesquisa e será analisada.

Uma solução analítica exata foi proposta por Vyas, Majdalani e Chiaverini (2003) para

descrever o movimento do fluido em um escoamento com vórtice bidirecional numa câmara de combustão a propelente líquido. Para tal, foi utilizado um modelo matemático de fluxo em regime permanente, incompressível, invíscido, axissimétrico, rotacional e não-reativo. Apesar das limitações do modelo, a solução é fundamental para a compreensão do comportamento do fluido na câmara e é desenvolvida no Apêndice A.

As simulações computacionais de regime permanente foram apresentadas em dois artigos seguidos. Em Fang e Majdalani (2003), a presença do vórtice bidirecional foi confirmada em simulação incompressível não-reativa (a frio). Os perfis de velocidade obtidos permitiram atestar previsões da solução analítica. Posteriormente, Fang, Majdalani e Chiaverini (2004) e Majdalani e Chiaverini (2017) realizaram simulações reativas (a quente) da câmara de combustão e do bocal de exaustão. Os resultados alcançados nesses artigos serão utilizados para validar a metodologia proposta aqui.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 PRINCÍPIOS FÍSICOS

##### 3.1.1 Teorema de Transporte de Reynolds

O Teorema de Transporte de Reynolds (TTR) é responsável por relacionar uma expressão de taxa de mudança de uma propriedade do sistema com uma equação equivalente para volume de controle. No caso da energia, por exemplo, permite relacionar a energia total do sistema com fluxos de energia através das superfícies de controle e a geração que ocorre internamente.

Definindo  $N$  como propriedade extensiva do sistema e  $\eta$  uma propriedade intensiva equivalente (por unidade de massa), o TTR pode ser elencado por:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \eta \rho dV + \int_{\text{SC}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.1)$$

Na Equação 3.1, os subscritos VC e SC representam volume de controle e superfície de controle, respectivamente, enquanto  $dV$  e  $d\vec{A}$  são os diferenciais de volume e área. A substituição correta das propriedades  $N$  e  $\eta$  permite combinar as leis físicas, como conservação da massa e momento, com o teorema e obter as devidas formulações para volume de controle.

##### 3.1.2 Conservação da Massa

Por definição, a variação da massa total de um sistema com o tempo é zero. Portanto, substituindo  $N$  pela massa total  $M$  do sistema e  $\eta$  por 1 no TTR, obtém-se a equação da conservação da massa para um volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \rho dV + \int_{\text{SC}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (3.2)$$

O primeiro termo na Equação 3.2 reflete a mudança da massa com o tempo no volume de controle, enquanto o segundo termo resulta do fluxo de massa através das superfícies de controle (PRITCHARD, 2011).

Adotando uma análise infinitesimal, é possível obter a equação da continuidade na sua forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

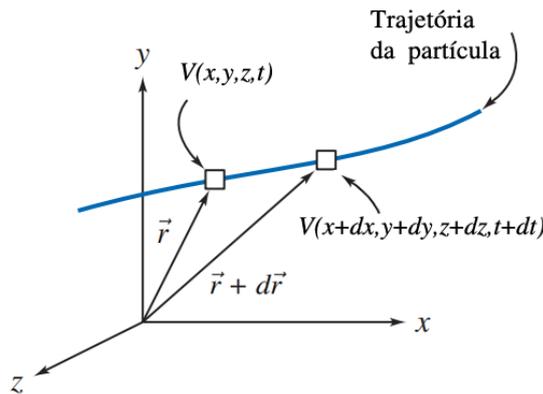
### 3.1.3 Conservação do Momento

A 2ª Lei de Newton afirma que, para um sistema se movendo em relação a um referencial inercial, a soma de todas as forças agindo sobre ele será igual a variação do seu momento linear  $\vec{P}$  com o tempo. Sabendo que  $d\vec{P} = dm\vec{V}$ , onde  $dm$  é a massa da partícula e  $\vec{V}$  seu vetor velocidade,  $\vec{P}$  é uma propriedade extensiva do sistema e  $\vec{V}$  é a propriedade intensiva equivalente. Deste modo, de acordo com o TTR:

$$\vec{F} = \left( \frac{dP}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.5)$$

Para escrever a 2ª Lei na sua forma diferencial, é preciso calcular a aceleração de um elemento infinitesimal no tempo, como indica a Figura 1.

Figura 1 – Velocidade de uma partícula na sua trajetória



Fonte: Adaptado de Pritchard (2011, p. 186)

Se a função vetor velocidade  $\vec{V}$  é conhecida em  $(x, y, z, t)$ , uma aproximação linear pode ser utilizada para encontrar seu valor em  $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$  (STEWART, 2015, p. 932).

A aproximação nos fornecerá o diferencial da velocidade, que por definição é:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt \quad (3.6)$$

Consequentemente, a aceleração pode ser escrita como:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \quad (3.8)$$

Ainda que  $\partial \vec{V} / \partial t = 0$  na Equação 3.8, de forma que a velocidade seja constante no tempo para cada ponto, a partícula ainda poderá sofrer uma aceleração convectiva resultante da variação da velocidade no espaço.

Resta agora definir as forças que agem sobre o fluido. Supondo que as forças decorrentes da gravidade, da pressão e da viscosidade sejam as únicas atuantes, pode-se encontrar as equações de conservação do momento linear de Cauchy:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.9)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.10)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.11)$$

Ou em notação vetorial:

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (3.12)$$

Onde  $\vec{\tau}$  é o tensor tensões viscosas.

### 3.1.4 Conservação da Energia

A equação de conservação da energia advém da 1ª Lei da Termodinâmica que afirma que a taxa de aumento da energia de uma partícula de fluido é igual a taxa de calor recebido menos a taxa de trabalho realizado.

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (3.13)$$

Onde  $E$  é a energia total da partícula. À direita da equação, o primeiro termo pode ser obtido do trabalho realizado pelas forças de superfície que atuam sobre o fluido, enquanto o segundo termo é dado pela diferença do fluxo de calor que atravessa as superfícies do elemento (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 23).

Para um fluido newtoniano, chega-se a equação de transporte da energia:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) = -\nabla \cdot (p \vec{u}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + S_e \quad (3.14)$$

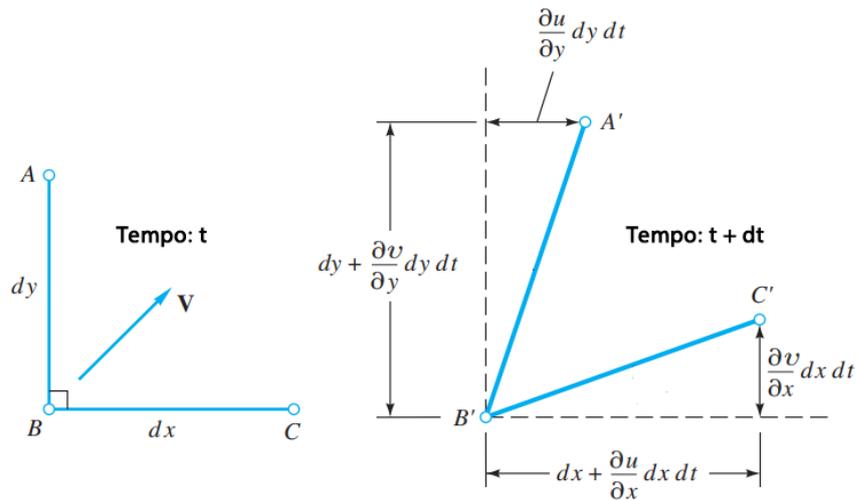
A equação 3.14 diz que o aumento da energia por unidade de massa ( $e$ ) na partícula

mais o decremento de  $e$  devido à convecção é igual a soma do trabalho realizado pelas forças de pressão, do aumento da energia por condução com coeficiente de condutividade térmica  $k$ , do aumento de  $e$  devido a difusão ( $\Phi$ ), mais a geração de energia ( $S_e$ ). A função dissipação ( $\Phi$ ) contabiliza os efeitos da tensão viscosa no transporte de energia e sua formulação pode ser encontrada em Versteeg e Malalasekera (2007, p. 23).

### 3.2 ESCOAMENTO EM VÓRTICE

Um fluido em um campo de escoamento pode rotacionar em torno dos três eixos de coordenadas. A Figura 2 mostra duas linhas de fluido AB e BC inicialmente perpendiculares em um momento  $t$ . O gradiente de velocidade do escoamento move e deforma as linhas de forma que no momento  $t + dt$  e as linhas A'B' e B'C' tenham comprimentos diferentes e não sejam mais perpendiculares (WHITE, 2015, p. 254).

Figura 2 – Deformação angular de uma partícula de fluido



Fonte: Adaptado de White (2015, p. 254)

Dessa forma, a velocidade angular de uma partícula no eixo  $z$  é dada pela média das deformações angulares em  $xy$ :

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (3.15)$$

A vorticidade é convencionalmente definida como o rotacional do vetor velocidade, o qual equivale a duas vezes a velocidade angular:

$$\zeta = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (3.16)$$

Mesmo que as linhas de fluxo de um escoamento não sejam curvas, como em um escoamento em vórtice, o escoamento pode ser rotacional. Em um fluxo ao longo de um tubo reto, por exemplo, a camada limite se desenvolve e o gradiente de velocidade na direção radial implica na rotação das partículas de fluido sob sua influência (SHAPIRO, 1969).

Segundo (PRITCHARD, 2011), escoamentos rotacionais são possíveis apenas quando o escoamento é viscoso ou quando o fluido já entra no campo em rotação. Então, muitos escoamentos podem ser assumidos irrotacionais quando os efeitos da viscosidade forem negligenciáveis.

Um vórtice ou escoamento em vórtice é aquele cujas linhas de fluxo tomam forma circular ou espiral ao redor de um eixo de rotação. A depender do seu comportamento, um vórtice pode ser considerado forçado ou livre.

### 3.2.1 Vórtice Forçado

Quando forças externas - como as forças viscosas - atuam na formação de um vórtice, ele é dito forçado. A atuação dessas forças acarretará na rotação do fluido e, caso o escoamento seja bidimensional, puramente tangencial e rotacional, a velocidade tangencial  $V_\theta$  será dada por:

$$V_\theta = \omega r \quad (3.17)$$

### 3.2.2 Vórtice Livre

A presença de um vórtice livre ocorre em regiões nas quais os efeitos da viscosidade são desprezíveis e o escoamento pode ser considerado irrotacional. Logo, as linhas de fluxo circulares representarão o caminho pelo qual as partículas de fluido sofrerão translação. Para um escoamento bidimensional, puramente tangencial e irrotacional, tem-se que:

$$V_\theta = \frac{C}{r} \quad (3.18)$$

Na equação,  $C$  é uma constante genérica.

## 3.3 SIMPLIFICAÇÕES

### 3.3.1 Regime Permanente

Se  $\eta$  é a magnitude de uma propriedade qualquer do fluido, o campo de  $\eta$  no espaço-tempo é dado por  $\eta(x, y, z, t)$ . Quando as propriedades de cada ponto de um campo não se

alteram com o tempo, o escoamento está em regime permanente (PRITCHARD, 2011, p. 24).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (3.19)$$

Em que pese no mundo real a maior parte dos escoamentos não estejam em regime permanente, a assunção de constância no tempo é utilizada para simplificar a solução dos problemas e ainda assim possibilitar a compreensão do fenômeno.

### 3.3.2 Escoamento Incompressível

Escoamento compressível é aquele no qual as variações da densidade do fluido são significativas. A decisão de tratar um escoamento como compressível ou de ignorar as variações e abordá-lo como incompressível é um julgamento de engenharia. Ao passo que fluxos de líquidos podem ser frequentemente considerados incompressíveis, gases são mais sensíveis aos efeitos da compressibilidade (PRITCHARD, 2011, p. 658).

Segundo Çengel e Boles (2018, p. 134), muitos gases de interesse como ar, nitrogênio, oxigênio, hidrogênio, hélio e dióxido de carbono podem ser considerados ideais, frequentemente com erros menores que 1%.

A compressibilidade de um gás ideal pode ser analisada considerando um elemento de fluido infinitesimal, em repouso, com densidade  $\rho_0$ . Para um escoamento totalmente incompressível sob todas as condições, seria possível acelerar o elemento até uma velocidade arbitrária  $\vec{V}$  e manter sua densidade constante. Todavia, supondo um escoamento compressível, ao acelerar essa partícula isentropicamente a expressão para sua nova densidade  $\rho$  será:

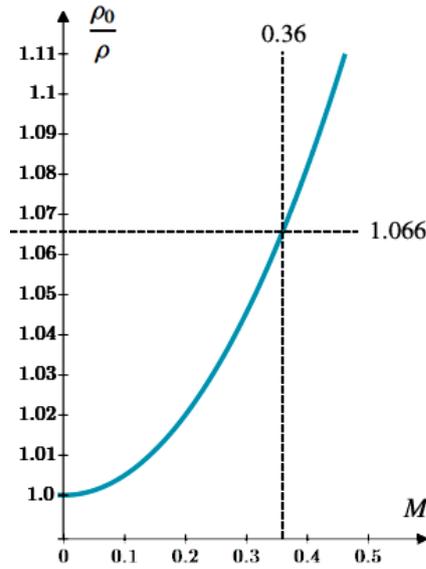
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (3.20)$$

Na Equação 3.20,  $M$  é número de Mach e  $\gamma$  é a razão dos calores específicos ( $c_p/c_v$ ). A Figura 3 evidencia a relação entre o número de Mach e a densidade para  $\gamma = 1,4$ . No caso em que  $M = 0,36$ , por exemplo, o erro é de 6,6% para a densidade, enquanto para  $M < 0,3$  o erro mantém-se menor que 5%. Quanto menor o número de Mach, menor será o erro relativo a assunção de escoamento incompressível (ANDERSON, 2016, p. 584).

### 3.3.3 Escoamento Invíscido

Ao longo de um fluxo existem regiões que são mais propensas que outras aos efeitos da viscosidade. Identificar tais regiões viabiliza um tratamento diferenciado àquelas regiões nas quais os efeitos do atrito são mínimos.

Figura 3 – Variação da densidade com o número de Mach



Fonte: Autor (2019)

Na equação de conservação do momento de Navier-Stokes (Equação 3.12), quando o escoamento está em regime permanente, é incompressível e o fluido é newtoniano, a expressão na direção  $x$  se reduz a:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.21)$$

Onde o último termo à direita representa as forças viscosas. Se  $V_\infty$  é a velocidade do fluxo livre, distante do ponto o qual se está examinando e  $L$  uma dimensão característica do escoamento, pode-se normalizar a equação acima de acordo com:

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad z^* = \frac{z}{L}; \quad u^* = \frac{u}{V_\infty}; \quad v^* = \frac{v}{V_\infty}; \quad w^* = \frac{w}{V_\infty}; \quad p^* = \frac{p}{\rho V_\infty^2} \quad (3.22)$$

Substituindo as variáveis em 3.21 e assumindo que a gravidade atua apenas na direção  $y$ :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho V_\infty L} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (3.23)$$

À frente da expressão que simboliza os efeitos viscosos é possível distinguir o número de Reynolds ( $Re = \rho V_\infty L / \mu$ ). O número de Reynolds é adimensional e representa a razão da força de inércia ( $\rho V^2 L^2$ ) pela força viscosa ( $\mu V L$ ). Em fluidodinâmica, números adimensionais são comumente utilizados para mensurar a importância relativa de um fenômeno a outro.

No transporte de momento em um escoamento, o movimento aleatório microscópico das partículas tende a tornar as propriedades do fluido uniformes. Esse mecanismo, conhecido

como difusão, caracteriza a viscosidade de um fluido. Ao mesmo tempo, a nível macroscópico, o movimento em massa do mesmo fluido - designado convecção - também transporta consigo suas propriedades, incluindo momento (HAUKE, 2008, p. 19 e 20).

Portanto, se as forças viscosas não forem significativas para difundir o momento transportado pela inércia de uma massa de fluido, o número de Reynolds será alto e os efeitos viscosos podem ser desprezados na Equação 3.23. Contudo, a viscosidade não pode ser negligenciada em todas as regiões do escoamento. Nas áreas de contato com sólidos, por exemplo, as forças viscosas tem a mesma ordem de grandeza das forças inerciais devido à condição de não deslizamento na interface fluido-sólido (HAUKE, 2008, p. 179).

### 3.3.4 Equações de Navier-Stokes

Pode-se simplificar as expressões de conservação de massa (3.4) e de momento (3.12) ao se considerar um escoamento incompressível de um fluido newtoniano. Para um escoamento incompressível,  $\rho$  é constante e pode ser eliminado da equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.24)$$

Substituindo a equação acima e as relações entre tensão cisalhante e gradiente de velocidade na conservação do momento, encontra-se:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.25)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.26)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.27)$$

Essas equações são as equações de movimento de Navier-Stokes para um escoamento incompressível de um fluido newtoniano. Junto com a equação da continuidade, formam um conjunto de 4 equações acopladas não lineares para as quatro variáveis de um problema de escoamento  $p, u, v, w$ . Apesar de possuírem um número limitado de soluções analíticas conhecidas, são passíveis de solução numérica computacional com malha fina (WHITE, 2015, p. 234 e 235).

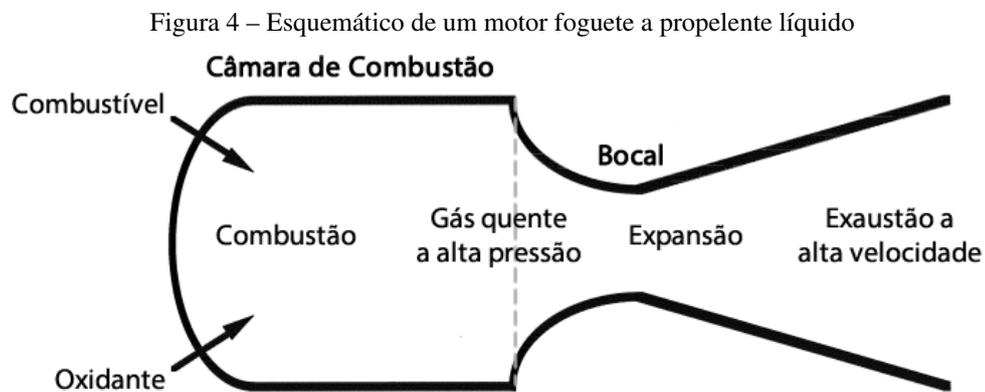
### 3.3.5 Equação de Euler

Se determinada região de um escoamento pode ser considerada invíscida,  $\mu = 0$  nas equações 3.25, 3.26 e 3.27, e obtém-se a equação de Euler:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (3.28)$$

### 3.4 MOTOR FOGUETE A PROPELENTE LÍQUIDO

Um motor foguete a propelente líquido consiste em uma câmara de combustão, na qual combustível e oxidante são injetados, e um bocal de expansão (Figura 4).



Fonte: Adaptado de Turner (2008, p. 38)

O bocal converte os gases em alta pressão produzidos pela combustão em um jato de alta velocidade. É a expansão dos gases quentes contra as paredes do bocal que realiza trabalho e acelera o foguete (TURNER, 2008, p. 37).

#### 3.4.1 Câmara de Combustão

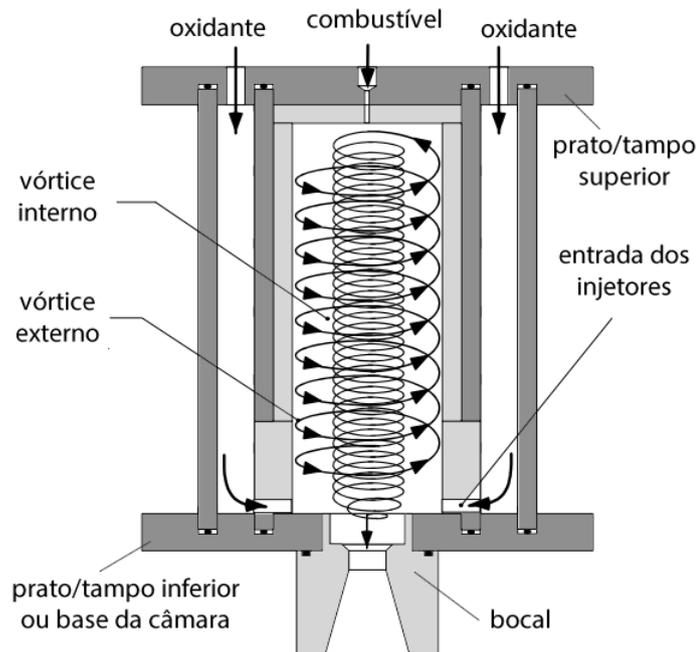
A câmara de combustão compreende os injetores, nos quais os propelentes entram, as áreas de vaporização, mistura e combustão e a área de entrada do bocal (TURNER, 2008, p. 68).

É a região na qual a maior parte da queima dos propelentes acontece. Uma vez que a temperatura de combustão dos gases é muito maior que o ponto de fusão dos materiais da câmara, técnicas de resfriamento se fazem necessárias (SUTTON, 2016, p. 285).

### 3.4.1.1 Câmara de Vórtice

As câmaras de vórtice apresentam potencialmente uma série de vantagens sobre as câmaras convencionais. Nesse modelo um dos propelentes é injetado tangencialmente ao diâmetro interno formando um vórtice mais externo que espirala em direção ao topo, como mostra a Figura 5. Na parte superior, o vórtice externo flui para dentro formando um vórtice interno em espiral descendente.

Figura 5 – Esquemático simplificado de uma câmara de vórtice

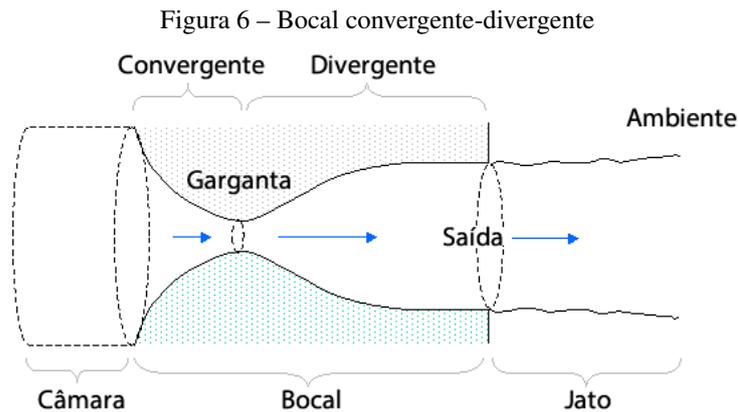


Fonte: Adaptado de Fang e Majdalani (2003)

Em virtude da natureza do escoamento do vórtice bidirecional, gases mais frios escoam pelas paredes da câmara, resultando em um resfriamento de filme, enquanto os gases mais quentes percorrem seu centro. O vórtice interno aumenta o caminho médio das partículas de combustível na câmara de combustão, o tempo de permanência, a turbulência e conseqüentemente a mistura dos gases, melhorando a eficiência geral e o empuxo gerado (FANG; MAJDALANI, 2003).

### 3.4.2 Bocal Convergente-Divergente

A maior parte da conversão da energia térmica da combustão em energia cinética ocorre no bocal. O objetivo de um bocal é acelerar os gases a maior velocidade possível. Isso é atingido projetando o perfil geométrico que mais se aproxime da condição de escoamento isentrópico (adiabático e reversível), reduzindo os efeitos do atrito e a perda de calor para as paredes (NAKKA, 2015)



Fonte: Adaptado de Virginia Tech (2001)

Para o escoamento isentrópico, compressível e unidimensional de um gás ideal em um bocal com fluxo de massa constante, é válida a seguinte relação:

$$(1 - M^2) \frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A} \quad (3.29)$$

A equação mostra que, uma diminuição da área ( $A$ ) indicará em um aumento da velocidade ( $V$ ) dos gases para um número de Mach  $M < 1$ , enquanto para  $M > 1$  um aumento da área resultará no mesmo efeito. Isso mostra que um bocal convergente-divergente em um escoamento é capaz de acelerar os gases a velocidades supersônicas e converter energia térmica da combustão em energia cinética (TAYLOR, 2017, p. 124).

### 3.4.3 Resfriamento

Conforme Sutton (2016, p. 286), os métodos de resfriamento comumente se dividem em duas categorias: resfriamento em regime permanente e resfriamento em regime transiente.

Nos métodos de regime permanente, as taxas de transferência de calor e as temperaturas da câmara atingem o equilíbrio térmico. É o que acontece no resfriamento por radiação, em que materiais de alta resistência à temperatura como nióbio e carbono-carbono irradiam calor para o meio mantendo o equilíbrio, e no resfriamento regenerativo, descrito na Seção 3.4.3.1.

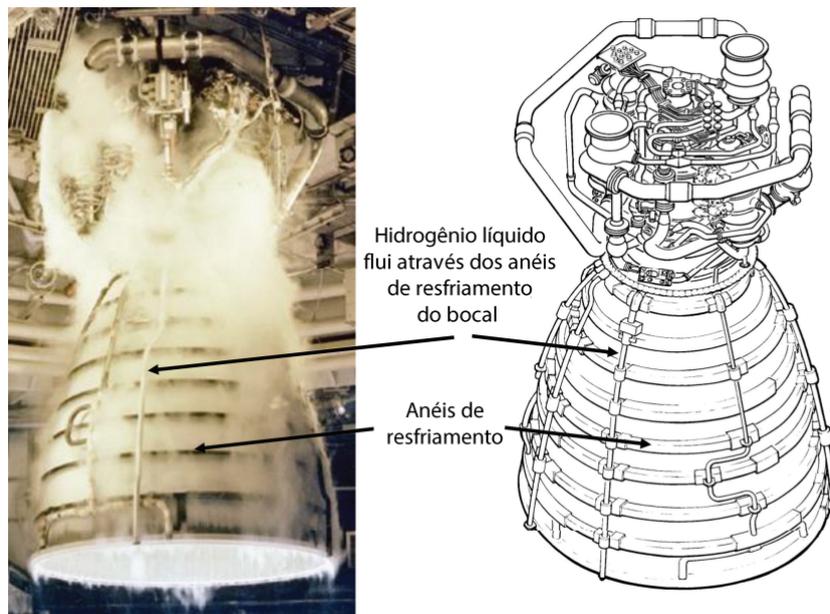
No resfriamento em regime transiente, as câmaras de combustão não atingem o equilíbrio: as temperaturas continuam aumentando durante a operação. Percebe-se então que, nesse método, a combustão deve ser interrompida antes que as condições de falha dos componentes sejam atingidas. O resfriamento com materiais ablativos, os quais queimam, evaporam e sofrem abrasão lentamente, é um exemplo desse método.

Técnicas suplementares, como o resfriamento de filme e insulação, são ocasionalmente utilizadas com os métodos acima para aumentar as capacidades de resfriamento.

### 3.4.3.1 Resfriamento Regenerativo

Na Figura 7, é possível visualizar o esquemático do motor de um foguete a propelente bilíquido com resfriamento regenerativo. Parte de um dos propelentes, antes de adentrar a câmara, passa ao redor das paredes do bocal absorvendo calor e resfriando a estrutura. A fumaça branca ao redor do bocal não tem relação com o resfriamento, é na verdade o oxigênio líquido frio, expulso pelas válvulas de alívio dos tanques, condensando o vapor de água no ar.

Figura 7 – Resfriamento regenerativo do bocal



Fonte: Adaptado de Taylor (2017, p. 155)

Conservar os materiais que compõem a parede mais frio ajuda a manter a resistência do material. Ainda, variações bruscas na temperatura do bocal de um foguete podem causar perturbações no fluxo e, portanto, tornarão o motor menos eficiente (TAYLOR, 2017, p. 155).

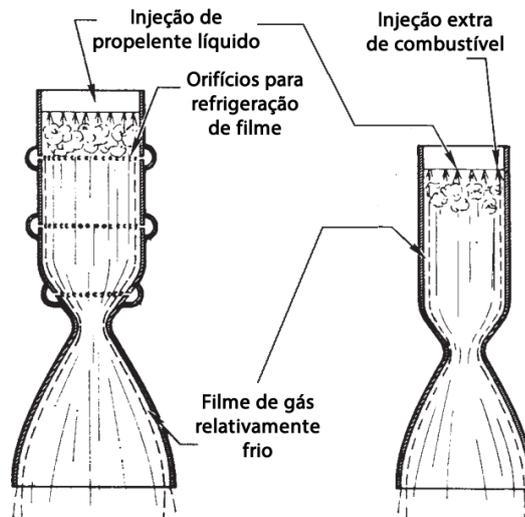
O resfriamento regenerativo tende a uniformizar a temperatura na região e o calor absorvido pelo refrigerante cresce o conteúdo de energia do sistema propulsivo antes da injeção, aumentando ligeiramente a velocidade de exaustão dos gases (SUTTON, 2016, p. 291).

### 3.4.3.2 Resfriamento de Filme

Nesse método, um filme fluido relativamente frio cobre e protege as superfícies das paredes expostas da transferência excessiva de calor. Diversos meios podem ser empregados para criar o filme refrigerante. A Figura 8 mostra algumas técnicas comumente adotadas em foguetes a propelente bilíquido.

Os filmes podem ser criados injetando pequenas quantidades de propelente extra (ou

Figura 8 – Técnicas de resfriamento de filme



Fonte: Adaptado de Sutton (2016, p. 293)

de um fluido inerte) em velocidades muito baixas, como mostra o esquema à direita na Figura 8, onde vários furos foram feitos ao longo da câmara para injeção. Em outra configuração, o combustível é admitido através de orifícios adicionais na parte mais externa do injetor (esquema à esquerda na Figura 8). Assim, é alcançada uma mistura na periferia da câmara que tem uma temperatura de combustão mais baixa (SUTTON, 2016, p. 293).

### 3.5 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes são limitadas aos casos mais simples sob condições ideais. Para todos os outros casos, uma abordagem numérica pode ser utilizada para discretizar o problema, transformando as equações diferenciais parciais não-lineares em equações algébricas passíveis de solução aproximada.

A Dinâmica dos Fluidos Computacional ou CFD (do inglês *Computational Fluid Dynamics*) é a análise da dinâmica de sistemas envolvendo escoamento de fluidos, transferência de calor e demais fenômenos associados através de simulação computacional. A indústria aeroespacial tem integrado as técnicas de CFD no projeto de veículos espaciais desde a década de 1960 (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 1).

Os softwares responsáveis pela aplicação dos algoritmos de solução numérica dividem a simulação em três etapas: pré-processamento, solução e pós-processamento.

Durante o pré-processamento é definido o domínio computacional e sua subdivisão em células menores - a malha. As características dos fluidos e suas interações com os meios presentes são definidas, assim como os modelos físicos e químicos que devem ser resolvidos. As condições de contorno apropriadas devem ser aplicadas naquelas células que coincidem com as fronteiras do domínio computacional.

Para a solução com o Método dos Volumes Finitos ou FVM (do inglês *Finite Volume Method*), o algoritmo se desdobra principalmente em integrar as equações governantes por todos volumes de controle finitos do domínio, converter as integrais em um sistema de equações algébricas e resolvê-las utilizando um método iterativo.

Por fim, a etapa de pós-processamento permite visualizar os resultados da simulação com diversos artifícios gráficos e elaborar informações complementares dos dados obtidos.

As técnicas de CFD constituem conjunto de ferramentas adicionais importantes para aprimorar o entendimento do comportamento de um sistema. O custo de novos projetos e o tempo de entrega podem ser reduzidos utilizando CFD quando comparados a uma abordagem estritamente experimental (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 2, 5, 6).

### 3.5.1 Equação do Transporte

As equações que governam o escoamento de fluidos possuem similaridades na sua formulação. De fato, para um fluido Newtoniano, todas elas podem ser obtidas através da equação de transporte de uma propriedade por unidade de massa  $\phi$  com um coeficiente de difusividade  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{V}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (3.30)$$

O primeiro termo à esquerda da igualdade representa a taxa de aumento da propriedade  $\phi$  no elemento infinitesimal. O segundo termo à esquerda é chamado de termo convectivo e contabiliza o fluxo de  $\phi$  para fora do elemento. À direita da igualdade, a primeira expressão representa o aumento da propriedade  $\phi$  devido a difusão enquanto o segundo termo ( $S_\phi$ ) contabiliza a geração interna.

Ao substituir  $\phi$  por 1,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $e$ , selecionar valores apropriados para o coeficiente de difusividade  $\Gamma$  e o termo de geração  $S_\phi$ , é possível obter as cinco equações diferenciais parciais de conservação da massa, do momento e da energia (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

### 3.5.2 Método dos Volumes Finitos

O Método dos Volumes Finitos surgiu no início da década com McDonald (1971) como tentativa de superar as limitações dos métodos disponíveis em lidar com malhas não-ortogonais. O FVM impõe a conservação da massa, momento e energia em cada volume de controle discretizado e é capaz de utilizar malhas arbitrárias para geometrias complexas. Além disso, as condições de contorno podem ser implementadas de maneira não-invasiva, dado que as equações são resolvidas em termos das variáveis nos centroides e não nas faces externas (MOUKALLED; MANGANI; DARWISH, 2015).

Essas características fazem do FVM um método adequado para resolver problemas de escoamento de fluidos com transferência de calor e é o método embutido no software de simulação fluidodinâmica utilizado neste trabalho.

Do ponto de vista numérico, o FVM transforma equações diferenciais parciais em equações algébricas discretas para volumes finitos. A equação de transporte, capaz de representar genericamente as equações de conservação é o ponto de partida do método. O primeiro passo é a integração da equação no volume de controle finito:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho\phi\vec{V}) dV = \int_{VC} \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) dV + \int_{VC} S_\phi dV \quad (3.31)$$

O segundo termo à esquerda e o primeiro termo à direita da igualdade são resolvidos utilizando o Teorema da Divergência de Gauss, que afirma que, sob determinadas condições, a integral da divergência de um campo de vetores ( $\vec{A}$ ) em um volume (V) - a acumulação desse campo - é igual ao fluxo do campo através das superfícies (A) que limitam o volume (STEWART, 2015, p. 1141):

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \int_A (\vec{A} \cdot \hat{n}) dA \quad (3.32)$$

Aplicando o teorema, tem-se que:

$$\int_{VC} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{SC} \hat{n} \cdot (\rho\phi\vec{V}) dA = \int_{SC} \hat{n} \cdot (\Gamma\nabla\phi) dA + \int_{VC} S_\phi dV \quad (3.33)$$

A taxa de aumento de  $\phi$  no volume de controle (VC) mais a taxa de decremento de  $\phi$  devido à convecção através das superfícies de controle (SC) é igual à taxa líquida de aumento de  $\phi$  devido difusão através das SC mais a taxa líquida de geração de  $\phi$  no VC.

As integrais volumétricas e de superfície são discretizadas com relação ao espaço e ao tempo de acordo com a malha elaborada. Então, as equações escritas para cada célula são acopladas às equações das células vizinhas formando um sistema de equações algébricas a ser resolvido de forma iterativa.

### 3.5.3 Modelos de Turbulência

A turbulência consiste em flutuações aleatórias nas propriedades do escoamento no tempo e no espaço. Um escoamento turbulento ocorre quando as forças de inércia se tornam significativas comparadas às forças viscosas e é caracterizado por um alto número de Reynolds. É um processo tridimensional e instável que pode ter efeito significativo nas características do escoamento (ANSYS, 2019b, p. 77).

Visualizações de fluxos turbulentos revelam estruturas de fluxo rotacionais, chamadas de redemoinhos ou turbilhões. O surgimento de redemoinhos turbulentos de uma ampla gama de tamanhos promove a troca vigorosa do calor, da massa e do momento, gerando altos coeficientes de difusão (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 41).

A princípio, as equações de Navier-Stokes descrevem escoamentos laminares e turbulentos sem a necessidade de informações adicionais. No entanto, fluxos turbulentos costumam abranger várias escalas de tamanhos de turbilhões, inclusive escalas muito menores do que o menor volume finito utilizado em uma análise numérica. Para explicar os efeitos da turbulência sem recorrer a uma malha proibitivamente fina, tampouco à Simulação Numérica Direta ou DNS (do inglês *Direct Numerical Simulation*), foram desenvolvidos os modelos de turbulência.

Os modelos de turbulência modificam as equações originais de Navier-Stokes ao decompor uma quantidade  $\phi$  em um valor médio  $\bar{\phi}$  e uma componente flutuante  $\phi'$ :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (3.34)$$

A decomposição da propriedade  $\phi$  resulta nas Equações de Navier-Stokes com Média de Reynolds ou RANS (do inglês *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*). Modelos RANS também são conhecidos por Modelos Estatísticos de Turbulência, devido ao tratamento estatístico empregado para obter as equações. A equação de transporte RANS para um escoamento turbulento incompressível é exibida abaixo:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\phi} \vec{V}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\Gamma_{\bar{\phi}} \nabla \bar{\phi}) + \left[ -\frac{\partial \overline{u' \phi'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v' \phi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w' \phi'}}{\partial z} \right] + S_{\bar{\phi}} \quad (3.35)$$

À direita da igualdade, os novos termos que surgem são os fluxos turbulentos. Se a propriedade  $\phi$  em questão representar alguma das componentes da velocidade ( $u$ ,  $v$  ou  $w$ ), esses termos serão chamados de tensões de Reynolds. Nesse caso, é possível concluir que, além da mistura provocada pelas flutuações térmicas no nível molecular, o transporte convectivo devido às flutuações da velocidade também agirá para melhorar a mistura. De fato, em números altos de Reynolds, as flutuações da velocidade ocorrem em uma escala de comprimento muito maior que o caminho livre médio das flutuações térmicas, de modo que os fluxos turbulentos são muito maiores que os fluxos moleculares (ANSYS, 2019b, p. 78).

Cada modelo de turbulência RANS providencia uma abordagem diferente para computar as tensões de Reynolds. Os modelos se dividem em duas classes principais: Modelos de Viscosidade Turbulenta (*Eddy Viscosity Turbulence Models* em inglês) e Modelos de Tensão de Reynolds ou RSM (do inglês *Reynolds Stress Methods*).

### 3.5.3.1 Modelos de Viscosidade Turbulenta

A hipótese de viscosidade turbulenta sugere que a turbulência consiste em pequenos redemoinhos que se formam e dissipam continuamente. Também, as tensões de Reynolds são consideradas proporcionais aos gradientes médios de velocidade, de maneira análoga à relação entre a tensão e a deformação no fluxo laminar newtoniano. Nessa situação, a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  deve ser modelada (ANSYS, 2019b, p. 79).

Os modelos  $\kappa - \varepsilon$  pressupõem que a viscosidade turbulenta esteja ligada à energia cinética e à dissipação da turbulência através da seguinte relação:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (3.36)$$

Onde  $\kappa$  é a energia cinética da turbulência, definida como a variância das flutuações da velocidade,  $\varepsilon$  é a dissipação dos redemoinhos turbulentos (a taxa na qual as flutuações da velocidade se dissipam) e  $C_\mu$  é a constante do modelo.

Segundo (ANSYS, 2019a, p. 151), o modelo oferece um bom compromisso em termos de precisão e robustez, além de se provar estável, o que o tornou o modelo padrão da indústria. Embora forneça boas previsões para muitos casos, um modelo RSM pode ser mais apropriado para fluxos com mudanças repentinas na taxa de deformação, assim como para escoamentos rotacionais ou sobre superfícies curvas.

Para o modelo  $\kappa - \omega$ , a viscosidade da turbulência está ligada à energia cinética da turbulência ( $\kappa$ ) e à frequência ( $\omega$ ) turbulenta através da relação:

$$\mu_t = \rho \frac{\kappa}{\omega} \quad (3.37)$$

Em geral, os modelos de turbulência baseados na equação  $\varepsilon$  preveem o início do descolamento do fluxo tardiamente e logo subestimam a quantidade de separação.

O Modelo de Transporte da Tensão de Deformação ou SST (do inglês *Shear-Stress-Transport*) baseado no  $\kappa - \omega$  foi projetado para fornecer estimativas precisas do início e da quantidade de separação de fluxo sob gradiente de pressão adverso. Outra vantagem da formulação é o tratamento automático de parede no CFX para cálculos com baixo número de Reynolds, que muda automaticamente das funções de parede para uma formulação de baixo Reynolds à medida que a malha é refinada (ANSYS, 2019a, p. 152, 153).

### 3.5.3.2 Modelos de Tensão de Reynolds

Em fluxos onde os efeitos de transporte turbulento ou de não equilíbrio são importantes, a suposição de viscosidade turbulenta não é mais válida e os resultados podem ser imprecisos (ANSYS, 2019a, p. 153).

Os Modelos de Tensão de Reynolds não usam a hipótese de viscosidade turbulenta  $\mu_t$ . Ao invés disso, uma equação de transporte é resolvida para cada tensão de Reynolds e para a taxa de dissipação. Os modelos RSM mostram desempenho preditivo superior em comparação aos modelos de viscosidade turbulenta em escoamentos com fluidos rotativos e incluem naturalmente os efeitos da curvatura das linhas de fluxo, mudanças repentinas na taxa de deformação e flutuabilidade. Contudo, o aumento do número de equações de transporte leva a uma robustez numérica reduzida e requer maior esforço computacional (ANSYS, 2019b, p. 93).

### 3.5.4 Modelos de Combustão

A combustão consiste em um grupo específico de reações químicas onde combustível e oxigênio queimam, em temperatura suficientemente alta, produzindo calor e produtos da combustão (MULLINGER; JENKINS, 2008, p. 32).

Há varios tipos de processos de combustão: combustão com combustível gasoso, líquido, pulverizado, entre outros. Quando o combustível e o oxidante estão na fase gasosa, pode-se dividir o processo em duas categorias: combustão gasosa pré-misturada e não pré-misturada.

Na combustão gasosa não pré-misturada, o combustível e o oxidante entram na zona de combustão por jatos diferentes e a chama se posiciona na interface onde as concentrações são as estequiométricas. Esse modo acontece, por exemplo, em um motor de ignição por compressão.

A combustão é dita pré-misturada quando combustível e oxidante estão misturados em nível molecular antes de adentrar a zona de combustão. Um motor de ignição por centelha é um exemplo desse caso (KOLLA, 2009).

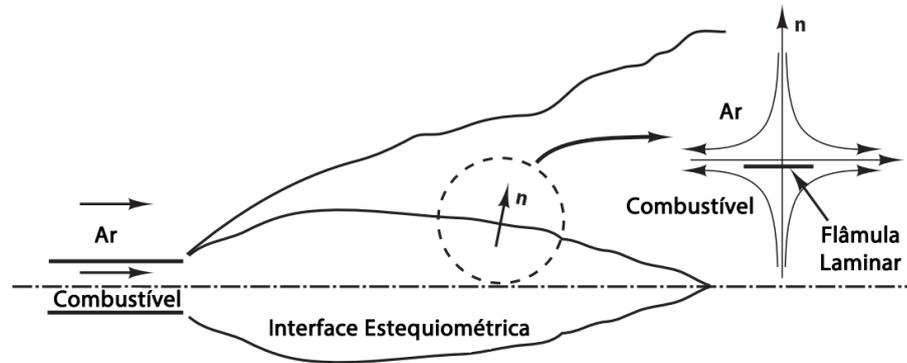
Os processos de combustão são governados pelas equações básicas de transporte do escoamento e transferência de calor. Tanto a cinética química quanto os processos de difusão física controlam a taxa em que as reações de combustão acontecem. Modelos adicionais são responsáveis por lidar com a química da combustão e outros subprocessos importantes (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 343).

#### 3.5.4.1 Modelo de Flâmulas Laminares

No Modelo de Flâmulas Laminares (do inglês *Laminar Flamelet Model*), a chama resultante de uma combustão turbulenta é vista como um conjunto de finas camadas dobradas e enrugadas, denominadas flâmulas. Essa abordagem considera que, se as escalas em que as

reações químicas ocorrem são muito menores que as escalas turbulentas, combustível e oxidante reagem localmente em estruturas unidimensionais normais às interfaces estequiométricas, tal qual se observa na Figura 9.

Figura 9 – Representação do conceito de flâmulas laminares



Fonte: Adaptado de Versteeg e Malalasekera (2007, p. 389)

Temperatura, densidade e fração mássica das espécies nesse modelo são função da razão de mistura (fração mássica do jato de combustível), da sua variância e da taxa de dissipação escalar (taxa de mistura turbulenta em nível molecular). Essas propriedades são tabeladas em uma biblioteca pré-computada (Biblioteca de Flâmulas ou *Flamelet Library* em inglês) para um certo número de pontos de interesse.

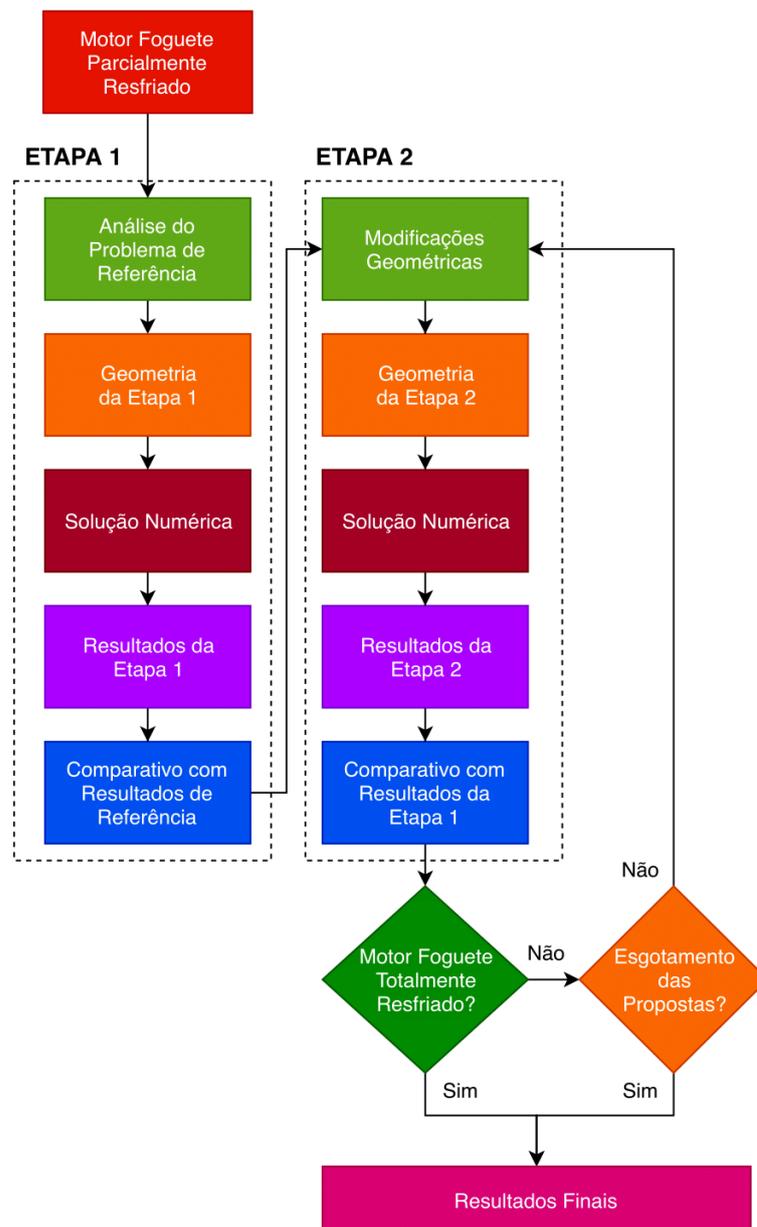
A principal vantagem do modelo é que, embora ele forneça informações sobre espécies minoritárias, radicais, contabilize flutuações turbulentas na composição da mistura e modele a extinção da chama em altas taxas de dissipação escalar, apenas duas equações de transporte adicionais - razão de mistura e variância da razão - são necessárias para caracterizar a combustão independentemente do número de espécies. Essas equações e a equação da taxa de dissipação escalar podem ser encontradas em ANSYS (2019b, p. 279).

## 4 METODOLOGIA

De acordo com Lakatos (2003), não existe ciência sem método científico e o método científico é a teoria da investigação. No intuito de alcançar o objetivo de pesquisa com maior segurança e economia, o método hipotético-dedutivo será utilizado para definir as etapas do trabalho. A partir do problema especificado e da solução proposta, serão selecionados os dados a serem observados e os testes que permitirão corroborar as hipóteses elencadas.

A metodologia de solução do problema é descrita na Figura 10 e detalhada nas seções que se seguem. O ANSYS® CFX® 2019 R3 é utilizado nas soluções numéricas.

Figura 10 – Metodologia de solução do problema



Fonte: Autor (2019)

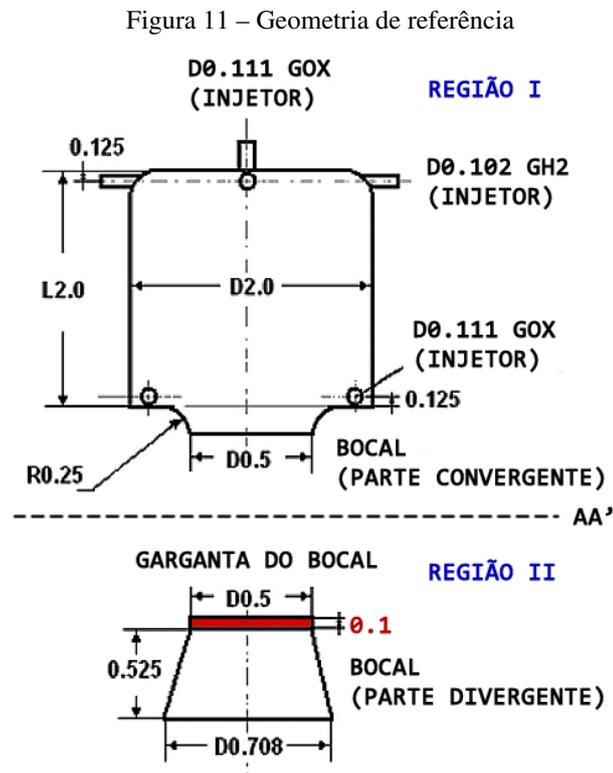
Os resultados numéricos da câmara de vórtice proposta para resolver o problema de superaquecimento, do qual espera-se certo desempenho térmico e propulsivo, serão comparados à solução analítica exata obtida por Vyas, Majdalani e Chiaverini (2003) e desenvolvida no Apêndice A.

É importante destacar a nomenclatura utilizada durante o texto para identificar os três resultados numéricos comparados aqui:

- Referência: geometria, resultados e metodologia provenientes de Fang, Majdalani e Chiaverini (2004) e Majdalani e Chiaverini (2017);
- Etapa 1: resultados obtidos ao resolver o problema de referência com a nova metodologia proposta;
- Etapa 2: solução após implementadas as alterações geométricas com vistas a melhorar o resfriamento da câmara;

#### 4.1 ANÁLISE DO PROBLEMA DE REFERÊNCIA

Buscando-se embasar a metodologia de solução numérica em estudos anteriores experimentalmente validados, a simulação do modelo de câmara de vórtice proposto por Fang, Majdalani e Chiaverini (2004) é tida como referência. O modelo é reproduzido na Figura 11, na qual a linha AA' sinaliza a divisão da câmara em duas regiões.



Fonte: Adaptado de Fang, Majdalani e Chiaverini (2004)

No estudo de referência a solução do problema é dividida em duas simulações:

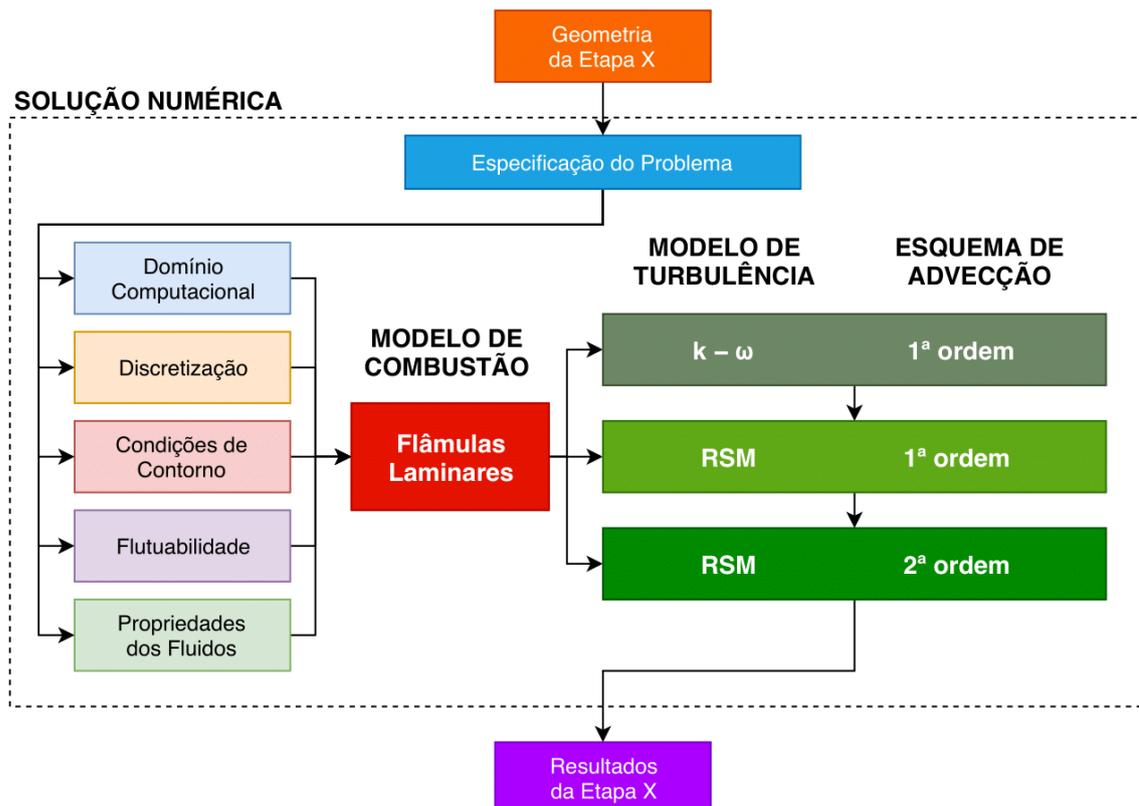
1. Escoamento incompressível na câmara e seção convergente do bocal (Região I, acima da linha AA');
2. Escoamento compressível na seção divergente do bocal e zona de influência subsequente (Região II, abaixo da linha AA').

Apenas a Região I, da primeira simulação, e a seção reta do bocal (em vermelho na Figura 11) serão modeladas aqui. O objetivo primordial do presente trabalho é examinar o resfriamento da câmara de combustão, logo, o desempenho propulsivo, o qual seria investigado na segunda simulação, será analisado somente de forma qualitativa.

## 4.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para cada etapa, a mesma metodologia de solução numérica será empregada (Figura 12).

Figura 12 – Metodologia de solução numérica



Fonte: Autor (2019)

O Quadro 1 abaixo mostra as principais diferenças entre a metodologia de solução numérica da referência e a metodologia escolhida. As motivações que levaram a essas escolhas serão explicadas em maior detalhe nas seções indicadas na última coluna.

Quadro 1 – Diferenças entre a metodologia de referência e a metodologia do autor

Característica	Referência	Autor	Motivações
Regiões Modeladas	Câmara de combustão, seção convergente do bocal	Câmara de combustão, seção convergente do bocal e seção reta da garganta	Seção 4.2.1
Compressibilidade	Incompressível	Compressível	Seção 4.2.5
Modelo de Turbulência	$\kappa - \varepsilon$	BSL-RSM	Seção 4.2.8
Condição de Contorno na Saída	<i>Outflow</i> no FLUENT	<i>Supersonic</i> no CFX	Seção 4.2.4

Fonte: Autor (2019)

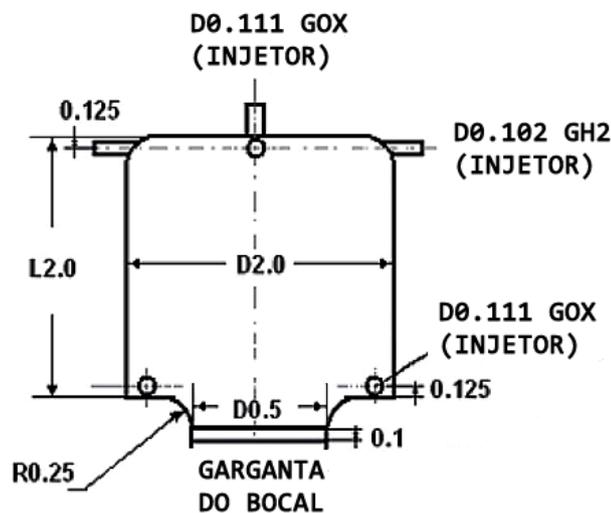
Para cada geometria, três simulações com uma combinação diferente de modelo de turbulência e esquema de advecção, como mostra a Figura 12, serão executadas. O domínio computacional, a discretização, as condições de contorno e os fluidos são mantidos os mesmos.

#### 4.2.1 Especificação do Problema

##### 4.2.1.1 Geometria da Etapa 1

A geometria escolhida para modelar a primeira etapa, descrita na Figura 13, diverge da geometria de referência (Figura 11) no fato de que a seção cilíndrica da garganta foi adicionada à modelagem da câmara. Ainda que com 0.1 polegada de comprimento, a seção reta permite o desenvolvimento dos perfis de velocidade, pressão e temperatura após a aceleração dos gases na parte convergente do bocal, permitindo uma condição de contorno mais robusta na saída.

Figura 13 – Geometria da Etapa 1



Fonte: Adaptado de Fang, Majdalani e Chiaverini (2004)

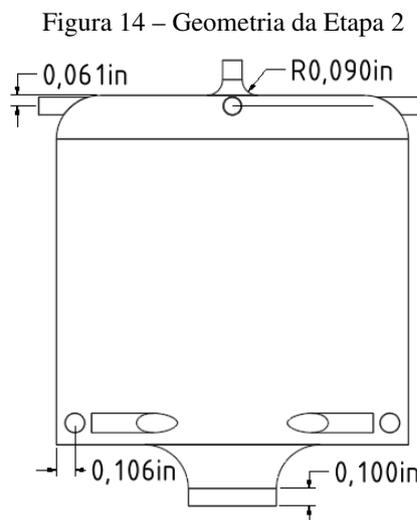
A câmara de combustão consiste em um tubo cilíndrico de 2 polegadas de diâmetro e igual comprimento. O tampo superior é arredondado com raio de 0.25 polegadas, possui 4 entradas de combustível dispostas radialmente e uma entrada de oxidante centrada no eixo do cilindro. Na placa inferior estão presentes quatro entradas de oxidante e a entrada do bocal, o qual possui uma garganta de 0.5 polegadas.

Gás oxigênio (GOX) será utilizado como oxidante e injetado a uma temperatura de 363K e 120m/s de velocidade, enquanto o gás hidrogênio (GH<sub>2</sub>) é o combustível, injetado a 366K e 477m/s. A razão da mistura oxidante-combustível, em massa, é de 6:1, enquanto a razão de equivalência estequiométrica está em 1.33. Os diâmetros dos injetores de oxidante e combustível são de 0.111 e 0.102 polegadas respectivamente.

#### 4.2.1.2 Geometria da Etapa 2

As alterações na geometria da câmara são feitas para encontrar uma configuração de injeção de combustível e oxidante que possibilite o resfriamento completo da câmara de vórtice.

A geometria da Etapa 2 é visível na Figura 14. As modificações visam estender o resfriamento de filme no tampo superior da câmara. Para tal, os cantos vivos do injetor central de oxigênio foram arredondados em 0.1 polegada com o intuito de dispersar o jato na extensão do prato e os injetores de hidrogênio foram elevados para as proximidades do topo.



Fonte: Autor (2019)

Embora a segunda etapa foque na análise das mudanças dispostas na Figura 14, outras alterações são examinadas tendo em vista a necessidade de resfriamento das paredes do bocal:

- Injeção de oxidante na porção convergente do bocal;
- Ampliação do diâmetro de entrada do bocal para coincidir com o diâmetro da câmara;
- Adição de resfriamento regenerativo na porção inferior do motor;

Os campos de velocidade, temperatura, pressão, as frações mássicas das espécies ao longo da câmara e a posição de separação dos vórtices são as variáveis a serem investigadas.

#### 4.2.2 Domínio Computacional

Na Figura 15 é possível observar o domínio computacional do problema construído no software ANSYS® SpaceClaim®. O domínio da Etapa 2 é concebido da mesma forma.

Figura 15 – Domínio computacional da Etapa 1



Fonte: Autor (2019)

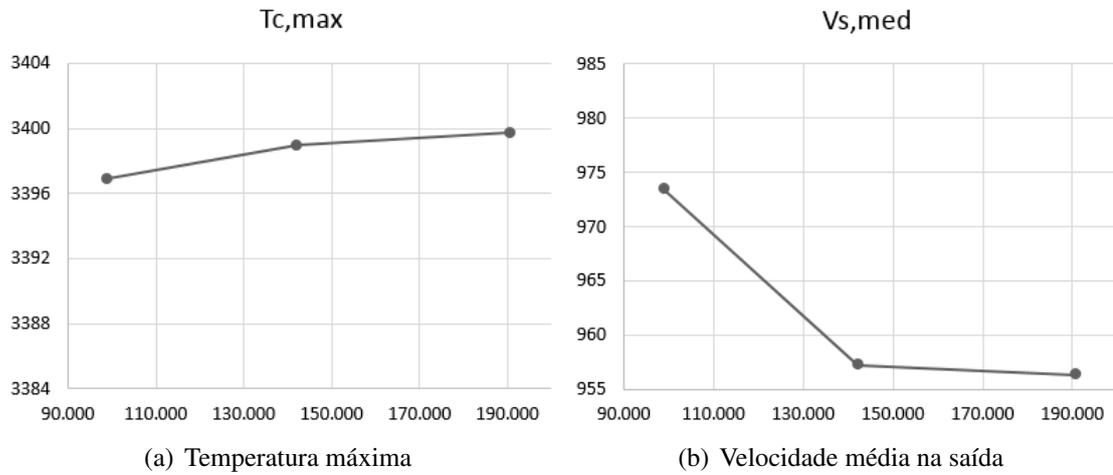
Os 4 injetores de oxigênio na parte inferior foram afastados 0.05 polegadas do diâmetro interno da câmara devido aos ângulos severos que seriam criados de outra forma. Essa alteração visa aumentar a qualidade da malha nessa região e é prática comum na modelagem de problemas com singularidades geométricas. A incidência do jato imediante anterior (no sentido anti-horário) no fluxo de cada injetor torna pequena a influência da modificação no resultado final.

#### 4.2.3 Discretização

Resultados preliminares foram obtidos com parâmetros básicos de simulação e permitiram identificar as áreas onde seriam necessárias uma maior densidade de elementos, notadamente, as áreas próximas aos injetores, às paredes, ao centro da câmara e ao bocal de saída dos gases.

Uma malha predominantemente tetraédrica foi o caminho escolhido por permitir maior agilidade e flexibilidade na discretização. Um estudo da malha (Figura 16) foi realizado sob as variáveis de interesse, especificamente a temperatura máxima na câmara de combustão  $T_{c,max}$  e a velocidade média na saída  $V_{s,med}$ , ponderada pelo fluxo de massa.

Figura 16 – Estudo da malha



Fonte: Autor (2019)

Nota-se que a temperatura máxima muda pouco e se aproxima de 3400K até o último refino da malha. O mesmo acontece com a velocidade média na saída. O comportamento assintótico das curvas sugere que um refino adicional aumentaria o custo computacional e traria poucas variações no campo de escoamento, indicando que os resultados são satisfatórios para o fenômeno analisado. A malha mais fina é então escolhida por retratar com maior detalhe o perfil das velocidades no centro da câmara.

A malha final foi gerada pelo software ANSYS® Meshing™ com um total de 831211 elementos lineares e 190653 nós na geometria da Etapa 1, dentro do limite da versão educacional (512000 nós). É composta em sua maioria de tetraedros, com camadas de prismas junto às paredes do domínio e pirâmides em algumas zonas de transição, como mostra a Figura 17.

Figura 17 – Malha em perspectiva e seção transversal



Fonte: Autor (2019)

Próximo às paredes da câmara uma maior concentração de elementos é necessária para resolver a condição de não-deslizamento e os efeitos da camada limite. A altura do primeiro elemento prismático em todas as partes é tal que a distância adimensional das paredes ( $y_+$ ), como definida em ANSYS (2019a, p. 179)), se mantenha menor 200. Essa é uma solução de compromisso entre precisão, custo computacional e qualidade de malha nas regiões onde os ângulos são severos. Por fim, uma taxa de crescimento moderada é aplicada na camada de inflação para alcançar volumes semelhantes entre a camada e o interior da câmara.

A malha da geometria da Etapa 2 apresenta controles de tamanho e influência idênticos àqueles da malha da Etapa 1, contabilizando um total de 863064 elementos e 199354 nós.

#### 4.2.4 Condições de Contorno

As condições de contorno foram impostas nas entradas dos injetores, na saída do bocal e nas paredes da câmara. Em todos os injetores de oxigênio, uma velocidade de entrada de 120m/s foi definida na direção normal à seção transversal, a uma temperatura de 363K, com uma intensidade de turbulência de 4,73%. Para os injetores de hidrogênio, a velocidade de entrada é de 477m/s, a uma temperatura de 366K e intensidade de turbulência 5,05%, como indicado por Majdalani e Chiaverini (2017).

Nos estudos de Majdalani e Chiaverini (2017), uma condição conhecida como Descarga (do inglês *Outflow*) é utilizada no FLUENT, a qual não tem equivalente no CFX. Ao selecionar essa condição, nenhum dado é necessário na saída pois o software extrapola as informações necessárias do interior do escoamento, empregando como condição de contorno um fluxo de difusão zero na direção normal à saída e uma correção no balanço geral de massa, segundo ANSYS (2019c, p. 963). Essa condição é utilizada em escoamentos incompressíveis e totalmente desenvolvidos na saída, que não é o caso da saída do bocal modelado aqui.

Ao invés disso, a condição Supersônica (do inglês *Supersonic*) foi escolhida no CFX. Para uma saída supersônica no CFX, não é necessária a especificação de nenhum valor. Todos os valores das variáveis dependentes são extrapolados do fluxo a montante, semelhantemente ao FLUENT, mas a restrição de gradiente constante não é imposta (ANSYS, 2019a, p. 93).

Pouca informação está disponível sobre a implementação da condição de contorno supersônica no programa, mas ANSYS (2019a) adverte que, se o escoamento nessa fronteira não for completamente supersônico, o solucionador numérico pode falhar em convergir ou até mesmo divergir. De fato, não foi possível reduzir o erro do momento na direção  $z$  abaixo de  $10^{-4}$ , pois os residuais ainda se mantêm altos na região imediatamente acima da saída. Para confirmar os resultados atingidos, a condição de contorno supersônica na saída foi trocada para a pressão estática média obtida. Com a alteração, um residual da ordem de  $10^{-6}$  pôde ser alcançado em todas as equações de momento. Feito isso, as variáveis de interesse monitoradas apresentaram pouca variação, corroborando o uso da condição de contorno supersônica.

Todas as demais superfícies foram definidas como paredes adiabáticas e aplicadas condições de não-deslizamento. As paredes foram consideradas hidraulicamente lisas para as simulações que se seguem. Para o CFX isso significa dizer que os tratamentos dos perfis de velocidade junto às paredes, adotados pelos modelos de turbulência, podem ser utilizados diretamente sem a necessidade de correções decorrentes dos efeitos da rugosidade (ANSYS, 2019b, p. 132).

#### 4.2.5 Fluidos

Os fluidos especificados nos problemas podem ser modelados de diversas maneiras que afetarão diretamente nos modelos de transferência de energia e combustão. O hidrogênio e o oxigênio foram modelados como gases ideais com calor específico variável no formato da NASA, que aplica polinômios de quarto grau em dois intervalos distintos de temperatura para obter os valores de  $c_p$  e  $c_v$ , ao passo que as demais propriedades dos materiais são mantidas constantes. A mesma modelagem foi utilizada para os fluidos resultantes das reações de combustão.

Dada a condição de escoamento supersônico na garganta de um bocal convergente-divergente, o perfil de velocidades deve se aproximar de Mach 1 na garganta para que os gases sejam expandidos na porção divergente subsequente. Para um número de Mach maior que 0.3, os erros da assunção de escoamento incompressível superam 5% como mostrado na Seção 3.3.2. Dessa forma, todas as simulações utilizam fluidos compressíveis.

#### 4.2.6 Flutuabilidade

Alguns dos fenômenos físicos importantes no escoamento do vórtice bidirecional advém da presença de variações na densidade do fluido na câmara. Os altos gradientes de temperatura ocasionam variações na densidade e a consequente ocorrência de convecção natural. Outro tipo de convecção, conhecida como convecção mista, decorre das variações na pressão e das forças de empuxo.

Apesar do custo computacional, é necessário modelar corretamente no software os efeitos da flutuabilidade nos campos de velocidade e nos modelos de turbulência. Nas equações de momento, um termo de geração ( $S_{M,buoy}$ ) é adicionado para contabilizar o fenômeno:

$$S_{M,buoy} = (\rho - \rho_{ref}) \vec{g} \quad (4.1)$$

A densidade de referência  $\rho_{ref}$  é parâmetro necessário e foi refinada iterativamente de acordo com a maior e a menor densidade em cada simulação, chegando a um valor final de  $4kg/m^3$ .

#### 4.2.7 Escoamento de 1ª Ordem $\kappa - \omega$

Para inicializar as simulações subsequentes com valores aproximados do campo de velocidades ao longo da câmara, uma simulação reativa utilizando o modelo de turbulência  $\kappa - \omega$  foi realizada. O modelo  $\kappa - \omega$  foi escolhido pois o modelo final desejado (BSL-RSM) também é baseado na equação da frequência turbulenta ( $\omega$ ), facilitando assim a inicialização dos resultados. Uma vez que os modelos de viscosidade turbulenta podem ser insensíveis às curvaturas das linhas de fluxo, os resultados finais utilizando Modelos de Tensão de Reynolds.

A solução de um sistema turbulento em combustão sem valores iniciais adequados pode divergir logo nas primeiras iterações. Logo, um controle dinâmico inicializa o domínio com o Modelo de Turbulência Sem Equações ou *Zero Equation Turbulence Model* em inglês, mais simples e robusto para as primeiras iterações. Após isso, o modelo de turbulência  $\kappa - \omega$  é executado e assim procede até o final da etapa utilizando um fator de correção de curvatura para melhores aproximações.

Em virtude do número de Mach próximo a saída do bocal ultrapassar 0.3, a transferência de energia utilizou as equações de Energia Total, que modelam o transporte de entalpia e incluem os efeitos da energia cinética. O controle da compressibilidade em altas velocidades foi acionado no CFX, ajustando os fatores de relaxamento da solução para lidar com os gradientes próximos ao bocal de exaustão. Os efeitos da produção e da dissipação da flutuabilidade também foram levados em conta na simulação. Esses controles foram mantido durante todas as fases subsequentes.

Uma mistura de composição variável ideal foi criada para o  $H_2$  e o  $O_2$ . Como aponta ANSYS (2019a, p. 25), assumindo que os componentes estão misturado a nível molecular na maior parte da câmara, que compartilham da mesma velocidade média, campo de pressão, campo de temperatura e que a transferência de massa se dá por convecção e difusão, o escoamento pode ser caracterizado como monofásico e multicomponente. Em um escoamento desse tipo, cada componente pode ter propriedades distintas e o algoritmo interno irá calcular as médias para cada volume de controle. Em uma mistura ideal essa média é ponderada de acordo com a fração mássica de cada elemento.

O modelo de combustão apresentado nos estudos de Fang, Majdalani e Chiaverini (2004) é o Modelo de Flâmulas Laminares, em conjunto com as Funções de Densidade de Probabilidade ou PDF (do inglês *Probability Density Function*). Uma biblioteca foi gerada a partir das condições de temperatura e pressão dos reagentes, contendo as frações mássicas médias de cada espécie considerada ( $H$ ,  $H_2$ ,  $H_2O$ ,  $H_2O_2$ ,  $HO_2$ ,  $O$ ,  $O_2$  e  $OH$ ) em função da razão de mistura, variância da razão e taxa de dissipação escalar.

#### 4.2.8 Escoamento de 1ª Ordem RSM

Para capturar a anisotropia do campo de turbulência causada pelo escoamento rotacional, o Modelo de Tensão de Reynolds ou RSM (do inglês *Reynolds Stress Method*) foi aplicado como modelo de turbulência. Especificamente, o modelo Baseline Reynolds Stress Method (BSL-RSM), baseado no modelo BSL  $\kappa - \omega$ , foi escolhido devido ao uso da equação da frequência turbulenta ( $\omega$ ) no tratamento automático de parede, que oferece uma previsão mais precisa da separação do fluxo e é recomendado por ANSYS (2019a, p. 153) para escoamentos delimitados por paredes.

#### 4.2.9 Escoamento de 2ª Ordem RSM

O uso de um esquema de advecção de 1ª ordem apresenta erros de discretização, conhecidos como erros de difusão numérica, que tendem a suavizar gradientes mais severos. Por esse motivo, uma aproximação de 2ª ordem, embora menos robusta, é recomendada para obter resultados finais (ANSYS, 2019a, p. 496).

A influência das condições iniciais é ainda maior nas aproximações de 2ª ordem. Para melhorar a inicialização da aproximação de 2ª ordem, uma simulação intermediária é executada empregando um Fator de Mesclagem de 0.5 (ou *Blend Factor* em inglês), que adiciona igualmente as contribuições das aproximações de 1ª ordem e 2ª ordem na solução. Junto com os fatores de relaxamento adequados, a simulação de 2ª é executada com os novos valores iniciais.

#### 4.2.10 Critérios de Convergência

Objetivando a convergência das simulações balanceando precisão e custo computacional, as simulações são executadas até que sejam atingidos os seguintes critérios:

1. Resíduos normalizados, vide ANSYS (2019a, p. 502), menores que  $10^{-4}$ ;
2. Desbalanço global (do inglês *Global Imbalance*) menor que 1%;
3. Fluxo de massa estabilizado na saída.

Segundo ANSYS (2019a, p. 502), apesar de representar uma convergência relativamente fraca, resíduos menores que  $10^{-4}$  são suficientes para obter entendimento qualitativos do escoamento e podem ser suficientes para muitas aplicações de engenharia. Resíduos superiores foram eleitos por Fang e Majdalani (2003) enquanto Fang, Majdalani e Chiaverini (2004) obteve resíduos similares para uma aproximação de 2ª ordem.

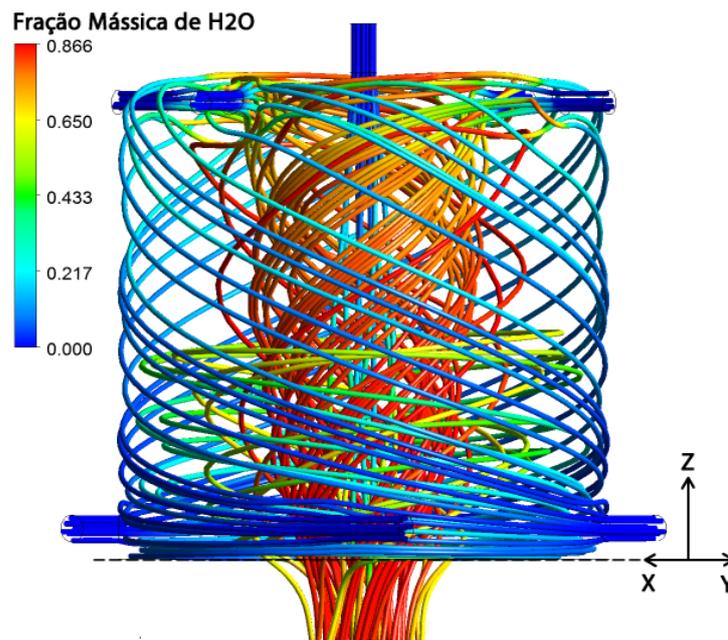
## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A melhor simulação convergida nas duas etapas empregou uma aproximação de 1ª ordem com o modelo BSL-RSM. Não foi possível convergir com uma aproximação de 2ª ordem utilizando o mesmo modelo de turbulência. Gradientes severos de temperatura próximos aos injetores são responsáveis pelos maiores resíduos no domínio computacional, mantendo um dos critérios de convergência, o desbalanço global, maior que 1% nas equações de conservação da energia.

### 5.1 ETAPA 1

As linhas de corrente dispostas na Figura 18 demonstram a presença do vórtice externo e do vórtice interno na câmara de combustão. A fração mássica de H<sub>2</sub>O é maior no vórtice interno, sugerindo que a queima ocorre predominantemente nessa região.

Figura 18 – Linhas de corrente da Etapa 1 coloridas pela fração mássica de H<sub>2</sub>O



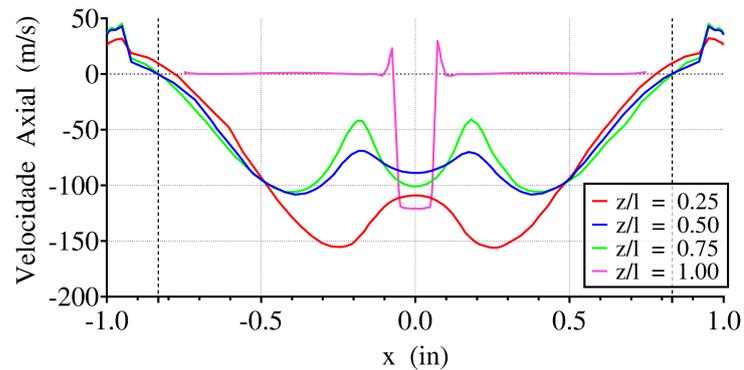
Fonte: Autor (2019)

O sistema de coordenadas é tal que a origem está no centro do prato inferior e  $z$  coincide com o eixo de rotação. A Figura 19 mostra a distribuição da velocidade axial ( $V_z$ ) em linhas ao longo da câmara, onde  $z/l$  é a distância axial adimensional.

Da solução analítica:

$$V_z = -2\pi\delta z^* \cos(\pi r^{*2}) \quad (5.1)$$

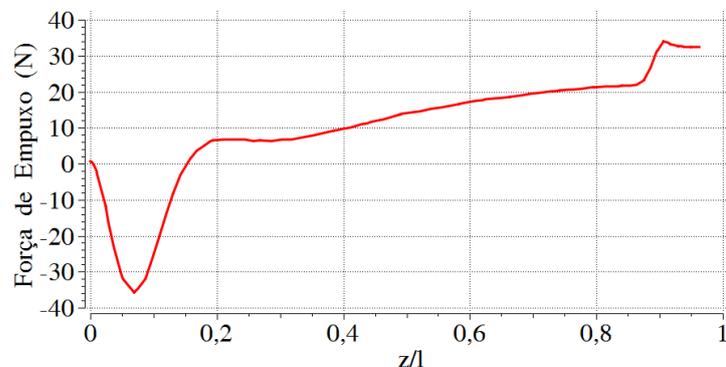
Figura 19 – Gráfico da velocidade axial no plano XZ para a Etapa 1



Fonte: Autor (2019)

Observa-se que, pela solução analítica, a velocidade axial decresceria linearmente com  $z^*$  para um mesmo raio  $r^*$ . Na solução numérica, o comportamento é distorcido no centro do vórtice interno ( $V_z < 0$ ) devido a injeção axial de oxigênio. Para o vórtice externo,  $V_z > 0$ , a previsão também não se confirma em  $z/l = 0.25$  devido à turbulência gerada pela injeção de oxigênio e aos efeitos da fluatuabilidade no fluido. A Figura 20 retrata o aumento da força de empuxo na direção axial para  $x = 0.98in$ . Ainda, as mudanças abruptas acima do eixo da abscissas na Figura 19 se devem a uma resolução pobre da malha junto às paredes da câmara.

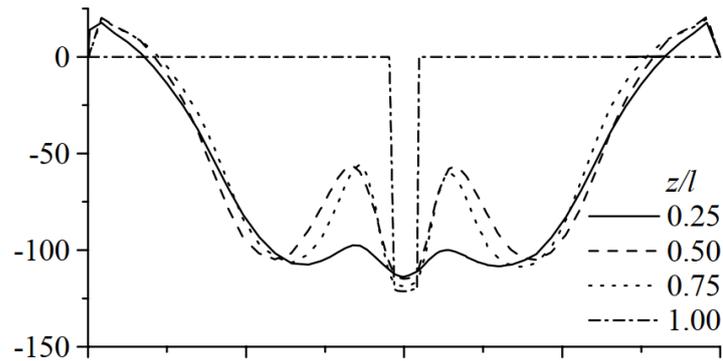
Figura 20 – Gráfico das forças de empuxo na direção  $z$  para a Etapa 1



Fonte: Autor (2019)

O perfil de velocidades axial obtido difere daquele encontrado pela referência (Figura 21), em especial em  $z/l = 0.25$ . A diferença se deve principalmente ao fato de que um escoamento incompressível com modelo de turbulência  $\kappa - \varepsilon$  é utilizado para obter os resultados em Fang, Majdalani e Chiaverini (2004). O mesmo autor em Fang e Majdalani (2003) reconhece que a aplicação de um modelo RSM pode ser mais adequada para obter os resultados finais da VCCW. Ademais, a hipótese de escoamento incompressível se tornaria uma aproximação cada vez menos apropriada com o aumento do número de Mach.

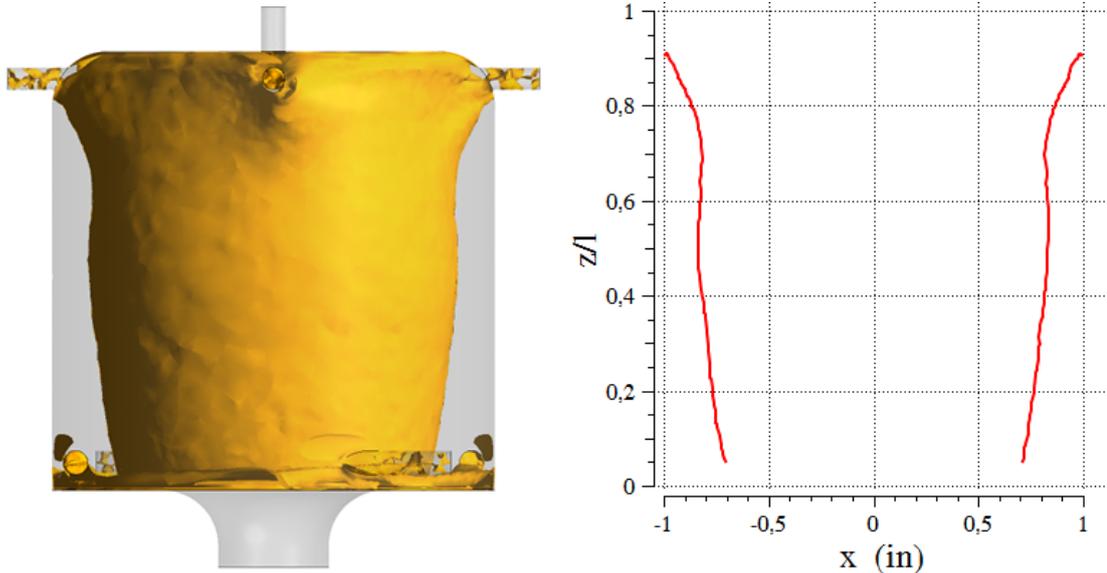
Figura 21 – Gráfico da velocidade axial obtido por Fang, Majdalani e Chiaverini (2004)



Fonte: Fang, Majdalani e Chiaverini (2004)

Entre o vórtice interno e o vórtice externo há uma região de inversão de fluxo onde a velocidade axial é zero, chamada de manta (Figura 22(a)), que é uma das principais características do escoamento de um vórtice bidirecional. Sua posição varia ao longo da câmara, como é possível observar na Figura 22(b). As regiões onde a posição da manta é incerta (próximo ao prato superior e inferior) foram omitidas na Figura 22(b).

Figura 22 – Manta de separação dos vórtices na Etapa 1



(a) Superfícies internas onde a velocidade axial é zero

(b) Posição da manta no plano XZ

Fonte: Autor (2019)

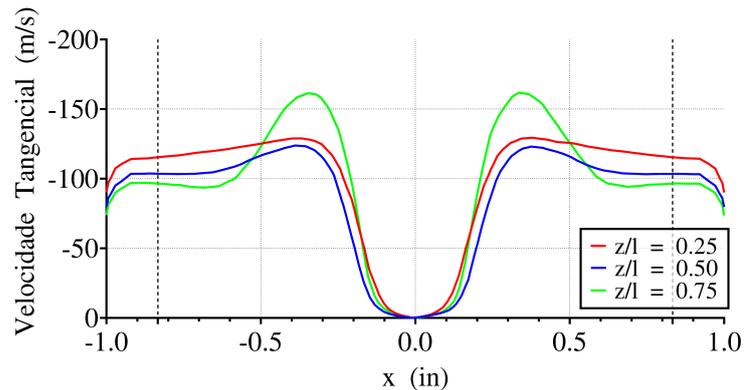
De acordo com a solução analítica desenvolvida no Apêndice A, a posição teórica da manta é dada por:

$$\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad (5.2)$$

Os valores obtidos aqui variam de 0.704 a 0.991 com valor médio de 0.833, calculado de acordo com o representado em 22(b). Esse valor pode ser comparado com o valor de 0.789 obtido em Fang, Majdalani e Chiaverini (2004).

Na direção tangencial, a distribuição de velocidades (Figura 23) mostra a presença de um vórtice forçado na região central ( $|x| < 0.35$ ) enquanto um vórtice livre se desenvolve na zona mais externa. Os perfis estão em boa concordância com os resultados de referência.

Figura 23 – Gráfico da velocidade tangencial no plano XZ para a Etapa 1



Fonte: Autor (2019)

A pequena variação de  $V_\theta$  com  $z/l$  na região central mostra que a hipótese de conservação do momento angular ( $\partial V_\theta / \partial z = 0$ ), utilizada na solução analítica, é melhor observada próximo ao núcleo. Pela solução analítica:

$$V_\theta = \frac{1}{r^{*2}} \quad (5.3)$$

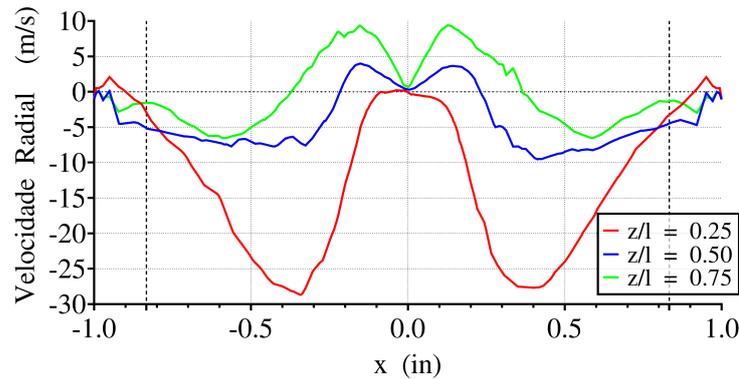
O comportamento da solução analítica é similar à zona mais externa devido à pequena influência dos efeitos viscosos. No entanto, a hipótese de um vórtice livre se torna inválida perto do núcleo do vórtice, onde os efeitos da viscosidade se tornam importantes (FANG; MAJDALANI; CHIAVERINI, 2004).

A distribuição da velocidade radial encontrada também se assemelha aos resultados de referência. Na Figura 24 uma velocidade radial predominantemente negativa indica que o fluxo sempre está cruzando do vórtice externo para o vórtice interno nessas regiões, aspecto essencial para o resfriamento de filme. O contrário acontece na porção inferior da câmara ( $z/l = 0.25$ ) próximo às paredes e no núcleo do vórtice, onde a recirculação na direção radial positiva permite que o oxigênio injetado no tampo superior (Figura 14) se misture à zona de combustão.

A velocidade radial teórica é dada por:

$$V_r = -\frac{\delta \sin(\pi r^{*2})}{r^{*2}} \quad (5.4)$$

Figura 24 – Gráfico da velocidade radial no plano XZ para a Etapa 1

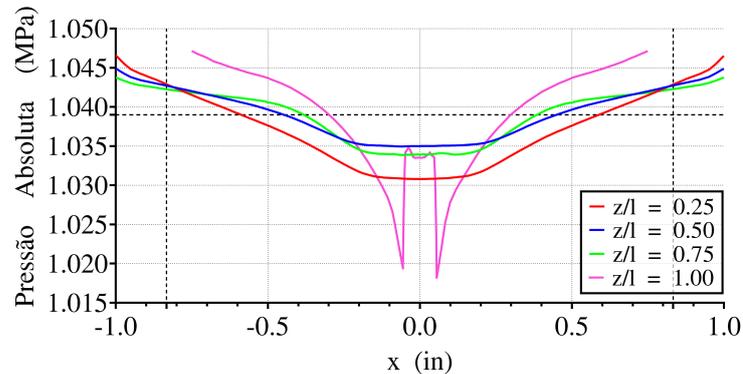


Fonte: Autor (2019)

Conforme Vyas, Majdalani e Chiaverini (2003), nesse caso  $V_r$  não depende de  $z$  e o raio onde a transferência é máxima é encontrado derivando a expressão acima em relação a  $\theta$ , obtendo  $r_{max} = 0.609$ . Aqui e nos resultados de referência, a distribuição radial não concorda com os resultados analíticos. O  $r_{max}$  encontrado está entre 0.35 e 0.40.

A pressão estática absoluta na câmara, plotada na Figura 25, varia pouco na direção axial aproximando-se da pressão média experimental de 1.035MPa obtida por Chiaverini et al. (2003). Uma média volumétrica no domínio resulta em uma pressão estática média de 1.039MPa para essa simulação.

Figura 25 – Gráfico da pressão estática absoluta no plano XZ para a Etapa 1



Fonte: Autor (2019)

No tampo superior, a pressão é mais alta devido às reações de combustão que ocorrem nessa região. Também, nota-se que a variação da pressão nessa área está em consonância com a solução analítica:

$$\Delta p^* \cong -\frac{1}{2r^{*2}} \quad (5.5)$$

Assim como a pressão interna da câmara, as pressões obtidas nos injetores e na saída

do bocal também são resultados implícitos da simulação. Em Majdalani e Chiaverini (2017), a pressão na entrada dos injetores é 10% maior que a pressão média da câmara. Ao mesmo tempo, a pressão estática média na saída é 14,4% menor. A Tabela 1 descreve a pressão total nos injetores, a pressão estática na saída e as variações em relação à pressão média de 1.039MPa. A pressão foi tomada também no início da seção reta da garganta ( $z = -0.25in$ ) para que fosse possível a comparação com os estudos de referência.

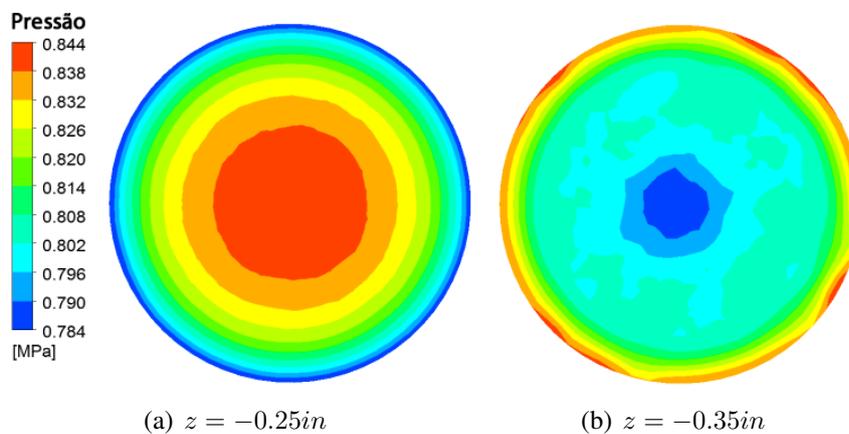
Tabela 1 – Variação da pressão nas entradas e saída da câmara em relação a pressão média

Local	Pressão (MPa)	Varição (%)
Injetor GOX Superior	1.116	+7.80
Injetores GOX Inferiores	1.121	+10.80
Injetores GH2	1.122	+8.34
Saída ( $z = -0.25 in$ )	0.822	-20.05
Saída ( $z = -0.35 in$ )	0.816	-21.06

Fonte: Autor (2019)

A Figura 26 confirma a hipótese de que o perfil de pressão após a seção reta do bocal (Figura 26(b)) é significativamente melhor desenvolvido que o anterior (Figura 26(a)).

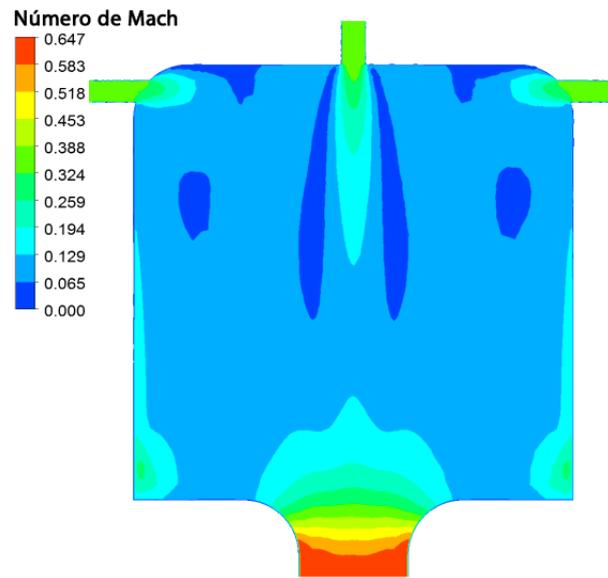
Figura 26 – Contornos de pressão no início e no fim da seção reta do bocal



Fonte: Autor (2019)

Pela condição de escoamento supersônico de um bocal convergente-divergente, o perfil de velocidades deveria se aproximar de Mach 1 na garganta para que os gases fossem expandidos na porção divergente subsequente, o que não acontece na simulação (Figura 27). Segundo Majdalani e Chiaverini (2017) um escoamento rotacional que dissipa calor pode distorcer essa condição de forma que a superfície sônica se estenda pela porção divergente do bocal, não incluída nessa simulação.

Figura 27 – Número de Mach no plano XZ para a Etapa 1

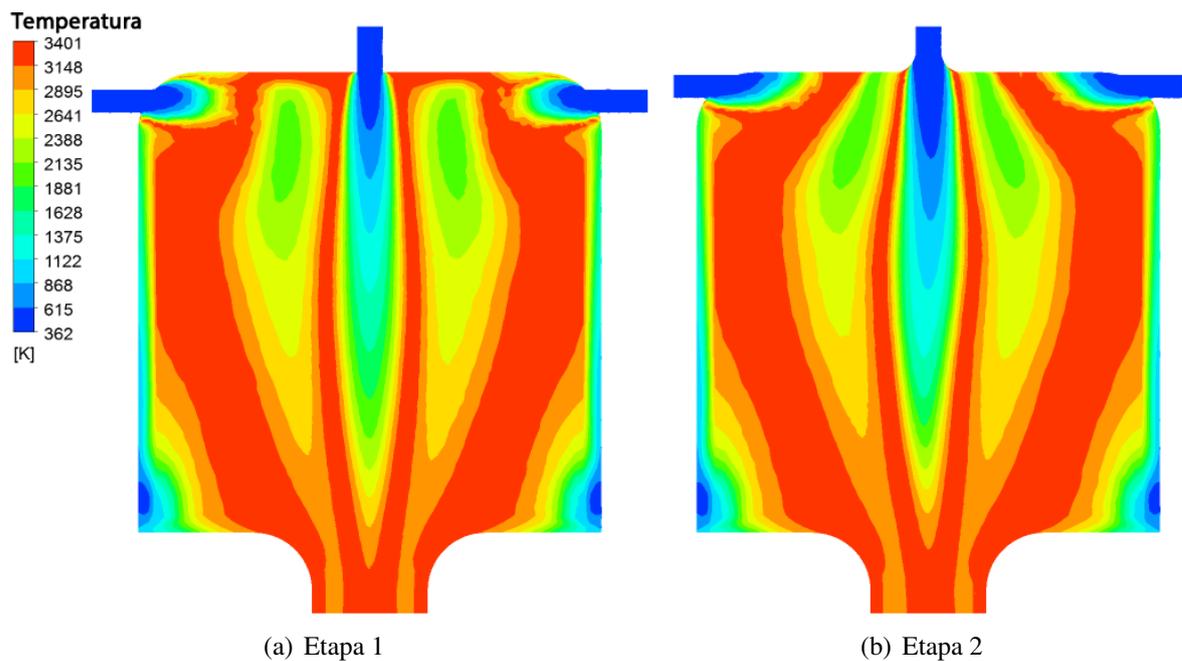


Fonte: Autor (2019)

## 5.2 ETAPA 2

Nas simulações da Etapa 2, os perfis de velocidade e pressão obtidos foram semelhantes aos da Etapa 1, enquanto a distribuição de temperatura e fração mássica das espécies evidenciam as consequências das alterações. A Figura 28 mostra os contornos de temperatura nas duas etapas.

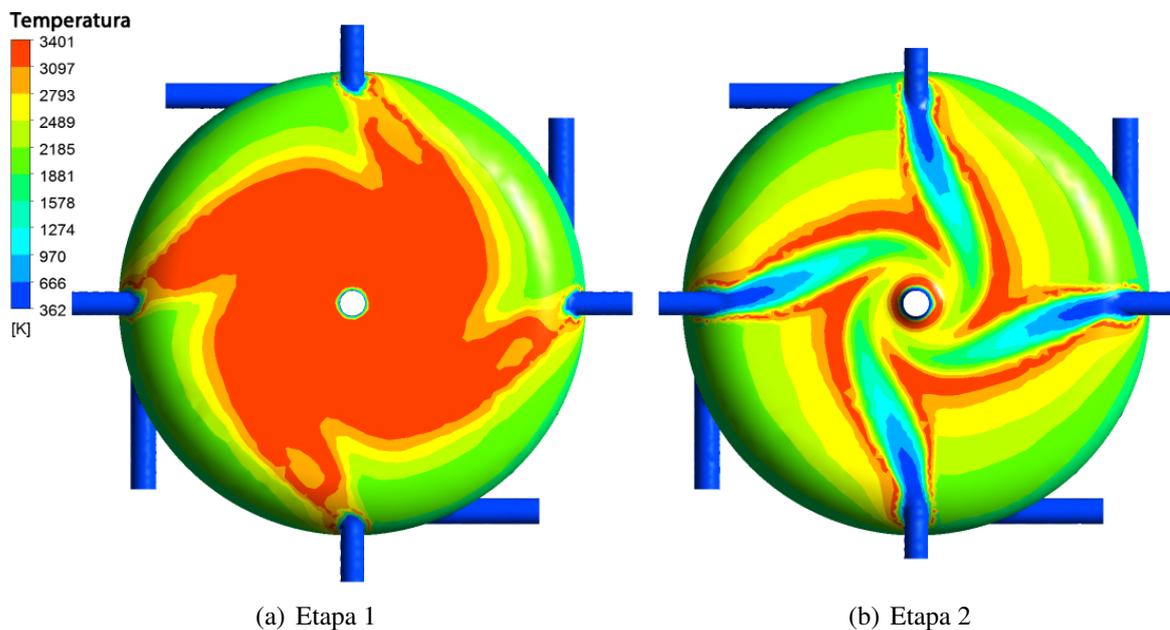
Figura 28 – Temperatura no plano XZ da câmara nas Etapas 1 e 2



Fonte: Autor (2019)

As temperaturas máximas de 3399K na Etapa 1 e 3401K na Etapa 2 estão em concordância com o valor de 3400K encontrado por Fang, Majdalani e Chiaverini (2004). Como esperado para essa configuração, o prato superior e o bocal apresentam as temperaturas mais críticas. Não obstante, as modificações realizadas permitem que o fluxo mais frio do combustível (366K) escoe diretamente sobre a superfície do prato, onde a temperatura de chama pode chegar a 3400K. De maneira similar, o oxidante admitido a 363K é difundido ao arredondar o injetor de oxigênio central. Uma vista superior do prato nas duas etapas está disponível na Figura 29.

Figura 29 – Temperatura no prato superior nas Etapas 1 e 2



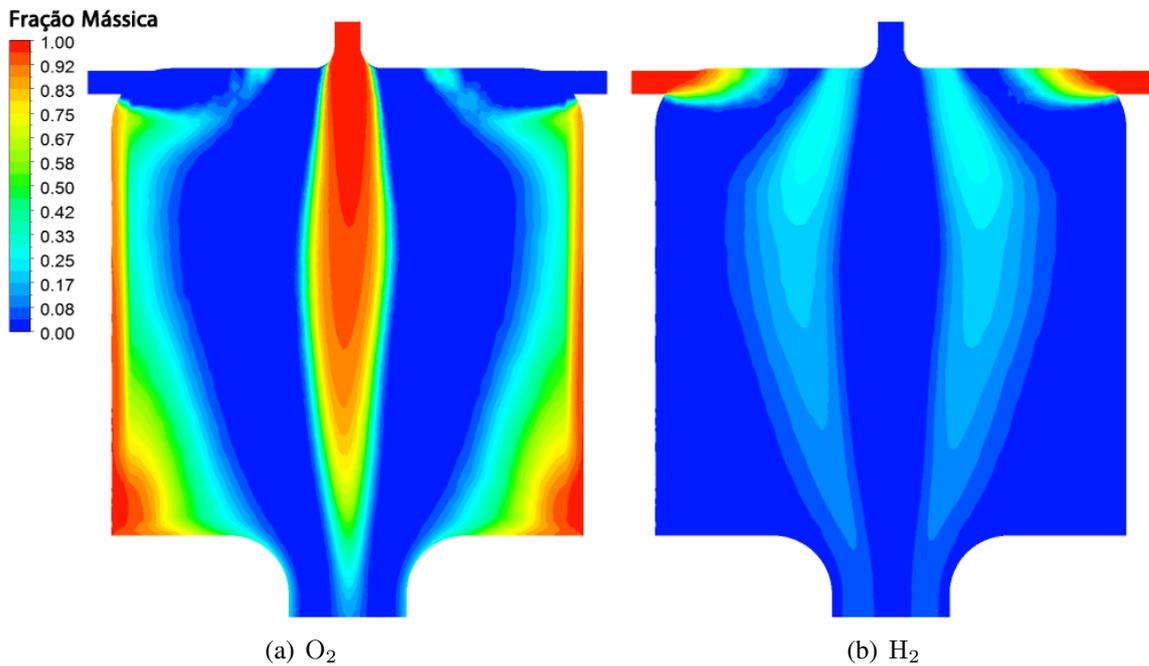
Fonte: Autor (2019)

A menor temperatura adjacente às paredes, junto à fração mássica de  $O_2$  na câmara (Figura 30(a)), confirma a ocorrência de resfriamento de filme pelo escoamento em vórtice do oxidante. De acordo com Fang, Majdalani e Chiaverini (2004), a fração de oxigênio não-consumida na saída decorre da alta velocidade no injetor central. A porção de hidrogênio não-queimado também é característico de uma reação rica em combustível.

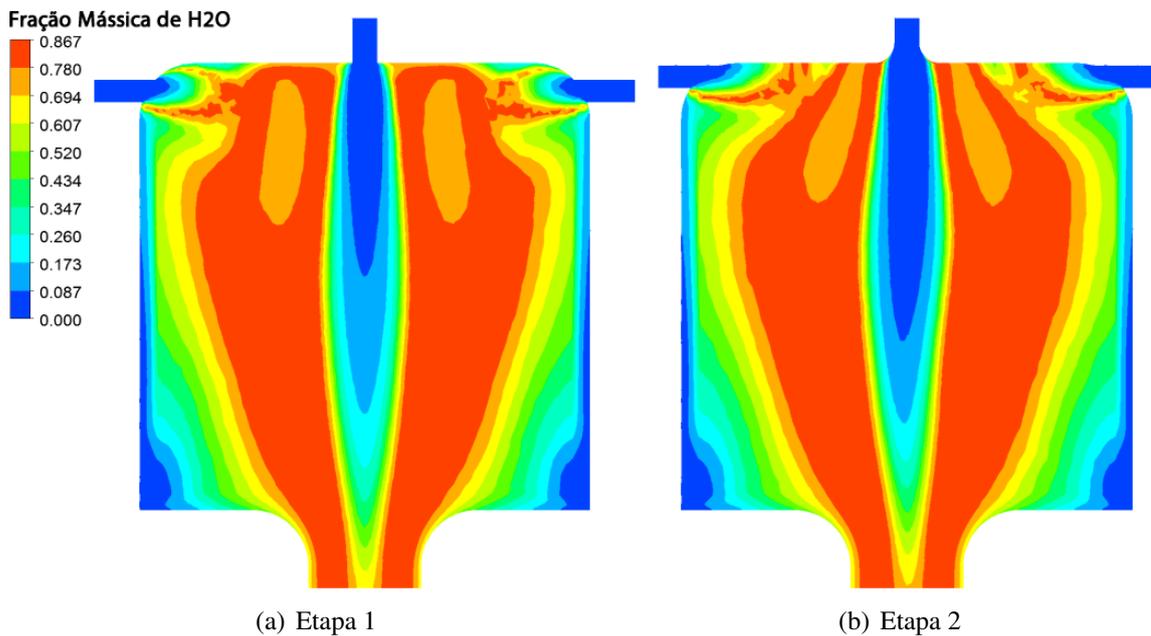
O desempenho da nova configuração pode ser analisado qualitativamente pela fração mássica de hidrogênio e pelas propriedades do escoamento na saída. A queima completa do hidrogênio é dada por:



A distribuição do vapor de água na câmara nas duas etapas é apresentada na Figura 31. Observa-se que, embora a queima no núcleo do vórtice seja atrasada na Etapa 2, as frações de  $H_2$  na saída são parecidas.

Figura 30 – Fração mássica de  $O_2$  e  $H_2$  no plano XZ na Etapa 2

Fonte: Autor (2019)

Figura 31 – Fração mássica de  $H_2O$  no plano XZ nas Etapas 1 e 2

Fonte: Autor (2019)

As propriedades médias na saída para cada etapa, ponderadas pelo fluxo de massa, são comparadas na Tabela 2. Há pouca variação nas propriedades e, portanto, um desempenho similar é esperado nas duas configurações. Os resultados experimentais de Chiaverini et al. (2003) mostram que nessas condições o motor foguete é capaz de produzir 351bf ou 155,7N de empuxo.

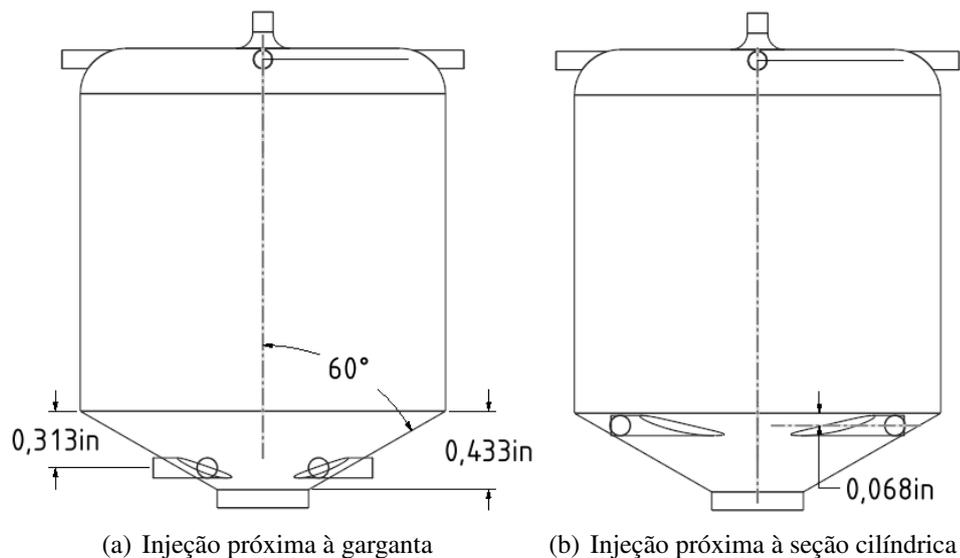
Tabela 2 – Propriedades do escoamento na saída para as Etapas 1 e 2

Propriedade	Etapa 1	Etapa 2
Velocidade Axial (m/s)	-935	-926
Número de Mach	0.613	0.607
Temperatura (K)	3187	3181
Fração Mássica de H <sub>2</sub> O	0.790	0.789
Pressão Estática (MPa)	0.816	0.820

Fonte: Autor (2019)

Por ora, o bocal continua a receber todos os esforços térmicos provenientes da combustão. Em meio às tentativas de resolver o problema, a injeção de oxigênio é disposta na parte convergente do bocal com a ampliação do diâmetro de entrada do mesmo, como mostra a Figura 32. Apenas as modificações em relação a geometria da Etapa 1 são mostradas na Figura 32(a), enquanto na Figura 32(b) é destacada a alteração relativa a Figura 32(a).

Figura 32 – Resfriamento do bocal com injeção na parte convergente



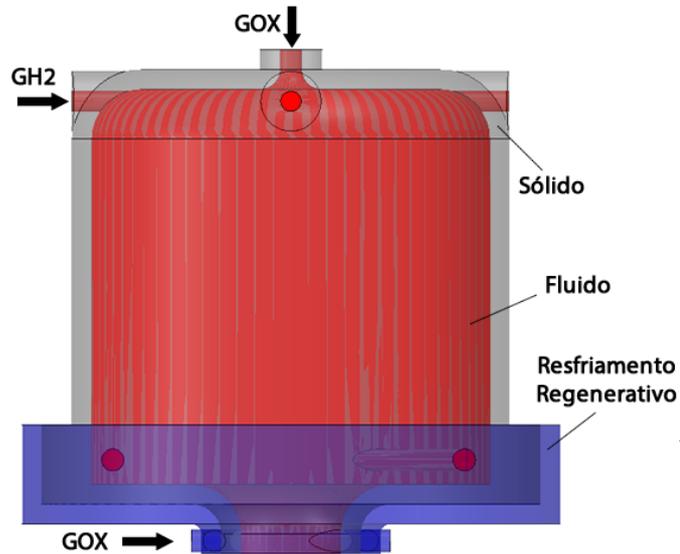
Fonte: Autor (2019)

As modificações foram escolhidas partindo da suposição que a criação de um vórtice a partir do bocal garantiria o resfriamento de filme em direção ao tampo superior, enquanto que com o aumento da entrada do bocal, parte do oxigênio fluiria sem reagir para resfriar a garganta.

Todavia, as hipóteses não se confirmaram com as condições de contorno testadas. A velocidade do fluxo descendente do vórtice interno é muito maior que a velocidade de injeção do oxidante, o que faz com que o oxigênio seja arrastado para fora antes de escoar em direção ao prato superior. Para a ampliação do diâmetro de entrada do bocal, os resultados qualitativos mostram que a parcela de oxigênio a qual flui diretamente para a saída reage em sua maior parte com a fração de combustível não queimada e as vantagens térmicas tornam-se insuficientes.

Caso o bocal seja fabricado em material de boa condutividade térmica, é possível agregar o conceito de VCCW com resfriamento regenerativo, proposto por Chiaverini et al. (2002). O modelo da câmara com a adição do resfriamento regenerativo é mostrado na Figura 33.

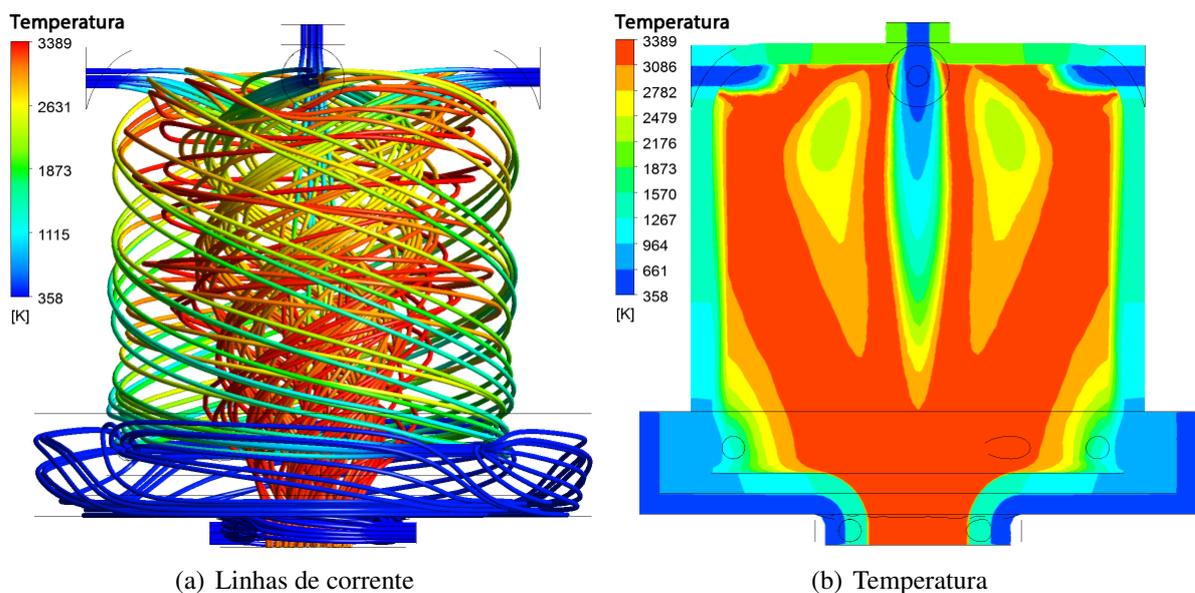
Figura 33 – Modelo da câmara de vórtice com resfriamento regenerativo



Fonte: Autor (2019)

Resultados preliminares foram obtidos modelando a transferência de calor através de paredes de aço de 0.1 polegada e definindo uma condição de contorno adiabática nas superfícies mais externas (Figura 34).

Figura 34 – Resultados preliminares da câmara de vórtice com resfriamento regenerativo



(a) Linhas de corrente

(b) Temperatura

Fonte: Autor (2019)

Na simulação, a temperatura do bocal se aproxima da temperatura das demais regiões com a adição do resfriamento regenerativo. Em que pese a modelagem do problema deva ser melhor investigada, os resultados indicam que um motor foguete totalmente resfriado por vórtice bidirecional é possível.

Como aponta Fang, Majdalani e Chiaverini (2004), apesar das temperaturas nas paredes nas simulações alcançarem valores proibitivos, o motor na prática é operado durante alguns segundos e as temperaturas de parede nunca atingirão os valores estimados em regime permanente com paredes adiabáticas. Chiaverini et al. (2002) mostrou que temperaturas da ordem de 100°C podem ser mantidas a uma pressão de até 400 psia em uma câmara de vórtice.

## 6 CONCLUSÕES

As simulações computacionais de um motor foguete a propelente líquido resfriado por vórtice bidirecional mostram que é possível diminuir os esforços térmicos na estrutura de um motor foguete através da disposição estratégica dos injetores de propelente. O resfriamento das paredes da câmara de vórtice proposta por Fang, Majdalani e Chiaverini (2004), a VCCW, foi reproduzido encontrando resultados coerentes para um escoamento compressível com modelo de turbulência RSM.

Aproximando os injetores de hidrogênio do topo da câmara e arredondando o injetor de oxigênio central, uma diminuição satisfatória da temperatura nessa região foi encontrada. O ganho térmico decorrente da modificação não altera o desempenho do motor. A flexibilidade na escolha do material e a diminuição de custo decorrente faz com que essa solução seja vantajosa em foguetes amadores.

O bocal não pôde ser resfriado pelo filme de oxigênio em nenhuma das configurações testadas. Entretanto, resultados preliminares indicam que a adição de resfriamento regenerativo no bocal da câmara de vórtice é capaz de viabilizar o resfriamento completo do motor foguete.

### 6.1 TRABALHOS FUTUROS

A investigação mais detalhada do modelo de câmara de vórtice com resfriamento regenerativo se faz necessária e já foi iniciada. Outros tópicos devem ser trabalhados no futuro visando obter um modelo confiável de motor totalmente resfriado:

1. Otimização da malha nas regiões de maior importância;
2. Simulação em regime transiente da câmara de vórtice;
3. Modelagem e simulação do escoamento na porção divergente do bocal com os dados obtido;
4. Prototipação da câmara de vórtice em impressora 3D com baixas pressões e propelentes líquidos utilizados em foguetes amadores.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. D. **Fundamentals of Aerodynamics**. New York: McGraw-Hill Education Ltd, 2016. ISBN 1259129918.
- ANSYS. **ANSYS CFX-Solver Modeling Guide**. 2019 R3. Canonsburg, 2019.
- ANSYS. **ANSYS CFX-Solver Theory Guide**. 2019 R3. Canonsburg, 2019.
- ANSYS. **ANSYS Fluent Users Guide**. 2019 R3. Canonsburg, 2019.
- CHIAVERINI, M. et al. Vortex Combustion Chamber Development For Future Liquid Rocket Engine Applications. In: AIAA/ASME/SAE/ASEE JOINT PROPULSION CONFERENCE AND EXHIBIT, 38., 2002, Indianapolis. **Proceedings [...]**. Indianapolis: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
- CHIAVERINI, M. et al. Vortex Thrust Chamber Testing and Analysis for O<sub>2</sub>-H<sub>2</sub> Propulsion Applications. In: AIAA/ASME/SAE/ASEE JOINT PROPULSION CONFERENCE AND EXHIBIT, 39., 2003, Huntsville. **Proceedings [...]**. Huntsville: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- FANG, D.; MAJDALANI, J. Simulation of the Cold-Wall Swirl Driven Combustion Chamber. In: AIAA/ASME/SAE/ASEE JOINT PROPULSION CONFERENCE AND EXHIBIT, 39., 2003, Huntsville. **Proceedings [...]**. Huntsville: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.
- FANG, D.; MAJDALANI, J.; CHIAVERINI, M. Hot Flow Model of the Vortex Cold Wall Liquid Rocket. In: AIAA/ASME/SAE/ASEE JOINT PROPULSION CONFERENCE AND EXHIBIT, 40., 2004, Fort Lauderdale. **Proceedings [...]**. Fort Lauderdale: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004.
- HAUKE, G. **An Introduction to Fluid Mechanics and Transport Phenomena**. [S.l.]: SPRINGER NATURE, 2008. ISBN 1402085362.
- KOLLA, H. **Scalar Dissipation Rate based Flamelet Modelling of Turbulent Premixed Flames**. Tese (Doutorado) — University of Cambridge (Trinity Hall), 2009. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/1320912.pdf>>. Acesso em: 18 nov. 2019.
- LAKATOS, M. d. A. M. E. M. **Fundamentos da metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2003. ISBN 8522433976.
- MAJDALANI, J.; CHIAVERINI, M. J. Characterization of GO<sub>2</sub>-GH<sub>2</sub> Simulations of a Miniature Vortex Combustion Cold-Wall Chamber. **Journal of Propulsion and Power**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 33, n. 2, p. 387–397, mar 2017.
- MCDONALD, P. W. The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades. **ASME 1971 International Gas Turbine Conference and Products Show**, 1971.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics**. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2015. ISBN 3319168738.
- MULLINGER, P.; JENKINS, B. **Industrial and Process Furnaces: Principles, Design and Operation**. First. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2008.

NAKKA, R. **Nozzle Theory**. 2015. Disponível em: <[http://www.nakka-rocketry.net/th\\_nozz.html](http://www.nakka-rocketry.net/th_nozz.html)>. Acesso em: 18 nov. 2019.

NASA. **Commercial Market Assessment for Crew and Cargo Systems**. 2011. Disponível em: <[https://www.nasa.gov/pdf/543572main\\_Section%20403%28b%29%20Commercial%20Market%20Assessment%20Report%20Final.pdf](https://www.nasa.gov/pdf/543572main_Section%20403%28b%29%20Commercial%20Market%20Assessment%20Report%20Final.pdf)>. Acesso em: 18 nov. 2019.

PRITCHARD, P. J. **Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics**. [S.l.]: JOHN WILEY & SONS INC, 2011. ISBN 0470547553.

SHAPIRO, A. H. **Film Notes for Vorticity**. 1969. Disponível em: <<http://web.mit.edu/hml/ncfmf/09VOR.pdf>>. Acesso em: 12 nov. 2019.

Sierra Nevada Corporation. **New Upper Stage Rocket Engine A Step Closer To Reality**. 2018. Disponível em: <<https://www.sncorp.com/press-releases/snc-vortex-rocket-engine/>>. Acesso em: 22 maio 2019.

STEWART, J. **Calculus: Early Transcendentals**. Boston: BROOKS COLE PUB CO, 2015. ISBN 1285741552.

SUTTON, O. B. G. P. **Rocket Propulsion Elements**. Hoboken: John Wiley & Sons Inc, 2016. ISBN 1118753658.

TAYLOR, T. S. **Introduction to Rocket Science and Engineering**. Boca Raton: Taylor & Francis Inc, 2017. ISBN 1498772323.

TRINH, H. P.; KNUTH, W.; MICHAELS, S. **Evaluation of Vortex Chamber Concepts for Liquid Rocket Engine Applications**. Huntsville, 2000.

TURNER, M. J. L. **Rocket and Spacecraft Propulsion**. Chichester: Springer-Verlag GmbH, 2008. ISBN 3540692029.

United States. **1974 NASA authorization hearings, Ninety-third Congress, first session, on H.R. 4567 (superseded by H.R. 7528)**. Washington: U.S. Govt. Print. Off., 1973. v. 3. 1271 p. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/2027/mdp.39015084762726>>. Acesso em: 18 nov. 2019.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**. Harlow: Pearson Education Limited, 2007.

Virginia Tech. **Converging Diverging Nozzle**. 2001. Disponível em: <<http://www.engapplets.vt.edu/fluids/CDnozzle/cdinfo.html>>. Acesso em: 18 nov. 2019.

VYAS, A.; MAJDALANI, J.; CHIAVERINI, M. The Bidirectional Vortex. Part 1: An Exact Inviscid Solution. In: AIAA/ASME/SAE/ASEE JOINT PROPULSION CONFERENCE AND EXHIBIT, 39., 2003, Huntsville. **Proceedings [...]**. Huntsville: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2003.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics**. New York: McGraw-Hill Education - Europe, 2015. ISBN 0073398276.

ÇENGEL, Y. A.; BOLES, M. A. **Thermodynamics: An Engineering Approach**. New York: McGraw-Hill Education, 2018. ISBN 1259822672.

## APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA

### A.1 CONSIDERAÇÕES

Para se obter a solução analítica, tal qual em Vyas, Majdalani e Chiaverini (2003), serão feitas as seguintes considerações:

1. Regime permanente;
2. Fluido incompressível;
3. Efeitos viscosos desprezíveis;
4. escoamento rotacional;
5. Axissimétrico.

### A.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Na sua forma vetorial, a equação de conservação da massa para um escoamento incompressível é:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Em coordenadas cilíndricas, tem-se que  $\vec{V} = V_r \hat{r} + V_\theta \hat{\theta} + V_z \hat{z}$  e a equação acima se escreve como::

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Dado que o escoamento é incompressível e sem atrito, as equações de Navier-Stokes se reduzem à equação de Euler:

$$\rho \left( \frac{D\vec{V}}{Dt} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (\text{A.3})$$

A derivada material da velocidade,  $D\vec{V}/Dt$ , pode ser escrita como:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \quad (\text{A.4})$$

Desprezando os efeitos do campo gravitacional, reconhecendo que  $\partial \vec{V} / \partial t = 0$  em A.4 e

substituindo em A.3, tem-se:

$$\rho(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = -\nabla p \quad (\text{A.5})$$

Que pode ser decomposta em cada uma das direções:

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.6})$$

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (\text{A.7})$$

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A.8})$$

A simetria do escoamento rotacional em torno do eixo garante que:

$$\frac{\partial V_r}{\partial \theta} = \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial V_z}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Na ausência de atrito com as paredes e entre as camadas do fluido, o momento angular se conserva na direção axial, logo:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Sendo assim, a equação da continuidade em coordenadas cilíndricas A.2 e as equações A.6, A.7 e A.8 reduzem-se a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.12})$$

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A.14})$$

É possível eliminar a pressão da equação de Euler (A.5) se substituirmos o produto escalar pela sua identidade:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} \quad (\text{A.15})$$

Reconhecendo que a vorticidade é dada por  $\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}$  e simplificando:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla(V^2) - \vec{V} \times \vec{\zeta} \quad (\text{A.16})$$

Substituindo A.16 na equação de Euler para regime permanente A.5:

$$\frac{1}{2} \nabla(V^2) - \vec{V} \times \vec{\zeta} = -\nabla \frac{p}{\rho} \quad (\text{A.17})$$

Aplicando o operador rotacional nos dois lados da igualdade da equação acima:

$$\nabla \times \frac{1}{2} \nabla(V^2) - \nabla \times \vec{V} \times \vec{\zeta} = -\nabla \times \nabla \frac{p}{\rho} \quad (\text{A.18})$$

Sabendo que  $\nabla \times \nabla = 0$ , chega-se a equação de transporte da vorticidade:

$$\nabla \times \vec{V} \times \vec{\zeta} = 0 \quad (\text{A.19})$$

### A.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Na Figura 35,  $L$  é o comprimento total da câmara de combustão,  $a$  é o raio interno e  $b$  é o raio do bocal. As condições de contorno então são:

$$r = a; \quad z = L; \quad V_\theta = U \quad (\text{A.20})$$

$$z = 0; \quad \forall r; \quad V_z = 0 \quad (\text{A.21})$$

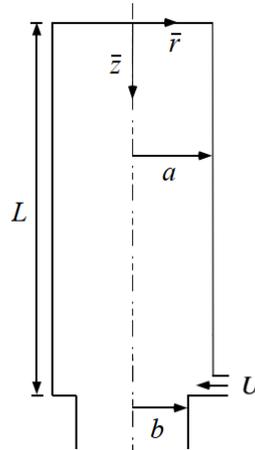
$$r = 0; \quad \forall z; \quad V_r = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$r = a; \quad \forall z; \quad V_r = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$z = L; \quad \dot{Q}_o = \dot{Q}_i = UA_i \quad (\text{A.24})$$

1. Injetores com fluxo de entrada totalmente tangencial (Equação A.20);
2. Fluxo axial zero no tampo superior (Equação A.21);
3. Simetria em torno do eixo central (Equação A.22);
4. Nas paredes, fluxo radial zero (Equação A.23);
5. Fluxo de entrada igual ao fluxo de saída (Equação A.24).

Figura 35 – Modelo esquemático da câmara de combustão



Fonte: Fang e Majdalani (2003)

#### A.4 NORMALIZAÇÃO

As variáveis são normalizadas no intuito de buscar uma solução de similaridade para o problema. As escolhas adimensionais são àquelas feitas por Vyas, Majdalani e Chiaverini (2003). O sobrescrito asterisco (\*) é utilizado para indicar a variável normalizada.

$$\begin{aligned}
 z^* &= \frac{z}{a}; & r^* &= \frac{r}{a}; & \nabla^* &= a\nabla \\
 V_r^* &= \frac{V_r}{U}; & V_\theta^* &= \frac{V_\theta}{U}; & V_z^* &= \frac{V_z}{U} \\
 p^* &= \frac{p}{\rho U^2}; & \dot{Q}_i^* &= \frac{\dot{Q}_i}{U a^2} = \frac{A_i}{a^2}; & \dot{Q}_o^* &= \frac{\dot{Q}_o}{U a^2}
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Onde  $U = V_\theta(a, L)$  representa a velocidade média de injeção do fluido e as escolhas de  $\dot{Q}_i^*$  e  $\dot{Q}_o^*$  são regradas pelas escolhas de  $\vec{V}^*$  e  $r^*$ :

$$\frac{\dot{Q}_{i,o}}{\dot{Q}_{i,o}^*} = \frac{\int \vec{V} \cdot \hat{n} r dr d\theta}{\int \vec{V}^* \cdot \hat{n} r^* dr^* d\theta} = U a^2 \tag{A.26}$$

Definindo  $\beta^* = b/a$  e  $l^* = L/a$ , as condições de contorno se tornarão:

$$V_\theta^*(1, l^*) = 1 \tag{A.27}$$

$$V_z^*(r^*, 0) = 0 \tag{A.28}$$

$$V_r^*(0, z^*) = 0 \tag{A.29}$$

$$V_r^*(1, z^*) = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\dot{Q}_i^* = \dot{Q}_o^* = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\beta^*} \vec{V}^*(r^*, l^*) \cdot \hat{n} r^* dr^* \right) d\theta \quad (\text{A.31})$$

## A.5 SOLUÇÃO

A Equação A.13, que representa a conservação do momento na direção  $\theta$ , quando normalizada, toma a seguinte forma:

$$V_r^* \left( \frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{V_\theta^*}{r^*} \right) = 0 \quad (\text{A.32})$$

Integrando para  $V_\theta$ , obtém-se:

$$V_\theta^* = \frac{D}{r^*} \quad (\text{A.33})$$

Para a qual  $D$  é uma constante genérica. Percebe-se que a Equação A.33 evidencia um vórtice livre no interior da câmara, o qual independe da distância axial. A condição de contorno de injeção totalmente tangencial normalizada, Equação A.27, acarreta em  $D = 1$ , logo:

$$V_\theta^* = \frac{1}{r^*} \quad (\text{A.34})$$

A vorticidade normalizada em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\vec{\zeta}^* = \nabla \times \vec{V}^* = \zeta_r^* \hat{r} + \zeta_\theta^* \hat{\theta} + \zeta_z^* \hat{z} \quad (\text{A.35})$$

Ao aplicar o operador rotacional na velocidade, podemos expandir a equação acima em:

$$\vec{\zeta}^* = \hat{r} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_z^*}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} \right) + \hat{\theta} \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} - \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) + \hat{z} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* V_\theta^*)}{\partial r^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial V_r^*}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.36})$$

Substituindo a expressão para  $V_\theta$  (Equação A.34) na equação acima:

$$\vec{\zeta}^* = \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} - \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \hat{\theta} \quad (\text{A.37})$$

$$\zeta_r^* = 0; \quad \zeta_\theta^* = \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} - \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}; \quad \zeta_z^* = 0 \quad (\text{A.38})$$

Pode-se chegar à Equação A.19 de transporte da vorticidade multiplicando-se os vetores

gradiente, velocidade e vorticidade. Portanto:

$$\vec{V}^* \times \vec{\zeta}^* = \hat{r}(-V_z^* \zeta_\theta^*) + \hat{z}(V_z^* \zeta_\theta^*) \quad (\text{A.39})$$

Operando o rotacional da equação acima:

$$\nabla \times \vec{V}^* \times \vec{\zeta}^* = \hat{r} \left[ \frac{\partial(V_r^* \zeta_\theta^*)}{\partial \theta} \right] - \hat{\theta} \left[ \frac{\partial(V_z^* \zeta_\theta^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial(V_r^* \zeta_\theta^*)}{\partial r^*} \right] + \hat{z} \left[ \frac{\partial(V_z^* \zeta_\theta^*)}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\partial(V_z^* \zeta_\theta^*)}{\partial z^*} + \frac{\partial(V_r^* \zeta_\theta^*)}{\partial r^*} = 0 \quad (\text{A.41})$$

A função de linha de Stokes para coordenadas cilíndricas é:

$$V_r^* = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial z^*} \quad (\text{A.42})$$

$$V_z^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial r^*} \quad (\text{A.43})$$

Substituindo as Equações A.42 e A.43 em A.41:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left( -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial r^*} \zeta_\theta^* \right) + \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial z^*} \zeta_\theta^* \right) = 0 \quad (\text{A.44})$$

O teorema de Clairaut-Schwarz diz que:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z^*} \right) \quad (\text{A.45})$$

Utilizando a regra da cadeia e o teorema acima, chega-se a:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{\zeta_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\zeta_\theta^*}{r^*} \right) = 0 \quad (\text{A.46})$$

Reorganizando, teremos:

$$\frac{(\zeta_\theta^*/r^*)_{z^*}}{(\zeta_\theta^*/r^*)_{r^*}} = \frac{\psi_{z^*}}{\psi_{r^*}} \quad (\text{A.47})$$

Onde os subscritos representam derivadas parciais nas variáveis indicadas. A igualdade

acima é verdade se e somente se  $\zeta_\theta^*$  for da forma:

$$\zeta_\theta^* = r^* G[\psi(r^*, z^*)] \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{(\zeta_\theta^*/r^*)_{z^*}}{(\zeta_\theta^*/r^*)_{r^*}} = \frac{[G(\psi)]_{z^*}}{[G(\psi)]_{r^*}} = \frac{G_\psi \psi_{z^*}}{G_\psi \psi_{r^*}} = \frac{\psi_{z^*}}{\psi_{r^*}} \quad (\text{A.49})$$

Na tentativa de encontrar uma solução exata para o problema, uma relação linear entre  $G$  e  $\psi$  é definida através de uma constante  $C$  diferente de zero:

$$G = C^2 \psi \quad (\text{A.50})$$

$$\zeta_\theta^* = r^* C^2 \psi \quad (\text{A.51})$$

Substituindo as equações de linha de stokes (A.42 e A.43) e a equação acima na Equação  $\zeta_\theta^*$  da vorticidade (A.36), tem-se a equação diferencial parcial das linhas de corrente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial r^*} + C^2 r^{*2} \psi = 0 \quad (\text{A.52})$$

As condições de contorno A.28, A.29 e A.30 podem ser reescritas em função da equação de linha:

$$z^* = 0; \quad V_z^* = 0; \quad \partial \psi / \partial r^* = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$r^* = 0; \quad V_r^* = 0; \quad \partial \psi / \partial z^* = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$r^* = 1; \quad V_r^* = 0; \quad \partial \psi / \partial z^* = 0 \quad (\text{A.55})$$

### A.5.1 Solução Geral

Uma das formas de se resolver a equação diferencial parcial das linhas de corrente (A.52) analiticamente é reduzi-la à equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem pelo método da separação de variáveis. Supondo que a expressão abaixo seja solução:

$$\psi(r^*, z^*) = f(r^*)g(z^*) \quad (\text{A.56})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^{*2}} = f \frac{\partial^2 g}{\partial z^{*2}}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^{*2}} = g \frac{\partial^2 f}{\partial r^{*2}}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r^*} = g \frac{\partial f}{\partial r^*} \quad (\text{A.57})$$

Portanto, a Equação A.52 pode ser reescrita em função de  $f$  e  $g$ :

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^{*2}} = \frac{1}{f} \left( \frac{d^2 f}{dr^{*2}} - \frac{1}{r^*} \frac{df}{dr^*} + C^2 r^{*2} f \right) \quad (\text{A.58})$$

Nota-se que o lado esquerdo da equação depende apenas de  $z^*$ , enquanto o lado direito depende apenas de  $r^*$ . Pode-se imaginar que, ao variar  $z^*$  enquanto mantém-se  $r^*$  constante, a igualdade não se manteria, pois um dos lados da equação se alteraria e o outro não. De fato, a única solução possível é que ambos os lados sejam funções constantes:

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^{*2}} = \pm \lambda^2; \quad \frac{1}{f} \left( \frac{d^2 f}{dr^{*2}} - \frac{1}{r^*} \frac{df}{dr^*} + C^2 r^{*2} f \right) = \pm \lambda^2 \quad (\text{A.59})$$

Onde  $\lambda^2$  é uma constante positiva. Se  $\lambda = 0$ , a função de linha irá variar de forma linear da direção axial:

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dz^{*2}} = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$g(z) = C_1 z^* + C_2 \quad (\text{A.61})$$

Na direção radial, tem-se:

$$\frac{d^2 f}{dr^{*2}} - \frac{1}{r^*} \frac{df}{dr^*} + C^2 r^{*2} f = 0 \quad (\times r^{*2}) \quad (\text{A.62})$$

$$r^{*2} \frac{d^2 f}{dr^{*2}} - r^* \frac{df}{dr^*} + C^2 r^{*4} f = 0 \quad (\text{A.63})$$

À primeira vista, a equação se assemelha a uma equação de Bessel. De fato, pode-se reduzi-la a uma equação de Bessel de ordem  $1/2$  que tem uma solução da forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0; \quad p = 1/2 \quad (\text{A.64})$$

$$y(x) = D_1 J_{1/2}(x) + D_2 J_{-1/2}(x) \quad (\text{A.65})$$

Para a qual  $D_1$  e  $D_2$  são constantes quaisquer e  $J_{1/2}$  é uma função de Bessel de meia-ordem. Ao fazer  $f(r^*) = r^* h(r^*)$  na Equação A.63, o termo de ordem ( $p$ ) surge:

$$r^{*2} \frac{d^2 h}{dr^{*2}} + r^* \frac{dh}{dr^*} + (C^2 r^{*4} - 1)h = 0 \quad (\text{A.66})$$

Efetuada uma mudança de variável  $s = r^{*2}$ :

$$s^2 \frac{d^2 h}{ds^2} + s \frac{dh}{ds} + \left( \frac{C^2}{4} s^2 - \frac{1}{4} \right) h = 0 \quad (\text{A.67})$$

Finalmente, se  $u(s) = h(\lambda s)$ :

$$s^2 \frac{d^2 u}{ds^2} + s \frac{du}{ds} + \left( \frac{C^2}{4} \lambda^2 s^2 - \frac{1}{4} \right) u = 0 \quad (\text{A.68})$$

$$\lambda = \frac{2}{C}; \quad p = \frac{1}{2} \quad (\text{A.69})$$

A equação acima tem solução na forma da Equação A.65. Fazendo o caminho inverso, de modo que  $f(r^*) = r^* C u(Cr^{*2}/2)$ :

$$f(r^*) = r^* D_3 J_{1/2} \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) + r^* D_4 J_{-1/2} \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) \quad (\text{A.70})$$

Substituindo as funções de Bessel de meia ordem:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x); \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x) \quad (\text{A.71})$$

$$f(r^*) = C_3 \sin \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) + C_4 \cos \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) \quad (\text{A.72})$$

E, finalmente, substituindo as Equações A.72 e A.61 em A.56:

$$\psi = (C_1 z^* + C_2) \left[ C_3 \sin \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) + C_4 \cos \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) \right] \quad (\text{A.73})$$

### A.5.2 Solução Particular

Aplicando as condições de contorno na solução geral da equação de linha de Stokes (Equação A.73), é possível encontrar as suas constantes. Procedendo a partir da condição de fluxo axial zero no tampo superior (A.53):

$$\frac{\partial \psi}{\partial r^*} = C_2 \left[ C_3 Cr^* \cos \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) - C_4 Cr^* \sin \left( \frac{1}{2} Cr^{*2} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.74})$$

Na equação acima  $C_2$  deve ser zero, dado que  $r^* \in (0, 1)$  e  $C$  não pode ser zero por

definição. Em seguida, a simetria em torno do eixo central (A.54) leva a:

$$C_1 C_4 = 0 \quad (\text{A.75})$$

Visto que  $C_1$  não pode ser zero, pois a função de linha não teria variação axial, então  $C_4 = 0$ . Tem-se ainda que nas paredes o fluxo radial é zero (Equação A.55). Por isso:

$$C_1 C_3 \sin\left(\frac{1}{2}C\right) = 0 \quad (\text{A.76})$$

Se  $C_3$  for zero,  $\psi$  não irá variar radialmente, o que obriga  $\sin(\frac{1}{2}C) = 0$ , com  $C = 2n\pi$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Uma solução possível é  $C = 2\pi$ , para a qual tem-se:

$$\psi(r^*, z^*) = Bz^* \sin(\pi r^{*2}); \quad B = C_1 C_3 \quad (\text{A.77})$$

A partir da equação acima e das relações para a velocidade na direção radial  $V_r$  (Equação A.42) e axial  $V_z$  (Equação A.43), além da relação para velocidade tangencial  $V_\theta$  (Equação A.34), pode-se expressar o campo de velocidade do escoamento como:

$$\vec{V}^* = \left[ -\frac{B}{r^*} \sin(\pi r^{*2}) \right] \hat{r} + \left[ \frac{1}{r^*} \right] \hat{\theta} + [2B\pi z^* \cos(\pi r^{*2})] \hat{z} \quad (\text{A.78})$$

Nas equações acima, a constante B pode ser determinada através da última condição de contorno ainda não utilizada (A.31). Pela conservação da massa, a vazão de entrada é igual àquela de saída no bocal:

$$\dot{Q}_i^* = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\beta^*} V_z^* r^* dr^* \right) d\theta \quad (\text{A.79})$$

Empregando a Equação A.43 para  $z^* = l^*$  e integrando:

$$B = \frac{\dot{Q}_i^*}{2\pi l^* \sin(\pi \beta^{*2})} \quad (\text{A.80})$$

Sendo assim, para a equação de linha de stokes, a solução particular é:

$$\psi = \frac{\delta z^* \sin(\pi r^{*2})}{\sin(\pi \beta^{*2})}; \quad \delta = \frac{\dot{Q}_i^*}{2\pi l} \quad (\text{A.81})$$

Para o campo de velocidade do escoamento em vórtice:

$$\vec{V} = \left[ -\frac{\delta \sin(\pi r^{*2})}{r^* \sin(\pi \beta^{*2})} \right] \hat{r} + \left[ \frac{1}{r^*} \right] \hat{\theta} + \left[ \frac{2\pi \delta z^* \cos(\pi r^{*2})}{\sin(\pi \beta^{*2})} \right] \hat{z} \quad (\text{A.82})$$

No intuito de encontrar o campo de pressão, constata-se que a equação de Euler A.5 relaciona o campo de velocidade (já encontrado) e o campo de pressão. Normalizando a equação de Euler:

$$\vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^* = -\nabla p^* \quad (\text{A.83})$$

Expandindo os gradientes, similar às Equações A.12, A.13, A.14 e recordando que o escoamento é rotacional axissimétrico (Equação A.9):

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = \frac{\sin^2(\pi \beta^{*2}) + \delta^2 [\sin^2(\pi r^{*2}) - \pi r^{*2} \sin(2\pi r^{*2})]}{\sin^2(\pi \beta^{*2}) r^{*3}} \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = -\frac{4\pi^2 \delta^2 z^*}{\sin^2(\pi \beta^{*2})} \quad (\text{A.85})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.86})$$

### A.5.3 Separação dos Vórtices

Na zona de separação entre o vórtice externo e interno  $r^* = \alpha^*$ , a velocidade axial do fluxo  $V_z$  será zero:

$$(2\pi \delta z^*) \left( \frac{1}{\sin(\pi \beta^{*2})} \right) \cos(\pi \alpha^{*2}) = 0 \quad (\text{A.87})$$

Visto que o primeiro termo da equação acima é constante e o segundo termo é um parâmetro de projeto, tem-se uma solução da forma:

$$\cos(\pi \alpha^{*2}) = 0; \quad \alpha^{*2} = (2n + 1) \frac{1}{2}; \quad n \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{A.88})$$

Para  $n = 0$ , a posição da manta de separação será  $\alpha^* = 1/\sqrt{2}$ . Quando  $\beta^* = \alpha^*$ , o vórtice interno estará alinhado com a entrada do bocal, evitando recirculação dos gases e formação de

vórtices nas pontas. Pode-se simplificar as Equações A.81, A.82, A.84, A.85 em:

$$\vec{V} = \left[ -\frac{\delta \sin(\pi r^{*2})}{r^*} \right] \hat{r} + \left[ \frac{1}{r^*} \right] \hat{\theta} + [2\pi\delta z^* \cos(\pi r^{*2})] \hat{z} \quad (\text{A.89})$$

$$\psi = \delta z^* \sin(\pi r^{*2}) \quad (\text{A.90})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = \frac{1 + \delta^2 [\sin^2(\pi r^{*2}) - \pi r^{*2} \sin(2\pi r^{*2})]}{r^{*3}} \quad (\text{A.91})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = -4\pi^2 \delta^2 z^* \quad (\text{A.92})$$

A integração da Equação A.91 pode ser executada utilizando a substituição  $\theta = \pi r^{*2}$  e integração por partes, chegando-se a:

$$p^* = -\frac{1}{2r^{*2}} - \frac{\delta^2 \pi \sin^2(\theta)}{2\theta} + \frac{\delta^2 \pi}{2} \int \frac{\sin(2\theta) d\theta}{\theta} - \frac{\delta^2 \pi}{2} \int \frac{\sin(2\theta) d\theta}{\theta} + C_1(z^*) \quad (\text{A.93})$$

$$p^* = \frac{-1 - \delta^2 \sin^2(\pi r^{*2})}{2r^{*2}} + C_1(z^*) \quad (\text{A.94})$$

Em contrapartida, a integral da Equação A.92 é direta:

$$p^* = -2\pi^2 \delta^2 z^{*2} + C_2(r^*) \quad (\text{A.95})$$

Isolando  $C_2(r^*)$  na equação acima, derivando em relação a  $r^*$  e integrando, tem-se, pela definição de  $C_2$ , uma função apenas em  $r^*$ :

$$C_2(r^*) = \int \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = \frac{-1 - \delta^2 \sin^2(\pi r^{*2})}{2r^{*2}} + C_3 \quad (\text{A.96})$$

Fazendo o mesmo para  $C_1(r^*)$ , combinando as equações e definindo  $p_0^*$  como sendo a pressão em  $(r = 0, z = 0)$ :

$$\Delta p^* = p^* - p_0^* = -\frac{1}{2r^{*2}} \{1 + \delta^2 [4\pi^2 r^{*2} z^{*2} + \cos^2(\pi r^{*2})]\} \quad (\text{A.97})$$

Na prática,  $\delta$  é tão pequeno que  $\Delta p^*$  pode ser aproximado por:

$$\Delta p^* \cong -\frac{1}{2r^{*2}} \quad (\text{A.98})$$