



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ESAÚ QUEIROZ MELO DA COSTA

CÓDIGO MEF PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
ELASTICIDADE 2D COM REFINAMENTO H-ADAPTATIVO

RECIFE
2017

ESAÚ QUEIROZ MELO DA COSTA

**CÓDIGO MEF PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE 2D COM
REFINAMENTO H-ADAPTATIVO**

Monografia apresentada à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

RECIFE

2017

Catálogo na fonte

Bibliotecária: Rosineide Mesquita Gonçalves Luz / CRB4-1361 (BCTG)

C837c Costa, Esaú Queiroz Melo da.
Código MEF para solução de problemas de elasticidade 2D com refinamento H-Adaptativo / Esaú Queiroz Melo da Costa. - 2017.
79f., il., figs., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro.
TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Departamento de Engenharia Civil, 2017.
Inclui Referências.

1. Engenharia Civil. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Refinamento h-adaptativo. 4. Elasticidade 2D. 5. Estimador de erro posteriori. 6. Método da Média Nodal Simples. I. Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira (Orientador). II. Título.

624 CDD (22.ed)

UFPE/BCTG-2017/ 255



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ATA DA DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO PARA CONCESSÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO CIVIL

CANDIDATO(S): 1 – Esaú Queiroz Melo da Costa
2 –

BANCA EXAMINADORA:

Orientador: Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

Examinador 1: Prof. Dr. Ézio da Rocha Araújo

Examinador 2: Prof. Dr. Ramiro Brito Willmersdorf

TÍTULO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO:

Código MEF para solução de problemas de elasticidade 2D com refinamento h-adaptativo

LOCAL: Centro de Tecnologia e Geociências - UFPE

DATA: _18/_07/_2017_ **HORÁRIO DE INÍCIO:** __15:00__.

Em sessão pública, após exposição de cerca de 30 minutos, o(s) candidato(s) foi (foram) arguido(s) oralmente pelos membros da banca com NOTA: _9,5_(deixar 'Exame Final', quando for o caso).

1) () **aprovado(s) (nota > = 7,0)**, pois foi demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização no tema da monografia e o texto do trabalho aceito.

As revisões observadas pela banca examinadora deverão ser corrigidas e verificadas pelo orientador no prazo máximo de 30 dias (o verso da folha da ata poderá ser utilizado para pontuar revisões).

O trabalho com nota no seguinte intervalo, **3,0 = < nota < 7,0**, será reapresentado, gerando-se uma nota ata; sendo o trabalho aprovado na reapresentação, o aluno será considerado **aprovado com exame final**.

2) () **reprovado(s). (nota <3,0)**

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da banca e pelo(s) candidato(s).

Recife, de de 20....

Orientador:
Avaliador 1:
Avaliador 2:
Candidato 1:
Candidato 2:

RESUMO

CÓDIGO MEF PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE 2D COM REFINAMENTO H-ADAPTATIVO

O presente trabalho aborda a análise de problemas de elasticidade 2D pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) com refinamento h-adaptativo utilizando o elemento triangular linear CST (*Constant Strain Triangle*), buscando demonstrar a vantagem e eficiência dessa estratégia frente ao simples refinamento global da malha. Para tanto, foi-se desenvolvido um código em MATLAB cuja malha inicial é produzida no gerador de malha GiD e a partir de então o código utiliza-se do estimador de erro *a posteriori* baseado no Método da Média Nodal Simples (MNS), sendo o processo adaptativo guiado segundo o erro da norma de energia, estabelecendo-se limites máximos do erro relativo percentual em energia do domínio, e as novas malhas refinadas são geradas pela triangularização Delaunay do MATLAB. A validação e eficiência do método é determinada pela comparação com resultados numéricos de referência, os quais se mostraram bastante coerentes e satisfatórios, confirmando então a utilidade da metodologia adotada. Para demonstração da estratégia supracitada, são analisados neste trabalho alguns casos de interesse prático.

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos. Refinamento h-adaptativo. Elasticidade 2D. Estimador de erro a posteriori. Método da Média Nodal Simples.*

ABSTRACT

FEM CODE FOR THE SOLUTION OF 2D ELASTICITY PROBLEMS WITH H-ADAPTIVE REFINEMENT

The present work approaches an analysis of 2D elasticity problems using the Finite Element Method (FEM) with h-adaptive refinement using the linear triangular element CST (Constant Strain Triangle), seeking to demonstrate the advantages and efficiency of this strategy over a global mesh refinement. With this purpose, it was developed a MATLAB code in which the initial mesh is provided by the mesh generator GiD, and from this point on the code uses an *a posteriori* error estimator based on the Nodal Averaging Method (NAM), having the adaptive process guided according to the energy norm error, establishing an upper limit for the relative energy norm percentage error of the domain, and the new refined meshes are generated by the Delaunay triangularization of MATLAB. The validation and efficiency of this method is determined by the comparison with numerical reference results, which were consistent and satisfactory, confirm it as an useful method. To exemplify the strategy adopted, it will be analyzed some cases of practical interest.

Key-words: *Finite Element Method. H-adaptive refinement. 2D elasticity. A posteriori error estimator. Nodal Averaging Method.*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Elemento diferencial plano sujeito a tensões. Logan (2007).	14
Figura 2: Elemento diferencial antes e depois da deformação. Logan (2007).	16
Figura 3: Elemento CST. Cook (1995).	20
Figura 4: Forças nodais equivalentes num elemento CST. Logan (2007).	24
Figura 5: Possíveis refinamentos de uma malha: a) Malha original; b) Refinamento tipo h uniforme; c) Refinamento tipo p uniforme; d) Refinamento tipo r. Cook (1995).	27
Figura 6: Tipos de refinamento h-adaptativo: a) malha origina; b) subdivisão do elemento; ..	27
Figura 7: Comparação entre campo calculado (a) e campo suavizado (b)	32
Figura 8: Refinamento “Red-Green”	36
Figura 9: Estrutura do Código	36
Figura 10: Malha inicial da viga engastada em balanço. Desenvolvida com o GiD	38
Figura 11: Número de Elementos x Erro em Norma de Energia para viga engastada em balanço	40
Figura 12: Número de Elementos x Deslocamento da Extremidade na viga engastada em balanço	40
Figura 13: Evolução da malha da viga engastada em balanço	41
Figura 14: Malha final do refinamento adaptativo da viga engastada em balanço	42
Figura 15: Distribuição de tensões normais da viga engastada em balanço	42
Figura 16: Distribuição de tensões cisalhantes da viga engastada em balanço	42
Figura 17: Distribuição de deslocamentos em x da viga em balanço	42
Figura 18: Distribuição de deslocamentos em y da viga engastada em balanço	43
Figura 19: Refinamento adaptativo de viga em balanço: a) Problema inicial; b) Malha final. Krishnamoorthy e Umesh (1993).	43
Figura 20: Distribuição do erro de tensões normais da viga engastada em balanço	43
Figura 21: Distribuição de erro das tensões cisalhantes da viga engastada em balanço	44
Figura 22: Histograma do erro de tensões normais da viga engastada em balanço	44
Figura 23: Histograma do erro de tensões cisalhantes da viga engastada em balanço	45
Figura 24: Malha inicial da viga parede engastada. Desenvolvido com o GiD.	46

Figura 25: Número de Elementos versus Erro em Norma de Energia do domínio para viga parede engastada.....	47
Figura 26: Número de Elementos versus Deslocamento da Extremidade da viga parede engastada	48
Figura 27: Evolução da malha da viga parede engastada.....	48
Figura 28: Malha final da viga parede engastada.....	49
Figura 29: Distribuição de tensões em x na viga parede engastada	49
Figura 30: Distribuição de tensões em y na viga parede	50
Figura 31: Distribuição de tensões cisalhantes na viga parede engastada.....	50
Figura 32: Distribuição de deslocamentos em x da viga parede engastada.....	51
Figura 33: Distribuição de deslocamentos em y da viga parede engastada.....	51
Figura 34: Refinamento adaptativo de viga parede engastada: a) Problema inicial; b) Malha final. Zienkiewicz (2000).	52
Figura 35: Distribuição de erro das tensões em x na viga parede engastada.....	53
Figura 36: Distribuição do erro de tensões em y na viga parede engastada	53
Figura 37: Distribuição do erro de tensões cisalhantes na viga parede engastada	54
Figura 38: Histograma do erro de tensões em x da viga parede engastada.....	54
Figura 39: Histograma do erro de tensões em y da viga parede.....	55
Figura 40: Histograma do erro de tensões cisalhantes da viga parede engastada	55
Figura 41: Malha inicial da estrutura em L. Desenvolvido com o GiD	56
Figura 42: Número de elementos x Erro em norma de energia do domínio para estrutura em L	58
Figura 43: Número de Elementos x Deslocamento da quina para a estrutura em L	58
Figura 44: Evolução da malha da estrutura em L.....	59
Figura 45: Malha final da estrutura em L	60
Figura 46: Distribuição de tensões em x da estrutura em L	60
Figura 47: Distribuição de tensões em y da estrutura em L	61
Figura 48: Distribuição de tensões cisalhantes na estrutura em L.....	61
Figura 49: Distribuição de deslocamentos em x da estrutura em L.....	62
Figura 50: Distribuição de deslocamentos em y da estrutura em L.....	62
Figura 51: Refinamento adaptativo de estrutura em L: a) Problema inicial; b) Malha final. Krishnamoorthy e Umesh (1993).	63

Figura 52: Distribuição de erro de tensões em x da estrutura em L	64
Figura 53: Distribuição de erro de tensões em y da estrutura em L	64
Figura 54: Distribuição de erro de tensões cisalhantes da estrutura em L	65
Figura 55: Histograma do erro de tensões em x da estrutura em L	65
Figura 56: Histograma de erro de tensões em y da estrutura em L	66
Figura 57: Histograma de erro de tensões cisalhante na estrutura em L	66
Figura 58: Malha inicial da placa com furo. Desenvolvido com GiD.....	67
Figura 59: Número de elementos x Erro em norma de energia do domínio para chapa com furo	69
Figura 60: Número de elementos x Deslocamento da extremidade da chapa com furo	69
Figura 61: Evolução da malha da chapa com furo	70
Figura 62: Malha final da chapa com furo	70
Figura 63: Distribuição de tensões em x da chapa com furo.....	71
Figura 64: Distribuição de tensões em y da chapa com furo.....	71
Figura 65: Distribuição de tensões cisalhante da chapa com furo.....	71
Figura 66: Distribuição de deslocamentos em x da chapa com furo	72
Figura 67: Distribuição de deslocamentos em y da chapa com furo	72
Figura 68: Distribuição de erro de tensões em x da chapa com furo.....	73
Figura 69: Distribuição de erro de tensões em y da chapa com furo.....	73
Figura 70: Distribuição de erro de tensões cisalhantes da chapa com furo.....	73
Figura 71: Histograma de erro de tensões em x da chapa com furo.....	74
Figura 72: Histograma de erro de tensões em y da chapa com furo.....	74
Figura 73: Histograma de erro de tensões cisalhante na chapa com furo.....	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resultados do refinamento adaptativo da viga engastada em balanço	38
Tabela 2: Resultados do refinamento uniforme da viga engastada em balanço	38
Tabela 3: Resultados do refinamento adaptativo da viga parede engastada.....	46
Tabela 4: Resultados do refinamento uniforme da viga parede engastada.....	46
Tabela 5: Resultados do refinamento adaptativo da estrutura em L.....	57
Tabela 6: Resultados do refinamento uniforme da estrutura em L.....	57
Tabela 7: Resultados do refinamento adaptativo da chapa com furo	68
Tabela 8: Resultado do refinamento uniforme da chapa com furo.....	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Justificativa e motivação	13
1.2	Objetivos gerais e específicos	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO	14
2.1	Elasticidade 2D	14
2.1.1	Equações Diferenciais de Equilíbrio	14
2.1.2	Deformação/Deslocamento e Equações de Compatibilidade.....	15
2.1.3	Relação Tensão/Deformação.....	17
2.2	Método dos Elementos Finitos (MEF)	19
2.2.1	Constant-Strain Triangle (CST)	20
2.2.1.1	<i>Relação Tensão/Deformação</i>	20
2.2.3.2	<i>Derivação da Matriz de Rigidez</i>	22
2.2.3.3	<i>Forças Aplicadas</i>	23
2.2.3.4	<i>Equação Básica</i>	24
2.3	Refinamento Adaptativo	26
2.4	Estimadores de Erro	28
2.5	Método das Médias Nodais Simples (MNS)	31
2.6	Critério de Refinamento do Processo Adaptativo	32
3	MATERIAIS E MÉTODOS	34
3.1	Programação usando MATLAB	34
4	RESULTADOS ESPERADOS	36
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	37
5.1	Viga Engastada em Balanço	37

5.2	Viga Parede Engastada	45
5.3	Estrutura em L	56
5.4	Chapa com Furo	67
6	CONCLUSÃO	75
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

Desde seus primórdios, a engenharia sempre norteou seus esforços ao longo dos anos na busca por soluções exatas dos problemas aos quais prestava-se a solucionar. No entanto, os avanços promovidos pela modernidade fizeram surgir problemas nos quais, muitas vezes, se torna impossível ou impraticável determinar-se uma solução analítica exata para tais problemas devido à complexidade das equações a serem solucionadas. Alternativas imediatas para contornar essa situação são a simplificação dos modelos físicos, o que muitas vezes o fazem distanciar do problema real e leva a soluções inadequadas, ou a adoção de soluções aproximadas através da aplicação de métodos numéricos.

Diante desse cenário, observa-se uma grande difusão da utilização de métodos numéricos para a solução de problemas de engenharia, e nesse aspecto podemos destacar o Método dos Elementos Finitos (MEF) como sendo um dos métodos mais populares adotados por estudiosos e pesquisadores em todo o mundo, rendendo uma grande quantidade de publicações e tornando-o, então, bastante versátil. O MEF baseia-se na discretização do domínio do problema em elementos, que para solução de problemas 3D serão elementos de volume e para 2D serão de área, cujas equações são conhecidas, e a partir da contribuição de cada elemento é possível determinar soluções aproximadas para todo o domínio em análise.

Para obtenção de soluções aproximadas que apresentem baixo erro em comparação com soluções exatas é necessário que se faça um refinamento da malha, o que gera um aumento no número de elementos e de cálculos a serem realizados, e conseqüente aumento no esforço e custo computacional para se obter a análise numérica. Dessa forma, uma busca de otimização do processo consiste em aumentar o número de elementos do domínio, de modo inteligente, em locais que mais favoreçam a convergência da solução, de forma a garantir um equilíbrio entre custo computacional e soluções com baixa quantidade de erro associada, baseado em estimadores de erro que possam mapear esses erros de forma localizada e guiar o refinamento para regiões de interesse do modelo discreto. Esse procedimento, o qual será adotado neste trabalho, é denominado de refinamento adaptativo.

1.1 Justificativa e motivação

Este trabalho se fundamenta na importância que a aplicação de métodos numéricos tem para a engenharia moderna e na necessidade de se obter resultados de qualidade a um baixo custo financeiro e computacional para problemas complexos, nos quais soluções analíticas são inexistentes ou de difícil determinação.

Nesse sentido, para obtenção de uma solução de qualidade que se aproxime de resultados analíticos e confiáveis, pode-se adotar um refinamento da malha em questão de maneira global. No entanto, isso se torna inviável do ponto de vista computacional, pois requer o uso de muitos elementos, que levam um grande tempo para serem computados e exigem máquinas de grande capacidade de processamento.

Em contrapartida pode-se adotar um método adaptativo que reduz bastante a quantidade de elementos sem perder a qualidade da malha e dos resultados de tensões, deformações e deslocamentos através do refinamento dos lugares adequados do domínio do problema em análise, reduzindo assim o tempo de processamento e o esforço computacional para tal.

1.2 Objetivos gerais e específicos

O presente trabalho tem como objetivo analisar problemas de elasticidade 2D pelo Método dos Elementos Finitos com refinamento h-adaptativo utilizando o elemento linear CST (*Constant Strain Triangle*), por meio de código desenvolvido em MATLAB. Como objetivos específicos podemos citar:

- Revisão da literatura sobre Método dos Elementos Finitos e Refinamento Adaptativo de malhas;
- Comparar o refinamento h-adaptativo com o refinamento global da malha para validação dos resultados obtidos;
- Demonstrar a eficiência e vantagem em termos de custo computacional do refinamento h-adaptativo frente ao refinamento global;
- Aplicar o código para solução de problemas de interesse prático.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

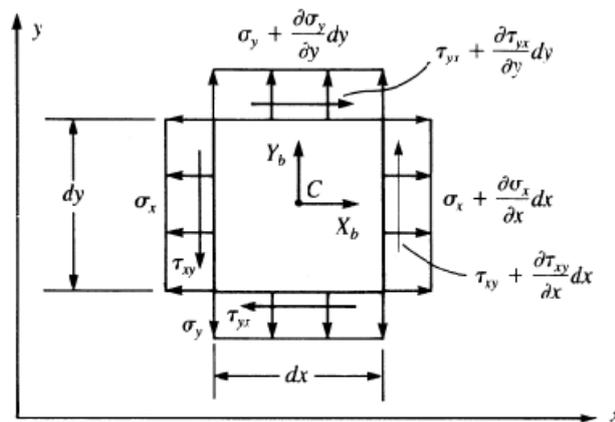
2.1 Elasticidade 2D

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos e equações básicos da Teoria da Elasticidade que serão utilizados ao longo deste trabalho quando nos referirmos à Mecânica dos Materiais. Essas equações devem ser satisfeitas sempre que se buscam por soluções exatas aos problemas de Mecânica das Estruturas.

2.1.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio

Segundo Logan (2007), consideremos inicialmente um elemento plano em equilíbrio sujeito a tensões normais σ_x e σ_y , tensões cisalhantes τ_{xy} e forças de corpo X_b e Y_b (unidades de força por unidade de volume), como mostra na figura 1. As tensões são consideradas constantes atuando na espessura de cada face, porém variam de uma face para a face oposta. Assume-se espessura unitária do elemento.

Figura 1: Elemento diferencial plano sujeito a tensões. Logan (2007).



Somando forças na direção x nós temos:

$$\sum F_x = 0 = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy(1) - \sigma_x dy(1) + X_b dx dy(1) + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx(1) - \tau_{xy} dx(1) = 0 \quad (1)$$

Simplificando e cancelando termos em (1), temos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X_b = 0 \quad (2)$$

Similarmente, somando forças na direção y e simplificando, obtemos:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y_b = 0 \quad (3)$$

A terceira equação do equilíbrio plano a ser satisfeita é a soma de momentos em relação ao eixo normal ao plano x - y . Tomando a soma de momentos em relação ao ponto C na Figura 1 nós temos que:

$$\begin{aligned} \sum M_z = 0 = \tau_{xy} dy (1) \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} - \tau_{xy} dx (1) \frac{dy}{2} \\ - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

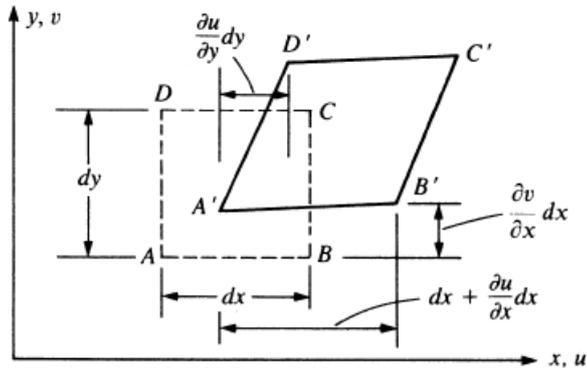
Simplificando e negligenciando os termos de ordem mais elevada ficamos com:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (5)$$

2.1.2 Deformação/Deslocamento e Equações de Compatibilidade

Consideremos o elemento diferencial mostrado na figura 2, onde está sendo representado o corpo indeformado (linhas pontilhadas) e deformado (linhas cheias). Tomando a linha AB na direção x , podemos observar que ela se torna $A'B'$ após a deformações, no qual u e v representam os deslocamentos nas direções x e y .

Figura 2: Elemento diferencial antes e depois da deformação. Logan (2007).



Pela definição de deformação normal, temos que:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (6)$$

Sendo

$$AB = dx \quad (7)$$

E

$$(A'B')^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 \quad (8)$$

Portanto, calculando $A'B'$ usando o teorema binomial e negligenciando os termos de segunda ordem $(\partial u/\partial x)^2$ e $(\partial v/\partial x)^2$ (consistente com a condição de pequenas deformações), temos

$$A'B' = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (9)$$

Usando as equações (7) e (9) na equação (6), obtemos

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

Semelhantemente, considerando a linha AD na direção y temos

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

A deformação cisalhante é definida como a mudança de ângulo entre as duas linhas, tais quais AB e AD , que originalmente formavam um ângulo reto. Da Figura 2 podemos ver que γ_{xy} é a soma de dois ângulos dado por

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (12)$$

As equações (10) a (12) representam as relações deformação/deslocamento para o plano.

2.1.3 Relação Tensão/Deformação

Definiremos agora as relações tensão/deformação bidimensionais para um corpo isotrópico. Submeteremos o corpo independentemente às tensões σ_x e σ_y como mostrado na figura 1. Analisemos primeiramente a mudança de comprimento do elemento na direção x devido às tensões independentes σ_x e σ_y . Assumamos como válido o princípio da superposição. Considerando a figura 1, a tensão na direção x produz uma deformação positiva, logo

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (13)$$

Na qual a Lei de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$) foi utilizada, e é definido como o *módulo de elasticidade*.

Ainda considerando a figura 1, a tensão positiva na direção y produz uma deformação negativa na direção x devido ao efeito de Poisson dado por

$$\varepsilon''_x = -\frac{\nu\sigma_y}{E} \quad (14)$$

Onde ν é o coeficiente de Poisson.

Utilizando a superposição das equações (13) e (14), obtemos

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad (15)$$

As deformações na direção y podem ser determinadas de maneira semelhante da utilizada para obter na direção x , logo

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \quad (16)$$

A Lei de Hooke usada para tensões normais também se aplica a tensões cisalhantes resultando em

$$\tau = G\gamma \quad (17)$$

Onde G é o módulo de elasticidade transversal e é dado por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (18)$$

Para o nosso caso temos que

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (19)$$

Na forma matricial nós podemos expressar as equações (15), (16) e (19) como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Resolvendo para as tensões, temos

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Na qual a matriz quadrática é chamada de *matriz do material elástico* ou *matriz constitutiva*, com propriedades físicas lineares e designada por $[D]$. Essa matriz é válida para o caso de *tensão plana* (*plane stress*), definida como um estado de tensões no qual as tensões normais e cisalhantes direcionadas perpendicularmente ao plano são consideradas nulas. Tomando o plano x - y temos que σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são considerados nulos. São exemplos desse estado de tensões elementos finos, nos quais a dimensão na direção do eixo z são pequenas quando comparadas com as do plano x - y , e elementos carregados apenas no plano x - y (LOGAN, 2007). O presente trabalho se baseia nesse estado de tensões.

2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

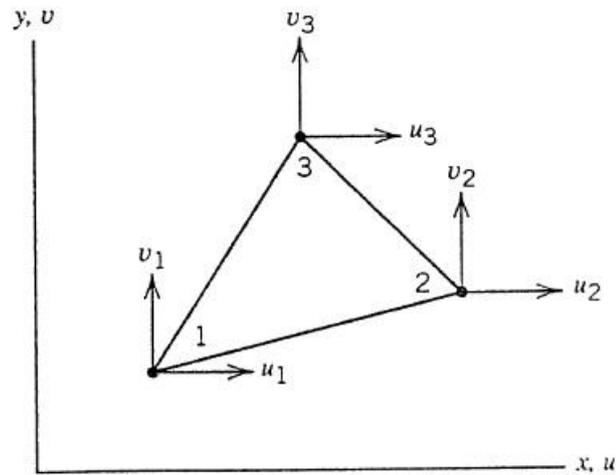
O Método dos Elementos Finitos é um método numérico para solução de problemas de engenharia. Problemas envolvendo geometrias, carregamentos e propriedades dos materiais complexas geralmente não são solúveis por meio de métodos matemáticos analíticos, os quais são obtidos através de expressões matemáticas que resultam em valores das variáveis procuradas em qualquer parte do corpo e são válidas para infinitos pontos nesse corpo. Para isso recorre-se a soluções de equações diferenciais parciais ou ordinárias e, devido à complexidade do problema, geralmente não possuem solução. Por este motivo utiliza-se métodos numéricos, como o MEF, para soluções aceitáveis. Esse método leva a valores aproximados das variáveis desejadas em pontos discretos do contínuo, e para isso modela-se o corpo em estudo dividindo-o em um sistema equivalente de pequenos corpos (elementos finitos) conectados entre si por dois ou mais elementos em comum (nós). Formula-se então equações para cada elemento finito e combina-se essas soluções para se obter a solução para o corpo inteiro.

O MEF envolve a modelagem de estruturas utilizando pequenos elementos conectados entre si, chamados de elementos finitos, os quais possuem uma função de deslocamento associado a cada um. Utilizando-se das propriedades de tensão/deformação do material pode-se determinar o comportamento de cada nó em termos das propriedades de cada elemento, gerando uma série de equações expressas em notação matricial. Pode-se ainda utilizar outros princípios para determinação da equação governante do sistema, alguns deles são o teorema da energia potencial mínima e o princípio do trabalho virtual (LOGAN, 2007).

2.2.1 Constant-Strain Triangle (CST)

A fim de introduzirmos as equações básicas que descrevem o elemento plano triangular, consideremos um elemento com seus seis graus de liberdade tal qual mostrado na figura 3.

Figura 3: Elemento CST. Cook (1995).



2.2.1.1 Relação Tensão/Deformação

Os deslocamentos nodais u e v de um elemento CST podem ser escritos de maneira generalizada por:

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ v &= \beta_6 + \beta_7 x + \beta_8 y \end{aligned} \quad (22)$$

Onde β_i representam coeficientes generalizados. Os deslocamentos dentro de um elemento finito podem ser interpolados dos valores de deslocamentos nodais através de polinômios de interpolação (funções de forma) N_i , que formam a matriz de funções de forma \mathbf{N} , sendo a relação dada por:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad u = Nd \quad (23)$$

Conseqüentemente, podemos também definir as deformações indicadas nas equações (10), (11) e (12) matricialmente por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \partial u \quad (24)$$

Substituindo a equação (23) na (24) obteremos

$$\varepsilon = \partial Nd \quad \text{ou} \quad \varepsilon = Bd \quad (25)$$

Onde $B = \partial N$ e representa derivada das funções de forma. Voltando ao elemento CST temos assim que seu campo de deformações segundo as equações (10), (11) e (12) serão

$$\varepsilon_x = \beta_2 \quad \varepsilon_y = \beta_6 \quad \gamma_{xy} = \beta_3 + \beta_5 \quad (26)$$

A partir das equações em (26) podemos verificar que as deformações dentro de um mesmo elemento são constantes, justificando assim seu nome de triângulo de deformação constante (do inglês *Constant-Strain Triangle*). Segundo Cook (1995), podemos então escrever a equação em (25) no formato das funções de forma, semelhante a (23), e então chegar ao campo de deformações obtida pelas funções de forma no formato de $\varepsilon = Bd$, dado por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Onde do lado direito da expressão multiplicando o vetor coluna \mathbf{d} temos a matriz \mathbf{B} , x_i e y_i são as coordenadas nodais e $2A$ é o dobro da área do triângulo, que é dada por

$$2A = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (28)$$

Desta forma podemos estabelecer a relação tensão deformação para o elemento CST substituindo a expressão (25) em (21), que de maneira compacta nos fornece

$$\sigma = DBd \quad (29)$$

Onde \mathbf{B} é descrito na equação (27), \mathbf{D} é descrito em (21) e \mathbf{d} é matriz com os deslocamentos dos graus de liberdade do elemento triangular.

2.2.3.2 Derivação da Matriz de Rigidez

Segundo Cook (1995), podemos observar a derivação de uma expressão para energia de deformação por unidade de volume de um material linear (U_0) em diversas bibliografias a respeito de mecânica dos materiais, expressão essa dada por

$$U_0 = \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon \quad (30)$$

Onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material dada em (21). Dessa forma, integrando ao longo do volume de um elemento obtemos

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T D \varepsilon dV \quad (31)$$

Substituindo (25) em (31) obtemos

$$U = \frac{1}{2} d^T \left(\int_V B^T * D * B * dV \right) d \quad (32)$$

De onde identificamos a expressão da matriz de rigidez de um elemento, expressa por

$$k = \int_V B^T D B \partial V \quad (33)$$

Aplicando a equação (33) para o elemento plano CST, temos que as matrizes **B** e **D** dependem apenas das coordenadas nodais e das propriedades do material, logo podem sair do integrando, e além disso temos que $\partial V = t \partial A$, onde t é a espessura constante do elemento, considerada nesse trabalho como unitária. Dessa forma, resolvendo a equação (33) teremos a matriz de rigidez expressa por

$$k = B^T D B t A \quad (34)$$

Onde A é a área do triângulo facilmente obtida a partir de (28) e **B** é a matriz descrita em (27). A matriz de rigidez do sistema pode então ser dada pela soma das contribuições das matrizes de cada elemento, sendo assim temos que

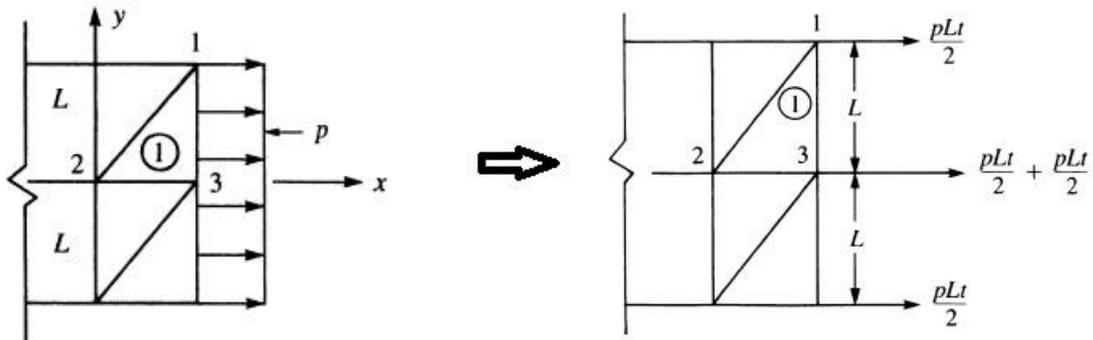
$$K = \sum_{e=1}^n k_e \quad (35)$$

Onde **K** é a matriz de rigidez do sistema, **k** é a matriz de rigidez de um elemento e n é o número de elementos do sistema.

2.2.3.3 Forças Aplicadas

As cargas atuantes podem ser do tipo concentrada nos nós, aplicadas na superfície ou forças de corpo. Porém o modelo em elementos finitos apenas admite forças aplicadas nos nós, sendo assim forças de superfície e forças de corpo devem ser convertidas em cargas nodais equivalentes. Para um elemento CST, uma carga distribuída em sua aresta pode ser considerada como uma carga atuando nos nós associados com a aresta carregada de modo que os dois carregamentos (distribuído e nodal) sejam estaticamente equivalentes (figura 4) (LOGAN, 2007).

Figura 4: Forças nodais equivalentes num elemento CST. Logan (2007).



Desta forma, se tomarmos o elemento 1 da figura 4, por exemplo, teremos a seguinte matriz de forças do elemento

$$f = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p \cdot L \cdot t}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{p \cdot L \cdot t}{2} + \frac{p \cdot L \cdot t}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Onde p é a carga distribuída, t é a espessura do elemento e L é o comprimento da aresta. Da mesma forma como foi mostrado para a matriz de rigidez, o vetor de forças do sistema é dado pela soma das contribuições de todos os elementos, sendo assim

$$F = \sum_{e=1}^n f_e \quad (37)$$

Onde F é a matriz de força do sistema, f é a matriz de força de um elemento e n é o número de elementos.

2.2.3.4 Equação Básica

Para chegarmos a expressão básica para o cálculo de deslocamentos nos graus de liberdade do sistema faremos uso do Método da Energia. A energia potencial total pode ser dividida em duas parcelas: em energia interna, mostrada na equação (31), e energia externa, que é igual ao trabalho realizado pelas cargas externas, dada por

$$W = \int_V [u \quad v] \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \partial V + \int_{\Gamma} [u \quad v] \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \partial \Gamma \quad (38)$$

Onde \mathbf{W} é o trabalho externo, w_x e w_y são as forças de corpo e f_x e f_y são as forças externas. Dessa forma a energia total é dada por

$$\Pi = U - W \quad (39)$$

Discretizando e substituindo as expressões em (31) e (38) na (39), nos leva a

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \partial V - \int_{V_e} [u \quad v] \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \partial V - \int_{\Gamma_e} [u \quad v] \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \partial \Gamma \quad (40)$$

Sendo a energia potencial do domínio dada por

$$\Pi = \sum_{e=1}^n \Pi_e \quad (41)$$

Onde n é o número de elementos no domínio. Após desenvolver a equação (40), aplicaremos o princípio da energia potencial total mínima, a qual estabelece que: “*de todas as configurações cinematicamente possíveis, a deformação que produzir a energia potencial total mínima é a condição de equilíbrio estável*”. Dessa forma, segundo Kwon & Bang (1997), aplicando esse princípio a equação (40) e desenvolvendo os cálculos chegaremos a

$$\sum_{e=1}^n \frac{\partial \Pi_e}{\partial \mathbf{d}} = \sum_{e=1}^n (\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f} - \mathbf{w}) = 0 \quad (42)$$

Desconsiderando as forças de corpo e rearranjando a equação anterior, temos que para o sistema

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (43)$$

Onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema descrita pela equação (35), \mathbf{F} são forças aplicada no sistema descrita pela equação (37) e \mathbf{d} é matriz com os deslocamentos. Determinando \mathbf{K} e \mathbf{F} para o sistema podemos solucionar a equação (43) para os deslocamentos e com eles é então

possível proceder com o cálculo das tensões e deformações como é mostrado nas equações (29) e (25), respectivamente (KWON; BANG, 1997).

2.3 Refinamento Adaptativo

Os resultados de uma análise em Elementos Finitos devem convergir para a solução exata uma vez que a malha é repetidamente refinada (COOK, 1995). No entanto, uma forma mais eficiente consiste no uso do refinamento adaptativo, no qual o analista tem por objetivo refinar a malha para obter a precisão necessária usando apenas a quantidade de graus de liberdade necessários. O objetivo final do método é obter igual distribuição de um indicador de erro em todos os elementos (LOGAN, 2007). Segundo Cook (1995), podemos definir três tipos básicos de refinamento adaptativo (figura 5), podendo, além deles, haver o uso combinado de mais de um tipo. São eles:

- 1) Refinamento h-adaptativo: é o refinamento onde há mudança no tamanho dos elementos, significando um aumento no número de elementos, sem mudança no tipo de elemento (sem alteração no grau do polinômio que descreve o campo de deslocamentos dentro de um elemento);
- 2) Refinamento p-adaptativo: é o refinamento onde há mudança no tipo de elemento (grau do polinômio) sem alterar o tamanho dos elementos;
- 3) Refinamento r-adaptativo: há um rearranjo da malha, com mudança na posição dos nós, sem alterar o número de elementos ou seu tipo. Por não alterar número de elementos, a capacidade de melhoramento da solução obtida é limitada.

Para Zienkiewicz (2000), ainda podemos subdividir o refinamento h-adaptativo em duas subcategorias: o primeiro é o da subdivisão do elemento, onde os elementos de elevado valor de erro são subdivididos mantendo as fronteiras dos elementos originais intacta, levando assim a criação de *hanging nodes*, os quais ocorrem pela junção de um elemento com um nó no meio de suas arestas com outro que não possui esse nó intermediário, devendo, nesse caso, o *hanging node* possuir algum tipo de restrição; o segundo tipo seria o da regeneração da malha, no qual, a cada iteração, uma malha completamente nova é gerada com elementos com seus respectivos tamanhos determinados pelo refinamento adaptativo (figura 6).

Para o desenvolvimento deste trabalho adotamos apenas o refinamento h-adaptativo com regeneração de malha para fazer convergir as soluções dos problemas analisadas à solução exata.

Figura 5: Possíveis refinamentos de uma malha: a) Malha original; b) Refinamento tipo h uniforme; c) Refinamento tipo p uniforme; d) Refinamento tipo r. Cook (1995).

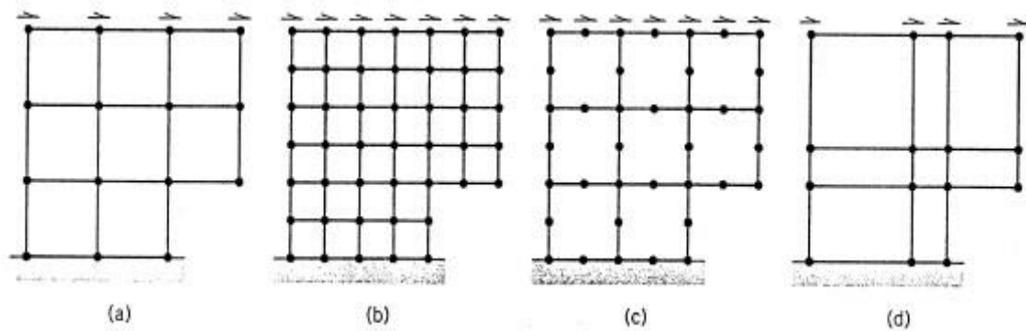
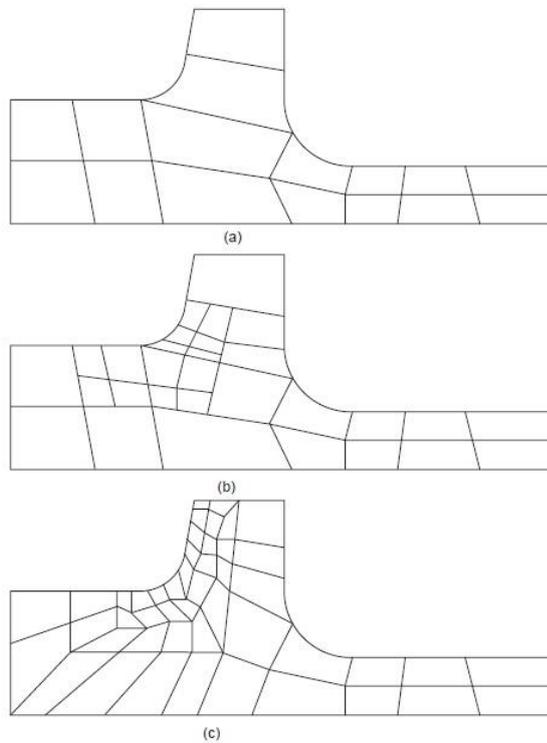


Figura 6: Tipos de refinamento h-adaptativo: a) malha origina; b) subdivisão do elemento; c) regeneração da malha. Zienkiewicz (2000).



2.4 Estimadores de Erro

Segundo Reboredo (2015) os erros associados a métodos numéricos podem ser originados dos seguintes fatores:

- 1) Imprecisão do modelo matemático que descreve o problema físico, no qual o erro da solução numérica é em sua maior parte originado do modelo matemático e não do método;
- 2) Incertezas quanto à definição do problema em análise, originados da formulação inicial do problema, podendo ser devidos a propriedades dos materiais, geometria, condições de contorno ou na aquisição dos dados de entrada;
- 3) Erro de discretização do domínio do problema, devido à aplicação das equações governantes do método a um número limitado de elementos. Daí surge o conceito de refinamento da malha para que o problema fique mais bem definido na sua forma discreta de maneira a se aproximar das soluções de sua forma contínua;
- 4) Erro de arredondamento, produzido na representação dos números reais nos resultados, o que está relacionado à precisão do computador.
- 5) Erro de iteração, que consiste na diferença entre a solução numérica obtida em uma iteração e a solução exata para a discretização adotada;
- 6) Erro de programação, erro humano associado com o ato de escrita do código computacional em uso.

Neste trabalho consideraremos a minimização do erro descrito no item 3 através do estimador de erro descrito mais adiante com o objetivo de quantificar as incertezas associadas e em seguida alterar a discretização do problema buscando assim obter a convergência da solução numérica.

As estimativas de erro podem ser de dois tipos, *a priori* ou *a posteriori*. De acordo com Lins (2011), a estimativa de erro *a priori* são aquelas baseadas em conhecimento prévio das características da solução analítica do problema, podendo fornecer informações a respeito da convergência das estratégias de refinamento (h ou p), no entanto não fornecem uma quantificação do erro associado a uma resposta aproximada. Já as estimativas *a posteriori* se baseiam na própria solução numérica para geração de valores melhor aproximados dos campos de deslocamentos, tensões ou deformações, os quais são conhecidos na literatura como valores recuperados e são utilizados para guiar o processo adaptativo.

Antes de prosseguirmos com o estimador de erro que utilizaremos, iremos definir o que entenderemos por erro e seu mensuramento neste trabalho. Erro é a diferença entre a solução exata e a aproximada (calculada), podendo ser aplicada em termos de deslocamento (44), tensões (45) ou deformações (46).

$$e = u - \hat{u} \quad (44)$$

$$e_\varepsilon = \varepsilon - \hat{\varepsilon} \quad (45)$$

$$e_\sigma = \sigma - \hat{\sigma} \quad (46)$$

No entanto, essa forma de medida é muitas vezes inadequada, principalmente em locais onde tensões e deslocamentos tendem ao infinito como em quinas, cargas concentradas e outras singularidades. Para tanto, é comum o uso de diversas normas, que introduzem uma quantidade escalar para medida do erro. As mais comumente utilizadas são a norma de energia e a norma L_2 . A norma de energia pode ser definida, em termos de deslocamentos, como:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} e^T D e d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\Omega} (u - \hat{u})^T D (u - \hat{u}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

No qual \mathbf{D} é a matriz constitutiva do material, levando ao seguinte conjunto de equações equivalentes para a norma de energia:

$$\begin{aligned} \|e\| &= \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \hat{\varepsilon})^T D (\varepsilon - \hat{\varepsilon}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \hat{\varepsilon})^T (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T D^{-1} (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (48)$$

Já a norma L_2 pode ser definida em termos de deslocamentos e tensões pelo conjunto de equações abaixo:

$$\begin{aligned} \|e\|_{L_2} &= \left[\int_{\Omega} (u - \hat{u})^T (u - \hat{u}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ \|e\|_{L_2} &= \left[\int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T (\sigma - \hat{\sigma}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (49)$$

Cada uma dessas normas pode ser avaliada para todo o domínio, parte dele ou para cada elemento individualmente, sendo nesse caso o erro do domínio dado por:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \quad (50)$$

Onde i refere-se a cada elemento do domínio.

Para descrever o comportamento dos problemas os quais analisaremos, definimos o erro relativo percentual da norma de energia como:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} * 100\% \quad (51)$$

Onde $\|u\|$ representa uma medida da energia total acumulada no domínio sendo calculada por:

$$\|u\| = \left[\int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

No entanto não temos conhecido os valores de \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, os quais representam os valores exatos dos deslocamentos, deformações e tensões. Porém temos como obter os valores melhorados (ou suavizados) de \mathbf{u}^* , $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ e $\boldsymbol{\sigma}^*$ através de estimadores de erro *a posteriori*, os quais tem uma convergência muito superior ao calculado na solução por elementos finitos. A partir de então podemos obter o estimador de erro em norma de energia, em função das tensões, por:

$$\|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T D^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

Estimadores de erro obtidos pela substituição da solução exata por uma solução melhorada são chamados de estimadores de erro baseados em recuperação. Essa será a técnica empregada neste trabalho.

A qualidade de um estimador de erro é então medida pelo índice de efetividade, dado por:

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \quad (54)$$

Onde $\|\bar{e}\|$ é a norma de energia do domínio e $\|e\|$ é o erro exato do domínio. Porém, para situações onde não se conhece a solução exata pode-se substituir pelo obtido com uma malha bem refinada, e é dessa forma que abordaremos no presente trabalho. Um bom estimador de erro deve ter seu índice de efetividade tendendo a um à medida que a malha é refinada (ZIENKIEWICZ, 2000).

Vários são os processos de recuperação existentes, e a opção por utilizá-los neste trabalho se fundamenta no fato de que, segundo Zienkiewicz (2000), em qualquer processo de recuperação escolhido, caso a solução melhorada convirja a uma taxa maior que a solução por elementos finitos, nós teremos sempre uma estimativa assintoticamente exata.

2.5 Método das Médias Nodais Simples (MNS)

Atendendo ao conceito de estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação, são vários os métodos que existem, sendo o Método das Médias Nodais Simples um exemplo clássico e de fácil implementação, e por isso escolhido neste trabalho. Este é um método baseado na recuperação do gradiente e tem por objetivo desta forma gerar uma solução suavizada, na qual a discrepância entre o campo gerado elemento por elemento e o campo suavizado serve como uma medida do erro de discretização.

O método consiste inicialmente da obtenção do gradiente da solução, digamos tensões, através do cálculo da média das tensões que chegam em cada nó. Em um nó compartilhado por N_{el} elementos existem, em geral, N_{el} diferentes valores de tensões, sendo a média nodal dada por:

$$\sigma_m = \frac{1}{N_{el}} \sum_{j=1}^{N_{el}} (\sigma_i)_j \quad (55)$$

Onde $(\sigma_i)_j$ é o vetor de tensões obtido via MEF para o i -ésimo nó do j -ésimo elemento.

Um campo suavizado pode ser construído a partir da média nodal das tensões dos nós utilizando as funções de forma. Sendo assim, o campo de tensões suavizadas num elemento pode ser dado por:

$$\sigma^* = N\sigma_m \quad (56)$$

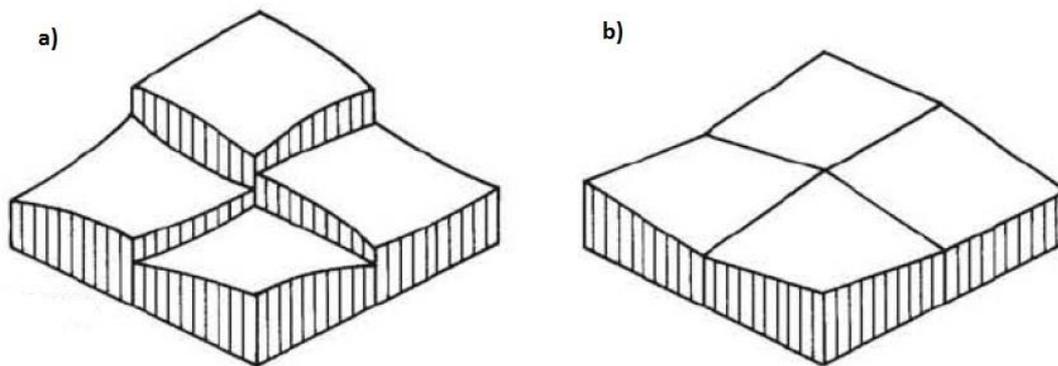
Onde σ^* é o vetor de tensões suavizadas do elemento e σ_m é o vetor nodal das tensões recuperadas obtida através de (55) para o elemento em análise. A figura 7 mostra como seria a comparação do campo suavizado com o campo calculado. Aplicando então o conceito de norma de energia a nível do elemento é possível computar o erro neste elemento (COOK, 2002).

No entanto, para este trabalho, assumimos o campo de tensões suavizada num elemento como sendo a média dos valores das tensões recuperadas nos nós, ou seja:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_m}{3} \quad (57)$$

Essa estratégia foi adotada para fins de simplificação do método sem implicar na perda de eficiência do mesmo.

Figura 7: Comparação entre campo calculado (a) e campo suavizado (b)



2.6 Critério de Refinamento do Processo Adaptativo

Os estimadores de erro permitem que o erro na norma de energia do domínio e o erro a nível elementar sejam bem determinados e, caso esses erros estejam dentro de limites estabelecidos pelo usuário ou analista, a análise está completa. Porém não é isto que ocorre normalmente, devendo a malha então ser refinada. Um critério para o refinamento a nível global que podemos estabelecer é a busca por uma malha em que o erro relativo percentual em norma de energia esteja abaixo de um limite especificado, expresso da seguinte maneira:

$$\eta \leq \bar{\eta} \quad (58)$$

Para se atingir uma malha otimizada, no entanto, é necessário que o erro em norma de energia esteja distribuído igualmente por todos os elementos, o que é chamado de equidistribuição do erro. A partir desse conceito é possível estabelecer um erro máximo permitido por elemento para a próxima iteração, dado por:

$$\text{Erro permitido} = \bar{\eta} \|u\| \approx \bar{\eta} (\|\hat{u}\|^2 + \|e\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (59)$$

No qual se utilizou o conceito de que o erro é ortogonal à solução aproximada, ou seja:

$$\|e\|^2 = \|u\|^2 - \|\hat{u}\|^2 \quad (60)$$

Onde $\|\hat{u}\|$ é a energia aproximada do domínio, $\|u\|$ é a energia analítica do domínio e $\|e\|$ pode ser considerado o erro em norma de energia calculado no domínio (equação (50)) pelo estimador de erro da equação (53).

De modo a obter a equidistribuição do erro, podemos estabelecer que o erro máximo admissível num elemento qualquer k deve ser:

$$\|e\|_k < \bar{\eta} \left(\frac{\|\hat{u}\|^2 + \|e\|^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \bar{e}_m \quad (61)$$

Onde $\|e\|_k$ é o erro para um elemento k calculado pelo estimador de erro, e_m é o erro máximo admissível para um elemento qualquer k e n é o número de elementos.

Os elementos no qual a condição estabelecida pela equação (61) não é atendida devem então ser refinados. Sendo assim definimos a seguinte razão:

$$\frac{\|e\|_k}{\bar{e}_m} = \xi_k \quad (62)$$

No qual devemos refinar sempre que

$$\xi_k > 1 \quad (63)$$

(ZIENKIEWICZ, 2000).

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho, adotaremos como metodologia para alcançar os objetivos traçados o desenvolvimento de um código computacional utilizando MATLAB, conforme será descrito adiante.

3.1 Programação usando MATLAB

Inicialmente desenvolveremos um código para análise de problemas de elasticidade 2D usando o Método dos Elementos Finitos com o elemento CST (*Constant Strain Triangle*) de acordo com as equações e etapas descritas na seção 2.2.1 do referencial teórico. A malha inicial para análise será obtida através do gerador de malha GiD, no qual, após a geração da malha, exporta-se um arquivo texto com o vetor de coordenadas de todos os nós da malha e as conectividades, ou seja, quais nós compõem cada elemento triangular. Juntamente com esses vetores, será requerido do usuário ou analista que se entre com dados relativos a forças aplicadas e condições de apoio. As forças são todas descritas como uniformemente distribuídas, seja ao longo da estrutura (maneira convencional), ou transversalmente no lugar de uma força concentrada, para evitar a formação de singularidades e tensões infinitas próximas a essas forças. Os apoios podem ser de primeiro gênero, segundo gênero ou engaste, devendo ser explicitado os nós que recebem tais apoios ou o valor de coordenada x ou y no qual todos os nós que satisfizerem essa condição de coordenada recebam o apoio determinado. Por último são pedidas as características do material, sendo eles o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

Após a análise inicial sucede-se o processo de refinamento h -adaptativo da malha inicial, utilizando-se o processo descrito no item 2.3 a 2.6 do referencial teórico. O campo de tensões é determinado pelo Método das Médias Nodais Simples (item 2.5 do referencial teórico), e de posse desses resultados calcula-se o erro em norma de energia de cada elemento de acordo com a equação (53). A cada iteração a decisão quanto a refinar ou não determinado elemento fica estabelecido com o erro da norma de energia elementar máximo admissível, calculado para cada elemento segundo um critério de equidistribuição de erro de acordo com a equação (61), no qual um elemento ao ter seu erro em norma de energia acima do admissível

(indicado pela razão das equações (62) e (63)) é selecionado para o refinamento. O processo de refinamento adotado é conhecido por “Red-Green” (figura 8): ao ser selecionado para o refinamento, um elemento recebe um novo nó no ponto médio de cada aresta; seus elementos vizinhos passam a ter um *hanging node* em uma de suas arestas; caso esse elemento receba um novo *hanging node* de um outro elemento vizinho e passe a ter dois *hanging nodes* sem que seja selecionado para refinamento, ele é selecionado para refinamento por conta dos dois *hanging nodes* que possui, e a partir da criação de todos os novos nós a nova malha refinada é gerada pelo processo de triangularização Delaunay do próprio MATLAB. O processo de refinamento é interrompido quando se atinge um valor abaixo do estabelecido em erro relativo percentual da norma de energia máximo admissível para o domínio (equação (58)), no qual o erro da norma de energia é dado pela soma da contribuição do erro de todos os elementos de acordo com a equação (50), e posteriormente é utilizada a expressão da equação (51) para cálculo do erro relativo percentual em norma de energia do domínio, onde $\|e\|$ foi aproximado pelo erro calculado em norma de energia para o domínio como descrito pela equação (50) e $\|u\|$ foi calculado de acordo com a equação (60). O erro relativo percentual em norma de energia máximo admissível deve ser determinado e ajustado pelo usuário ou analista de acordo com suas necessidades de precisão dos resultados a serem obtidos. Os erros em norma de energia de cada elemento são somados para obter-se um erro global do domínio a cada iteração.

Por fim é realizado o pós-processamento com a plotagem da malha final e das curvas de isovalores de tensões, deformações e deslocamentos de acordo com a necessidade do usuário ou analista.

Um código auxiliar para refinamento uniforme global da malha foi desenvolvido paralelamente como ferramenta de verificação e validação dos resultados obtidos com o refinamento h-adaptativo. Nesse código, a cada iteração, o erro dos elementos também é medido em norma de energia e são somados para obter-se o erro global do domínio e é também computado o erro relativo percentual em energia do domínio de acordo com as mesmas equações usadas no refinamento adaptativo, interrompendo o processo de refinamento quando esse erro fica abaixo de um máximo admissível estabelecido pelo usuário. Posteriormente é realizado uma comparação dos erros relativos percentuais em energia do domínio das malhas refinadas globalmente e adaptativamente a fim de verificar-se a eficiência do método, bem como erros de tensões em porcentagem de cada nó através de uma comparação da solução dada por cada forma de refinamento. A estrutura do código adaptativo é representado no fluxograma da figura 9.

Figura 8: Refinamento “Red-Green”

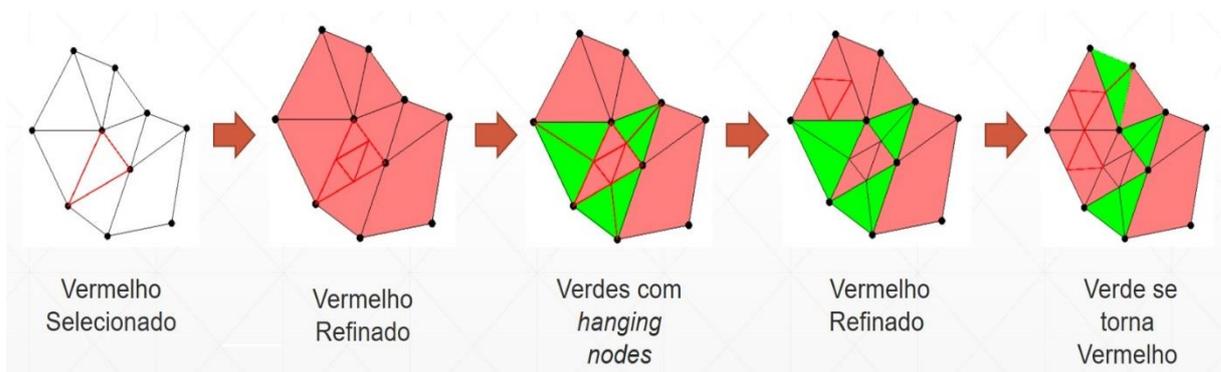
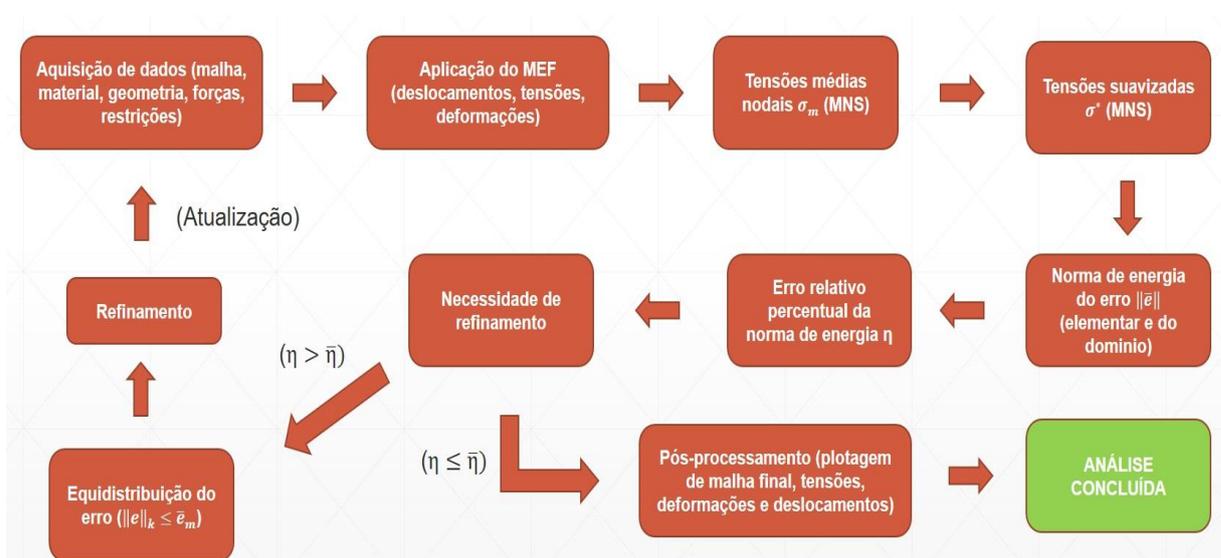


Figura 9: Estrutura do Código



4 RESULTADOS ESPERADOS

É esperado que a rotina seja capaz de fornecer os resultados de tensões, deformações e deslocamentos da estrutura analisada e permitir a visualização desses resultados. Ainda se espera que os resultados obtidos pelo refinamento adaptativo estejam com erro suficientemente pequeno em comparação com a malha refinada uniformemente, e que o erro em norma de energia do domínio decresça de maneira mais rápida no refinamento adaptativo, possuindo assim uma mais rápida evolução da convergência dos resultados desejados, tudo isso utilizando

um número bem menor de elementos que no refinamento uniforme, justificando assim a vantagem em se usar o refinamento adaptativo.

A expectativa é que além de bons resultados a malha final também tenha um bom aspecto visual e qualidade em seus elementos, apesar de estarmos usando a triangularização Delaunay do MATLAB e não um gerador de malha mais robusto para realizar o refinamento a cada iteração.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

A partir da metodologia descrita foram simulados quatro casos de interesse prático com o código elaborado, afim de testar a eficiência da estratégia descrita até aqui e alcançar os objetivos deste trabalho. As seções seguintes descrevem esses casos, definindo as condições e os resultados obtidos em cada um deles. Todas as unidades a seguir, quando não informadas, estão no SI.

5.1 Viga Engastada em Balanço

Este é um problema clássico, descrito em diversos trabalhos e livros da literatura sobre o assunto. Para o nosso exemplo, tomamos uma viga de 10m de comprimento e 1m de altura, no qual o engaste foi aplicado na extremidade esquerda e a extremidade direita é livre. Nesta extremidade foi aplicada uma carga vertical de 1kN/m, ou seja, uma vez que temos uma altura de 1m, isso é o equivalente a uma carga concentrada de 1kN, porém distribuída em todos os nós desta face para evitar singularidades e, conseqüentemente, concentração de tensões, que levam a uma instabilidade do modelo (DEEKS; AUGARDE, 2008). O material adotado foi o aço, com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson de 0,3.

A malha inicial foi gerada pelo GiD, sendo apresentada na figura 10 com a numeração dos nós e elementos. Observa-se que esta malha é bem pobre, contendo poucos elementos para que não haja refino inicial vindo do usuário ou analista e este fique completamente a cargo do código. Também destacamos o uso de uma malha estruturada para tentar evitar que sejam gerados elementos muito deformados ao longo das iterações.

Figura 10: Malha inicial da viga engastada em balanço. Desenvolvida com o GiD



Para nossa análise foi adotado como critério de parada do refinamento adaptativo um erro relativo percentual em energia máximo de 15% ($\bar{\eta}=15\%$). A tabela 1 mostra os resultados obtidos em cada iteração para algumas variáveis que descrevem a qualidade do refinamento efetuado.

Tabela 1: Resultados do refinamento adaptativo da viga engastada em balanço

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Índice de Efetividade	η (%)	Deslocamento y (extremidade) (* 10^{-5} m)
0	10	12	24	0,0415	3,81	63,71	-0,25
1	38	31	62	0,0637	5,84	60,41	-0,71
2	142	92	184	0,0605	5,55	46,46	-1,33
3	535	307	614	0,0393	3,61	28,72	-1,72
4	1905	1026	2052	0,022	2,02	15,91	-1,86
5	4989	2611	5222	0,0143	1,31	10,34	-1,89

Tabela 2: Resultados do refinamento uniforme da viga engastada em balanço

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Deslocamento y (extremidade) (* 10^{-5} m)	η (%)
0	10	12	24	0,0415	-0,25	63,71
1	40	33	66	0,0638	-0,71	60,43
2	160	105	210	0,0606	-1,34	46,43
3	640	369	738	0,0392	-1,73	28,59
4	2560	1377	2754	0,0212	-1,86	15,36
5	10240	5313	10626	0,0109	-1,9	7,86

O refino uniforme global da malha também foi efetuado para o exemplo em questão com o objetivo de validar os resultados obtidos pelo refinamento adaptativo, como por exemplo deslocamento na extremidade e erro em norma de energia do domínio, além de servir de comparação para se estabelecer a eficiência do adaptativo, ou seja, se é possível alcançar bons resultados a um menor custo computacional. A tabela 2 mostra os resultados obtidos.

Para melhor ilustrar estes resultados e efetuar uma melhor comparação, foram traçados os gráficos que mostram a variação do erro em norma de energia e a convergência do deslocamento na extremidade versus o número de elementos para os casos adaptativo e uniforme (figura 11 e 12, respectivamente).

Através das tabelas é possível observar que o erro em norma de energia e o deslocamento da extremidade possuem uma boa convergência para um número muito inferior de elementos em comparação com o refino uniforme. Já observando o gráfico do erro versus o número de elementos, ao se traçar uma reta vertical, é possível observar que para um mesmo número de elementos o erro da malha adaptativa é menor que o da malha uniformemente refinada, ou, equivalentemente, traçando uma reta horizontal tem-se que para alcançar o mesmo erro é necessário menos elementos com a malha adaptativa. Conclusões semelhantes podem ser retiradas do gráfico de número de elementos versus deslocamento da extremidade livre, com a malha adaptativa convergindo um pouco mais rapidamente para o valor exato.

A figura 13 mostra a evolução das malhas ao longo das iterações de refinamento e na figura 14 é mostrada a malha final refinada adaptativamente fornecida pelo código, e na sequência são apresentadas as distribuições de tensões normais e cisalhantes (figuras 15 e 16, respectivamente) bem como de deslocamentos no eixo x e y (figuras 17 e 18, respectivamente).

Figura 11: Número de Elementos x Erro em Norma de Energia para viga engastada em balanço

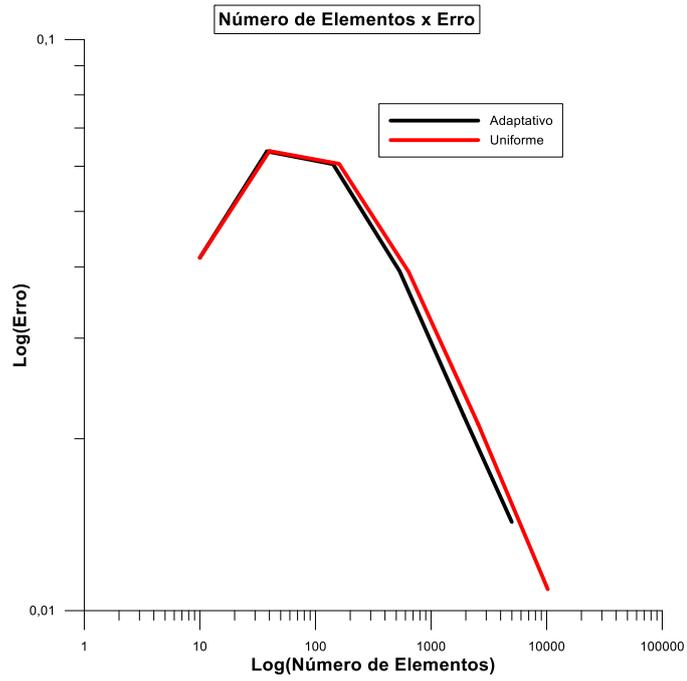


Figura 12: Número de Elementos x Deslocamento da Extremidade na viga engastada em balanço

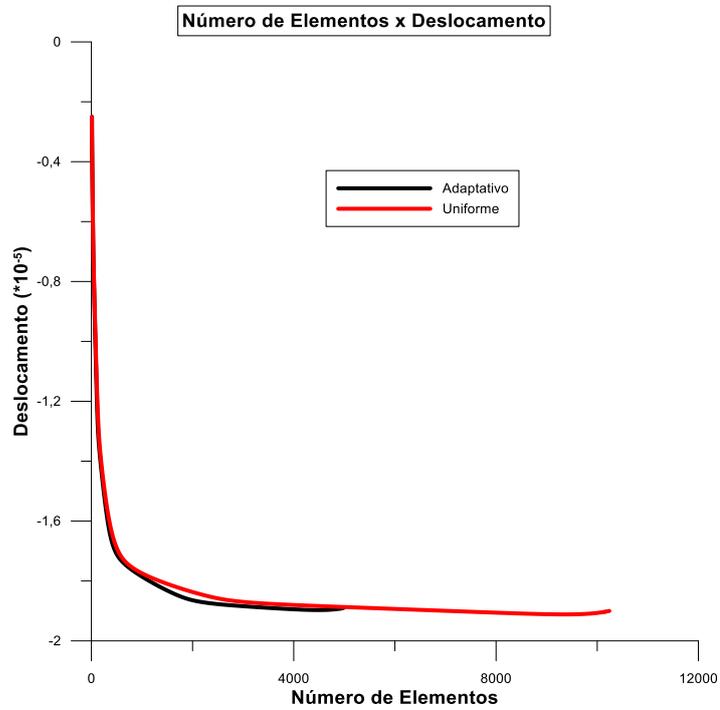
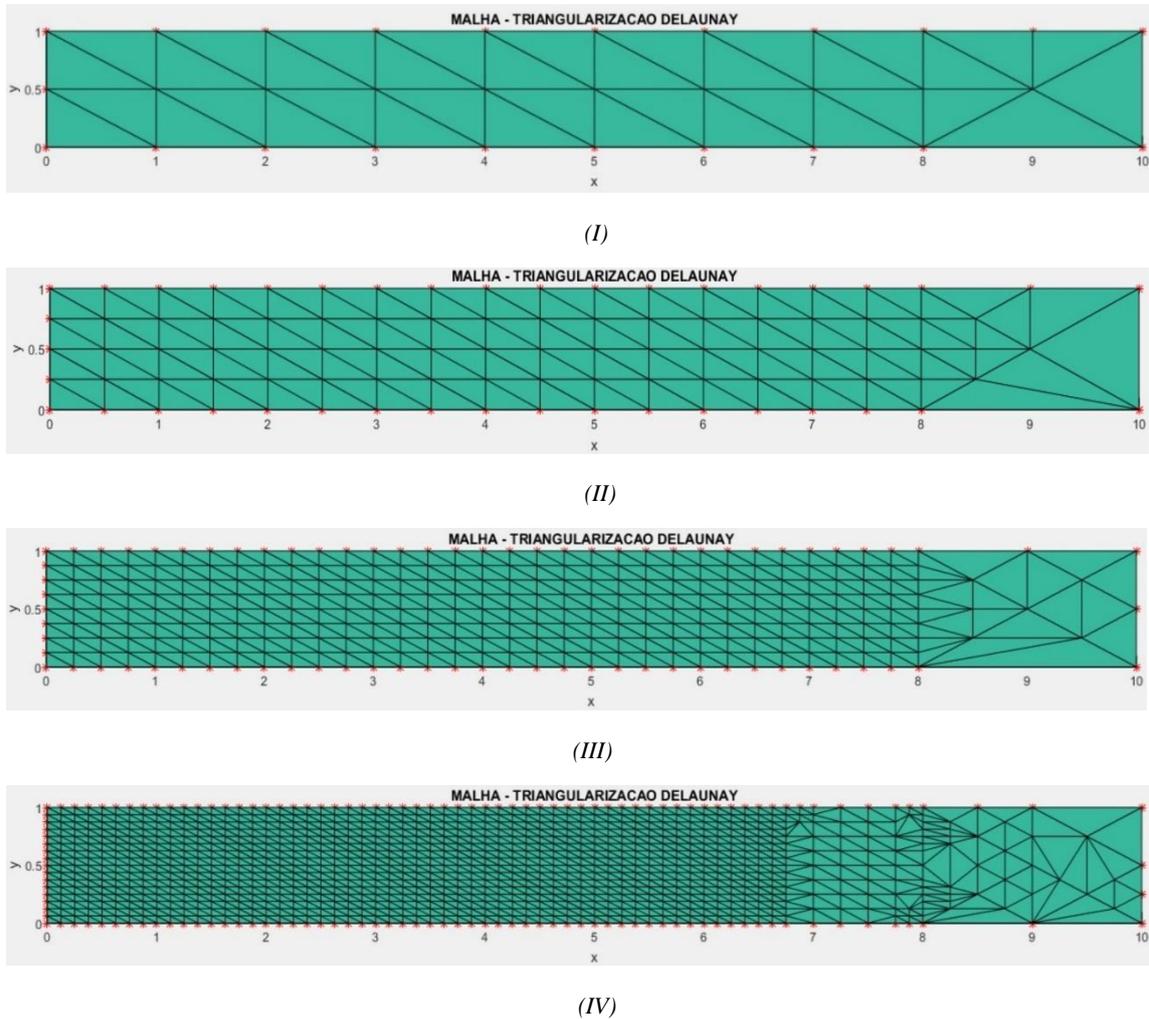


Figura 13: Evolução da malha da viga engastada em balanço



Para validação da malha final podemos estabelecer uma comparação com malhas de outros trabalhos, a exemplo da obtida por Krishnamoorthy e Umesh (1993) e mostrada na figura 19. Apesar do tipo de elemento utilizado ser diferente, verificamos a mesma tendência de refinamento. Os valores numéricos de tensões obtidas com a estratégia adaptativa foram comparados com os obtidos pela malha refinada uniformemente para fins de validação, pois esta possui convergência para o valor exato, segundo Cook (1995). Para tanto produzimos a distribuição do erro real percentual entre os valores de tensões nos nós do domínio adaptativo, verificando a diferença entre tensões desse mesmo nó na malha adaptativa e uniforme, onde nesta última as tensões foram obtidas por interpolação.

Figura 14: Malha final do refinamento adaptativo da viga engastada em balanço

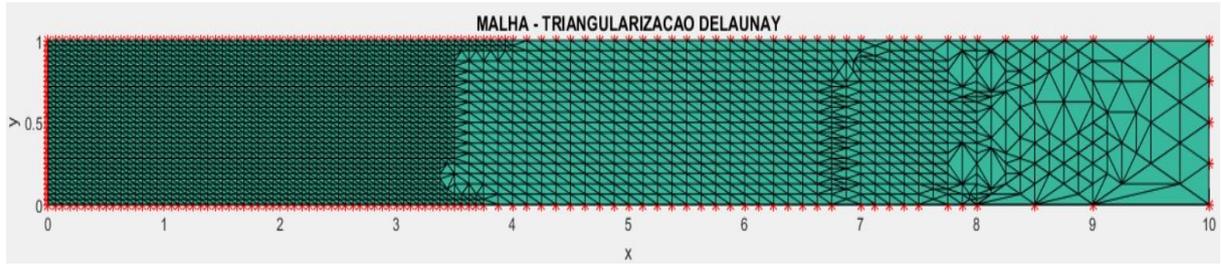


Figura 15: Distribuição de tensões normais da viga engastada em balanço

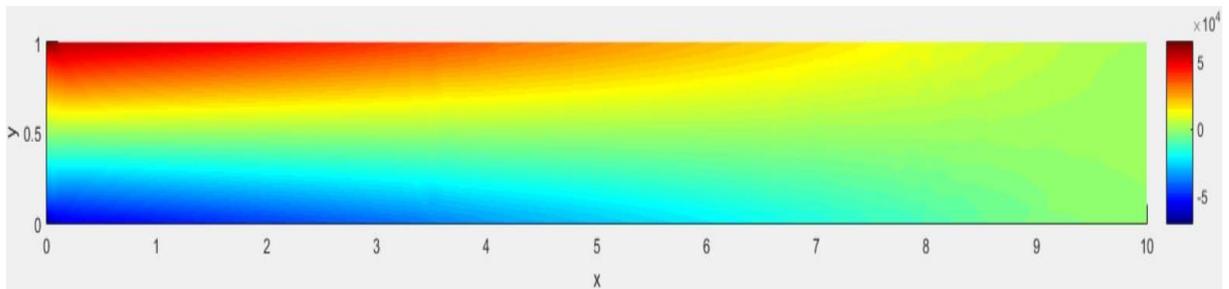


Figura 16: Distribuição de tensões cisalhantes da viga engastada em balanço

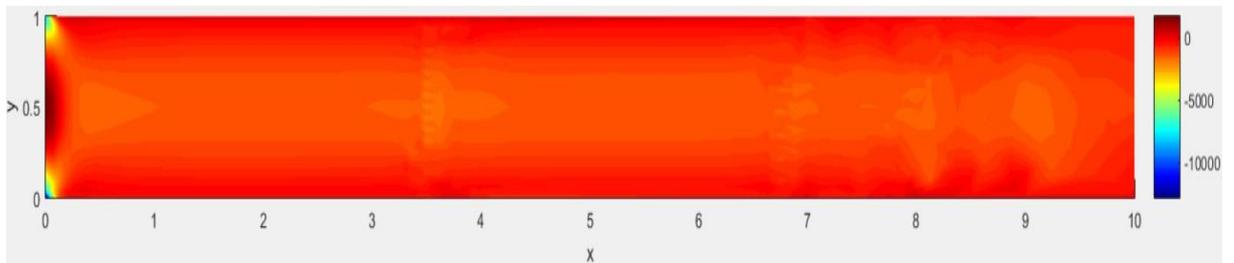


Figura 17: Distribuição de deslocamentos em x da viga em balanço

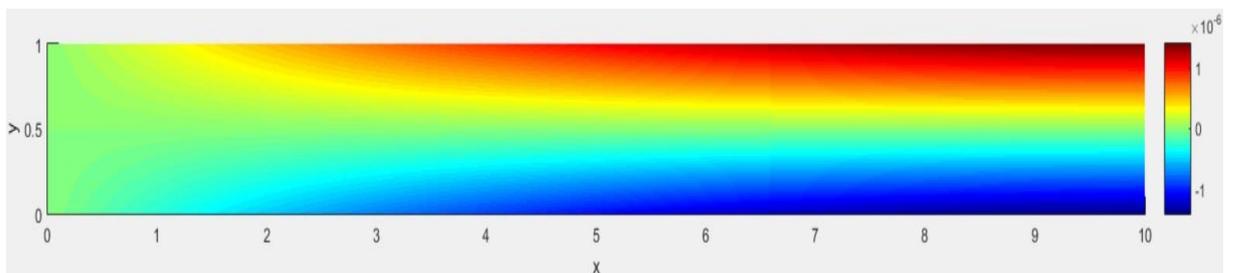
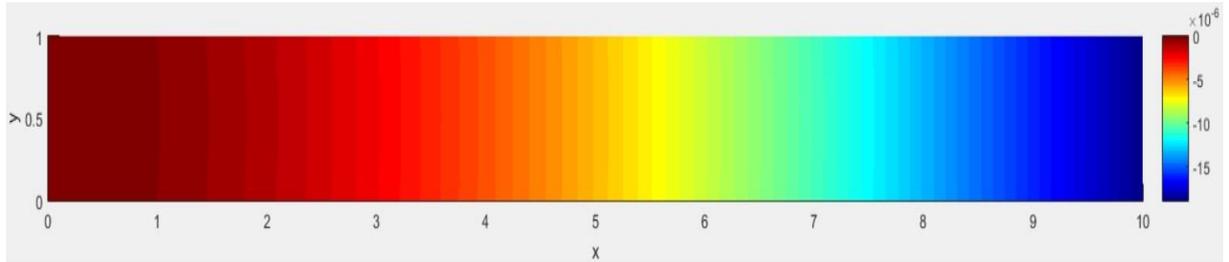


Figura 18: Distribuição de deslocamentos em y da viga engastada em balanço



Os resultados são apresentados na forma de distribuição no domínio (figuras 20 e 21) e como histogramas para melhor visualização da quantidade de elementos numa mesma faixa de erro percentual (figuras 22 e 23).

Figura 19: Refinamento adaptativo de viga em balanço: a) Problema inicial; b) Malha final. Krishnamoorthy e Umesh (1993).

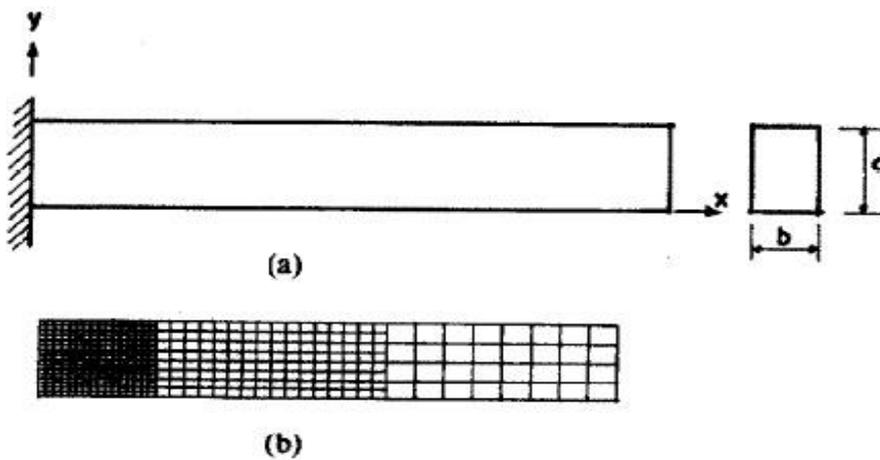


Figura 20: Distribuição do erro de tensões normais da viga engastada em balanço

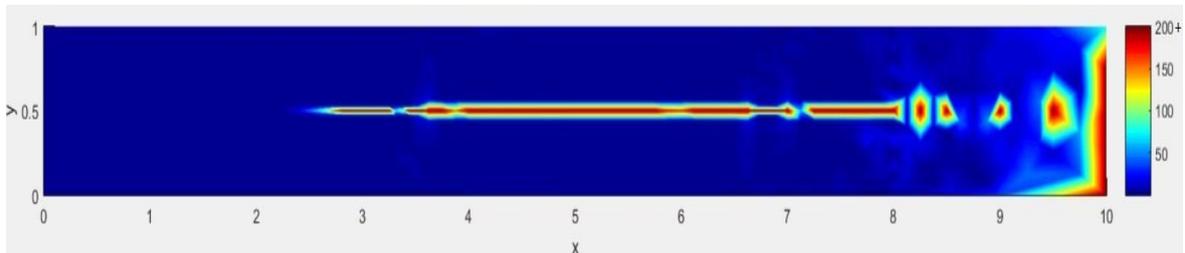
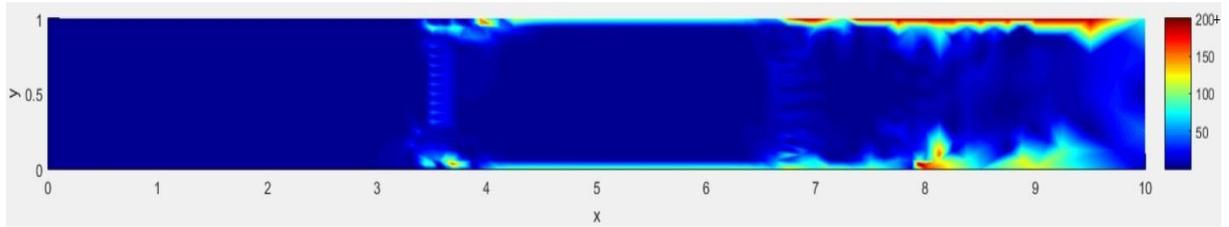


Figura 21: Distribuição de erro das tensões cisalhantes da viga engastada em balanço



Observando as figuras 20 e 21 é possível perceber que houveram nós onde a tensão atingiu picos de erros em comparação com os resultados do refinamento uniforme e grande parte ficou com erro baixo (parte em azul). No entanto, observando o *Bin Count* da caixa de texto (que indica o número de nós na faixa de erro percentual considerada) dos histogramas das figuras 22 e 23, percebe-se que para as tensões normais 95% dos nós (2490 nós) possuem erro abaixo de 10% (faixa de porcentagem expressa no *Bin Edges* da caixa de texto) e para as tensões cisalhantes 89% (2330 nós), o que demonstra que as regiões em azul de fato são nós em sua imensa maioria com erros abaixo de 10%, considerados satisfatórios para nossa análise. O percentual de nós com erro elevado foi baixo, e por isso a escala dos histogramas só vão até 100% de erro e da distribuição no domínio a 200%, sobrando poucos nós com erro superior a tal. Essas mesmas interpretações da distribuição de erro no domínio e dos histogramas baseada no *Bin Count* e *Bin Edges* são usadas nas próximas análises.

Figura 22: Histograma do erro de tensões normais da viga engastada em balanço

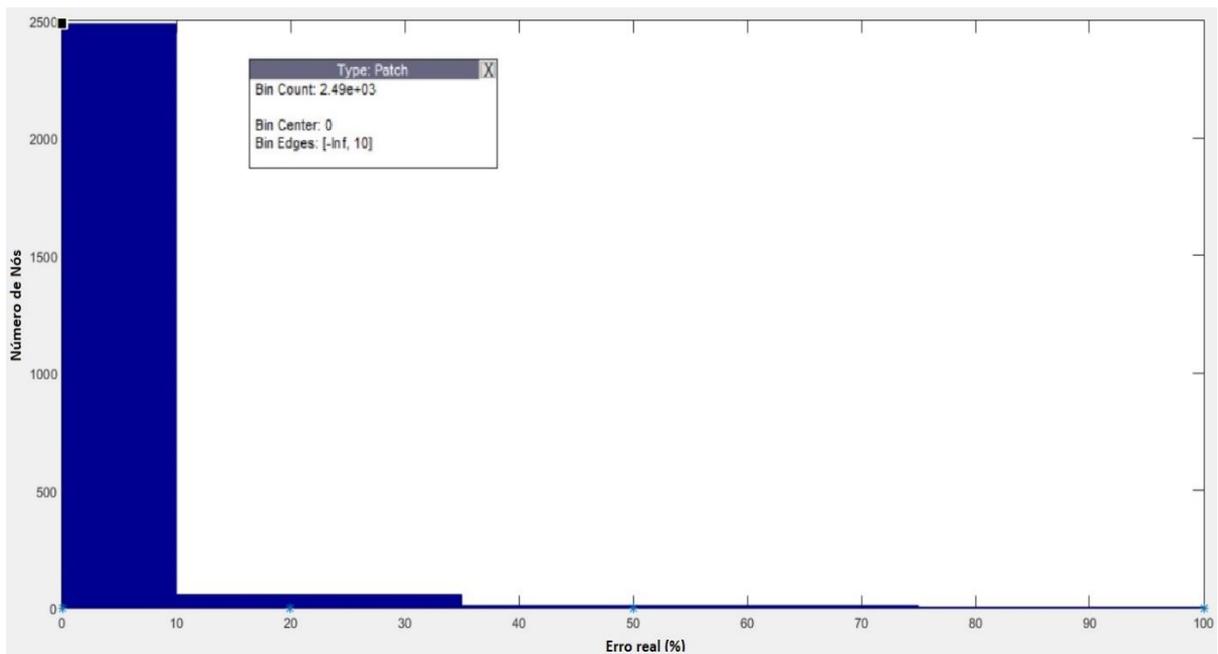
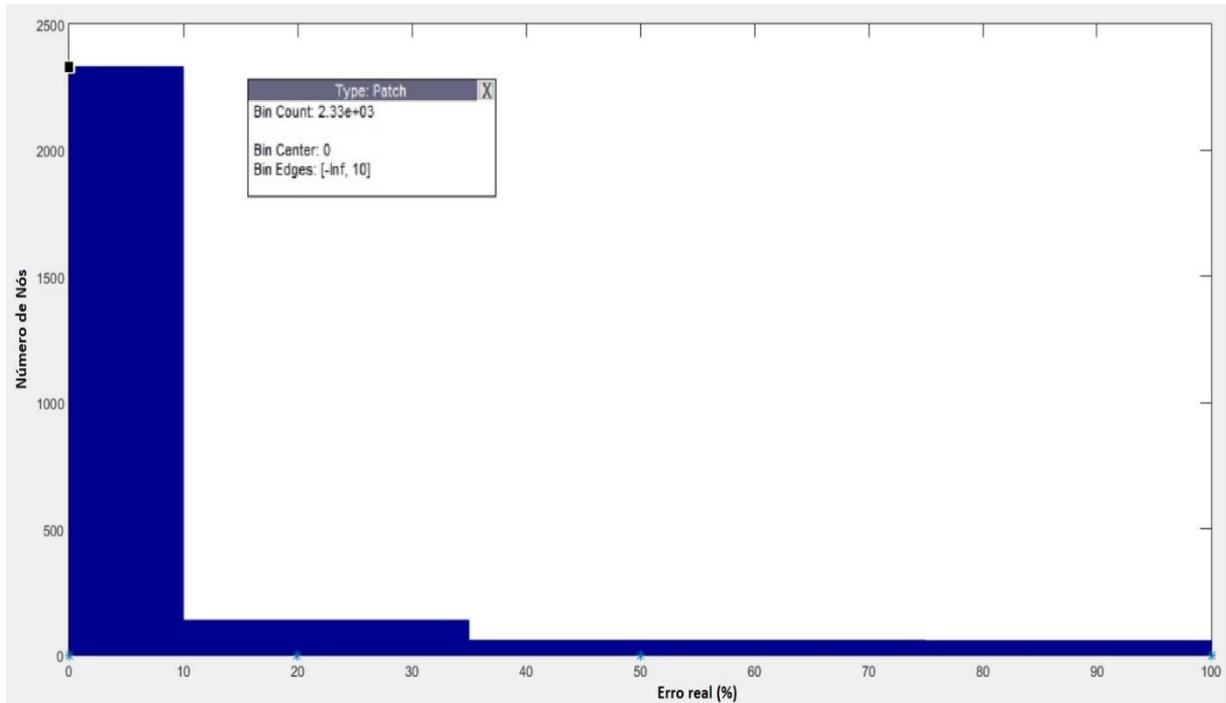


Figura 23: Histograma do erro de tensões cisalhantes da viga engastada em balanço

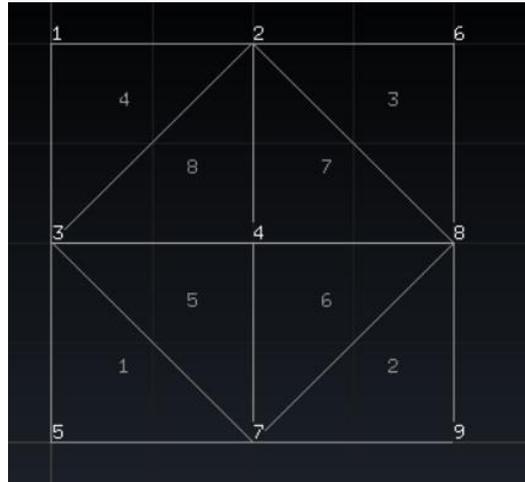


5.2 Viga Parede Engastada

O segundo caso analisado é o de uma viga parede com dimensões de 4m de comprimento e 4m de altura, sendo engastada na extremidade esquerda e com a extremidade direita livre. A carga é uniformemente distribuída ao longo do comprimento na face superior com valor de 1kN/m. O material adotado é o aço com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson de 0,3.

A análise feita para este caso é semelhante ao anterior, na qual a malha inicial foi gerada no GiD (figura 24) de maneira estruturada para evitar elementos muito deformados ao longo das iterações.

Figura 24: Malha inicial da viga parede engastada. Desenvolvido com o GiD.



A análise feita adotou como critério de parada do refinamento adaptativo o erro relativo percentual em energia máximo de 5% ($\bar{\eta}=5\%$). A tabela 3 resume os resultados obtidos em cada iteração e apresenta alguns valores de variáveis das malhas geradas.

Tabela 3: Resultados do refinamento adaptativo da viga parede engastada

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Índice de Efetividade	η (%)	Deslocamento y (extremidade) (* 10^{-8} m)
0	8	9	18	0,0036	8,78	33,3	-4,61
1	32	25	50	0,0029	7,07	24,64	-5,88
2	126	79	158	0,002	4,88	16,23	-6,39
3	496	279	558	0,0012	2,93	9,85	-6,57
4	1276	690	1380	0,00074	1,80	6,02	-6,63
5	2080	1110	2220	0,0005	1,22	4,08	-6,65

Tabela 4: Resultados do refinamento uniforme da viga parede engastada

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Deslocamento y (extremidade) (* 10^{-8} m)	η (%)
0	8	9	18	0,0036	-4,61	33,3
1	32	25	50	0,0029	-5,88	24,64
2	128	81	162	0,002	-6,38	16,21
3	512	289	578	0,0012	-6,58	9,83
4	2048	1089	2178	0,00071	-6,64	5,79
5	8192	4225	8450	0,00041	-6,66	3,39

O refinamento uniforme também foi utilizado como ferramenta de validação dos resultados obtidos com o refinamento adaptativo, através da comparação do erro em norma de energia do domínio e da convergência do deslocamento na extremidade, e para estabelecimento do critério de eficiência. Seus resultados estão apresentados na tabela 4.

Os gráficos de número de elementos versus erro em norma de energia no domínio e número de elementos versus deslocamento na extremidade estão descritos nas figuras 25 e 26, respectivamente.

Figura 25: Número de Elementos versus Erro em Norma de Energia do domínio para viga parede engastada

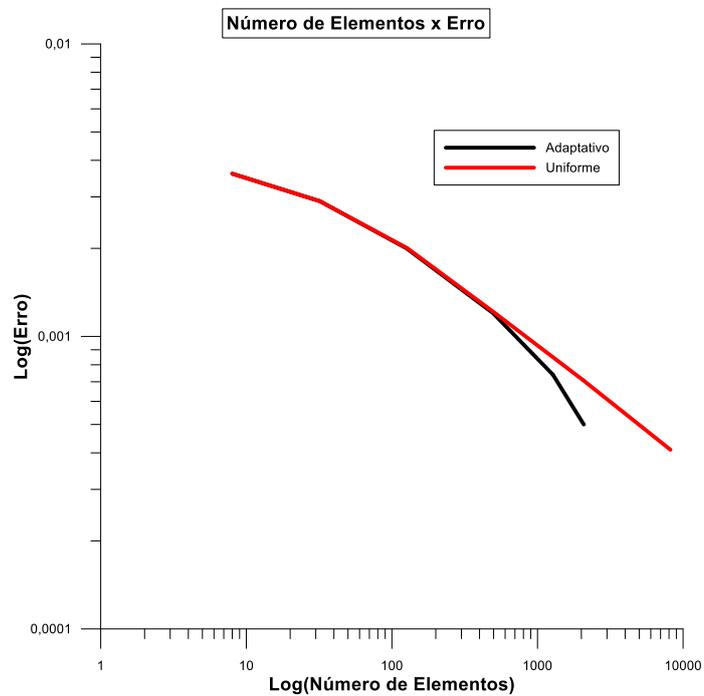
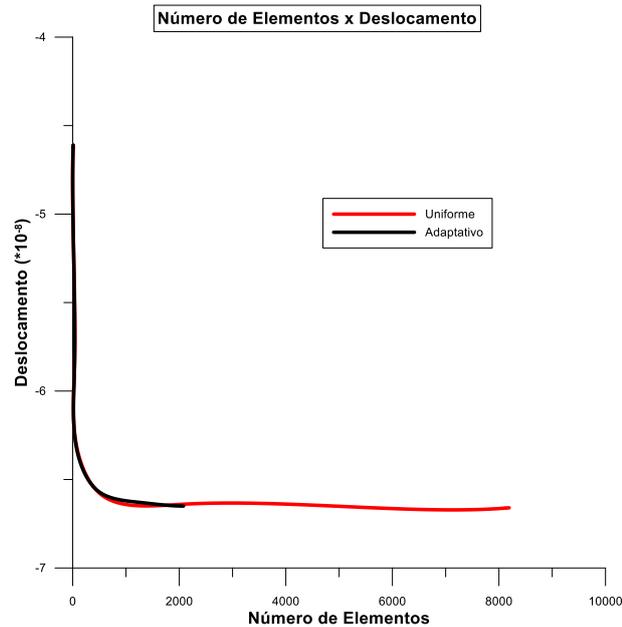
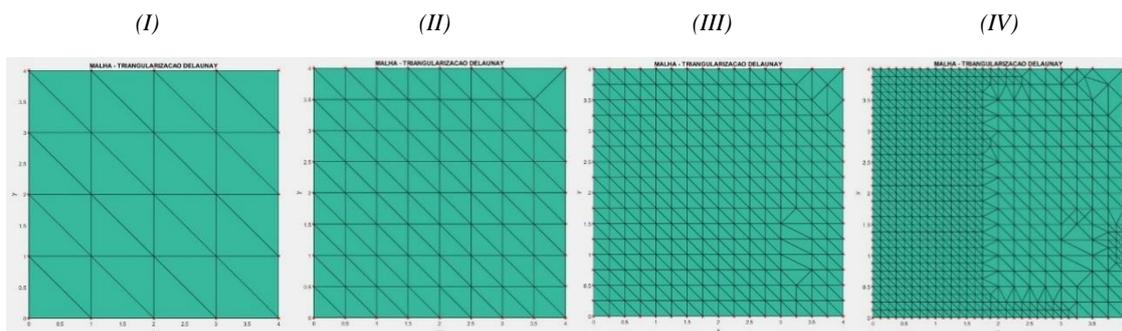


Figura 26: Número de Elementos versus Deslocamento da Extremidade da viga parede engastada



Novamente podemos perceber que o refinamento adaptativo apresentou vantagem em relação ao uniforme pelo fato de apresentar menores erros para um mesmo número de elementos ou, equivalentemente, menos elementos requeridos para alcançar um mesmo erro em norma de energia do domínio. No entanto os deslocamentos na extremidade deram muito semelhantes para os dois tipos de refinamento.

Figura 27: Evolução da malha da viga parede engastada



Na sequência são apresentadas a evolução da malha (figura 27), a malha final (figura 28), a distribuição de tensões em x, y e cisalhantes ao longo do domínio (figuras 29, 30 e 31, respectivamente) e deslocamentos em x e y (Figuras 32 e 33, respectivamente) fornecidos pelo código desenvolvido.

Figura 28: Malha final da viga parede engastada

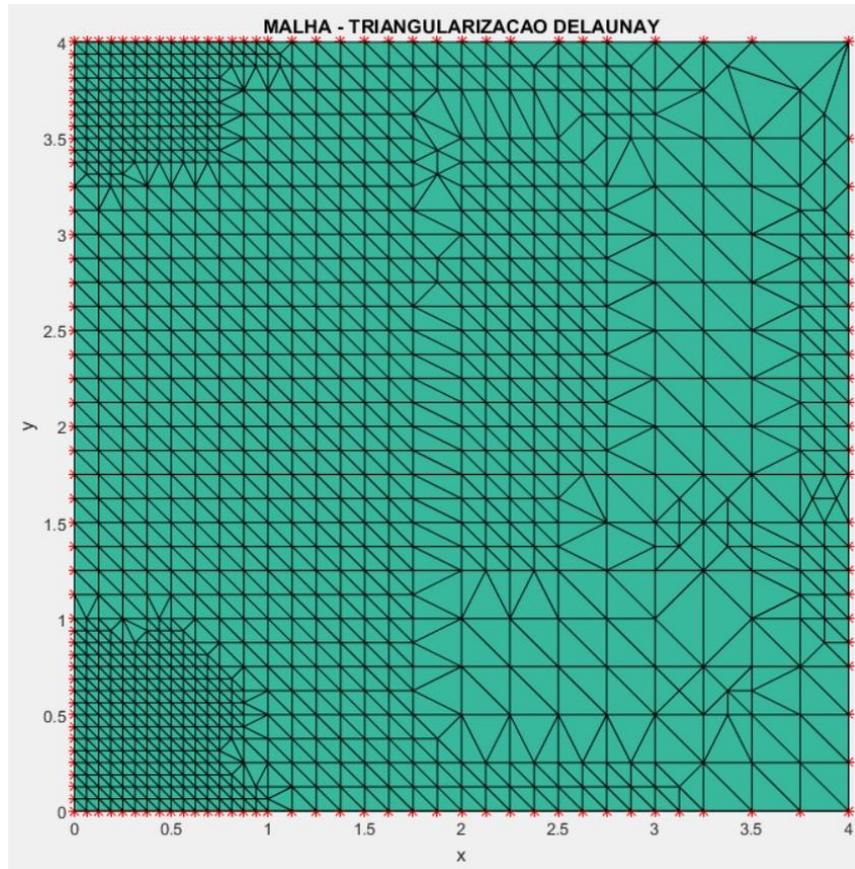


Figura 29: Distribuição de tensões em x na viga parede engastada

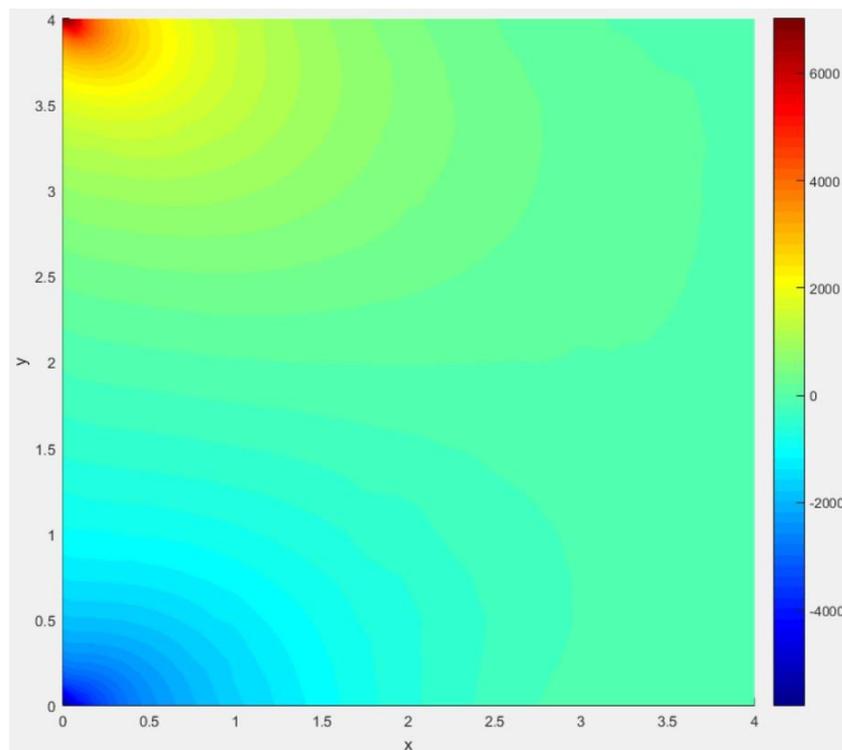


Figura 30: Distribuição de tensões em y na viga parede

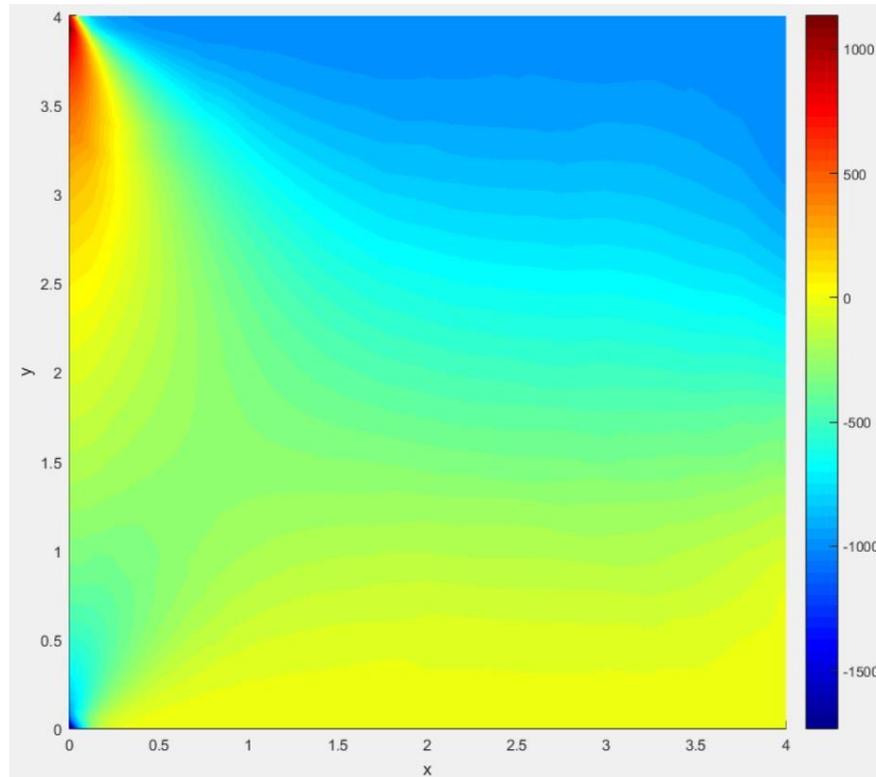


Figura 31: Distribuição de tensões cisalhantes na viga parede engastada

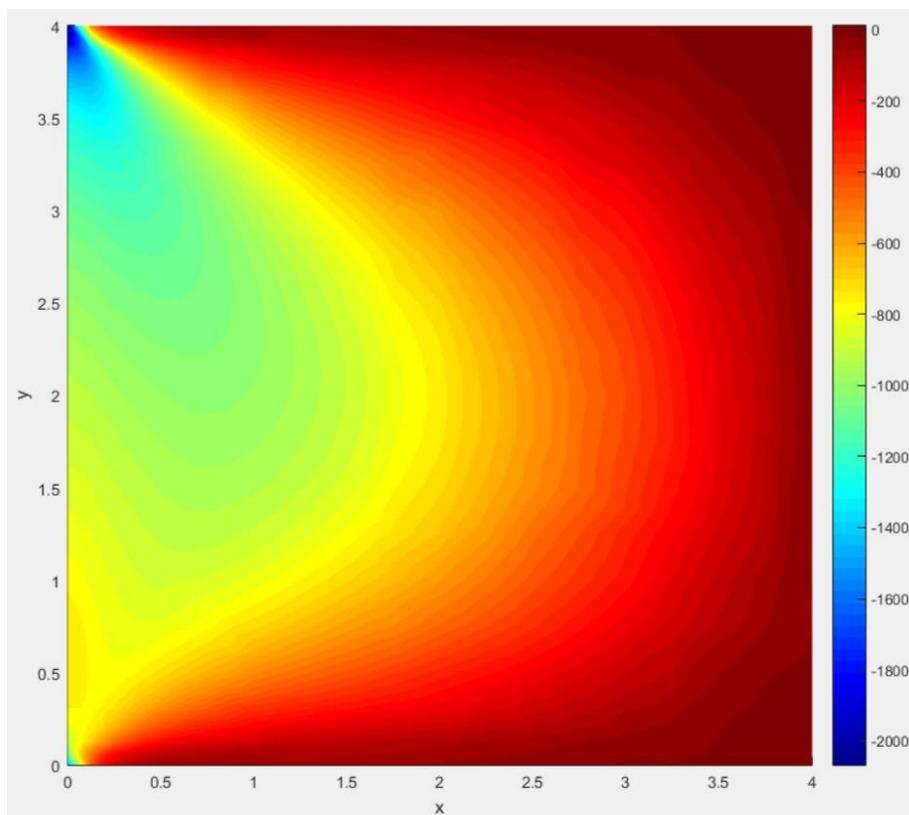


Figura 32: Distribuição de deslocamentos em x da viga parede engastada

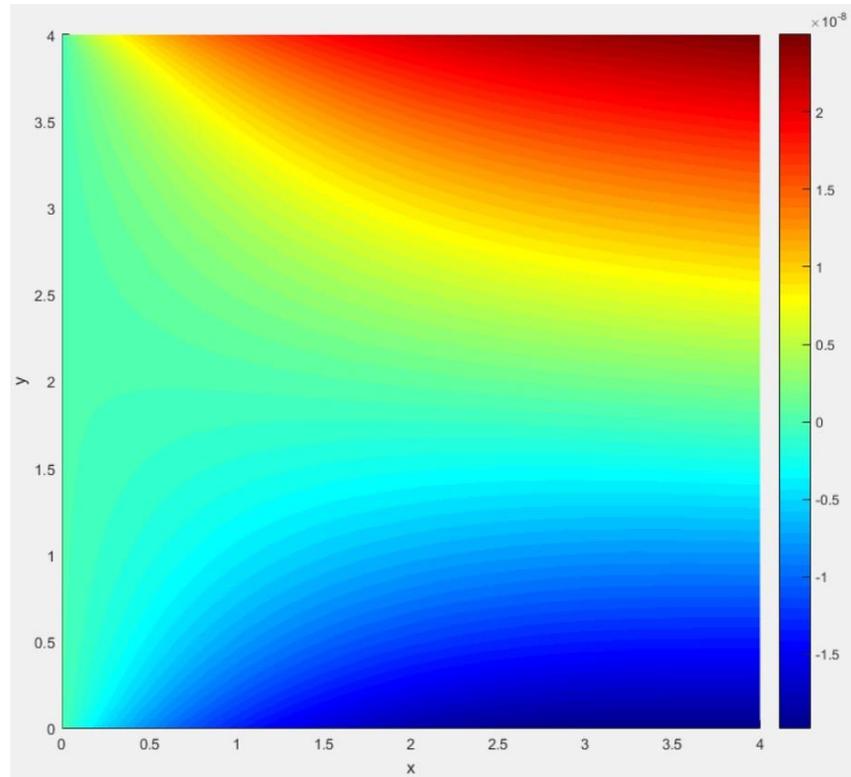
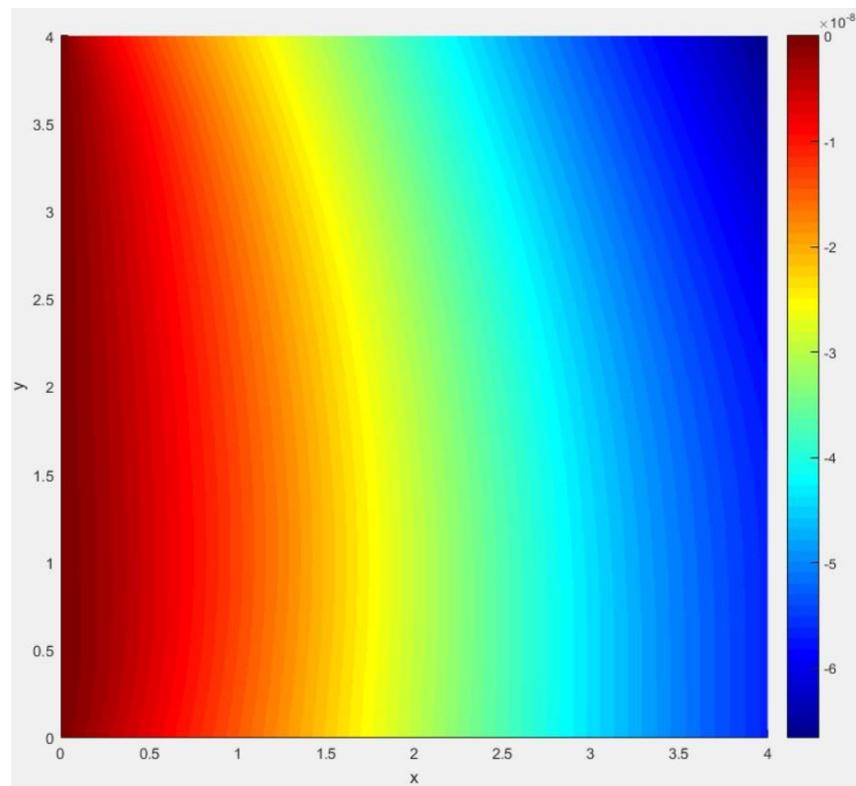


Figura 33: Distribuição de deslocamentos em y da viga parede engastada



A malha final foi validada com a malha produzida por Zienkiewicz (2000) (figura 34) e, apesar do tipo de elemento usado ser diferente, podemos verificar uma mesma tendência de refinamento, mostrando que a malha que obtemos está sendo refinada nas regiões adequadas. Para validação das tensões obtidas, novamente fizemos uso do cálculo do erro real percentual das tensões nos nós, dado pela diferença das tensões nos nós da malha adaptativa quando calculados na malha adaptativa e na uniforme, onde nesta última as tensões são obtidas por interpolação. Os resultados são apresentados na forma de distribuição de erro no domínio (figuras 35, 36 e 37) e como histogramas para uma melhor quantificação dos mesmos (Figuras 38, 39 e 40).

Figura 34: Refinamento adaptativo de viga parede engastada: a) Problema inicial; b) Malha final. Zienkiewicz (2000).

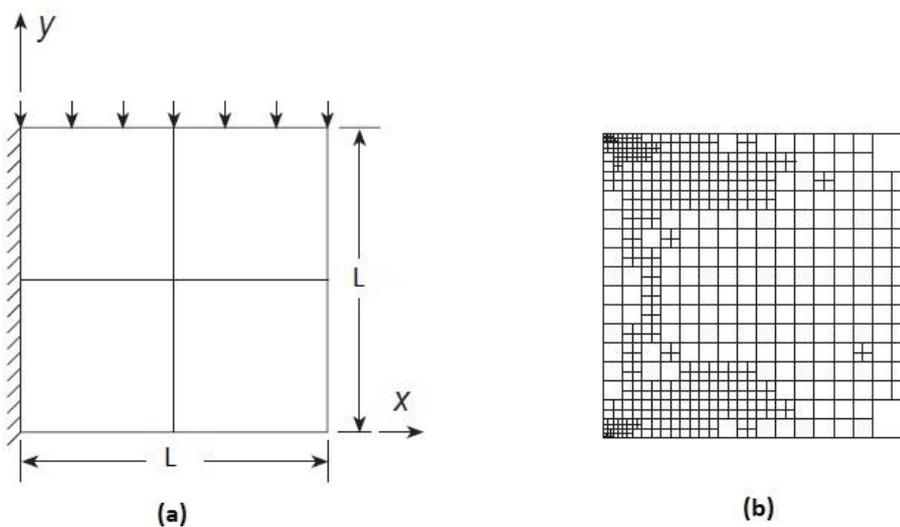


Figura 35: Distribuição de erro das tensões em x na viga parede engastada

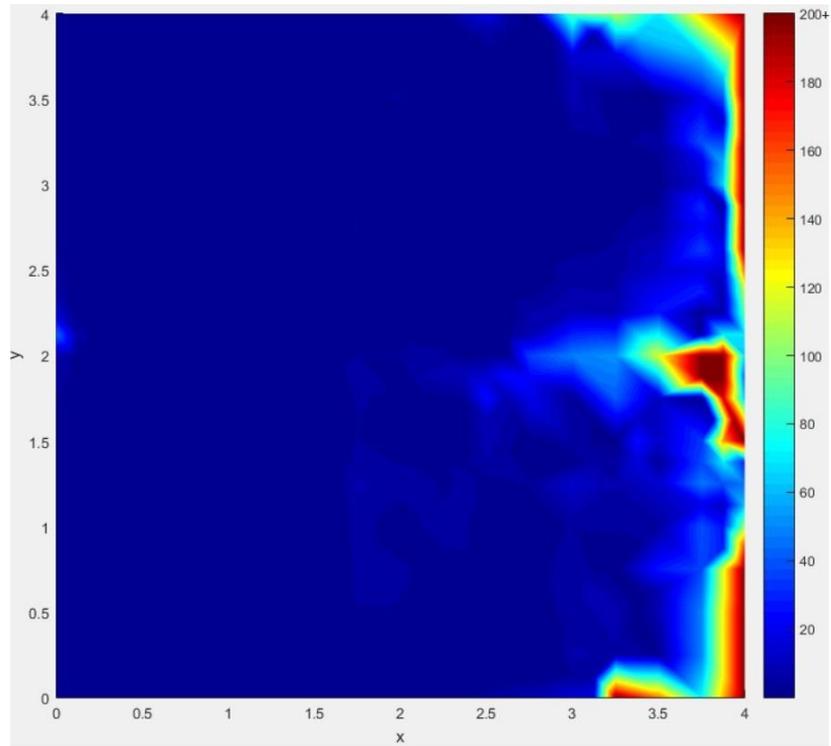


Figura 36: Distribuição do erro de tensões em y na viga parede engastada

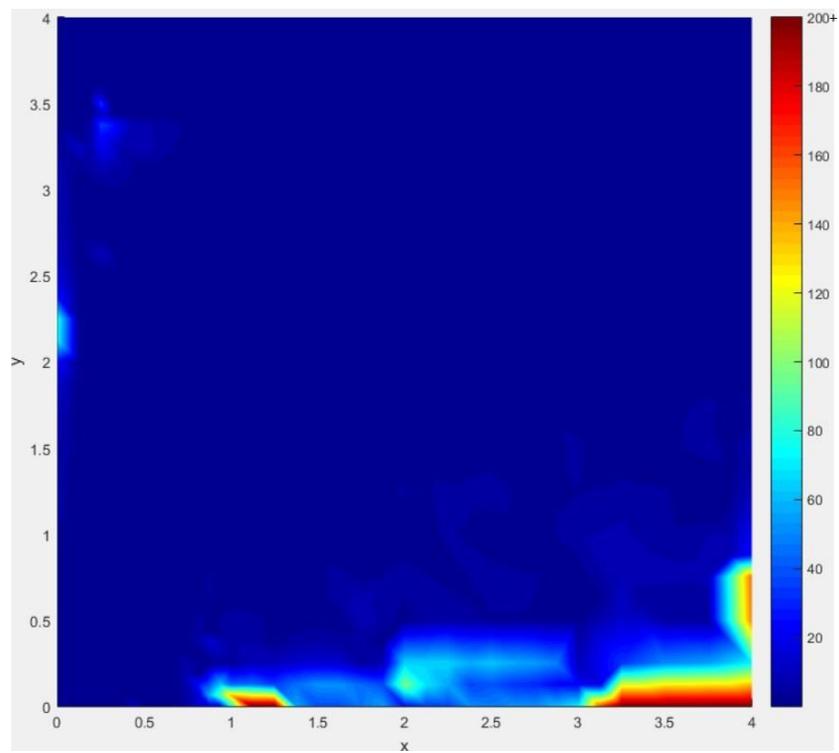


Figura 37: Distribuição do erro de tensões cisalhantes na viga parede engastada

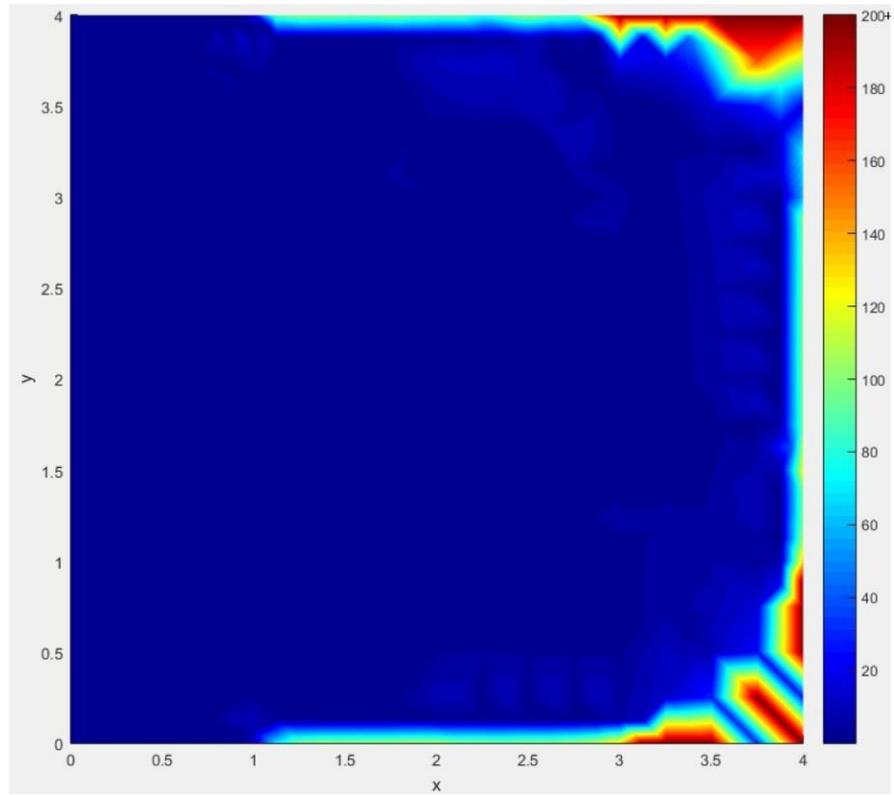


Figura 38: Histograma do erro de tensões em x da viga parede engastada

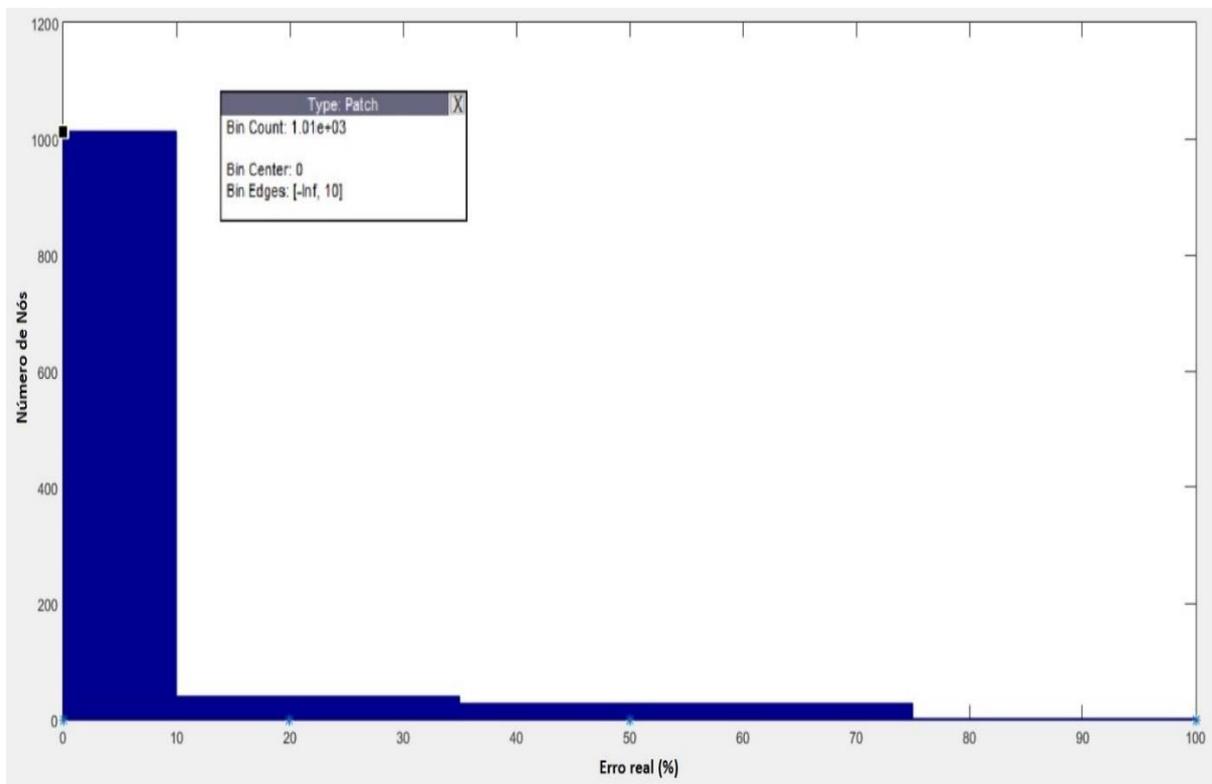


Figura 39: Histograma do erro de tensões em y da viga parede

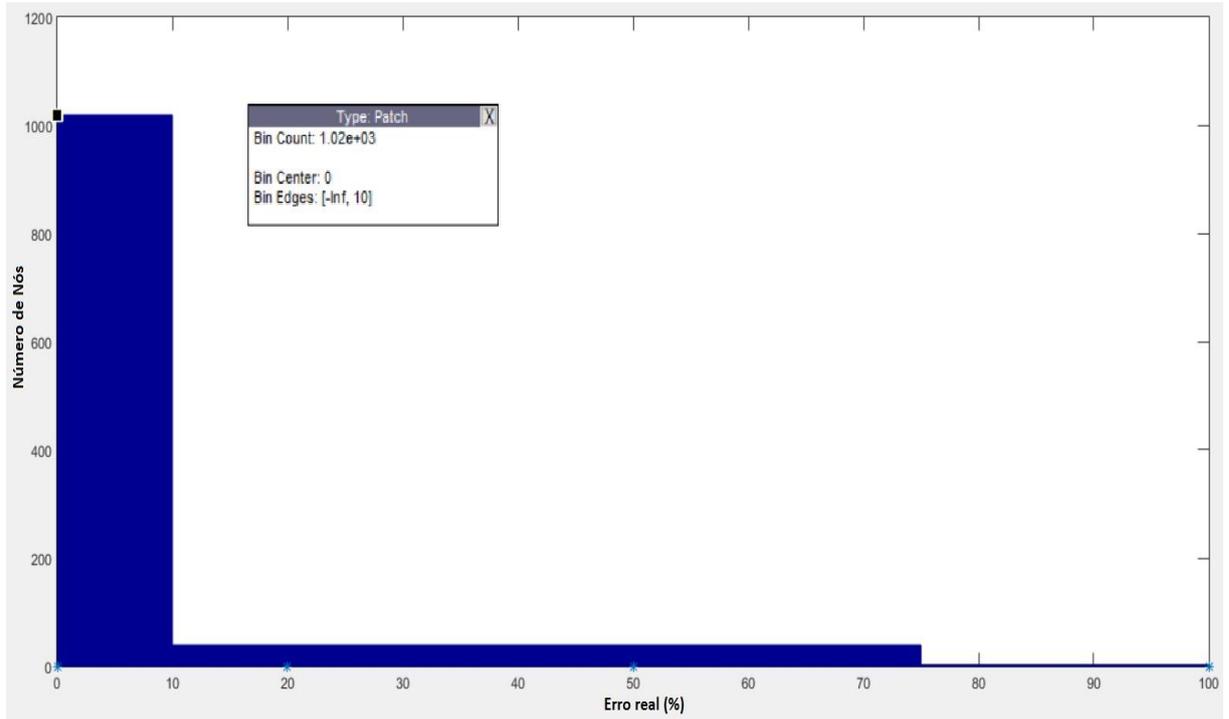
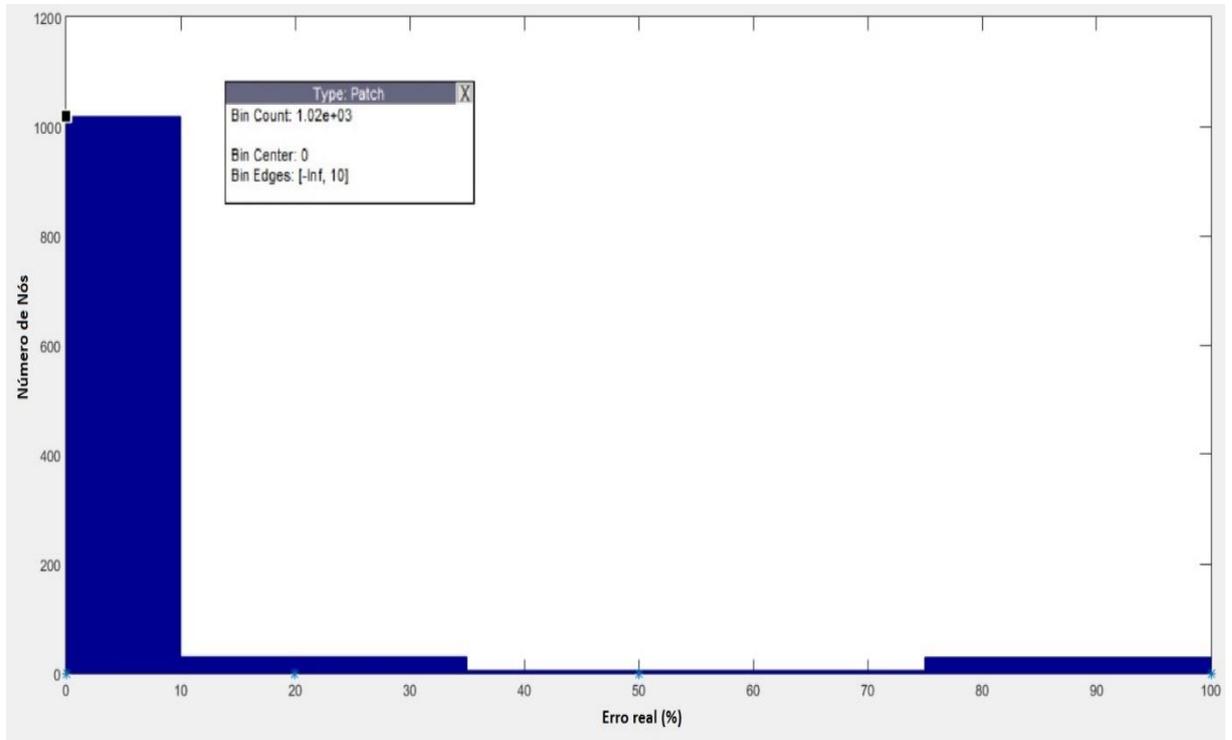


Figura 40: Histograma do erro de tensões cisalhantes da viga parede engastada



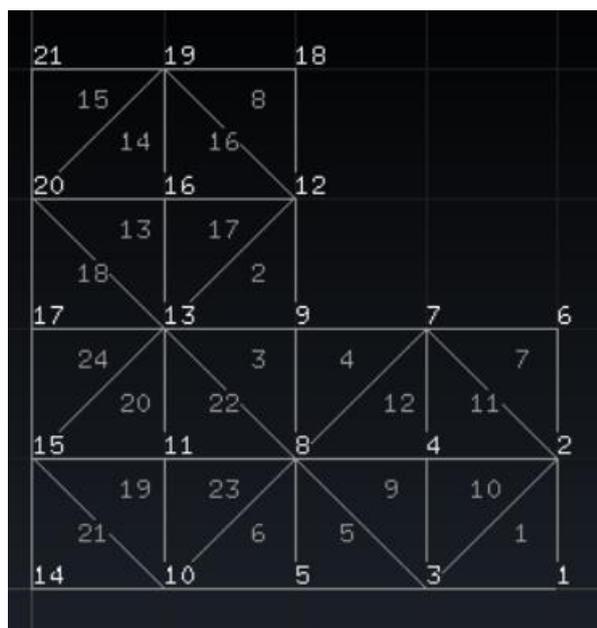
Assim como no caso anterior, observando as figuras 35, 36 e 37 vemos que alguns nós apresentaram picos de erro, porém a maioria dos nós se mostrou com erro baixo, fato esse comprovado pelos histogramas das figuras 38, 39 e 40 que apontam que 91% dos nós possuem erro de tensões em x abaixo de 10% e 92% possuem erro abaixo de 10% para tensões em y e cisalhante. Resultado considerado satisfatório para nossa análise e que reforça a validade das análises realizadas e do modelo adotado.

5.3 Estrutura em L

Seguindo o mesmo procedimento de análise utilizado para os casos anteriores, iremos analisar uma estrutura em L, possuindo 4m de altura e 4m de comprimento, com a espessura do L sendo de 2m. Na face esquerda há uma força distribuída de 1kN/m aplicada para a direita. Na face direita há apoios de primeiro gênero em toda a face com restrição de movimento em x e na face superior também há apoios de primeiro gênero em toda a face, porém com restrição de movimento em y.

A malha inicial foi gerada no GiD e está apresentada na figura 41 com a numeração de nós e elementos. Mais uma vez optamos por uma malha estruturada para tentar melhorar a qualidade dos elementos gerados nas sucessivas subdivisões das iterações de refinamento.

Figura 41: Malha inicial da estrutura em L. Desenvolvido com o GiD



Para a análise desse problema usamos como tolerância para parada do refinamento adaptativo o valor de erro relativo percentual de energia máximo de 9% ($\bar{\eta}=9\%$). Os resultados estão apresentados na tabela 5 para cada iteração com valores que mostram a qualidade do refinamento alcançado. O deslocamento indicado nas tabelas 5 e 6 referem-se ao da quina com numeração de nó 9 (figura 41).

Tabela 5: Resultados do refinamento adaptativo da estrutura em L

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Índice de Efetividade	η (%)	Deslocamento x (quina) ($\cdot 10^{-8}$ m)
0	24	21	42	0,0431	53,21	52,17	$4,37 \cdot 10^7$ *
1	96	65	130	0,004	4,94	26,37	4,02
2	349	204	408	0,0025	3,09	16,17	4,36
3	1253	680	1360	0,0014	1,73	9,32	4,47
4	2359	1261	2522	0,0011	1,36	6,84	4,47

*O deslocamento da quina da primeira iteração foge a ordem de grandeza estabelecida para a coluna do mesmo

Tabela 6: Resultados do refinamento uniforme da estrutura em L

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Deslocamento x (quina) ($\cdot 10^{-8}$ m)	η (%)
0	24	21	42	0,0431	$4,37 \cdot 10^7$ *	52,17
1	96	65	130	0,004	4,02	26,37
2	384	225	450	0,0025	4,36	16,14
3	1536	833	1666	0,0014	4,47	9,19
4	6144	3201	6402	0,00081	4,49	5,26

*O deslocamento da quina na primeira iteração foge a ordem de grandeza estabelecida para a coluna do mesmo

Figura 42: Número de elementos \times Erro em norma de energia do domínio para estrutura em L

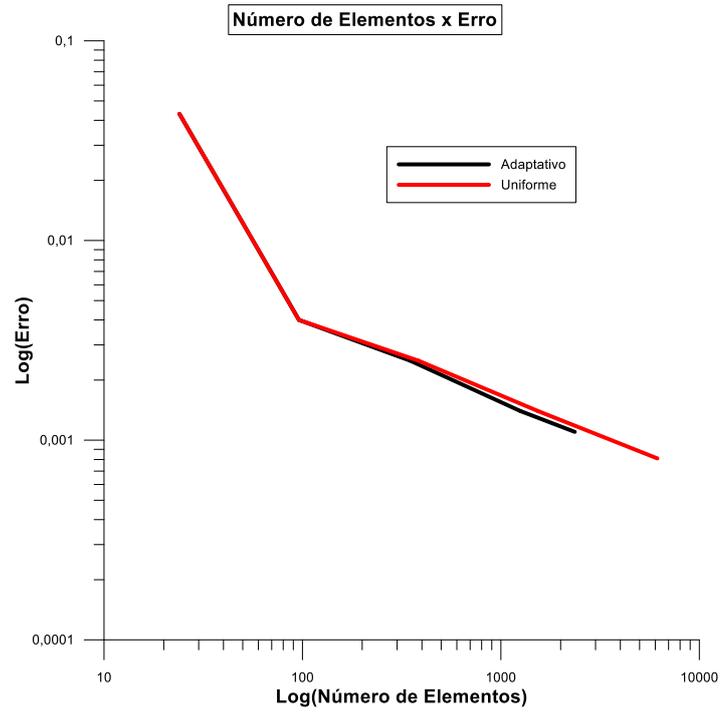
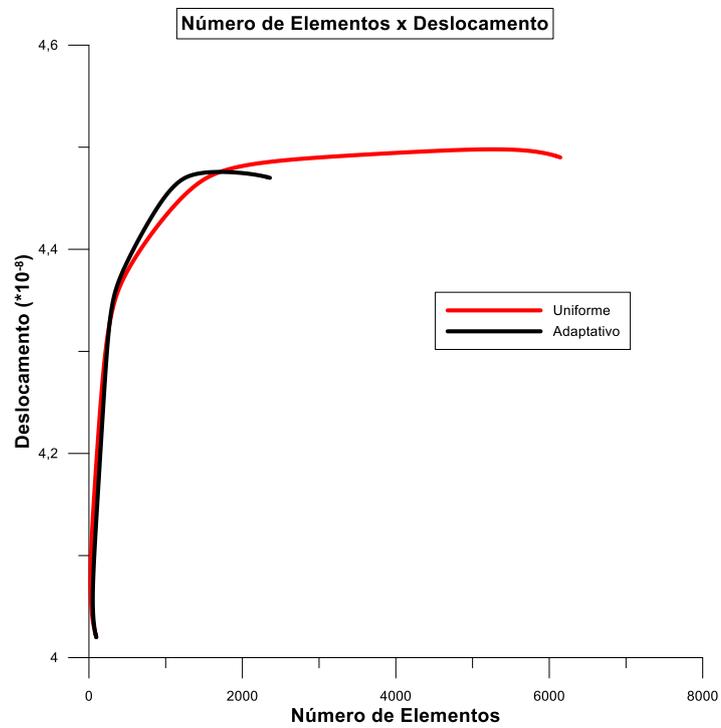


Figura 43: Número de Elementos \times Deslocamento da quina para a estrutura em L



Os resultados para o refinamento global uniforme foram computados e apresentados na tabela 6 para fins de validação do refinamento adaptativo, através da comparação do erro em norma de energia do domínio e convergência do deslocamento na quina, bem como para determinação da eficiência do método adaptativo.

Os gráficos das figuras 42 e 43 comparam os resultados das tabelas 5 e 6 de número de elementos versus erro em norma de energia do domínio e número de elementos versus deslocamento da quina, respectivamente. Mais uma vez notamos que o erro para o mesmo número de elementos é menor na malha adaptativa e, equivalentemente, para alcançar um mesmo erro precisamos de menos elementos na malha adaptativa do que na refinada uniformemente. Para os deslocamentos podemos perceber uma convergência mais rápida na malha adaptativa, no entanto o valor para o qual a mesma converge é ligeiramente diferente do valor estabelecido pelo refinamento uniforme, o qual é mais coerente com o valor exato.

Em seguida são apresentados a evolução da malha adaptativa ao longo das iterações (figura 44), a malha final gerada pelo código (figura 45), a distribuição de tensões em x, y e a cisalhante (figuras 46, 47 e 48, respectivamente) e a distribuição de deslocamentos em x e y (figuras 49 e 50).

Figura 44: Evolução da malha da estrutura em L

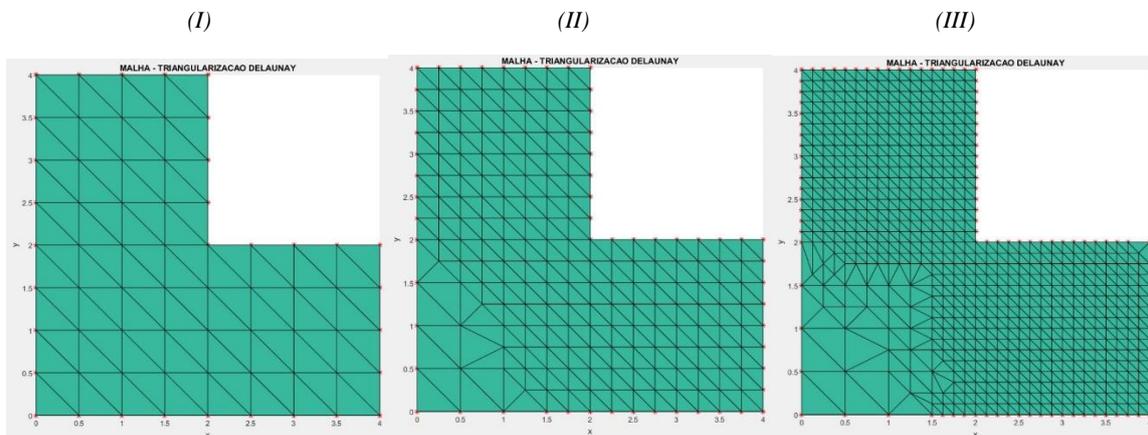


Figura 45: Malha final da estrutura em L

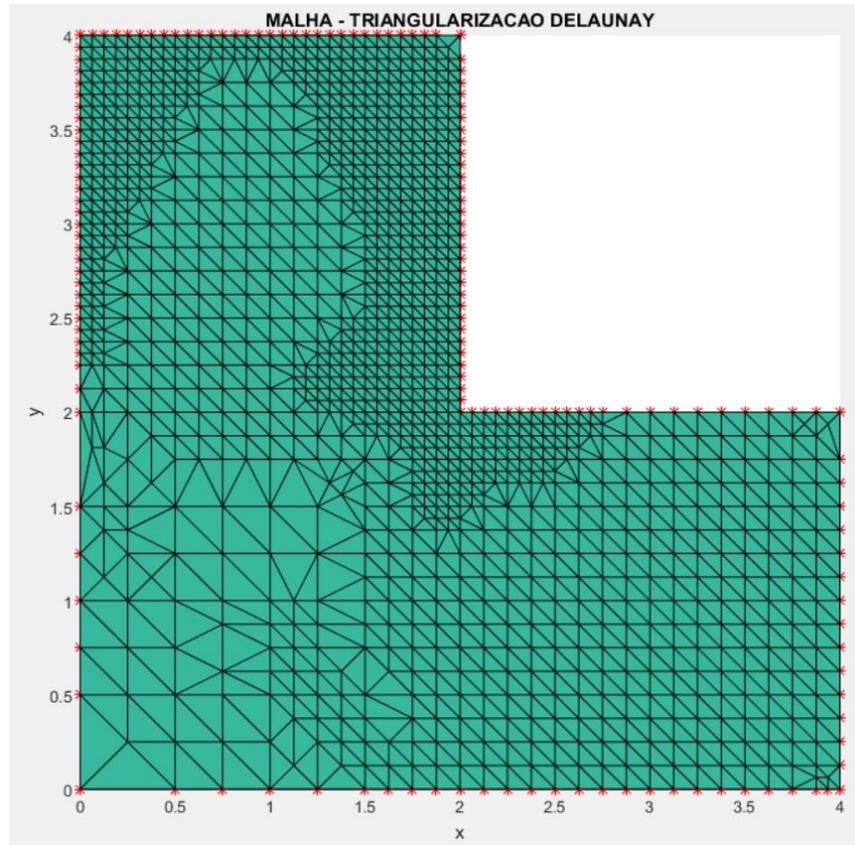


Figura 46: Distribuição de tensões em x da estrutura em L

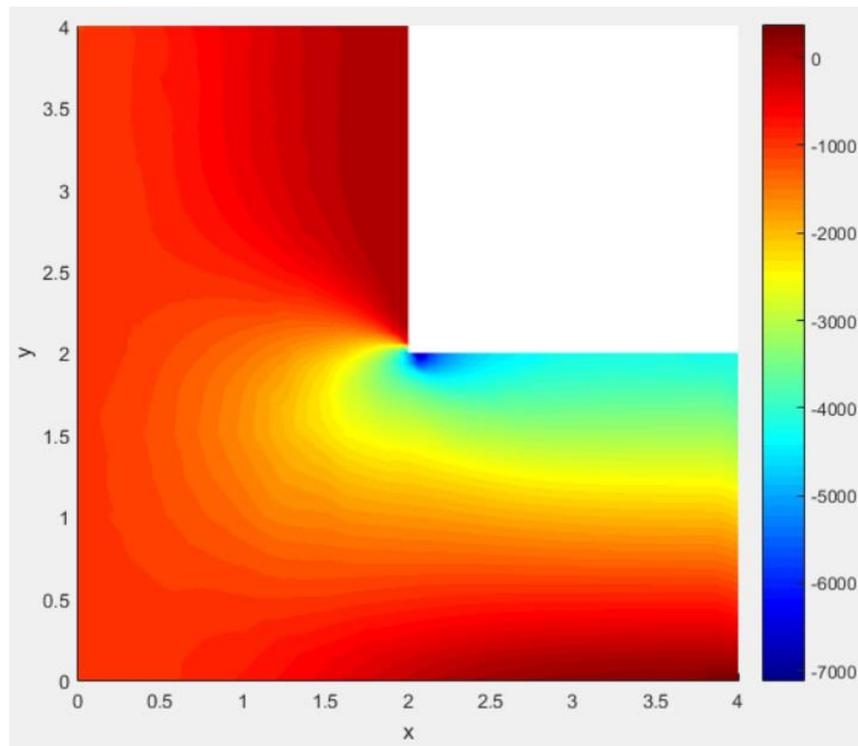


Figura 47: Distribuição de tensões em y da estrutura em L

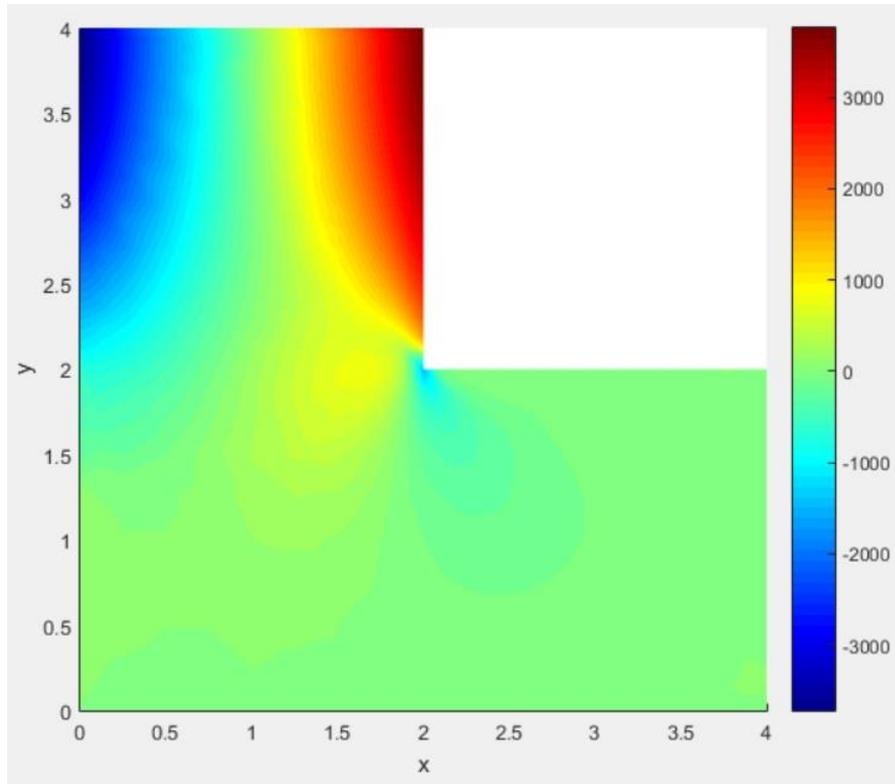


Figura 48: Distribuição de tensões cisalhantes na estrutura em L

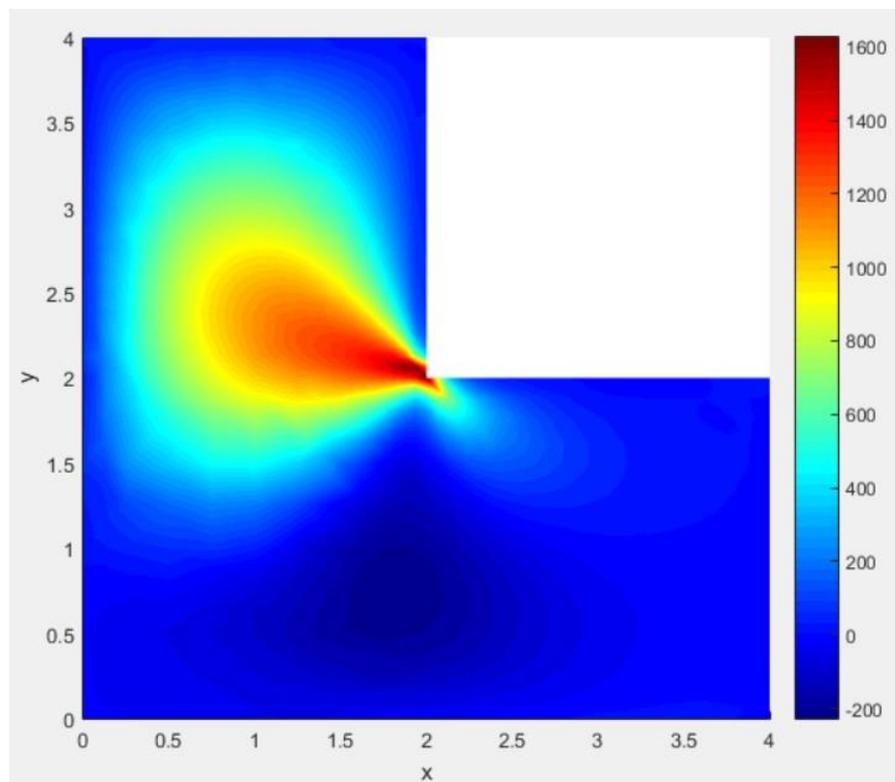


Figura 49: Distribuição de deslocamentos em x da estrutura em L

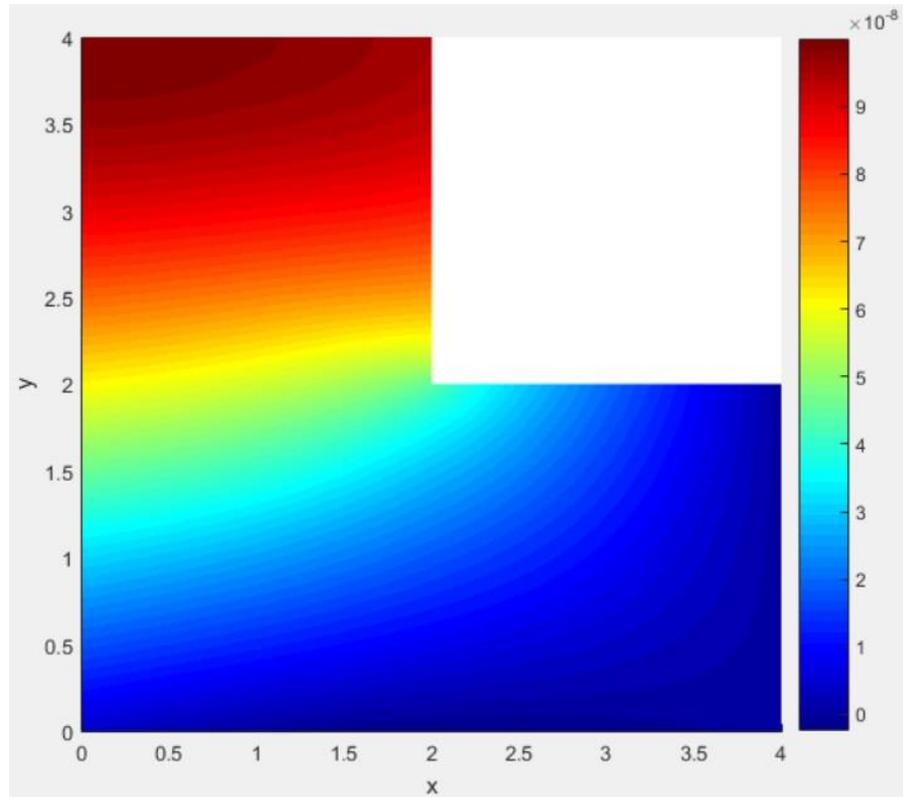
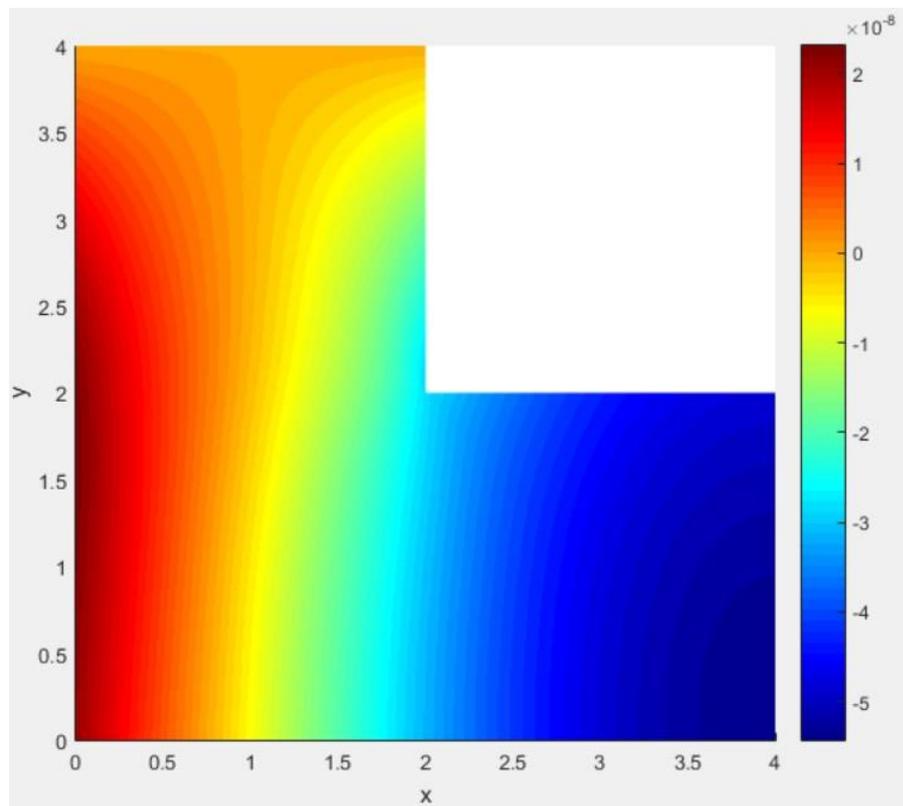


Figura 50: Distribuição de deslocamentos em y da estrutura em L



Para validação da malha obtida podemos fazer o comparativo com a malha obtida por Krishnamoorthy e Umesh (1993) e mostrado na figura 51. É possível verificar que a tendência de refinamento é a mesma apesar do uso de um tipo de elemento diferente, o que demonstra que nosso refinamento adaptativo leva ao refinamento das regiões adequadas. Para validação das tensões utilizamos a mesma estratégia dos casos anteriores de estabelecer um erro percentual real para a tensão em cada nó da malha adaptativa, dado pela diferença de tensões de um mesmo nó na malha adaptativa e na malha refinada uniformemente, sendo essa última tensão dada pela interpolação das tensões na malha uniformemente refinada. Os resultados destes erros são apresentados na forma de distribuição de erro (figuras 52, 53 e 54) e na forma de histogramas para melhor quantificação dos mesmos (figuras 55, 56 e 57).

Observando os histogramas podemos verificar que para tensões em x tivemos 97% dos nós com erro abaixo de 10%, para tensões em y esse percentual foi de 79% e para cisalhante foi de 85% dos nós abaixo de 10% de erro, o que difere um pouco dos resultados anteriores obtidos, principalmente das tensões em y , nos quais, em geral, mais de 90% dos nós estão com erro abaixo de 10%.

Figura 51: Refinamento adaptativo de estrutura em L: a) Problema inicial; b) Malha final. Krishnamoorthy e Umesh (1993).

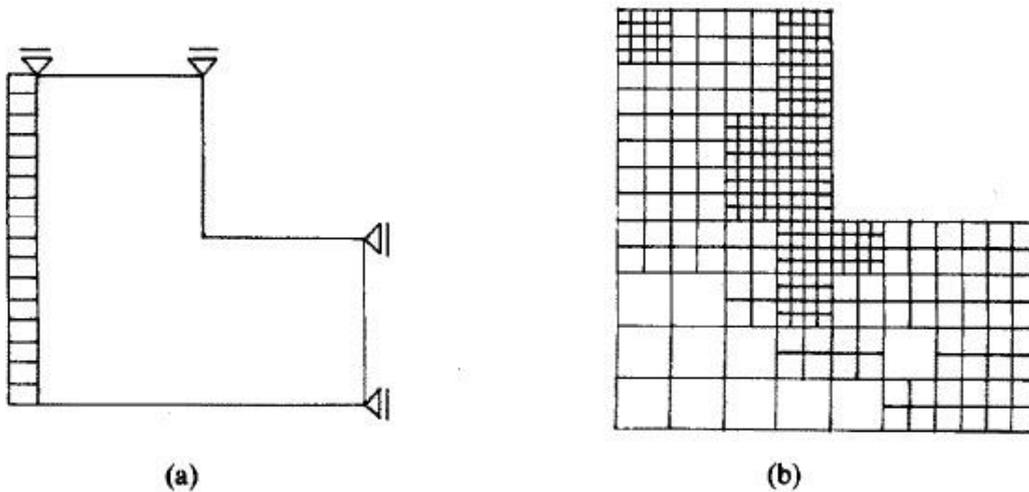


Figura 52: Distribuição de erro de tensões em x da estrutura em L

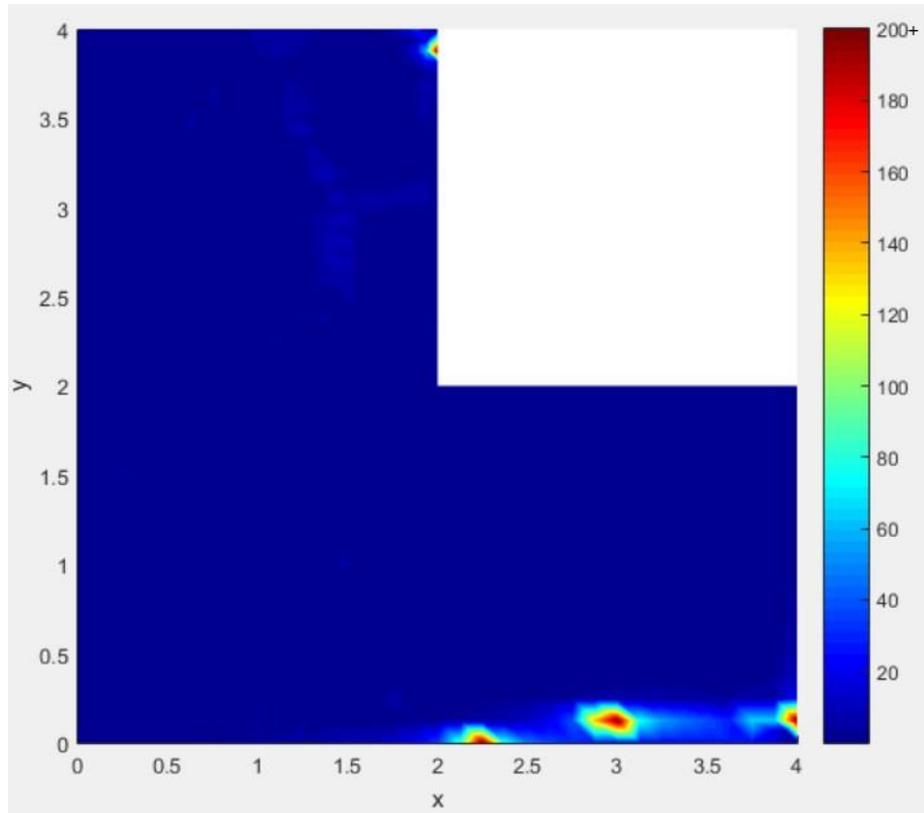


Figura 53: Distribuição de erro de tensões em y da estrutura em L

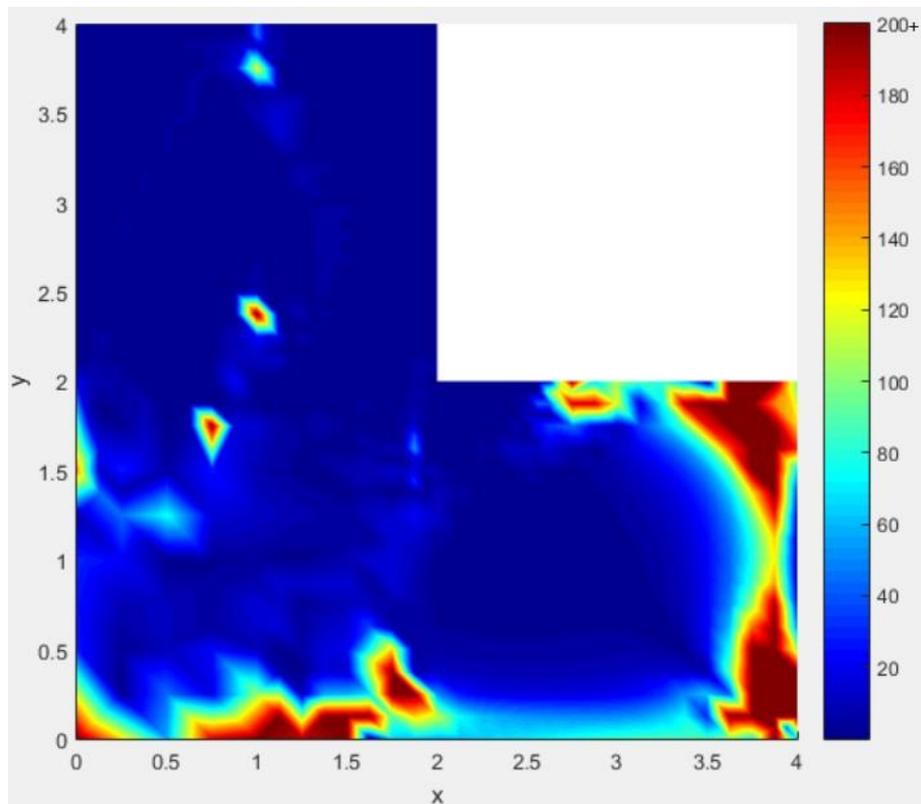


Figura 54: Distribuição de erro de tensões cisalhantes da estrutura em L

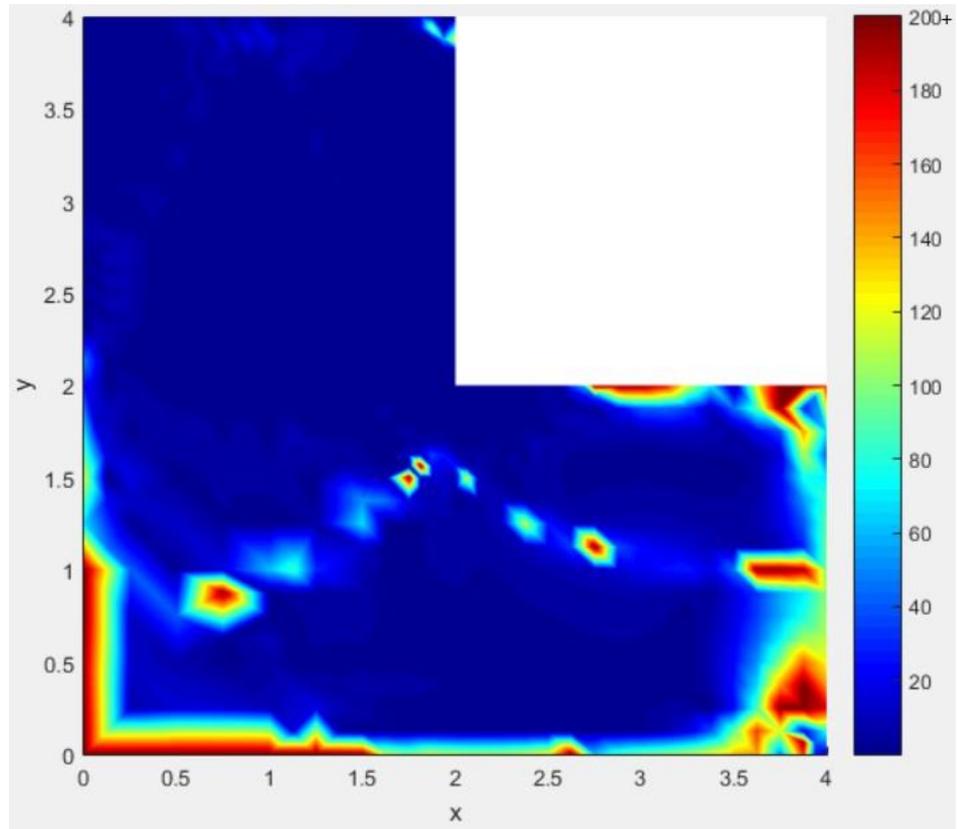


Figura 55: Histograma do erro de tensões em x da estrutura em L

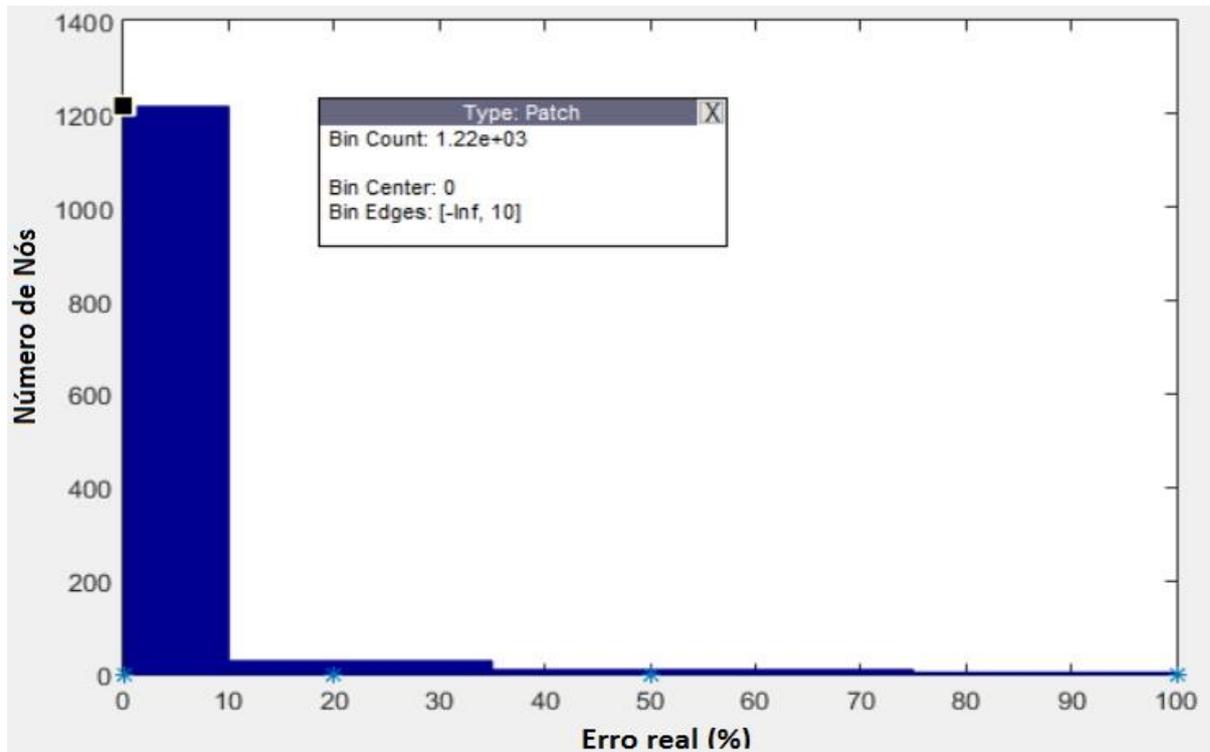


Figura 56: Histograma de erro de tensões em y da estrutura em L

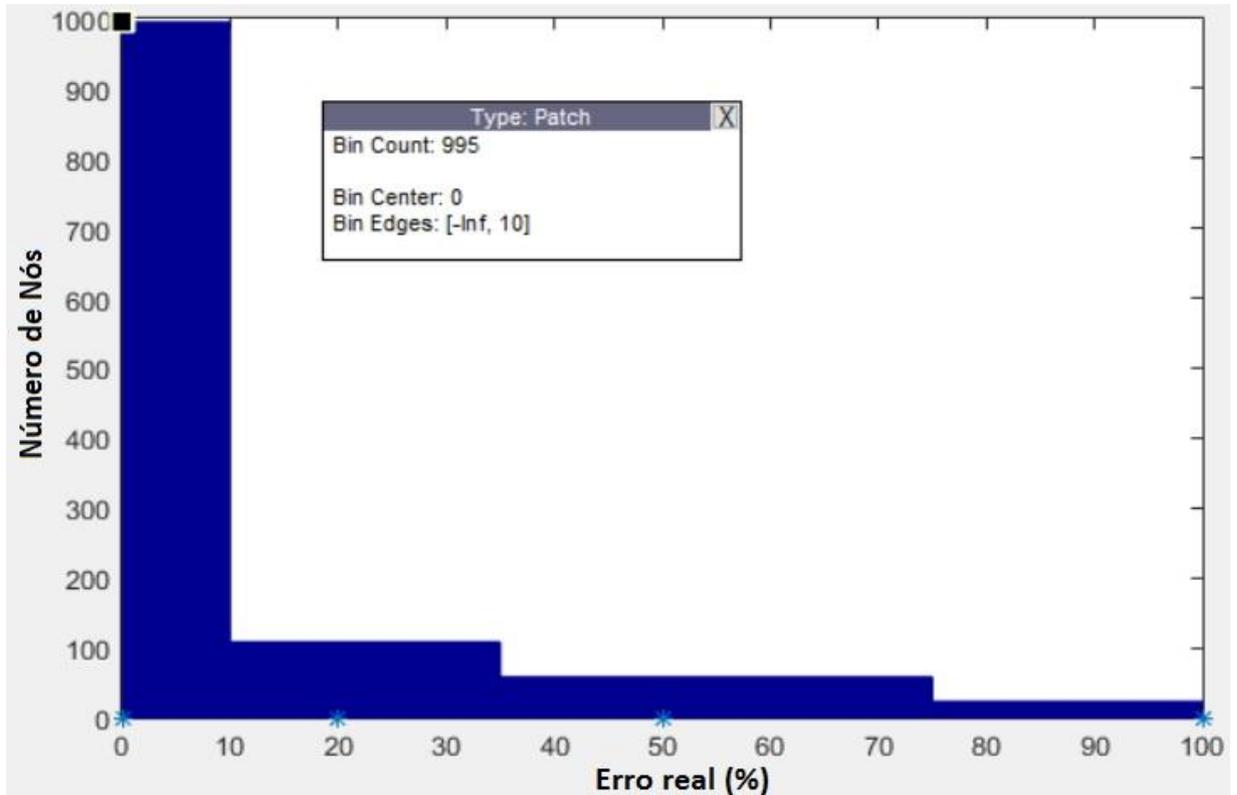
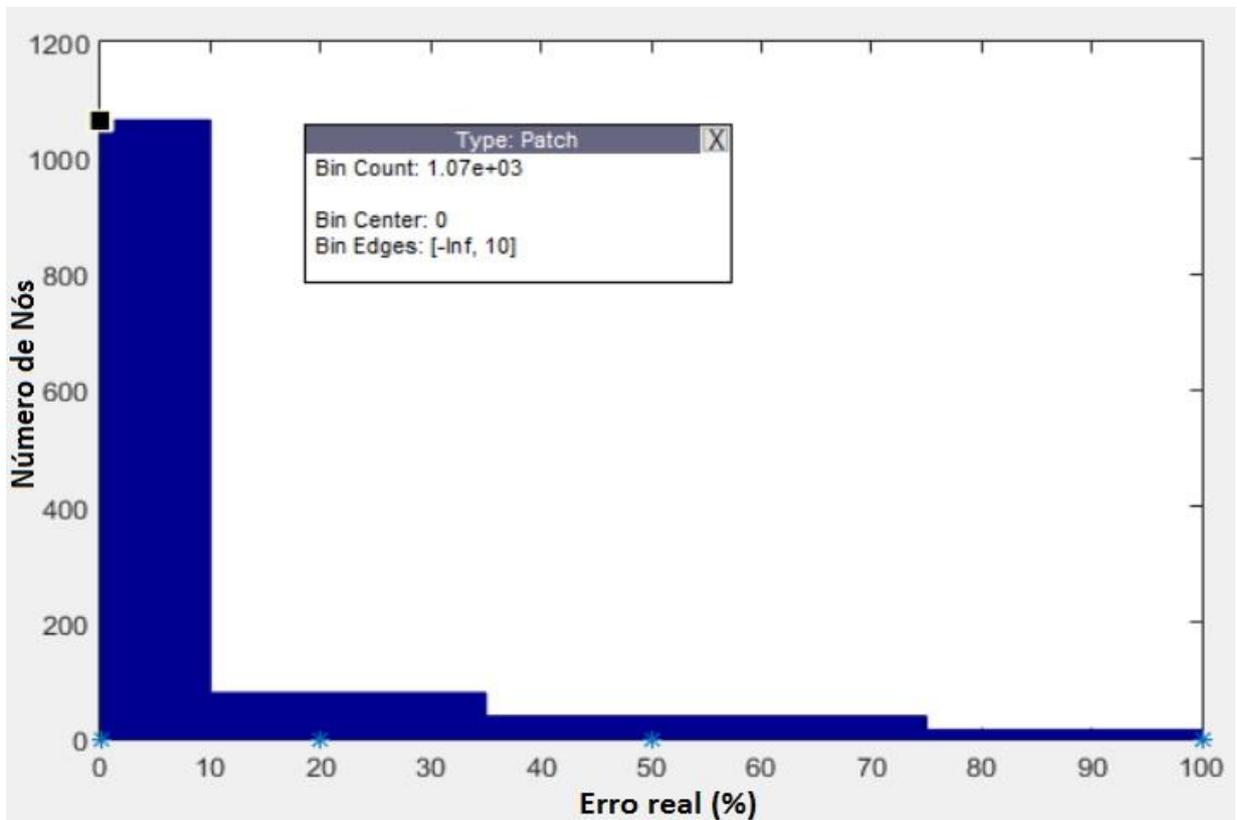


Figura 57: Histograma de erro de tensões cisalhante na estrutura em L

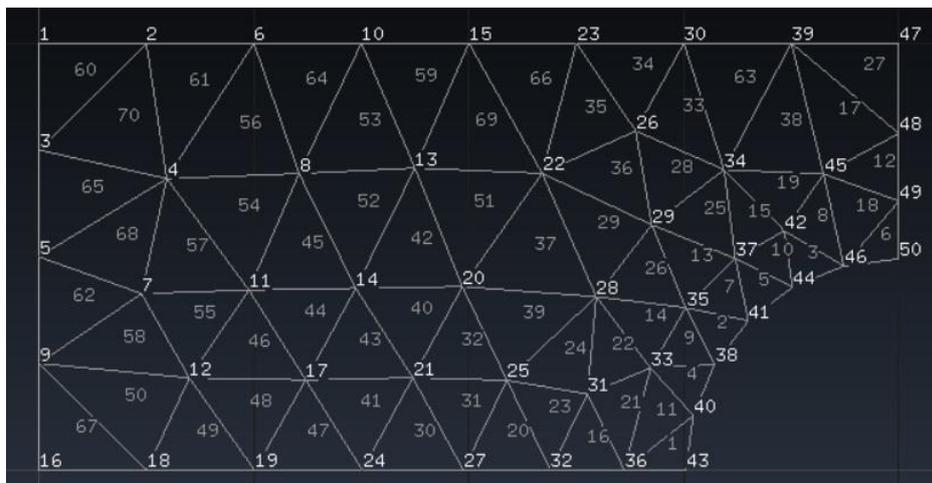


5.4 Chapa com Furo

O último caso a analisarmos com o código desenvolvido neste trabalho consiste numa chapa com furo circular. A chapa completa analisada possui 8m de comprimento por 4m de altura e um furo central circular de 1m de raio, no entanto, para redução de esforços computacionais, nos utilizamos da simetria do problema e analisamos aqui um quarto da placa com um quarto de círculo de furo. As medidas então ficaram sendo de 4m de comprimento, 2m de altura e um quarto de círculo de 1m de raio como furo. A força foi aplicada de maneira uniformemente distribuída na face lateral esquerda com um valor de 1kN/m na forma de tração da chapa. Os apoios para garantirem a simetria do problema foram de primeiro gênero aplicados tanto na face inferior da chapa, restringindo o movimento em y, quanto na face direita, restringindo o movimento em x. O material utilizado foi o aço, com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson de 0,3.

A malha inicial do problema foi gerada no GiD (figura 58). Para este caso não foi possível gerar uma malha inicial estruturada devido a geometria do problema, e o próprio gerador já se encarregou de fazer uma pequena distinção no tamanho dos elementos próximos ao furo, porém isso em nada interfere no trabalho do código desenvolvido.

Figura 58: Malha inicial da placa com furo. Desenvolvido com GiD



Para análise do problema adotamos como critério de parada do processo de refinamento adaptativo o erro relativo percentual em energia máximo de 4% ($\bar{\eta}=4\%$). Os resultados obtidos em cada iteração e os parâmetros que definem a qualidade do refinamento realizado estão

descritos na tabela 7. O deslocamento analisado na tabela refere-se à extremidade superior da face esquerda do domínio.

Tabela 7: Resultados do refinamento adaptativo da chapa com furo

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Índice de Efetividade	η (%)	Deslocamento x (extremidade) ($\times 10^{-8}$ m)
0	70	50	100	0,0224	140	44,13	$-3,28 \times 10^7$ *
1	280	169	338	0,00055	3,4375	7,61	-2,51
2	868	480	960	0,00031	1,9375	4,23	-2,53
3	2062	1107	2214	0,0002	1,25	2,71	-2,53

*O deslocamento da quina na primeira iteração foge a ordem de grandeza estabelecida para a coluna da mesma

A análise do refinamento uniforme também foi realizada e é apresentado na tabela 8 para fins de validação do refinamento adaptativo através da comparação do erro em norma de energia e do deslocamento da extremidade analisada, além de determinar a eficiência do método adaptativo.

Tabela 8: Resultado do refinamento uniforme da chapa com furo

Iteração	Número de elementos	Número de nós	NGL	Erro (norma de energia)	Deslocamento x (extremidade) ($\times 10^{-8}$ m)	η (%)
0	70	50	100	0,0224	$-3,28 \times 10^7$ *	44,13
1	280	169	338	0,00056	-2,51	7,61
2	1120	617	1234	0,0003	-2,53	4,09
3	4480	2353	4706	0,00016	-2,53	2,13

*O deslocamento da quina na primeira iteração foge a ordem de grandeza estabelecida para a coluna do mesmo

Para melhor análise desses resultados são mostrados os gráficos das figuras 59 e 60 que comparam o número de elementos versus o erro em norma de energia do domínio e o número de elementos versus o deslocamento da extremidade, respectivamente. Também neste caso podemos verificar pelo gráfico da figura 59 que para um mesmo número de elementos a malha adaptativa possui um menor erro, e na figura 60 constatamos que a convergência da malha adaptativa para o deslocamento ocorre mais rapidamente.

Figura 59: Número de elementos x Erro em norma de energia do domínio para chapa com furo

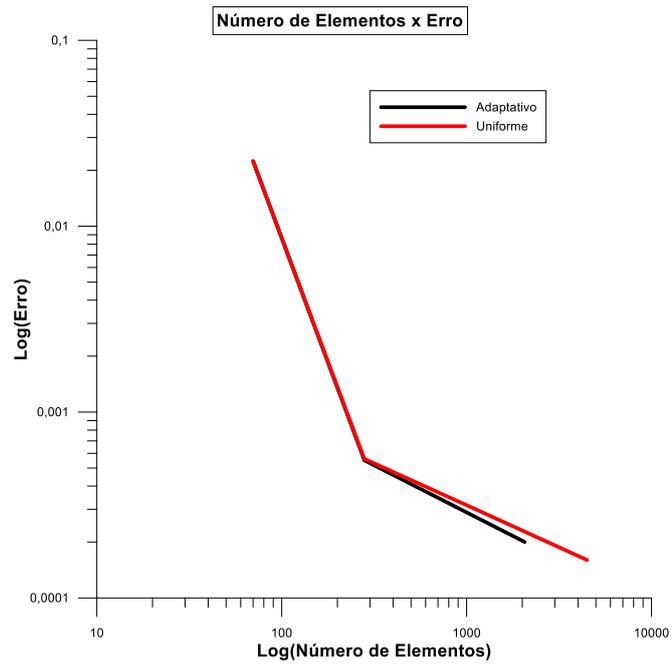
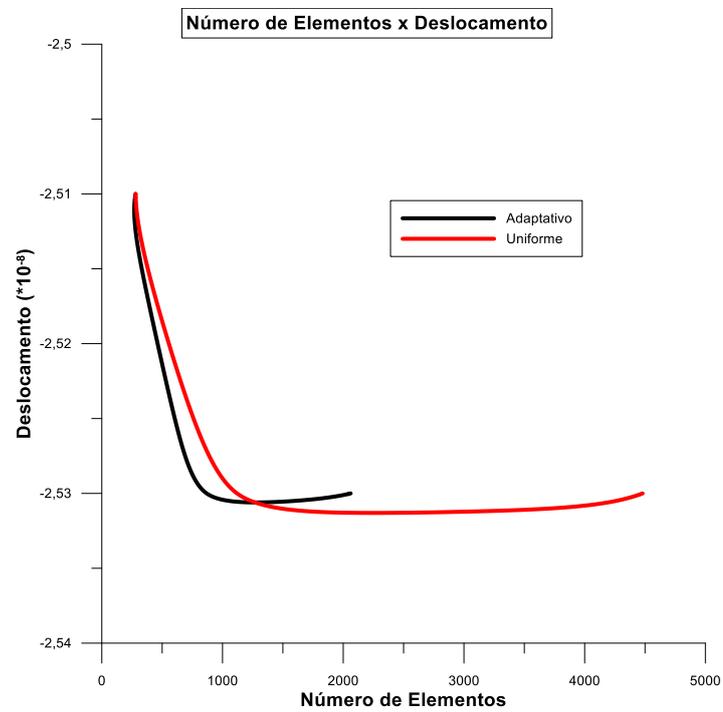


Figura 60: Número de elementos x Deslocamento da extremidade da chapa com furo



Na sequência apresentamos a evolução da malha (figura 61), a malha final gerada pelo código (Figura 62), as distribuições de tensões em x , y e cisalhantes (figuras 63, 64 e 65) e os deslocamentos em x e y (figuras 66 e 67).

Figura 61: Evolução da malha da chapa com furo

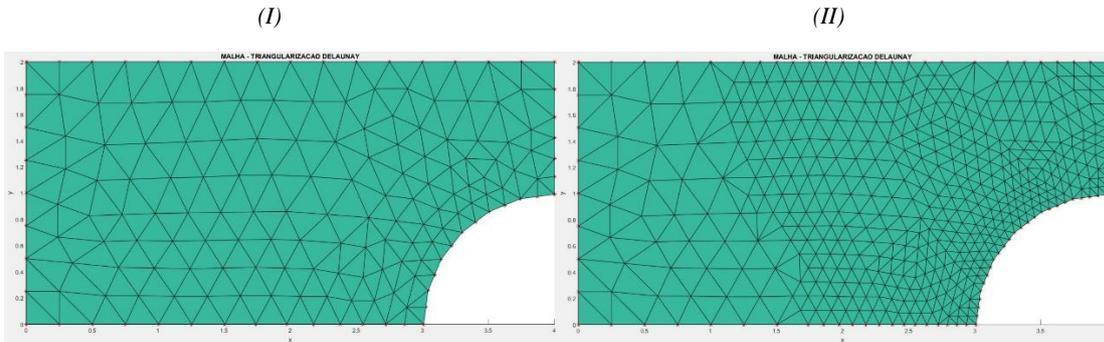


Figura 62: Malha final da chapa com furo

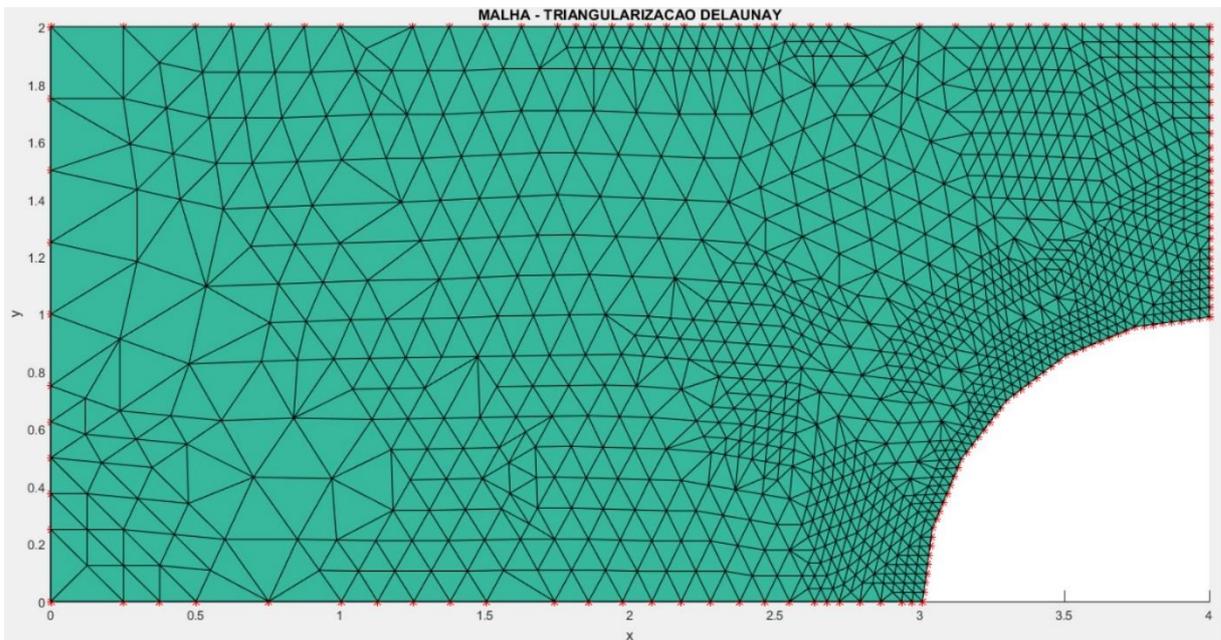


Figura 63: Distribuição de tensões em x da chapa com furo

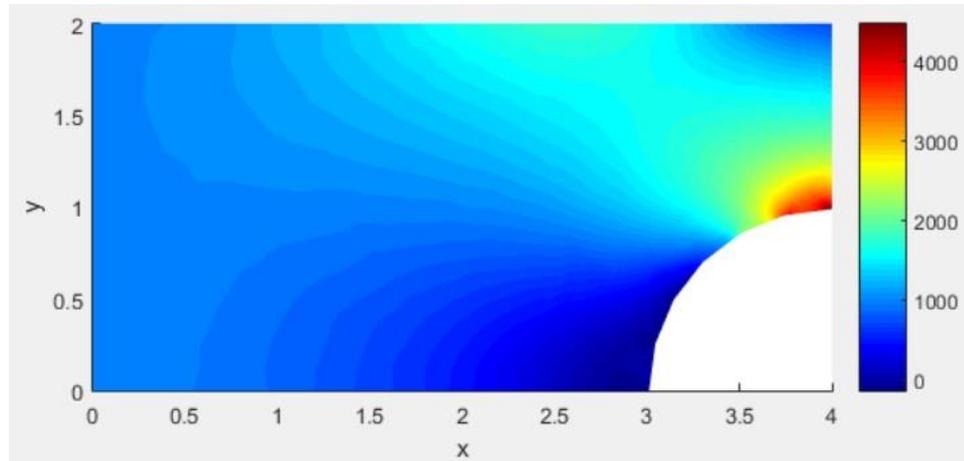


Figura 64: Distribuição de tensões em y da chapa com furo

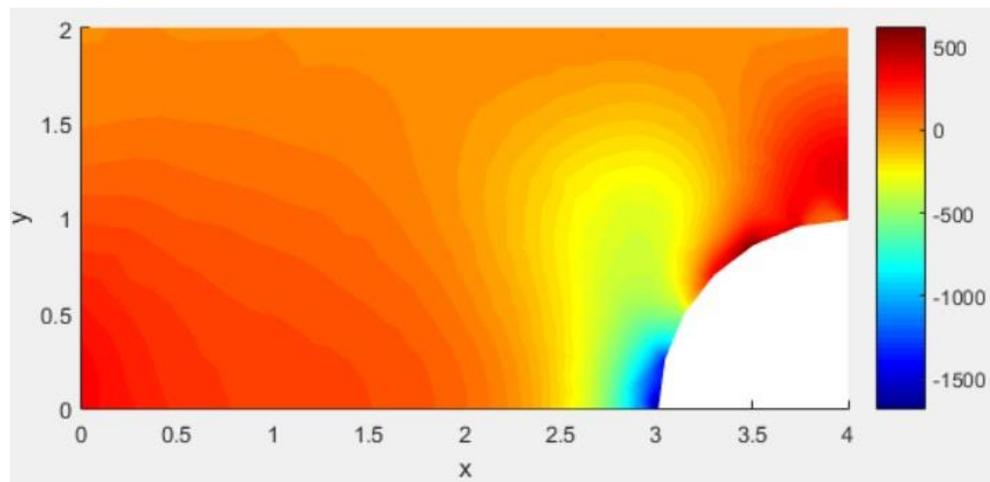


Figura 65: Distribuição de tensões cisalhante da chapa com furo

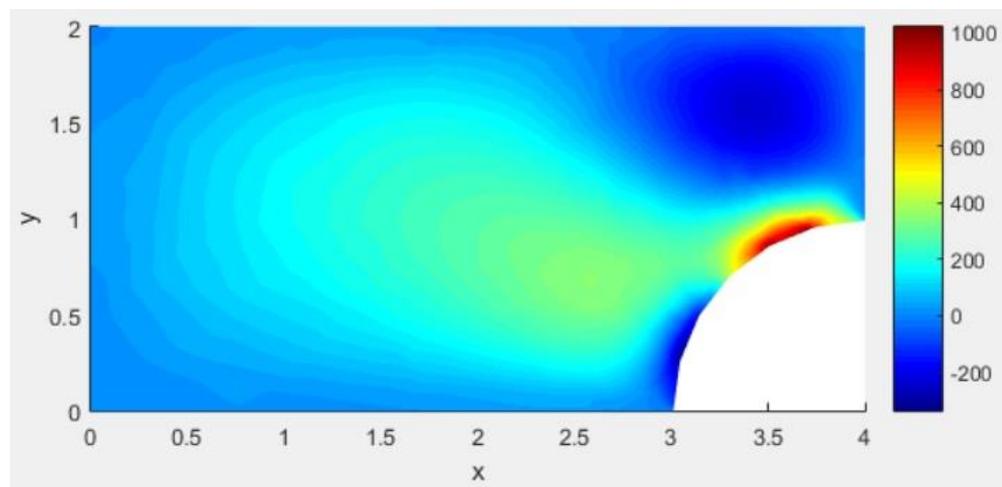


Figura 66: Distribuição de deslocamentos em x da chapa com furo

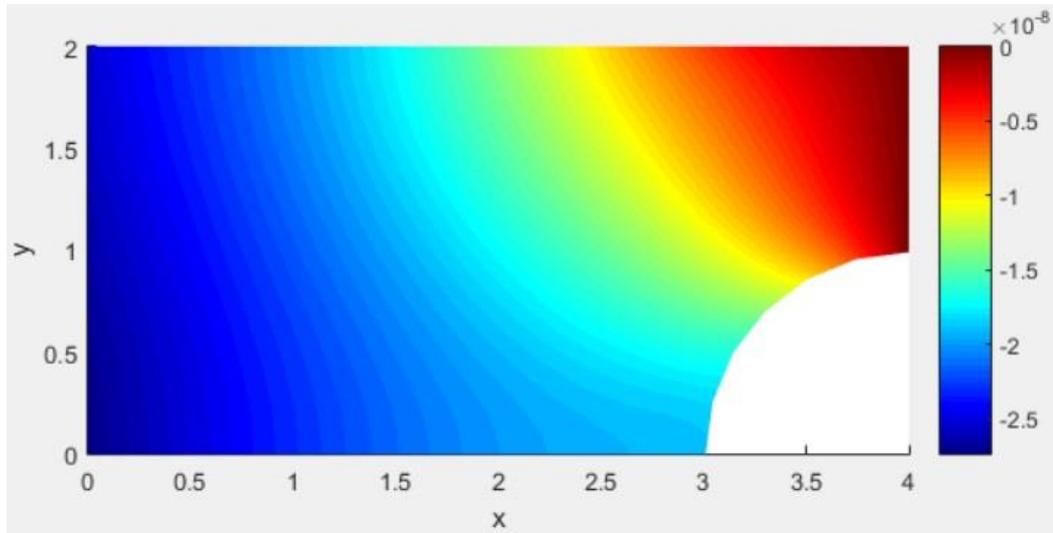
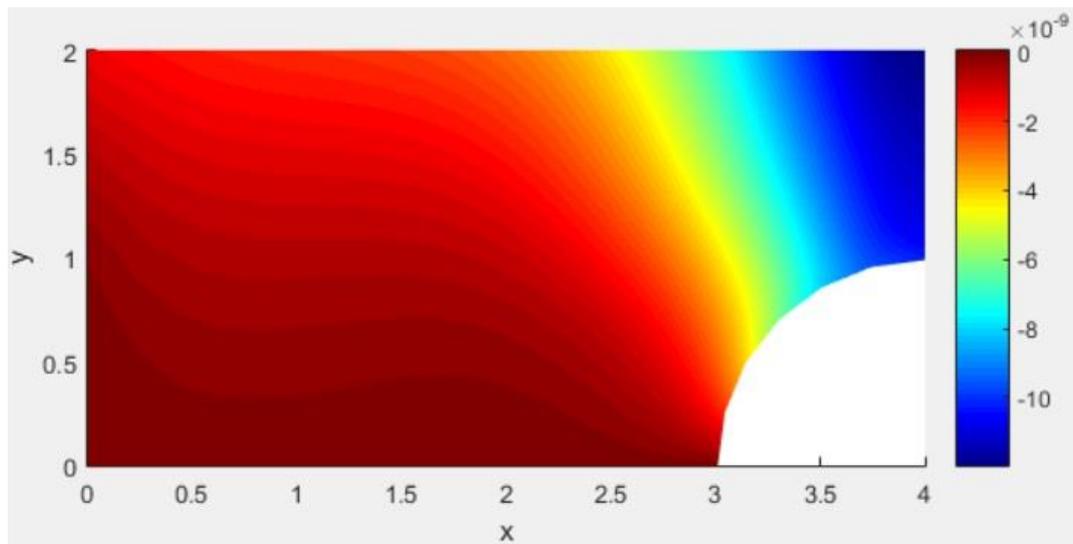


Figura 67: Distribuição de deslocamentos em y da chapa com furo



Para validação das tensões obtidas novamente estabelecemos uma comparação de erro real percentual entre as tensões nos nós da malha adaptativa quando calculadas na malha refinada adaptativamente e uniformemente, onde na última interpolamos os valores de tensões no domínio para calculá-las nos nós de interesse. Os resultados desta análise estão expressos na forma de distribuição de erro percentual (figuras 68, 69 e 70) e na forma de histogramas para melhor quantificação (figuras 71, 72 e 73).

Figura 68: Distribuição de erro de tensões em x da chapa com furo

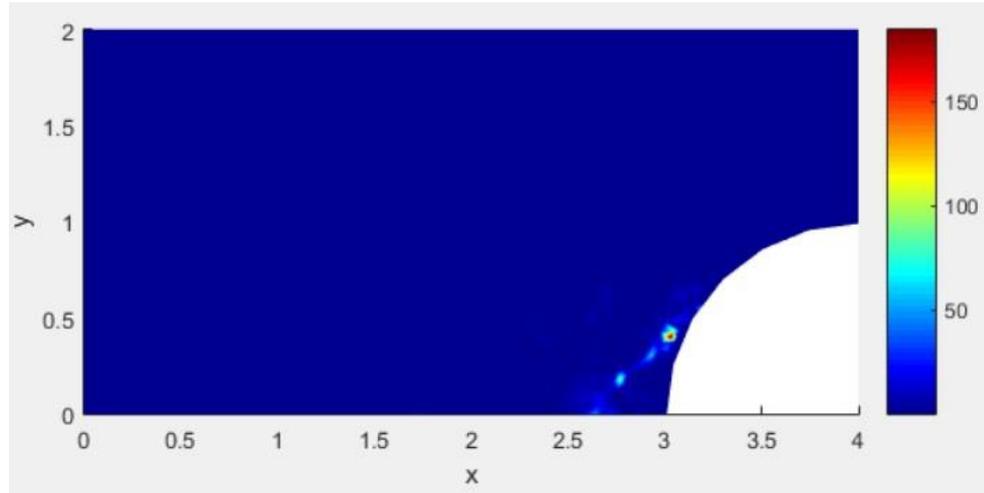


Figura 69: Distribuição de erro de tensões em y da chapa com furo

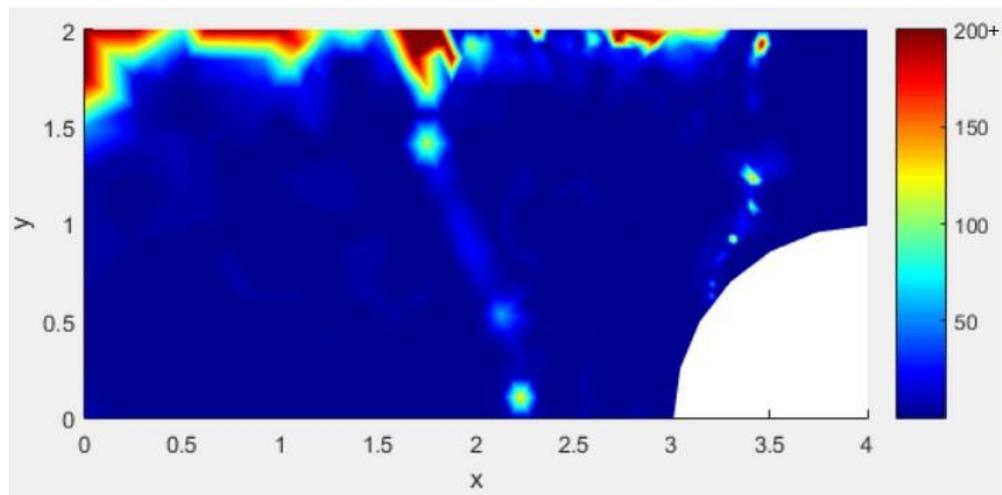


Figura 70: Distribuição de erro de tensões cisalhantes da chapa com furo

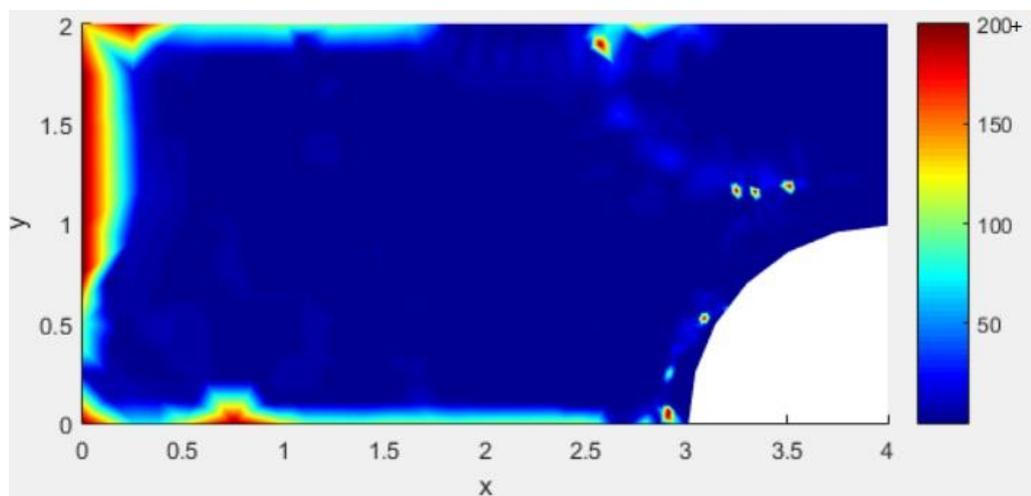


Figura 71: Histograma de erro de tensões em x da chapa com furo

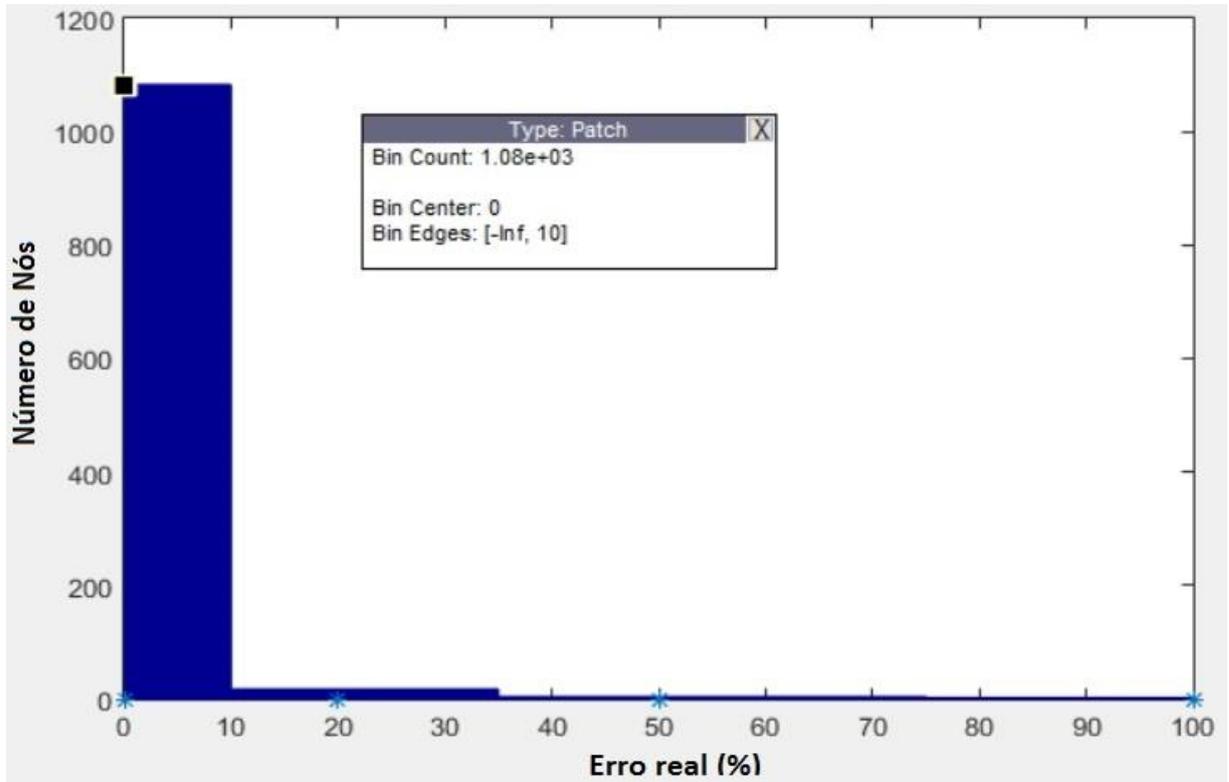


Figura 72: Histograma de erro de tensões em y da chapa com furo

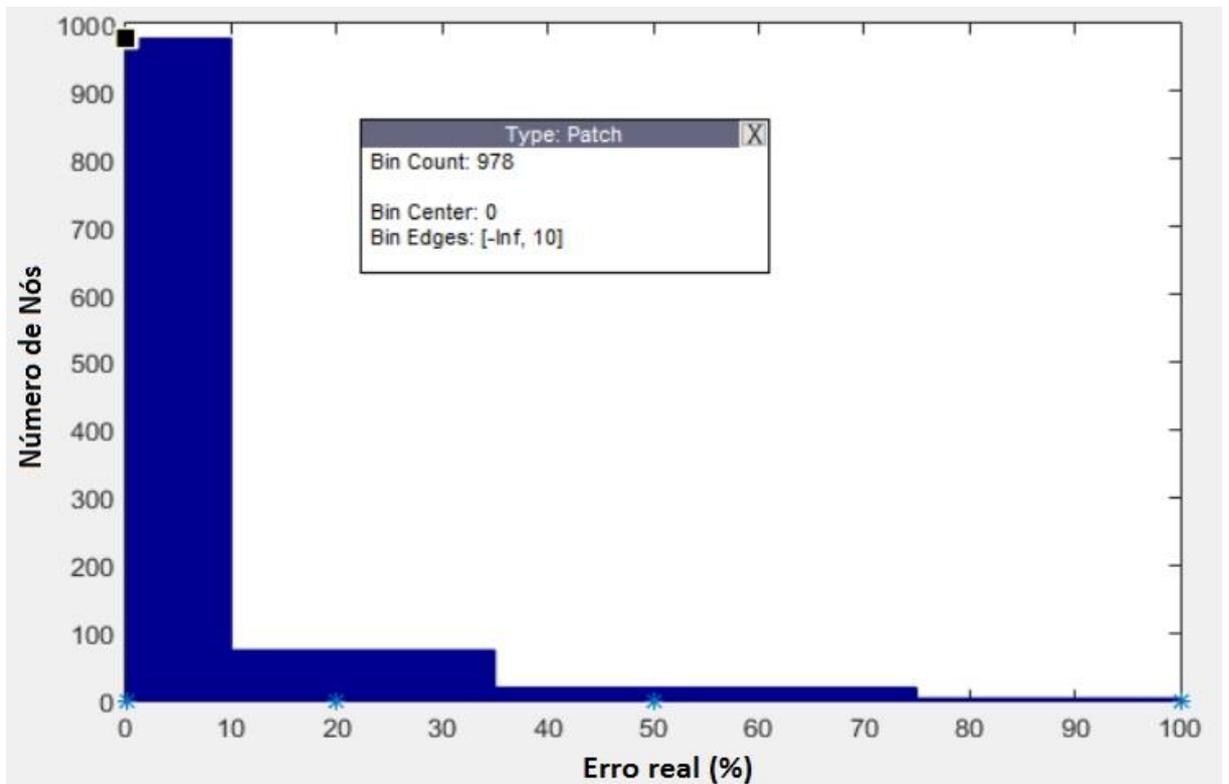
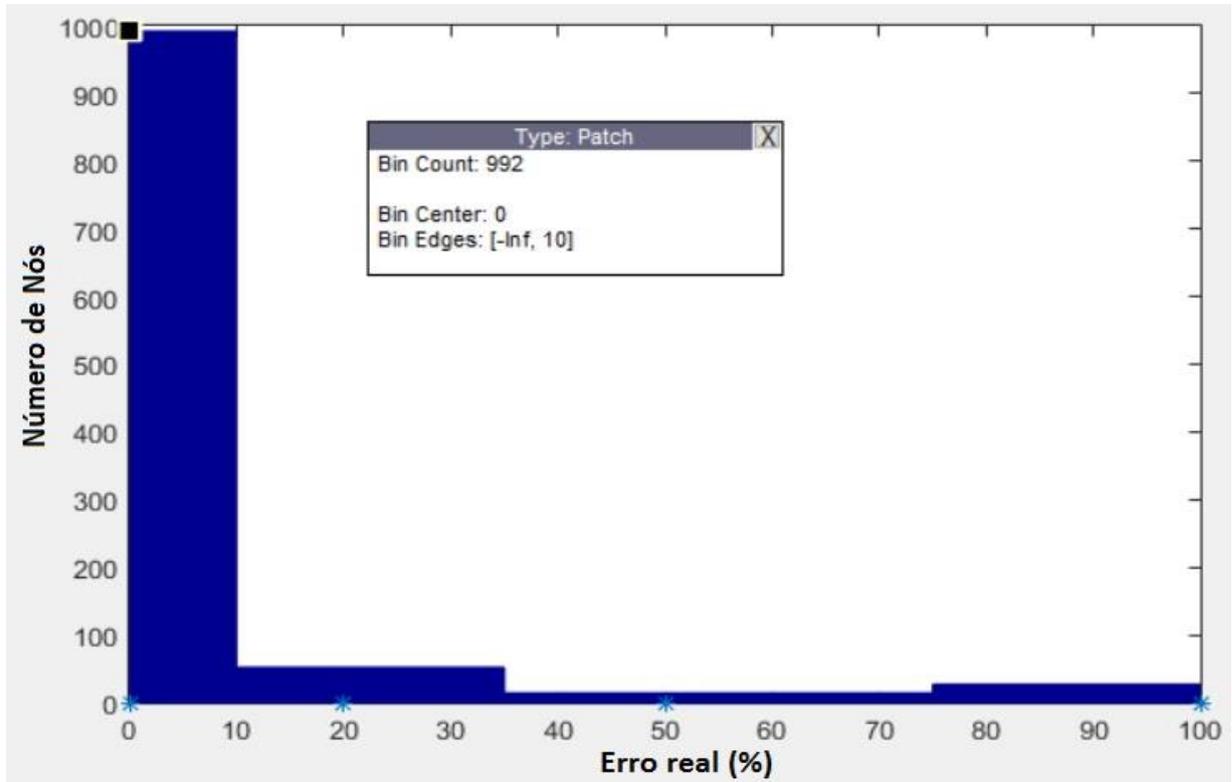


Figura 73: Histograma de erro de tensões cisalhante na chapa com furo



Pela análise dos histogramas pode-se concluir que 98% dos nós nas tensões em x, 88% dos nós nas tensões em y e 90% dos nós nas tensões cisalhante tiveram erro abaixo de 10%, resultado este considerado satisfatório, indicando assim a validade do método aplicado.

6 CONCLUSÃO

Após a análise de quatro exemplos que caracterizam bem o uso do código desenvolvido neste trabalho para diversas situações comuns no refinamento adaptativo, nós podemos traçar algumas conclusões relativas aos métodos, simplificações e recursos adotados, tendo como base os resultados obtidos e comentados na seção anterior.

Primeiramente podemos concluir com base nas tabelas e nos gráficos de número de elementos versus erro em norma de energia do domínio e número de elementos versus deslocamento de pontos adotados em cada caso, que o refinamento adaptativo apresenta grandes vantagens frente ao refinamento uniforme de todo o domínio, como foi proposto

inicialmente neste trabalho. Podemos afirmar isso baseado no fato de que o refinamento adaptativo entregou resultados muito próximos ao uniforme (tensões e deslocamentos) com um número bem inferior de elementos, chegando, no caso da viga parede, ao número de elementos utilizados no adaptativo representar 25% do utilizado no refinamento uniforme, o que significa uma grande economia de esforço computacional e custos.

No tocante a eficiência e qualidade do estimador adotado, aspecto esse indicado pelo índice de efetividade, verificamos que ele reduziu a cada iteração, mas não chegou tão próximo a 1 como desejado para um bom estimador, resultando num erro em norma de energia do domínio adaptativo maior que o do domínio refinado uniformemente. Isso pode ser devido a dois fatores: o número de iterações não foi suficiente ou o aparecimento de elementos distorcidos em sua forma. O número de iterações foi determinado no erro relativo percentual da norma de energia, significando que mais iterações levariam a um erro relativo menor e o surgimento de mais elementos, que poderiam vir a comprometer em parte a eficiência da malha adaptativa. Já os elementos com formatos distorcidos levam a surgimento de erros maiores e podem ter contribuído para o alto erro da norma de energia.

Quanto a qualidade da malha, podemos observar em alguns casos o surgimento mais acentuado de elementos distorcidos, citados anteriormente, como no caso da viga engastada em balanço. Esses elementos se formam a partir do surgimento de *hanging nodes* no processo de divisão dos elementos e são, de certa forma, inerentes ao método de refinamento que adotamos, a triangularização Delaunay do MATLAB. Isso poderia ter sido evitado ao se fazer uso de um gerador de malha, o qual, a cada iteração, forneceria uma malha completamente nova com os elementos distribuídos de maneira otimizada para que não surgissem essas distorções. Porém, por questão de simplicidade desejada para este trabalho, essa estratégia não foi considerada.

Por último, podemos fazer algumas considerações sobre os resultados de tensões alcançados e expressos nos gráficos de distribuição de tensões, distribuição de erros de tensões e histogramas. É notório o bom resultado obtido em todos os casos, com a grande maioria dos nós alcançando erros reais percentuais em comparação com a malha refinada uniformemente abaixo de 10%, no entanto houveram alguns picos de erros. Observando essas distribuições de erro e a região de ocorrência desses poucos nós com erro elevado, podemos perceber que para todos os casos eles se localizaram em regiões que correspondem a baixos valores de tensões, bastando para isso comparar a localização do pico de erro nas distribuições de erro com sua respectiva localização na distribuição de tensão, desde que comparando as distribuições de mesmas tensões. Por exemplo, podemos comparar os picos de erro de tensões normais na viga

engastada em balanço (figura 20) com a distribuição de tensões nessa mesma viga (figura 15), e perceber que os picos se localizam na linha neutra e próximo a extremidade livre da viga, as quais possuem tensões próximo a zero como é de conhecimento da literatura e é confirmado pela figura 15. Esses picos podem então ter sido originados pela divisão de números pequenos (próximos a zero) para determinação do erro percentual ou por uma falta de refinamento na região. Ambas as situações já eram esperadas, sendo a última uma característica do refinamento adaptativo verificada neste trabalho: o refinamento adaptativo tende a refinar regiões mais críticas, sendo elas demonstradas nos exemplos práticos pelo engaste (itens 5.1 e 5.2), quinas (item 5.3) e furos (item 5.4), ou seja, é natural que em regiões de baixo valor de tensões o refinamento seja mais pobre e os resultados contendo um erro mais elevado. Sendo assim, consideramos válidos todos os resultados de tensões bem como de deslocamentos obtidos neste trabalho, pois de acordo com a equação (29) é necessário ter deslocamentos corretos para que se tenha tensões corretas.

Desta forma podemos concluir que o presente trabalho, apesar de suas limitações, atingiu os objetivos propostos e alcançou resultados satisfatórios nas análises desenvolvidas.

REFERÊNCIAS

AUGARDE, Charles E.; DEEKS, Andrew J. **The Use of Timoshenko's Exact Solution for a Cantilever Beam in Adaptive Analysis**. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2008. Vol. 44, p. 595-601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X08000140>>. Acesso em: 19 jun. 2017.

COOK, Robert D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4ª. ed. John Wiley & Sons, 2002. 662 p. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/document/212457647/2002-Cook-Et-Al-Concepts-and-Applications-of-Finite-Element-Analysis-4ed>>. Acesso em: 01 jul. 2017.

COOK, Robert D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**. John Wiley & Sons, 1995. 307 p.

GID. *The personal pre and postprocessor*: version 12.0.9. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering, 2008.

KRISHNAMOORTHY, C. S.; UMESH, K. Rajeshirke. **Adaptive Mesh Refinement for Two-Dimensional Finite Element Stress Analysis**. *Computers & Structures*, Great Britain, 1993. Vol. 48, p. 121-133.

KWON, Young W.; BANG, Hyochoong. **The Finite Element Method Using MATLAB**. CRC Press, 1997. 519 p.

LINS, Rafael Marques. **Estimador de Erro a Posteriori Baseado em Recuperação do Gradiente para o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2011. 94 p. Mestrado (Engenharia de Estruturas)- USP, São Carlos/SP, 2011.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method**. 4ª. ed. Thomson, 2007. 808 p.

MATLAB. *Matlab*: version r2015a. Massachusetts: MathWorks, 2015.

REBOREDO, Rafaell Rocha. **Refinamento Adaptativo Tipo H Aplicado à Formulação de Elasticidade Plana do Método dos Elementos de Contorno Dual**. 2015. 116 p. Mestrado (Integridade de Materiais de Engenharia)- UnB, Brasília/DF, 2015.

SILVA, Jéderson da. **Análise de Estimadores de Erro A Posteriori Aplicados Ao Método dos Elementos Finitos Utilizando Refino H-Adaptativo**. 2015. 150 p. Mestrado (Engenharia Mecânica)- UFPR, Curitiba/PR, 2015.

SILVA, Jéderson da et al. **Análise de Diferentes Estimadores de Erro a Posteriori Aplicados a Problemas Bidimensionais Utilizando Refino H-Adaptativo**. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, 2014, Caldas Novas/GO.

BANGERTH, Wolfgang. **MATH 676: Finite Element Methods in Scientific Computing Course**. Disponível em: <<http://www.math.colostate.edu/~bangerth/videos.html>> . Acesso em: 27 abr. 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. . **The Finite Element Method**. 5^a. ed. Butterworth-Heineman, 2000. 618 p. v. 1.

