



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIA - CTG**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**WILLIAM OBEL**

**DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO EM**  
**VIGAS COM FIBRAS METÁLICAS**

**Recife**  
**2016**

**WILLIAM OBEL**

**DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO EM  
VIGAS COM FIBRAS METÁLICAS**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC),  
apresentado ao Curso de Engenharia  
Civil do Centro de Tecnologia e  
Geociências da Universidade Federal de  
Pernambuco, como parte das exigências  
para a obtenção do Título de Engenheiro  
Civil.

**Orientador: Prof. Dr. Paulo de Araújo  
Regis**

**Recife  
2016**

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

O12d Obel, William.  
Dimensionamento de estruturas de concreto armado em vigas com  
fibras metálicas / William Obel. - Recife: O Autor, 2016.  
65 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Araújo Regis.  
TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.  
Departamento de Engenharia Civil, 2016.  
Inclui Referências e Anexos.

1. Engenharia Civil. 2. Concreto armado. 3. Concreto armado com  
fibras metálicas. 4. Esforço cortante. 5. Momento Fletor. 6. Estados  
limites. 7. Analise econômica. I. Regis, Paulo de Araújo. (Orientador).  
II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2016-45

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS - CTG**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**A comissão examinadora da defesa do Trabalho de Conclusão de Curso**

**DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO EM**  
**VIGAS COM FIBRAS METÁLICAS**

Defendida por: William Obel

Considera a candidato

Recife, 18 de Fevereiro de 2016

---

Prof. Dr. Paulo de Araújo Regis - UFPE  
(Orientador)

---

Prof. Bernardo Horowitz - UFPE  
(Examinador interno)

---

Prof. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires - UFPE  
(Examinador interno)

## **AGRADECIMENTO**

Agradeço a Deus Pai primeiramente pela sua graça derramada em mim por meio do seu filho Jesus Cristo sem a qual não teria a capacidade de desenvolver este trabalho que serve como prova final para a minha formação de bacharel em Engenharia Civil. Em seguida, a inúmeras pessoas que me deram apoio para completar esse trabalho.

### **A minha família:**

Minha mãe, apesar de estar longe mim, não deixou de manifestar o seu amor, seu carinho, seu cuidado, seus conselhos para comigo.

Minha segunda mãe (madrasta), que também está longe, mas não deixou de me amar, de cuidar de mim e me dar os conselhos que preciso.

Minhas irmãs Lisa Vandal e Amanda Aubel, que sempre me atenderam nas horas difíceis, tanto moralmente, quanto financeiramente.

Meu cunhado Wilton Saint Fort, que sempre me ajudou moralmente, com conselhos e financeiramente.

Minha Tia Ismani Aladin, que sempre me ajudou com conselhos e economicamente.

Todos os meus outros irmãos e irmãs que me apoiaram durante todos esses anos de estudos no Brasil apesar de estar longe.

### **Aos professores:**

Ao meu professor orientador deste trabalho, Paulo de Araújo Regis, pela sua total disponibilidade e ajuda nas pesquisas, interpretações de textos, compreensão dos assuntos tratados neste trabalho e a elaboração do mesmo.

Ao professor Tiago Anselmo de Carvalho Pires, por aceitar fazendo parte da banca examinadora deste trabalho e em particular por estar sempre disponível e atendendo aos meus pedidos de ajuda.

Ao professor Bernardo Horowitz pela sua disponibilidade e por aceitar de fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

Ao professorIVALDO DÁRIO DA SILVA PONTES FILHO, meu orientador de iniciação científica, que sempre está disponível e atendendo aos meus pedidos de ajuda.

**À igreja:**

Ao ministério da Igreja Evangélica Assembleia de Deus, com o pastor presidente Ailton José Alves. Ao meu coordenador da área 44, ao meu presbítero, aos meus diáconos, minha dirigente da campanha evangelizadora, a cada obreiro em geral, a mocidade do Bom Pastor, a mocidade da área 44, a todos os meus irmãos em Cristo Jesus, pelas orações, amor e carinho.

**Aos meus colegas:**

Eu nunca tive colegas tão fofos, amorosos, carinhosos, compreensivos, ajudadores como esses que passaram cinco anos comigo. Eu rogo Deus pela vida de cada um e só tenho a agradecer a Deus por ter eles como colegas, amigos e irmãos.

**Aos meus amigos:**

A minha amiga Claudia, que Deus colocou no meu caminho durante todos esses anos de estudo para me ajudar, me aconselhar, me encorajar e sem ela, não seria possível completar a apresentação deste trabalho.

A todos os meus amigos em geral, que sofreram comigo nas horas da angustia, que se alegraram comigo nas horas de felicidade, que manifestaram seu amor, seus cuidados, seus carinhos para comigo, que me apoiaram em todas as áreas da vida.

**E finalmente:**

A minha namorada, Valdilene, pela sua paciência, seu apoio, sua compreensão, seus conselhos, sua amizade, seu carinho e seu grande amor por mim, que sempre esteve perto de mim nas horas de estresses e difíceis durante a realização deste trabalho.

“Vós me chamais o Mestre e o Senhor e dizeis bem; porque eu o sou.  
Ora, se eu, sendo o Senhor e o Mestre, vos lavei os pés, também vós deveis lavar os pés uns  
aos outros. «Porque eu vos dei o exemplo, para que, como eu vos fiz, façais vós também»”

(Bíblia Sagrada, João, capítulo 13 versículos 13, 14 e 15)

## RESUMO

O emprego das fibras tem sido utilizado para melhorar diversas propriedades do material, a depender do tipo e das dimensões das mesmas. O maior benefício proporcionado pela presença das fibras está relacionado ao comportamento pós-fissuração da matriz, pois são responsáveis pela redução da propagação das fissuras e pelo aumento da tenacidade do material. No entanto, a obtenção de um método para o dimensionamento das estruturas de concreto armado com adição de fibras metálicas é um grande desafio para a área da construção civil. Neste sentido, nesse estudo, serão realizados alguns dimensionamentos de vigas de concreto armado, reforçadas com fibras metálicas, com objetivo de obter o melhor entendimento a respeito do comportamento das estruturas e as suas vantagens. Além de analisar economicamente sua viabilidade, também foram utilizadas as recomendações sugeridas pela Norma Brasileira – NBR 6118 para verificação dos estados limites. Os resultados obtidos foram satisfatórios, e permitiram ser analisados em três cenários distintos, o primeiro deles foi desconsiderado a viabilidade econômica, pois teve como finalidade apresentar as características mecânicas para a contribuição na melhoria da qualidade da viga em termos de resistência e durabilidade ao substituir uma parte da armadura transversal pelas fibras metálicas. O segundo e terceiro cenário foram considerados tanto a viabilidade econômica quanto as características mecânicas, no entanto no segundo cenário devido maior adição de fibras metálicas foi considerado economicamente inviável, tendo em vista o atual valor do Kg da fibra metálica no mercado brasileiro ser três vezes maior que o Kg do aço. No entanto, ambos cenários apresentaram boas condições no seu comportamento mecânico principalmente em termos de momento fletor resistente. De maneira geral, a adição das fibras nas estruturas quando apropriadamente projetada são muito eficazes, e pode trazer grandes benefícios as estruturas de concreto e ser considerado economicamente viável quando a quantidade de fibras para resistir aos esforços solicitantes é menor do que a quantidade de aço como apresentou no terceiro cenário.

Palavras-chave: Concreto armado. Concreto armado com fibras metálicas. Esforço cortante. Momento Fletor. Estados limites. Análise econômica.

## ABSTRACT

The use of fibers has been used to improve various properties of the material, depending on the type and dimensions of same. The greatest benefit provided by the presence of fibers is related to the post-matrix cracking behavior, because they are responsible for reducing the propagation of cracks and an increase in toughness of the material. However, obtaining a method for the design of reinforced concrete structures with the addition of metallic fibers is a major challenge for the field of construction. This feeling, this study will be realized some dimensioning of reinforced concrete beams reinforced with metal fibers, in order to get a better understanding about the behavior of structures and their advantages. In addition to economically analyze its viability, they have also used the recommendations suggested by the Brazilian Norm - NBR 6118 for verification of limit states. The results were satisfactory and allowed to be analyzed in three different scenarios, the first of them was disregarded the economic viability, as was intended to provide the mechanical properties for the contribution to the improvement of the beam quality in terms of strength and durability to replace a part of the transverse reinforcement by metallic fibers. The second and third scenario were considered both the economic viability as the mechanical characteristics, however in the second scenario because of higher addition of metallic fibers was considered uneconomical, given the current value of kg of metal fiber in the Brazilian market is three times higher that Kg of steel. However, both scenarios presented good conditions on mechanical behavior especially in terms of bending moment resistant. In general, the addition of the fibers in structures when properly designed are very effective and can greatly benefit concrete structures and considered economically viable when the amount of fibers to resist the internal forces is smaller than the amount of steel as presented in the third scenario.

Keywords: Reinforced concrete. Reinforced concrete with metallic fibers. Shear. Flexion Momentum. limit states. Economic analysis.

## LISTA DE ILUSTRÇÕES

### FIGURAS

Figura 1 – Tipos de fibras metálicas no mercado brasileiro.....	17
Figura 2 – Tipos de fibras metálicas no mercado Francês.....	17
Figura 3- Comportamento de um bloco de concreto submetido à tração direta.....	19
Figura 4 – Papel das fibras metálicas no controle da fissuração do concreto.....	20
Figura 5 – Comportamento do arrancamento de uma fibra.....	21
Figura 6 – Absorção do esforço cortante através de uma seção fissurada.....	24
Figura 7 – Abertura de fissura diagonal em viga de seção transversal retangular.....	25
Figura 8 – Abertura de fissura em viga de seção transversal T.....	26
Figura 9 – Comportamento em flexão de viga com seção transversal T.....	39

### QUADROS

Quadro 1. Dados utilizados no dimensionamento do terceiro cenário.....	40
Quadro 2. Dados utilizados no dimensionamento do segundo cenário.....	42
Quadro 3. Dados utilizados no dimensionamento do primeiro cenário.....	44

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o primeiro cenário.....	41
Tabela 2 – Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o segundo cenário.....	43
Tabela 3 - Análise econômica para o segundo cenário.....	44
Tabela – 4 Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o terceiro cenário.....	45
Tabela 5 - Análise econômica para o terceiro cenário.....	46

## SIMBOLOGIA

### ALFABETO LATINO E SIGLAS

AFGC – Associação Francesa de Engenharia Civil

Ac – Área bruta de concreto em relação a alma

Acr – Área da região de envolvimento

Af – Área da mesa

A\*s – Área de aço longitudinal substituída pelas fibras

Asw - Área de armadura transversal

A<sub>s</sub> - Área da armadura tracionada

Aw – Área da parte comprimida da nervura

b<sub>f</sub> - Largura da mesa

b<sub>w</sub> – Espessura da alma da viga

C - Compressão;

d - Altura útil da seção;

E - Engrenamento dos agregados do concreto ao longo das fissuras;

E<sub>s</sub> – Módulo de elasticidade do aço

E<sub>cs</sub> – Módulo de elasticidade do concreto

f<sub>ck</sub> – Resistência características do concreto

f<sub>cd</sub> – Resistência características de cálculo do concreto

f<sub>yk</sub> – Resistência características do aço

f<sub>yd</sub> – Resistências características de cálculo do aço

f<sub>tj</sub> – Resistência a tração do concreto aos 28 dias

h - Altura total da seção

h<sub>f</sub> – Espessura da mesa da viga

I<sub>c</sub> – Inércia da seção bruta

I<sub>2</sub> – Inércia da seção nos estados de fissuração

I<sub>eq</sub> – Inercia equivalente

l = comprimento da viga

M<sub>a</sub> – Momento fletor solicitante para a combinação quase permanente

M<sub>d</sub> - Momento fletor solicitante de cálculo

M<sub>k</sub> – Momento fletor solicitante

M<sub>r</sub> – Momento de fissuração

$M_u$  – Momento fletor último

$q_k$  – Carga solicitante

$S$  – Espaçamento entre os estribos

$V_c$  – Esforço cortante resistente pela estrutura de concreto

$V_d$  - Esforço cortante solicitante de cálculo

$V_E$  – Parcela de esforço cortante resistente pelos agregados

$V_f$  – Parcela de esforço cortante resistente pelas fibras

$V_k$  – Esforço cortante de solicitação

$V_{L \perp}$  - Parcela de esforço cortante resistente pelo efeito de rebite da armadura de flexão

$V_u$  – Esforço cortante último

$x$  - Posição da linha neutra

$x_b$  – Profundidade da linha neutra nas condições balanceada

$x_2$  – Profundidade da linha neutra no estágio II

$y_t$  – Posição da linha neutra em relação as fibras tracionadas da seção transversal

$w$  – Abertura de fissura

$Z_f$  – Distância do centróide de  $A_f$  até a armadura tracionada

$Z_w$  – Distância do centróide de  $A_w$  até a armadura tracionada

## **ALFABETO GREGO**

$\alpha_e$  – Parâmetro empírico que relaciona os módulos de elasticidades

$\beta_f$  – Parâmetro empírico que relaciona a espessura da alma com a altura útil da seção

$\beta_w$  – Parâmetro empírico que relaciona a espessura da alma com a largura da mesa

$\xi$  – Parâmetro empírico que relaciona a posição da linha neutra com a altura útil da seção

$\xi(t)$  – Efeitos diferidos no tempo

$\Delta\tau$  – Parâmetro empírico utilizado no modelo de cálculo da parcela contribuinte da estrutura para o concreto armado com fibras metálicas

$\theta$  – Inclinação da biela de concreto

$\mu$  – Momento reduzido

$\rho_t$  – Taxa de armadura transversal

$\rho_L$  – Taxa de armadura longitudinal

$\rho_r$  – Taxa de armadura em relação à região de envolvimento

$\sigma_c$  – Tensão de compressão no concreto

$\sigma_f$  - tensão pós-fissuração em tração uniaxial do concreto de fibras

$\sigma_s$  - tensão de tração no aço

$\tau_{sd}$  – tensão de cisalhamento solicitante de cálculo

$\tau_c$  – Parcela de tensão de cisalhamento resistente pela estrutura de concreto

$\tau_{sw}$  – Parcela de tensão de cisalhamento resistente pelas armaduras transversais

$\psi_1$  – Fator de redução de combinação freqüente para o estado-limite de serviço

$\psi_2$  – Fator de redução de combinação quase permanente para o estado-limite de serviço

$\delta_i$  – Deformação inicial

$\delta_t$  – Deformação total

$\delta_{adm}$  – Deformação admissível

$\Phi$  – Diâmetro das armaduras

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>16</b>
2.1 FUNCIONAMENTO DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS METÁLICAS .	16
2.2 IMPORTÂNCIA DAS FIBRAS METÁLICAS .....	17
2.3 TIPOS DE FIBRAS METÁLICAS .....	17
2.4 APLICAÇÕES, FABRICAÇÕES, FUNCIONAMENTOS E PROPRIEDADES .....	18
2.4.1 Aplicações.....	18
2.4.2 Fabricações das estruturas reforçadas com fibras metálicas.....	19
2.4.3 Propriedades físicas.....	19
2.4.4 Funcionamentos de uma fibra.....	21
2.4.5 Propriedades mecânicas.....	22
2.5 PRINCÍPIO DE DIMENSIONAMENTO.....	23
<b>3.OBJETIVOS .....</b>	<b>28</b>
3.1 OBJETIVO GERAL .....	28
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	29
3.3 JUSTIFICATIVAS .....	29
<b>4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....</b>	<b>29</b>
<b>5. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>39</b>
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>47</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>48</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>49</b>
ANEXO A.....	49
ANEXO B.....	54
ANEXO C.....	59
ANEXO D.....	64



## 1. INTRODUÇÃO

O concreto, além do seu aspecto econômico (baixo custo), a sua variedade de forma, sua versatilidade (fácil manejo e produção), sua alta resistência e durabilidade, é o material mais utilizado no mundo da construção de edifícios, galpões, pisos industriais, obras hidráulicas e de saneamento (barragens, tubos, canais, reservatórios, estações de tratamento etc.), rodovias (pavimentação de concreto, pontes, viadutos, passarelas, túneis, galerias, obras de contenção etc.), estruturas diversas (elementos de cobertura, chaminés, torres, postes, mourões, dormentes, muros de arrimo, piscinas, silos, cais, fundações de máquinas etc.).

Agrega-se a esse, os progressos atuais deste material (Concreto de Alto Desempenho) fizeram aumentar a curiosidade dos pesquisadores e dos engenheiros na procura de um melhor entendimento sobre o seu comportamento e as suas características mecânicas inclusive a patologia inerente.

Um dos aspectos relevantes no comportamento das estruturas de concreto armado é a fissuração. No intuito de melhorar esse, os projetistas e construtores estão à procura de novas tecnologias e acompanham as pesquisas, os experimentos e os lançamentos de novos produtos no mercado da construção civil. Uma das práticas empregada nos dias de hoje, é o reforço do concreto com fibras poliméricas (de polipropileno, poliéster, polietileno e de poliamida Kevlar), fibras vegetais, fibras minerais (de vidro, de carbono e de asbesto) e fibras metálicas que é substancial para o concreto armado. Todavia, poucos são os métodos expostos e acessíveis para o dimensionamento e a análise nos estados limites de tais estruturas. Com a finalidade de contribuir para obtenção de procedimentos de desses métodos e análises, foram apresentados neste trabalho alguns cenários derivados de algumas fórmulas utilizadas para o cálculo de vigas de concreto armado com fibras metálicas.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 FUNCIONAMENTO DO CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS METÁLICAS

Segundo o documento preparado sob a demanda do comitê científico e técnico da Associação Francesa de Engenharia Civil “(AFGC)” pelo grupo de trabalho da mesma e de Serviço de Estudos Técnicos de Estradas e Rodovias “(Setra)” sobre o Concreto com Fibras de alto desempenho, onde foi realizados vários ensaios para a determinação do comportamento a compressão, modulo de elasticidade, o comportamento em tração, caracterização das placas finas submetidas a flexão, retração, fluência, resistência ao choque, o concreto reforçado com fibras metálicas possui um funcionamento baseado na resistência própria das fibras após a fissuração da matriz cimentes. E quando esta resistência é suficiente, segundo a funcionalidade da estrutura e as cargas as quais é submetida, pode dispensar das armaduras clássicas.

### 2.2 IMPORTÂNCIA DAS FIBRAS METÁLICAS

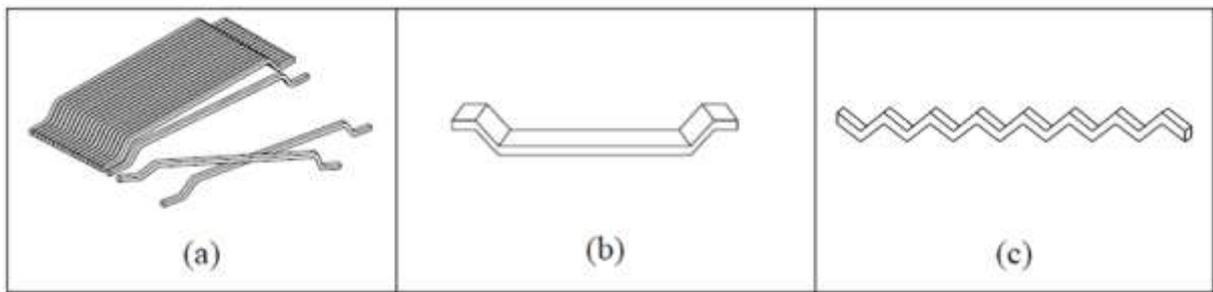
Conforme o Arquivo Aberto Multidisciplinar (HAL) sobre o concreto reforçado com fibras metálicas: do material à estrutura, estudos experimentais e análise do comportamento de vigas submetidas à flexão e ao esforço cortante, a existência das fibras é indispensável a onde existe problemas tecnológicos que torna o emprego do concreto armado mais caro ou insatisfatório. As principais aplicações são então as lajes industriais e o concreto projetado. O exemplo de concreto projetado em túnel ou em canalização. A solução tradicional consiste a fixar uma treliça fixada aos apoios e projetar um concreto em cobertura. Contudo, a fixação da treliça é longa e cara. Neste caso, o concreto projetado de fibras metálicas é a melhor solução econômica e de qualidade.

### 2.3 TIPOS DE FIBRAS METÁLICAS

Igor Vinicius Santana na sua dissertação: Estudo da influência das fibras metálicas no comportamento da aderência entre barras de aço e concretos de diferentes classes de resistência, da Universidade De São Paulo em setembro de 2014, relatou que existe basicamente três tipos de fibras no mercado brasileiro como mostra a figura 1. A primeira com seção transversal circular com gancho de aço trefilado (figura 1.a), a segunda com seção

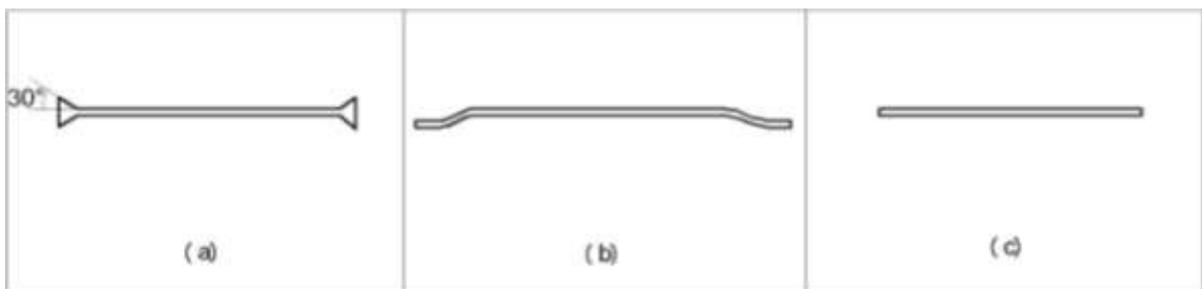
transversal retangular com gancho de chapas de aço cortada (figura 1.b), e a terceira com seção transversal irregular fabricada com fio chato que sobra da produção de lã de aço (figura 1.c), de comprimento variável entre 6,4 mm (fibras curtas) a 76 mm (fibras longas) até o diâmetro desejado. Conforme o arquivo aberto (HAL) foi feitos os estudos experimentais para a metodologia utilizada neste trabalho com três tipos de fibras encontrados no mercado franceses como ilustra a figura 2: fibras com cabeça de ancoragem em aço trefilado (figura 2.a), fibras com ganchos em aço trefilado (figura 2.b), e fibras retas em ferro amorfo (figura 2.c). De comprimento variável entre 30 mm a 60 mm e de diâmetro 0,5 a 1 mm. Dosada entre 0,4% a 1,25% em volume de concreto.

Figura 1 – Tipos de fibras metálicas no mercado brasileiro.



Fonte: Igor Vinicius Santana.

Figura 2 – Tipos de fibras metálicas no mercado Frances.



Fonte: Pascal Casanova.

## 2.4 APLICAÇÕES, FABRICAÇÕES, PROPRIEDADES FÍSICAS/FUNIONAMENTOS DE UMA FIBRA, PROPRIEDADES MECÂNICAS, OUTRAS PROPRIEDADES, PRINCÍPIOS DE DIMENSIONAMENTOS DE ACORDO A TESE DE PASCAL CASANOVA PUBLICADO NO ARQUIVO HAL.

### 2.4.1 Aplicações

As primeiras aplicações industriais dos concretos reforçados com fibras metálicas foram impostas por razões tecnológicas. Surgiu uma segunda família de aplicações, que é o produto de reflexões e de modelagens. Na primeira categoria, acha-se geralmente as lajes industriais, cascas, concreto projetado e pré-fabricado. As lajes industriais consomem a maior parte das fibras metálicas utilizadas no mundo inteiro. São utilizadas também nas pistas de aeroportos e calçadas. Para as pistas do aeroporto, é recomendada a utilização de um teor de fibras elevado. A segunda categoria corresponde a estruturas dimensionadas para suportar uma solicitação de flexão superior a solicitação de fissuração, por exemplo, a laje de pontes mixa. Para a segunda categoria, as fibras mostram capacidades de serem adaptadas para substituir as armaduras tridimensionais complexas.

### 2.4.2 Fabricações das estruturas reforçadas com fibras metálicas

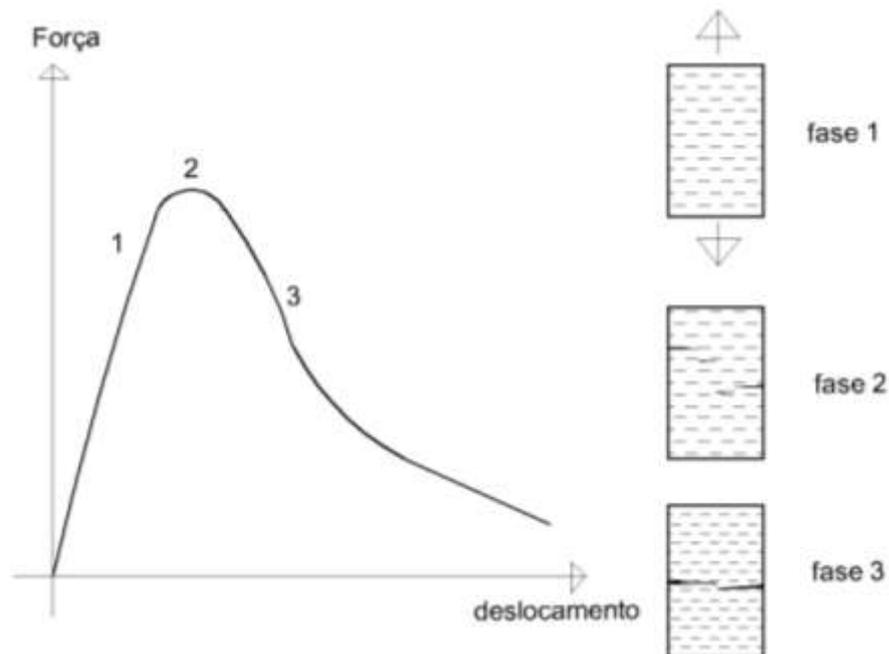
Para uma matriz cimentícia (pasta mais agregados), a maleabilidade decresce com o aumento da quantidade de fibras. Então, se faz necessário a utilização de uma quantidade de finos (cimento e agregado miúdo) na mistura para melhorar a maleabilidade. É recomendado, por exemplo, uma relação entre a areia e brita igual a um (areia/brita = 1). No caso das fibras, quanto maior a relação entre o comprimento e o diâmetro, maior o risco da formação de vazios que torna difícil a fabricação e prejudica o comportamento mecânico, neste caso é recomendado que o comprimento das fibras sejam maiores do que duas vezes o diâmetro das britas ( $L > 2D$ ). Assim, a construção de uma estrutura de concreto reforçado com fibras metálicas segue:

- Um tipo e uma quantidade de fibras escolhidos (em relação ao comportamento em tração);
- Um tamanho máximo de brita deduzido da relação  $L > 2D$  (com um diâmetro máximo, maior que puder por razões econômicas);
- Uma resistência a compressão a 28 dias;
- Uma maleabilidade (tempo de lançamento) correspondendo à aplicação visada.

### 2.4.3 Propriedades físicas

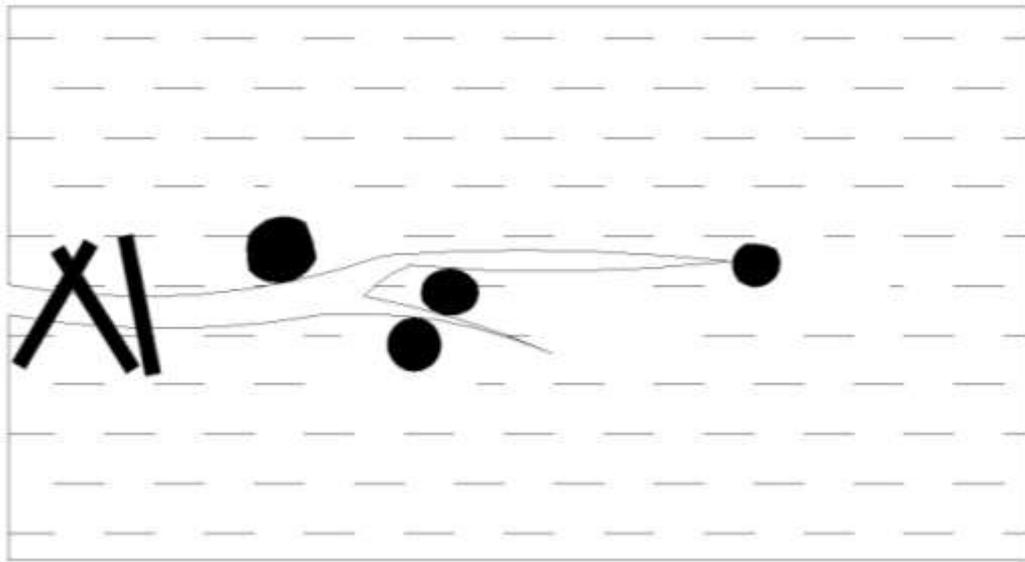
A introdução das fibras na estrutura de concreto tem por objetivo o controle da fissuração e isto se dá por etapa entre o material e a estrutura. Considerando um volume de concreto reforçado com fibras submetido a uma força de tração uniaxial. Pode-se distinguir três fases sobre a curva esforço-deslocamento que descreve o seu comportamento como mostra a figura 3. Na primeira fase, observa-se uma micro fissura dispersa, gerada a partir das deformações iniciais e da heterogeneidade das características locais do material. Neste estado, as fibras intervêm pela costura de micro fissuras, retardando o seu crescimento. A segunda fase corresponde a uma localização de micro fissuras seguida de propagação de macro fissuras (fase 3) que separa o volume em dois blocos de concreto. As fibras finas reagem com o micro fissuras e garantem a ancoragem para melhorar as características intrínsecas do material retardando a passagem para a segunda fase. Portanto, na terceira fase somente as fibras longas podem limitar o macro fissuras fazendo o mesmo papel das armaduras do concreto armado como ilustra a figura 4.

Figura 3- Comportamento de um bloco de concreto submetido à tração direta.



Fonte: Pascal Casanova.

Figura 4 – Papel das fibras metálicas no controle da fissuração do concreto.

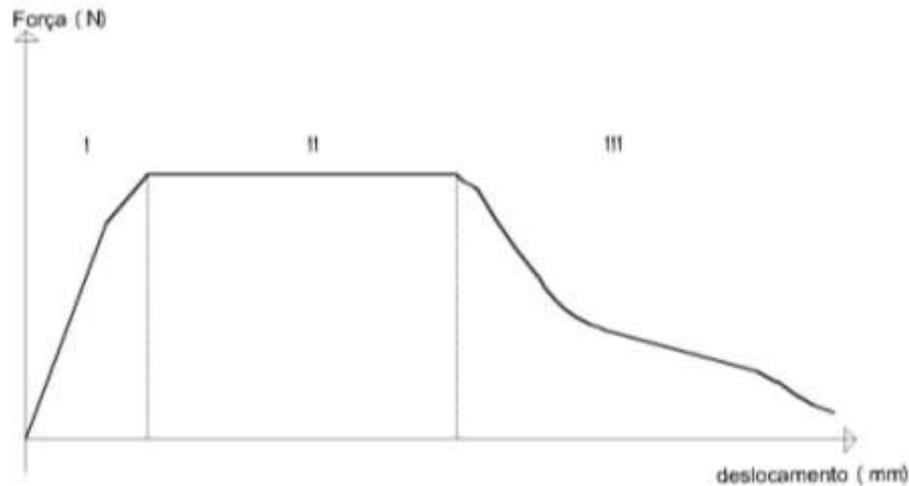


Fonte: Pascal Casanova.

#### 2.4.4 Funcionamentos de uma fibra

O funcionamento de uma matriz cimentícia pode ser estudado experimentalmente por um ensaio de arrancamento. Considerando uma fibra reta, o seu comportamento depende essencialmente da interface fibra – matriz e da sua inclinação em relação à sollicitação. Assim, o comprimento de ancoragem da fibra depende da aderência aço – concreto e da energia dissipada pelo seu arrancamento da lei de escorregamento na interface. Define-se então, um comprimento crítico de fibra em função da resistência da interface fibra – matriz. Esse comprimento crítico corresponde, por uma fibra reta, a energia ótima dissipada por arrancamento. Quanto à orientação, “Brandt mostrou que é uma inclinação não nula (função do diâmetro da fibra) que conduz a uma dissipação total de energia máxima (levando em consideração a plasticidade da fibra, energia de fricção durante o escorregamento, e o arrancamento local da matriz. Para melhorar a capacidade da ancoragem das fibras curtas, e aumentar a energia dissipada durante o arrancamento, são utilizadas fibras com geometria mais complexas. Segundo “Burakiewicz 1978”, pode distinguir três etapas no comportamento de tal fibra como ilustra a figura 5. A primeira consiste em uma mobilização progressiva da ancoragem; a segunda, à ruptura progressiva da ancoragem com uma forte dissipação de energia; e a terceira corresponde ao escorregamento com fricção da fibra na matriz.

Figura 5 – Comportamento do arrancamento de uma fibra.



Fonte: Pascal Casanova.

## 2.4.5 Propriedades mecânicas

### 2.4.5.1 Comportamentos em tração

O objetivo principal da introdução das fibras no concreto é compensar a fragilidade do material em tração pela costura do macro fissuração. Então, a propriedade central do concreto reforçado com fibras é o seu comportamento em tração. Em relação ao comportamento em tração uniaxial, foi observada através dos ensaios da literatura que a resistência em tração direta é a mesma do concreto sem fibras. Portanto, o comportamento pós fissuração esta ligada ao teor de fibras, as suas orientações e seus modos de funcionamento. Deve salientar que a tensão pós fissuração não é diretamente proporcional a quantidade de fibras introduzida, pois o aumento da dosagem em fibras pode provocar uma perturbação da matriz e uma deterioração da ancoragem que limita a absorção de esforço após a fissuração.

### 2.4.5.2 Comportamentos em compressão

A resistência a compressão do concreto reforçado com fibras pode ter um aumento levemente superior ao do concreto sem fibras (com perda de maleabilidade), ou uma diminuição leve devido ao aumento do teor de areia para melhorar a maleabilidade. Sem esquecer a influência das orientações das fibras. Assim, como o objetivo principal das fibras é

intervir na fissuração, vários ensaios na literatura mostram que as fibras orientadas perpendicularmente ao eixo da solicitação absorvem melhor o esforço de fissuração do que as orientadas paralelamente ao eixo de solicitação.

#### 2.4.5.3 Módulos de elasticidade

O módulo de elasticidade está condicionado à rigidez da estrutura. Assim como o comportamento a compressão, este valor pode aumentar ou diminuir levemente com a dosagem.

#### 2.4.5.4 Comportamentos ao cisalhamento

A diferença entre a resistência ao cisalhamento e a resistência a tração de uma estrutura em concreto está ligada a um efeito estrutural e condicional aos limites. Para o concreto reforçado com fibras, haverá antes do macro fissuração, a mesma evolução do comportamento que para a tração. Após o macro fissuração, tem que distinguir o modo de aplicação do cisalhamento e as condições aos limites. Vários ensaios da literatura mostraram que as fibras trazem uma melhor ductilidade e um aumento de esforço máximo em relação ao concreto sem fibras.

### 2.4.6 Outras propriedades

#### 2.4.6.1 Comportamentos dinâmicos

O arrancamento de uma fibra pode dissipar uma energia muito importante. Esta propriedade conduz os pesquisadores ao estudo do comportamento das estruturas de concreto reforçado com fibras submetidas a um carregamento dinâmico. Pode distinguir dois tipos destes carregamentos: os sismos e os choques. Foram mostrados através dos ensaios relacionados a esses carregamentos que as fibras aumentam a energia dissipada.

#### 2.4.6.2 Durabilidade

Uma das preocupações para estruturas reforçadas com fibras metálicas é a corrosão. Foi observado através de ensaios que a deterioração depende do meio exterior e também da abertura de fissura inicial. Foi observada, por exemplo, a ausência de corrosão para uma abertura de fissura inferior a 0,3mm em lugares exposto a corrosão. Assim, as fibras encontradas na superfície das estruturas sofrem a corrosão rapidamente, o que prejudica o aspecto do acabamento mesmo que a ferrugem não propaga em profundidade. Para evitar esse problema, pode utilizar fibras tratadas contra a corrosão.

### 2.5 PRINCÍPIO DE DIMENSIONAMENTO

Conforme o arquivo “HAL, o método de cálculo das vigas de concreto armado está baseando no mecanismo de treliça e a determinação do esforço cortante sobre o equilíbrio de uma seção fissurada. Utilizando a formula simplificada de “Kordina”, se distingue a parcela estrutural ( $V_c$ ) da parcela de armadura transversal ( $V_s$ ) do esforço cortante último ( $V_u$ ):

$$V_u = V_c + V_s$$

Parcela estrutural:

$$V_c = f_T \cdot b_w \cdot d \cdot \Delta\tau \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{0,82}} \cdot \sqrt[3]{\rho_L}$$

Onde:

$f_T$ : fator de forma igual a 1 com armadura transversal e 0,85 sem armadura transversal;

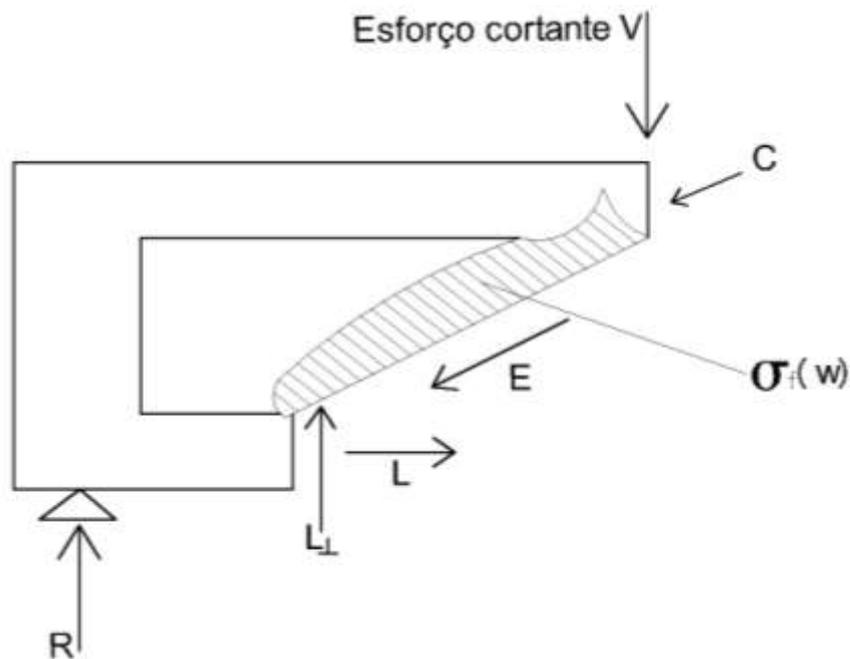
$\Delta\tau$ : coeficiente de correção devido ao modelo de cálculo utilizado;

$\rho_L$ : taxa de armadura longitudinal.

Parcela das Fibras:

Propõe se de adaptar a análise de Kordina substituindo a ação dos estribos pela parcela de resistência das fibras no nível de uma fissuração diagonal como mostra a figura 6.

Figura 6 – Absorção do esforço cortante através de uma seção fissurada.



Fonte: Pascal Casanova.

Onde:

C: compressão;

E: engrenamento dos agregados do concreto ao longo das fissuras;

L: ação longitudinal;

$L_{\perp}$ : efeito de rebite da armadura de flexão;

$\sigma_f(w)$ : parcela da resistência a tensão normal pós-fissuração devido às fibras;

$$V = V_c + V_E + V_{L_{\perp}} + V_f$$

V: esforço cortante que atua na seção transversal;

$V_c$ : esforço cortante absorvido pela mesa comprimida;

$V_E$ : esforço cortante absorvido pelo engrenamento dos agregados do concreto ao longo das fissuras;

$V_{L_{\perp}}$ : esforço cortante absorvido pelo efeito de rebite da armadura de flexão;

$V_f$ : esforço cortante absorvido pelas fibras.

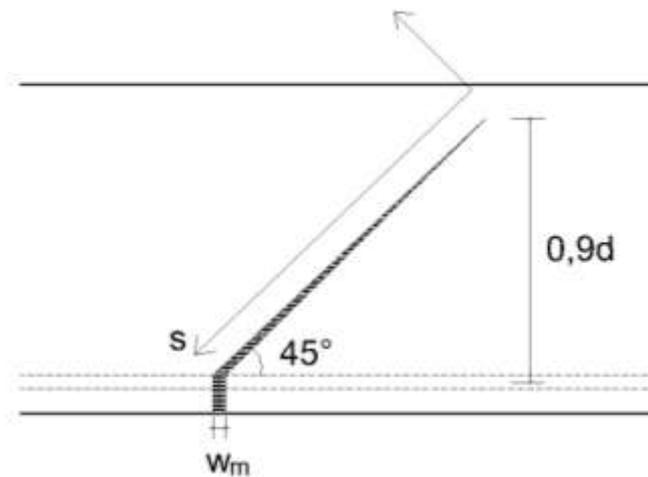
O cálculo das ações das fibras está relacionado a abertura das fissuras e das suas repartições. Não existe método analítico de cálculo da capacidade resistente a esforço cortante de uma viga em função da abertura de fissuras, está limitada a definição dos estados limites de cálculo. A aproximação que Kordina propõe, como toda aproximação, se da no caso da

ruptura da estrutura. A fórmula definida para a estimação da parcela da estrutura esta baseada na hipótese de uma fissura propagada e aberta. O caso do concreto com fibras é particular, pois o material não apresenta um comportamento elastoplastico em ação. O valor escolhido para a abertura de fissura, que define o nível da tensão residual, é crucial e está submetido aos efeitos de escalas associados à altura da viga

Em geral, para o cálculo de vigas a esforços cortantes, propõe se de distinguir as vigas com seções transversais retangulares das vigas de seções transversais T.

Considerando uma viga retangular. A fissura que provoca a ruptura pelo esforço cortante está na maioria dos casos associada a uma fissura de flexão: sua abertura está controlada pela deformação das armaduras longitudinais. É esquematizada pela uma fissura inclinada a 45° ao longo da qual a repartição da abertura é linear (figura 7).

Figura 7 – Abertura de fissura diagonal em uma viga de seção transversal retangular.



Fonte: Pascal Casanova.

A parcela do esforço cortante absorvido pelas fibras,  $V_f$ , é calculada pela projeção sobre o eixo vertical do integral da tensão absorvida pelo concreto de fibras ao longo da fissura:

$$V_f = \int_0^{0,9d\sqrt{2}} \sigma_f \left( \frac{s}{0,9d\sqrt{2}} \cdot w_m \right) \cdot b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot ds = 0,9bd \cdot \sigma_p(w_m)$$

Onde:

$$\sigma_p(w_m) = \frac{1}{w_m} \int_0^{w_m} \sigma_f(w) \cdot dw$$

Assim, definimos a tensão residual equivalente  $\sigma_p$  ( $w_m$ ) que é a média da tensão pós-fissurada entre 0 e ( $w_m$ ). A abertura de fissura ( $w_m$ ) é calculada a partir da deformação das armaduras longitudinais. Se a gente supõe que o espaçamento médio das fissuras é da ordem do braço de alavanca interna da viga, pode estimar, de maneira conservativa, a abertura da fissura de flexão pelo produto da deformação do aço por  $0,9d$ :

$$w_m = \varepsilon_s \cdot 0,9d$$

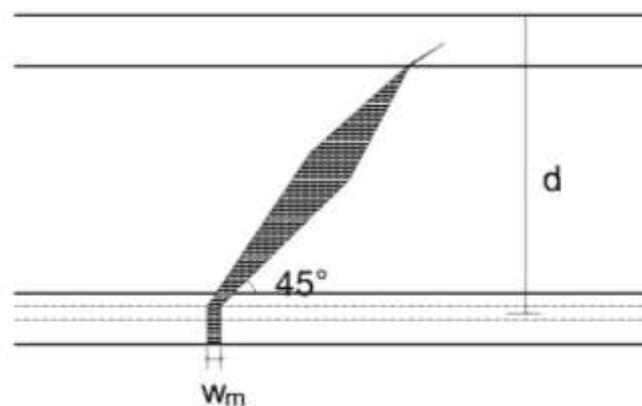
Propõe se de considerar dois casos:

O limite de elasticidade dos aços longitudinais (ou 0,2% de alongamento),  
Um valor regulado de plasticidade dos aços fixados a 1%.

No primeiro caso, consideramos que o controle da fissura, então a estabilidade ao esforço cortante, não é mais efetiva quando as armaduras longitudinais são muito solicitadas. Neste caso, se faz necessário uma comparação com resultados experimentais para a escolha entre as duas proposições ou definir os domínios de validade.

Considerando uma viga em T. A repartição da abertura de fissura é diferente, pois a mesma está confinada ao nível do talão inferior e da mesa de compressão (figura 8).

Figura 8 – Abertura de fissura em viga de seção transversal T.



Fonte: Pascal Casanova.

Pode observar a dificuldade que tem para modalizar a repartição da abertura de fissura. De mais, a fissura que leva a ruína tem tendência de se propagar horizontalmente ao longo da mesa de compressão, até mesmo ao longo do talão inferior se a mesma é larga e se a taxa de reforço longitudinal é alta.

Essas dificuldades conduzem a definir uma aproximação, um pouco arbitrária, que não tem o mesmo grau de validade que as vigas de seções retangulares. Propõe se de efetuar o

cálculo da parcela absorvida pelas fibras a partir da definição de uma abertura média,  $w_m$ , considerada constante ao longo da fissura. Afim de levar em consideração o efeito da altura da viga assim como o papel de controle das armaduras longitudinais, define-se essa abertura por analogia com as vigas retangulares, como o produto da deformação do aço pela altura útil da viga pela qual é subtraída a espessura da mesa de compressão (para levar em consideração a propagação horizontal da fissura).

A parcela do esforço cortante absorvido pelas fibras tem então como expressão:

$$V_f = b (d - h_f) \cdot \sigma_f(w_m)$$

Onde:

$$w_m = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (d - h_f) \text{ ou } 0,01 \cdot (d - h_f)$$

$h_f$ : espessura da mesa de compressão.

A tensão residual equivalente é então  $\sigma_p(w_m) = \sigma_f(w_m)$ , que é o valor da tensão pós-fissuração para a abertura de fissura  $w_m$ . Se a fissura se propaga longitudinalmente ao longo do talão inferior, o controle das armaduras longitudinais não é efetivo. Neste caso, podemos considerar que a abertura de fissura obtida a partir de uma deformação de 1% corresponde a um limite de estabilidade da estrutura e que pode ser utilizada para calcular a parcela das fibras.

Foi constatado através de ensaios, levando em consideração as características dos materiais em compressão e em tração, que está de acordo com a aproximação de Kordina com os resultados obtidos. Então, podemos estimar, a ruptura sendo intercedida pelos estribos, a parcela da estrutura está corretamente aproximada e que a versão simplificada do modelo de Kordina é aplicável para as vigas armadas transversalmente.

Deve recordar que para pequenas aberturas de fissuras, as fibras absorvem efetivamente uma parte do esforço cortante. Existe então uma transferência de esforço das fibras para a estrutura a medida que a fissura abre. E foi observado também que as fibras não absorvem esforços cortantes a partir de uma flecha de 15 mm. Isto prova que de fato o esforço cortante último medido está próximo da parcela estrutural calculada ( $V_c$ ). Conseqüentemente, as fibras longas são capazes de absorver um esforço para valores mais significativos da abertura de fissura.

Assim, propõe-se uma fórmula simplificada a partir da definição de uma tensão residual equivalente,  $\sigma_p(w_m)$ , função de uma abertura limite,  $w_m$ , ligada à altura útil da viga.

Este método sugere uma equação equivalente entre o “Concreto Reforçado com Fibras Metálicas” e as “Armaduras Transversais” (taxa de reforço  $\rho_t$ , tensão máxima do aço  $\sigma_s$ ):

$$\sigma_p(w_m) = \rho_t \cdot \sigma_s$$

### 3. OBJETIVOS

#### 3.1 OBJETIVO GERAL

Apresentar alguns métodos de dimensionamento de vigas de concreto armado com fibras metálicas.

#### 3.2 OBJETIVO ESPECÍFICO

- a) Analisar o comportamento mecânico e as vantagens das fibras metálicas em vigas de concreto armado;
- b) Analisar as estruturas de concreto armado com fibras metálicas nos Estados Limites Último (ELU) e nos Estados Limites de Serviços (ELS) conforme as recomendações estabelecidas pela Norma Brasileira – NBR 6118;
- c) Analisar a viabilidade econômica das fibras metálicas em vigas de concreto armado.

#### 3.3 JUSTIFICATIVA

A armadura passiva (longitudinal e transversal) oferece uma maior resistência e durabilidade em vigas de concreto, no entanto, existem situações em que essa armadura não é suficiente para absorção dos esforços solicitantes, podendo ainda tornar o projeto economicamente inviável. Desta forma, existe uma procura de estruturas mais resistentes, para atender as exigências do mercado.

Neste contexto, uma das alternativas atualmente utilizadas é a introdução das fibras metálicas em estrutura de concreto para reforçar a resistência e a durabilidade devido as suas características mecânicas. Assim, este trabalho apresenta alguns cenários que mostram a importância e a influência da introdução das fibras metálicas em vigas de concreto armado, tanto para o comportamento mecânico tanto para a viabilidade econômica quando a

resistência das fibras é suficiente para substituir uma parte ou toda armadura transversal e/ou passiva.

#### 4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente foi utilizado o arquivo aberto (HAL), documento elaborado pela escola das pontes e de calçadas na França, que descreve os tipos e comportamento das fibras metálicas em vigas de concreto armado, bem como a capacidade resistente da seção aos esforços cortantes, com a finalidade encontrar o método mais adequado para dimensionar vigas de concreto armado com fibras metálicas. Além desse arquivo, outros documentos, também foram utilizados como referência, tais como:

- Curso e Concreto Armado
  - Calculo da quantidade de aço longitudinal necessário e a verificação da capacidade resistente da seção ao momento fletor.
- Cálculo e Detalhamento de Estruturais Usuais de Concreto Armado
  - Calculo da quantidade de armaduras transversais e a verificação da capacidade resistente aos esforços cortantes e o esmagamento da biela de concreto.
- Aplicação das notas de aula de Construção de Concreto dois (2) e verificação dos limites estabelecidos conforme a Norma Brasileira (NBR).

A partir da análise e aplicação desses estudos, foram utilizadas as seguintes fórmulas:

##### 1.1 Pré-dimensionamento

- Momento fletor solicitante de cálculo

$$M_d = 1,4 \cdot \frac{q_k \cdot l^2}{8}$$

$q_k$  = carga da combinação normal na viga

$l$  = comprimento da viga

- Momento reduzido:

$$\mu = \frac{M_d}{b_f d^2 \sigma_{cd}} =$$

$b_f$  = largura da mesa da seção transversal da viga

$d$  = altura útil da seção transversal da viga

$\sigma_{cd}$  = tensão de compressão no concreto

- Parâmetros geométricos:

$$\beta_f = \frac{h_f}{d}$$

$$\beta_w = \frac{b_w}{b_f}$$

$$r_{cc \text{ lim}} = \beta_f + \beta_w (0,8 \cdot \xi_{\text{lim}} - \beta_f)$$

$b_w$  = largura da alma da seção transversal da viga

$h_f$  = espessura da mesa da seção transversal da viga

$\xi_{\text{lim}} = 0,35 \rightarrow f_{ck} > 35 \text{MPa}; 0,45 \rightarrow f_{ck} \leq 35 \text{MPa}$

- Momento reduzido limite:

$$\mu_{\text{lim}} = \beta_f \left(1 - \frac{\beta_f}{2}\right) + \beta_w (0,8 \xi_{\text{lim}} - \beta_f) \left(1 - 0,4 \xi_{\text{lim}} - \frac{\beta_f}{2}\right)$$

$$\mu_f = \beta_f \left(1 - \frac{\beta_f}{2}\right) = 0,17 \left(1 - \frac{0,17}{2}\right)$$

$$\mu^* = \frac{\mu - \mu_f}{\beta_w} + \mu_f =$$

$$w = \beta_f (1 - \beta_w) + \beta_w (1 - \sqrt{1 - 2 \mu^*})$$

- Área da armadura de tração:

$$A_s = w b_f d \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}}$$

$f_{yd}$  = resistência características a tração do aço

## 1.2 Estados Limites Último (ELU) para o concreto Armado

- Verificação da capacidade resistente da seção:

Deformação no aço:

$$\varepsilon_y = 0,207\%$$

- Profundidade da linha neutra na condição balanceada:

$$x_b = \left( \frac{0,35\%}{0,35\% + \varepsilon_y} \right) d$$

- Profundidade da linha neutra:

$$x = 1,25 \left( \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b_w \cdot \sigma_{cd}} - \frac{h_f \cdot b_f}{b_w} + h_f \right)$$

$A_s$  = área de aço longitudinal

- Propriedades geométricas:

$$A_f = h_f \cdot b_f$$

$$A_w = b_w (0,8x - h_f)$$

- Braços de alavancas:

$$Z_f = d - \frac{h_f}{2}$$

$$Z_w = d - 0,4x - \frac{h_f}{2}$$

- Momento resistente da seção:

$$M_u = (A_f Z_f + A_w Z_w) \sigma_{cd}$$

### 1.3 Esforço Cortante

- Esforço cortante solicitante de cálculo:

$$V_d = 1,4 \cdot \frac{q_k \cdot l}{2} =$$

- Verificação do esmagamento da biela de concreto:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250}$$

- Tensão de cisalhamento solicitante:

$$\tau_{sd} = \frac{V_d}{b_w d}$$

- Tensão resistente de cisalhamento:

$$\tau_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)$$

$\alpha$  = ângulo de inclinação das armaduras transversais

$\theta$  = ângulo de inclinação da biela de concreto

- Armadura transversal

Parcela de tensão devido à estrutura de concreto:

$$\tau_c = 0,6 \cdot f_{ctd}$$

- Parcela de tensão devido a armadura transversal:

$$\tau_{sw} = \tau_{sd} - \tau_c$$

- Bitola de 10 mm ( $\Phi 10$ ):

$A_{sw} = 1,57 \text{ cm}^2$  = área de aço transversal para estribos simples

- Taxa de armadura:

$$\rho_t = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{yd}} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

- Espaçamento:

$$S = \frac{A_{sw}}{\rho_t \cdot b_w}$$

#### 1.4 Estados Limites de Serviços (ELS) para o concreto armado

- Distância do centróide até a fibra mais tracionada:

$$y_t = \frac{(b_f \cdot h)(0,5 \cdot h) - (b_f - b_w)(h - h_f) \cdot 0,5(h - h_f)}{b_f \cdot h - (h - h_f)(b_f - b_w)}$$

- Momento de inércia da seção bruta:

$$I_c = \frac{b_f \cdot h_f^3}{12} + b_f \cdot h_f \left[ \left( \frac{h_f}{2} + (h - h_f) \right) - y_t \right]^2 + \frac{b_w \cdot (h - h_f)^3}{12} + b_w \cdot (h - h_f) \cdot \left[ y_t - \frac{(h - h_f)}{2} \right]^2$$

- Momento de fissuração:

$\alpha = 1,2$ : seção T

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{y_t}$$

- Momento solicitante no estágio II (em serviço):

$$M_a = \frac{q_k \cdot l^2}{8}$$

- Momento de inércia no estágio II (seção homogeneizada):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$$

$E_s$  = módulo de elasticidade do aço

$E_{cs}$  = módulo de elasticidade do concreto

Para a obtenção da profundidade da linha neutra no estágio 2, foi resolvida a seguinte equação de segundo grau:

$$\left(\frac{b_w}{2}\right)x^2 + (b_f \cdot h_f - b_w \cdot h_f + \alpha_e A_s)x + \left(\frac{b_w \cdot h_f^2}{2} - \frac{b_f \cdot h_f^2}{2} - \alpha_e \cdot A_s \cdot d\right) = 0$$

$$I_{II} = \frac{b_f x_{II}^3}{3} - \frac{(b_f - b_w)(x_{II} - h_f)^3}{3} + A_s \cdot \alpha_e (d - x_{II})^2$$

- Momento de inércia equivalente:

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3\right] \cdot I_{II}$$

- Cálculo da flecha imediata:

$$EI_{eq} = E_{cs} \cdot I_{eq}$$

$$\delta_i = \frac{5ql^4}{384EI_{eq}}$$

- Efeitos diferidos no tempo

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) t^{0,32}$$

$$\xi(28\text{dias}) = \xi(t \leq 70\text{meses})$$

$$\xi(\infty) = \xi(t > 70\text{meses})$$

$$\Delta\xi = \xi(\infty) - \xi(28d)$$

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \cdot \rho'}$$

Flecha total:

$$\delta_t = \delta_i \cdot (1 + \alpha_f)$$

### 1.5 Verificação das flechas segundo a NBR 6118

- Aceitação visual:

$$\delta_t \leq \frac{l}{250}$$

- Deformações devido as sobrecargas (vibrações):

$$\delta_q = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot EI_{eq}}$$

$$\delta_{adm} = \frac{l}{350}$$

- Deslocamento logo após a construção da parede:

$$\delta_{adm} = \min \left\{ \begin{array}{l} l \\ 500 \\ 1cm \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 1000 \\ 500 \\ 1cm \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,00cm \\ 1,00cm \end{array} \right\}$$

## 1.6 Verificação da Abertura de Fissuras

- Área de região de envolvimento (grupo):

$$A_{cr} = (d' + 7,5\phi) \cdot b_w$$

- Taxa de armadura em relação a região envolvida:

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{cr}}$$

- Momento solicitante com a combinação freqüente:

$$M = \frac{ql^2}{8}$$

- Tensão de tração nas armaduras:

$$\sigma_s = \alpha_e \cdot \frac{M}{I_{II}} \cdot (d - x_{II})$$

$$\eta = 2,5 \rightarrow CA - 50$$

- Abertura de fissura para classe de agressividade 2 e 3 (CAA 2 e 3):

$$w_k = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi}{12,5 \cdot \eta} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \frac{3\sigma_s}{f_{ctm}} \\ \frac{\phi}{12,5 \cdot \eta} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \left( \frac{4}{\rho_r} + 45 \right) \end{array} \right\}$$

$$w_k = 0,07 \text{ mm} < 0,3 \text{ mm (ok)}$$

### 1.7 Cálculo nos Estados Limites Último para o concreto armado com fibras – ELU

- Verificação do esmagamento da biela de concreto:

$$\tau_{Rd2} = 0,56 \cdot f_{ck}^{2/3}$$

- Parcela de esforço cortante absorvida pelas fibras:

$$\sigma_p(w_m) = \sigma_f(w_m) = \rho_t \cdot \sigma_s$$

$$V_f = b_w (d - h_f) \cdot \sigma_f(w_m)$$

- Parcela do esforço cortante absorvida pela estrutura de concreto:

$$f_T = 1$$

$$\Delta\tau = 0,24$$

$$\rho_L = \frac{A_s}{b_w d}$$

$$V_c = f_T \cdot b_w d \cdot \Delta\tau \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{0,82} \cdot \sqrt[3]{\rho_L}}$$

$$V_u = V_c + V_f$$

Quando o esforço cortante útil ( $V_u$ ) é menor do que o esforço cortante solicitante.

Significa que a parcela do esforço cortante absorvida pelas fibras não é suficiente e se faz necessário adicionar uma parcela de armadura transversal. Logo,

$$V_u = V_c + V_f + V_{sw}^*$$

Tal que,  $V_{sw}^*$ : parcela de esforço cortante absorvida pela armadura transversal depois da análise. Ou seja,

$$V_{sw}^* = V_d - (V_c + V_f)$$

Espaçamento necessário de estribos devido à armadura transversal adicional

$$\tau_{sw}^* = \frac{V_{sw}^*}{b_w d} =$$

$$\rho_t^* = \frac{1,11 \tau_{sw}^*}{f_{yd}} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

$$S^* = \frac{A_{sw}}{\rho_t^* \cdot b_w}$$

- Momento resistente pelas fibras:

$$M_f = Z_f \cdot A_f \cdot \sigma_f = \frac{(h-x)}{2} \cdot [(h-x) \cdot b_w - A_L] \cdot \sigma_f$$

- Momento Resistente da seção:

$$M_{Res} = M_u + M_f =$$

- O aumento de momento resistente da seção é dado por:

$$\lambda_M = \frac{(M_{Res} - M_u)}{M_u}$$

## 1.8 Análise econômica

Volume total de concreto:

$$V_c = (A_f + A_w) \cdot l$$

Quantidade de aço e fibras (kg) :

$$Q_{aço} = \rho_{tot} \cdot \gamma_{aço} \cdot V_c$$

$$Q_{fibras} = Tf \cdot V_c$$

$\gamma_{aço}$ : densidade do aço

Teor de fibras ( $T_f$ ) = 80kg/m<sup>3</sup>;

A partir da aplicação e análise dessas fórmulas, foram considerados os seguintes cenários:

1. O primeiro cenário:

Consiste em mostrar como a participação das fibras metálicas pode contribuir na melhoria da qualidade das vigas de concreto armado tanto em termo de resistência quanto no detalhamento com a retirada de uma parte da armadura transversal, sem considerar a análise econômica.

1. Segundo cenário:

Neste cenário, a substituição das armaduras transversais pelas fibras não é economicamente viável, porém pode contribuir na melhoria da estrutura devido ao aumento do momento fletor pela ação das fibras metálicas.

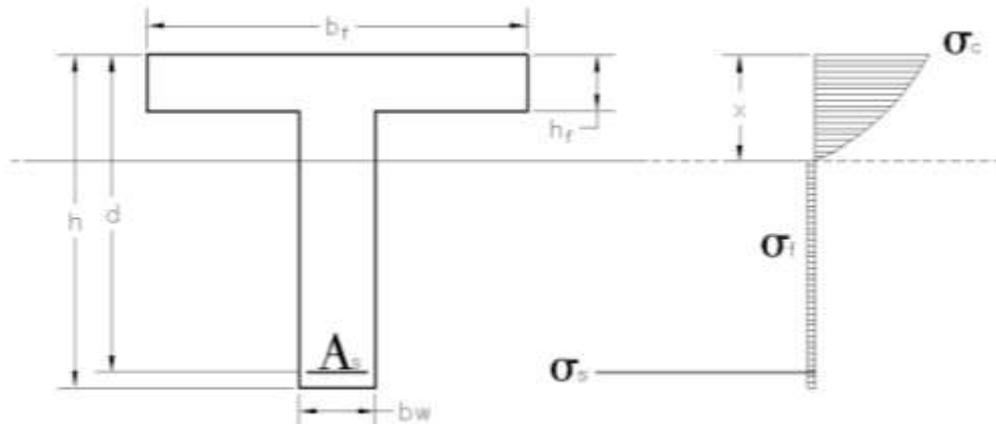
2. Terceiro cenário:

Será apresentada a diferença entre a quantidade de aço necessária para resistir aos esforços internos, bem como a quantidade de fibras metálicas para suportar esses esforços, podendo ser considerado economicamente viável.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir dos métodos de dimensionamento foi considerada a seção transversal T de uma viga bi apoiada, conforme ilustrada na Figura 9.

Figura 9 – Comportamento em flexão de uma viga com seção transversal T.



Fonte: Pascal Casanova.

Onde:

- $b_f$ : largura da mesa;
- $h$ : altura total da seção;
- $h_f$ : espessura da mesa;
- $d$ : altura útil da seção;
- $x$ : posição da linha neutra;
- $A_s$ : área da armadura tracionada;
- $\sigma_c$ : tensão de compressão no concreto;
- $\sigma_f$ : tensão pós-fissuração em tração uniaxial do concreto de fibras;
- $\sigma_s$ : tensão de tração no aço.

Partindo do princípio de Kordina onde afirma que o esforço cortante resistente da seção transversal para o concreto armado convencional é composto de duas parcelas sendo elas: parcela resistente pela estrutura de concreto e a parcela resistente pela armadura transversal. Com base nessa hipótese foram feitas as primeiras análises verificando a capacidade resistente aos esforços cortantes solicitantes substituindo a parcela resistente da armadura transversal por fibras metálicas. A partir dessa análise foram identificados três cenários:

## 5.1 PRIMEIRO CENÁRIO

Para o primeiro cenário, foram utilizados os valores para o dimensionamento da viga de concreto armado com fibras metálicas, conforme ilustrado no Quadro 1.

**Quadro 1. Dados utilizados no dimensionamento do primeiro cenário.**

Dimensões da vida	Propriedades dos materiais	Cargas na viga
$b_f = 70\text{cm};$	$f_{cd} = 32,14\text{MPa};$	Combinação normal: $q_k = 137,55 \text{ kN/m};$
$h = 100\text{cm};$	$\sigma_{cd} = 27,32\text{MPa};$	Combinação quase permanente: $q_k = 74,55 \text{ kN/m};$
$b_w = 20\text{cm};$	$f_{ctd} = 1,90\text{MPa};$	Combinação frequente: $q_k = 95,55 \text{ kN/m};$
$h_f = 15\text{cm};$	$f_{ctm} = 3,80\text{MPa};$	Carga devido as sobre cargas: $q_k = 105\text{kN/m};$
$L = 1000\text{cm}.$	$f_{ct} = 2,66\text{MPa};$	Carga após da construção da parede: $q_k = 32,55\text{kN/m}$
	$f_{ij} = 3,22\text{MPa};$	
	$E_s = 210000\text{MPa};$	
	$E_{cs} = 31931\text{MPa}.$	

Fonte: William Obel.

Desta forma pode-se chegar aos seguintes resultados da Tabela1.

**Tabela 1 – Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o primeiro cenário.**

<b>Parâmetros</b>	<b>Valores</b>	<b>Unidade</b>	<b>Observação</b>
Md	2407,04	kN.m	
As	67,19	cm <sup>2</sup>	
Mu	2407,04	kN.m	(ok)
Esforço cortante			
Vd	962,82	kN	
$\tau_c$	1,14	Mpa	
$\tau_{sw}$	4,21	MPa	
$\rho_t$	0,62	%	
$\phi$	1	cm	
S	12,66	cm	
Vc	204,95	kN	
Vsw	757,10	kN	
Estados Limites de Serviço – ELS			
$\delta_i$	1,40	cm	
$\delta_t$	3,28	cm	< $\delta_{adm}$ (visual) (ok)
$\delta_{adm}$ (visual)	4,00	cm	
$\delta_q$ (vibrações)	1,98	cm	< $\delta_{adm}$ (vibrações) (ok)
$\delta_{adm}$ (vibrações)	2,86	cm	
$\delta_g$ (após a construção da parede)	0,61	cm	< $\delta_{adm}$ (A.C.P) (ok)
$\delta_{adm}$ (após a construção da parede)	1	cm	
wk	0,07	mm	<0,3mm (ok)
Concreto Armado com Fibras			
Esforço cortante			
$\sigma_f(wm)$	2,70	MPa	
Vf	404,75	kN	
VRc	496,44	kN	
Vu	901,19	kN	<Vd = 962,82kN
V*sw	61,63	kN	
Espaçamento devido a V*sw			
$\tau^*_{sw}$	0,34	MPa	
$\rho^*t$	0,050	%	
S*	155,70	cm	Espaçamento máximo
Momento absorvido pelas fibras			
Mf	165,49	kN.m	
Relação entre o momento resistente do CA simples e o com Fibras			
$\lambda Mu$	6,88		% a mais

Fonte: William Obel.

A partir dos resultados encontrados nesse cenário foi verificado que o esforço cortante resistente ao substituir as armaduras transversais pelas fibras metálicas não foi suficiente para resistir aos esforços cortantes solicitantes. Com objetivo de obter uma resistência adequada foi adicionada uma parcela de armadura transversal para conservar as fibras. Além disso, devido a resistência a tração das fibras metálicas houve um aumento na resistência ao momento fletor solicitante, bem como no espaçamento entre os estribos.

## 5.2 SEGUNDO CENÁRIO

O Quadro 2 apresenta os dados utilizados para o dimensionamento da viga, e a tabela 2 o resultado encontrado para esse cenário.

**Quadro 2. Dados utilizados no dimensionamento do segundo cenário.**

Dimensões da vida	Propriedades dos materiais	Cargas na viga
$b_f = 100 \text{ cm};$	$f_{cd} = 50\text{MPa};$	Combinação normal: $q_k = 231,70 \text{ kN/m};$
$h = 140 \text{ cm};$	$\sigma_{cd} = 42,50$	Combinação quase permanente: $q_k = 126,70 \text{ kN/m};$
$b_w = 40\text{cm};$	$\text{MPa}; f_{ctd} = 2,55$	Combinação frequente: $q_k = 161,70 \text{ kN/m};$
$h_f = 15\text{cm};$	$\text{MPa}; f_{ctm} = 5,10\text{MPa};$	Carga devido as sobre cargas: $q_k = 175 \text{ kN/m};$
$L = 14\text{m}.$	$f_{ct} = 3,57\text{MPa};$	Carga após da construção da parede: $q_k = 56,70 \text{ kN/m}$
$f_{ck} = 70\text{MPa};$	$f_{tj} = 4,02\text{MPa};$	
	$E_s = 210000\text{MPa};$	
	$E_{cs} = 39825,02\text{MPa}.$	

Fonte: William Obel.

**Tabela 2 – Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o segundo cenário.**

<b>Parâmetros</b>	<b>Valores</b>	<b>Undidade</b>	<b>Observação</b>
Md	7947,14	kN.m	<M <sub>u</sub> (ok)
As	154,76	cm <sup>2</sup>	
M <sub>u</sub>	7947,14	kN.m	
<b>Esforço cortante</b>			
V <sub>d</sub>	2270,61	kN	<VR <sub>d2</sub> (ok)
VR <sub>d2</sub>	4242,43	kN	
τ <sub>c</sub>	1,81	Mpa	
τ <sub>sw</sub>	2,70	MPa	
ρ <sub>t</sub>	0,40	%	
φ	1	cm	
S	10	cm	
V <sub>c</sub>	910,96	kN	
V <sub>sw</sub>	1358,29	kN	
<b>Estados Limites de Serviço – ELS</b>			
δ <sub>i</sub>	2,02	cm	
δ <sub>t</sub>	4,72	cm	<δ <sub>adm</sub> (visual) (ok)
δ <sub>adm</sub> (visual)	5,60	cm	
δ <sub>q</sub> (vibrações)	2,79	cm	<δ <sub>adm</sub> (vibrações) (ok)
δ <sub>adm</sub> (vibrações)	4,00	cm	
δ <sub>g</sub> (após a construção da parede)	0,90	cm	<δ <sub>adm</sub> (A.C.P) (ok)
δ <sub>adm</sub> (após a construção da parede)	1	cm	
w <sub>k</sub>	0,07	mm	<0,3mm (ok)
<b>Concreto Armado com Fibras</b>			
<b>Esforço cortante</b>			
σ <sub>f</sub> (w <sub>m</sub> )	1,91	MPa	
V <sub>f</sub>	846,97	kN	
V <sub>c</sub>	1624,41	kN	
V <sub>u</sub>	2471,39	kN	>V <sub>d</sub> = 2270,61kN (ok)
<b>Momento absorvido pelas fibras</b>			
M <sub>f</sub>	519,34	kN.m	
<b>Quantidade de armadura longitudinal diminuída</b>			
A*s	9,51	cm <sup>2</sup>	
<b>Quantidade de armadura de pele dispensada</b>			
A <sub>p,total</sub>	6,26	cm	

Fonte: William Obel.

Através dos resultados obtidos nesse cenário, verificou-se que o esforço cortante resistente ao substituir as armaduras transversais pelas fibras metálicas foi suficiente para suportar os esforços cortantes solicitantes. No entanto, devido à necessidade de uma maior adição de fibras metálica, essa opção não é considerada economicamente viável, uma vez que o valor do Kg da fibra metálica atualmente no mercado brasileiro equivale a três vezes mais que o Kg do aço. Conforme ilustrado na Tabela 3.

**Tabela 3- Análise econômica para o segundo cenário.**

Parâmetros	Valores	Unidade	Observação
Vc	9,1	m <sup>3</sup>	Vol. de concreto
Fibras	80	kg/m <sup>3</sup>	
pt	0,44	% Taxa de armadura transversal	
ρL	0,189	%	
ρpele	124	%	
densidade do aço	7800	kg/m <sup>3</sup>	
quantidade de aço em kg	533,39	Kg	
quantidade de fibras	728	Kg	

Fonte: William Obel.

### 5.3 TERCEIRO CENÁRIO

**Quadro 3. Dados utilizados no dimensionamento do terceiro cenário.**

Dimensões da vida	Propriedades dos materiais	Cargas na viga
$b_f = 120\text{cm};$	$f_{cd} = 42,86\text{MPa};$	Combinação normal: $q_k = 900\text{kN/m};$
$h = 165\text{ cm};$	$\sigma_{cd} = 36,43\text{MPa};$	Combinação quase permanente: $q_k = 870\text{ kN/m};$
$b_w = 40\text{cm};$	$f_{ctd} = 2,30\text{MPa};$	Combinação frequente: $q_k = 880\text{kN/m};$
$h_f = 15\text{cm};$	$f_{ctm} = 4,60\text{MPa};$	Carga devido as sobre cargas: $q_k = 50\text{kN/m};$
$L = 8\text{m}.$	$f_{ct} = 3,22\text{ MPa};$	Carga após da construção da parede: $q_k = 850\text{kN/m}$
$f_{ck} = 60\text{MPa};$	$f_{tj} = 3,72\text{MPa};$	

	$E_s = 210000 \text{ MPa};$	
	$E_{cs} = 36870 \text{ MPa}.$	

Fonte: William Obel.

**Tabela – 4. Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o terceiro cenário.**

<b>Tabela de resultados</b>			
<b>Parâmetros</b>	<b>Valores</b>	<b>Unidade</b>	<b>Observação</b>
Md	10080,00	kN.m	
As	165,35	cm <sup>2</sup>	
Mu	10080,00	kN.m	(ok)
Esforço cortante			
Vd	5040,00	kN	
$\tau_c$	1,38	Mpa	
$\tau_{sw}$	7,11	MPa	
$\rho_t$	1,05	%	
$\varphi$	1	Cm	
S	3,75	Cm	
Vc	819,34	kN	
Vsw	4220,66	kN	
Estados Limites de Serviço – ELS			
$\delta_i$	0,97	Cm	
$\delta_t$	2,26	Cm	< $\delta_{adm}$ (visual) (ok)
$\delta_{adm}$ (visual)	3,20	Cm	
$\delta_q$ (vibrações)	0,06	Cm	< $\delta_{adm}$ (vibrações) (ok)
$\delta_{adm}$ (vibrações)	2,29	Cm	
$\delta_g$ (após a construção da parede)	0,95	Cm	< $\delta_{adm}$ (A.C.P) (ok)
$\delta_{adm}$ (após a construção da parede)	1	Cm	
wk	0,09	Mm	<0,3mm (ok)
Concreto Armado com Fibras			
Esforço cortante			
$\sigma_f(wm)$	4,55	MPa	
Vf	2431,70	kN	
VRc	1715,41	kN	
Vu	4147,12	kN	<Vd = 5040,00kN (ok)
V*sw	892,88	kN	
Espaçamento devido a V*sw			
$\tau^*_{sw}$	1,50	MPa	
$\rho^*_t$	0,221	%	
S*	17,73	cm	adoto S* = 15cm
Momento absorvido pelas fibras			
Mf	1752,50	kN.m	
Relação entre o momento resistente do CA simples e o com Fibras			
$\lambda Mu$	17,39	% a mais	
Quantidade de armadura longitudinal diminuída			

A*s	27,38	cm <sup>2</sup>	
Quantidade de armadura de pele dispensada			
Ap,total	10,29	cm <sup>2</sup>	

Fonte: William Obel.

Assim como no primeiro cenário, no terceiro cenário foi verificado que o esforço cortante resistente ao substituir as armaduras transversais pelas fibras metálicas não foi suficiente para resistir aos esforços cortantes solicitantes. No entanto, foi verificado que devido à menor utilização de fibras metálicas, essa opção pode ser considerada economicamente viável. Conforme ilustrado na Tabela 5.

**Tabela 5- Análise econômica para o terceiro cenário.**

<b>Parâmetros</b>	<b>Valores</b>	<b>Unidade</b>	<b>Observação</b>
Ac	7800	cm <sup>2</sup>	
Vc	6,24	m <sup>3</sup>	Vol. de concreto
Fibras	80	kg/m <sup>3</sup>	
pt	0,83	% Taxa de armadura transversal	
ρL	0,46	%	
ρpele	0,17	%	
densidade do aço	7800	kg/m <sup>3</sup>	
quantidade de aço em kg	710,40	Kg	
quantidade de fibras	499,2	Kg	

Fonte: William Obel.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo permitiu a análise de dimensionamento das vigas de concreto armado a partir de três cenários distintos. Em todos os cenários considerou-se a possibilidade de substituir a armadura transversal ou parte dela segundo a capacidade de resistência da viga aos esforços solicitantes.

No primeiro cenário foi levado em consideração apenas as características mecânicas para a contribuição na melhoria da qualidade da viga em termos de resistência e durabilidade ao substituir uma parte da armadura transversal pelas fibras metálicas, sendo desconsiderado a viabilidade econômica. O segundo cenário foi observado que o mesmo não é economicamente viável, devido à necessidade de uma maior adição de fibras metálicas tendo em vista que o valor do Kg da fibra metálica atualmente no mercado brasileiro ser três vezes maior que o Kg do aço, no entanto apresentou boas condições no seu comportamento mecânico principalmente em termos de momento fletor resistente. Já o terceiro cenário por utilizar uma menor adição de fibras metálicas foi considerado viável economicamente além de contribuir no momento fletor resistente.

Desta forma, foi verificado que a presença das fibras metálicas nas vigas de concreto armado, independente de sua viabilidade econômica pode contribuir de forma significativa no comportamento mecânico das estruturas de concreto armado, principalmente para os esforços cortantes e momentos fletores, além disso, estudos realizados pela academia científica destacam que a fibra metálica também pode contribuir no detalhamento das armaduras facilitando a manobra devido a quantidade de aço utilizada nas estruturas.

Neste contexto, ficará a critério do projetista a escolha mais adequada para dimensionar a estrutura pretendida. Ressalta-se ainda que devido o preço do produto imposto pelo mercado ser alto, torna-se o consumo restrito e pouco acessível, interferindo na sua produção. Países como França e Canadá, são grandes exemplos de obras onde as estruturas de concreto são reforçadas com fibras metálicas o que pode comprovar uma grande demanda as indústrias e leva a um rebaixamento do preço do kg de fibras metálicas quase ou ao mesmo preço do kg de aço.

## REFERÊNCIAS

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREDO FILHO, Jasson Rodrigues de. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado segundo a NBR 6118: 2003 – 3ª edição. Livro.

ARAUJO, José Milton de. Curso de Concreto Armado. Livro.

FIGUEIREDO, Antônio Domingues de. Concreto com fibras de aço. Livro. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Civil, 2010. São Paulo. Disponível em: <<http://www.lem.ep.usp.br/pef2304/els.pdf>>. Acesso em: 08 fev. 2016.

CASANOVA, Pascal. Concreto reforçado com fibras metálicas: do material a estrutura. Estudo experimental e análise do comportamento de vigas submetidas à flexão e ao esforço cortante. Tese. Escola Nacional das pontes e calçadas, 1995. França. Disponível em: <[https://tel.archivesouvertes.fr/file/index/docid/523261/filename/1995TH\\_CASANOVA\\_P\\_NS19789.pdf](https://tel.archivesouvertes.fr/file/index/docid/523261/filename/1995TH_CASANOVA_P_NS19789.pdf)>. Acesso em: 08 fev. 2016.

BFUP, Grupo de trabalho. Concreto reforçado com fibras metálicas com alto desempenho. Documentos científicos e técnicos. Associação francesa da Engenharia Civil, jan, 2002. Disponível em:<  
[http://dtrf.cerema.fr/pdf/pj/Dtrf/0002/Dtrf0002989/DT2989.pdf?openerPage=resultats&qid=sdx\\_q0](http://dtrf.cerema.fr/pdf/pj/Dtrf/0002/Dtrf0002989/DT2989.pdf?openerPage=resultats&qid=sdx_q0)>. Acesso em: 08 fev. 2016.

SANTANA, Igor Vinicius. Estudo da influência das fibras metálicas no comportamento da aderência entre barras de aço e concretos de diferentes classes de resistência. Dissertação. Apresentada a escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, 9, 2014. Disponível em:  
<[http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/2014ME\\_IgorViniciusSantana.pdf](http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/2014ME_IgorViniciusSantana.pdf)>

## ANEXOS

## ANEXO A – Exemplo de cálculo 1.

Dimensões da viga (cm)			
------------------------	--	--	--

bf	70		
h	100		
yt		61,59	
d		90	
d'		10	
l		1000	
bw		20	
hf		15	

Propriedades dos materiais (Mpa)			
fyk	500		
fyd	435		
fck	45		
fcd		32,14	
$\sigma_{cd}$		27,32	
fctd		1,90	
fctm		3,80	
fct		2,66	
ftj		3,22	
Es		210000	
Ecs		31931,05	

Cargas na viga (kN/m)			
-----------------------	--	--	--

Dimensão da laje = 6x10

C (charneira)	3	m	
Altura da laje (h)	0,15	M	
Revestimento	1	kN/m <sup>2</sup>	
Sobre Carga,laje	50	kN/m <sup>2</sup>	
PP da laje	3,75	kN/m <sup>2</sup>	
Fator-Reação	0,7		
Combinação Normal			
Rl	114,975		
PP da viga	17,5		
Alvenaria	5,07		
Esp./Altura (m)	0,15	2,6	
sobre-carga,viga	0		
qk	137,55		

<b>Combinação Quase-Permanente</b>			
$\psi_2$	0,4		
Rl	51,975		
qk	74,55		
<b>Combinação Frequente</b>			
$\psi_1$	0,6		
Rl	72,975		
qk	95,55		
<b>carga devido as sobrecargas</b>			
Rl	105		
qk	105		
<b>carga após a construção da parede</b>			
Rl	9,975		
qk	32,55		

<b>Profundidade da linha neutra no estádio 2</b>			
A	B	C	
10	1191,902	-45396,153	C.A
Raiz $\Delta$	1799,021		
x	30,356	Cm	

### Concreto Armado

<b>Estado-Limite Último (ELU)</b>			
<b>Dimensionamento à Flexão</b>			
Mk	1719,31	kN.m	
Md	2407,04	kN.m	
$\mu$	0,15538		
$\beta_f$	0,17		Seção T
$\beta_w$	0,29		
$\xi_{lim}$	0,35000		
rcclim	0,20		
$\mu_{lim}$	0,17793		armadura simples
<b>Dimensionamento com armadura simples</b>			
$\mu_f$	0,15		
$\mu^*$	0,16189		
$\omega$	0,16981		
As	67,19	cm <sup>2</sup>	
<b>Armadura mínima</b>			
Ac	2750,00	cm <sup>2</sup>	
$\rho_{min}$	0,20	%	
As,min	5,50000	cm <sup>2</sup>	

<b>Momento Resistente da seção</b>			
$\epsilon_y$	2,07	‰	
$x_b$	56,55	cm	
$x$	19,99	cm	A seção não é superarmada
$A_f$	1050,00	cm <sup>2</sup>	
$A_w$	19,81	cm <sup>2</sup>	
$Z_f$	82,50	cm	
$Z_w$	74,50	cm	
$M_u$	2407,04	kN.m	passa

<b>Cisalhamento</b>			
$V_k$	687,73	kN	
$V_d$	962,82	kN	
<b>Verificação do Esmagamento da biela de concreto</b>			
$\alpha v_2$	0,82		
$\tau_{sd}$	5,35	MPa	
$\tau_{Rd2}$	6,16	MPa	O concreto não esmagou
$V_{Rd2}$	1109,31		
<b>Armadura Transversal</b>			
$\tau_c$	1,14	MPa	
$\tau_{sw}$	4,21	MPa	
$\rho_t$	0,62	% Taxa de Arm. Transversal	
$\phi$	1,00	cm	
$A_{sw}$	1,57	cm <sup>2</sup>	2 $\phi$ 10
$S$	12,66	cm	
$S_{máx}$	20,00	cm	
$V_{sw}$	757,1030015	kN	
$V_c$	204,9541377	kN	

<b>Estado Limite de Serviço (ELS)</b>			
$I_c$	2665956,439	cm <sup>4</sup>	
$\alpha$	1,2	seção T	
$M_r$	138,00	kN.m	
$M_a$	931,81	kN.m	

$\alpha e$	6,57667		
$x_2$	30,36	cm	
$I_2$	2164368,50	cm <sup>4</sup>	I no estádio 2
$I_{eq}$	2165997,78	cm <sup>4</sup>	I equivalente
$E I_{eq}$	691625,85	kN.m <sup>2</sup>	
$\delta_i$	1,40	cm	Flecha imediata
<b>Efeitos diferidos no tempo</b>			
$\xi(\infty)$	2		
$\xi(28)$	0,66259		
$\Delta\xi$	1,33741		
$\rho'$	0		
$\alpha_f$	1,33741		
<b>Flecha Total</b>			
$\delta_t$	3,28	cm	

<b>Verificação das flechas segundo a NBR 6118</b>			
<b>Aceitação visual</b>			
$\delta_{adm}$	4	cm	passa
<b>Deformação devido as sobrecargas (vibrações)</b>			
$\delta_q$	1,98	cm	
$\delta_{adm}$	2,86	cm	passa
<b>Deslocamento após a construção da parede</b>			
$\delta_g$	0,61	cm	

$\delta_{adm}$	1	cm	passa
----------------	---	----	-------

<b>Verificação da Abertura de Fissura - CAA 2 e 3</b>			
Acr	575	cm <sup>2</sup>	
$\rho_r$	0,11686	T.A. na região envolvida	
M	1194,31	kN.m	
$\sigma_s$	216,45	Mpa	
$\eta$	2,5	CA-50	
Wk	0,07	mm	passa

### Concreto Armado com Fibras

<b>Estado-Limite Último (ELU)</b>			
<b>Cisalhamento</b>			
Vk	687,725	kN	
Vd	962,815	kN	
<b>Verificação do Esmagamento da biela de concreto</b>			
$\tau_{sd}$	5,35	Mpa	
$\tau_{Rd2}$	7,08	Mpa	O concreto não esmagou
$\lambda_\tau$	1,15	Relação entre a tensão resistente do CA e CAF	

<b>Parcela de esforço cortante absorvida pelas fibras</b>			
$\sigma_f(wm)$	2,70	Mpa	
Vf	404,75	kN	
<b>Parcela de esforço cortante absorvida pela estrutura de concreto</b>			
fT	1,00	Fator de forma	
$\Delta\tau$	0,24	Fator de correção devido ao método utilizado	
$\rho_L$	3,73	% Taxa de armadura longitudinal	
Vc	496,44	kN	
Vu	901,19	kN	

V*sw	61,63	kN	
<b>Espaçamento devido a V*sw</b>			
$\tau^*_{sw}$	0,34	MPa	
$\rho^*t$	0,05	%	
S*	155,70	cm	

**ANEXO B – Exemplo de cálculo 2.**

<b>Dimensões da viga (cm)</b>			
bf		100	
h		140	
yt		78,65	
d		126	
d'		14	
l		1400	
bw		40	
hf		15	
<b>Propriedades dos materiais (Mpa)</b>			
fyk		500	
fyd		435	
fck		70	
fcd		50,00	
$\sigma_{cd}$		42,50	
fctd		2,55	
fctm		5,10	
fct		3,57	
ftj		4,02	
Es		210000	
Ecs		39825,02	

<b>Cargas na viga (kN/m)</b>			
Dimensão da laje = 6x10			
C (charneira)	5	m	
Altura da laje (h)	0,15	m	
Revestimento	1	kN/m <sup>2</sup>	
Sobre Carga,laje	50	kN/m <sup>2</sup>	
PP da laje	3,75	kN/m <sup>2</sup>	
Fator-Reação	0,7		
<b>Combinação Normal</b>			
Rl	191,625		
PP da viga	35		

Alvenaria	5,07		
Esp./Altura (m)	0,15	2,6	
sobre-carga, viga	0		
qk	231,70		
<b>Combinação Quase-Permanente</b>			
$\psi_2$	0,4		
Rl	86,625		
qk	126,70		
<b>Combinação Frequente</b>			
$\psi_1$	0,6		
Rl	121,625		
qk	161,70		
<b>carga devido as sobrecargas</b>			
Rl	175		
qk	175		
<b>carga após a construção da parede</b>			
Rl	16,625		
qk	56,70		

<b>Profundidade da linha neutra no estágio 2</b>			
A	B	C	
	20	1716,080	-109576,026 C.A
Raiz $\Delta$		3422,135	
x		42,651	cm

### Concreto Armado

#### Estado-Limite Último (ELU)

<b>Dimensionamento à Flexão</b>			
Mk	5676,53	kN.m	
Md	7947,14	kN.m	
$\mu$	0,11778		
$\beta_f$	0,12		Seção T
$\beta_w$	0,40		
$\xi_{lim}$	0,35000		
rcclim	0,18		
$\mu_{lim}$	0,16350		armadura simples
<b>Dimensionamento com armadura simples</b>			
$\mu_f$	0,11		
$\mu^*$	0,12651		
$\omega$	0,12572		

As	154,76	cm <sup>2</sup>	
<b>Armadura mínima</b>			
Ac	6500,00	cm <sup>2</sup>	
$\rho_{min}$	0,25	%	
As,min	16,25000	cm <sup>2</sup>	

<b>Momento Resistente da seção</b>			
$\epsilon_y$	2,07	‰	
xb	79,17	cm	
x	21,38	cm	A seção não é superarmada
Af	1500,00	cm <sup>2</sup>	
Aw	84,05	cm <sup>2</sup>	
Zf	118,50	cm	
Zw	109,95	cm	
Mu	7947,14	kN.m	passa

<b>Cisalhamento</b>			
Vk	1621,87	kN	
Vd	2270,61	kN	
<b>Verificação do Esmagamento da biela de concreto</b>			
$\alpha_v$	0,72		
$\tau_{sd}$	4,51	MPa	
$\tau_{Rd2}$	8,42	MPa	O concreto não esmagou
VRd2	4242,43008		
<b>Armadura Transversal</b>			
$\tau_c$	1,53	MPa	
$\tau_{sw}$	2,98	MPa	
$\rho_t$	0,44	% Taxa de Arm. Transversal	
$\phi$	1,00	Cm	
Asw	1,57	cm <sup>2</sup>	2 $\phi$ 10
S	8,95	Cm	
S <sub>máx</sub>	30,00	Cm	
Vsw	1498,67	kN	
Vc	770,44	kN	

**Estado Limite de Serviço (ELS)**

Ic	12192387,82	cm <sup>4</sup>	
$\alpha$	1,2	seção T	
Mr	663,49	kN.m	
Ma	3104,03	kN.m	
$\alpha e$	5,27307		
x2	42,65	Cm	
I2	7832749,09	cm <sup>4</sup>	I no estágio 2
Ieq	7875326,37	cm <sup>4</sup>	I equivalente
EIeq	3136350,09	kN.m <sup>2</sup>	
$\delta i$	2,02	Cm	Flecha imediata
<b>Efeitos diferidos no tempo</b>			
$\xi(\infty)$	2		
$\xi$ (28)	0,66259		
$\Delta\xi$	1,33741		
$\rho'$	0		
$\alpha f$	1,33741		
<b>Flecha Total</b>			
$\delta t$	4,72	Cm	

<b>Verificação das flechas segundo a NBR 6118</b>			
<b>Aceitação visual</b>			
$\delta_{adm}$	5,6	Cm	passa
<b>Deformação devido as sobrecargas (vibrações)</b>			
$\delta q$	2,79	Cm	
$\delta_{adm}$	4,00	Cm	passa
<b>Deslocamento após a construção da parede</b>			
$\delta g$	0,90	Cm	
$\delta_{adm}$	1	Cm	passa

<b>Verificação da Abertura de Fissura - CAA 2 e 3</b>			
Acr	1310	cm <sup>2</sup>	
$\rho_r$	0,11814	T.A. na região envolvida	
M	3961,53	kN.m	
$\sigma_s$	222,28	Mpa	
$\eta$	2,5	CA-50	
Wk	0,07	Mm	passa

<b>Estado-Limite Último (ELU)</b>			
<b>Momento Resistente da seção reforçado com fibras</b>			
Mu	7947,14	kN.m	
$\rho_t$	0,44	%	
$\sigma_f$	1,91	Mpa	
Mf	519,34	kN.m	
MRes	8466,48	kN.m	
Aumento ( $\lambda M$ )	6,53	%	
<b>Diminuição da armadura longitudinal devido as fibras</b>			
$\mu^{**}$	0,007697056		
$\omega^*$	0,007726908		
A*s	9,51	cm <sup>2</sup>	1 $\phi$ 25
<b>Quantidade de armadura de pele dispensada</b>			
Ac,alma	5000	cm <sup>2</sup>	
As,pele	5	cm <sup>2</sup>	8 $\phi$ 16
As,pele(disp.)	6,26	cm <sup>2</sup>	

<b>Cisalhamento</b>			
Vk	1621,87	kN	
Vd	2270,61	kN	
<b>Verificação do Esmagamento da biela de concreto</b>			
$\tau_{sd}$	4,51	Mpa	
$\tau_{Rd2}$	9,51	Mpa	O concreto não esmagou
$\lambda\tau$	1,13	Relação entre a tensão resistente do CA e CAF	

<b>Parcela de esforço cortante absorvida pelas fibras</b>			
$\sigma_f(wm)$	1,91	Mpa	
Vf	846,97	kN	
<b>Parcela de esforço cortante absorvida pela estrutura de concreto</b>			
fT	1,00	Fator de forma	
$\Delta\tau$	0,24	Fator de correção devido ao método utilizado	
$\rho_L$	3,07	% Taxa de armadura longitudinal	
Vc	1624,41	kN	
Vu	2471,39	kN	

<b>Comparação economica</b>			
Ac	6500	cm <sup>2</sup>	
Vc	9,1	m <sup>3</sup>	Vol. de concreto
Fibras	80	kg/m <sup>3</sup>	
Pt	0,44	% Taxa de Arm. Transversal	
ρL	0,189	% Taxa de Arm. Longitudinal	
ρAP	0,124	% Taxa de Arm. De pele	
Quantidade de aço	0,008	m <sup>3</sup>	
densidade do aço	7800	kg/m <sup>3</sup>	
quantidade de aço em kg	533,39	kg	
quantidade de fibras	728,00	kg	
Relação entre as quantidades	1,4		
kg de Fibras	10	R\$	
kg de aço	3,60	R\$	
Preço total de fibras	7280	R\$	
Preço total de aço	1920,20	R\$	
Relação fibras/aço	3,79		

### ANEXO C – Exemplo de cálculo 3.

<b>Dimensões da viga (cm)</b>			
bf		120	
h		165	
yt		94,04	
d		148,5	
d'		16,5	
l		800	
bw		40	
hf		15	
<b>Propriedades dos materiais (Mpa)</b>			
fyk		500	
fyd		435	
fck		60	
fcd		42,86	
σcd		36,43	
fctd		2,30	
fctm		4,60	
fct		3,22	
ftj		3,72	
Es		210000	
Ecs		36870,80	

<b>Cargas na viga (kN/m)</b>			
<b>Combinação Normal</b>			
qk	900,00		
<b>Combinação Quase-Permanente</b>			
$\psi_2$	0,4		
qk	870,00		
<b>Combinação Freqüente</b>			
$\psi_1$	0,6		
qk	880,00		
<b>carga devido as sobrecargas</b>			
qk	50		
<b>carga após a construção da parede</b>			
qk	850,00		
<b>Profundidade da linha neutra no estádio 2</b>			
A	B	C	
20	2141,740	-148848,385	
Raiz $\Delta$	4061,394		
x	47,99134976	cm	

### Concreto Armado

#### Estado-Limite Último (ELU)

<b>Dimensionamento à Flexão</b>			
Mk	7200,00	kN.m	
Md	10080,00	kN.m	
$\mu$	0,10456		
$\beta_f$	0,10		Seção T
$\beta_w$	0,33		
$\xi_{lim}$	0,35000		
rcclim	0,16		
$\mu_{lim}$	0,14421		armadura simples
<b>Dimensionamento com armadura simples</b>			
$\mu_f$	0,10		
$\mu^*$	0,12188		
$\omega$	0,11080		
As	165,35	cm <sup>2</sup>	

<b>Armadura mínima</b>			
Ac	7800,00	cm <sup>2</sup>	
$\rho_{min}$	0,25	%	
As,min	19,50000	cm <sup>2</sup>	

<b>Momento Resistente da seção</b>			
$\epsilon_y$	2,07	‰	
x <sub>b</sub>	93,31	cm	
x	24,20	cm	A seção não é superarmada
A <sub>f</sub>	1800,00	cm <sup>2</sup>	
A <sub>w</sub>	174,43	cm <sup>2</sup>	
Z <sub>f</sub>	141,00	cm	
Z <sub>w</sub>	131,32	cm	
M <sub>u</sub>	10080,00	kN.m	passa

<b>Cisalhamento</b>			
V <sub>k</sub>	3600	kN	
V <sub>d</sub>	5040	kN	
<b>Verificação do Esmagamento da biela de concreto</b>			
$\alpha_v$	0,76		
$\tau_{sd}$	8,48	MPa	
$\tau_{Rd2}$	7,62	MPa	O concreto esmagou
<b>Armadura Transversal</b>			
$\tau_c$	1,38	MPa	
$\tau_{sw}$	7,11	MPa	
$\rho_t$	1,05	% Taxa de Arm. Transversal	
$\phi$	1,00	cm	
A <sub>sw</sub>	1,57	cm <sup>2</sup>	2 $\phi$ 10
S	3,75	cm	
S <sub>máx</sub>	20,00	cm	

<b>Estado Limite de Serviço (ELS)</b>			
I <sub>c</sub>	20707788,46	cm <sup>4</sup>	
$\alpha$	1,2	seção T	
M <sub>r</sub>	850,48	kN.m	
M <sub>a</sub>	6960,00	kN.m	
$\alpha_e$	5,69556		
x <sub>2</sub>	47,99	Cm	
I <sub>2</sub>	12977168,78	cm <sup>4</sup>	I no estágio 2

I <sub>eq</sub>	12991273,85	cm <sup>4</sup>	I equivalente
EI <sub>eq</sub>	4789986,79	kN.m <sup>2</sup>	
δ <sub>i</sub>	0,97	Cm	Flecha imediata
<b>Efeitos diferidos no tempo</b>			
ξ(∞)	2		
ξ (28)	0,66259		
Δξ	1,33741		
ρ'	0		
α <sub>f</sub>	1,33741		
<b>Flecha Total</b>			
δ <sub>t</sub>	2,26	Cm	

<b>Verificação das flechas segundo a NBR 6118</b>			
<b>Aceitação visual</b>			
δ <sub>adm</sub>	3,2	Cm	passa
<b>Deformação devido as sobrecargas (vibrações)</b>			
δ <sub>q</sub>	0,06	Cm	
δ <sub>adm</sub>	2,29	Cm	passa
<b>Deslocamento após a construção da parede</b>			
δ <sub>g</sub>	0,95	Cm	
δ <sub>adm</sub>	1	Cm	passa

<b>Verificação da Abertura de Fissura - CAA 2 e 3</b>			
A <sub>cr</sub>	1410	cm <sup>2</sup>	
ρ <sub>r</sub>	0,11727	T.A. na região envolvida	
M	7040,00	kN.m	
σ <sub>s</sub>	310,55	Mpa	
η	2,5	CA-50	
W <sub>k</sub>	0,09	Mm	passa

### Concreto Armado com Fibras

<b>Estado-Limite Último (ELU)</b>			
<b>Momento Resistente da seção</b>			
σ <sub>p</sub> (w <sub>m</sub> ) = σ <sub>f</sub> (w <sub>m</sub> )	4,55	MPa	
M <sub>f</sub>	1752,50	kN.m	
M <sub>u</sub>	11832,50	kN.m	

<b>Relação entre o momento resistente do CA simples e o com Fibras</b>			
$\lambda\mu$	17,39	%	Sobre momento
<b>Diminuição da armadura longitudinal devido as fibras</b>			
$\mu^{**}$	0,02		
$\omega^*$	0,02		
$A^*s$	27,38	cm <sup>2</sup>	
<b>Quantidade de armadura de pele dispensada</b>			
Ac,alma	6000,00	cm <sup>2</sup>	
As,pele	6	cm <sup>2</sup>	10Φ16
As,pele(disp.)	10,29	cm <sup>2</sup>	

<b>Cisalhamento</b>			
Vk	3600	kN	
Vd	5040	kN	
<b>Verificação do Esmagamento da biela de concreto</b>			
$\tau_{sd}$	8,48	Mpa	
$\tau_{Rd2}$	8,58	Mpa	O concreto não esmagou
$\lambda\tau$	12,69	%	

<b>Parcela de esforço cortante absorvida pelas fibras</b>			
$\sigma_f(wm)$	4,55375033	Mpa	
Vf	2431,702676	kN	
<b>Parcela de esforço cortante absorvida pela estrutura de concreto</b>			
fT	1	Fator de forma	
$\Delta\tau$	0,24	Fator de correção devido ao método utilizado	
$\rho_L$	2,78	% Taxa da armadura longitudinal	
Vc	1715,41		
Vu	4147,12	kN	
V*sw	892,88	kN	
<b>Espaçamento devido a V*sw</b>			
$\tau^{*sw}$	1,50	MPa	
$\rho^{*t}$	0,221	%	
S*	17,73	cm	adoto S* = 15cm

## ANEXO D – Resumo dos resultados

Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o primeiro cenário.

Concreto armado sem fibras				Concreto armado com fibras			
Parâmetros	Valores	Unidade	Observação	Parâmetros	Valores	Unidade	Observação
Md	2407,04	kN.m		$\sigma_f(wm)$	2,7	MPa	
As	67,19	cm <sup>2</sup>		Mf	165,49	kN.m	
Mu	2407,04	kN.m	(ok)	Mu,tot	2572,53	kN.m	
Vd	962,82	kN		Vf	404,75	kN	
Vc	204,95	kN		Vu	901,19	kN	<Vd = 962,82kN
Vsw	757,1	kN		V*sw	61,63	kN	
qt	0,62	%		q*t	0,05	%	
S	12,66	cm		S*	155,7	cm	Espaçamento máximo

Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o segundo cenário

Concreto Armado sem Fibras				Concreto Armado com Fibras			
Parâmetros	Valores	Unidade	Observação	Parâmetros	Valores	Unidade	Observação
Md	7947,14	kN.m		$\sigma_f(wm)$	1,91	MPa	
As	154,76	cm <sup>2</sup>		Mf	519,34	kN.m	
Mu	7947,14	kN.m		Mu,tot	8466,48	kN.m	
Vd	2270,61	kN		Vf	846,97	kN	
Vc	910,96	kN		Vc	1624,41	kN	
Vsw	1358,29	kN		Vu	2471,39	kN	>Vd = 2270,61kN (ok)
qt	0,4	%					

Resultados obtidos com aplicação das fórmulas para o terceiro cenário.

Concreto Armado sem Fibras				Concreto Armado com Fibras			
Parâmetros	Valores	Unidade	Observação	Parâmetros	Valores	Unidade	Observação
Md	10080	kN.m		$\sigma_f(wm)$	4,55	MPa	
As	165,35	cm <sup>2</sup>		Mf	1752,5	kN.m	
Mu	10080	kN.m	(ok)	Mu, tot	11832,5	kN.m	
Vd	5040	kN		Vf	2431,7	kN	
Vc	819,34	kN		Vu	4147,12	kN	<Vd = 5040,00kN
Vsw	4220,66	kN		V*sw	892,88	kN	
qt	1,05	%		q*t	0,221	%	
S	3,75	cm		S*	17,73	cm	adoto S* = 15cm