



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Nathan Lima Pessoa

**Caracterização de séries temporais em sistemas físicos:** do transporte eletrônico em condutores mesoscópicos à dinâmica da pandemia de COVID-19

Recife

2022

Nathan Lima Pessoa

**Caracterização de séries temporais em sistemas físicos:** do transporte eletrônico em condutores mesoscópicos à dinâmica da pandemia de COVID-19

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Física.

**Área de Concentração:** Dinâmica não-linear, Caos e Sistemas Complexos

**Orientador:** Antônio Murilo Santos Macêdo

**Coorientador:** Anderson Luiz da Rocha e Barbosa

Recife

2022

Catálogo na fonte  
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

P475c Pessoa, Nathan Lima  
Caracterização de séries temporais em sistemas físicos: do transporte eletrônico em condutores mesoscópicos à dinâmica da pandemia de COVID-19 / Nathan Lima Pessoa. – 2022.  
110 f.: il., fig.

Orientador: Antônio Murilo Santos Macêdo.  
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Física, Recife, 2022.

Inclui referências.

1. Dinâmica não-linear. 2. Física mesoscópica. I. Macêdo, Antônio Murilo Santos (orientador). II. Título.

515.39                      CDD (23. ed.)                      UFPE - CCEN 2022-112

**NATHAN LIMA PESSOA**

**CARACTERIZAÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS EM SISTEMAS FÍSICOS:  
DO TRANSPORTE ELETRÔNICO EM CONDUTORES MESOSCÓPICOS À  
DINÂMICA DA PANDEMIA DE COVID-19**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada em: 29/04/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo  
Orientador  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Luiz Felipe Cavalcanti Pereira  
Examinador Interno  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Shahram Jalalzadeh  
Examinador Interno  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Gerson Ferreira Junior  
Examinador Externo  
Universidade Federal de Uberlândia

---

Prof. Luca Roberto Augusto Moriconi  
Examinador Externo  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

A Raimundo, meu pai (*in memoriam*).

## AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Aline, pelo apoio, companheirismo e paciência durante todo o período de realização do curso de Doutorado. Sem a presença dela, este trabalho teria sido muito mais difícil.

A todas as pessoas da minha família, que sempre me ajudaram e torceram por mim, especialmente minha mãe, Ângela, minha irmã, Nataly, minha sobrinha, Helena, meu cunhado, Arley, meu tio, Carlos, minha sogra, Fabíola, e meu sogro, Jeová.

Ao meu orientador, Antônio Murilo, e ao meu coorientador, Anderson Barbosa, por todos os ensinamentos e pela dedicação ao processo de supervisão do trabalho.

A todos os desenvolvedores de *softwares* gratuitos, que foram primordiais para a realização deste trabalho.

A Giovani Vasconcelos, pelas contribuições dadas ao trabalho, e a Arthur Brum, por compartilhar seus conhecimentos em ajustes numéricos de dados.

À Universidade Federal Rural de Pernambuco, pela concessão de afastamento para a conclusão da Tese de Doutorado.

A todos os meus amigos de Natal-RN, que torceram bastante por mim.

## RESUMO

Esta Tese apresenta estudos separados de quatro sistemas físicos diferentes. No primeiro, é realizada uma análise de flutuações destendenciadas multifractal dos dados da magnetocondutância de dois sistemas mesoscópicos paradigmáticos — fios desordenados e cavidades balísticas caóticas — com estruturas de rede de dois tipos diferentes. Observamos a presença de multifractalidade em todos os casos e que esta é mais intensa no regime quântico de condução, isto é, quando o número de canais de propagação é pequeno. Argumenta-se que este comportamento é devido a correlações induzidas pelo campo magnético, as quais podem ser caracterizadas por meio da distribuição de incrementos da “série temporal” correspondente, em que o campo magnético faz o papel de um tempo fictício. Mais especificamente, é mostrado que as distribuições de incrementos de condutância podem ser bem ajustadas por funções de densidade de probabilidade  $q$ -gaussianas e que o valor do parâmetro  $q$  associado é um número útil para medir o grau de multifractalidade de flutuações da magnetocondutância. No segundo estudo, consideramos um nanofio conectado a quatro terminais e caracterizamos as flutuações mesoscópicas na região entre os dois primeiros platôs do Efeito Hall Quântico por meio de uma análise multifractal. Foi observado que as flutuações dos coeficientes de transmissão longitudinal e transversal causadas pela variação do campo magnético são multifractais, o que pode ser associado a um comportamento “turbulento” do sistema, que o leva a ter uma dinâmica de múltiplas escalas que pode ser observada através do padrão espacial irregular do mapa de sua densidade local de estados na Transição Hall. No terceiro trabalho, mostra-se que é possível obter as distribuições de condutância e potência de ruído de disparo de cavidades mesoscópicas das três classes de simetria quiral usando o modelo de *hopping* aleatório, com o qual ainda analisamos o *crossover* das classes quiral ortogonal para as classes quirais unitária e simplética variando o campo magnético e o parâmetro de Rashba do acoplamento *spin*-órbita, respectivamente. O último trabalho consiste de uma modelagem matemática do número de mortes causadas pela COVID-19 usando uma generalização de uma abordagem conhecida como *pathway model* para ajustar numericamente os dados de diferentes países em que ocorreram mais do que uma onda de infecção.

**Palavras-chaves:** multifractalidade; física mesoscópica; efeito Hall quântico; simetria quiral; COVID-19.

## ABSTRACT

This Thesis presents studies of four different physical systems separately. In the first study, we perform a multifractal detrended fluctuation analysis of the magnetoconductance data of two standard types of mesoscopic systems: a disordered nanowire and a ballistic chaotic billiard, with two different lattice structures. We observe in all cases that multifractality is generally present and that it becomes stronger in the quantum regime of conduction, i.e., when the number of open scattering channels is small. We argue that this behavior originates from correlations induced by the magnetic field, which can be characterized through the distribution of conductance increments in the corresponding “stochastic time series,” with the magnetic field playing the role of a fictitious time. More specifically, we show that the distributions of conductance increments are well fitted by  $q$ -gaussians and that the value of the parameter  $q$  is a useful quantitative measure of multifractality in magnetoconductance fluctuations. The second study brings a characterization in terms of a multifractal analysis of the mesoscopic fluctuations which are observed in the inter-plateau region of the Integer Quantum Hall Effect which takes place in a four-probe disordered nanowire. It was observed that the fluctuations of the longitudinal and transversal transmission coefficients caused by the variation of the applied magnetic field are multifractal, which can be associated to a turbulent-like behavior, which leads the system to have a multiscale dynamics that can be observed through the irregular spacial pattern of its local density of states map in the Integer Hall Transition. In the third work, we show that it possible to obtain the conductance and shotnoise power distributions of mesoscopic cavities belonging to the three chiral classes of Random Matrix Theory using the random hopping model, which can also be used to model the crossover from the chiral orthogonal to the chiral unitary and symplectic classes by varying the magnetic field strength and the Rashba spin-orbit coupling parameter, respectively. The last work consists of a mathematical modeling of the number of deaths attributed to the COVID-19 pandemics by means of a generalization of the pathway model approach to fit data from different countries at which more than one infection wave have occurred.

**Keywords:** multifractality; mesoscopic physics; quantum Hall effect; chiral symmetry; COVID-19.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Exemplo de flutuações da condutância obtidas numericamente originárias da variação (a) da distribuição da desordem, (b) campo magnético e da (c) energia de Fermi. . . . . 23
- Figura 2 – (a) Flutuações da condutância  $G$ , medida em unidades de  $e^2/h$ , de quatro fios de ouro com comprimentos diferentes em função do campo magnético  $B$ , medido em T (teslas). Os gráficos foram deslocados verticalmente. Flutuações da resistência, medida em  $\Omega$  (ohms) de um estádio aberto (b) e de um bilhar de Sinai (c) em função do campo magnético, medido em T. As imagens dos bilhares foram obtidas através de microscopia eletrônica de varredura. . . . . 24
- Figura 3 – Gráfico da densidade de probabilidade  $P(T)$  do elétron permanecer por um tempo no mínimo igual a  $T$  dentro de uma cavidade caótica cuja forma é mostrada no canto inferior esquerdo. A forma da trajetória do elétron em um espaço de fase com estrutura hierárquica é mostrada no canto superior direito. . . . . 25
- Figura 4 – (a) Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura do transistor de efeito de campo de grafeno estudado por (AMIN et al., 2018). (b) Curva típica das flutuações da magnetocondutância do transistor mostrado em (a) à temperatura de 20 mK a submetido a uma tensão de 0.2 V. . . . . 26
- Figura 5 – Ilustração da representação diagramática de trajetórias semiclássicas. . . . 27
- Figura 6 – Condutância de um ponto de contato quântico em função da voltagem aplicada ao *gate*, que controla a largura da abertura entre os dois contatos. 30
- Figura 7 – Representação esquemática de uma região de espalhamento conectada a dois guias. Os vetores  $a^+$  e  $a^-$  representam os modos propagantes que entram e saem, respectivamente, da região de espalhamento pelo guia da esquerda. Os vetores  $b^-$  e  $b^+$  representam os modos propagantes que entram e saem, respectivamente, da região de espalhamento pelo guia da direita. . 32

- Figura 8 – Representação esquemática de um nanofio com rede hexagonal e borda *armchair*. Os sítios pertencentes às duas sub-redes distintas do sistema são representados em azul e laranja. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra. 38
- Figura 9 – Estrutura de bandas dos guias de largura  $W_A = 11\sqrt{3}a$  em uma rede hexagonal com borda *armchair*. A energia de Fermi  $E_F$  é medida dada em múltiplos do parâmetros de *hopping*  $t_0$  e o número de onda de Fermi  $k_F$  em múltiplos de  $1/a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede. . . . . 38
- Figura 10 – Gráfico da condutância adimensional  $g$  de um nanofio de grafeno com bordas *armchair* conectado a dois terminais através de guias de largura  $W_A = 11\sqrt{3}a$  em função da energia de Fermi  $E_F$  medida em unidades do parâmetro de *hopping*  $t_0$ . O símbolos circulares indicam os pontos cujos valores da energia de Fermi foram escolhidos para modelar sistemas com os números de canais desejados,  $N = 1, 2, 5, 10$ . . . . . 39
- Figura 11 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de um nanofio desordenando de grafeno com borda *armchair* com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente. . . . . 40
- Figura 12 – Gráfico em escala log-log das funções  $F_p(s)$  para  $p = -5$  (círculos pretos),  $p = -3$  (círculos vermelhos),  $p = -1$  (círculos verdes),  $p = 1$  (círculos azuis),  $p = 3$  (círculos magentas) e  $p = 5$  (círculos laranjas) obtidos a partir da série de condutâncias em função do fluxo magnético mostrada na Figura 11(a). As linhas representam ajustes dos valores de  $F_p(s)$  por leis de potência, conforme a Equação 3.6, com as mesmas cores. . . . . 42
- Figura 13 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  da série de condutâncias mostrada na Figura 11(a). . . . 42
- Figura 14 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez nanofios desordenados de grafeno com borda *armchair* com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes. 43

- Figura 15 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de nanofios de grafeno com borda *armchair* com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1. . . . . 44
- Figura 16 – Representação esquemática de um nanofio com rede hexagonal e borda *zigzag*. Os sítios pertencentes às duas sub-redes distintas do sistema são representados em azul e laranja. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra. 46
- Figura 17 – Estrutura de bandas dos guias de largura  $W_Z = 67a/2$  em uma rede hexagonal com borda *zigzag*. A energia de Fermi  $E_F$  é medida dada em múltiplos do parâmetros de *hopping*  $t_0$  e o número de onda de Fermi  $k_F$  em múltiplos de  $1/a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede. . . . . 47
- Figura 18 – Gráfico da condutância adimensional  $g$  de um nanofio de grafeno com bordas *zigzag* conectado a dois terminais através de guias de largura  $W_Z = 67a/2$  em função da energia de Fermi  $E_F$  medida em unidades do parâmetro de *hopping*  $t_0$ . Os símbolos circulares indicam os pontos cujos valores da energia de Fermi foram escolhidos para modelar sistemas com os números de canais desejados,  $N = 1, 3, 5, 11$ . . . . . 47
- Figura 19 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de um nanofio desordenando de grafeno com borda *zigzag* com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 3$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 11$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente. . . . . 48
- Figura 20 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez nanofios desordenados de grafeno com borda *zigzag* com  $N = 1$  (em azul),  $N = 3$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 11$  (em marrom) modos propagantes. 48

- Figura 21 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de nanofios de grafeno com borda *zigzag* com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 3$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 11$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 2. . . . . 49
- Figura 22 – Representação esquemática de um gás de elétrons bidimensional com rede quadrada. Os sítios pertencentes à região de espalhamento — o 2DEG propriamente dito — são representados em azul. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra. . . . . 50
- Figura 23 – Estrutura de bandas dos guias de largura  $W = 31a$  em uma rede quadrada. A energia de Fermi  $E_F$  é medida dada em múltiplos do parâmetros de *hopping*  $t_0$  e o número de onda de Fermi  $k_F$  em múltiplos de  $1/a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede. . . . . 51
- Figura 24 – Gráfico da condutância adimensional  $g$  de um 2DEG conectado a dois terminais através de guias de largura  $W = 31a$  em função da energia de Fermi  $E_F$  medida em unidades do parâmetro de *hopping*  $t_0$ . Os símbolos circulares indicam os pontos cujos valores da energia de Fermi foram escolhidos para modelar sistemas com os números de canais desejados,  $N = 1, 2, 5, 10$ . . . 51
- Figura 25 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de um gás de elétrons bidimensional com rede quadrada com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente. 52
- Figura 26 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes. 52

- Figura 27 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1. . . . . 53
- Figura 28 – Representação esquemática de uma cavidade balística caótica com rede hexagonal. Os sítios pertencentes às duas sub-redes distintas do sistema são representados em azul e laranja. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra. . . . . 54
- Figura 29 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de uma cavidade balística caótica de grafeno com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente. . . . . 55
- Figura 30 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez cavidades balísticas caóticas de grafeno com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes. . . . . 55
- Figura 31 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de cavidades balísticas caóticas de grafeno com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1. . . . . 56

- Figura 32 – Representação esquemática de uma cavidade balística caótica bidimensional com rede quadrada. Os sítios pertencentes à região de espalhamento — a 2DCB propriamente dita — são representados em azul. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra. . . . . 57
- Figura 33 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de uma cavidade balística caótica com rede quadrada com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente. 58
- Figura 34 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez cavidades balísticas caóticas com rede quadrada com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes. . . . . 58
- Figura 35 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de cavidades balísticas caóticas com rede quadrada com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1. . . . . 59
- Figura 36 – Dependência (a) da largura do espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  e (b) do valor de  $q$  das distribuições  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam às distribuições de incrementos de condutância  $\Delta g$  divididos por  $\Delta\phi$ . Os símbolos pretos, azuis, vermelhos, verdes e violetas representam, respectivamente, os resultados para cavidades balísticas caóticas bidimensionais com rede quadrada (2DCB), gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada (2DEG), cavidades balísticas caóticas de grafeno (GCB), nanofios de grafeno com borda *armchair* (AGNR) e nanofios de grafeno com borda *zigzag* (ZGNR). . . . . 62

- Figura 37 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  de uma realização de série da condutância em função do fluxo magnético de uma cavidade caótica balística bidimensional com rede quadrada (2DCB) (linhas azuis) e da mesma série após embaralhada (linhas vermelhas). . . . . 63
- Figura 38 – Resistência  $R_{\rho\rho}$  de um 2DEG construído em um MOSFET de silício (parte superior) e resistência Hall (parte inferior) medidas em função da voltagem  $V_g$  aplicada ao *gate* em um regime de valores de  $V_g$  na qual o primeiro nível de Landau é completamente preenchido. O dispositivo tem comprimento  $L = 400$  nm e largura  $W = 50$  nm, as pontas de prova foram posicionadas com separação  $L_{\rho\rho} = 130$   $\mu$ m e o sistema foi submetido a um campo magnético de intensidade  $B = 13$  T. . . . . 65
- Figura 39 – Representação esquemática do sistema para estudo do efeito Hall quântico. Um fio desordenado (área sombreada) é conectado a quatro terminais e submetido a um campo magnético  $\vec{B}$  aplicado perpendicularmente à superfície do sistema. Os terminais são submetidos a voltagens  $V_i$ , com  $i = 1,2,3,4$ , onde  $V_1 > V_2, V_3, V_4$ . . . . . 67
- Figura 40 – Exemplo de série dos coeficientes de transmissão longitudinal (em vermelho) e transversal (em azul),  $T_{xx}$  e  $T_{xy}$ , em função do fluxo magnético de um nanofio desordenado entre o segundo e o primeiro platô Hall. . . . . 67
- Figura 41 – Densidade local de estados nas proximidades da região de transição entre o segundo e o primeiro nível de Landau para (a)  $\phi = 0,50$ , (b)  $\phi = 0,52$ , (c)  $\phi = 0,54$ , (d)  $\phi = 0,56$ , (e)  $\phi = 0,58$ , (f)  $\phi = 0,60$ , (g)  $\phi = 0,62$  e (h)  $\phi = 0,64$ . Os quatro guias são mostrados na cor cinza. A barra orientada à direita indica que regiões com valores baixos (altos) da LDOS são indicados por pontos em tons de vermelho (azul). . . . . 69

- Figura 42 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das “séries temporais” dos coeficientes de transmissão longitudinal (em vermelho) e transversal (em azul) de 20 nanofios desordenados conectados a quatro terminais. Os símbolos (triângulos vermelhos e círculos azuis) indicam os valores efetivamente calculados. As linhas tracejadas em (a) são segmentos de reta unindo pontos vizinhos. As linhas tracejadas em (b) são as funções quadráticas que melhor se ajustam aos valores de  $f(\alpha)$ . . . . . 70
- Figura 43 – Histogramas das razões  $r$  entre espaçamentos de níveis energéticos consecutivos de cavidades mesoscópicas retangulares integrável — símbolos circulares azuis — e pertencentes às classes de de simetria de Wigner-Dyson ortogonal ( $\beta = 1$ ) — símbolos quadrados vermelhos —, unitária ( $\beta = 2$ ) — símbolos losangulares verdes — e simplética ( $\beta = 4$ ) — símbolos triangulares marrons — obtidos com o modelo de *hopping* aleatório. As linhas cheias são as expressões analíticas das respectivas distribuições dadas pelas Equações 5.4 e 5.3 e têm o mesma correspondência entre as cores e os tipos de sistemas que os símbolos. . . . . 77
- Figura 44 – Distribuição da condutância,  $P(g)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral ortogonal ( $\beta = 1$ ) com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$ , e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $P(g)$ . 79
- Figura 45 – Distribuição da potência de ruído de disparo,  $W(p)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral ortogonal ( $\beta = 1$ ) com  $N_1 = N_2 = 1$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $W(p)$ . . . . . 80
- Figura 46 – Distribuição da condutância,  $P(g)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral unitária ( $\beta = 2$ ) com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$ , e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $P(g)$ . 82

- Figura 47 – Distribuição da potência de ruído de disparo,  $W(p)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral unitária ( $\beta = 2$ ) com  $N_1 = N_2 = 1$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $W(p)$ . . . . . 82
- Figura 48 – Distribuição da condutância,  $P(g)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral simplética ( $\beta = 4$ ) com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$ , e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $P(g)$ . 84
- Figura 49 – Distribuição da potência de ruído de disparo,  $W(p)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral simplética ( $\beta = 4$ ) com  $N_1 = N_2 = 1$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $W(p)$ . . . . . 84
- Figura 50 – Evolução dos histogramas da condutância de cavidades mesoscópicas com simetria quiral com a aplicação gradativa de um fluxo magnético  $\phi$ . De (a) para (e), o valor de  $\phi$  varia de zero até  $1,6 \times 10^{-4}$  com passos de  $4 \times 10^{-5}$ . 85
- Figura 51 – Evolução dos histogramas da condutância de cavidades mesoscópicas com simetria quiral com o aumento gradativo do parâmetro  $\alpha$  de acoplamento *spin*-órbita tipo Rashba. De (a) para (e), o valor de  $\alpha$  varia de zero até  $3,5 \times 10^{-2}$  com passos de  $8,75 \times 10^{-3}$ . . . . . 86
- Figura 52 – (a) Gráfico da função dada pelo *pathway model* (Equação 6.3) para o número diário de mortes em função do tempo. (b) Gráfico da função dada pela Equação 6.4 para o número acumulado de mortes em função do tempo. Nas duas curvas, os parâmetros são  $C = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha = 3,3$ ,  $q = 1,4$ ,  $\beta = 1 \times 10^{-5}$  e  $\gamma = 3$ . . . . . 90
- Figura 53 – Gráfico de  $q(t)$  da função dada pelo *pathway model* com quatro ondas de infecção que melhor se ajusta aos dados do número diário de mortes do Japão. Na figura,  $q_1 = 2,11$ ,  $q_2 = 1,23$ ,  $\rho_1 = 0,125$ ,  $t_1 = 166$ ,  $q_3 = 2,09$ ,  $\rho_2 = 0,180$ ,  $t_2 = 375$ ,  $q_4 = 2,32$ ,  $\rho_3 = 0,162$  and  $t_3 = 495$ . . . . . 92

Figura 54 – Coluna da esquerda: Dados do número diário de mortes (círculos verdes) atribuídas à COVID-19 para (a) Austrália, (c) Brasil, (e) Canadá e (g) Venezuela até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam as funções dadas pelo generalização do *pathway model* para duas ondas que melhor se ajustam aos dados empíricos. Coluna da direita: Dados do número acumulado de mortes (círculos verdes) para (b) Austrália, (d) Brasil, (f) Canadá e (h) Venezuela até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam a integral da curva do *pathway model* mostrada nos gráficos da coluna da esquerda. . . . . 95

Figura 55 – Coluna da esquerda: Dados do número diário de mortes (círculos verdes) atribuídas à COVID-19 para (a) Áustria, (c) Itália, (e) África do Sul e (g) Estados Unidos até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam as funções dadas pelo generalização do *pathway model* para três ondas que melhor se ajustam aos dados empíricos. Coluna da direita: Dados do número acumulado de mortes (círculos verdes) para (b) Áustria, (d) Itália, (f) África do Sul e (h) Estados Unidos até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam a integral da curva do *pathway model* mostrada nos gráficos da coluna da esquerda. . . . . 97

Figura 56 – Coluna da esquerda: Dados do número diário de mortes (círculos verdes) atribuídas à COVID-19 para (a) Irã, (c) Japão, (e) Marrocos e (g) Turquia até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam as funções dadas pelo generalização do *pathway model* para quatro ondas que melhor se ajustam aos dados empíricos. Coluna da direita: Dados do número acumulado de mortes (círculos verdes) para (b) Irã, (d) Japão, (f) Marrocos e (h) Turquia até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam a integral da curva do *pathway model* mostrada nos gráficos da coluna da esquerda. . . . . 99

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros $q$ , $\beta$ e $x_0$ das funções de densidade de probabilidade $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de nanofios de grafeno com borda <i>armchair</i> com $N = 1, 2, 5, 10$ modos propagantes. . . . .	46
Tabela 2 – Valores dos parâmetros $q$ , $\beta$ e $x_0$ das função de densidade de probabilidade $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de nanofios de grafeno com borda <i>zigzag</i> com $N = 1, 3, 5, 11$ modos propagantes. . . . .	50
Tabela 3 – Valores dos parâmetros $q$ , $\beta$ e $x_0$ das função de densidade de probabilidade $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada com $N = 1, 2, 5, 10$ modos propagantes. . . . .	53
Tabela 4 – Valores dos parâmetros $q$ , $\beta$ e $x_0$ das função de densidade de probabilidade $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de cavidades balísticas caóticas de grafeno com $N = 1, 2, 5, 10$ modos propagantes. . . . .	56
Tabela 5 – Valores dos parâmetros $q$ , $\beta$ e $x_0$ das função de densidade de probabilidade $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de cavidades balísticas caóticas com rede quadrada com $N = 1, 2, 5, 10$ modos propagantes. . . . .	59
Tabela 6 – Valores estimados dos parâmetros das curvas descritas pelas Equações 6.3 e 6.7 que melhor se ajustam aos valores do número diário de mortes atribuídas à pandemia de COVID-19 para os quatro países selecionados que apresentavam duas ondas de infecção até 21 de julho de 2021 — Austrália, Brasil, Canadá e Venezuela. . . . .	96

Tabela 7 – Valores estimados dos parâmetros das curvas descritas pelas Equações 6.3 e 6.7 que melhor se ajustam aos valores do número diário de mortes atribuídas à pandemia de COVID-19 para os quatro países selecionados que apresentavam três ondas de infecção até 21 de julho de 2021 — Áustria, Itália, África do Sul e Estados Unidos. . . . .	98
Tabela 8 – Valores estimados dos parâmetros das curvas descritas pelas Equações 6.3 e 6.7 que melhor se ajustam aos valores do número diário de mortes atribuídas à pandemia de COVID-19 para os quatro países selecionados que apresentavam quatro ondas de infecção até 21 de julho de 2021 — Irã, Japão, Marrocos e Turquia. . . . .	100

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>22</b>
<b>2</b>	<b>TRANSPORTE QUÂNTICO COERENTE</b>	<b>29</b>
2.1	COMPRIMENTOS CARACTERÍSTICOS	29
2.2	QUANTIZAÇÃO DA CONDUTÂNCIA	30
2.3	MATRIZ DE ESPALHAMENTO	32
2.4	FORMALISMO DE LANDAUER-BÜTTIKER	33
2.5	MODELO <i>TIGHT-BINDING</i>	34
<b>3</b>	<b>FLUTUAÇÕES MULTIFRACTAIS DA MAGNETOCONDUTÂNCIA DE SISTEMAS MESOSCÓPICOS: UMA ANÁLISE GERAL</b>	<b>37</b>
3.1	FIOS DESORDENADOS	37
<b>3.1.1</b>	<b>Nanofios de grafeno</b>	<b>37</b>
3.1.1.1	<i>Borda armchair</i>	38
3.1.1.2	<i>Borda zigzag</i>	46
<b>3.1.2</b>	<b>Gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada</b>	<b>50</b>
3.2	CAVIDADES BALÍSTICAS CAÓTICAS	54
<b>3.2.1</b>	<b>Cavidades de grafeno</b>	<b>54</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Cavidades bidimensionais com rede quadrada</b>	<b>57</b>
3.3	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	59
<b>4</b>	<b>FLUTUAÇÕES MULTIFRACTAIS DA MAGNETOCONDUTÂNCIA NA TRANSIÇÃO HALL</b>	<b>64</b>
4.1	O EFEITO HALL QUÂNTICO	64
4.2	MULTIFRACTALIDADE E TURBULÊNCIA NO EFEITO HALL QUÂNTICO	66
4.3	CONCLUSÕES	71
<b>5</b>	<b>TRANSPORTE ELETRÔNICO EM CAVIDADES MESOSCÓPICAS COM SIMETRIA QUIRAL: UMA ANÁLISE VIA MODELO <i>TIGHT-BINDING</i></b>	<b>73</b>
5.1	MODELO DE <i>HOPPING</i> ALEATÓRIO	74
5.2	CLASSE QUIRAL ORTOGONAL	78
5.3	CLASSE QUIRAL UNITÁRIA	80
5.4	CLASSE QUIRAL SIMPLÉTICA	83

5.5	CROSSOVER ENTRE CLASSES DE SIMETRIA . . . . .	85
<b>6</b>	<b>MODELAGEM NUMÉRICA DE DADOS DA PANDEMIA DE COVID-19 . . . . .</b>	<b>87</b>
6.1	QUAIS FORAM OS DADOS ANALISADOS? . . . . .	88
6.2	DINÂMICA DA PANDEMIA DE COVID-19: UMA ABORDAGEM VIA <i>PATHWAY MODEL</i> . . . . .	88
6.3	MODELO DE MÚLTIPLAS ONDAS . . . . .	91
<b>6.3.1</b>	<b>Análise numérica dos dados . . . . .</b>	<b>93</b>
6.4	RESULTADOS . . . . .	94
<b>6.4.1</b>	<b>Estudo de países com duas ondas . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>6.4.2</b>	<b>Estudo de países com três ondas . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>6.4.3</b>	<b>Estudo de países com quatro ondas . . . . .</b>	<b>98</b>
6.5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .	100
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>102</b>

## 1 INTRODUÇÃO

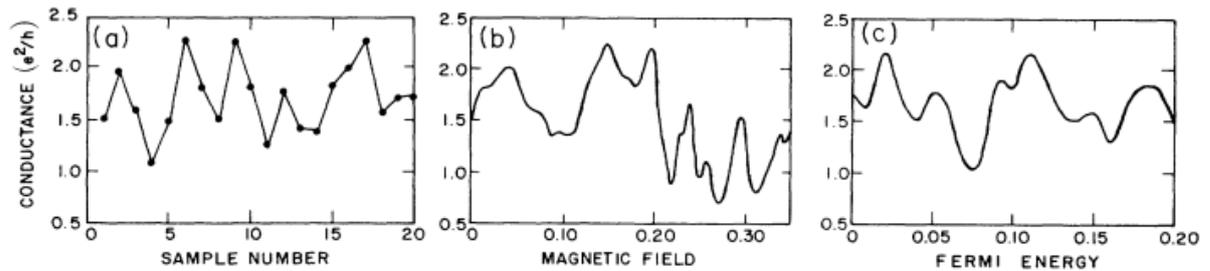
A Física Mesoscópica trata de sistemas que não podem ser estudados com um viés macroscópico nem microscópico, e que têm um comportamento intermediário entre estes dois limites, o que justifica o prefixo *meso*, que significa *médio*. No contexto de transporte eletrônico, condutores mesoscópicos são aqueles com dimensões maiores que a escala atômica, mas que não são grandes o suficiente para que os efeitos de interferência quântica sejam cancelados, de modo que os elétrons apresentam coerência de fase.

Entre os principais fenômenos da Física Mesoscópica, destacam-se as Flutuações Universais da Condutância (UCF) (BEENAKKER, 1997a; ROTTER; GIGAN, 2017). Do ponto de vista físico, as UCF podem ser compreendidas como um resultado dos efeitos de interferência quântica causados pelos espalhamentos múltiplos dentro da amostra. Além do mais, as UCF podem ser observadas em uma grande variedade de sistemas de transporte coerente de elétrons, desde nanofios difusivos (HEGGER et al., 1996; VERÇOSA et al., 2018a; SANTANA et al., 2020; SÁ; BARBOSA; RAMOS, 2020; BRAZHKIN; SUSLOV, 2020) a cavidades balísticas caóticas (SACHRAJDA et al., 1998; TAYLOR et al., 1997; TAYLOR et al., 1997; TAYLOR et al., 1998; WURM et al., 2009; BARBOSA; RAMOS; FERREIRA, 2021; HUANG et al., 2018). Há, no entanto, uma diferença fundamental no mecanismo de espalhamento de nanofios difusivos e cavidades balísticas caóticas. Nos primeiros, o mecanismo principal é o espalhamento devido às impurezas, que pode induzir localização de Anderson quando o comprimento do sistema é maior do que o comprimento de localização  $\xi$ , enquanto que nos últimos, o que ocorre é um espalhamento elástico nas bordas da cavidade. Apesar desta diferença, as UCF observadas nos dois tipos de sistemas podem ser estudadas de um mesmo ponto de vista, de modo que uma caracterização da natureza estocástica destas flutuações é possível.

UCF já foram observadas em um grande quantidade de experimentos, como por exemplo através da aplicação de um campo magnético de intensidade variável a uma amostra metálica, onde aqui podemos usar o termo flutuações universais da magnetocondutância (WASHBURN; WEBB, 1986). Elas também foram observadas variando a energia de Fermi de diferentes tipos de amostras e foi observado que a variância da condutância, que pode ser medida em unidades de  $(e^2/h)^2$ , é a mesma que no caso das flutuações de magnetocondutância. Isto significa que as UCF não dependem das dimensões nem do grau de desordem do dispositivo, ao menos dentro de um certo intervalo de valores, o que justifica o uso do termo 'universal' (LEE; STONE, 1985).

De fato, UCF podem ser até mesmo vistas como flutuações nas condutâncias de amostras com diferentes configurações de desordem ou até mesmo de bordas (LEE; STONE; FUKUYAMA, 1987), como mostrado na Figura 1. Dentre as características mais interessantes das UCF,

Figura 1 – Exemplo de flutuações da condutância obtidas numericamente originárias da variação (a) da distribuição da desordem, (b) campo magnético e da (c) energia de Fermi.



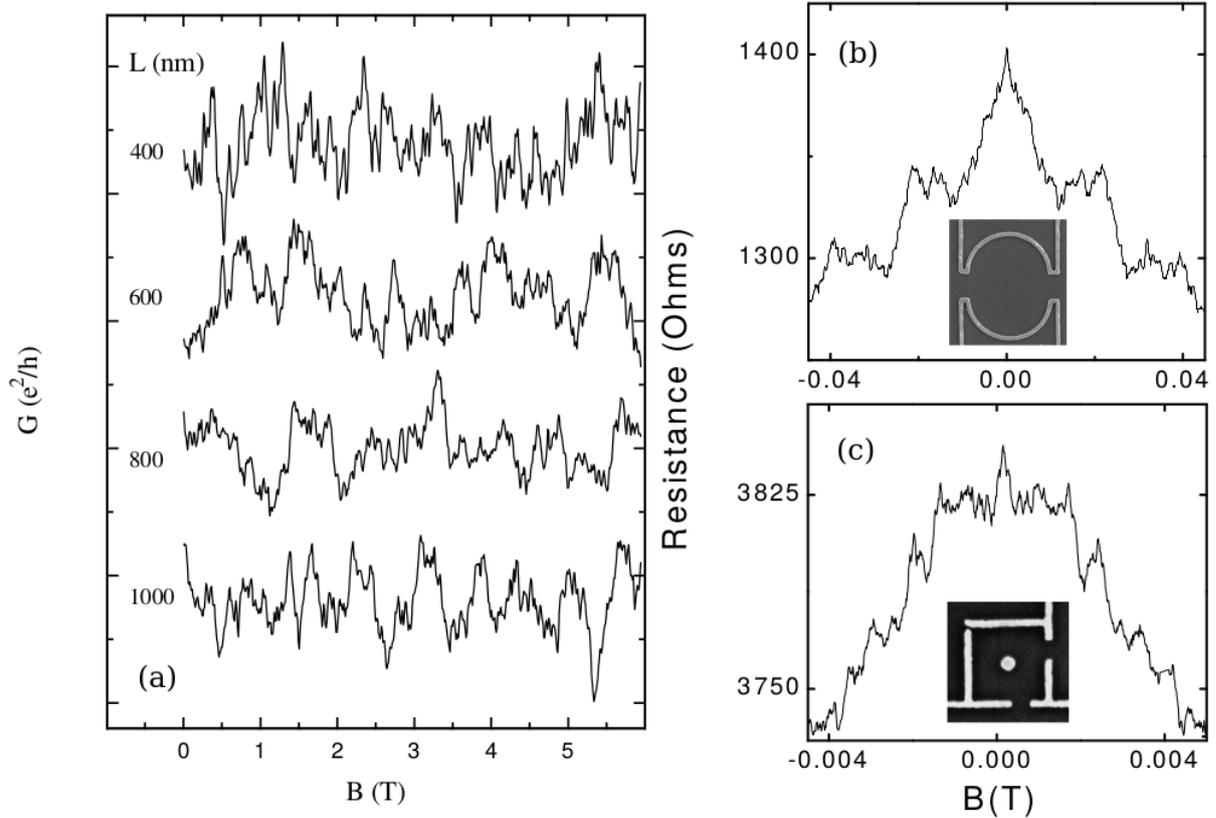
Fonte: LEE; STONE; FUKUYAMA (1987)

destacamos aqui que elas já foram observadas como sendo fractais. Por exemplo, foi mostrado em Ref. (HEGGER et al., 1996) que as UCF the nanofios de ouro quasi-balísticos induzidas por um campo magnético variável, mostradas na Figura 2(a), apresentam natureza fractal. Esta fractalidade foi atribuída à existência de estados caracterizados por trajetórias caóticas próximas a trajetórias regulares clássicas com longo tempo de permanência dentro da amostra, o que é uma característica de sistemas com um espaço de fase correspondente clássico que não pode ser considerado completamente caótico nem integrável.

No caso de sistemas balísticos caóticos, foi observado que as UCF têm um comportamento fractal quando vistas como função de um campo magnético aplicado a sistemas como um estádio e um bilhar de Sinai (SACHRAJDA et al., 1998) em heterojunções semicondutoras de alta mobilidade. As Figuras 2(b) e 2(c) mostram, respectivamente, as flutuações da resistência de um estádio aberto e de um bilhar de Sinai, em função do campo magnético. Além do mais, como é esperado em fractais, foi observado em (TAYLOR et al., 1997; TAYLOR et al., 1997; TAYLOR et al., 1998) que as UCF em termos do campo magnético aplicado apresentam auto-similaridade, ou seja, elas são invariantes sob mudança de escala. No campo teórico, um modelo semiclassico desenvolvido em (JALABERT; BARANGER; STONE, 1990) foi utilizado em (KETZMERICK, 1996) para calcular as amplitudes de transmissão de um sistema nanoestruturado e mostrar que as UCF de bilhares caóticos são fractais, e calcularam sua dimensão fractal  $D_F$ ; especificamente, sendo a magnetocondutância dada por

$$\Delta G = G(B + \Delta B) - G(B), \quad (1.1)$$

Figura 2 – (a) Flutuações da condutância  $G$ , medida em unidades de  $e^2/h$ , de quatro fios de ouro com comprimentos diferentes em função do campo magnético  $B$ , medido em T (teslas). Os gráficos foram deslocados verticalmente. Flutuações da resistência, medida em  $\Omega$  (ohms) de um estádio aberto (b) e de um bilhar de Sinai (c) em função do campo magnético, medido em T. As imagens dos bilhares foram obtidas através de microscopia eletrônica de varredura.



Fonte: HEGGER et al. (1996) SACHRAJDA et al. (1998)

ou seja, definida como o incremento de condutância  $\Delta G$  obtido por uma variação  $\Delta B$  do campo magnético  $B$  a uma energia de Fermi  $E$  fixa, foi mostrado que o seu segundo momento escala com  $\Delta B$  como

$$\langle (\Delta G)^2 \rangle \sim (\Delta B)^\gamma \quad (1.2)$$

onde o expoente  $\gamma$  está relacionado com a dimensão fractal por

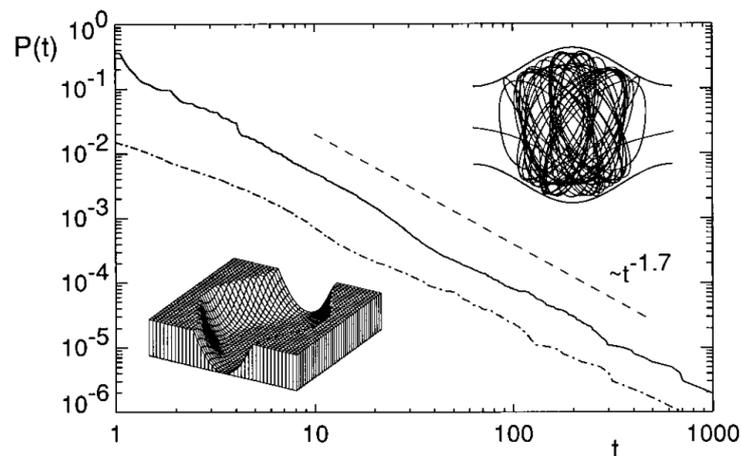
$$D_F = 1 - \gamma/2. \quad (1.3)$$

Conforme discutido em (KETZMERICK, 1996), este comportamento é uma consequência de a densidade de probabilidade  $P(T)$  de um elétron permanecer na cavidade por um intervalo de tempo maior que  $T$  ter uma cauda com lei de potência

$$P(T) \sim T^{-\gamma} \quad (1.4)$$

que é uma característica conhecida de sistemas com um espaço de fase com estrutura hierárquica que apresentam uma dinâmica mista (regular + caótica), como mostra a Figura 3. Além do mais, a equação 1.2 indica que o processo estocástico da condutância em função do campo magnético corresponde a um movimento browniano fracionário, que é um processo gaussiano com média zero e variância  $(\Delta B)^\gamma$ .

Figura 3 – Gráfico da densidade de probabilidade  $P(T)$  do elétron permanecer por um tempo no mínimo igual a  $T$  dentro de uma cavidade caótica cuja forma é mostrada no canto inferior esquerdo. A forma da trajetória do elétron em um espaço de fase com estrutura hierárquica é mostrada no canto superior direito.



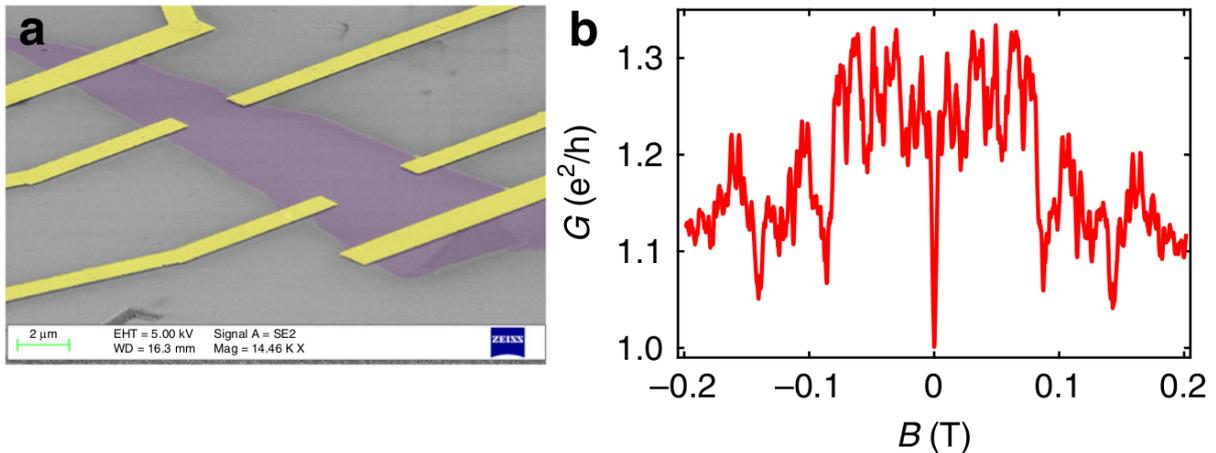
Fonte: KETZMERICK (1996)

Recentemente, a discussão sobre a natureza fractal das flutuações universais da condutância foi retomada após uma observação experimental inesperada de multifractalidade nas flutuações da condutância de um dispositivo eletrônico, especificamente em um transistor de efeito de campo de grafeno (AMIN et al., 2018). A Figura 4(a) mostra uma imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura do transistor utilizado, e as flutuações da condutância em função do campo magnético aplicado podem ser visualizadas em 4(b). Na prática, a presença de multifractalidade indica que não é suficiente determinar apenas um expoente de escala, como é o caso na análise fractal padrão, em que o objetivo é determinar a dimensão fractal  $D_F$ , que está relacionada ao expoente de escala  $\gamma$  através da Equação 1.3, sendo necessário um número infinitamente grande de expoentes de escala para caracterizar completamente a estatística das flutuações.

Diferentemente das observações experimentais de fractalidade nas flutuações da condutância, como em (HEGGER et al., 1996), onde o número de modos propagantes nos guias é grande, ou seja, o regime de condução é semiclássico, o comportamento multifractal foi observado para o caso em que há apenas um modo propagante nos guias, isto é, no regime quântico

extremo, mais especificamente, próximo ao ponto de neutralidade de carga, ou ponto de Dirac, do grafeno (AMIN et al., 2018).

Figura 4 – (a) Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura do transistor de efeito de campo de grafeno estudado por (AMIN et al., 2018). (b) Curva típica das flutuações da magnetocondutância do transistor mostrado em (a) à temperatura de 20 mK a submetido a uma tensão de 0.2 V.



Fonte: AMIN et al. (2018)

Os autores de (AMIN et al., 2018) conjecturaram que a multifractalidade observada poderia ser evidência de uma localização de Anderson incipiente próxima ao ponto de Dirac, o que a princípio parecia ser a explicação mais plausível para o comportamento multifractal.

Os resultados apresentados nesta Tese indicam, no entanto, que a conjectura apresentada em (AMIN et al., 2018) deve ser revista e que, na verdade, a multifractalidade das UCF está relacionada a certas correlações quânticas induzidas pelo campo magnético.

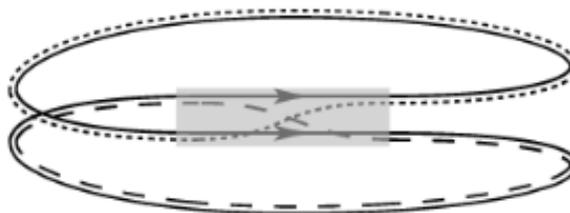
Nesta Tese, um estudo numérico sistemático do caráter multifractal das flutuações da condutância geradas pela variação de um campo magnético perpendicularmente aplicado aos dois tipos paradigmáticos de dispositivos eletrônicos mesoscópicos de grafeno — nanofios desordenados e cavidades balísticas caóticas — é apresentado. Analogamente, também fizemos as mesmas análises para gases de elétrons bidimensionais (2DEG), modelados tanto como fios desordenados quanto cavidades balísticas caóticas, de modo a fazer comparações com os sistemas de grafeno.

As análises realizadas neste trabalho sugerem que multifractalidade é uma característica comum às flutuações da condutância de todos os tipos de dispositivos mesoscópicos no regime quântico de condução. Em outras palavras, as flutuações da magnetocondutância de nanofios desordenados e cavidades balísticas caóticas apresentam comportamento multifractal quando o número de canais de espalhamento é suficientemente pequeno, o que nos leva a descartar

a ideia de que proximidade a transições de fase é uma causa necessária para a observação de Flutuações Multifractais da Condutância (MCF).

Como será discutido ao longo deste trabalho, MCF estão relacionadas a certos tipos de correlações quânticas (MÜLLER et al., 2004; NOVAES, 2013) que existem no regime quântico e desaparecem quando o sistema entra no regime semiclássico de condução. Mais especificamente, (RICHTER; SIEBER, 2002; BERKOLAIKO; KUIPERS, 2012; KUIPERS; RICHTER, 2013) mostraram através de um modelo semiclássico que as características dos observáveis de transporte quântico podem ser calculadas por meio de somas ao longo de trajetórias de espalhamento no espaço de fase clássico correspondente. Além do mais, funções de correlação entre tais trajetórias podem ser organizadas diagramaticamente (ver Figura 5 para um exemplo) de modo a mostrar que desaparecem no dominante regime semiclássico (muitos canais de espalhamento) e fornecem resultados exatos no regime quântico extremo (poucos canais de espalhamento). Acreditamos que estas correlações entre as trajetórias no espaço de fase clássico, induzidas pelo campo magnético, são aquelas capturadas pela análise multifractal e pela presença de caudas pesadas na distribuição de incrementos das séries de condutância em função do campo magnético, conforme será discutido neste texto. É interessante ressaltar que multifractalidade e distribuições com caudas pesadas são características importantes do fenômeno de intermitência em turbulência em fluidos.

Figura 5 – Ilustração da representação diagramática de trajetórias semiclássicas.



**Fonte:** MÜLLER et al. (2004)

A sequência desta Tese está dividida em mais cinco capítulos. No Capítulo 2, são apresentados de maneira breve alguns conceitos relacionados a transporte quântico que serão muito importantes para a compreensão do estudo realizado, bem como as ferramentas utilizadas no trabalho para modelar os sistemas estudados e analisar os resultados obtidos.

No Capítulo 3, um estudo sistemático do comportamento multifractal das flutuações da magnetocondutância de sistemas desordenados e cavidades balísticas caóticas é apresentado. Além do mais, é apresentada uma análise das distribuições de incrementos das séries de

condutância em função do campo magnético, onde mostramos que elas têm caudas pesadas e podem ser ajustadas por funções de densidade de probabilidade (PDF)  $q$ -gaussianas. O Capítulo 3 é composto por três seções: uma sobre fios desordenados, outra sobre cavidades balísticas caóticas, além de uma com discussões sobre os resultados; na primeira seção, a apresentação dos resultados do primeiro tipo de sistema é antecedida por uma explicação dos passos do método utilizado, conhecido como análise de flutuações destendenciadas multifractal (MF-DFA); em seguida, os resultados obtidos pelo emprego deste método são apresentados para este e os outros sistemas estudados.

No Capítulo 4, consideramos um nanofio desordenado conectado a quatro terminais, uma configuração propícia para a observação do Efeito Hall Quântico (IQHE)<sup>1</sup>. Especificamente, é apresentada uma análise multifractal das flutuações dos coeficientes de transmissão longitudinal e transversal do sistema, além de uma discussão a respeito da observação de um comportamento hierárquico da dinâmica do sistema na Transição Hall (IQHT).

No Capítulo 5, usamos as mesmas ferramentas que nos dois capítulos anteriores para estudar o transporte eletrônico em uma região de espalhamento conectada a dois terminais, mas para estudar outro tipo de sistema — cavidades balísticas com simetria quiral. Neste capítulo, mostramos uma nova abordagem para obter as distribuições de condutância e potência de ruído de disparo de sistemas pertencentes às três classes de simetria quirais da Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT).

O Capítulo 6, que finaliza esta Tese, traz um tema que não tem relação com transporte eletrônico, mas os resultados e discussões nele apresentados foram produzidos durante o período de produção deste trabalho. No capítulo, são apresentados ajustes numéricos aos dados de número de mortes causadas pela pandemia de COVID-19 usando uma abordagem estatística conhecida como *pathway model* (PM) associada a uma dependência temporal de parâmetros originalmente constantes.

---

<sup>1</sup> Precisamente, a sigla IQHE corresponde a Efeito Hall Quântico Inteiro. O Efeito Hall Quântico pode ser inteiro ou fracionário, conforme o valor do fator que multiplica  $e^2/h$  nos platôs da condutância transversal. Nesta Tese, lidaremos apenas com o Efeito Hall Quântico Inteiro.

## 2 TRANSPORTE QUÂNTICO COERENTE

No presente capítulo, serão apresentados alguns conceitos e ferramentas essenciais para a compreensão e desenvolvimento dos resultados apresentados nesta Tese. Na seção 2.1, são definidas as escalas de comprimento necessárias para diferenciar os regimes de transporte eletrônico que podem existir em um condutor. Em seguida, na seção 2.2, discutimos um dos resultados experimentais marcantes da Física Mesoscópica, a quantização da condutância entre dois contatos quânticos.

Do ponto de vista das ferramentas utilizadas, apresentamos o conceito de matriz de espalhamento na seção 2.3, o formalismo de Landauer-Büttiker, que conecta a matriz de espalhamento com os observáveis de transporte, na seção 2.4 e, por fim, introduzimos o modelo *tight-binding* na seção 2.5.

### 2.1 COMPRIMENTOS CARACTERÍSTICOS

De acordo com a Lei de Ohm (DATTA, 1995), a condutância de um condutor elétrico de comprimento  $L$  e largura  $W$  é dada por

$$G = \sigma \frac{W}{L} \quad (2.1)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade, característica do material do qual o condutor é feito. Entretanto, se o comprimento do condutor for bastante reduzido, a condutância não obedece a esta fórmula. Para descrever com mais precisão o regime de validade da Lei de Ohm, é importante definir alguns comprimentos característicos.

Primeiramente, definimos o comprimento de onda de de Broglie associado ao elétron

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} \quad (2.2)$$

onde  $k_F$  é o número de onda a ele associado, o qual é diretamente relacionado à energia de Fermi do condutor. Sendo assim, para conhecer o valor da condutância do sistema, deve-se levar em conta que os comprimentos de onda relevantes são aqueles próximos a  $\lambda_F$ .

Outro comprimento importante é o livre caminho médio  $L_m$ , definido como a distância mínima que o elétron propaga-se sem ser espalhado, de modo que quando o comprimento do sistema é menor que  $L_m$ , o transporte eletrônico é balístico, isto é, se a amostra condutora é conectada a dois guias, o elétron move-se de um guia para outro de maneira direta, sem

obstáculos; por outro lado se o comprimento da amostra é maior que  $L_m$ , o transporte é dito difusivo. Um modelo clássico para compreender como a propagação do elétron pode ser balística ou difusiva é o modelo de Drude (ASHCROFT; MERMIN, 1976).

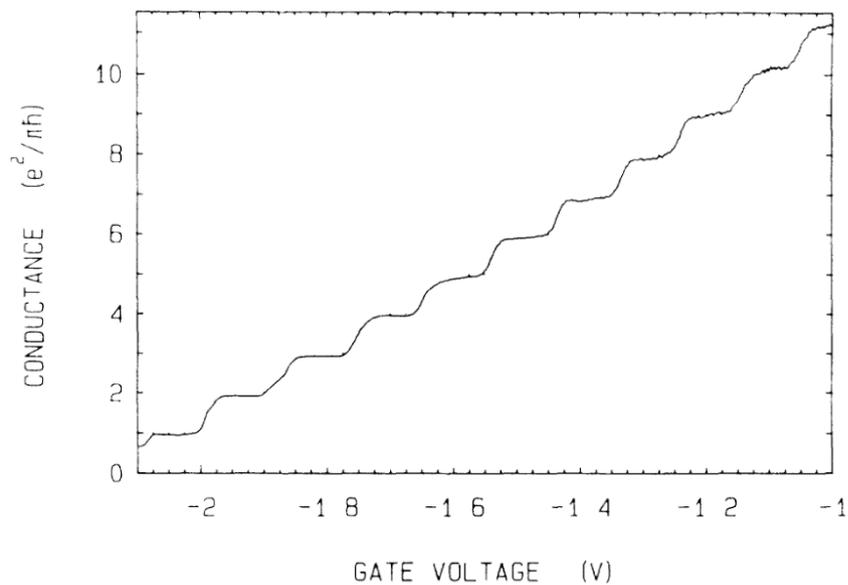
Por fim, definimos o comprimento de relaxação de fase  $L_\phi$ , definido como o comprimento máximo com que a propagação eletrônica ocorre sem que os efeitos de interferência das funções de onda dos elétrons sejam cancelados.

Um condutor obedece à Lei de Ohm quando suas dimensões são maiores que  $\lambda_F$ ,  $L_m$  e  $L_\phi$ . Quando isto acontece, dizemos que o condutor é ôhmico.

## 2.2 QUANTIZAÇÃO DA CONDUTÂNCIA

Um dos sistemas experimentais mais importantes no estudo da Física Mesoscópica é o 2DEG, que se forma na região de separação da heterojunção GaAs-AlGaAs. No trabalho de (WEES et al., 1988), foi observado experimentalmente que a condutância entre dois contatos quânticos no 2DEG é quantizada, conforme pode ser visto pela formação de platôs no gráfico da condutância em função da tensão aplicada a um *gate* usado para controlar a largura  $W$  da constricção entre os dois contatos (ver Figura 6).

Figura 6 – Condutância de um ponto de contato quântico em função da voltagem aplicada ao *gate*, que controla a largura da abertura entre os dois contatos.



Fonte: WEES et al. (1988)

A ferramenta básica para entender a propagação de um elétron em um ponto de contato quântico bidimensional é a sua função de onda, que pode ser separada em duas partes —

transversa e longitudinal —, com cada modo de propagação sendo dado por

$$\psi_n(x,y) = \Phi_n(y)e^{ik_nx}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \quad (2.3)$$

onde  $k_n$  é o número de onda longitudinal do  $n$ -ésimo modo e  $N$  indica o número total de modos propagantes. O mecanismo básico por trás do fenômeno observado em (WEES et al., 1988) é a quantização do momento transverso, associado à componente transversa  $\Phi_n$  do  $n$ -ésimo modo e cujo número de onda é dado por

$$K_n = \pm \frac{n\pi}{W}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Sabendo que a condutância do ponto de contato quântico balístico é dada por (SHARVIN, 1965; LEVINSON; SUKHORUKOV; KHAETSKII, 1987)

$$G = e^2 N_0 W \frac{\hbar}{2m} \langle |k_n| \rangle \quad (2.5)$$

onde  $N_0 = m/(\pi\hbar^2)$  é a densidade de estados de um 2DEG. Para calcular  $\langle |k_n| \rangle$ , usamos a seguinte expressão, retirada de (WEES et al., 1988) e que leva em conta o fato de que os valores de  $K_n$  são múltiplos inteiros de  $\pi/W$  (ver Equação 2.4),

$$\langle k_n \rangle = \frac{1}{2\pi k_F} \int d^2k |k_n| \delta(k - k_F) \frac{2\pi}{W} \sum_{n=1}^{\infty} \delta\left(K_n - \frac{n\pi}{W}\right), \quad (2.6)$$

onde  $k$  pode ser entendido como o raio do círculo de Fermi no espaço dos momentos, que é dado por

$$k = (k_n^2 + K_n^2)^{1/2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \quad (2.7)$$

e  $k_F$  é o número de onda de Fermi, cuja relação com a energia de Fermi é

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (2.8)$$

Usando a Equação 2.6 em 2.5, obtemos

$$G = \sum_{n=1}^N \frac{e^2}{\pi\hbar} \quad (2.9)$$

onde  $N$  é o número total de modos propagantes (ou canais de propagação), cujo valor é o número inteiro imediatamente abaixo de  $k_F W/\pi$ .

Para controlar a quantidade de canais de propagação em um sistema mesoscópico conectado a dois ou mais reservatórios de elétrons, compreende-se os guias que conectam o

sistema aos terminais como pontos de contato quântico, de modo que a condutância do sistema apresenta os mesmos degraus observados na Figura 6. No modelo teórico que será usado para calcular a condutância, escolhemos o número  $N$  de canais através de uma escolha adequada da energia de Fermi  $E_F$  e da largura  $W$ , já que  $N = \text{int}(k_F W/\pi)$ , onde  $k_F$  e  $E_F$  são relacionados conforme a Equação 2.8.

### 2.3 MATRIZ DE ESPALHAMENTO

Considere uma região de espalhamento conectada a dois reservatórios de elétrons através de dois guias. Em cada guia há elétrons entrando e saindo da região de espalhamento, conforme representado esquematicamente na Figura 7. Representando por  $a^+$  e  $b^-$  os vetores que descrevem os estados dos elétrons que entram na região de espalhamento provenientes dos reservatórios, respectivamente, à esquerda e à direita da mesma, definimos o vetor

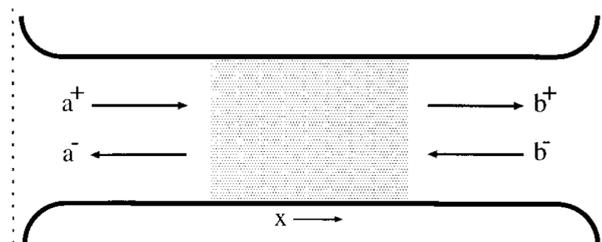
$$C = (a^+, b^-), \quad (2.10)$$

que indica os modos que entram no sistema. Da mesma forma, sendo  $a^-$  e  $b^+$  os vetores que descrevem os estados dos elétrons que saem região de espalhamento provenientes dos reservatórios, respectivamente, à esquerda e à direita da mesma, definimos o vetor dos modos que saem do sistema como

$$D = (a^-, b^+). \quad (2.11)$$

Os vetores  $a^+$ ,  $a^-$ ,  $b^-$  e  $b^+$  são  $N$ -dimensionais, onde  $N$  é o número de modos propagantes nos guias. Sendo assim, os vetores  $C$  e  $D$  são  $2N$ -dimensionais.

Figura 7 – Representação esquemática de uma região de espalhamento conectada a dois guias. Os vetores  $a^+$  e  $a^-$  representam os modos propagantes que entram e saem, respectivamente, da região de espalhamento pelo guia da esquerda. Os vetores  $b^-$  e  $b^+$  representam os modos propagantes que entram e saem, respectivamente, da região de espalhamento pelo guia da direita.



Fonte: BEENAKKER (1997a)

A matriz de espalhamento  $S$  do sistema tem dimensão  $2N \times 2N$  e relaciona os modos de entrada e saída através da relação

$$D = SC \quad (2.12)$$

e tem a forma

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

em que  $r$  e  $r'$  são os blocos de reflexão em cada guia, e  $t$  e  $t'$  os blocos de transmissão de um guia para outro. As matrizes  $r$ ,  $t$ ,  $t'$  e  $r'$  têm dimensão  $N \times N$ .

## 2.4 FORMALISMO DE LANDAUER-BÜTTIKER

Neste trabalho, a condutância  $G$  de um dispositivo será sempre calculada no regime de resposta linear, dado por

$$G = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{I}{V}, \quad (2.14)$$

onde  $I$  é a corrente elétrica que passa pelo dispositivo e  $V$  é a voltagem entre seus terminais.

Para calcular  $G$  por meio de sua conexão com a matriz de espalhamento, consideramos a fórmula de Landauer-Büttiker, cuja ideia original foi apresentada por (LANDAUER, 1957). A forma atualmente conhecida do formalismo pode ser vista em alguns trabalhos, tais como (FISHER; LEE, 1981; BÜTTIKER, 1986; BUTTIKER, 1988; JACQUOD et al., 2012). De acordo com o formalismo de Landauer-Büttiker, a corrente elétrica é dada por

$$I = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( -\frac{\partial f}{\partial E} \right) \text{Tr}[t^\dagger(E)t(E)] \quad (2.15)$$

onde  $f(E)$  é a distribuição de Fermi, que, à temperatura nula, é dada por

$$f(E) = 1 - \theta(E) \quad (2.16)$$

onde  $\theta(E)$  é a função degrau. Sendo assim, obtemos

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Tr}(t^\dagger t) \quad (2.17)$$

em que o fator 2 está relacionado à degenerescência de *spin* do sistema. Nesta equação, as matrizes  $t$  e  $t^\dagger$  são calculadas para energia igual a  $E$ .

Os resultados apresentados neste trabalho serão dados em termos da condutância adimensional  $g$ , dada por  $g = G/G_0$ , onde  $G_0 = 2e^2/h$  é o quantum de condutância.

## 2.5 MODELO *TIGHT-BINDING*

Para obter a matriz de espalhamento do sistema, o software Kwant (GROTH et al., 2014) foi utilizado. Este programa é baseado em uma formulação *tight-binding*, que consiste em expressar um Hamiltoniano através de uma aproximação discreta. Considere, por exemplo, um sistema bidimensional descrito pela Equação de Schrödinger, ou seja, com Hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V, \quad (2.18)$$

onde  $V$  é uma energia potencial. Escrevendo as coordenadas de cada sítio da rede no espaço real como  $(x, y)$  e considerando que o sistema tenha uma rede quadrada com parâmetro de rede  $a$ , podemos numerar os sítios através de números inteiros  $(i, j)$  tais que

$$(x, y) = (ai, aj). \quad (2.19)$$

Na formulação *tight-binding*, podemos definir os estados posicionais do elétron como

$$|i, j\rangle \equiv |x, y\rangle = |ai, aj\rangle. \quad (2.20)$$

Sendo assim, podemos escrever os operadores diferenciais  $\partial_x$  e  $\partial_y$  como somas de diferenças finitas

$$\partial_x = \frac{1}{a} \sum_{i,j} (|i+1, j\rangle \langle i, j| - |i, j\rangle \langle i, j|), \quad (2.21)$$

$$\partial_y = \frac{1}{a} \sum_{i,j} (|i, j+1\rangle \langle i, j| - |i, j\rangle \langle i, j|), \quad (2.22)$$

consequentemente, temos

$$\partial_x^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{i,j} (|i+1, j\rangle \langle i, j| + |i, j\rangle \langle i-1, j| - 2|i, j\rangle \langle i, j|), \quad (2.23)$$

$$\partial_y^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{i,j} (|i, j+1\rangle \langle i, j| + |i, j\rangle \langle i, j-1| - 2|i, j\rangle \langle i, j|), \quad (2.24)$$

Logo, temos que a versão discreta do Hamiltoniano dado pela Equação 2.18 é

$$H = \sum_{i,j} (4t_0 + V(ai,aj)) |i, j\rangle \langle i, j| - t_0 \sum_{i,j} (|i+1, j\rangle \langle i, j| + |i, j\rangle \langle i-1, j| + |i, j+1\rangle \langle i, j| + |i, j\rangle \langle i, j-1|) \quad (2.25)$$

onde

$$t_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (2.26)$$

Na equação 2.25, a primeira soma representa as parcelas de energia calculadas em cada sítio, enquanto a segunda está relacionada ao *hopping* entre primeiros vizinhos. A partir de agora, ao invés de especificarmos os sítios através de suas coordenadas  $(i, j)$ , indicaremos cada sítio por apenas um número, o qual representaremos por  $k$ . Sendo assim, temos

$$H = \sum_k [4t_0 + V(k)] |k\rangle \langle k| - t_0 \sum_{\langle k,l \rangle} |k\rangle \langle l| \quad (2.27)$$

onde  $\langle k,l \rangle$  significa primeiros vizinhos. Usando a linguagem de segunda quantização, temos

$$H = \sum_k [4t_0 + V(k)] c_k^\dagger c_k - t_0 \sum_{\langle k,l \rangle} c_k^\dagger c_l \quad (2.28)$$

em que  $c_k^\dagger$  e  $c_k$  são operadores de criação e aniquilação de elétrons no sítio  $k$ , respectivamente. A energia potencial  $V$  pode, por exemplo, representar a desordem causada pela presença de impurezas em um sistema desordenado. Nesta Tese, estudaremos dois tipos de sistemas mesoscópicos, difusivos e balísticos. No primeiro tipo, a desordem de Anderson do sistema será descrita por uma energia potencial eletrostática  $\epsilon_k$  distribuída uniformemente no intervalo  $(-U/2, U/2)$ , onde  $U$  é a “largura” da intensidade da desordem. Para levar em conta o campo magnético aplicado perpendicularmente aos sistemas, introduziremos nos termos de *hopping* um termo conhecido na literatura como fator de Peierls (PEIERLS, 1933; HOFSTADTER, 1976), dado por

$$\theta_{kl} = -\frac{e}{\hbar} \int_k^l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.29)$$

onde usamos a condição de calibre  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ , de modo que o campo magnético é dado por  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , o qual será medido em termos do fluxo magnético adimensional  $\phi = \Phi/\Phi_0$ , onde  $\Phi = Ba^2$  é o fluxo magnético através de uma área  $a^2$  e  $\Phi_0 = h/e$  é o quantum de fluxo.

Com estes ingredientes, podemos escrever o Hamiltoniano de um nanofio desordenado com rede quadrada na presença de campo magnético como

$$H = \sum_k (4t_0 + \epsilon_k) c_k^\dagger c_k - t_0 \sum_{\langle k,l \rangle} c_k^\dagger c_l e^{i\theta_{kl}} \quad (2.30)$$

Nesta Tese, além de condutores mesoscópicos com estrutura de rede quadrada, estudaremos dispositivos de grafeno, que tem uma rede hexagonal, também conhecida como *honeycomb*, e que obedece a Equação de Dirac. Diferentemente da Equação de Schrödinger, que apresenta derivadas espaciais de segunda ordem, a Equação de Dirac possui apenas derivadas de primeira ordem, o que leva a uma forma diferente do Hamiltoniano do sistema. A versão *tight-binding* do Hamiltoniano de um nanofio de grafeno é dada por

$$H = t_0 \sum_{\langle k,l \rangle} c_k^\dagger c_l e^{i\theta_{kl}} + \sum_i \epsilon_i c_i^\dagger c_i, \quad (2.31)$$

em que  $t_0$  é o parâmetro de *hopping*, cujo valor para o grafeno é de 2,8 eV (NETO et al., 2009), e o segundo somatório representa uma desordem de Anderson, como em 2.30.

Por fim, para estudar sistemas balísticos, basta eliminarmos o termo de desordem de Anderson das Equações 2.30 e 2.31, o que pode ser realizado tomando  $U = 0$ .

### 3 FLUTUAÇÕES MULTIFRACTAIS DA MAGNETOCONDUTÂNCIA DE SISTEMAS MESOSCÓPICOS: UMA ANÁLISE GERAL

Neste capítulo, será apresentada uma descrição estatística, primordialmente feita a partir de uma análise multifractal, das séries da condutância obtidas numericamente em função do fluxo magnético adimensional  $\phi$  para diferentes sistemas mesoscópicos.

Na seção 3.1, serão apresentados resultados relativos a sistemas difusivos, os quais podem ser modelados como nanofios desordenados. Neste estudo, foram considerados nanofios de grafeno, material caracterizado por ter uma estrutura de rede hexagonal, cujos resultados são mostrados na subseção 3.1.1, além de nanofios com rede quadrada, que podem ser compreendidos como 2DEG, os quais serão discutidos na subseção 3.1.2.

Em seguida, na seção 3.2, serão considerados sistemas não difusivos, que foram modelados por cavidades balísticas caóticas, também chamadas de bilhares caóticos. Neste caso, também consideramos sistemas constituídos a partir de grafeno e de 2DEG com rede quadrada; os resultados para os dois tipos de sistema são apresentados, respectivamente, nas subseções 3.2.1 e 3.2.2.

#### 3.1 FIOS DESORDENADOS

Esta seção é dedicada ao estudo das flutuações da magnetocondutância de sistemas desordenados. Na subseção 3.1.1, consideramos nanofios de grafeno, e na subseção 3.1.2, completamos a análise de nanofios estudando 2DEG com rede quadrada.

##### 3.1.1 Nanofios de grafeno

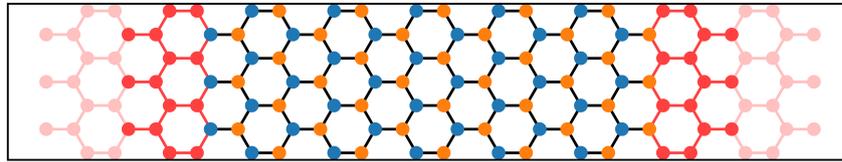
Os nanofios desordenados de grafeno foram modelados de duas formas diferentes, conforme a orientação da rede hexagonal em relação à posição dos guias; no primeiro caso apresentado, é comum denominar as bordas do nanofio de *armchair*, enquanto que no segundo as mesmas são geralmente denominadas de *zigzag*.

Nos dois casos, as séries de condutância foram obtidas usando o Hamiltoniano dado pela Equação 2.31 com  $U = 1,30t_0$  e o fluxo magnético foi variado com passos de  $\Delta\phi = 1 \times 10^{-5}$  de 0 (zero) até um valor máximo de acordo com o número de modos propagantes nos guias, que foi controlado através da energia de Fermi, como será mostrado a seguir.

### 3.1.1.1 Borda *armchair*

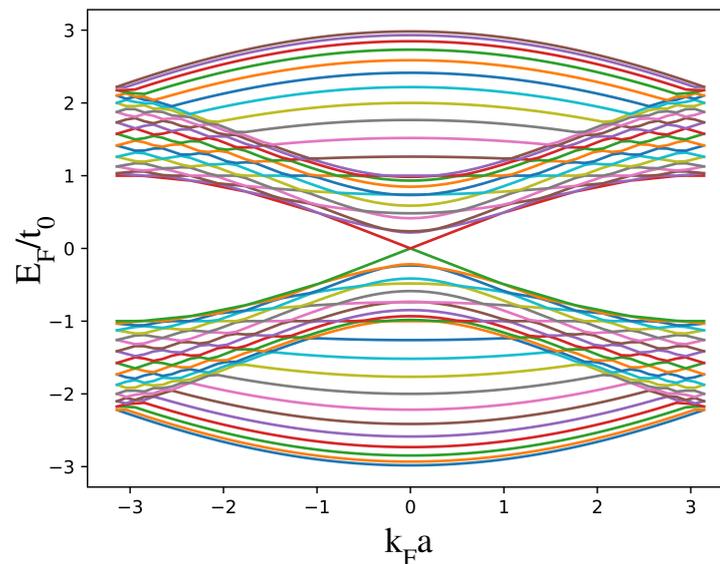
Os nanofios de carbono com bordas *armchair* foram modelados com comprimento  $L_A = 127a$  e largura  $W_A = 11\sqrt{3}a$ , onde  $a = 2,46 \text{ \AA}$  é o parâmetro de rede do grafeno. A Figura 8 mostra um exemplo de nanofio com rede hexagonal e borda *armchair*, na qual os sítios das duas sub-redes são representados com cores diferentes (azul e laranja) e os guias que conectam o sistema aos reservatórios de elétrons são representados em vermelho. A Figura 9 mostra o gráfico da estrutura de bandas de um guia como o da Figura 8 de largura  $W_A = 11\sqrt{3}a$ .

Figura 8 – Representação esquemática de um nanofio com rede hexagonal e borda *armchair*. Os sítios pertencentes às duas sub-redes distintas do sistema são representados em azul e laranja. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Figura 9 – Estrutura de bandas dos guias de largura  $W_A = 11\sqrt{3}a$  em uma rede hexagonal com borda *armchair*. A energia de Fermi  $E_F$  é medida dada em múltiplos do parâmetros de hopping  $t_0$  e o número de onda de Fermi  $k_F$  em múltiplos de  $1/a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede.



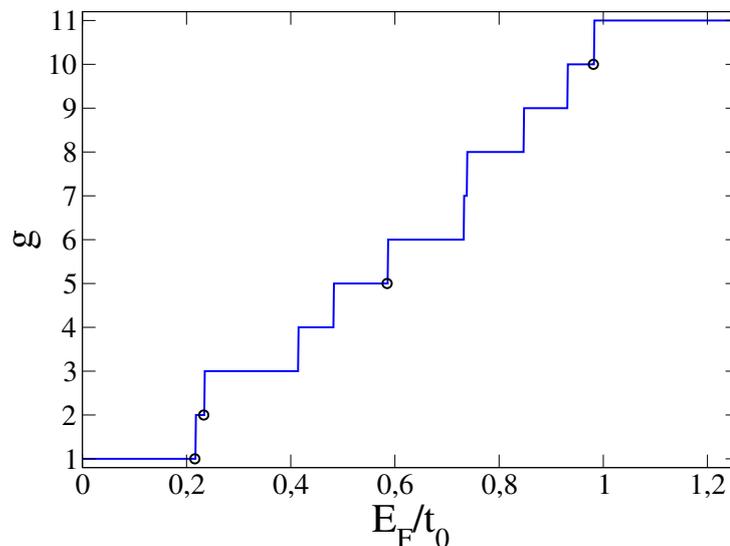
Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

No presente estudo, consideramos nanofios de grafeno com borda *armchair* com diferentes valores do número  $N$  de canais de propagação. Sabendo que  $N$  é o número inteiro imediatamente inferior a  $k_F W/\pi$  (ver Seção 2.2), onde  $k_F$  é o número de onda de Fermi — diretamente

relacionado à energia de Fermi  $E_F$  do sistema — e  $W$  é a largura dos guias, podemos obter o valor desejado para o número de modos propagantes a partir de uma escolha apropriada dos valores de  $E_F$  e  $W$ ; como o valor de  $W$  dos sistemas simulados é fixo, então temos um valor de  $E_F$  para cada valor de  $N$  que foi considerado.

Para um nanofio de grafeno com borda *armchair* conectado a dois guias de largura  $W_A = 11\sqrt{3}a$  e sem desordem, ou seja, balístico, a Figura 10 mostra o gráfico da condutância adimensional  $g$  — equivalente ao número  $N$  de canais propagantes do sistema — em função da energia de Fermi  $E_F$ , do qual é possível extrair a faixa de valores da energia do sistema para cada valor de  $N$ . Os símbolos circulares na Figura 10 indicam os pontos cujos valores de  $E_F$  foram utilizados para obter nanofios com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes, que são, por sua vez, iguais a  $E_F/t_0 = 0,216, 0,233, 0,585, 0,981$ , respectivamente.

Figura 10 – Gráfico da condutância adimensional  $g$  de um nanofio de grafeno com bordas *armchair* conectado a dois terminais através de guias de largura  $W_A = 11\sqrt{3}a$  em função da energia de Fermi  $E_F$  medida em unidades do parâmetro de *hopping*  $t_0$ . Os símbolos circulares indicam os pontos cujos valores da energia de Fermi foram escolhidos para modelar sistemas com os números de canais desejados,  $N = 1, 2, 5, 10$ .

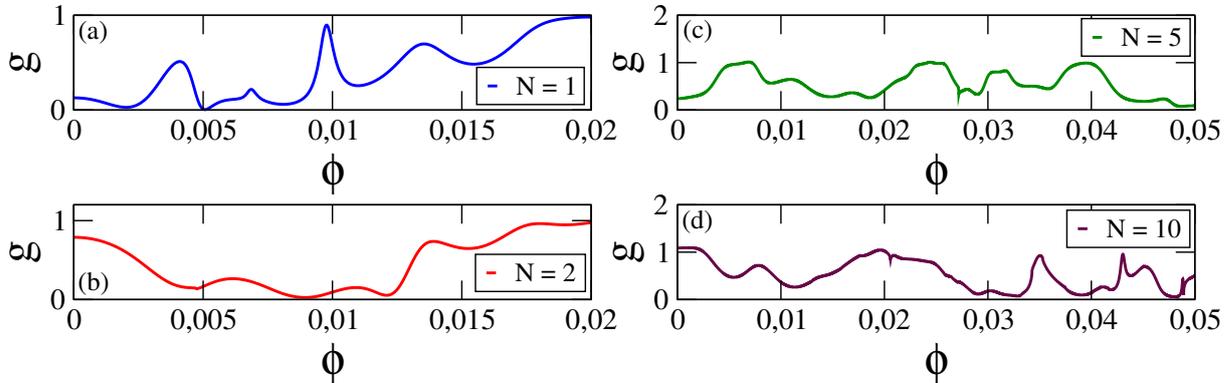


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

A Figura 11 mostra exemplos de séries de condutância em função do fluxo magnético dos nanofios de grafeno com borda *armchair* para os quatro valores do número de modos propagantes nos guias que foram considerados,  $N = 1, 2, 5, 10$ .

Para cada uma das séries de condutância em função do fluxo magnético mostradas na Figura 11, foi realizada uma análise multifractal, através do método denominado MF-DFA, introduzido por (KANTELHARDT et al., 2002), e que consiste de uma generalização da análise de

Figura 11 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de um nanofio desordenando de grafeno com borda *armchair* com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

flutuações destendenciadas (DFA) usual. Nesta subseção, serão apresentados detalhadamente os passos da análise; como exemplo, considere a série mostrada na Figura 11(a), para  $N = 1$ .

Dada a série de condutâncias adimensionais  $\{g_k\}$ , onde  $g_k \equiv g(\phi_k)$  e  $\{\phi_k\}$  são os valores do fluxo magnético adimensional, dados por  $\phi_k = (k - 1)\Delta\phi$ ,  $k = 1, \dots, M$ , calculamos seu perfil  $\{\tilde{g}(i)\}$  como sendo

$$\tilde{g}(i) = \sum_{k=1}^i (g_k - \langle g \rangle) \quad (3.1)$$

onde

$$\langle g \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M g_k. \quad (3.2)$$

Dividindo a série  $\{\tilde{g}(i)\}$  em  $N_s$  intervalos mutuamente exclusivos de comprimento  $s = \text{int}(M/N_s)$ , realizamos um ajuste polinomial<sup>1</sup> a cada um dos  $N_s$  intervalos de  $\{\tilde{g}(i)\}$ . Sendo  $\{P_j(i)\}$  o conjunto formado pelos  $s$  valores obtidos através do ajuste do  $j$ -ésimo intervalo de  $\{\tilde{g}(i)\}$ , calculamos a variância  $F_s^2(j)$  do perfil destendenciado para cada um dos  $N_s$  intervalos, dada por

$$F_s^2(j) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{\tilde{g}[(j-1)s+i] - P_j(i)\}^2, \quad j = 1, 2, \dots, N_s \quad (3.3)$$

Note que, em geral, ao dividirmos a série em intervalos de mesmo comprimento, fica restando um conjunto com menos de  $s$  pontos, os quais não podem ser descartados da análise, caso contrário seriam perdidas informações da série. Para contornar este problema, empregamos

<sup>1</sup> De acordo com o grau da função polinomial usada no ajuste, a análise multifractal de flutuações destendenciadas pode ser chamada de MF-DFA1, MF-DFA2, MF-DFA3 etc. Neste trabalho, utilizamos ajustes lineares, ou seja, MF-DFA1.

novamente os passos descritos pela equação 3.3, entretanto ao invés de dividirmos a série a partir do seu elemento inicial, partimos do último elemento, de modo que temos

$$F_s^2(j) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s [\tilde{g}(M - (N_s - j + 1)s + i) - P_j(i)]^2, \quad j = N_s + 1, N_s + 2, \dots, 2N_s \quad (3.4)$$

Em seguida, definimos a função de flutuações de ordem  $p$  como sendo

$$F_p(s) = \left( \frac{1}{2N_s} \sum_{j=1}^{2N_s} [F_s^2(j)]^{p/2} \right)^{1/p}, \quad (3.5)$$

em que  $p$  pode ser qualquer número real não nulo. Neste trabalho, calculamos  $F_p(s)$  para  $p$  de  $-5$  a  $5$  com passos de  $0,2$ . A série mostrada na Figura 11(a) tem 2001 pontos, e para calcular as funções  $F_p(s)$ , consideramos  $s$  variando de 100 a 500, com passos de 10. Na Figura 12, mostramos os valores obtidos de  $F_p(s)$  para  $p = -5, -3, -1, 1, 3, 5$  em função de  $s$  em um gráfico na escala log-log. Os dados mostrados na forma de círculos indicam que as funções  $F_p(s)$  escalam com  $s$  de acordo com uma lei de potência,

$$F_p(s) \sim s^{H(p)}, \quad (3.6)$$

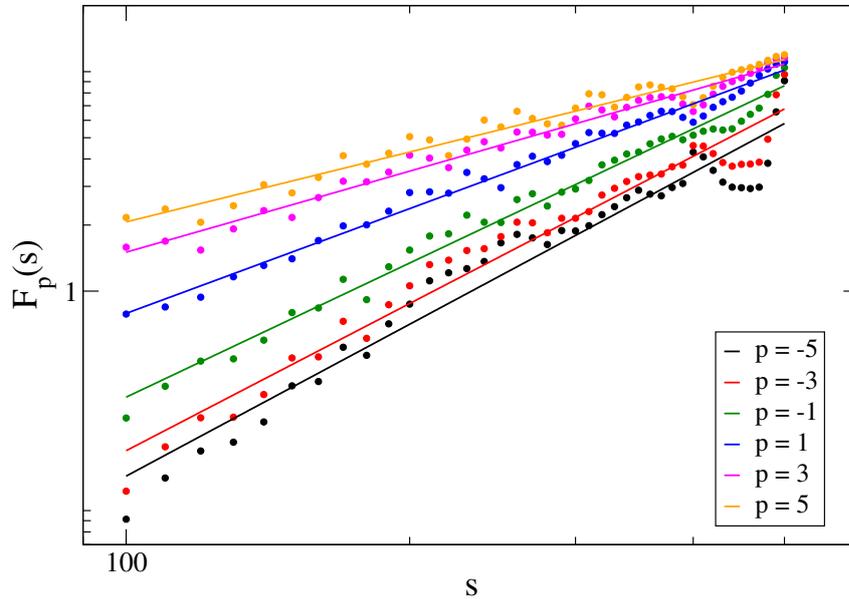
onde  $H(p)$  é o expoente de Hurst generalizado, o qual varia de acordo com o valor de  $p$ . Os valores de  $H(p)$  são determinados para cada  $p$  através de ajustes dos valores de  $F_p(s)$  pela equação 3.6 (representados pelas linhas cheias na Figura 12), e assim construímos a função  $H(p)$ . Se  $H(p)$  variar com  $p$ , dizemos que a série analisada é multifractal, por outro lado, se  $H(p)$  for independente de  $p$ , a série é dita monofractal. Em particular,  $H(2)$  é o expoente de Hurst, o qual é capturado pela análise de flutuações de tendência usual (DFA). A Figura 13(a) mostra o comportamento do expoente  $H(p)$  para a série da Figura 11(a). Além de descrever o caráter multifractal de uma série através de  $H(p)$ , podemos usar outra função para complementar a análise. Primeiramente, dado o expoente de Hurst generalizado  $H(p)$ , definimos uma nova função dada por

$$\tau(p) = pH(p) - 1, \quad (3.7)$$

à qual aplicamos uma transformação de Legendre para definir o espectro de singularidade multifractal

$$f(\alpha) = \alpha p - \tau(p). \quad (3.8)$$

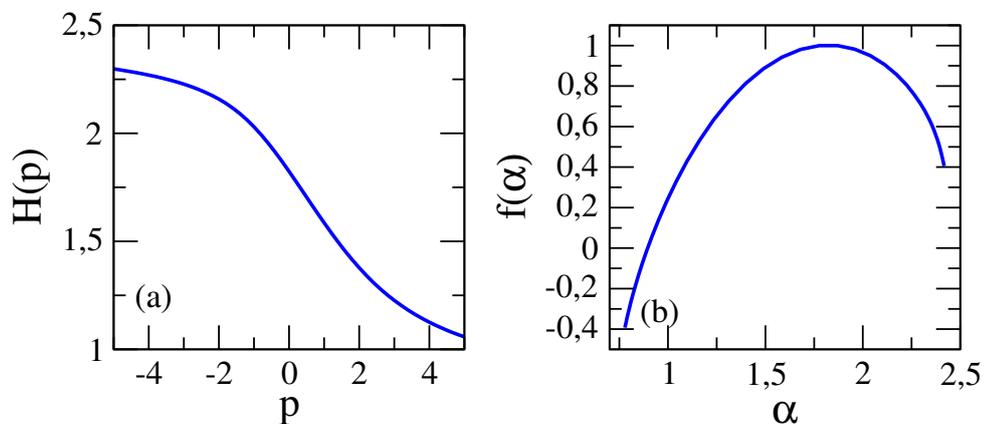
Figura 12 – Gráfico em escala log-log das funções  $F_p(s)$  para  $p = -5$  (círculos pretos),  $p = -3$  (círculos vermelhos),  $p = -1$  (círculos verdes),  $p = 1$  (círculos azuis),  $p = 3$  (círculos magentas) e  $p = 5$  (círculos laranjas) obtidos a partir da série de condutâncias em função do fluxo magnético mostrada na Figura 11(a). As linhas representam ajustes dos valores de  $F_p(s)$  por leis de potência, conforme a Equação 3.6, com as mesmas cores.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Quando uma série apresenta comportamento multifractal, a representação gráfica de  $f(\alpha)$  é larga, enquanto que para séries monofractais a função  $f(\alpha)$  é estreita; a largura do espectro de singularidade multifractal é definida como  $\Delta\alpha = \alpha_{\text{máx}} - \alpha_{\text{mín}}$ , onde  $\alpha_{\text{máx}}$  e  $\alpha_{\text{mín}}$  são os valores máximo e mínimo da variável  $\alpha$ , respectivamente. Na Figura 13(b), é mostrado o gráfico de  $f(\alpha)$  para a série mostrada na Figura 11(a).

Figura 13 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  da série de condutâncias mostrada na Figura 11(a).



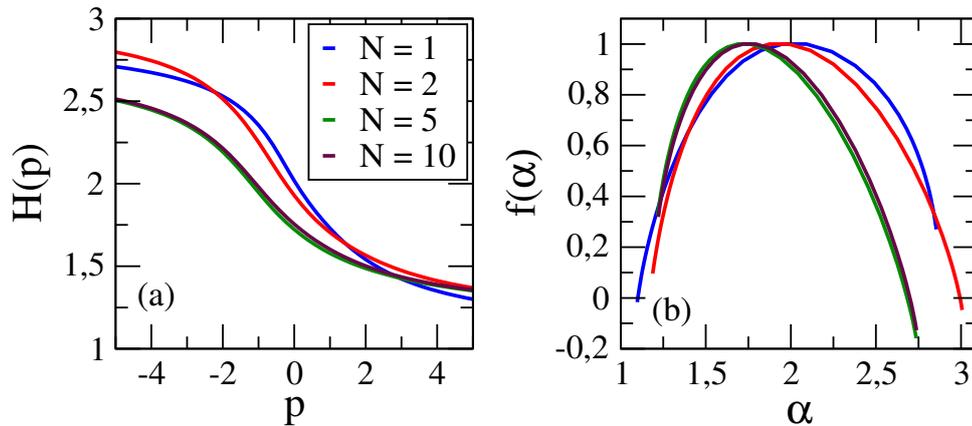
Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para cada um dos quatro valores de  $N$  considerados, o procedimento descrito pelas equa-

ções 3.1 a 3.6 foi realizado para dez<sup>2</sup> séries diferentes, e foi tomada uma média dos valores de  $H(p)$  para todas as séries analisadas. Os valores médios do expoente de Hurst generalizado em função da ordem  $p$  são mostrados na Figura 14(a). Adicionalmente, a partir do valor médio de  $H(p)$ , calculamos o espectro de singularidade multifractal usando as equações 3.7 e 3.8, que é mostrado na Figura 14(b).

De acordo com os resultados mostrados na Figura 14, é possível concluir que as flutuações da magnetocondutância de nanofios de grafeno com borda *armchair* são multifractais, tendo em vista a forte dependência de  $H$  com  $p$ , associada à forma alargada de  $f(\alpha)$ . Além do mais, nota-se que o comportamento multifractal é mais intenso no regime quântico extremo, caracterizado por poucos modos propagantes ( $N \sim 1$ ), e tende a diminuir à medida que os sistemas entram no regime semiclássico ( $N \gg 1$ ).

Figura 14 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez nanofios desordenados de grafeno com borda *armchair* com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para complementar a descrição das flutuações da magnetocondutância dos nanofios de grafeno com borda *armchair*, estudamos a distribuição de incrementos das séries de condutância associados a uma variação de fluxo  $\Delta\phi$  com energia de Fermi  $E_F$  fixa, dados por

$$\Delta g = g(\phi + \Delta\phi) - g(\phi). \quad (3.9)$$

Os incrementos de condutância podem ser entendidos como uma medida da resposta das propriedades de transporte a uma pequena perturbação no sistema causada pela variação do

<sup>2</sup> Foi observado que quando mais de dez realizações são consideradas, a média dos valores de  $H(p)$  obtidos a partir das séries correspondentes não muda, de modo que este número de realizações foi escolhido para estudar os nanofios de grafeno com bordas *armchair* e os demais sistemas que serão considerados a seguir.

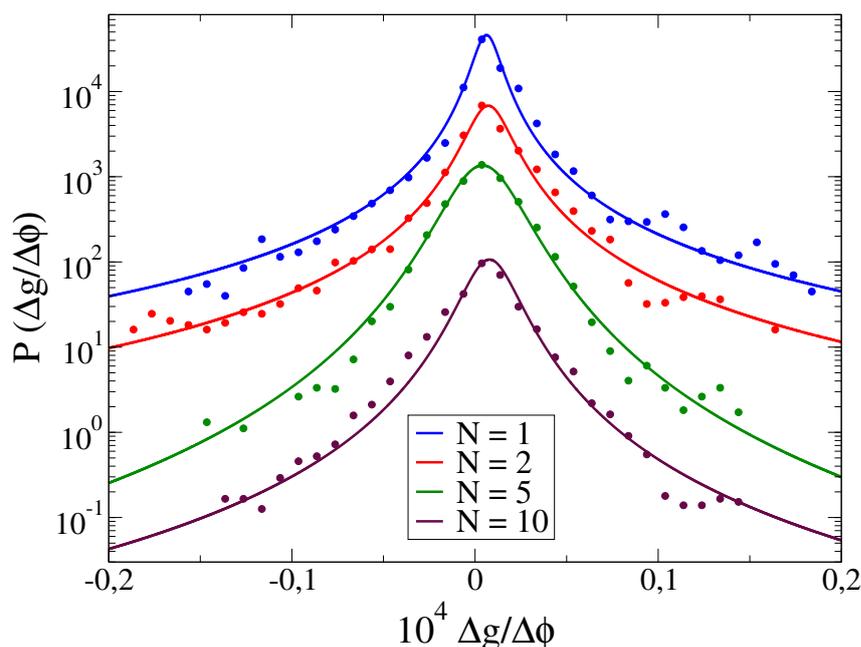
campo magnético. Além do mais, os incrementos de condutância podem conter informações a respeito de certas correlações quânticas induzidas pelo campo magnético dentro da região de espalhamento.

É evidente que os incrementos de condutância dependem do passo da variação de fluxo empregado na obtenção da série original (Equação 3.9). De modo a remover a dependência em  $\Delta\phi$  das distribuições de incrementos, empregaremos a seguinte normalização para os incrementos de condutância definindo

$$x \equiv \frac{\Delta g}{\Delta\phi}. \quad (3.10)$$

Esta normalização serve apenas para uniformizar o estudo das distribuições de incrementos ao longo desta Tese, tendo em vista que valores distintos de  $\Delta\phi$  foram usados para diferentes tipos de sistemas, como será evidenciado na próximas subseções. Na Figura 15, os símbolos circulares mostram histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutância dos nanofios de grafeno com borda *armchair* com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes nos guias. Os valores dos incrementos foram obtidos das mesmas dez realizações de séries de condutância que foram estudadas separadamente na análise multifractal.

Figura 15 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de nanofios de grafeno com borda *armchair* com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Observando os histogramas mostrados na Figura 15, notamos que as distribuições de probabilidade  $P(x)$  são caracterizadas por ter caudas pesadas, ou seja, valores elevados da variável  $x$  não são raros como seriam se  $P(x)$  fosse uma PDF gaussiana, por exemplo. Partindo disto, realizamos ajustes dos dados com a PDF  $q$ -gaussiana, cuja fórmula é dada por

$$P(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} [1 + (q-1)\beta(x-x_0)^2]^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (3.11)$$

onde

$$C_q = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\sqrt{q-1}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \quad 1 < q < 3, \quad (3.12)$$

com  $\beta$  sendo um número associado à largura da distribuição e  $x_0$  sua média. É importante destacar que a PDF  $q$ -gaussiana pode ser calculada a partir da maximização da Entropia de Tsallis (TSALLIS, 1988; SUYARI, 2006), cuja fórmula é:

$$S_q[p] = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \int [p(x)]^q dx \right) \quad (3.13)$$

As linhas cheias na Figura 15 indicam a função  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos dados representados pelos símbolos circulares. É interessante destacar que a PDF  $P(x)$  dada pela Equação 3.11 tende a uma distribuição gaussiana quando  $q \rightarrow 1$ , de modo que a diferença dos valores de  $q$  em relação a 1 podem ser entendidos como uma medida da não gaussianidade da distribuição. Na Figura 15, é possível notar que no regime quântico extremo ( $N \sim 1$ ), a distribuição de incrementos tem duas características importantes — caudas pesadas e pico estreito —, que indicam que a mesma é altamente não gaussiana, mas à medida que  $N$  aumenta, estes aspectos ficam menos evidentes, com as caudas tornando-se menos pesadas e o pico da distribuição mais arredondado, o que indica uma transição das distribuições de incrementos normalizados de um comportamento não gaussiano no regime quântico extremo ( $N \sim 1$ ) para gaussiano no regime semiclássico ( $N \gg 1$ ). Esta transição pode ser associada a uma perda de correlações no processo estocástico dado pela série de condutâncias em função do campo magnético quando  $N$  é grande (FRAHM; PICHARD, 1995), a qual pode ser quantificada indiretamente pela redução do valor de  $q$  quando o sistema sai do regime quântico extremo ( $N \sim 1$ ) para o regime semiclássico ( $N \gg 1$ ), em que espera-se que  $q \rightarrow 1$ , o que pode ser observado na Tabela 1, que mostra os valores de  $q$ ,  $\beta$  e  $x_0$  da PDF  $q$ -gaussiana (Equação 3.11) que melhor se ajusta aos histogramas dos incrementos normalizados.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros  $q$ ,  $\beta$  e  $x_0$  das funções de densidade de probabilidade  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de nanofios de grafeno com borda *armchair* com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes.

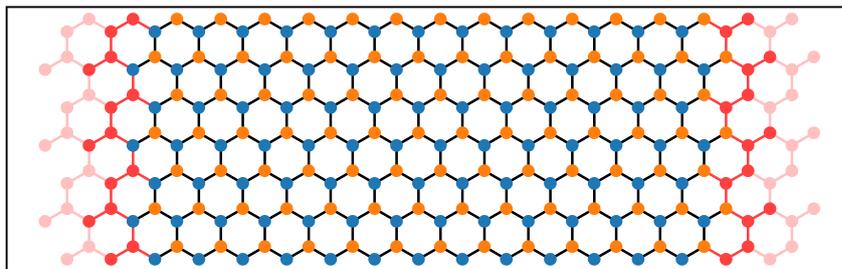
$N$	$q$	$10^3 \beta$	$x_0$
1	$1,94 \pm 0,07$	$19 \pm 3$	$0,0063 \pm 0,0003$
2	$1,87 \pm 0,11$	$8,1 \pm 1,9$	$0,0073 \pm 0,0005$
5	$1,50 \pm 0,04$	$3,6 \pm 0,2$	$0,0041 \pm 0,0002$
10	$1,66 \pm 0,12$	$6,2 \pm 1,2$	$0,0079 \pm 0,0005$

**Fonte:** Elaborada pelo autor (2022)

### 3.1.1.2 Borda zigzag

Os nanofios de carbono com bordas *zigzag* foram modelados com comprimento  $L_Z = 124\sqrt{3}a$  e largura  $W_Z = 67a/2$ . A Figura 16 mostra um exemplo de nanofio com rede hexagonal e borda *zigzag*, na qual as cores dos sítios seguem o mesmo padrão que foi apresentado no caso dos nanofios com bordas *armchair*. Na Figura 17, é mostrado o gráfico da estrutura de bandas de um guia com a forma mostrada na Figura 16 e largura  $W_Z = 67a/2$ .

Figura 16 – Representação esquemática de um nanofio com rede hexagonal e borda *zigzag*. Os sítios pertencentes às duas sub-redes distintas do sistema são representados em azul e laranja. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra.

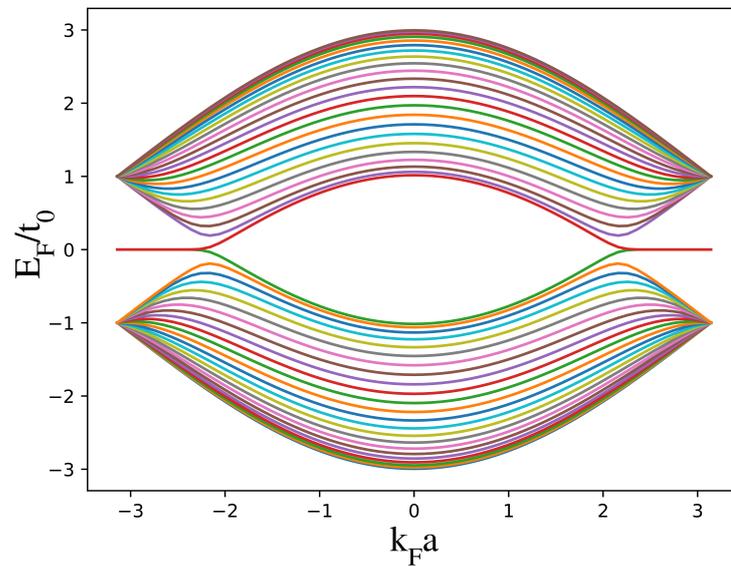


**Fonte:** Elaborada pelo autor (2022)

Assim como para nanofios de grafeno com bordas *armchair* (ver Seção 3.1.1.1), também estudamos nanofios com bordas *zigzag* com diferentes valores do número  $N$  de modos propagantes, que foi controlado variando a energia de Fermi, já que a largura dos guias não foi alterada (ver Seção 2.2).

Na Figura 18, mostramos o gráfico da condutância adimensional  $g$ , ou seja, do número  $N$  de modos propagantes, em função da energia de Fermi. A partir deste gráfico, podemos extrair a janela de valores de energia na qual o sistema tem certo número de canais. Os símbolos

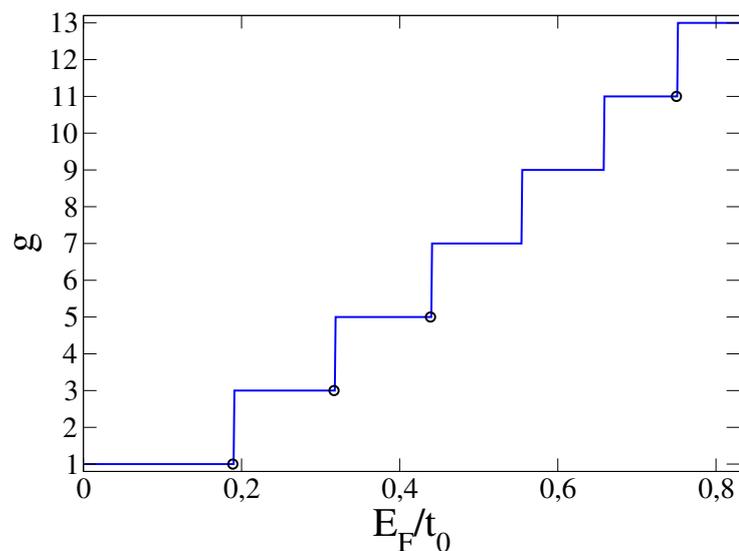
Figura 17 – Estrutura de bandas dos guias de largura  $W_Z = 67a/2$  em uma rede hexagonal com borda *zigzag*. A energia de Fermi  $E_F$  é medida dada em múltiplos do parâmetros de *hopping*  $t_0$  e o número de onda de Fermi  $k_F$  em múltiplos de  $1/a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

circulares na Figura 18 indicamos valores da energia de Fermi usados para obter  $N = 1, 3, 5, 11$  modos propagantes; estes valores são  $E_F/t_0 = 0,189, 0,317, 0,439, 0,750$ , respectivamente.

Figura 18 – Gráfico da condutância adimensional  $g$  de um nanofio de grafeno com bordas *zigzag* conectado a dois terminais através de guias de largura  $W_Z = 67a/2$  em função da energia de Fermi  $E_F$  medida em unidades do parâmetro de *hopping*  $t_0$ . O símbolos circulares indicam os pontos cujos valores da energia de Fermi foram escolhidos para modelar sistemas com os números de canais desejados,  $N = 1, 3, 5, 11$ .

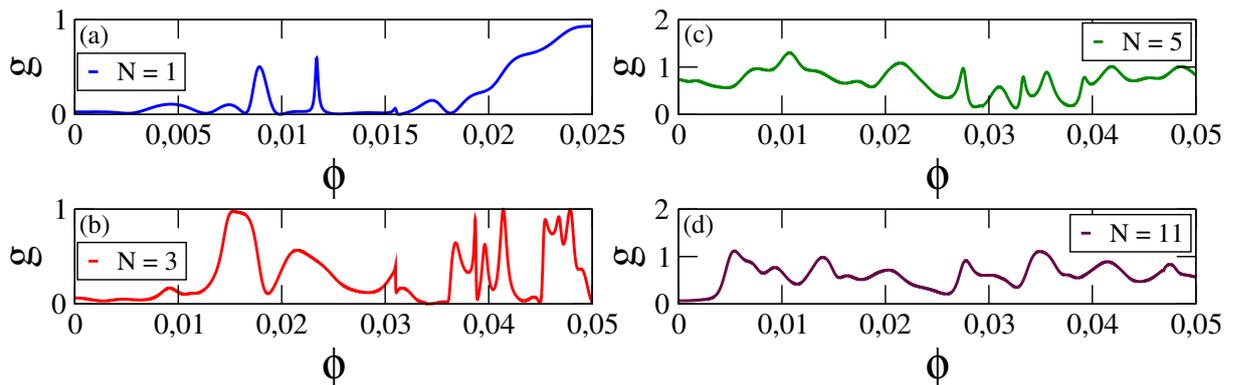


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

A Figura 19 mostra exemplos de séries de condutância em função do fluxo magnético dos

nanofios de grafeno com borda *zigzag* para quatro valores diferentes do número de modos propagantes nos guias,  $N = 1, 3, 5, 11$ . Note que aqui foram considerados apenas valores ímpares de  $N$ , o que está relacionado à forma geométrica dos guias.

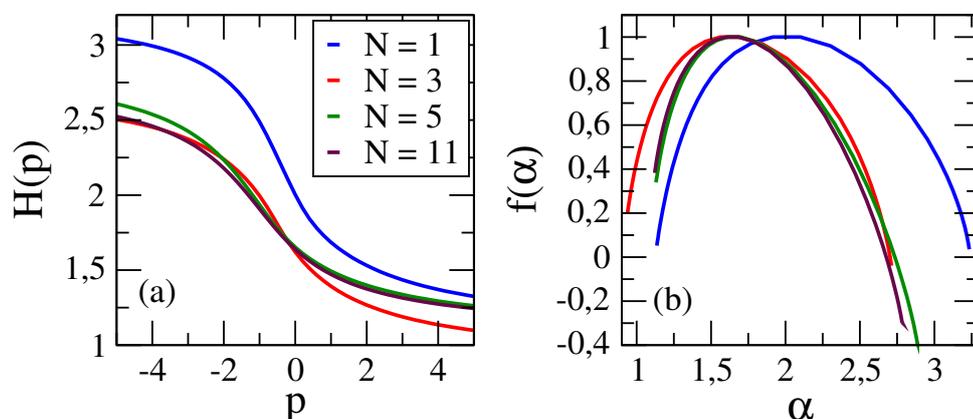
Figura 19 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de um nanofio desordenando de grafeno com borda *zigzag* com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 3$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 11$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Assim como no caso dos nanofios de grafeno com borda *armchair* (ver subseção 3.1.1.1), calculamos o expoente de Hurst  $H(p)$  médio a partir de dez séries de condutância obtidas a partir de diferentes distribuições de desordem e o espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  para os nanofios de grafeno com borda *zigzag*; os resultados são mostrados na Figura 20. Equivalentemente, a Figura 20(a) mostra uma forte dependência de  $H$  com  $p$  e a Figura 20(b) que o gráfico da função  $f(\alpha)$  é largo para todos os valores de  $N$ , indicando que as

Figura 20 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez nanofios desordenados de grafeno com borda *zigzag* com  $N = 1$  (em azul),  $N = 3$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 11$  (em marrom) modos propagantes.

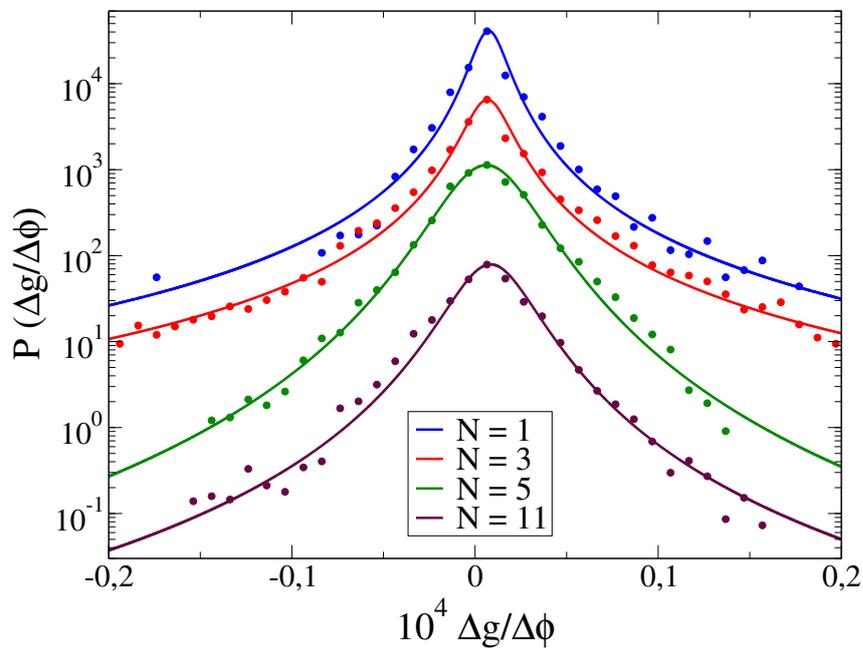


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

flutuações da magnetocondutância destes sistemas também são multifractais. Além disso, o grau de dependência de  $H$  com  $p$  e o valor de  $\Delta\alpha$  diminuem quando  $N$  aumenta, mostrando que a multifractalidade é mais forte no limite quântico extremo de poucos modos propagantes.

Os histogramas dos incrementos normalizados (Equações 3.9 e 3.10) obtidos das dez séries de condutância dos nanofios de grafeno com borda *zigzag* também podem ser bem ajustados por PDF  $q$ -gaussianas. A Figura 21 mostra os histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutância dos nanofios de grafeno com borda *zigzag* com  $N = 1, 3, 5, 11$  modos propagantes nos guias, assim como as funções  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas. De maneira equivalente aos nanofios de grafeno com borda *armchair*, aqui podemos observar que à medida que  $N$  aumenta, as caudas de  $P(x)$  ficam menos pesadas, o que pode ser percebido através de uma rápida inspeção da Figura 21 e dos valores de  $q$  das respectivas PDF  $q$ -gaussianas, os quais podem ser consultados na Tabela 2.

Figura 21 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de nanofios de grafeno com borda *zigzag* com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 3$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 11$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 2.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Tabela 2 – Valores dos parâmetros  $q$ ,  $\beta$  e  $x_0$  das função de densidade de probabilidade  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de nanofios de grafeno com borda *zigzag* com  $N = 1, 3, 5, 11$  modos propagantes.

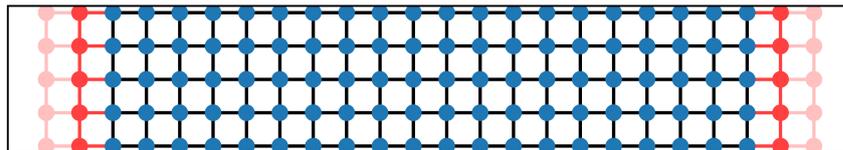
$N$	$q$	$10^3 \beta$	$x_0$
1	$1,83 \pm 0,10$	$13 \pm 2$	$0,0074 \pm 0,0005$
3	$1,88 \pm 0,06$	$7,5 \pm 0,9$	$0,0067 \pm 0,0004$
5	$1,46 \pm 0,09$	$2,4 \pm 0,3$	$0,0062 \pm 0,0005$
11	$1,56 \pm 0,09$	$3,0 \pm 0,4$	$0,0085 \pm 0,0005$

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

### 3.1.2 Gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada

Para finalizar o estudo das flutuações da magnetocondutância de sistemas difusivos, consideramos 2DEG com rede quadrada. A Figura 22 mostra uma representação esquemática da estrutura de rede de um 2DEG, onde os sítios na cor azul representam a região de espalhamento — o 2DEG propriamente dito — e os sítios indicados em vermelho representam os guias conectados ao 2DEG. A estrutura de bandas de um guia como estes é mostrada na Figura 23.

Figura 22 – Representação esquemática de um gás de elétrons bidimensional com rede quadrada. Os sítios pertencentes à região de espalhamento — o 2DEG propriamente dito — são representados em azul. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra.

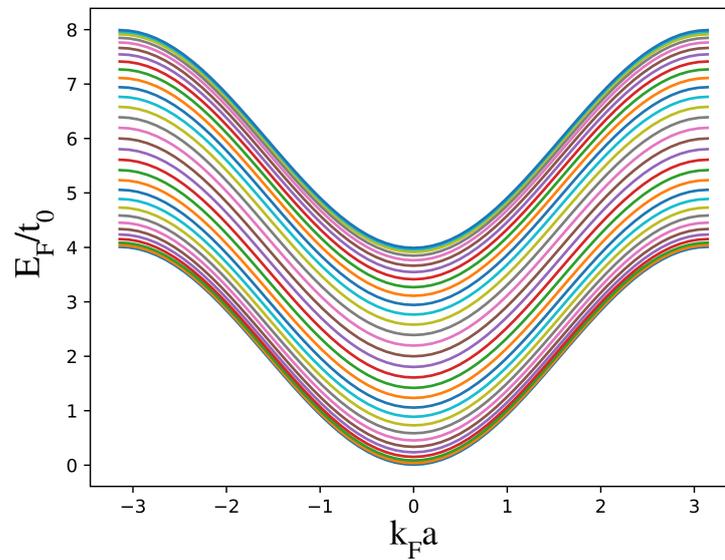


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Para estes sistemas, as séries de condutância foram obtidas usando o Hamiltoniano dado na Equação 2.30 com  $U = 0,65t_0$ , como em (VERÇOSA et al., 2018b), com o fluxo magnético variando de 0 até um valor máximo escolhido para cada  $N$  com passos de  $\Delta\phi = 2 \times 10^{-5}$ . Os 2DEG foram modelados com comprimento  $L = 198a$  e largura  $W = 31a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede.

Equivalentemente ao caso dos nanofios de grafeno, também consideramos 2DEG com diferentes valores de  $N$ , que foi controlado através da variação da energia de Fermi do sistema, de acordo com o gráfico mostrado na Figura 24. Os símbolos circulares em 24 indicam os pontos que foram escolhidos para obter 2DEG com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes, cujos

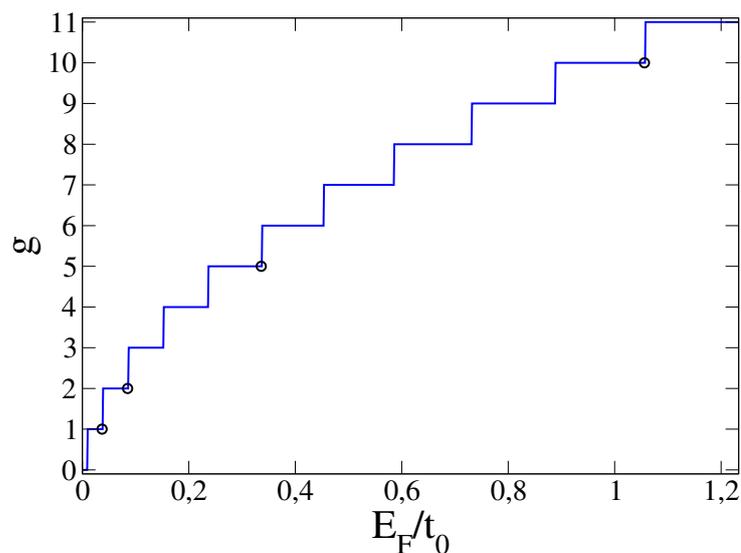
Figura 23 – Estrutura de bandas dos guias de largura  $W = 31a$  em uma rede quadrada. A energia de Fermi  $E_F$  é medida dada em múltiplos do parâmetro de *hopping*  $t_0$  e o número de onda de Fermi  $k_F$  em múltiplos de  $1/a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

valores de energia são  $E_F/t_0 = 0,037, 0,085, 0,336, 1,056$ , respectivamente. Na Figura 25, são mostrados exemplos de realizações obtidas das séries de condutâncias  $\{g(\phi)\}$  dos 2DEG estudados com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes.

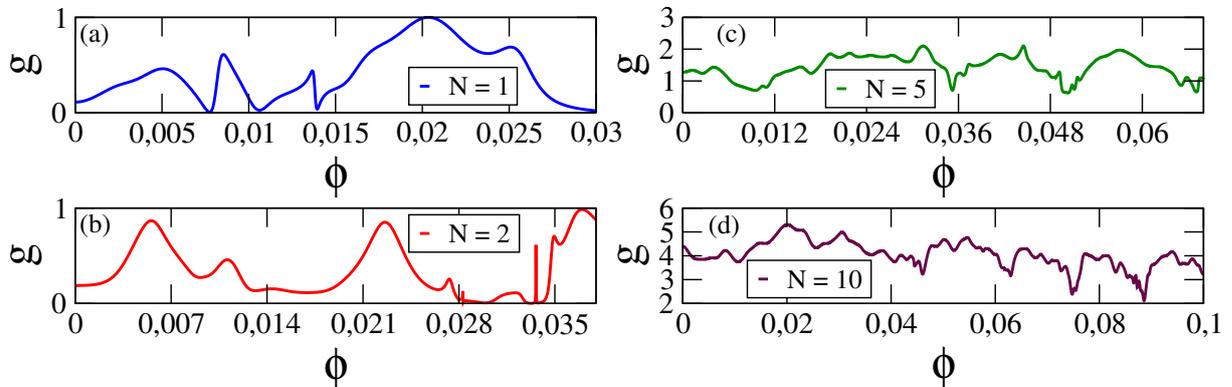
Figura 24 – Gráfico da condutância adimensional  $g$  de um 2DEG conectado a dois terminais através de guias de largura  $W = 31a$  em função da energia de Fermi  $E_F$  medida em unidades do parâmetro de *hopping*  $t_0$ . O símbolos circulares indicam os pontos cujos valores da energia de Fermi foram escolhidos para modelar sistemas com os números de canais desejados,  $N = 1, 2, 5, 10$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

As Figuras 26(a) e 26(b) mostram, respectivamente, o expoente de Hurst generalizado

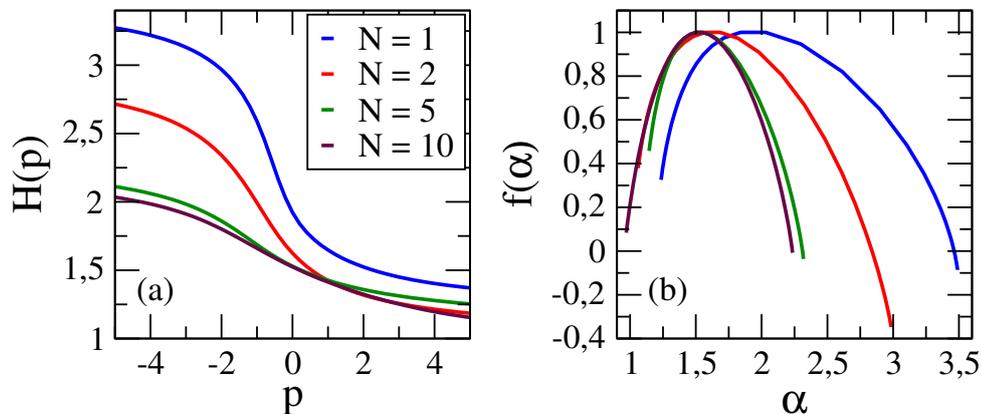
Figura 25 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de um gás de elétrons bidimensional com rede quadrada com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

médio e o espectro de singularidade multifractal de dez séries de condutância de 2DEG com rede quadrada com diferentes realizações de desordem. Assim como para os fios de grafeno,

Figura 26 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes.

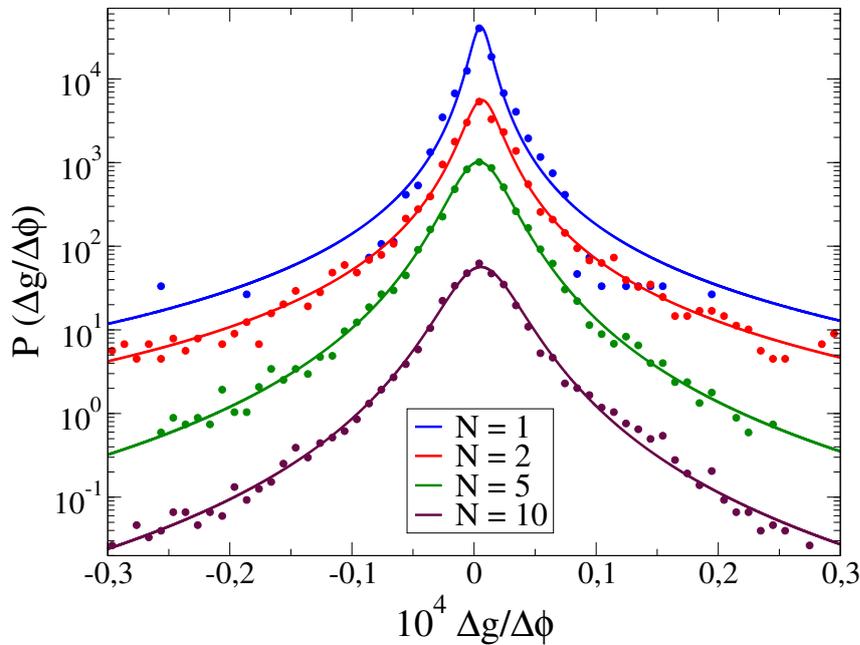


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

os resultados indicam que as flutuações da magnetocondutância de 2DEG com rede quadrada têm comportamento multifractal no regime quântico extremo ( $N \sim 1$ ) e que esta multifractalidade fica mais fraca no regime semiclássico ( $N \gg 1$ ). Estas observações indicam que MCF não são uma característica apenas de nanofios de grafeno, o que abre a possibilidade para a realização de experimentos análogos ao descrito por (AMIN et al., 2018) em nanofios de materiais diferentes do grafeno para investigar a existência de multifractalidade nas flutuações da magnetocondutância de nanofios com diferentes estruturas de rede.

Complementarmente, estudamos os histogramas dos incrementos das dez séries de condutância dos 2DEG, normalizados de acordo com a Equação 3.10. Os histogramas são bem ajustados por PDF  $q$ -gaussianas, conforme pode ser visto na Figura 27 para 2DEG com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes nos guias. Assim como para os nanofios de grafeno, nota-se que à medida que  $N$  aumenta, as caudas de  $P(x)$  ficam menos pesadas e a PDF aproxima-se de uma gaussiana, já que o valor de  $q$  fica mais próximo de 1, como pode ser verificado na Tabela 3.

Figura 27 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Tabela 3 – Valores dos parâmetros  $q$ ,  $\beta$  e  $x_0$  das função de densidade de probabilidade  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes.

$N$	$q$	$10^3 \beta$	$x_0$
1	$1,85 \pm 0,05$	$13,5 \pm 1,2$	$0,0055 \pm 0,0002$
2	$1,83 \pm 0,06$	$5,1 \pm 0,6$	$0,0065 \pm 0,0004$
5	$1,60 \pm 0,02$	$2,24 \pm 0,08$	$0,0041 \pm 0,0002$
10	$1,57 \pm 0,04$	$1,54 \pm 0,10$	$0,0055 \pm 0,0004$

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

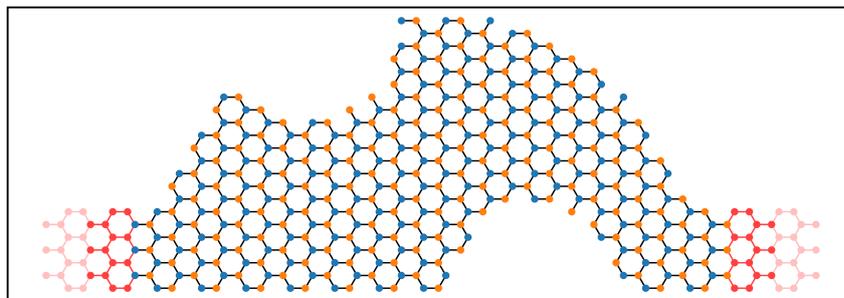
## 3.2 CAVIDADES BALÍSTICAS CAÓTICAS

A partir de agora, passaremos a considerar sistemas sem desordem. Especificamente, estudaremos cavidades balísticas nas quais caos é introduzido pelas múltiplas reflexões dos elétrons nas bordas. Na subseção 3.2.1, será apresentado um estudo de cavidades de grafeno; em seguida, na subseção 3.2.2, consideramos cavidades bidimensionais com rede quadrada.

### 3.2.1 Cavidades de grafeno

As cavidades balísticas caóticas de grafeno (GCB) foram modeladas com a geometria representada na Figura 28 (WURM et al., 2009; BARBOSA; RAMOS; FERREIRA, 2021). Para obter as séries da condutância, usamos o Hamiltoniano dado pela Equação 2.31 com  $U = 0$ , ou seja, sem desordem, e o fluxo magnético foi variado com passos de  $\Delta\phi = 5 \times 10^{-6}$  de 0 (zero) até um valor máximo dependente de  $N$ .

Figura 28 – Representação esquemática de uma cavidade balística caótica com rede hexagonal. Os sítios pertencentes às duas sub-redes distintas do sistema são representados em azul e laranja. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra.



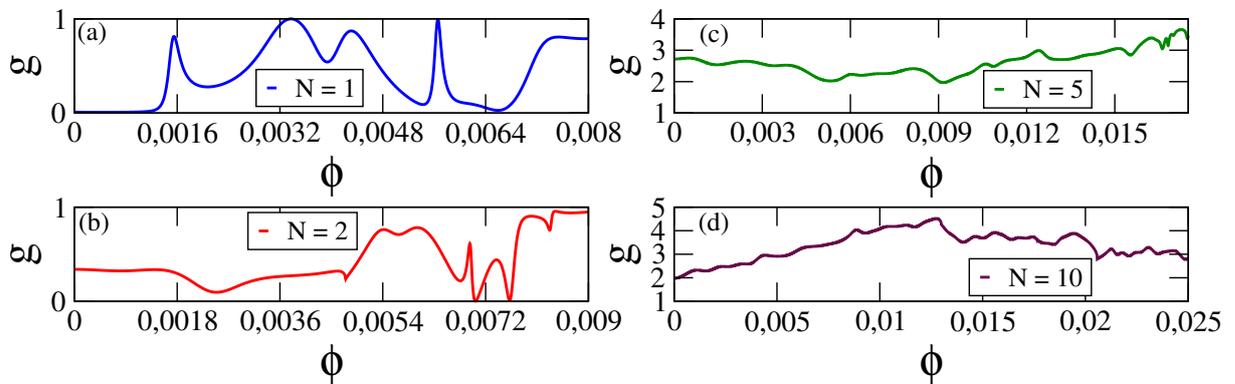
**Fonte:** Elaborada pelo autor (2022)

A Figura 29 mostra exemplos de séries da condutância em função do fluxo magnético das cavidades de grafeno com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes nos guias.

Assim como no estudo de fios desordenados, foram consideradas dez realizações diferentes do sistema para cada valor de  $N$ ; entretanto, ao invés de considerar diferentes distribuições de desordem, inexistente em sistemas balísticos, simulamos cavidades com pequenas mudanças nas posições das cortes semicirculares presentes no desenho do sistema (ver Figura 28).

O expoente de Hurst médio das dez realizações de flutuações da magnetocondutância de cavidades balísticas de grafeno é mostrado na Figura 30(a) para  $N = 1, 2, 5, 10$ . Em 30(b),

Figura 29 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de uma cavidade balística caótica de grafeno com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente.

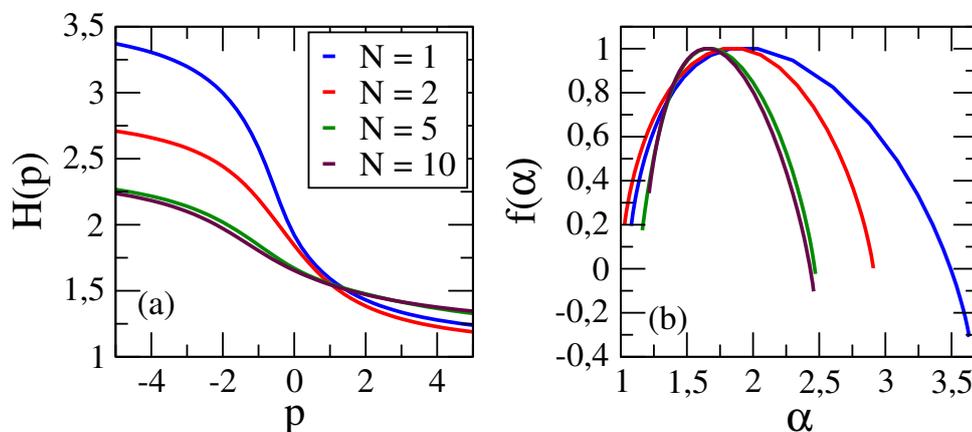


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

mostramos o espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  correspondente para os mesmos valores de  $N$ .

Os resultados da análise multifractal das flutuações da magnetocondutância de cavidades de grafeno são semelhantes aos obtidos para nanofios. A Figura 30 indica que as séries da condutância em função do fluxo magnético de GCB são multifractais no regime quântico extremo de condução ( $N \sim 1$ ), tendo em vista a forte dependência de  $H$  com  $p$  (ver Figura 30(a)) e o aspecto largo de  $f(\alpha)$  (ver Figura 30(b)). Além disso, nota-se uma tendência de enfraquecimento da multifractalidade quando  $N$  aumenta e o sistema vai para o regime semiclássico ( $N \gg 1$ ), como pode ser visto pela diminuição da largura  $\Delta\alpha$ , por exemplo.

Figura 30 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez cavidades balísticas caóticas de grafeno com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes.

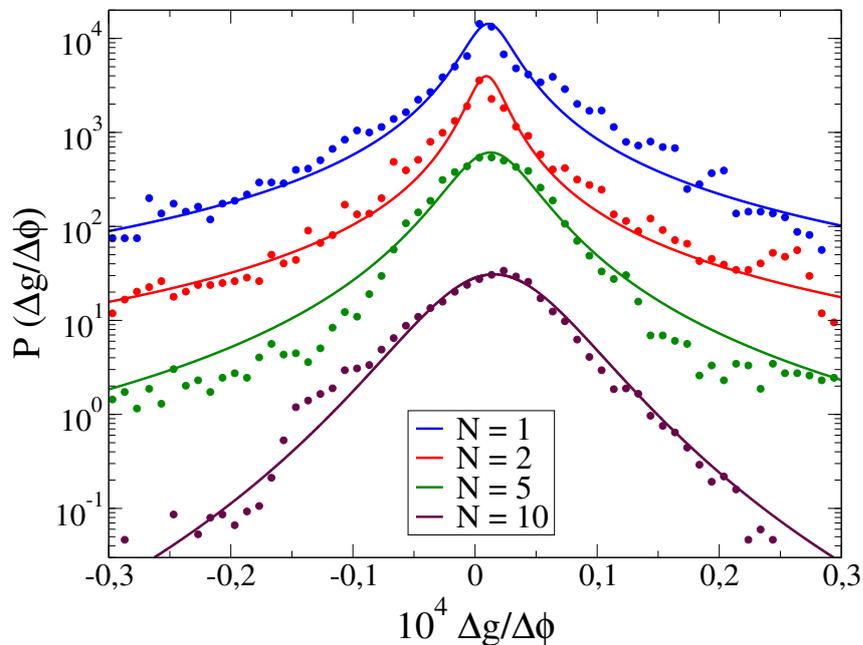


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

As distribuições de incrementos normalizados das séries da condutância em função do

fluxo magnético de cavidades de grafeno também são bem ajustadas por PDF  $q$ -gaussianas. A Figura 31 mostra os histogramas (símbolos circulares) e as funções  $q$ -gaussianas (linhas cheias) que melhor se ajustam àqueles para GCB com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes. É possível observar que todas as distribuições têm caudas pesadas, mas à medida que  $N$  aumenta,  $q$  diminui, como pode ser visto na Tabela 4, e a forma da distribuição aproxima-se de uma gaussiana.

Figura 31 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de cavidades balísticas caóticas de grafeno com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Tabela 4 – Valores dos parâmetros  $q$ ,  $\beta$  e  $x_0$  das função de densidade de probabilidade  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de cavidades balísticas caóticas de grafeno com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes.

$N$	$q$	$10^3 \beta$	$x_0$
1	$2,09 \pm 0,05$	$2,4 \pm 0,3$	$0,011 \pm 0,001$
2	$2,09 \pm 0,06$	$4,0 \pm 0,6$	$0,009 \pm 0,001$
5	$1,73 \pm 0,05$	$0,95 \pm 0,08$	$0,013 \pm 0,001$
10	$1,34 \pm 0,07$	$0,36 \pm 0,03$	$0,015 \pm 0,001$

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

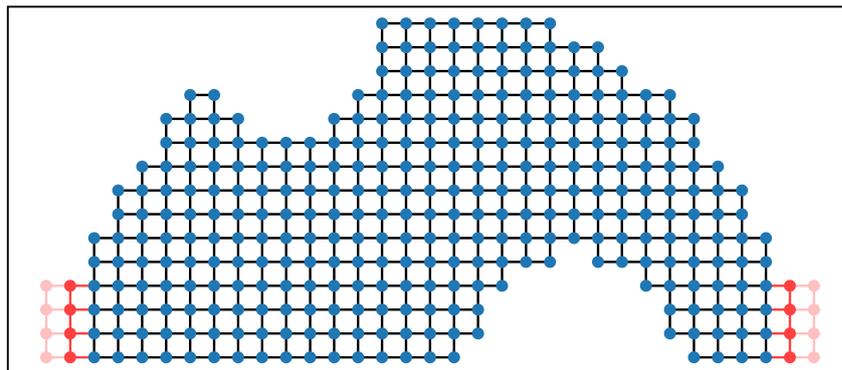
### 3.2.2 Cavidades bidimensionais com rede quadrada

Para completar as análises deste capítulo, consideramos cavidades balísticas caóticas bidimensionais com estrutura de rede quadrada (2DCB). Neste caso, usamos um Hamiltoniano como o da Equação 2.30 com  $U = 0$ . Para estas cavidades, calculamos séries da condutância variando o fluxo magnético com passos de  $\Delta\phi = 1 \times 10^{-5}$ .

A Figura 32 representa esquematicamente a forma das cavidades com rede quadrada estudadas. Assim como para as cavidades de grafeno, consideramos dez diferentes cavidades com pequenas diferenças na posição dos semicírculos menores, e uma das realizações das séries da condutância para sistemas com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes é mostrada na Figura 33.

Na Figura 34(a), temos o expoente de Hurst médio das flutuações da magnetocondutância

Figura 32 – Representação esquemática de uma cavidade balística caótica bidimensional com rede quadrada. Os sítios pertencentes à região de espalhamento — a 2DCB propriamente dita — são representados em azul. Os sítios vermelhos representam os guias, que se estendem infinitamente ao longo da direção do comprimento da amostra.

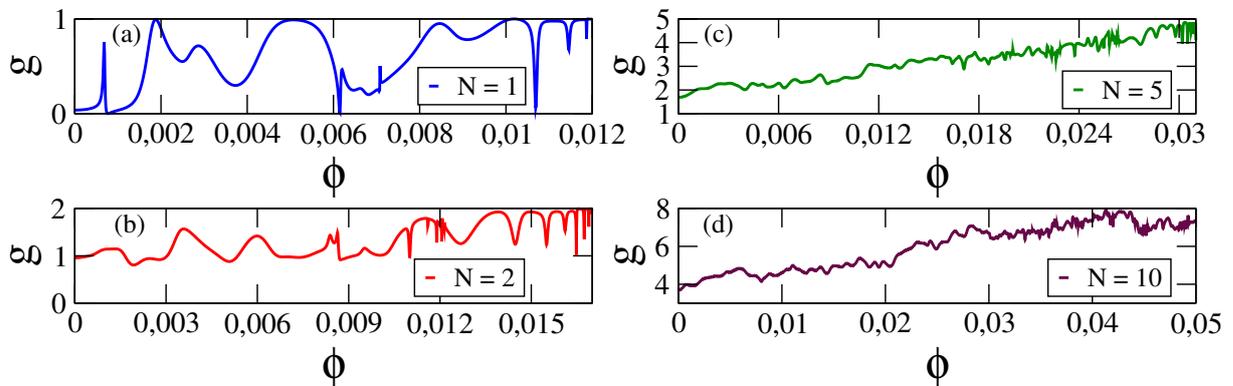


**Fonte:** Elaborada pelo autor (2022)

das cavidades balísticas com rede quadrada com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes. Já em 34(b), tem-se o gráfico do espectro  $f(\alpha)$  correspondente para os mesmos valores de  $N$  que em 34(a).

Equivalentemente a nanofios desordenados, tanto de grafeno quanto construídos a partir de 2DEG, e a cavidades balísticas de grafeno, os resultados indicam que as flutuações da magnetocondutância de 2DCB são multifractais, principalmente no regime quântico extremo de condução ( $N \sim 1$ ). É interessante destacar que para as 2DCB com  $N = 10$  modos propagantes estudadas, a Figura 34(a) mostra que as flutuações são praticamente monofractais, confirmando a tendência já esperada do estudo dos outros tipos de sistema de enfraquecimento do caráter multifractal das flutuações da magnetocondutância em sistemas mesoscópicos no

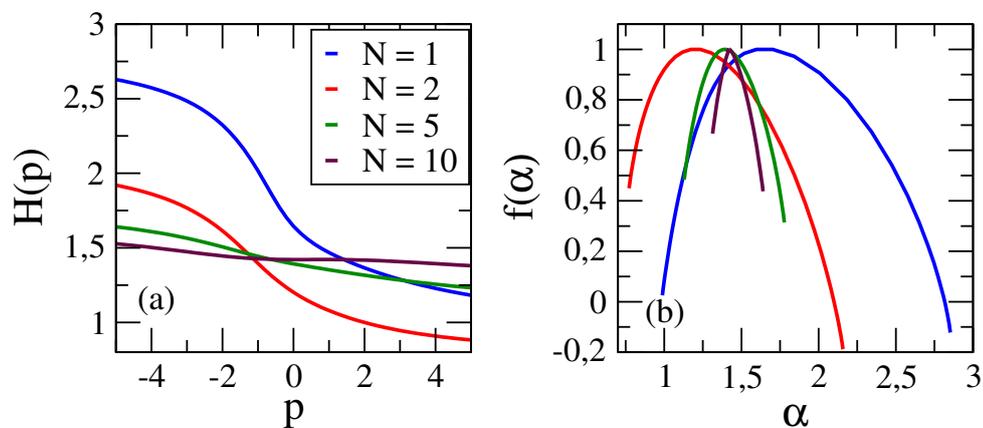
Figura 33 – Exemplo de série de condutância em função do fluxo magnético de uma cavidade balística caótica com rede quadrada com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 5$  e (d)  $N = 10$  modos propagantes. A condutância e o fluxo magnético são dados em unidades de  $2e^2/h$  e  $Ba^2/(h/e)$ , respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

regime semiclássico de condução ( $N \gg 1$ ); complementarmente, a Figura 34(b) mostra que  $\Delta\alpha \rightarrow 0$  quando  $N \gg 1$ .

Figura 34 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das séries de condutância de dez cavidades balísticas caóticas com rede quadrada com  $N = 1$  (em azul),  $N = 2$  (em vermelho),  $N = 5$  (em verde) e  $N = 10$  (em marrom) modos propagantes.

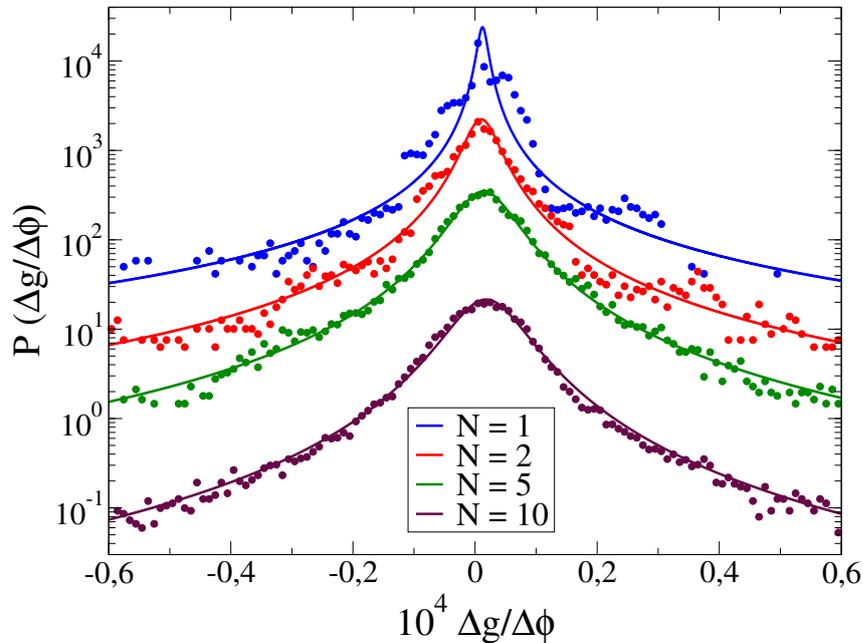


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Por último, estudamos as distribuições de incrementos normalizados ( $x = \Delta g/\Delta\phi$ ) das “séries temporais” da condutância em função do fluxo magnético ( $\{g(\phi)\}$ ) de 2DCB com rede quadrada. Para estes sistemas, os histogramas também são bem ajustados por PDF  $q$ -gaussianas para todos os valores  $N$ , mas os valores de  $q$  das melhores funções de ajuste para  $N \gg 1$  (regime semiclássico) são mais próximos de 1 do que para  $N = 1$  (regime quântico). Estes resultados indicam que à medida que o número  $N$  de modos propagantes de sistemas mesoscópicos cresce, as flutuações da magnetocondutância perdem correlação, a qual pode ser indiretamente quantificada pelo valor de  $q$  das PDF  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam

aos histogramas, conforme será discutido na próxima seção.

Figura 35 – Gráfico na escala semi-log dos histogramas dos incrementos normalizados (Equação 3.10) das séries de condutância de cavidades balísticas caóticas com rede quadrada com  $N = 1$  (símbolos circulares azuis),  $N = 2$  (símbolos circulares vermelhos),  $N = 5$  (símbolos circulares verdes) e  $N = 10$  (símbolos circulares marrons). As linhas cheias (com a mesma correspondência entre  $N$  e as cores dos histogramas) representam a distribuição  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta aos histogramas. Os parâmetros das funções  $q$ -gaussianas deste gráfico podem ser vistos na Tabela 1.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Tabela 5 – Valores dos parâmetros  $q$ ,  $\beta$  e  $x_0$  das função de densidade de probabilidade  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam aos histogramas dos incrementos normalizados das séries de condutâncias em função do fluxo magnético de cavidades balísticas caóticas com rede quadrada com  $N = 1, 2, 5, 10$  modos propagantes.

$N$	$q$	$10^3 \beta$	$x_0$
1	$2,30 \pm 0,10$	$11 \pm 4$	$0,012 \pm 0,001$
2	$2,06 \pm 0,03$	$1,18 \pm 0,09$	$0,0102 \pm 0,0006$
5	$1,91 \pm 0,02$	$0,402 \pm 0,015$	$0,0139 \pm 0,0005$
10	$1,80 \pm 0,02$	$0,300 \pm 0,014$	$0,0180 \pm 0,0006$

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

### 3.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este trabalho foi primariamente motivado pelas observações experimentais de multifractalidade nas flutuações da condutância de nanoestruturas de grafeno, reportadas por (AMIN et al., 2018), até então desconhecidas na literatura. (AMIN et al., 2018) relataram que as flutuações

da condutância originadas pela aplicação de um campo magnético a um dispositivo de grafeno de alta mobilidade exibem comportamento multifractal sob duas condições: temperatura extremamente baixa e proximidade ao ponto de neutralidade de carga (ponto de Dirac), que caracteriza o regime quântico extremo.

(AMIN et al., 2018) sugeriram que as análises das medidas experimentais apresentadas evidenciavam que uma localização de Anderson incipiente na proximidade do ponto de Dirac seria a explicação mais plausível para a multifractalidade observada. Na verdade, multifractalidade em sistemas quânticos desordenados já foi observada, por exemplo, na forma com que as autofunções escalam na vizinhança da transição de Anderson (EVERS; MIRLIN, 2008); a ideia-chave apresentada por (AMIN et al., 2018) foi de que o comportamento multifractal da função de onda é diretamente transferido para as flutuações da condutância, tornando-as equivalentemente multifractais.

Neste trabalho, realizamos uma análise multifractal das flutuações da condutância induzidas por um fluxo magnético variável em três tipos de fios desordenados (ver Seção 3.1), e também em duas cavidades balísticas diferentes (ver Seção 3.2), e observamos que, no regime quântico extremo, em todos estes sistemas mesoscópicos, elas apresentam multifractalidade.

A primeira consequência do presente estudo é a conclusão de que multifractalidade não é uma característica específica do grafeno, mas um aspecto geral do regime quântico de flutuações. Segundo, nossos resultados sugerem que as flutuações multifractais da condutância não estão necessariamente relacionadas a uma localização de Anderson incipiente, já que não existem efeitos de localização em cavidades balísticas caóticas, que, assim como fios desordenados, apresentam flutuações multifractais da condutância. Na verdade, é possível inferir que as flutuações multifractais da condutância são consequência dos efeitos de interferência quanto-mecânica sempre presentes em sistemas mesoscópicos. Mais especificamente, sugerimos que a multifractalidade é causada pelas correlações induzidas pelo campo magnético no processo estocástico associado às séries de condutância. Interessantemente, há uma interpretação muito natural para as correlações induzidas pelo campo magnético que são intensas no regime quântico e gradualmente perdidas à medida que o sistema entra no regime semiclássico de condução. Na linguagem de métodos semiclássicos baseados em trajetórias no espaço de fase, as correlações induzidas pelo campo magnético podem ser descritas através de correlações entre trajetórias semiclássicas que aproximam-se entre si (MÜLLER et al., 2004; NOVAES, 2013; RICHTER; SIEBER, 2002; BERKOLAIKO; KUIPERS, 2012; KUIPERS; RICHTER, 2013).

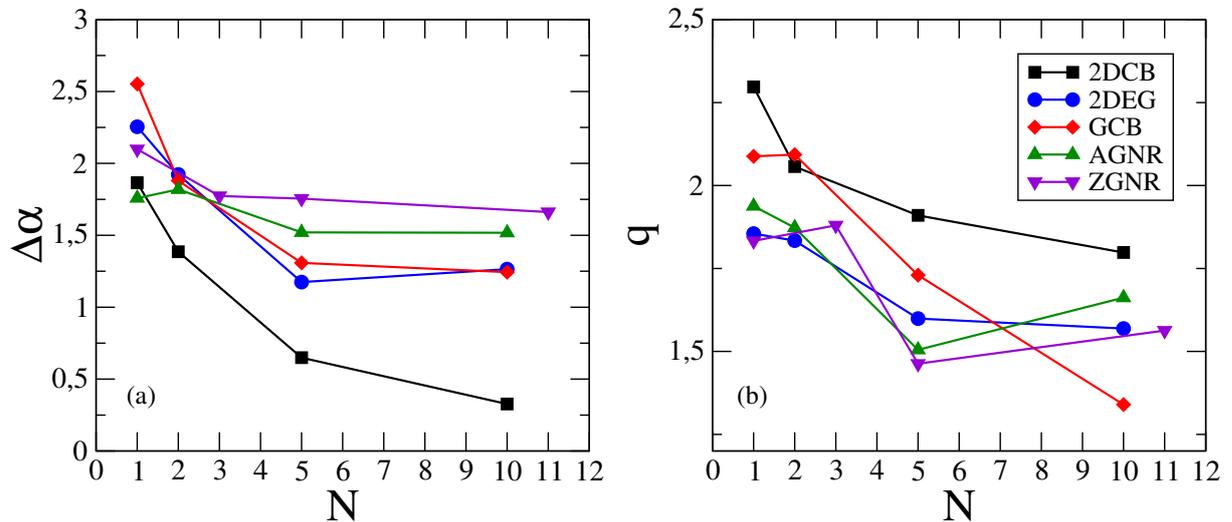
Além do mais, a partir dos resultados apresentados nas subseções 3.1 e 3.2, é possível

extrair três argumentos que sustentam a noção de que multifractalidade é um aspecto geral das flutuações da condutância de sistemas mesoscópicos no regime quântico. Em primeiro lugar, tanto as flutuações da condutância de sistemas desordenados quanto as de sistemas balísticos são multifractais no regime quântico, conforme pode ser visto pela comparação entre os resultados de  $H(p)$  e  $f(\alpha)$  para fios (ver Figuras 14, 20 e 26) e para bilhares caóticos (ver Figuras 30 e 34). Em segundo lugar, as flutuações multifractais da condutância podem ser observadas tanto em sistemas com estrutura de rede quadrada quanto hexagonal, o que nos leva a concluir que resultados similares aos apresentados por (AMIN et al., 2018) poderiam ser observados em sistemas feitos de um material diferente do grafeno, como um gás de elétrons bidimensional com rede quadrada (ver Figura 26). Por último, os resultados indicam que no caso de nanofios de grafeno, a natureza multifractal das flutuações da condutância é independente da geometria das bordas, conforme pode ser visto pela equivalência entre as Figuras 14 e 20, que mostram  $H(p)$  e  $f(\alpha)$  para nanofios de grafeno com bordas *armchair* e *zigzag*, respectivamente.

O resultado central deste capítulo é mostrado na Figura 36. Em 36(a), é mostrado o gráfico de  $\Delta\alpha$  em função de  $N$  para os cinco tipos de sistemas mesoscópicos estudados, no qual observamos que apesar das flutuações da condutância tanto de nanofios desordeando quando de cavidades balísticas caóticas serem multifractais no regime quântico extremo ( $N \sim 1$ ), há um enfraquecimento do comportamento multifractal à medida que o número  $N$  de modos propagantes nos guias aumenta, tendo em vista que a largura do espectro de singularidade  $\Delta\alpha$  diminui com o aumento de  $N$  para todos os sistemas estudados.

Sabe-se que a presença de correlações em uma série temporal é uma das possíveis origens da multifractalidade da mesma (KANTEHARDT et al., 2002), e para determinar se esta é a causa das flutuações multifractais da condutância mostradas neste trabalho, tomamos uma das dez realizações das séries de condutância em função do fluxo magnético que foram consideradas na subseção 3.2.2, de cavidades balísticas caóticas bidimensionais com rede quadrada, a embaralhamos e, em seguida, fizemos a análise multifractal da série embaralhada. A Figura 37 mostra os resultados da análise multifractal da série original da condutância do sistema citado e da respectiva série após embaralhada. Em 37(a) e 37(b), são mostrados, respectivamente, o expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  e o espectro de singularidade  $f(\alpha)$  das séries original (em azul) e embaralhada (em vermelho). Conforme pode ser visto pelo comportamento da linha vermelha da Figura 37(a), o valor de  $H(p)$  da série embaralhada é aproximadamente independente de  $p$ , o que indica que a mesma é monofractal; especificamente, notamos

Figura 36 – Dependência (a) da largura do espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  e (b) do valor de  $q$  das distribuições  $q$ -gaussianas que melhor se ajustam às distribuições de incrementos de condutância  $\Delta g$  divididos por  $\Delta\phi$ . Os símbolos pretos, azuis, vermelhos, verdes e violetas representam, respectivamente, os resultados para cavidades balísticas caóticas bidimensionais com rede quadrada (2DCB), gases de elétrons bidimensionais com rede quadrada (2DEG), cavidades balísticas caóticas de grafeno (GCB), nanofios de grafeno com borda *armchair* (AGNR) e nanofios de grafeno com borda *zigzag* (ZGNR).

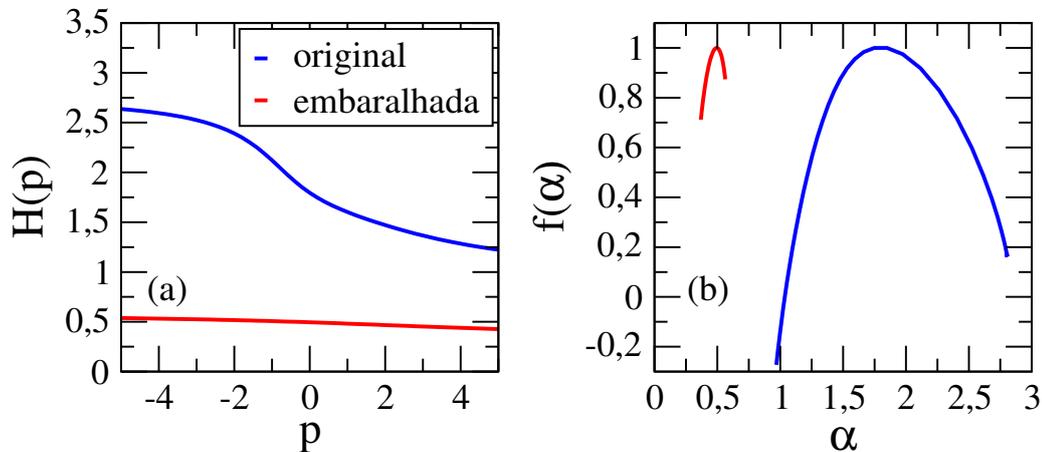


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

que  $H(p) \simeq 0.5$ , ou seja, a série embaralhada é descorrelacionada, mostrando que todas as correlações previamente existentes foram removidas pelo processo de embaralhamento. Adicionalmente, pode-se notar a mudança do comportamento multifractal para aproximadamente monofractal com o embaralhamento da série através da Figura 37(b), que mostra que a largura  $\Delta\alpha$  do espectro  $f(\alpha)$  é drasticamente reduzida em comparação à da série original. Com estas observações, pode-se concluir que o comportamento multifractal das flutuações da magnetocondutância de sistemas mesoscópicos é causada pela correlações induzidas pelo campo magnético.

Complementarmente, a presença ou ausência de correlações nas “séries temporais” da condutância analisadas também podem ser estudadas do ponto de vista das distribuições de incrementos de condutância (DIC) das respectivas séries, os quais são mostrados nas Figuras 15 para nanofios desordenados de grafeno com borda *armchair* (AGNR), 21 para nanofios desordenados de grafeno com borda *zigzag* (ZGNR), 27 para 2DEG, 31 para GCB e 35 para 2DCB. É esperado que esta distribuição seja gaussiana quando a série é completamente descorrelacionada, mas conforme mostrado nas subseções 3.1 e 3.2, todas as DIC dos sistemas estudados são bem ajustadas por uma distribuição  $q$ -gaussiana (Equação 3.11). Na Figura 36(b), temos um gráfico do valor de  $q$  da função  $q$ -gaussiana que melhor se ajusta a cada DIC em função

Figura 37 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  de uma realização de série da condutância em função do fluxo magnético de uma cavidade caótica balística bidimensional com rede quadrada (2DCB) (linhas azuis) e da mesma série após embaralhada (linhas vermelhas).



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

de  $N$  para os sistemas analisados. É possível notar claramente que tanto  $\Delta\alpha$  (Figura 36(a)) quanto  $q$  diminuem com o aumento de  $N$ , o que significa que a perda de multifractalidade pode ser diretamente relacionada com a perda de correlação das “séries temporais” da condutância, onde  $q$  pode ser entendido como um quantificador indireto de correlações, já que quando  $q \rightarrow 1$ , a distribuição  $q$ -gaussiana tende a uma gaussiana, e as séries de condutância tendem a ser descorrelacionadas se as DIC forem gaussianas.

Uma observação final, mas não menos importante, a respeito da função  $q$ -gaussiana é o fato da mesma ser um caso especial de uma classe de funções universais que são usadas para descrever sistemas hierárquicos. Especificamente, a função  $q$ -gaussiana é usada para caracterizar sistemas cujas variáveis dinâmicas têm PDF com caudas descritas por lei de potência e cuja dinâmica estocástica apresenta apenas um nível hierárquico (SALAZAR; VASCONCELOS, 2010; MACÊDO et al., 2017). Com isto em mente, é possível concluir que as flutuações multifractais da condutância podem ser compreendidas como uma consequência da estrutura hierárquica do processo estocástico da condutância em função do campo magnético, o que abre uma nova perspectiva de exploração do surgimento de multifractalidade em fenômenos mesoscópicos.

Os resultados e discussões deste trabalho foram publicados no periódico *Physical Review E* (PESSOA et al., 2021).

## 4 FLUTUAÇÕES MULTIFRACTAIS DA MAGNETOCONDUTÂNCIA NA TRANSIÇÃO HALL

No capítulo anterior, estudamos o comportamento multifractal das flutuações da magnetocondutância de nanofios desordenados e cavidades balísticas caóticas conectados a dois reservatórios de elétrons e submetidos a campos magnéticos de baixa intensidade. A partir de agora, estudaremos o comportamento das flutuações da magnetocondutância em um regime muito diferente — a transição Hall (IQHT) de um nanofio conectado a quatro terminais submetido a campos magnéticos mais intensos.

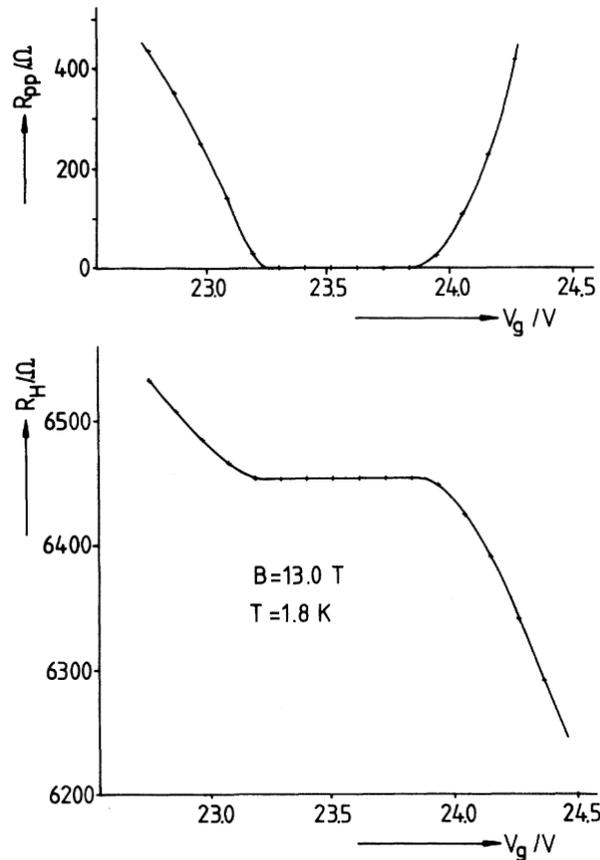
### 4.1 O EFEITO HALL QUÂNTICO

O efeito Hall quântico (IQHE) foi observado experimentalmente pela primeira vez por (KLITZING; DORDA; PEPPER, 1980) em camadas de inversão de silício de transistores de efeitos de campo, e consiste na quantização da condutância Hall (transversal) de um gás de elétrons bidimensional associada à supressão do mecanismo de espalhamento dos elétrons, que leva, conseqüentemente, a uma resistência longitudinal nula, como indicado na Figura 38, em que  $R_{\rho\rho}$  e  $R_H$  são as resistências longitudinal do dispositivo e a resistência Hall em função da tensão à temperatura de 1.8 K e sob um campo magnético de 13.0 T.

Mais tarde, (LAUGHLIN, 1981) mostrou que o IQHE é uma consequência da invariância de calibre do sistema. Pouco tempo depois, (THOULESS et al., 1982; STREDA, 1982) contribuíram com a compreensão de que a quantização da condutância Hall está diretamente relacionada ao espectro de bandas de energia do sistema, mais especificamente, o valor da Energia de Fermi deve estar contido em um *gap* entre os níveis de Landau do sistema para a observação do IQHE.

O conceito de multifractais foi introduzido por (MANDELBROT, 1974) como uma ferramenta geométrica para descrever o fenômeno de turbulência em fluidos. Assim como na transição de Anderson de um sistema desordenado, a IQHT é outro exemplo de região crítica de um sistema quântico em que multifractalidade da função de onda foi observada (JANSSEN, 2001; GRUZBERG et al., 2017; PUSCHMANN et al., 2019; HUANG; RAGHU; KUMAR, 2021). Neste capítulo, estudaremos o comportamento multifractal das flutuações da condutância de um sistema com quatro terminais na região de transição entre o segundo e o primeiro platô Hall. Conforme será mostrado ao longo do capítulo, as flutuações na Transição Hall são fortemente intermitentes,

Figura 38 – Resistência  $R_{\rho\rho}$  de um 2DEG construído em um MOSFET de silício (parte superior) e resistência Hall (parte inferior) medidas em função da voltagem  $V_g$  aplicada ao *gate* em um regime de valores de  $V_g$  na qual o primeiro nível de Landau é completamente preenchido. O dispositivo tem comprimento  $L = 400$  nm e largura  $W = 50$  nm, as pontas de prova foram posicionadas com separação  $L_{\rho\rho} = 130$   $\mu\text{m}$  e o sistema foi submetido a um campo magnético de intensidade  $B = 13$  T.



Fonte: KLITZING; DORDA; PEPPER (1980)

o que nos leva à ideia de uma possível coexistência de multifractalidade e turbulência neste tipo de transição.

Diferentemente do que é observado em sistemas mesoscópicos submetidos a baixos campos magnéticos (LEE; STONE, 1985; ALTSCHULER, 1985), as flutuações da condutância na Transição Hall não têm um comportamento universal no regime mesoscópico (TIMP et al., 1987; GEIM et al., 1992; XIONG; STONE, 1992; WANG; JOVANOVIĆ; LEE, 1996; FULGA et al., 2011). Neste capítulo, apresentaremos uma análise multifractal, nos moldes da que foi descrita no Capítulo 3, das flutuações da magnetocondutância na região de transição entre os dois primeiros platôs Hall de nanofios desordenados conectados a quatro terminais.

## 4.2 MULTIFRACTALIDADE E TURBULÊNCIA NO EFEITO HALL QUÂNTICO

Assim como no Capítulo 3, aqui será empregado um modelo microscópico para simular uma amostra mesoscópica desordenada submetida a um campo magnético aplicado perpendicularmente à superfície da mesma. Neste estudo, consideraremos o regime em que o comportamento da condutância em função do campo magnético na IQHT tem forte influências de flutuações mesoscópicas.

O sistema estudado foi modelado como um 2DEG com rede quadrada descrito pelo Hamiltoniano dado pela Equação 2.30, com a desordem realizada através de uma energia potencial eletrostática  $\epsilon_k$  definida no  $k$ -ésimo sítio com uma distribuição uniforme de largura  $U = 0,65t_0$ , como na subseção 3.1.2. A energia de Fermi foi mantida fixa, com valor  $E = 1,50t_0$ , e o 2DEG foi construído como um nanofio de comprimento  $L = 310a$  e largura  $W = 25a$ , onde  $a$  é o parâmetro de rede. A Figura 39 representa esquematicamente o sistema, no qual uma corrente elétrica flui do terminal 1 para os outros três terminais (BÜTTIKER, 1986; DATTA, 1995). Os coeficientes de transmissão do sistema com quatro terminais podem ser calculados através do formalismo de Landauer-Büttiker (ver Seção 2.4 para a versão com dois terminais), de acordo com o qual o coeficiente de transmissão  $\mathcal{T}_{lk}$  relacionado ao fluxo do  $k$ -ésimo para o  $l$ -ésimo terminal é dado por

$$\mathcal{T}_{lk} = \text{Tr} [s_{lk}^\dagger s_{lk}] \quad (4.1)$$

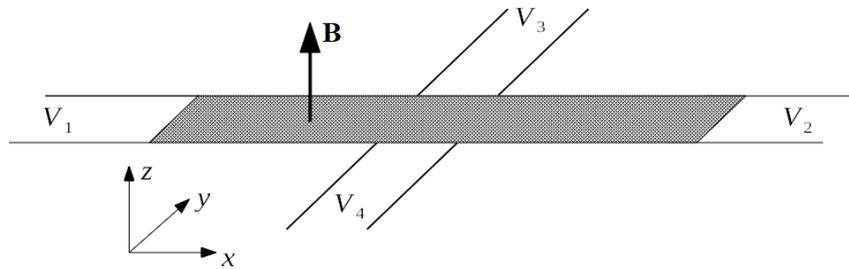
onde  $s_{lk}$ , para  $l, k = 1, 2, 3, 4$ , são blocos de transmissão ou reflexão da matriz de espalhamento

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Os coeficientes de transmissão longitudinal e transversal são dados por  $\mathcal{T}_{xx} = \mathcal{T}_{21}$  e  $\mathcal{T}_{xy} = \mathcal{T}_{31} + \mathcal{T}_{41}$ , respectivamente. Na Figura 40, são mostrados exemplos de séries de  $\mathcal{T}_{xx}$  e  $\mathcal{T}_{xy}$  em função do fluxo magnético adimensional  $\phi$  de um nanofio conectado a quatro terminais na região entre o segundo e o primeiro platô Hall.

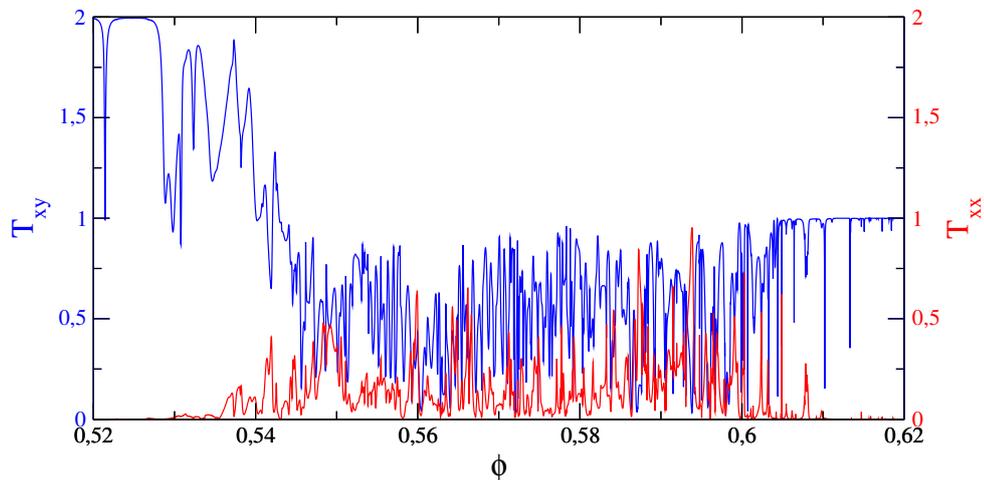
É importante ressaltar que  $\mathcal{T}_{11} + \mathcal{T}_{xx} + \mathcal{T}_{xy} = \mathcal{N}$ , onde  $\mathcal{N}$  é o número de modos propagantes nos terminais, o qual pode ser controlado pelo valor da energia de Fermi do sistema. As séries mostradas na Figura 40 foram obtidas variando o fluxo magnético com passos de  $\Delta\phi =$

Figura 39 – Representação esquemática do sistema para estudo do efeito Hall quântico. Um fio desordenado (área sombreada) é conectado a quatro terminais e submetido a um campo magnético  $\vec{B}$  aplicado perpendicularmente à superfície do sistema. Os terminais são submetidos a voltagens  $V_i$ , com  $i = 1, 2, 3, 4$ , onde  $V_1 > V_2, V_3, V_4$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Figura 40 – Exemplo de série dos coeficientes de transmissão longitudinal (em vermelho) e transversal (em azul),  $T_{xx}$  e  $T_{xy}$ , em função do fluxo magnético de um nanofio desordenado entre o segundo e o primeiro platô Hall.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

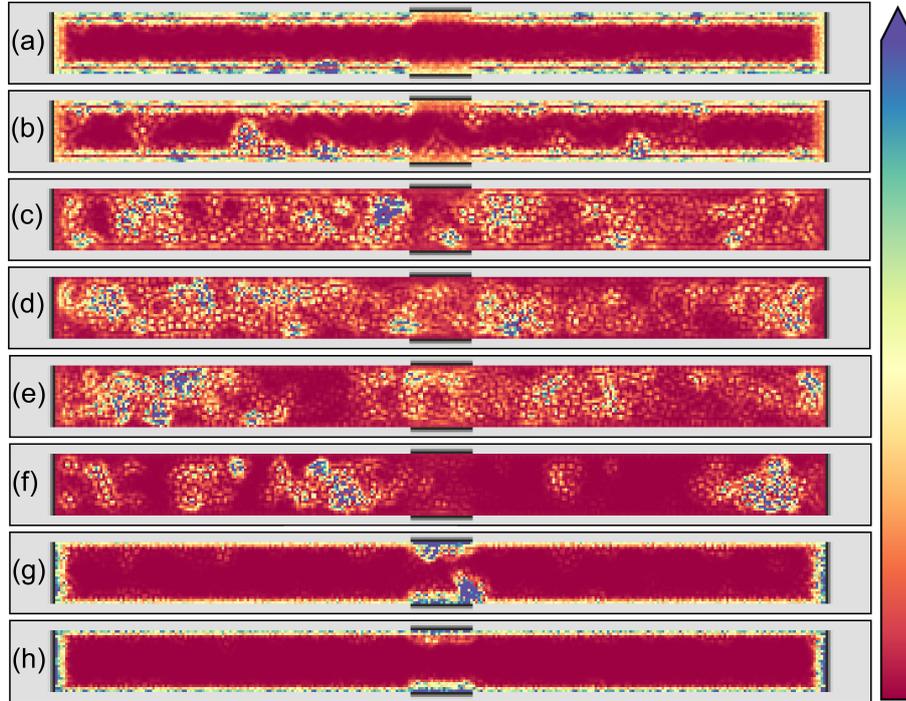
$1 \times 10^{-5}$  no intervalo  $0,52 < \phi < 0,62$ , que corresponde à região entre os dois primeiros platôs Hall. Observando a Figura 40, é possível notar que tanto os coeficientes de transmissão longitudinal quanto transversal flutuam de maneira aparentemente aleatória quando o sistema passa de um platô para outro, o que já foi observado experimentalmente por (ANDO, 1994; COBDEN; BARNES; FORD, 1999; PELED et al., 2003). Pode-se dizer que as flutuações de  $T_{xy}$  e  $T_{xx}$  na Transição Hall apresentam alto grau de intermitência, característica primordial de sistemas turbulentos.

A Figura 41 mostra mapas coloridos da densidade local de estados (LDOS) do nanofio para o qual foram obtidas as flutuações da Figura 40 para (a)  $\phi = 0,50$ , (b)  $\phi = 0,52$ , (c)  $\phi = 0,54$ , (d)  $\phi = 0,56$ , (e)  $\phi = 0,58$ , (f)  $\phi = 0,60$ , (g)  $\phi = 0,62$  e (h)  $\phi = 0,64$ . A barra colorida orientada mostrada no lado direito da Figura 41 indica a escala de cores dos

valores da densidade local de estados, onde regiões em que a LDOS é baixa (alta) têm cor vermelha (azul). Os quatro guias conectados ao nanofio são representados na cor cinza. É possível notar, conforme esperado, que a LDOS é concentrada próxima às bordas do nanofio nos platôs Hall ((a), (h)), já que neste regime, os únicos estados estendidos que conectam os guias são estados de borda (*edge states*). Por outro lado, à medida que o valor de  $\phi$  cresce, e o nanofio sai da região de um platô e entra na região da transição platô-platô, a LDOS penetra no interior (*bulk*) do sistema e um padrão espacial complexo se forma ((b), (c), (d), (e), (f), (g)), como pode ser observado pelas estruturas coerentes de diferentes tamanhos no dispositivo. Este processo é similar a uma transição do tipo laminar-turbulenta, em que o escoamento de um fluido deixa de ser laminar e passa a ser turbulento. Para entender melhor a analogia, imagine que o fluxo desempenha o papel de um tempo fictício: na região próxima ao segundo platô (a), a LDOS é praticamente laminar, mesmo que não seja completamente distribuída no sistema, mas apenas nas bordas; já quando o sistema passa pela transição entre o segundo e o primeiro platô ((b), (c), (d), (e), (f), (g)), onde os coeficientes de transmissão  $T_{xy}$  e  $T_{xx}$  flutuam intensamente (ver Figura 40), a LDOS fica com uma distribuição espacial irregular conforme o valor de  $\phi$  é variado. Em particular, podemos notar que as escalas de comprimento dos padrões mostrados nas Figuras 41 variam dentro um intervalo consideravelmente grande; sendo assim, é interessante analisar a dinâmica de múltiplas escalas do sistema através de uma análise multifractal.

Neste capítulo, seguiremos o procedimento descrito no Capítulo 3 para realizar a análise multifractal das “séries temporais” dos coeficientes de transmissão longitudinal e transversal de nanofios desordenados conectados a quatro terminais na região da transição entre os dois primeiros platôs Hall, como as séries mostradas na Figura 40. Especificamente, foram obtidas 20 realizações diferentes de séries de  $T_{xx}$  e  $T_{xy}$  em função de  $\phi$  no intervalo  $0,545 < \phi < 0,615$  com 10000 passos. Para cada uma das realizações consideradas, foram calculadas as funções  $F_p(s)$  (ver Equação 3.5 para  $p = -6, -4, -3, -2, -1, -0,5, -0,2, 0,2, 0,5, 1, 2, 4, 6$ , obtidas usando valores do tamanho de janela  $s$  variando de 200 a 2000 com passos de 100; em seguida, usando a relação de escala dada pela Equação 3.6, calculamos o expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  para os valores de  $p$  citados acima. Uma vez conhecidos os valores de  $H(p)$  para cada uma das 20 realizações, obtivemos seu valor médio; na Figura 42(a), são indicados através de círculos azuis (triângulos vermelhos) os expoentes de Hurst generalizados das “séries temporais” de  $T_{xy}$  ( $T_{xx}$ ) em função de  $\phi$  para os valores de  $p$  citados, as linhas tracejadas são segmentos de reta ligando dois pontos vizinhos entre si. Além do mais, usamos

Figura 41 – Densidade local de estados nas proximidades da região de transição entre o segundo e o primeiro nível de Landau para (a)  $\phi = 0,50$ , (b)  $\phi = 0,52$ , (c)  $\phi = 0,54$ , (d)  $\phi = 0,56$ , (e)  $\phi = 0,58$ , (f)  $\phi = 0,60$ , (g)  $\phi = 0,62$  e (h)  $\phi = 0,64$ . Os quatro guias são mostrados na cor cinza. A barra orientada à direita indica que regiões com valores baixos (altos) da LDOS são indicados por pontos em tons de vermelho (azul).



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

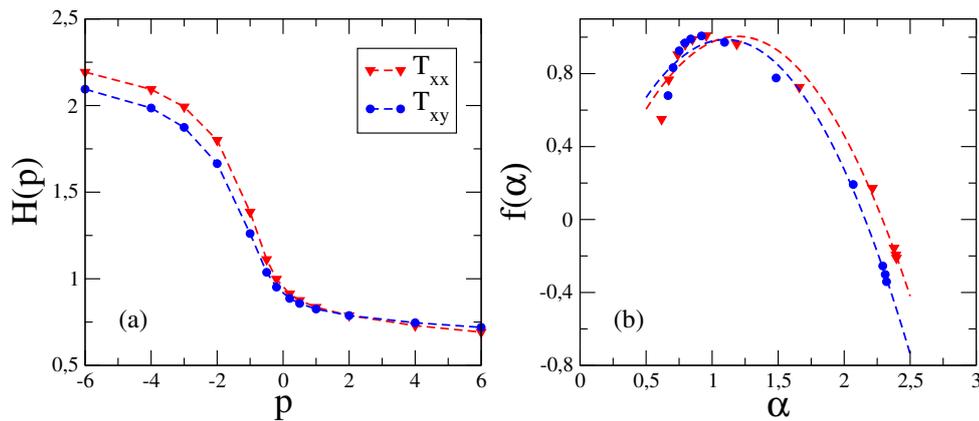
as Equações 3.7 e 3.8 para calcular os espectros de singularidade multifractal das séries de  $T_{xy}$  e  $T_{xx}$ , que podem ser visualizados na Figura 42(b), na qual os símbolos representam os valores de  $f(\alpha)$  e as linhas tracejadas representam as funções quadráticas que melhor se ajustam aos pontos.

Os resultados mostrados na Figura 42(a) evidenciam a forte dependência do expoente de Hurst generalizado com o parâmetro  $p$  para as flutuações dos coeficientes de transmissão transversal e longitudinal de nanofios desordenados conectados a quatro terminais originárias da variação de  $\phi$ , mostrando que ambas são multifractais. Adicionalmente, a Figura 42(b) mostra que os espectros de singularidade das séries  $T_{xy}$  e  $T_{xx}$  são largos, com os valores de  $\Delta\alpha = \alpha_{\text{máx}} - \alpha_{\text{mín}}$  dados, respectivamente, por 1,64 e 1,77, confirmando o comportamento multifractal das flutuações da magnetocondutância de sistemas desordenados na Transição Hall.

É interessante notar que o comportamento de  $H(p)$  e  $f(\alpha)$  de  $T_{xy}$  e  $T_{xx}$  são semelhantes entre si, o que pode ser explicado pelo vínculo existente entre os coeficientes, dado por  $\mathcal{T}_{11} + T_{xx} + T_{xy} = \mathcal{N}$ , em que  $\mathcal{N}$  é o número de canais propagantes nos guias e  $\mathcal{T}_{11}$  é o coeficiente

de reflexão de elétrons no guia submetido a voltagem  $V_1$  (ver Figura 39). Sendo assim, as flutuações de  $T_{xx}$  influenciam fortemente o comportamento das flutuações de  $T_{xy}$ , e isto é refletido nas curvas de  $H(p)$  e  $f(\alpha)$  correspondentes.

Figura 42 – (a) Expoente de Hurst generalizado  $H(p)$  médio e (b) espectro de singularidade multifractal  $f(\alpha)$  das “séries temporais” dos coeficientes de transmissão longitudinal (em vermelho) e transversal (em azul) de 20 nanofios desordenados conectados a quatro terminais. Os símbolos (triângulos vermelhos e círculos azuis) indicam os valores efetivamente calculados. As linhas tracejadas em (a) são segmentos de reta unindo pontos vizinhos. As linhas tracejadas em (b) são as funções quadráticas que melhor se ajustam aos valores de  $f(\alpha)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

O comportamento multifractal das flutuações de  $T_{xy}$  e  $T_{xx}$  em um intervalo de valores de fluxo magnético onde a LDOS do nanofio tem um padrão espacial completamente irregular leva à possibilidade de compreender as flutuações da magnetocondutância de um sistema conectado a quatro terminais na Transição Hall como um fenômeno análogo à turbulência em fluidos.

No estudo das flutuações da condutância oriundas da aplicação de baixos campos a sistemas conectados a dois terminais, apresentando no Capítulo 3, foi feita uma análise das distribuições de incrementos de condutância na qual observamos que: (i) as distribuições têm caudas pesadas e (ii) elas são bem ajustadas por PDF  $q$ -Gaussianas (ver Figura 31 para um exemplo), que podem ser vistas como um caso especial de uma classe de distribuições recentemente descoberta que descreve sistemas físicos caracterizados por uma dinâmica de múltiplas escalas (ou dinâmica multi-escala). A Teoria H, como é conhecido o formalismo apresentado em (SALAZAR; VASCONCELOS, 2010; MACÊDO et al., 2017), pode ser usada para descrever sistemas e fenômenos de diferentes naturezas, como as flutuações dos preços de ações no mercado financeiro (MACÊDO et al., 2017) e lasers aleatórios (GONZÁLEZ et al., 2017). O que há de comum entre estes sistemas é a presença de múltiplas escalas, ou seja, o processo estocástico

associado é composto de sub-processos que caracterizam uma dinâmica hierárquica, como ocorre com as flutuações da velocidade em um fluido turbulento.

A PDF  $q$ -gaussiana, que foi usada para ajustar as distribuições dos incrementos de condutância no Capítulo 3 é adequada para sistemas que apresentem apenas um nível hierárquico. Já na IQHT, a multifractalidade e a intermitência observadas nas flutuações dos coeficientes de transmissão justificam uma análise mais complexa, levando em conta a possível existência de uma dinâmica de múltiplas escalas no sistema. De fato, é possível observar que, mediante uma transformação de variáveis nos incrementos das “séries temporais” de  $T_{xy}$  e  $T_{xx}$ , elas passam a ter distribuições com caudas pesadas e podem ser ajustadas por PDF mais complicadas que  $q$ -gaussianas e que podem ser obtidas por meio do formalismo da Teoria H, que é capaz de estimar o número de níveis hierárquicos do processo estocástico estudado, que, no caso das flutuações observadas na IQHT, tende a ser maior do que 1.

### 4.3 CONCLUSÕES

As observações de multifractalidade, de intermitência e das evidências de uma dinâmica de múltiplas escalas na IQHT indicam que as flutuações dos coeficientes de transmissão nesta transição podem ser entendidas como um processo estocástico hierárquico análogo à turbulência em fluidos. Neste contexto, é interessante ressaltar que o surgimento de estruturas hierárquicas já foi observado em diferentes sistemas mesoscópicos (HOFSTADTER, 1976; ALBRECHT et al., 2001; KOSHINO et al., 2001; NEMEC; CUNIBERTI, 2006; HATSUDA; KATSURA; TACHIKAWA, 2016).

A presença de níveis hierárquicos (múltiplas escalas), nos moldes da que se observa no fenômeno da turbulência, encontrada nas flutuações da magnetocondutância de sistemas na IQHT pode ser entendida como uma consequência de estruturas hierárquicas subjacentes ao sistema. A princípio, podemos destacar duas possibilidades: (i) a estrutura do espectro de energias de elétrons em uma rede bidimensional submetida a um campo magnético perpendicular, conhecida na literatura como borboleta de Hofstadter (HOFSTADTER, 1976; THOULESS et al., 1982; STREDA, 1982; ALBRECHT et al., 2001), e (ii) a geometria fractal do espaço de fase de sistemas com dinâmica mista (regular + caótica), aspecto discutido no Capítulo 1.

Os resultados e discussões apresentadas neste capítulo formam parte de um trabalho que foi publicado no periódico *Physical Review Letters* (BARBOSA et al., 2022). Neste artigo, além da análise multifractal apresentada aqui e das discussões a respeito da presença de hierarquia

nos moldes de um sistema turbulento, a Teoria H (MACÊDO et al., 2017) foi utilizada para determinar o número  $N$  de níveis hierárquicos dos processos estocásticos associados a  $T_{xy}(\phi)$  e  $T_{xx}(\phi)$  do sistema, e o valor obtido foi  $N = 5$ , confirmando que a dinâmica da IQHT tem múltiplas escalas.

Após a realização deste estudo, foi publicado um trabalho em que foi feita uma análise multifractal das flutuações da magnetocondutância de um dispositivo de grafeno de alta mobilidade na IQHT (AMIN et al., 2021), e foi mostrado que as flutuações são multifractais, como previsto pelos resultados teóricos apresentados.

## 5 TRANSPORTE ELETRÔNICO EM CAVIDADES MESOSCÓPICAS COM SIMETRIA QUIRAL: UMA ANÁLISE VIA MODELO *TIGHT-BINDING*

Neste capítulo, apresentaremos um estudo de cavidades mesoscópicas com simetria quiral modeladas a partir de uma formulação *tight-binding* usando o software Kwant (GROTH et al., 2014).

As flutuações dos observáveis de transporte de sistemas abertos, assim como dos níveis de energia de sistemas fechados, podem ser descritas através da Teoria de Matrizes Aleatórias (RMT) (BEENAKKER, 1997b). Historicamente, a primeira vez em que a RMT foi utilizada para estudar um sistema físico foi na análise das flutuações dos espaçamentos entre níveis de energia de núcleos atômicos pesados (MEHTA, 2004). No contexto do estudo de transporte eletrônico, há duas maneiras de empregar a RMT: (i) construir matrizes aleatórias hermitianas para modelar a matriz hamiltoniana  $\mathcal{H}$  do sistema e usá-la para obter a matriz de espalhamento  $\mathcal{S}$  ou (ii) construir  $\mathcal{S}$  diretamente.

As flutuações mesoscópicas são universais, ou seja, dentro de certo regime de validade, elas não dependem de parâmetros microscópicos do sistema, e dependem apenas de simetrias nele presentes. O estudo das flutuações dos observáveis de transporte de sistemas mesoscópicos através da RMT se justifica pelo fato de assim como as flutuações mesoscópicas, as funções de correlação dos autovalores de matrizes aleatórias serem universais. Sendo assim, os sistemas podem ser classificados através de classes, conforme os tipos de simetria preservadas pelo mesmo. Atualmente, há um esquema de classificação conhecido como *ten-fold way*, desenvolvido por (ALTLAND; ZIRNBAUER, 1997), em que os sistemas mesoscópicos são divididos em dez classes de simetria — (i) três classes Wigner-Dyson, (ii) três classes quirais e (iii) quatro classes Bogoliubov-de Gennes (BdG).

Historicamente, no estudo de RMT, as classes Wigner-Dyson foram as primeiras a ser introduzidas (DYSON, 1962). Nestas três classes, a PDF  $\mathcal{P}(\mathcal{H})$  de um *ensemble* de matrizes hamiltonianas é invariante sob uma transformação do tipo  $\mathcal{H} \rightarrow U\mathcal{H}U^{-1}$ , e conforme a matriz  $U$  é ortogonal ( $U^{-1} = U^T$ ), unitária ( $UU^\dagger = 1$ ) ou simplética<sup>1</sup>, definimos as classes de simetria ortogonal, unitária e simplética, respectivamente. As classes pode ser identificadas por um parâmetro conhecido como índice de Dyson, geralmente representado por  $\beta$ , que indica o número de graus de liberdade dos elementos da matriz  $\mathcal{H}$ ; nas classes ortogonal, unitária e

<sup>1</sup> Uma matriz simplética é uma matriz unitária cujos elementos são quatérnions reais, ou seja, combinações lineares com coeficientes reais das matrizes identidade  $2 \times 2$  e de Pauli.

simplética, os elementos de  $\mathcal{H}$  são reais ( $\beta = 1$ ), complexos ( $\beta = 2$ ) e quatérnions ( $\beta = 4$ ), respectivamente, de modo que  $\beta = 1, 2$  e  $4$  para as três classes nesta ordem. As classes de Wigner-Dyson são apropriadas para descrever condutores desordenados e pontos quânticos caóticos convencionais.

Do ponto de vista físico, um sistema pertence à classe ortogonal caso apresente simetria de reversão temporal (SRT) e simetria de rotação de *spin* (SRS). Quando um campo magnético é aplicado ao sistema, a SRT é quebrada e, neste caso, o sistema passa a pertencer à classe unitária, não importando se a SRS é mantida. Já quando um acoplamento *spin*-órbita é adicionado a um sistema da classe ortogonal, quebrando a SRS, o sistema passa a fazer parte da classe de simetria simplética.

Mais tarde, no contexto da cromodinâmica quântica (SHURYAK; VERBAARSCHOT, 1993; VERBAARSCHOT, 1994), foram introduzidas mais três classes, equivalentes às três já conhecidas (Wigner-Dyson), mas com a adição de mais uma simetria, que é observada, por exemplo, em sistemas com estrutura de rede bipartida. Em outras palavras, um sistema pertence às classes quirais caso apresente simetria de sub-rede. As outras quatro classes (BdG) servem para descrever sistemas nos quais um material supercondutor é aproximado de um condutor normal, mas não serão tratadas neste estudo.

## 5.1 MODELO DE HOPPING ALEATÓRIO

Para estudar as propriedades de transporte em um sistema com simetria quiral, usaremos um sistema com desordem fora da diagonal. Um exemplo de realização em uma formulação *tight-binding* deste tipo de sistema é dado pelo modelo de *hopping* aleatório (BROUWER et al., 1998; MUDRY; BROUWER; FURUSAKI, 1999; MUDRY; BROUWER; FURUSAKI, 2000), cujo hamiltoniano pode ser escrito da forma

$$H = \sum_{\langle k,l \rangle} (t_0 + \epsilon_{kl}) c_k^\dagger c_l \quad (5.1)$$

onde a parcela  $\epsilon_{kl}$ , que descreve a desordem nos termos de *hopping* entre primeiros vizinhos, é distribuída uniformemente no intervalo  $(-D/2, D/2)$ , com  $D$  sendo uma medida da “largura” da desordem. Na Equação 5.1, pode-se notar que não existe desordem nos termos de energia definidos nos sítios, como no modelo de Anderson (ver Equação 2.30).

Para estudar as propriedades de transporte eletrônico de cavidades mesoscópicas com si-

metria quiral, devemos construir uma região de espalhamento e conectá-la a dois reservatórios de elétrons com potenciais químicos diferentes. Antes, no entanto, é interessante estudar as flutuações do espectro de níveis de energia do sistema fechado. Recentemente, (CHANDRAMOULI; SRIVASTAV; KUMAR, 2020) estudaram as flutuações espectrais de cavidades mesoscópicas caóticas modeladas usando o software *Kwant* (GROTH et al., 2014), por meio do qual foram analisadas duas formas geométricas de cavidades caóticas diferentes — um quarto de estádio de Bunimovich (BUNIMOVICH, 1974; BUNIMOVICH, 1979) e um quarto de bilhar de Sinai (SINAI, 1963; SINAI, 1970) —, e obtiveram resultados em conformidade com as distribuições conhecidas da RMT. Ao invés de considerar a distribuição de separação entre níveis do espectro de autoenergias, como é de costume na RMT (MEHTA, 2004), eles estudaram a distribuição de razões  $r$  entre espaçamentos de níveis consecutivos,

$$r = \frac{E_{j+2} - E_{j+1}}{E_{j+1} - E_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

para cavidades com simetria de reversão temporal preservada e quebrada, pertencentes às classes de simetria de Wigner-Dyson ortogonal e unitária, respectivamente, cujas distribuições  $p_r^{(\beta)}(r)$  da variável  $r$  são dadas por (ATAS et al., 2013)

$$p_r^{(\beta)}(r) = \frac{1}{Z_\beta} \frac{(r + r^2)^\beta}{(1 + r + r^2)^{1+(3/2)\beta}} \quad (5.3)$$

onde  $\beta = 1, 2$  e  $4$  para as classes de Wigner-Dyson ortogonal, unitária e simplética, respectivamente, e  $Z_\beta$  é uma constante de normalização, cujos valores para as três classes são  $Z_1 = 8/27$ ,  $Z_2 = (4\pi)/(813)$  e  $Z_4 = (4\pi)/(7293)$ .

Adicionalmente, também foi considerado um sistema integrável, modelado com uma geometria retangular, cuja variável  $r$  tem uma distribuição  $p_r^{(P)}(r)$  de Poisson, ou seja,

$$p_r^{(P)}(r) = \frac{1}{(1+r)^2}. \quad (5.4)$$

Para modelar as cavidades caóticas, o Hamiltoniano utilizado foi equivalente ao da Equação 2.30 com  $U = 0$ , isto é, sem desordem, com  $\phi = 0$  para sistemas da classe ortogonal e  $\phi$  diferente de zero para sistemas da classe unitária, já que o campo magnético quebra a simetria de reversão temporal do sistema, que, como consequência, muda de classe.

No presente estudo, mostramos que é possível obter as mesmas distribuições usando o modelo de *hopping* aleatório ao invés de construir um sistema caótico, como é o caso das geometrias do estádio de Bunimovich e do bilhar de Sinai. Em outras palavras, pode-se dizer que caos não é um ingrediente obrigatório de um sistema cujas distribuições de razões entre

as separações de níveis consecutivos são as mesmas da RMT, e a desordem fora da diagonal pode gerar as mesmas distribuições.

Além de considerar as classes de simetria ortogonal e unitária, também consideramos um sistema pertencente à classe simplética, o qual pode ser obtido se considerarmos que o sistema tem interação *spin*-órbita, que, neste trabalho, será dada por um acoplamento do tipo Rashba. O Hamiltoniano dado pela Equação 5.1 pode ser generalizado para considerar as possibilidades de um fluxo magnético passando pelo sistema, bem como o acoplamento Rashba, de modo que o modelo possa abranger as três classes de simetria. Neste caso, temos

$$H = \sum_{\langle k,l \rangle} (t_0 + \epsilon_{kl}) e^{i\theta_{kl}} c_k^\dagger c_l \sigma_0 - \frac{i\alpha}{2} \sum_{i,j} c_{i+1,j}^\dagger c_{i,j} \sigma_y + \frac{i\alpha}{2} \sum_{i,j} c_{i,j+1}^\dagger c_{i,j} \sigma_x \quad (5.5)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro característico do acoplamento Rashba,  $\{\sigma_0, \sigma_x, \sigma_y\}$  são matrizes dadas por

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

e, enquanto no primeiro somatório, os símbolos  $k$  e  $l$  representam sítios diferentes, note que  $(i,j)$  são as coordenadas de apenas um sítio nos dois últimos somatórios. Além do mais,  $\epsilon_{kl}$  é tal como definido na Equação 5.1 e  $\phi$  é o fluxo magnético, como discutido na Seção 2.5.

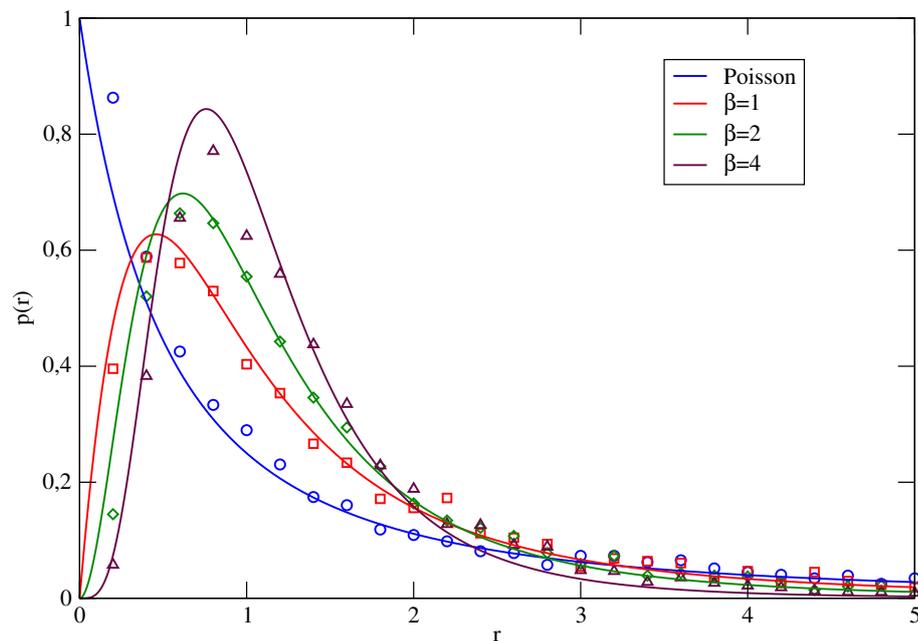
Para obter as distribuições, começamos com o sistema integrável, que foi o mesmo que o considerado por (CHANDRAMOULI; SRIVASTAV; KUMAR, 2020), um retângulo de comprimento  $L = 102a$  e largura  $W = 63a^2$ , com Hamiltoniano dado pela Equação 5.5 com  $\phi = \alpha = D = 0$ . Em seguida, para que o sistema pertença à classe ortogonal ( $\beta = 1$ ), introduzimos *hopping* aleatório fazendo  $D$  diferente de zero; no caso consideramos  $D$  com um valor aleatoriamente escolhido no intervalo  $(0,06t_0, 0,07t_0)$ , mantendo  $\phi = \alpha = 0$ . Para fazer com que o sistema passe para a classe unitária, tomamos o sistema na classe ortogonal e fazemos  $\phi$  diferente de zero, com um valor aleatoriamente escolhido no intervalo  $(0,014, 0,016)$  mantendo  $\alpha = 0$ . Por outro lado, se ao sistema da classe ortogonal adicionarmos interação *spin*-órbita tomando  $\alpha$  uniformemente distribuído no intervalo  $(0,33t_0, 0,35t_0)$  mantendo  $\phi = 0$ , o sistema passa a pertencer a classe simplética<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> A escolha por estes valores é justificada pelo fato de  $L/W = 102/63 \simeq 1,62$  ser aproximadamente o valor da razão áurea, o que leva à supressão de possíveis degenerescências.

<sup>3</sup> A existência de fluxo magnético no sistema é facultativa para que o mesmo pertença à classe de simetria simplética, mas é importante destacar que os valores de  $\alpha$  não necessariamente os mesmos para diferentes valores não-nulos de  $\phi$ .

A Figura 43 mostra as distribuições de  $r$  obtidas usando o Kwant para implementar o modelo de *hopping* aleatório, bem como as respectivas distribuições analíticas dadas pelas Equações 5.3 e 5.4. Os resultados mostram que um modelo com desordem fora da diagonal é eficiente para estudar as flutuações espectrais dadas pela RMT. Na Figura, os histogramas obtidos do espectro de autovalores calculado pelo modelo *tight-binding* são representados por símbolos, sendo que os dos sistemas integráveis e os das classes ortogonal ( $\beta = 1$ ), unitária ( $\beta = 2$ ) e simplética ( $\beta = 4$ ) são indicados por círculos azuis, quadrados vermelhos, losangos verdes e triângulos marrons, respectivamente; já as linhas cheias são as distribuições de Poisson (Equação 5.4) e as distribuições da RMT (Equação 5.3) com  $\beta = 1, 2$  e  $4$ , com o mesmo padrão de cores que os símbolos.

Figura 43 – Histogramas das razões  $r$  entre espaçamentos de níveis energéticos consecutivos de cavidades mesoscópicas retangulares integrável — símbolos circulares azuis — e pertencentes às classes de de simetria de Wigner-Dyson ortogonal ( $\beta = 1$ ) — símbolos quadrados vermelhos —, unitária ( $\beta = 2$ ) — símbolos losangulares verdes — e simplética ( $\beta = 4$ ) — símbolos triangulares marrons — obtidos com o modelo de *hopping* aleatório. As linhas cheias são as expressões analíticas das respectivas distribuições dadas pelas Equações 5.4 e 5.3 e têm a mesma correspondência entre as cores e os tipos de sistemas que os símbolos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Como dito anteriormente, o modelo de *hopping aleatório* pode ser usado para obter sistemas com simetria quiral, no entanto, apesar da desordem fora da diagonal ser necessária para modelar a simetria de sub-rede, ela não é condição suficiente para implementar a simetria quiral; sistemas com este tipo de desordem têm um espectro de autovalores simétrico em relação ao centro da banda de energias ( $E = 0$ ), e a simetria quiral se manifesta somente neste

ponto. Sabendo disto, estudamos sistemas com *hopping aleatório* e energia  $E = 0$  conectados a dois terminais para estudar as distribuições dos observáveis de transporte de cavidades mesoscópicas das classes de simetria quirais ortogonal, unitária e simplética, e comparamos os resultados obtidos com expressões analíticas obtidas por (MACEDO-JUNIOR; MACÊDO, 2002; MACEDO-JUNIOR; MACÊDO, 2008).

## 5.2 CLASSE QUIRAL ORTOGONAL

Nesta seção, serão apresentados resultados do estudo das flutuações de dois observáveis de transporte de sistemas com simetria quiral, de reversão temporal e de rotação de *spin*, ou seja, da classe de simetria quiral ortogonal. O primeiro observável é a condutância, dada pela Equação 2.17. Para estudar transporte eletrônico, deve-se conectar a região de espalhamento a dois terminais através de guias, que denominaremos de guia 1 e guia 2. Sendo  $N_1$  e  $N_2$  os números de modos propagantes nos guias 1 e 2, estudaremos os casos com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1, N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1, N_2 = 3$  e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ .

De acordo com (MACEDO-JUNIOR; MACÊDO, 2008), a distribuição de probabilidade de  $g$  para  $N_1 = N_2 = 1$  é dada por

$$P(g) = \frac{1}{\pi\sqrt{g(1-g)}}, \quad (5.7)$$

enquanto que para os casos assimétricos, isto é, quando  $N_1 = 1, N_2 = 2$  e  $N_1 = 1, N_2 = 3$ , temos que

$$P(g) = \frac{2^{-(1+m/2)}\Gamma(1+m/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma((1+m)/2)} \frac{(1-\sqrt{1-g})^{m/2} + (1+\sqrt{1-g})^{m/2}}{\sqrt{g(1-g)}}, \quad (5.8)$$

onde  $m = N_2 - N_1$ . Já para  $N_1 = N_2 = 2$ ,  $P(g)$  é igual a

$$P(g) = \begin{cases} \frac{1}{2}[K(g) - F(\pi/4, g)], & 0 \leq g < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{g}}[K(1/g) - F(\arcsin(\sqrt{g/2}), 1/g)], & 1 < g \leq 2 \end{cases} \quad (5.9)$$

onde  $F(\phi, k)$  é a integral elíptica do segundo tipo

$$F(\phi, u) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-u\sin^2(\theta)}} \quad (5.10)$$

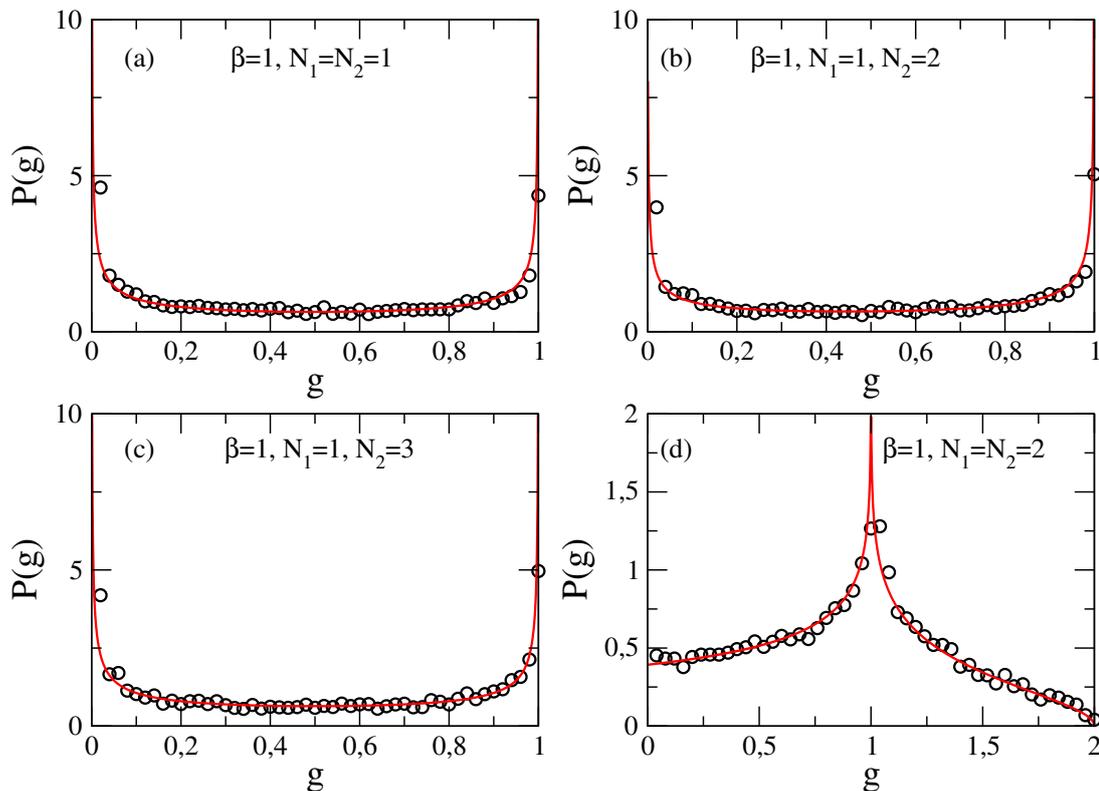
e  $K(u) = F(\pi/2, u)$

Para obter a distribuição de condutâncias de pontos quânticos da classe quiral ortogonal usando o Kwant, calculamos 10.000 realizações diferentes de um sistema retangular com

largura  $L = 102a$  e  $W = 63a$  descrito pelo Hamiltoniano da Equação 5.1 com  $E = 0$ , dentre as quais ainda variamos o valor de  $D$  no intervalo  $(0,06t_0, 0,07t_0)$ . O número de canais em cada guia foi controlado por meio do número de sítios do mesmo, e os guias foram posicionados no centro dos lados menores do retângulo.

A Figura 44 mostra os histogramas obtidos dos valores de  $g$  calculados para os 10.000 sistemas representados por símbolos circulares. As linhas cheias vermelhas indicam os valores de  $P(g)$  calculados pelas fórmulas 5.7 em (a), 5.8 com  $m = 1$  em (b), 5.8 com  $m = 2$  em (c) e 5.7 em (d).

Figura 44 – Distribuição da condutância,  $P(g)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral ortogonal ( $\beta = 1$ ) com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$ , e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $P(g)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Outro observável de transporte importante é a potência de ruído de disparo  $P$ , que quantifica as flutuações da corrente elétrica relacionadas ao fato da carga elétrica ser quantizada (BEENAKKER, 1997b). Dados os autovalores de transmissão  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  da matriz  $tt^\dagger$  (ver Equação 2.13), onde  $N$  é a dimensão de  $t$ , temos que

$$P = \frac{4e^3V}{h} \sum_{i=1}^N \tau_i(1 - \tau_i) \quad (5.11)$$

onde  $V$  é a voltagem aplicada entre os dois terminais. Assim como foi feito com a condutância na Seção 2.4, expressaremos os resultados em termos da potência de ruído de disparo adimensional  $p = P/((4e^3V)/h)$ .

A distribuição de  $p$  foi estudada apenas para o caso  $N_1 = N_2 = 1$ , cuja expressão analítica é dada por (MACEDO-JUNIOR; MACÊDO, 2008)

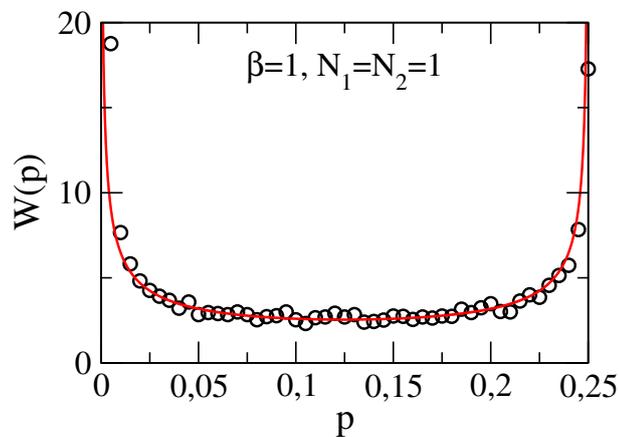
$$W(p) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-4p}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_+(1+\lambda_+)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_-(1+\lambda_-)}} \right] \quad (5.12)$$

onde

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} \quad (5.13)$$

A Figura 45 mostra os histogramas (símbolos circulares) dos valores de  $p$  calculados de 10.000 realizações do sistema com *hopping* aleatório com  $D$  no intervalo  $(0,06t_0, 0,07t_0)$ . A linha vermelha em 45 é o gráfico da Equação 5.12.

Figura 45 – Distribuição da potência de ruído de disparo,  $W(p)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral ortogonal ( $\beta = 1$ ) com  $N_1 = N_2 = 1$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $W(p)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

### 5.3 CLASSE QUIRAL UNITÁRIA

A partir de agora, mostramos os resultados do estudo das flutuações da condutância  $g$  e da potência de ruído de disparo  $p$  de cavidades com simetria quiral e de rotação de *spin*, mas com simetria de reversão temporal quebrada, isto é, da classe de simetria quiral unitária. Assim como discutido na seção anterior, modelamos uma região de espalhamento conectada a dois

terminais. Sendo  $N_1$  e  $N_2$  os números de modos propagantes nos guias 1 e 2, consideramos os casos com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 3$  e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ .

Para  $N_1 = N_2 = 1$ , a distribuição de  $g$  é dada por

$$P(g) = \frac{1}{2\sqrt{1-g}} \quad (5.14)$$

Já para os casos em que  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 2$  e  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 3$ , usamos a fórmula

$$P(g) = 2^{-(2+m)}(1+m) \frac{(1-\sqrt{1-g})^m + (1+\sqrt{1-g})^m}{\sqrt{1-g}}, \quad (5.15)$$

onde  $m = N_2 - N_1$ .

No caso em que  $N_1 = N_2 = 2$ ,  $P(g)$  passa a ser dado por

$$P(g) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2-g) \arcsin\left(\frac{g}{2-g}\right), & 0 \leq g < 1 \\ \frac{3\pi}{8}(2-g), & 1 \leq g \leq 2 \end{cases} \quad (5.16)$$

O sistema construído pela formulação *tight-binding* nesta seção consiste do mesmo retângulo considerado nos casos anteriores, mas descrito pelo Hamiltoniano da Equação 5.5 sem a interação *spin-órbita*, ficando reduzido a

$$H = \sum_{\langle k,l \rangle} (t_0 + \epsilon_{kl}) e^{i\theta_{kl}} c_k^\dagger c_l, \quad (5.17)$$

onde  $\theta_{kl}$  é dado por 2.29. Para obter os histogramas, geramos 10.000 realizações do sistema, onde consideramos que  $\phi$  pode assumir valores entre 0,014 e 0,016.

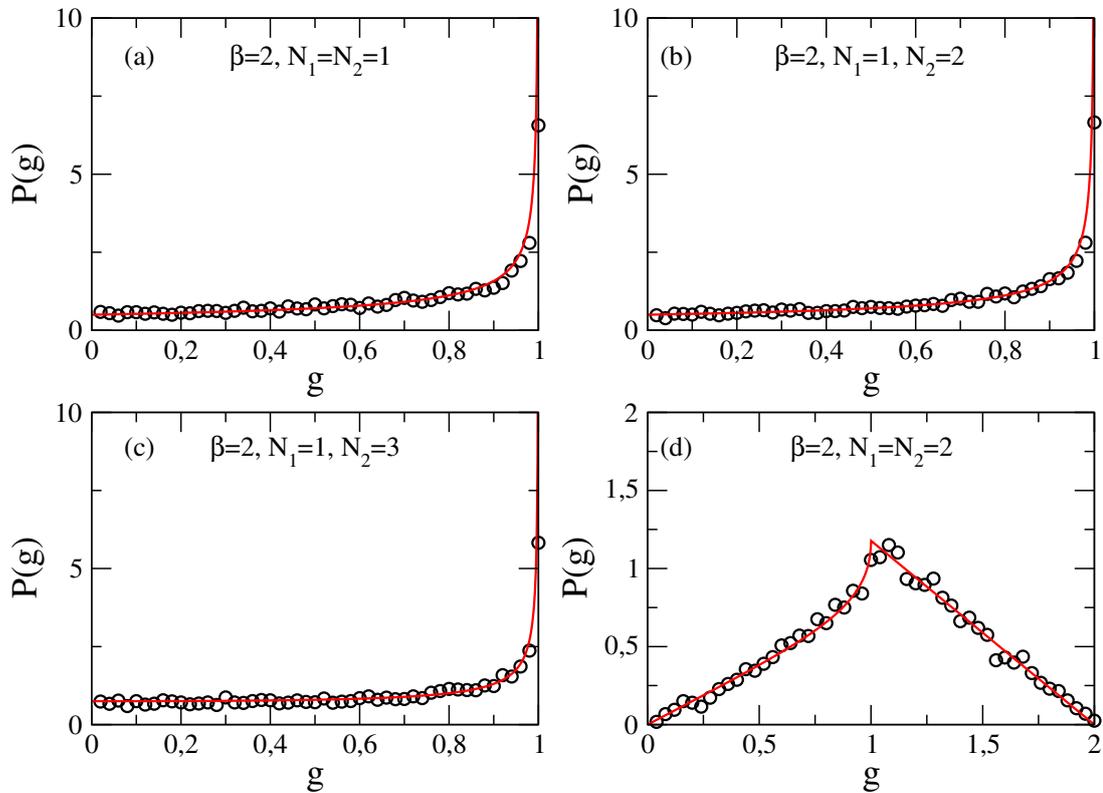
Na Figura 46, os símbolos circulares representam os histogramas gerados através das 10.000 realizações, enquanto as linhas vermelhas são gráficos das Equações 5.14 em (a), 5.15 com  $m = 1$  em (b) e  $m = 2$  em (c), e 5.15 em (d). Para a classe quiral unitária, a potência de ruído de disparo é distribuída conforme a expressão

$$W(p) = \frac{1}{2\sqrt{1-4p}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_+}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_-}} \right], \quad (5.18)$$

onde  $\lambda_{\pm}$  é dado por 5.13.

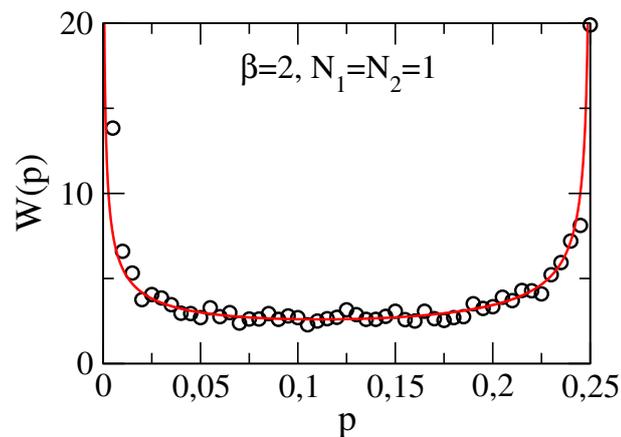
Os símbolos circulares na Figura 47 são os histogramas de  $p$  oriundos de 10.000 realizações do sistema com Hamiltoniano dado por 5.17 com fluxo magnético assumindo valores no intervalo (0,014, 0,016). Já as linhas vermelhas indicam a distribuição  $W(p)$  conforme dada pela Equação 5.18.

Figura 46 – Distribuição da condutância,  $P(g)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral unitária ( $\beta = 2$ ) com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$ , e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $P(g)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Figura 47 – Distribuição da potência de ruído de disparo,  $W(p)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral unitária ( $\beta = 2$ ) com  $N_1 = N_2 = 1$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $W(p)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

#### 5.4 CLASSE QUIRAL SIMPLÉTICA

Por fim, passamos agora para o estudo de cavidades da classe quiral simplética, que podem ser realizadas a partir de sistemas com simetria quiral, mas com simetria de rotação de *spin* quebrada; sistemas desta classe podem ou não ter simetria de reversão temporal, por simplicidade, aqui, consideramos sistemas com SRT. Analogamente às classes já estudadas, levaremos em consideração os casos com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1, N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1, N_2 = 3$  e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ .

Se  $N_1 = N_2 = 1$ , temos que

$$P(g) = \frac{3g}{4\sqrt{1-g}}. \quad (5.19)$$

Por outro lado, se  $N_1 = 1$  e  $N_2 > 1$  (inteiro),  $P(g)$  é

$$P(g) = 2^{-(4+2m)}(4+2m)(3+2m) \frac{g[(1-\sqrt{1-g})^{2m} + (1+\sqrt{1-g})^{2m}]}{\sqrt{1-g}}, \quad (5.20)$$

com  $m = N_2 - N_1$ . Para dois modos propagantes nos dois guias, temos a expressão

$$P(g) = \begin{cases} \frac{175}{1024}g\sqrt{1-g}(20-20g+7g^2) \\ + \frac{175}{2048}(g-2)(40-60g+6g^2+7g^3) \arcsin\left(\frac{g}{2-g}\right), & 0 \leq g \leq 1 \\ \frac{175\pi}{4096}(7g^2+20g-20)(g-2)^2, & 1 \leq g \leq 2 \end{cases} \quad (5.21)$$

Para obter as distribuições de sistemas da classe quiral simplética, tomamos um sistema descrito pelo Hamiltoniano 5.5 com  $E = 0$  sem a presença de campo magnético, facultativa neste caso. Seguindo a metodologia dos casos anteriores, construímos 10.000 sistemas retangulares com interação *spin*-órbita tipo Rashba com  $\alpha$  assumindo valores no intervalo  $(0,33t_0, 0,35t_0)$  para (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1, N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1, N_2 = 3$  e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ .

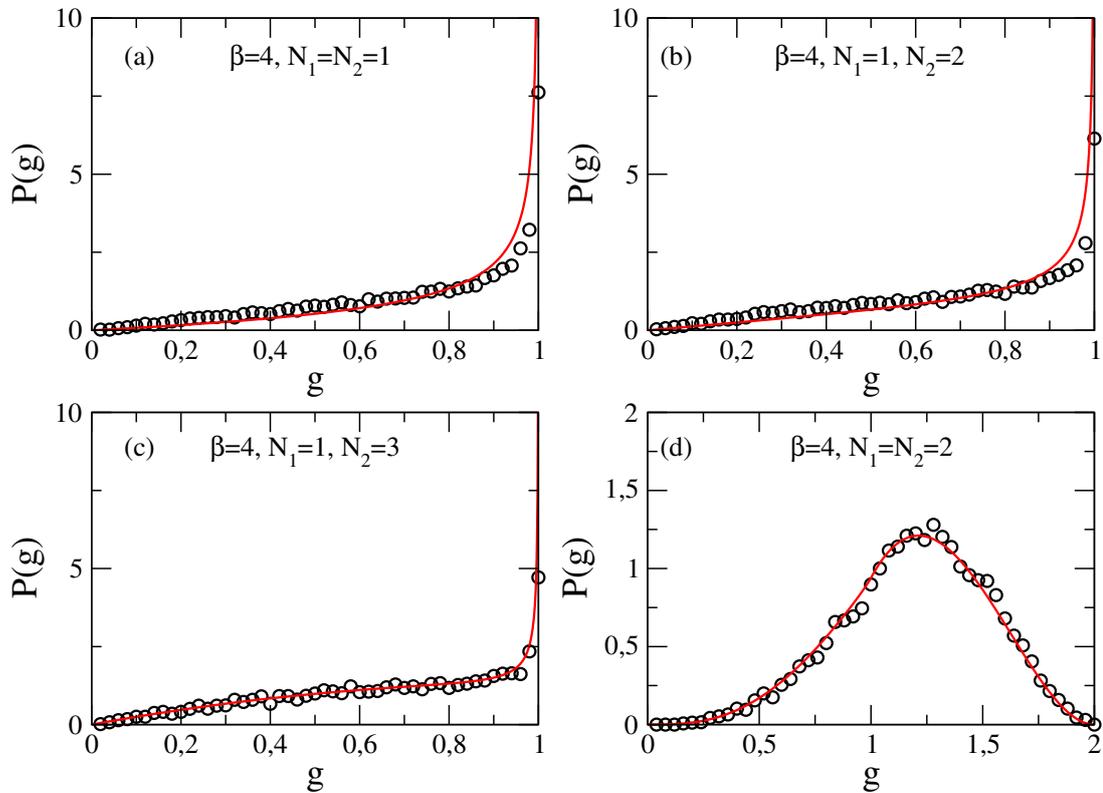
Os resultados das análises das flutuações da condutância são mostrados na Figura 48. Os histogramas de  $g$  são representados na forma de círculos, e as expressões analíticas dadas por 5.19, 5.20 com  $m = 1$ , 5.20 com  $m = 2$  e 5.21 em (a), (b), (c) e (d), respectivamente.

A potência de ruído de disparo de pontos quânticos da classe quiral simplética com um modo propagante nos dois guias é distribuída conforme a expressão

$$W(p) = \frac{3}{4\sqrt{1-4p}} \left[ \frac{\lambda_+}{\sqrt{1+\lambda_+}} + \frac{\lambda_-}{\sqrt{1+\lambda_-}} \right], \quad (5.22)$$

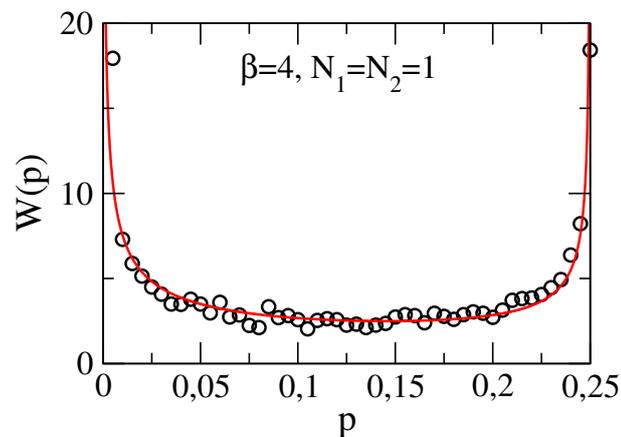
com  $\lambda_{\pm}$  dado por 5.13. Na Figura 49, mostramos, representado por círculos, o histograma de  $p$  obtido de 10.000 realizações obtidas com os mesmos valores de  $D$  e  $\alpha$  no Hamiltoniano dado por 5.5 usados para o estudo das flutuações de  $g$  discutido acima. A linha vermelha corresponde à função  $W(p)$  da Equação 5.22.

Figura 48 – Distribuição da condutância,  $P(g)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral simplética ( $\beta = 4$ ) com (a)  $N_1 = N_2 = 1$ , (b)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 2$ , (c)  $N_1 = 1$  e  $N_2 = 3$ , e (d)  $N_1 = N_2 = 2$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $P(g)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Figura 49 – Distribuição da potência de ruído de disparo,  $W(p)$ , de cavidades mesoscópicas pertencentes à classe de simetria quiral simplética ( $\beta = 4$ ) com  $N_1 = N_2 = 1$ . Os símbolos circulares representam os histogramas obtidos através do modelo do *hopping* aleatório e as linhas vermelhas as expressões analíticas de  $W(p)$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

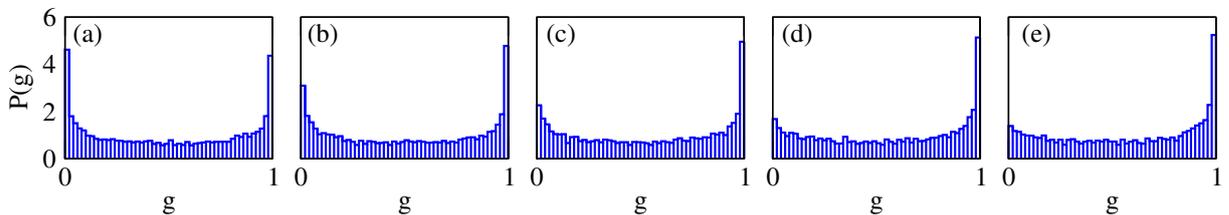
## 5.5 CROSSOVER ENTRE CLASSES DE SIMETRIA

No trabalho de (CHANDRAMOULI; SRIVASTAV; KUMAR, 2020), foi mostrado como obter o *crossover* da classe de simetria de Wigner-Dyson ortogonal para a unitária através da variação gradativa do campo magnético; além do mais, eles relacionaram o valor do campo com um parâmetro de transição entre classes característico da RMT.

Com base nesta ideia, estudamos o *crossover* entre as classes quirais ortogonal e simplética com o intuito de mostrar que o software Kwant também é capaz de modelar o *crossover* entre classes quirais; adicionalmente, também consideramos o *crossover* da classe quiral ortogonal para a simplética através da inserção de um acomplamento *spin*-órbita no sistema fazendo  $\alpha$  variar gradativamente de zero até um valor não-nulo.

Para estudar o *crossover* entre as classes quirais ortogonal e unitária, consideraremos o sistema retangular com as dimensões dadas nas seções anteriores conectado a dois terminais, com um modo de propagação em cada guia, e analisaremos como a distribuição  $P(g)$  muda conforme o valor do fluxo adimensional  $\phi$  varia no Hamiltoniano dado por 5.17. Na Figura 50, mostramos as distribuições de  $P(g)$  obtidas de 10.000 sistemas diferentes com  $N_1 = N_2 = 1$  modelados por 5.17 com (a)  $\phi = 0$ , (b)  $\phi = 4 \times 10^{-5}$ , (c)  $\phi = 8 \times 10^{-5}$ , (d)  $\phi = 1,2 \times 10^{-4}$  e (e)  $\phi = 1,6 \times 10^{-4}$ . Observando os gráficos, é possível notar que à medida que  $\phi$  aumenta, a simetria de reversão temporal é gradativamente quebrada, com o histograma em (e) sendo aproximadamente equivalente ao da Figura 46(a).

Figura 50 – Evolução dos histogramas da condutância de cavidades mesoscópicas com simetria quiral com a aplicação gradativa de um fluxo magnético  $\phi$ . De (a) para (e), o valor de  $\phi$  varia de zero até  $1,6 \times 10^{-4}$  com passos de  $4 \times 10^{-5}$ .

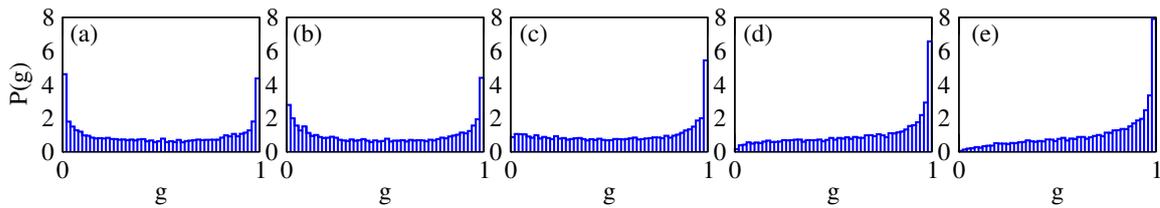


Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Já para analisar o *crossover* da classe quiral ortogonal para a simplética, tomamos o mesmo sistema, novamente com  $N_1 = N_2 = 1$ , e ao invés de aplicar um campo magnético, adicionamos interação *spin*-órbita para quebrar a SRS. Na Figura 51, são indicadas as distribuições de  $P(g)$  obtidas de 10.000 sistemas diferentes com  $N_1 = N_2 = 1$  modelados por 5.5 com  $\phi = 0$  e (a)  $\alpha = 0$ , (b)  $\alpha = 8,75 \times 10^{-3}$ , (c)  $\alpha = 1,75 \times 10^{-2}$ , (d)  $\alpha = 2,625 \times 10^{-2}$  e

(e)  $\alpha = 3,5 \times 10^{-2}$ . Analogamente ao caso anterior, nota-se que à medida que  $\alpha$  aumenta, a simetria de rotação de *spin* é gradativamente quebrada, com o histograma em (e) ficando aproximadamente igual ao da Figura 48(a).

Figura 51 – Evolução dos histogramas da condutância de cavidades mesoscópicas com simetria quiral com o aumento gradativo do parâmetro  $\alpha$  de acoplamento *spin*-órbita tipo Rashba. De (a) para (e), o valor de  $\alpha$  varia de zero até  $3,5 \times 10^{-2}$  com passos de  $8,75 \times 10^{-3}$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Em resumo, mostramos que é possível estudar, através de uma formulação *tight-binding*, o comportamento das flutuações dos observáveis de transporte não apenas de condutores convencionais descritos pelas classes de simetria de Wigner-Dyson, mas também de condutores com simetria quiral. Além de modelar estes sistemas, a abordagem *tight-binding* também consegue capturar o *crossover* entre as classes de simetria quiral.

## 6 MODELAGEM NUMÉRICA DE DADOS DA PANDEMIA DE COVID-19

Para finalizar esta Tese, apresentaremos os resultados de um estudo sobre um tema que, apesar de não ter nenhuma relação com o tema principal do trabalho, motivou intensamente a produção científica durante a realização dos trabalhos apresentados nos capítulos anteriores — a pandemia de COVID-19, uma doença causada pelo vírus SARS-CoV-2. Com o desencadeamento da pandemia pelo mundo, os governos dos países, assim como das suas divisões administrativas, passaram a divulgar boletins diários informando números relativos à pandemia, como o número diário de casos notificados, de mortes, de pessoas que foram infectadas pelo vírus e recuperaram-se, além do número de pessoas vacinadas, entre outros números.

À medida que os números passaram a ser disponibilizados, com atualizações diárias, muitos grupos de pesquisadores interessaram-se pela possibilidade de interpretar os dados através da modelagem matemática dos processos de infecção, como é o caso dos modelos de compartimento, já estabelecidos na literatura sobre modelos epidêmicos (ALLEN; BURGIN, 2000).

Especificamente, alguns trabalhos foram publicados com o intuito de entender a evolução do número de pessoas infectadas e mortas devido à infecção com o tempo. Ainda no início de 2020, quando a pandemia estava em um estágio inicial, (TSALLIS; TIRNAKLI, 2020) realizaram um estudo com o objetivo de prever quando ocorreriam os picos da pandemia em determinados países, ou seja, estimar o dia aproximado em que o número de casos ativos e de mortes diárias atingiria um valor máximo e em seguida começasse a diminuir. Com este objetivo, eles realizaram ajustes dos dados usando a função

$$N = Ct^\alpha e_q^{-\beta t^\gamma}, \quad C, \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad q > 1. \quad (6.1)$$

onde  $N$  pode representar o número de casos ativos de COVID-19  $t$  dias após o dia anterior àquele em que a primeira morte foi registrada ou o número de mortes registradas neste dia, e o fator  $e_q$ , conhecido como  $q$ -exponencial, é dado por

$$e_q(x) = [1 + (q - 1)x]^{-1/(q-1)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Observando a Equação 6.1, é possível notar que a mesma pertence a uma classe de funções descritas por uma abordagem conhecida como *Pathway Model*, apresentada originalmente por (MATHAI, 2005) como uma ferramenta para estudar como diferentes tipos de distribuições de probabilidade de variáveis matriciais podem ser conectadas através de uma fórmula geral, de

---

modo que através de uma variação de parâmetros, é possível obter a expressão matemática de uma PDF a partir de outra.

## 6.1 QUAIS FORAM OS DADOS ANALISADOS?

Neste trabalho, foram analisados somente os dados do número de mortes causadas pela COVID-19. Apesar da análise do número de casos de pessoas infectadas ser de fundamental importância para a compreensão da dinâmica da pandemia, conhecer o número real de pessoas infectadas pelo SARS-CoV-2 é uma tarefa difícil, afinal, estima-se que muitos casos não foram notificados, principalmente durante o início da pandemia, quando muitas pessoas possivelmente infectadas não eram testadas; além do mais, muitas pessoas infectadas pelo SARS-CoV-2 não apresentam sintomas gripais, tendendo a não ser testadas, o que aumenta a subnotificação de casos. Por outro lado, os dados a respeito do número de mortes causadas pela COVID-19 tendem a ser mais precisos, o que justifica a escolha pelos dados de mortalidade neste estudo, como em (VASCONCELOS et al., 2020).

O principal objetivo do presente estudo é analisar o comportamento da segunda, terceira e quarta ondas da pandemia de COVID-19 em diferentes países. Para tal, foram selecionados países em que, até a data limite considerada — 21 de julho de 2021 —, foram observadas duas, três e quatro ondas de infecção, respectivamente. Mais especificamente, foram analisados os dados de mortalidade devido à COVID-19 dos seguintes países: Austrália, Áustria, Brasil, Canadá, Irã, Itália, Japão, Marrocos, África do Sul, Turquia, Estados Unidos e Venezuela.

Os dados analisados aqui foram obtidos da base disponibilizada para o público pela Universidade de Johns Hopkins (UNIVERSITY, 2021; Humanitarian Data Exchange, 2020), na qual pode-se fazer o *download* de planilhas atualizadas diariamente constando o número acumulado de casos confirmados, mortes e casos em que houve recuperação em todos os países.

## 6.2 DINÂMICA DA PANDEMIA DE COVID-19: UMA ABORDAGEM VIA *PATHWAY MODEL*

A abordagem conhecida como *pathway model* (PM) pode ser simplificada para tratar com funções cuja variável seja um número real, cujo papel pode ser desempenhado pelo tempo na análise dos números associados à pandemia de COVID-19. Por meio do PM, é possível partir da forma funcional de uma PDF da família beta generalizada tipo-1 para obter uma PDF

da família beta generalizada tipo-2 e ainda uma da família gama generalizada pela simples variação de um parâmetro, que recebe o nome de *pathway parameter*.

Neste trabalho, descreveremos o número acumulado  $D$  de mortes no  $t$ -ésimo dia, onde  $t = 1$  indica o dia em que a primeira morte ocorreu, em termos da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{Ct^\alpha}{[1 + \beta(q-1)t^\gamma]^{1/(q-1)}}, \quad C, \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad q > 1, \quad (6.3)$$

onde, conseqüentemente,  $dD/dt$  representa o número diário de mortes. O lado direito da Equação 6.3 é equivalente à expressão para as PDF da família beta generalizada tipo-2, que corresponde a um dos casos do PM. O parâmetro  $q$  em 6.3 pode ser variado com o objetivo de obter outras famílias de PDF; especificamente, esta abordagem abrange as PDF das famílias beta generalizada tipo-2 se  $q > 1$ , beta generalizada tipo-1 se  $q < 1$  e ainda gama generalizada quando  $q \rightarrow 1$ . Muitas distribuições com aplicações importantes pertencem a estas famílias, como as que surgem no contexto da superestatística de Beck e Cohen (BECK, 2006; BECK; COHEN, 2003) e da estatística de Tsallis (TSALLIS, 2004, 2004), que fazem parte da família beta generalizada-tipo 2.

Integrando a Equação 6.3, obtemos o número acumulado de mortes em função do tempo. Interessantemente, a integral do lado direito de 6.3 pode ser resolvida analiticamente e resulta em

$$D(t) = \frac{Ct^{\alpha+1}}{\alpha+1} {}_2F_1\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}, \frac{1}{q-1}; 1 + \frac{\alpha+1}{\gamma}; -\beta(q-1)t^\gamma\right). \quad (6.4)$$

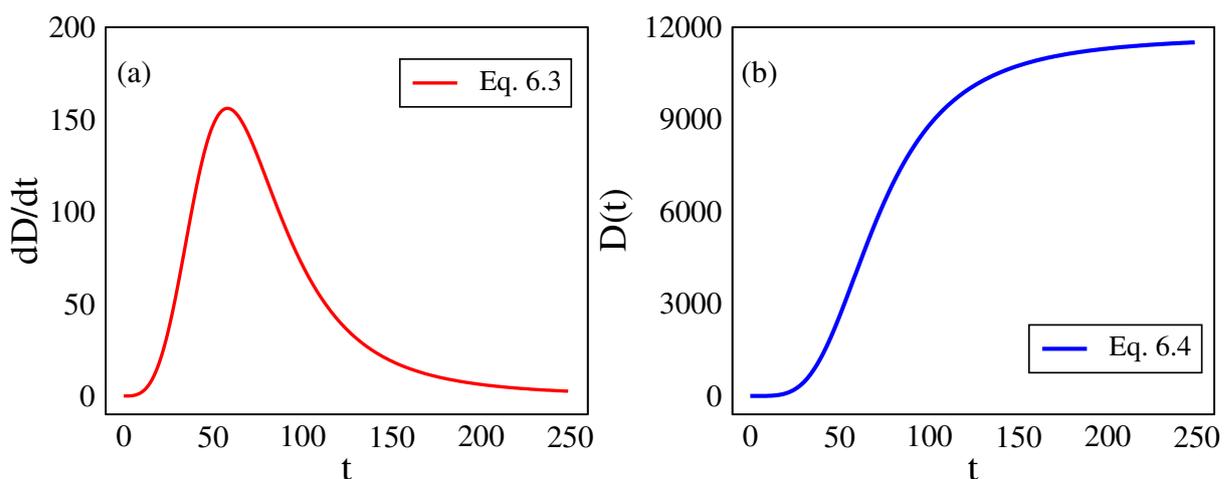
onde  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  é a função hipergeométrica gaussiana. É importante destacar que a existência de uma expressão analítica para modelar  $D(t)$  diretamente torna a análise da evolução temporal do número de mortes causada pela COVID-19 mais robusta do ponto de vista da modelagem numérica dos dados.

A Figura 52(a) mostra um gráfico do número diário de mortes ( $dD/dt$ ) em função do tempo dado pelo modelo descrito pela Equação 6.3 com  $C = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha = 3,3$ ,  $q = 1,4$ ,  $\beta = 1 \times 10^{-5}$  e  $\gamma = 3$ . Observando a Figura 52(a), podemos notar que o PM é capaz de capturar os principais aspectos de uma curva epidêmica, como a taxa de crescimento do número diário de mortes no período inicial e a forma assimétrica, que indica que o período de decaimento do número de mortes após o pico é mais longo que o de crescimento. Dos cinco parâmetros da Equação 6.3,  $\alpha$  é o mais relevante na descrição do trecho inicial da curva, enquanto a forma da curva no período de diminuição do número de mortes é mais sensível

aos valores de  $q$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Se a expressão do PM for interpretada como uma PDF, é evidente que o parâmetro  $C$  desempenha o papel de uma constante de normalização, e, embora a proposta apresentada aqui seja modelar o número absoluto de mortes causadas pela COVID-19, a curva mostrada na Figura 52(a) pode ser entendida como uma representação gráfica da probabilidade de que uma pessoa venha a morrer por conta da COVID-19 no  $t$ -ésimo dia. Entretanto, como a área sob a curva da Figura 52(a) não será igual a 1, em outras palavras,  $C$  não é uma constante de normalização, mas equivalente ao número acumulado de mortes no  $t$ -ésimo dia, que, a priori, não é conhecido,  $C$  não pode ser dado em função dos outros parâmetros, e será tratado como um parâmetro livre.

A Figura 52(b) mostra um gráfico do número total de mortes ( $D$ ) em função do tempo obtido usando a Equação 6.4 com os mesmos parâmetros usados para obter o gráfico em 52(a). Assim como na curva de  $dD/dt$ , a curva obtida para  $D(t)$  evidencia as principais características de uma dinâmica epidêmica — uma alta taxa de crescimento logo após o início, um regime de crescimento aproximadamente linear nas proximidades do ponto de inflexão (pico da curva de  $dD/dt$ ), seguido de uma diminuição gradativa da taxa de crescimento até a formação de um platô que indica o número total de mortes ao final da epidemia ou, conforme discutiremos a seguir, da primeira onda. A seguir, será discutido como generalizar a abordagem via PM

Figura 52 – (a) Gráfico da função dada pelo *pathway model* (Equação 6.3) para o número diário de mortes em função do tempo. (b) Gráfico da função dada pela Equação 6.4 para o número acumulado de mortes em função do tempo. Nas duas curvas, os parâmetros são  $C = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha = 3,3$ ,  $q = 1,4$ ,  $\beta = 1 \times 10^{-5}$  e  $\gamma = 3$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

para investigar curvas epidêmicas nas quais, após o período de decrescimento (cauda da curva em 6.3), uma retomada do crescimento é observada, o que caracteriza uma nova onda de

infecção. Com o objetivo descrito, a próxima seção apresenta um modelo de múltiplas ondas associado ao PM.

### 6.3 MODELO DE MÚLTIPLAS ONDAS

Para estudar curvas epidêmicas com múltiplas ondas, continuaremos a utilizar o PM (Equação 6.3), mas com os parâmetros dependentes do tempo, ou seja,  $C = C(t)$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $q = q(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$  e  $\gamma = \gamma(t)$ . Para explicar a forma da dependência temporal dos parâmetros neste estudo, consideramos inicialmente uma curva epidêmica com duas ondas. Assim como em (VASCONCELOS et al., 2021), a dependência temporal dos parâmetros será descrita pela seguinte equação logística:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \rho_1(\zeta - \zeta_1) \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2}\right), \quad (6.5)$$

onde o símbolo  $\zeta(t)$  pode descrever qualquer parâmetro do modelo e  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são os valores numéricos do parâmetro  $\zeta(t)$  característicos da primeira e segunda ondas, respectivamente. A solução da equação diferencial 6.5 com condição inicial  $\zeta(t_1) = (\zeta_1 + \zeta_2)/2$  é dada por

$$\zeta(t) = \zeta_1 + \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\rho_1(t - t_1)}{2}\right)\right]. \quad (6.6)$$

Nas equações 6.5 e 6.6,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são os valores de  $\zeta(t)$  na primeira e na segunda onda de infecção,  $t_1$  indica o tempo estimado em que ocorre a transição entre as duas ondas e  $\rho_1$  está relacionada à rapidez com que a transição ocorre.

Para uma curva epidêmica com mais de duas ondas, definimos uma função logística generalizada, dada por

$$\zeta(t) = \zeta_1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\rho_i(t - t_i)}{2}\right)\right], \quad (6.7)$$

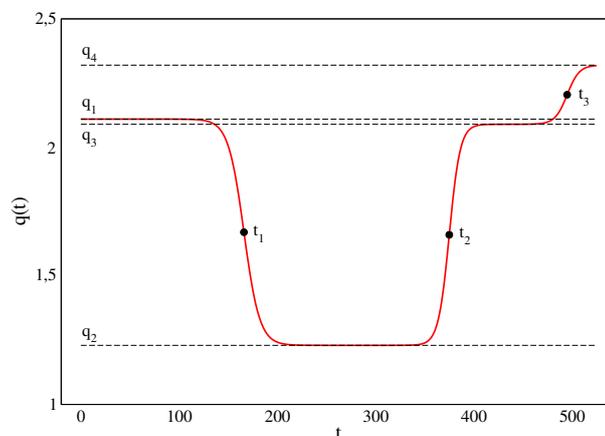
onde  $N$  é o número de ondas. A representação gráfica da função  $\zeta(t)$  dada por 6.7 tem  $N$  platôs, nos quais  $\zeta(t) = \zeta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , onde  $\zeta_i$  é o valor de  $\zeta(t)$  durante a  $i$ -ésima onda de infecção. Os parâmetros  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , são os tempos nos quais ocorre a transição entre a  $i$ -ésima e a  $(i + 1)$ -ésima onda, e  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , estão relacionados à rapidez da transição entre a  $i$ -ésima e a  $(i + 1)$ -ésima onda. Nas análises que serão apresentadas posteriormente, consideramos que os parâmetros  $t_i$  e  $\rho_i$  são os mesmos para  $C = C(t)$ ,  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $q = q(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$  e  $\gamma = \gamma(t)$ . Esta escolha é justificada pelo fato de que mudanças no processo

de propagação do vírus causadas por fatores tais como medidas reguladoras tomadas pelas autoridades sanitárias, campanhas de vacinação, surgimento de novas variações do SARS-CoV-2, entre outros, tendem a ser refletidas simultaneamente e da mesma maneira na dinâmica dos parâmetros do modelo utilizado.

A Figura 53 mostra um exemplo de gráfico da função dada pela Equação 6.7 para a variável  $q(t)$  com  $N = 4$  e os seguintes parâmetros:  $q_1 = 2,11$ ,  $q_2 = 1,23$ ,  $q_3 = 2,09$ ,  $q_4 = 2,32$ ,  $t_1 = 166$ ,  $t_2 = 375$ ,  $t_3 = 495$ ,  $\rho_1 = 0,125$ ,  $\rho_2 = 0,180$  e  $\rho_3 = 0,162$ . Nesta figura, é possível observar claramente os quatro platôs, correspondentes às quatro ondas, além do mais, os valores dos tempos  $t_i$  em que ocorrem as transições da  $i$ -ésima para a  $(i + 1)$ -ésima onda são representados por símbolos circulares, e os valores de  $\rho_i$  podem ser entendidos como uma medida aproximada da inclinação de  $q(t)$  na transição entre o  $i$ -ésimo e o  $(i + 1)$ -ésimo platô. Os valores dos parâmetros deste gráfico foram obtidos da aplicação da generalização do PM para quatro ondas na análise do número diário de mortes do Japão, que será apresentada em detalhes posteriormente.

Um ponto importante a ser ressaltado acerca da Equação 6.7 é que para um modelo com  $N$  ondas, o modelo tem  $7N - 2$  parâmetros livres, sendo  $5N$  parâmetros associados às  $N$  ondas, além de  $2(N - 1)$  outros relacionados aos valores de  $t_i$  e  $\rho_i$  nas  $N - 1$  transições entre ondas. Tentar ajustar um conjunto de dados usando o modelo descrito não é uma tarefa simples, podendo levar à ocorrência de *overfitting*, que está associado à obtenção de resultados com erros elevados.

Figura 53 – Gráfico de  $q(t)$  da função dada pelo *pathway model* com quatro ondas de infecção que melhor se ajusta aos dados do número diário de mortes do Japão. Na figura,  $q_1 = 2,11$ ,  $q_2 = 1,23$ ,  $\rho_1 = 0,125$ ,  $t_1 = 166$ ,  $q_3 = 2,09$ ,  $\rho_2 = 0,180$ ,  $t_2 = 375$ ,  $q_4 = 2,32$ ,  $\rho_3 = 0,162$  and  $t_3 = 495$ .



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

### 6.3.1 Análise numérica dos dados

Para todos os países selecionados, os dados para o número diário de mortes ( $dD/dt$ ) foram ajustados pelo PM (Equação 6.3) com os parâmetros dependentes do tempo de acordo com 6.7. Com a curva teórica de  $dD/dt$  obtida através do ajuste, também foi obtida uma curva para o número  $D$  de mortes acumuladas através de simples integração numérica dos valores  $dD/dt$  calculados com os parâmetros do modelo. É interessante ressaltar que para curvas com apenas uma onda, poderíamos, a princípio, fazer o procedimento contrário, ou seja, ajustar os dados para o número acumulado de mortes usando a Equação 6.4 e obter curva teórica de  $D(t)$  para, em seguida, determinar a curva teórica de  $dD/dt$  por meio de diferenças finitas. No entanto, este método não funcionaria para curvas com múltiplas ondas, já que seria mais complicado obter uma expressão analítica para a integral do PM (Equação 6.3) com os parâmetros dependentes do tempo.

Devido à grande quantidade de parâmetros do modelo para múltiplas ondas — 12, 19 e 26 para duas, três e quatro ondas, respectivamente —, os parâmetros de ajuste obtidos são altamente sensíveis aos chutes iniciais dados. Em alguns casos, é possível obter curvas bem ajustadas aos pontos que representam os dados, mas com os erros dos parâmetros extremamente grandes. Em primeiro lugar, com o objetivo de limitar o número de possíveis chutes iniciais, o mesmo conjunto de valores foi escolhido para todos os países, e é dado a seguir:  $C_i = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_i = 4$ ,  $q_i = 1,4$ ,  $\beta_i = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_i = 3$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e ainda  $\rho_i = 0,1$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . Com estes valores de chutes iniciais, testamos a resposta do procedimento numérico para ajustar os dados usando chutes iniciais para  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ , aleatoriamente escolhidos dentro do regime de valores  $t_{N-1} > \dots > t_j > t_k > \dots > t_1 > 0$ , onde  $1 < k < j < N - 1$ , e com  $t_{N-1}$  menor do que o tempo final dos dados analisados. Além do mais, os parâmetros foram restringidos a assumir apenas valores que estejam em acordo com as condições equivalentes às dadas na Equação 6.3, dadas por:  $C_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 0$  e  $q_i > 1$ , adicionalmente, deve-se ter  $q_i < 3$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Em todos os ajustes numéricos realizados, a ideia básica foi resolver um problema de otimização usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt, que é baseado no método dos mínimos quadrados não linear, disponibilizado no pacote `scipy` do Python. Este pacote possui uma rotina que determina os erros dos parâmetros de ajuste usando a matriz de covariância (NEWVILLE et al., 2015). Na análise dos ajustes, um resultado foi considerado aceitável quando, para todos os parâmetros, os erros obtidos foram menores que os valores dos parâmetros

propriamente ditos. No algoritmo implementado, tenta-se calcular os parâmetros dados pelas Equações 6.3 e 6.7 que ajustam os dados partindo dos chutes iniciais dados acima e, caso todos os parâmetros apresentem erros relativos inferiores a 100%<sup>1</sup>, já usamos os parâmetros para obter o gráfico da curva teórica. Caso contrário, ou seja, se ao menos um parâmetro apresentar erro superior a 100%, os parâmetros são recalculados usando os parâmetros obtidos no passo anterior e uma nova decisão é tomada de acordo com os valores dos erros; este procedimento é feito por até 10 vezes e, caso os erros ainda não estejam de acordo com o critério de tolerância, novos chutes iniciais são considerados. A dificuldade em encontrar resultados com erros aceitáveis pode estar relacionada a uma série de fatores, dentre os quais podemos destacar a grande quantidade de parâmetros do modelo e o fato de que, em geral, os dados empíricos apresentam muitas flutuações.

#### 6.4 RESULTADOS

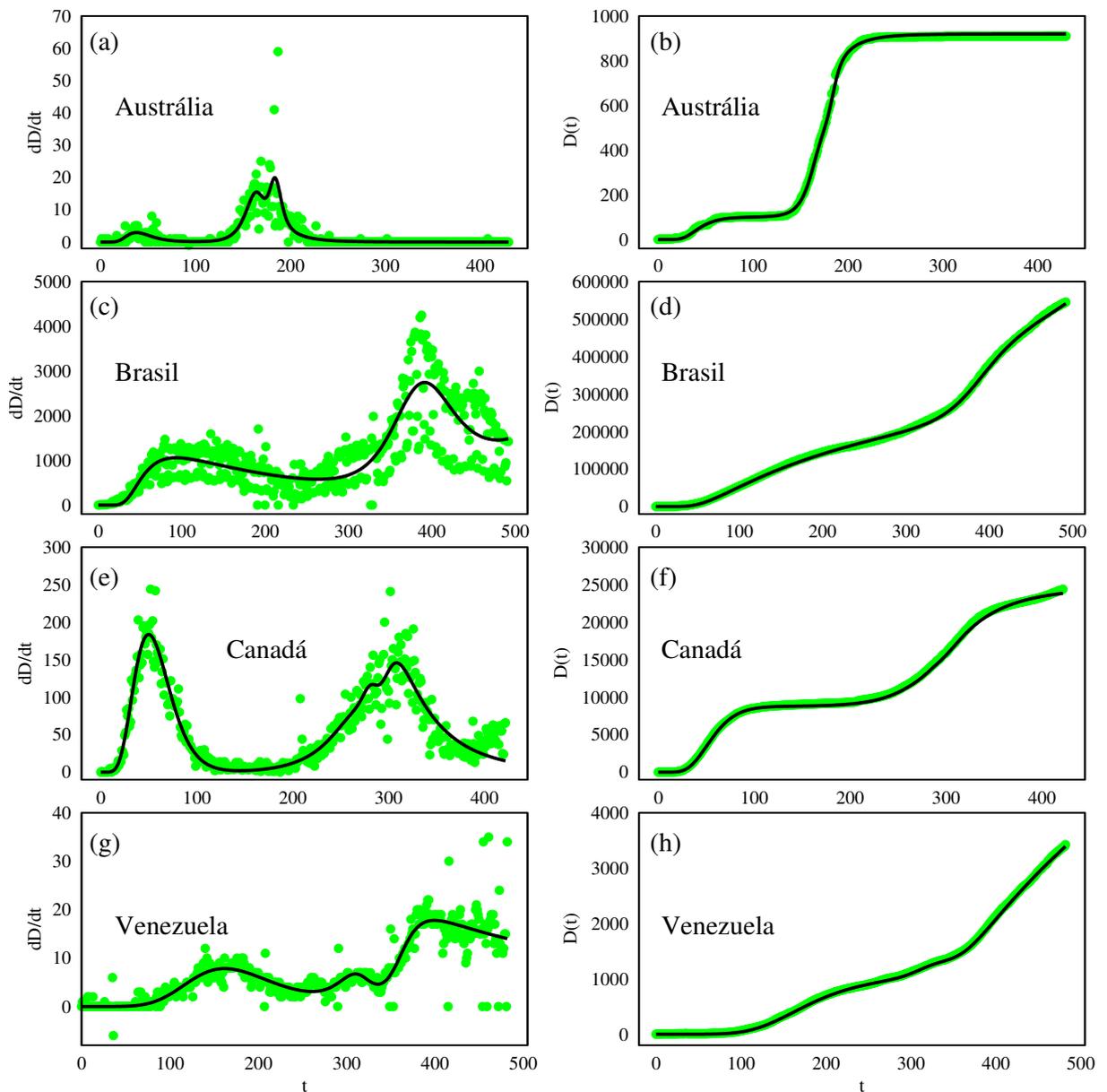
Como o principal objetivo deste estudo é mostrar a aplicabilidade do PM para modelar curvas de mortalidade associada à COVID-19 com múltiplas ondas, foram selecionados dados de países que apresentam duas, três e quatro regiões de crescimento acelerado do número diário de mortes, as quais podem ser claramente associadas a segundas, terceiras e quartas ondas de infecção, respectivamente. Os países selecionados foram os seguintes: Austrália, Brasil, Canadá e Venezuela (com duas ondas), Áustria, Itália, África do Sul e Estados Unidos (com três ondas), e Irã, Japão, Marrocos e Turquia (com quatro ondas). Para todos os países, a data final dos dados analisados foi a mesma, 21 de julho de 2021. Para decidir o número de ondas do modelo a ser utilizado para analisar os dados de um país, é feita uma simples inspeção visual do gráfico do número diário de mortes em função do tempo, o que dá uma ideia a respeito de quantas ondas já ocorreram até a data considerada. É importante destacar que, em determinadas situações, é possível obter bons ajustes tanto com um modelo de  $N$  quanto de  $N + 1$  ondas, mas a estimativa do número a ser considerado na modelagem é feita *a priori*.

<sup>1</sup> Apesar do limite superior imposto aos valores dos erros relativos ter sido consideravelmente alto, a maioria dos erros dos parâmetros obtidos pela rotina numérica utilizada foi extremamente baixa. A escolha por este valor é justificada pela grande diferença entre as ordens de grandeza de diferentes parâmetros — especialmente os valores de  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , que são muito pequenos (ver Tabelas 6, 7 e 8) —, dificultando a obtenção simultânea de erros baixos para todos os parâmetros.

### 6.4.1 Estudo de países com duas ondas

Nos gráficos do lado esquerdo da Figura 54, os símbolos circulares verdes mostram os dados empíricos de  $dD/dt$  em função do tempo  $t$  medido em dias de (a) Austrália, (c) Brasil, (e) Canadá e (g) Venezuela, e as linhas cheias representam as funções dadas pela versão de

Figura 54 – Coluna da esquerda: Dados do número diário de mortes (círculos verdes) atribuídas à COVID-19 para (a) Austrália, (c) Brasil, (e) Canadá e (g) Venezuela até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam as funções dadas pela generalização do *pathway model* para duas ondas que melhor se ajustam aos dados empíricos. Coluna da direita: Dados do número acumulado de mortes (círculos verdes) para (b) Austrália, (d) Brasil, (f) Canadá e (h) Venezuela até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam a integral da curva do *pathway model* mostrada nos gráficos da coluna da esquerda.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

duas ondas do PM que melhor se ajustam aos dados, cujos parâmetros podem ser consultados na Tabela 6. Os gráficos do lado direito da Figura 54 mostram os dados empíricos (símbolos circulares verdes) do número de mortes acumuladas ( $D$ ) em função de  $t$  para os mesmos países — (b) Austrália, (d) Brasil, (f) Canadá e (h) Venezuela —, e as curvas teóricas de  $D(t)$  correspondentes (linhas cheias) obtidas pela integração numérica das respectivas curvas teóricas de  $dD/dt$ . É interessante destacar que apesar dos dados ajustados terem sido os de mortes diárias ( $dD/dt$ ), a integração da curva teórica de  $dD/dt$  se ajusta muito bem aos dados de mortes acumuladas, o que mostra o alto grau de consistência do modelo.

Alguns detalhes dos ajustes merecem ser destacados. Nas Figuras 54(a), 54(e) e 54(g), apesar do modelo para duas ondas ter sido usado, é possível ver, em certo ponto, um pico a mais do que o esperado na curva teórica, o que não deve ser interpretado como indício de uma onda adicional; na verdade, isto ocorre porque os dados apresentam muitas flutuações nas proximidades de tal ponto para Austrália, Canadá e Venezuela.

Tabela 6 – Valores estimados dos parâmetros das curvas descritas pelas Equações 6.3 e 6.7 que melhor se ajustam aos valores do número diário de mortes atribuídas à pandemia de COVID-19 para os quatro países selecionados que apresentavam duas ondas de infecção até 21 de julho de 2021 — Austrália, Brasil, Canadá e Venezuela.

Parâmetros	Austrália	Brasil	Canadá	Venezuela
$C_1$	$5,63 \times 10^{-19}$	$8,48 \times 10^{-18}$	$2,41 \times 10^{-8}$	$1,05 \times 10^{-12}$
$\alpha_1$	18,5	14,2	8,31	6,34
$q_1$	1,04	1,15	1,00	1,23
$\beta_1$	0,574	0,00305	0,346	$2,70 \times 10^{-7}$
$\gamma_1$	1,16	2,27	0,854	3,22
$C_2$	$2,55 \times 10^{-13}$	$1,97 \times 10^{-17}$	3,22	$1,76 \times 10^{-10}$
$\alpha_2$	37,6	12,5	5,54	7,52
$q_2$	1,03	1,74	1,08	1,43
$\beta_2$	2,15	0,000920	0,0971	$7,05 \times 10^{-7}$
$\gamma_2$	1,49	4,97	1,22	3,93
$\rho_1$	0,164	0,0286	0,130	0,0777
$t_1$	181	400	284	341

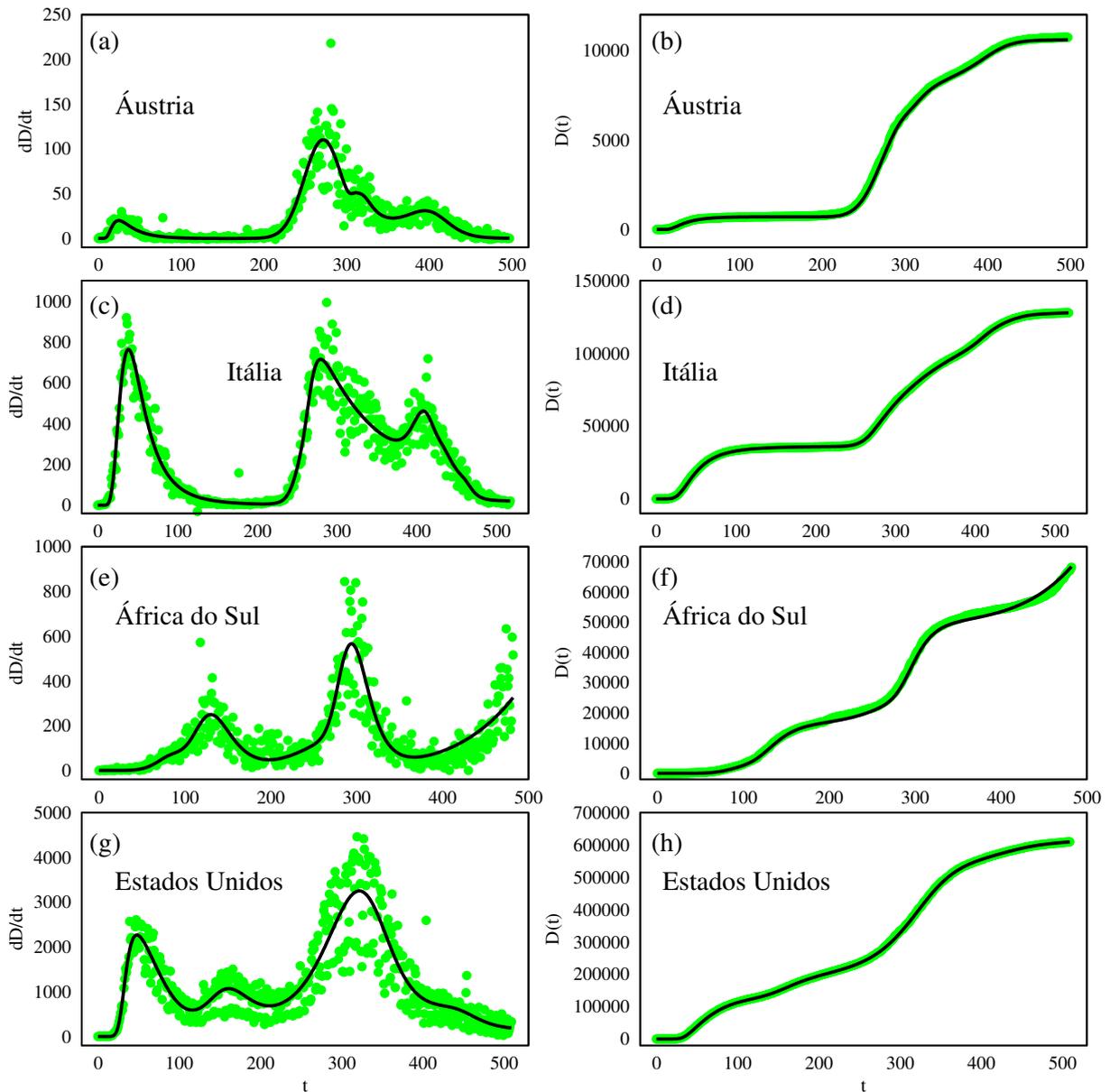
Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

#### 6.4.2 Estudo de países com três ondas

Uma vez confirmada a eficácia da generalização para duas ondas do *pathway model*, passamos a considerar curvas de países que apresentam, até a data final considerada neste estudo, três ondas de infecção.

Nos gráficos do lado esquerdo da Figura 55, os círculos verdes mostram os dados empíricos de  $dD/dt$  em função do tempo  $t$  de (a) Áustria, (c) Itália, (e) África do Sul e (g) Estados

Figura 55 – Coluna da esquerda: Dados do número diário de mortes (círculos verdes) atribuídas à COVID-19 para (a) Áustria, (c) Itália, (e) África do Sul e (g) Estados Unidos até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam as funções dadas pela generalização do *pathway model* para três ondas que melhor se ajustam aos dados empíricos. Coluna da direita: Dados do número acumulado de mortes (círculos verdes) para (b) Áustria, (d) Itália, (f) África do Sul e (h) Estados Unidos até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam a integral da curva do *pathway model* mostrada nos gráficos da coluna da esquerda.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

Unidos, e as linhas cheias representam as funções dadas pela generalização do PM para três ondas que melhor se ajustam aos dados. Os parâmetros das curvas teóricas são dados na Tabela 7. No lado direito da Figura 55, são mostrados os dados empíricos (círculos verdes) do número total de mortes ( $D$ ) em função de  $t$  para os mesmos países — (b) Áustria, (d) Itália, (f) África do Sul e (h) Estados Unidos —, além das curvas teóricas de  $D(t)$  correspondentes

(linhas cheias) obtidas pela integração numérica das curvas teóricas de  $dD/dt$  para os países correspondentes. Mais uma vez, notamos que, mesmo que os dados ajustados tenham sido os de mortes diárias ( $dD/dt$ ), a integração da curva teórica de  $dD/dt$  modela de maneira satisfatória os dados de mortes acumuladas, mostrando que o PM é uma ótima ferramenta para modelar os dados de mortes causadas pela COVID-19.

Na Figura 55(a), que mostra o ajuste feito para os dados de  $dD/dt$  da Áustria, existe um pico discreto entre a segunda e a terceira onda que não deve ser confundido como indicador de uma onda adicional; na verdade, ele pode ser entendido como um simples reflexo das flutuações dos dados para valores de  $t$  nas suas proximidades, que são mais intensas.

Tabela 7 – Valores estimados dos parâmetros das curvas descritas pelas Equações 6.3 e 6.7 que melhor se ajustam aos valores do número diário de mortes atribuídas à pandemia de COVID-19 para os quatro países selecionados que apresentavam três ondas de infecção até 21 de julho de 2021 — Áustria, Itália, África do Sul e Estados Unidos.

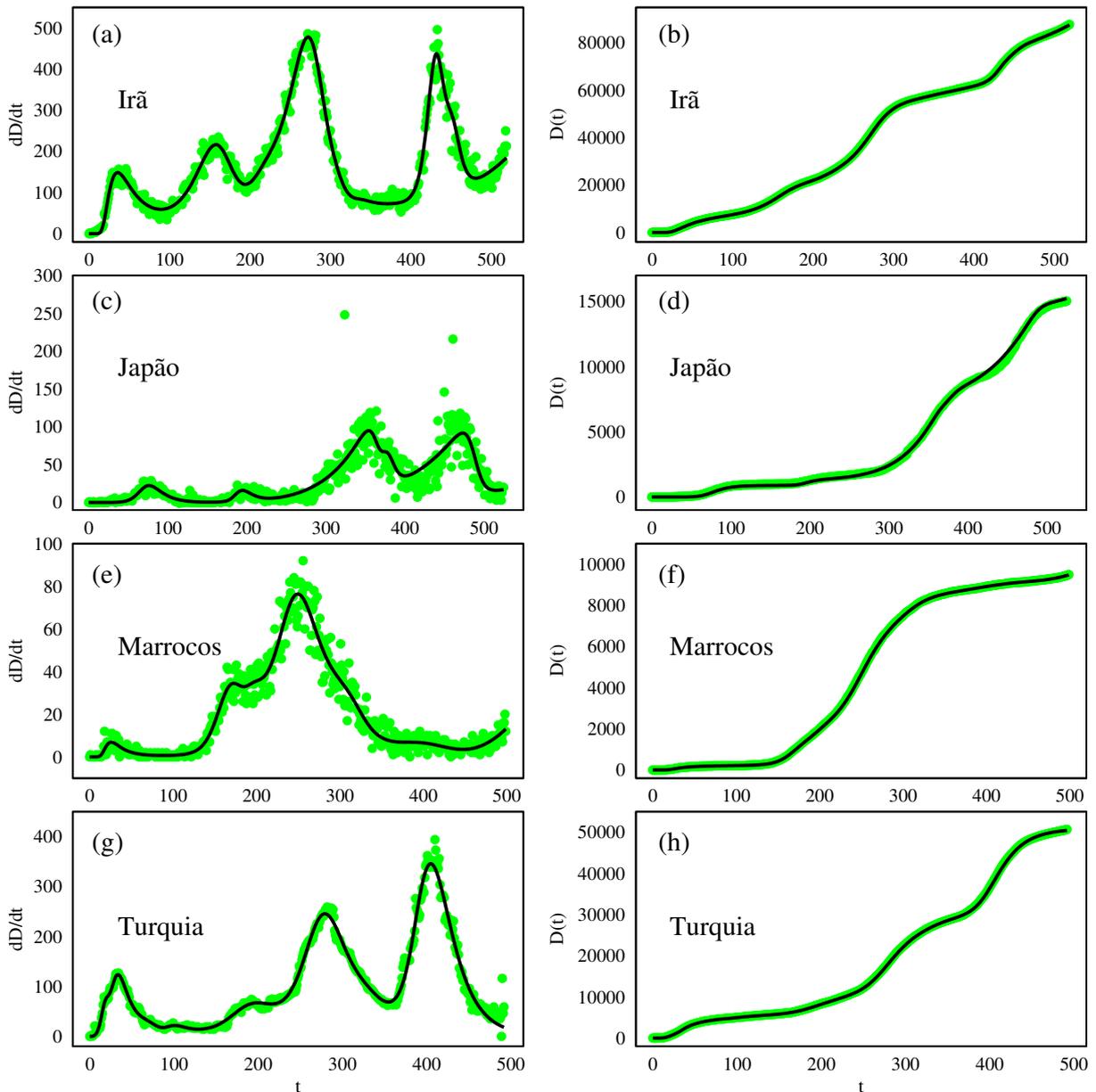
Parâmetros	Áustria	Itália	África do Sul	Estados Unidos
$C_1$	$1,21 \times 10^{-14}$	$2,69 \times 10^{-13}$	$7,28 \times 10^{-11}$	$5,06 \times 10^{-14}$
$\alpha_1$	13,3	20,3	6,58	11,5
$q_1$	1,10	1,06	1,26	1,38
$\beta_1$	0,0289	0,689	$1,11 \times 10^{-5}$	$2,71 \times 10^{-7}$
$\gamma_1$	1,88	1,52	2,66	4,72
$C_2$	$1,61 \times 10^{-10}$	0,877	$5,64 \times 10^{-15}$	$5,45 \times 10^{-16}$
$\alpha_2$	92,5	22,6	6,90	14,3
$q_2$	1,10	1,03	1,16	1,50
$\beta_2$	0,0604	2,52	$1,94 \times 10^{-8}$	$7,11 \times 10^{-7}$
$\gamma_2$	10,0	1,10	3,08	6,13
$\rho_1$	0,157	0,238	0,0887	0,0540
$t_1$	260	309	84,7	123
$C_3$	$8,68 \times 10^{-9}$	0,877	$1,78 \times 10^{-17}$	$5,26 \times 10^{-14}$
$\alpha_3$	6,35	2,66	7,18	5,81
$q_3$	1,11	1,04	2,60	1,44
$\beta_3$	0,234	15,8	$3,94 \times 10^{-7}$	$8,73 \times 10^{-7}$
$\gamma_3$	0,874	0,112	1,40	2,28
$\rho_2$	0,101	0,0226	0,0856	0,0303
$t_2$	433	380	286	385

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

### 6.4.3 Estudo de países com quatro ondas

Por fim, consideramos países com quatro ondas de infecção. No lado esquerdo da Figura 56, mostramos os dados empíricos de  $dD/dt$  em função de  $t$  (medido em dias) de (a) Irã, (c) Japão, (e) Marrocos e (g) Turquia através de símbolos circulares verdes, além das funções dadas pela Equação 6.3 com parâmetros dependentes de  $t$  de acordo com a Equação 6.7 com  $N = 4$  que melhor se ajustam aos pontos na forma de linhas cheias. Na Tabela 8, são indicados os valores dos parâmetros das curvas teóricas de  $dD/dt$ . No lado direito de 56, são

Figura 56 – Coluna da esquerda: Dados do número diário de mortes (círculos verdes) atribuídas à COVID-19 para (a) Irã, (c) Japão, (e) Marrocos e (g) Turquia até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam as funções dadas pela generalização do *pathway model* para quatro ondas que melhor se ajustam aos dados empíricos. Coluna da direita: Dados do número acumulado de mortes (círculos verdes) para (b) Irã, (d) Japão, (f) Marrocos e (h) Turquia até 21 de julho de 2021. As linhas cheias representam a integral da curva do *pathway model* mostrada nos gráficos da coluna da esquerda.



Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

mostrados os gráficos de  $D(t)$  para (b) Irã, (d) Japão, (f) Marrocos e (h) Turquia; os dados empíricos são representados por símbolos verdes e as linhas cheias são as integrais das curvas teóricas de  $dD/dt$  dos países correspondentes.

Um aspecto interessante pode ser notado na Figura 56(a), para o Irã: apesar do modelo aplicado ter sido para quatro ondas de infecção, o ajuste foi capaz de capturar o início de uma

nova onda.

Tabela 8 – Valores estimados dos parâmetros das curvas descritas pelas Equações 6.3 e 6.7 que melhor se ajustam aos valores do número diário de mortes atribuídas à pandemia de COVID-19 para os quatro países selecionados que apresentavam quatro ondas de infecção até 21 de julho de 2021 — Irã, Japão, Marrocos e Turquia.

Parâmetros	Irã	Japão	Marrocos	Turquia
$C_1$	$1,31 \times 10^{-18}$	$1,84 \times 10^{-12}$	$8,49 \times 10^{-17}$	0,00435
$\alpha_1$	17,9	7,19	16,0	3,82
$q_1$	1,11	2,11	1,11	3,00
$\beta_1$	0,0127	$1,45 \times 10^{-6}$	0,0143	0,281
$\gamma_1$	2,37	2,23	2,35	1,35
$C_2$	$4,18 \times 10^{-15}$	$2,24 \times 10^{-15}$	$1,61 \times 10^{-15}$	$6,60 \times 10^{-11}$
$\alpha_2$	17,0	7,67	8,94	3,30
$q_2$	1,71	1,23	1,05	1,63
$\beta_2$	0,00190	9,70	0,353	0,0168
$\gamma_2$	8,21	0,0826	0,909	0,936
$\rho_1$	0,0658	0,125	0,0981	0,285
$t_1$	217	166	185	19,8
$C_3$	$1,44 \times 10^{-16}$	$1,59 \times 10^{-16}$	$2,46 \times 10^{-15}$	$1,68 \times 10^{-14}$
$\alpha_3$	17,4	7,89	5,84	18,2
$q_3$	1,15	2,09	2,77	1,40
$\beta_3$	0,0263	6,05	0,702	$7,55 \times 10^{-5}$
$\gamma_3$	2,48	1,05	0,118	6,68
$\rho_2$	0,102	0,180	0,0264	0,0526
$t_2$	310	375	284	80,0
$C_4$	$7,15 \times 10^{-14}$	$1,83 \times 10^{-16}$	$5,43 \times 10^{-18}$	$2,06 \times 10^{-11}$
$\alpha_4$	16,6	7,02	12,9	18,7
$q_4$	1,97	2,32	2,00	1,06
$\beta_4$	0,0425	23,1	3,08	0,00272
$\gamma_4$	11,1	0,491	5,79	2,24
$\rho_3$	0,135	0,162	0,0432	0,0605
$t_3$	456	495	317	336

Fonte: Elaborada pelo autor (2022)

## 6.5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste estudo, mostramos uma nova maneira de modelar os dados relacionados à pandemia de COVID-19. Especificamente, usamos uma generalização da expressão para funções da família beta generalizada tipo-2, que podem ser entendidas pela abordagem conhecida como *pathway model*, para curvas com múltiplas ondas. Especificamente, foram obtidos bons ajustes para o número diário de mortes de diferentes países e, indiretamente, para o número total de mortes, usando integração do ajuste das mortes diárias. Destacamos ainda que o modelo consegue capturar o comportamento de ondas múltiplas separadas por períodos sem mortes, que levam, conseqüentemente, à formação de platôs na curva de  $D(t)$ , bem como curvas nas quais  $D(t)$  tem um comportamento crescente mesmo no período entre ondas.

Apesar da data final dos dados analisados neste trabalho ser 21 de julho de 2021, o modelo

pode ser utilizado para ajustar dados mais atualizados, podendo até mesmo levar em conta mais do que quatro ondas, o que possibilita a realização de novas análises.

## REFERÊNCIAS

- ALBRECHT, C.; SMET, J. H.; KLITZING, K. von; WEISS, D.; UMANSKY, V.; SCHWEIZER, H. Evidence of hofstadter's fractal energy spectrum in the quantized hall conductance. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 86, p. 147–150, Jan 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.147>>.
- ALLEN, L. J.; BURGIN, A. M. Comparison of deterministic and stochastic sis and sir models in discrete time. *Mathematical Biosciences*, v. 163, n. 1, p. 1–33, 2000. ISSN 0025-5564. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556499000474>>.
- ALTLAND, A.; ZIRNBAUER, M. R. Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 55, p. 1142–1161, Jan 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.55.1142>>.
- ALTSHULER, B. L. Fluctuations in the extrinsic conductivity of disordered conductors. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 41, p. 648, jun. 1985.
- AMIN, K. R.; NAGARAJAN, R.; PANDIT, R.; BID, A. Multifractal conductance fluctuations in high-mobility graphene in the integer quantum hall regime. *arXiv preprint arXiv:2112.14018*, 2021.
- AMIN, K. R.; RAY, S. S.; PAL, N.; PANDIT, R.; BID, A. Exotic multifractal conductance fluctuations in graphene. *Communications Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 1, n. 1, fev. 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s42005-017-0001-4>>.
- ANDO, T. Localization and fluctuations in the quantum hall regime. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 49, p. 4679–4688, Feb 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.49.4679>>.
- ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. *Solid state physics*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1976. Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/102652>>.
- ATAS, Y. Y.; BOGOMOLNY, E.; GIRAUD, O.; ROUX, G. Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 110, p. 084101, Feb 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.084101>>.
- BARBOSA, A. L. R.; LIMA, T. H. V. de; GONZÁLEZ, I. R. R.; PESSOA, N. L.; MACÊDO, A. M. S.; VASCONCELOS, G. L. Turbulence hierarchy and multifractality in the integer quantum hall transition. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 128, p. 236803, Jun 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.236803>>.
- BARBOSA, A. L. R.; RAMOS, J. G. G. S.; FERREIRA, A. Effect of proximity-induced spin-orbit coupling in graphene mesoscopic billiards. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 103, p. L081111, Feb 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.103.L081111>>.
- BECK, C. Stretched exponentials from superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 365, n. 1, p. 96–101, 2006. ISSN 0378-4371. Fundamental Problems of Modern Statistical Mechanics. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437106000434>>.

- BECK, C.; COHEN, E. Superstatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 322, p. 267–275, 2003. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437103000190>>.
- BEENAKKER, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 69, p. 731–808, Jul 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.69.731>>.
- BEENAKKER, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, v. 69, p. 731, 1997.
- BERKOLAIKO, G.; KUIPERS, J. Universality in chaotic quantum transport: The concordance between random-matrix and semiclassical theories. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 85, p. 045201, Apr 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.045201>>.
- BRAZHKIN, V. V.; SUSLOV, I. M. Mechanism of universal conductance fluctuations. *Journal of Physics: Condensed Matter*, IOP Publishing, v. 32, n. 35, p. 35LT02, jun 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-648x/ab8ec5>>.
- BROUWER, P. W.; MUDRY, C.; SIMONS, B. D.; ALTLAND, A. Delocalization in coupled one-dimensional chains. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 81, p. 862–865, Jul 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.862>>.
- BUNIMOVICH, L. A. On ergodic properties of certain billiards. *Functional Analysis and Its Applications*, v. 8, n. 3, p. 254–255, Jul 1974. ISSN 1573-8485. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01075700>>.
- BUNIMOVICH, L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Communications in Mathematical Physics*, v. 65, n. 3, p. 295–312, Oct 1979. ISSN 1432-0916. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01197884>>.
- BÜTTIKER, M. Four-terminal phase-coherent conductance. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 57, p. 1761–1764, Oct 1986. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.57.1761>>.
- BÜTTIKER, M. Symmetry of electrical conduction. *IBM Journal of Research and Development*, v. 32, n. 3, p. 317–334, 1988.
- CHANDRAMOULI, R. S.; SRIVASTAV, R. K.; KUMAR, S. Electronic transport in chaotic mesoscopic cavities: A kwant and random matrix theory based exploration. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 30, n. 12, p. 123120, 2020.
- COBDEN, D. H.; BARNES, C. H. W.; FORD, C. J. B. Fluctuations and evidence for charging in the quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 82, p. 4695–4698, Jun 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.4695>>.
- DATTA, S. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Studies in Semiconductor Physics and Microelectronic Engineering).
- DYSON, F. J. The threefold way. algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, v. 3, n. 6, p. 1199–1215, 1962. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1703863>>.

- EVERS, F.; MIRLIN, A. D. Anderson transitions. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 80, p. 1355–1417, Oct 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.1355>>.
- FISHER, D. S.; LEE, P. A. Relation between conductivity and transmission matrix. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 23, p. 6851–6854, Jun 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.23.6851>>.
- FRAHM, K.; PICHARD, J.-L. Magnetoconductance of ballistic chaotic quantum dots: A brownian motion approach for the  $s$ -matrix. *Journal de Physique I*, EDP Sciences, v. 5, n. 7, p. 847–876, jul. 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/jp1:1995171>>.
- FULGA, I. C.; HASSLER, F.; AKHMEROV, A. R.; BEENAKKER, C. W. J. Topological quantum number and critical exponent from conductance fluctuations at the quantum hall plateau transition. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 84, p. 245447, Dec 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.245447>>.
- GEIM, A. K.; MAIN, P. C.; BETON, P. H.; EAVES, L.; BEAUMONT, S. P.; WILKINSON, C. D. W. Breakdown of universal scaling of conductance fluctuations in high magnetic fields. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 69, p. 1248–1251, Aug 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.69.1248>>.
- GONZÁLEZ, I. R. R.; LIMA, B. C.; PINCHEIRA, P. I. R.; BRUM, A. A.; MACÊDO, A. M. S.; VASCONCELOS, G. L.; MENEZES, L. de S.; RAPOSO, E. P.; GOMES, A. S. L.; KASHYAP, R. Turbulence hierarchy in a random fibre laser. *Nature Communications*, Nature, v. 8, p. 15731, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/ncomms157319>>.
- GROTH, C. W.; WIMMER, M.; AKHMEROV, A. R.; WAIN TAL, X. Kwant: a software package for quantum transport. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 6, p. 063065, jun 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/6/063065>>.
- GRUZBERG, I. A.; KLÜMPER, A.; NUDING, W.; SEDRAKYAN, A. Geometrically disordered network models, quenched quantum gravity, and critical behavior at quantum hall plateau transitions. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 95, p. 125414, Mar 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.95.125414>>.
- HATSUDA, Y.; KATSURA, H.; TACHIKAWA, Y. Hofstadter's butterfly in quantum geometry. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 18, n. 10, p. 103023, oct 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/10/103023>>.
- HEGGER, H.; HUCKESTEIN, B.; HECKER, K.; JANSSEN, M.; FREIMUTH, A.; RECKZIEGEL, G.; TUZINSKI, R. Fractal conductance fluctuations in gold nanowires. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 77, p. 3885–3888, Oct 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.3885>>.
- HOFSTADTER, D. R. Energy levels and wave functions of bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 14, p. 2239–2249, Sep 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.14.2239>>.
- HUANG, K. S.; RAGHU, S.; KUMAR, P. Numerical study of a dual representation of the integer quantum hall transition. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 126, p. 056802, Feb 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.056802>>.

HUANG, L.; XU, H.-Y.; GREBOGI, C.; LAI, Y.-C. Relativistic quantum chaos. *Physics Reports*, v. 753, p. 1–128, 2018. ISSN 0370-1573. Relativistic Quantum Chaos. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157318301480>>.

Humanitarian Data Exchange. *Novel Coronavirus (COVID-19) Cases Data*. 2020. <<https://data.humdata.org/dataset/novel-coronavirus-2019-ncov-cases>>. Accessed: 2021-01-30.

JACQUOD, P.; WHITNEY, R. S.; MEAIR, J.; BÜTTIKER, M. Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 86, p. 155118, Oct 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.86.155118>>.

JALABERT, R. A.; BARANGER, H. U.; STONE, A. D. Conductance fluctuations in the ballistic regime: A probe of quantum chaos? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 65, p. 2442–2445, Nov 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.2442>>.

JANSSEN, M. *Fluctuations and Localization in Mesoscopic Electron Systems*. WORLD SCIENTIFIC, 2001. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/4335>>.

KANTELHARDT, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN, S.; BUNDE, A.; STANLEY, H. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 316, n. 1, p. 87–114, 2002. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102013833>>.

KETZMERICK, R. Fractal conductance fluctuations in generic chaotic cavities. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 54, p. 10841–10844, Oct 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.54.10841>>.

KLITZING, K. v.; DORDA, G.; PEPPER, M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 45, p. 494–497, Aug 1980. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.494>>.

KOSHINO, M.; AOKI, H.; KUROKI, K.; KAGOSHIMA, S.; OSADA, T. Hofstadter butterfly and integer quantum hall effect in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 86, p. 1062–1065, Feb 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.1062>>.

KUIPERS, J.; RICHTER, K. Transport moments and andreev billiards with tunnel barriers. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 5, p. 055101, jan 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/5/055101>>.

LANDAUER, R. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM Journal of Research and Development*, v. 1, n. 3, p. 223–231, 1957.

LAUGHLIN, R. B. Quantized hall conductivity in two dimensions. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 23, p. 5632–5633, May 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.23.5632>>.

LEE, P. A.; STONE, A. D. Universal conductance fluctuations in metals. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 55, p. 1622–1625, Oct 1985. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.55.1622>>.

LEE, P. A.; STONE, A. D.; FUKUYAMA, H. Universal conductance fluctuations in metals: Effects of finite temperature, interactions, and magnetic field. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 35, p. 1039–1070, Jan 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.35.1039>>.

LEVINSON, I. B.; SUKHORUKOV, E. V.; KHAETSKII, A. V. Oscillations in the transverse magnetoresistance of a point contact. *JETP LETTERS*, AMER INST PHYSICS CIRCULATION FULFILLMENT DIV, 500 SUNNYSIDE BLVD, WOODBURY . . . , v. 45, n. 8, p. 488–490, 1987.

MACÊDO, A. M. S.; GONZÁLEZ, I. R. R.; SALAZAR, D. S. P.; VASCONCELOS, G. L. Universality classes of fluctuation dynamics in hierarchical complex systems. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 95, p. 032315, Mar 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.032315>>.

MACEDO-JUNIOR, A. F.; MACÊDO, A. M. S. Universal transport properties of quantum dots with chiral symmetry. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 66, p. 041307, Jul 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.041307>>.

MACEDO-JUNIOR, A. F.; MACÊDO, A. M. S. Universal transport properties of asymmetric chiral quantum dots. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 77, p. 165313, Apr 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.165313>>.

MANDELBROT, B. B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 62, n. 2, p. 331–358, 1974.

MATHAI, A. A pathway to matrix-variate gamma and normal densities. *Linear Algebra and its Applications*, v. 396, p. 317–328, 2005. ISSN 0024-3795. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379504004239>>.

MEHTA, M. L. *Random matrices*. [S.l.]: Elsevier, 2004.

MUDRY, C.; BROUWER, P. W.; FURUSAKI, A. Random magnetic flux problem in a quantum wire. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 59, p. 13221–13234, May 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.59.13221>>.

MUDRY, C.; BROUWER, P. W.; FURUSAKI, A. Crossover from the chiral to the standard universality classes in the conductance of a quantum wire with random hopping only. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 62, p. 8249–8268, Sep 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.62.8249>>.

MÜLLER, S.; HEUSLER, S.; BRAUN, P.; HAAKE, F.; ALTLAND, A. Semiclassical foundation of universality in quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 93, p. 014103, Jul 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.014103>>.

NEMEC, N.; CUNIBERTI, G. Hofstadter butterflies of carbon nanotubes: Pseudofractality of the magnetoelectronic spectrum. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 74, p. 165411, Oct 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.74.165411>>.

NETO, A. H. C.; GUINEA, F.; PERES, N. M. R.; NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K. The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 81, p. 109–162, Jan 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.109>>.

NEVVILLE, M.; STENSITZKI, T.; ALLEN, D.; INGARGIOLA, A. Non-linear least-squares minimization and curve-fitting for Python. *Chicago, IL*, 2015.

NOVAES, M. Combinatorial problems in the semiclassical approach to quantum chaotic transport. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 9, p. 095101, feb 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/9/095101>>.

PEIERLS, R. Zur theorie des diamagnetismus von leitungselektronen. *Zeitschrift für Physik*, v. 80, n. 11, p. 763–791, Nov 1933. ISSN 0044-3328. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01342591>>.

PELED, E.; SHAHAR, D.; CHEN, Y.; SIVCO, D. L.; CHO, A. Y. Observation of a quantized hall resistivity in the presence of mesoscopic fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 90, p. 246802, Jun 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.246802>>.

PESSOA, N. L.; BARBOSA, A. L. R.; VASCONCELOS, G. L.; MACEDO, A. M. S. Multifractal magnetoconductance fluctuations in mesoscopic systems. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 104, p. 054129, Nov 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.104.054129>>.

PUSCHMANN, M.; CAIN, P.; SCHREIBER, M.; VOJTA, T. Integer quantum hall transition on a tight-binding lattice. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 99, p. 121301, Mar 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.121301>>.

RICHTER, K.; SIEBER, M. Semiclassical theory of chaotic quantum transport. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 89, p. 206801, Oct 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.89.206801>>.

ROTTER, S.; GIGAN, S. Light fields in complex media: Mesoscopic scattering meets wave control. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 89, p. 015005, Mar 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.015005>>.

SÁ, L. G. C. S.; BARBOSA, A. L. R.; RAMOS, J. G. G. S. Conductance peak density in disordered graphene topological insulators. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 102, p. 115105, Sep 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.115105>>.

SACHRAJDA, A. S.; KETZMERICK, R.; GOULD, C.; FENG, Y.; KELLY, P. J.; DELAGE, A.; WASILEWSKI, Z. Fractal conductance fluctuations in a soft-wall stadium and a sinai billiard. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 80, p. 1948–1951, Mar 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.1948>>.

SALAZAR, D. S. P.; VASCONCELOS, G. L. Stochastic dynamical model of intermittency in fully developed turbulence. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 82, p. 047301, Oct 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.047301>>.

SANTANA, F. A. F.; SILVA, J. M. da; VASCONCELOS, T. C.; RAMOS, J. G. G. S.; BARBOSA, A. L. R. Spin hall angle fluctuations in a device with disorder. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 102, p. 041107, Jul 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.041107>>.

SHARVIN, Y. V. A Possible Method for Studying Fermi Surfaces. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, v. 21, p. 655, set. 1965.

SHURYAK, E. V.; VERBAARSCHOT, J. Random matrix theory and spectral sum rules for the dirac operator in qcd. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 560, n. 1, p. 306–320, 1993.

SINAI, Y. G. On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, v. 153, p. 1261–1264, 1963.

SINAI, Y. G. Dynamical systems with elastic reflections. *Russian Mathematical Surveys*, IOP Publishing, v. 25, n. 2, p. 137–189, apr 1970. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070/rm1970v025n02abeh003794>>.

STREDA, P. Quantised hall effect in a two-dimensional periodic potential. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, IOP Publishing, v. 15, n. 36, p. L1299–L1303, dec 1982. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0022-3719/15/36/006>>.

SUYARI, H. Mathematical structures derived from the q-multinomial coefficient in tsallis statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 368, n. 1, p. 63–82, 2006. ISSN 0378-4371. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437106001191>>.

TAYLOR, R. P.; MICOLICH, A. P.; NEWBURY, R.; FROMHOLD, T. M. Correlation analysis of self-similarity in semiconductor billiards. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 56, p. R12733–R12736, Nov 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.56.R12733>>.

TAYLOR, R. P.; MICOLICH, A. P.; NEWBURY, R.; BIRD, J. P.; FROMHOLD, T. M.; COOPER, J.; AOYAGI, Y.; SUGANO, T. Exact and statistical self-similarity in magnetoconductance fluctuations: A unified picture. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 58, p. 11107–11110, Nov 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.58.11107>>.

TAYLOR, R. P.; NEWBURY, R.; SACHRAJDA, A. S.; FENG, Y.; COLERIDGE, P. T.; DETTMANN, C.; ZHU, N.; GUO, H.; DELAGE, A.; KELLY, P. J.; WASILEWSKI, Z. Self-similar magnetoresistance of a semiconductor sinai billiard. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 78, p. 1952–1955, Mar 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.1952>>.

THOULESS, D. J.; KOHMOTO, M.; NIGHTINGALE, M. P.; NIJS, M. den. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 49, p. 405–408, Aug 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.405>>.

TIMP, G.; CHANG, A. M.; MANKIEWICH, P.; BEHRINGER, R.; CUNNINGHAM, J. E.; CHANG, T. Y.; HOWARD, R. E. Quantum transport in an electron-wave guide. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 59, p. 732–735, Aug 1987. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.732>>.

TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, v. 52, n. 1, p. 479–487, Jul 1988. ISSN 1572-9613. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01016429>>.

TSALLIS, C. What should a statistical mechanics satisfy to reflect nature? *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 193, n. 1, p. 3–34, 2004. ISSN 0167-2789. Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278904000193>>.

TSALLIS, C.; TIRNAKLI, U. Predicting covid-19 peaks around the world. *Frontiers in Physics*, v. 8, p. 217, 2020. ISSN 2296-424X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fphy.2020.00217>>.

UNIVERSITY Johns Hopkins. *Coronavirus COVID-19 Global Cases by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University (JHU)*. 2021. <<https://coronavirus.jhu.edu/map.html>>. Accessed: 2021-01-30.

VASCONCELOS, G. L.; BRUM, A. A.; ALMEIDA, F. A. G.; MACÊDO, A. M. S.; DUARTE-FILHO, G. C.; OSPINA, R. Standard and anomalous waves of covid-19: A multiple-wave growth model for epidemics. *Brazilian Journal of Physics*, v. 51, n. 6, p. 1867–1883, Dec 2021. ISSN 1678-4448. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s13538-021-00996-3>>.

VASCONCELOS, G. L.; MACÊDO, A. M.; OSPINA, R.; ALMEIDA, F. A.; DUARTE-FILHO, G. C.; BRUM, A. A.; SOUZA, I. C. Modelling fatality curves of covid-19 and the effectiveness of intervention strategies. *PeerJ*, PeerJ Inc., v. 8, p. e9421, 2020.

VERBAARSCHOT, J. Spectrum of the qcd dirac operator and chiral random matrix theory. *Physical Review Letters*, APS, v. 72, n. 16, p. 2531, 1994.

VERÇOSA, T.; DOH, Y.-J.; RAMOS, J. G. G. S.; BARBOSA, A. L. R. Conductance peak density in nanowires. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 98, p. 155407, Oct 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.155407>>.

VERÇOSA, T.; DOH, Y.-J.; RAMOS, J. G. G. S.; BARBOSA, A. L. R. Conductance peak density in nanowires. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 98, p. 155407, Oct 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.155407>>.

WANG, Z.; JOVANOVIĆ, B.; LEE, D.-H. Critical conductance and its fluctuations at integer hall plateau transitions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 77, p. 4426–4429, Nov 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.4426>>.

WASHBURN, S.; WEBB, R. A. Aharonov-bohm effect in normal metal quantum coherence and transport. *Advances in Physics*, Taylor Francis, v. 35, n. 4, p. 375–422, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00018738600101921>>.

WEES, B. J. van; HOUTEN, H. van; BEENAKKER, C. W. J.; WILLIAMSON, J. G.; KOUWENHOVEN, L. P.; MAREL, D. van der; FOXON, C. T. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 60, p. 848–850, Feb 1988. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.848>>.

WURM, J.; RYCERZ, A.; ADAGIDELI, i. d. l. m. c.; WIMMER, M.; RICHTER, K.; BARANGER, H. U. Symmetry classes in graphene quantum dots: Universal spectral statistics, weak localization, and conductance fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 102, p. 056806, Feb 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.056806>>.

XIONG, S.; STONE, A. D. Universal conductance fluctuations in the presence of Landau quantization. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 68, p. 3757–3760, Jun 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.3757>>.