CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS UFPE

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

DE ENGENHARIA CIVIL

ESTUDO DO COEFICIENTE DE IMPACTO EM PONTES DE CONCRETO

Bruno Sampaio Alves

Orientador Prof. Dr. Paulo Marcelo V. Ribeiro

RECIFE

2015

BRUNO SAMPAIO ALVES

ESTUDO DO COEFICIENTE DE IMPACTO EM PONTES DE CONCRETO

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado à Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Área de concentração: Engenharia Civil e Engenharia Estrutural

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ribeiro

RECIFE

2015

Catalogação na fonte

Bibliotecária Valdicéa Alves, CRB-4 / 1260

A474e Alves. Bruno Sampaio

Estudo do coeficiente de impacto em pontes de Concreto. / Bruno Sampaio Alves. - Recife: O Autor, 2015.

97folhas, Ils. e Tab.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ribeiro.

TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Graduação em Engenharia Civil, 2015.

Inclui Referências, Apêndices e Anexos.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE PERNAMBUCO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ATA DA DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO PARA CONCESSÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO CIVIL

CANDIDATO(S): 1 - BRUNO SAMPAIO ALVES

BANCA EXAMINADORA:
Orientador: Paulo Marcelo Vieira Ribeiro
Examinador 1: Ézio da Rocha Araújo
Examinador 2: Paulo de Araújo Regis

TÍTULO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO:

APLICAÇÃO DA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS PARA ESTUDO DO COEFICIENTE DE IMPACTO EM PONTES DE CONCRETO

LOCAL: CTG - UFPE
DATA: 08/07/2015 HORÁRIO DE INICIO: 17:00 **HORAS.**

Em sessão pública, após exposição de cerca de.....minutos, o(s) candidato(s) foi (foram) argüido(s) oralmente pelos membros da banca, sendo considerado(s):
1) (X) aprovado(s), pois foi demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização no tema da monografia e o texto do trabalho aceito
(X) Sem revisões.
( ) Com revisões, a serem feitas e verificadas pelo orientador no prazo máximo de 30 dias.(o verso da folha da ata poderá ser utilizado para pontuar revisões).

2) (..) reprovado(s).

Na forma regulamentar foi lavrada a presente ata que é assinada pelos membros da banca e pelo(s) candidato(s).

Recife, 08 de julho de 2015

Orientador:.....

Examinador 1.....

Examinador 2.....

Candidato 1.....

Candidato 2 .....

Coordenação do Curso de Engenharia Civil-Dcivil
Rua Acadêmico Hélio Ramos s/nº. Cidade Universitária. Recife-PE CEP: 50740-530.
Fones: (081)2126.8220/8221 Fone/fax: (081)2126.8219.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a toda minha família, mas especialmente aos meus pais e meu irmão por todo o apoio dado durante toda a minha vida para que alcançasse meus objetivos e crescesse como pessoa.

A todos os amigos do curso de graduação de Engenharia Civil por sempre estarem presentes e dispostos a ajudar e motivar uns aos outros durante todos estes anos.

A Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) por proporcionar uma formação profissional e humana.

Aos professores do curso de Engenharia Civil pelos ensinamentos passados durante estes cinco anos de curso.

Ao professor Ézio da Rocha Araújo da UFPE e à professora Eliane Maria Lopes Carvalho da COPPE pela paciência, apoio, material de apoio cedido e pelo conhecimento repassado.

Agradecimento especial ao professor Paulo Marcelo Ribeiro, pela dedicação, paciência, convívio e incentivo como professor e orientador.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo comparar a valor do coeficiente de impacto vertical calculado para pontes rodoviárias de acordo com a NBR 7188:2013, com o acréscimo de esforços obtido quando se comparado com a análise dinâmica da estrutura. Esse coeficiente de impacto nada mais é do que uma majoração dos esforços causados pela carga estática do veículo tipo passando pela estrutura para simular o efeito dinâmico da carga, da massa em movimento e da suspensão dos veículos automotores, procedimento este que é largamente utilizado na pratica da Engenharia Estrutural. Para se fazer essa comparação serão analisadas pontes com diferentes comprimentos de vão em um modelo de elementos finitos para se obter os esforços desejados. A importância desse tema advém da recente atualização da antiga norma NBR 7188:1982 para a versão 2013. Foi analisada a influência que a velocidade, o amortecimento e a passagem consecutiva de veículos tem sobre o fator de amplificação dinâmico da estrutura da ponte. Conclui-se ao fim das análises que o aumento da velocidade e o aumento de veículos passantes amplificam a resposta dinâmica da ponte, por outro lado, o aumento do amortecimento o reduz. Por fim, concluiu-se que os fatores de amplificação dinâmica (FAD) introduzidos pela nova norma brasileira estão a favor da segurança para os casos estudados. Os casos de vãos maiores, nos quais a rigidez da estrutura é menor, por outro lado, não permitem a aplicação do coeficiente de impacto e, portanto, exigem uma análise dinâmica detalhada.

Palavras-chave: Pontes. Coeficiente de impacto. Dinâmica das estruturas. Análise estrutural. Concreto protendido.

ABSTRACT

This study aims to compare the value of the vertical impact coefficient for bridges according to the Brazilian code of practice, with the results found when studying the dynamic analysis of the structure. This impact coefficient is applied to the static loads of the vehicle type to simulate the dynamic effect of the moving load, the moving mass and suspension of motor vehicles, a procedure that is widely used in the practice of Structural Engineering. To make this comparison, a finite element model will be used to analyze bridges with different lengths in span. The importance of this theme came from the recent update of the old NBR 7188: 1982 for the 2013 version. The influence that the speed, damping and consecutive passage of vehicles have on the dynamic amplification factor of the bridge structure were analyzed. It was concluded, at the end of the analysis, that the increasing in speed and in the number of vehicles passing through the structure amplify the dynamic response of the bridge, on the other hand, increased damping reduces this response. Finally, it was concluded that the dynamic amplification factor introduced by the new Brazilian code of practice are on the safe side for all cases studied. The case of long spans in which the structural stiffness is lower, on the other hand, do not allow the application of the impact coefficient, and, therefore, require a detailed dynamics analysis.

Keywords: Bridges. Impact coefficient. Structures dynamics. Structural analysis. Prestressed concrete.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 9

1.1. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA 9
1.2. JUSTIFICATIVA 9
1.3. METODOLOGIA 10
1.4. LIMITAÇÕES 11
1.5. CONTRIBUIÇÕES 11

2. ESTUDO DA ARTE 12

2.1. CONTRIBUIÇÕES DE OUTROS AUTORES 12
2.2. ASPECTOS TEÓRICOS DA DINÂMICA DAS ESTRUTURAS 14
2.2.1. PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT 14
2.2.2. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO 15
2.2.3. FREQUÊNCIA NATURAL 16
2.2.4. MODOS DE VIBRAÇÃO 16
2.2.5. TIPO DE EXCITAÇÃO 17
2.2.6. AMORTECIMENTO 18
2.2.7. RESPOSTA DINÂMICA (ANALISE TRANSIENTE) 21
2.2.8. FATOR DE AMPLIFICAÇÃO DINÂMICA 23
2.2.9. RESSONÂNCIA 23
2.2.10. CONTROLE DE VIBRAÇÕES 24
2.2.11. FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA CARGA MÓVEL SOBRE VIGA 26
2.3. PRESCRIÇÕES NORMATIVAS E VEÍCULOS DE CARGA 29
2.3.1. NBR 7187:2003 – PROJETO DE PONTES DE CONCRETO ARMADO E CONCRETO PROTENDIDO 29
2.3.2. NBR 7188:2013 – CARGA MÓVEL RODOVIÁRIA E DE PEDESTRES EM PONTES, VIADUTOS, PASSARELAS E OUTRAS ESTRUTURAS 29
2.4. NORMAS ESTRANGEIRAS 34
2.4.1. NORMA AMERICANA - AASHTO 34
2.4.2. BRITISH STANDARD 34
2.4.3. EUROCODE 35
2.5. COMPARAÇÃO ENTRE NORMAS NACIONAIS E ESTRANGEIRAS 36

3. MODELAGEM NUMÉRICA DOS EFEITOS DINÂMICOS EM PONTES 38

3.1. BREVE FUNDAMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) 38
3.2. MATLAB 40
3.3. SCRIPT DO MATLAB 41

4. ESTUDO DE CASO 42

4.1. MODELOS ESTUDADOS **42**
4.1.1. AS SEÇÕES TRANSVERSAIS DAS PONTES 42
4.1.2. PROPRIEDADES DO MATERIAL CONSIDERADO 44
4.1.3. VELOCIDADE DIRETRIZ 45
4.1.4. MODELO DE CARREGAMENTO 45
4.2. RESULTADOS **45**
4.2.1. VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO E ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE COMBOIOS 45
4.2.2. ANÁLISE DE VÃOS MENORES 55
4.2.3. ANÁLISE DE VÃOS MAIORES 60
4.3. DISCUSSÕES **66**

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES **70**

REFERÊNCIAS **72**

ANEXO 1: CRITÉRIO DO EUROCODE 1 PARTE 2 PARA DEFINIR A NECESSIDADE OU NÃO DE ANÁLISE DINÂMICA EM PONTES **76**

ANEXO 2: ESPECIFICAÇÕES DA AASHTO QUANTO A SEÇÃO TRANSVERSAL **80**

ANEXO 3: ESPECIFICAÇÕES DA CALTRANS QUANTO A SEÇÃO TRANSVERSAL **81**

ANEXO 4: ESPECIFICAÇÕES DO LEONHARDT QUANTO A SEÇÃO TRANSVERSAL **82**

ANEXO 5: ESPECIFICAÇÕES DO PFEIL QUANTO A SEÇÃO TRANSVERSAL **84**

ANEXO 6: SCRIPT TRADUZIDO DO MATLAB PARA CARGA MÓVEL SOBRE VIGA BIAPOIADA ELABORADO POR (HÜGÜL, 2005) **85**

APÊNDICE A: CRONOGRAMA DE ATIVIDADES **91**

APÊNDICE B: FORMULAÇÃO ANALÍTICA PARA CARGA MÓVEL APRESENTADA NO MATHCAD **93**

1. INTRODUÇÃO

1.1. Apresentação do problema

De acordo com o Pfeil (1979), "denomina-se ponte a obra destinada a transposição de obstáculos à continuidade do leito de uma via, tais como rios, braços de mar, vales profundos, outras vias etc. Quando a ponte tem por objetivo a transposição de vales, outras vias ou obstáculos em geral não constituídos de água é, comumente, denominada viaduto".

Esse tipo de obra de arte está muito presente nos dias de hoje em todas as partes do mundo. Essa estrutura, entretanto, é de grande complexidade e exige um grande empenho do engenheiro projetista na sua elaboração, pois sua concepção e seu dimensionamento exigem muita experiência, competência e dedicação deste profissional.

No que concerne ao dimensionamento de pontes, diversos tipos de carregamento são considerados. Entre eles, podemos citar o efeito do vento, temperatura, retração do concreto, protensão, entre outros. Dentre esses carregamentos, uma das principais parcelas responsáveis pelos esforços nas pontes diz respeito à circulação de veículos sobre essas estruturas. Diferentemente de outros tipos de solicitações como a protensão e a variação de temperatura, esse tipo de carregamento trata-se de um esforço dinâmico e deve ser analisado de forma específica.

As atuais normas brasileiras para dimensionamento de pontes rodoviárias (NBR 7187:2003 e NBR 7188:2013) permitem o cálculo dos esforços advindos deste tipo de carregamento considerando-o de forma estática e posteriormente majorando-se os esforços encontrados com o chamado Coeficiente de Impacto. A razão para essa simplificação é dada visto a complexidade exigida pela análise dinâmica.

O trabalho aqui presente tem a finalidade de avaliar quão boa é a aproximação feita utilizando o coeficiente de impacto em comparação com análise dinâmica da estrutura. Para isso, alguns modelos de pontes serão utilizados para se chegar a esta conclusão.

1.2. Justificativa

O último trabalho encontrado avaliando a representatividade do coeficiente de impacto frente à análise dinâmica data do ano de 2008 (FILHO, 2008). Tendo em vista que a norma NBR 7188 utilizada na época ainda estava na sua versão de 1982, e em 2013 a mesma foi atualizada, ainda não há trabalhos que avaliem o novo coeficiente de impacto nem com a norma antiga nem com o caso dinâmico. A importância deste trabalho, portanto, advém deste fato.

1.3. Metodologia

Para se avaliar a significância dos coeficientes de impacto da NBR 7188:2013 e da NBR 7187:2003 se analisará pontes biapoiadas com vãos (20, 30, 40, 60, 70 e 80 metros). Essas estruturas serão analisadas quanto a passagem de uma carga móvel equivalente a um veículo normativo passando sobre as mesmas. Além disso serão analisadas as influências da velocidade e do amortecimento sobre a deformação dessas estruturas. A figura abaixo ilustra o modelo de estrutura analisada.

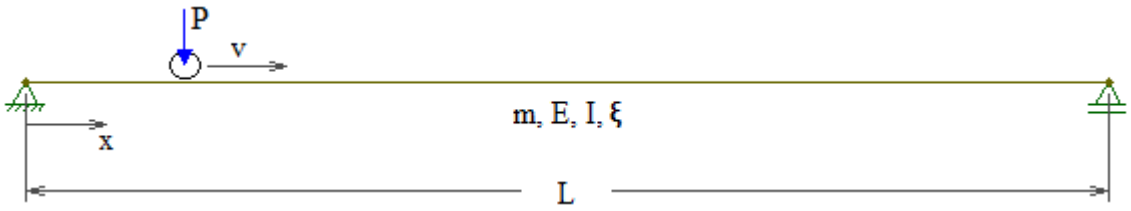


Figura 1.1 - Modelo de Ponte sobre a ação de carga móvel

Por fim, foi analisado, traduzido e comentado um código computacional, de (HÜGÜL, 2005), originalmente em turco, para análise desse tipo de estrutura de forma numérica. Este programa usa o método dos elementos finitos associado a integração direta para resolver problemas de dinâmica das estruturas. Tal código será validado por meio de formulação analítica, usado para o estudo de comboios trafegando sobre a estrutura e disponibilizado para futuros trabalhos sobre análise de carga móvel.

A tabela a seguir apresenta de forma sequencial a metodologia aplicada neste trabalho.

Tabela 1.1 - Apresentação da metodologia empregada

Etapa	Descrição	Objetivo
1	**1.** Validação do programa do autor (HÜGÜL, 2005) por meio da formulação analítica **2.** Utilização do programa para análise da influência de comboios	Inferir a influência da passagem de cargas moveis consecutivas sobre o Fator de Amplificação Dinâmica (FAD).
2	**1.** Aplicação do modelo analítico para se calcular o FAD de pontes de pequenos vãos.	Verificar a influência da velocidade e amortecimento sobre o FAD de pontes de pequenos vãos.
3	**1.** Aplicação do modelo analítico para se calcular o FAD de pontes de maiores vãos.	Verificar a influência da velocidade e amortecimento sobre o FAD de pontes de pequenos vãos.

1.4. Limitações

Este trabalho terá as seguintes limitações:

- Se fará a análise de pontes com um único vão biapoiado;
- Restringir-se-á a pontes de concreto, com duas faixas de rolamento e vãos de 20, 30, 40, 60, 70 e 80 metros, como foi anteriormente dito. Evitou-se analisar pontes de maiores vãos pois, na prática, sua execução, mesmo que em concreto protendido, pode se tornar antieconômica;
- Considerou-se o material homogêneo e isotrópico;
- Considerou-se a inércia bruta da seção, desprezando-se qualquer fissuração da estrutura;
- Restringiu-se a aplicação do veículo normativo representado apenas por uma carga pontual;
- Nossas análises se limitarão a análise dinâmica linear da estrutura;
- Serão consideradas as amplificações produzidas apenas pelo carregamento, desconsiderando a iteração veículo-estrutura. Deste modo, também não faz parte deste trabalho analisar o efeito de irregularidades na pista;
- A formulação analítica aqui apresentada se restringe ao caso de amortecimento pequeno (valores de taxa de amortecimento muito inferiores a uma unidade);
- A estrutura será constituída apenas de vigas tipo ‘T’ ou uma viga com seção caixão a ser apresentada mais à frente
- Foi admitido apenas veículos com velocidades condizentes com a realidade brasileira (não considerando assim, veículos com velocidades acima de 120km/h, por exemplo, que não devem ocorrer em território nacional);
- As seções transversais também foram definidas de acordo com as exigências normativas nacionais e internacionais.

1.5. Contribuições

- Código do MATLAB traduzido, comentado e com pequenas otimizações e correções;
- Avaliação normativa com equações analíticas;
- Avaliação normativa com soluções numéricas.

2. ESTUDO DA ARTE

2.1. Contribuições de Outros Autores

Como a introdução do coeficiente de impacto simplifica bastante os cálculos de esforços em pontes, o mesmo pode, eventualmente, não considerar certos esforços adicionais que, para alguns casos específicos possam ser de maior importância. Para isso, os seguintes autores apresentam trabalhos que avaliam certos aspectos do efeito dinâmico em pontes.

Filho (2008), em seu trabalho de conclusão de curso, avaliou o coeficiente de impacto utilizado no cálculo de pontes isostáticas de vãos de 20, 30 e 40 metros rodoviárias obtido seguindo as prescrições da NBR 7187:2003 com os resultados da análise dessas pontes via análise dinâmica de estruturas. O mesmo chegou à conclusão que, para aquela norma, os resultados obtidos indicaram que, de forma geral, o cálculo tradicional através da adoção do coeficiente de impacto era satisfatória e produzia resultados a favor da segurança. O mesmo afirma em seu trabalho que, "exceto para os casos dos vãos menores (20, 30 e 40 metros) com velocidade do veículo de 100km/h, os Fatores de Amplificação Dinâmica (FAD) são inferiores aos coeficientes de impactos normativos". "Pode-se então concluir que a adoção de coeficientes de impacto para baixas velocidades e vãos maiores tende a ser conservadora, uma vez que as forças inerciais envolvidas são de menor magnitude."

Almeida (2006), em sua dissertação de mestrado, propôs analisar a resposta dinâmica de pontes rodoviárias devido à travessia de comboios de diversos tipos de veículos sobre tabuleiros irregulares dessas obras de arte. Este autor simulou "o tabuleiro das obras de arte por uma viga modelada com base em elementos finitos de barras unidimensionais, com massas concentradas em seus nós e flexibilidade distribuída" e definiu as irregularidades da pista "por um modelo matemático não-determinístico, com base na densidade espectral do perfil do pavimento, obtida experimentalmente". O autor afirma que "claramente constata-se que as ações provenientes das irregularidades da pista são substancialmente mais severas que as da mobilidade da carga", chegando, "em situações extremas, relacionadas a pavimentos de qualidade inferior, a mais de quinze vezes os valores admitidos de projeto". Por fim, o autor conclui seu trabalho dizendo que "propor recomendações de projeto para atender às solicitações dinâmicas oriundas do efeito das irregularidades superficiais seria totalmente antieconômico e fora de propósito", desse modo, o mesmo recomenda, "como solução absolutamente inadiável para o problema, a realização de uma conservação permanente, preventiva e, ainda, corretiva, assegurando superfícies de rolamento das obras de arte".

Figueiredo dos Santos (2007), na sua tese de doutorado, investigou os efeitos da interação dinâmica entre veículo, pavimento e estrutura, além de se avaliar o desempenho de sistemas de controle dinâmico para redução das vibrações. O autor concluiu com seus estudos que, quando a resposta dinâmica é dominada por mais de um modo de vibração,

a solução adequada para redução das amplitudes de vibração requer, em geral, a utilização de múltiplos Atenuadores Dinâmicos Sincronizados, com pares, ou grupos, calibrados nas frequências dos picos dominantes de amplitude.

Calçada (2001), em sua tese de doutorado, fez uma avaliação experimental e numérica de efeitos dinâmicos de cargas de tráfego em pontes rodoviárias. O autor forneceu diversos dados de experimentos e cálculos envolvendo o Fator de Amplificação Dinâmica para várias combinações de vãos, veículos e velocidades, assim como fatores adicionais capazes de influenciar no FAD.

O relatório final da pesquisa sobre os critérios de otimização de projetos de pontes, elaborado por LSE (2010), a partir de espectros de aceleração induzidas por veículos nos tabuleiros entregue à concessionária da rodovia presidente Dutra em 2010 questionou que o coeficiente de impacto previsto na norma NBR-7187 (2003) ao concluir que os FAD encontrados eram significantemente maiores do que o primeiro. Esse estudo também indica fatores que deveriam ser incluídos no cálculo do coeficiente de impacto, tal como a velocidade do veículo e frequência natural.

Lopes (2008), em sua dissertação de mestrado, analisou a influência da velocidade, do espaçamento e do número de veículos sobre a resposta dinâmica de pontes rodoviárias de concreto armado. O mesmo concluiu que, de modo geral, os maiores valores dos fatores de amplificação máximos médios, foram obtidos por meio da travessia de comboios de poucos veículos. O mesmo também afirma que os valores de velocidade para os quais esse fator é maior está na faixa entre 40km/h e 70km/h, com maiores espaçamentos entre veículos. Por fim, esse autor também chama atenção para a ressonância da ponte: quando a frequência natural do sistema veículo-viga coincidir com a frequência das travessias.

Luchi (2006), na sua tese de doutorado, apresentou uma reavaliação do trem-tipo à luz das cargas reais nas rodovias brasileiras. Esse material foi um dos utilizados pela comissão da ABNT ao reavaliar a antiga norma NBR 7188. Ele menciona o fato de que pouco esforço se fez até hoje em termos de pesquisas para se ter um trem-tipo genuinamente brasileiro, visto que o atualmente utilizado é baseado na norma alemã DIN 1072. O autor avaliou tanto a antiga norma brasileira, assim como a norma europeia e americana de carga móvel e seus dados foram de fundamental importância para a elaboração deste trabalho.

Souza de Melo (2007) em sua dissertação de mestrado ressalta que a qualidade do pavimento é de grande influência na resposta dinâmica das estruturas, mas que a introdução de um ressalto inicial pode conduzir a fatores de ampliação dinâmicos da ordem de 4,0. O autor também ressalta ao fato de que apesar de veículos mais leves produzirem FAD's maiores, os veículos maiores são os que produzem os maiores deslocamentos dinâmicos. Os resultados de seu trabalho também mostram que os deslocamentos devido ao carregamento da classe 45 são maiores que os obtidos para passagem de veículo pesado de 3 eixos. O carregamento classe 45, portanto, se apresenta mais conservador para maiores vãos.

2.2. Aspectos Teóricos da Dinâmica das Estruturas

Este trecho deste capítulo tem como objetivo apresentar os aspectos básicos da dinâmica das estruturas para que o leitor se familiarize com o seu conteúdo. Para tal propósito foram utilizados os livros presentes na lista de referências. As equações a seguir estão apresentadas de forma breve e objetiva, uma vez que seu desenvolvimento foge ao escopo deste trabalho. Caso se deseje obter mais detalhes sobre a dedução de tais formulações, favor consultar as referências Chopra (2012), Clough (2003), Soriano (2014), Silva (2013), Humar (2002) e Frýba (1972) as quais foram utilizadas na elaboração deste material e constituem um excelente material para estudo da dinâmica das estruturas.

2.2.1. Princípio de D'Alembert

O princípio de D'Alembert é um dos pilares da lei fundamental de movimento. Esse princípio é a analogia dinâmica ao princípio dos trabalhos virtuais para forças estáticas em um sistema. O mesmo afirma que a soma das diferenças entre as forças atuando em um sistema de partículas de massa e a derivada no tempo dos momentos do sistema ao longo de qualquer deslocamento virtual condizente com as restrições do sistema, é zero.

Deste modo, o princípio de D'Alembert é escrito como se segue.

$$\sum_i (F_i - m_i a_i).\, \delta r_i = 0 \tag{2.1}$$

Onde:

i	É um inteiro usado para indicar a variável correspondente a uma determinada partícula do sistema;
F_i	É a força total aplicada (excluindo as forças dos apoios) na partícula de índice i
m_i	É a massa da partícula de índice i;
a_i	É a aceleração da partícula de índice i;
$m_i a_i$	Esse produto representa a derivada no tempo do momento da partícula de índice i;
δr_i	Representa o deslocamento virtual da partícula de índice i, consistente com as restrições aplicadas a mesma.

2.2.2. Equação de movimento

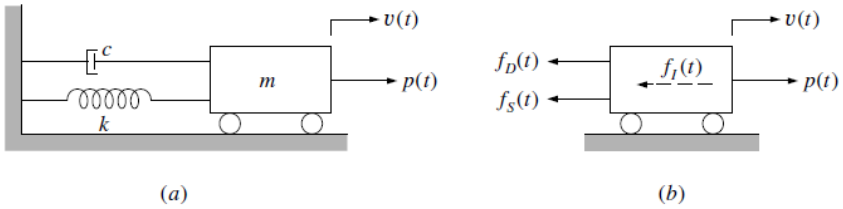


Figura 2.1- Representação de um modelo de 1 único grau de libertada (Extraído de (CLOUGH, 2003))

A equação de movimento para um sistema simples com um único grau de liberdade, mostrado na figura A acima, é mais facilmente formulada ao se aplicar diretamente o princípio d'Alembert. Desta forma, a equação de movimento é meramente uma expressão de equilíbrio entre as essas forças, como se mostra a seguir.

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \tag{2.2}$$

Cada uma das forças apresentadas do lado esquerdo da equação é função do deslocamento ($v(t)$) ou uma de suas derivadas temporais.

De acordo com o princípio d'Alembert, a força inercial é dada por:

$$f_I(t) = m\,\ddot{v}(t) \tag{2.3}$$

Admitiu-se um amortecimento do tipo viscoso, que é o mais usual, a força de amortecimento pode ser dada pela seguinte equação:

$$f_D(t) = c\,\dot{v}(t) \tag{2.4}$$

Por último, a força elástica é dada em função da rigidez da mola e seu alongamento.

$$f_S(t) = k\,v(t) \tag{2.5}$$

Substituindo essas fórmulas na equação inicial, temos:

$$m\,\ddot{v}(t) + c\,\dot{v}(t) + k\,v(t) = p(t) \tag{2.6}$$

Que nada mais é do que a equação de movimento para um sistema simples.

Para se provar esta equação, basta calcular a soma do trabalho virtual exercido por estas forças para um deslocamento infinitesimal de uma partícula (δv).

$$\left(-f_I(t) - f_D(t) - f_S(t) + p(t)\right)\delta v = 0 \tag{2.7}$$

Lembrando que o sinal negativo representa que as forças se opõem ao sentido do movimento. Como o termo δv não é igual a zero, o termo entre parênteses é que deve ser. Deste modo, encontraremos a mesma equação anteriormente apresentada.

2.2.3. Frequência natural

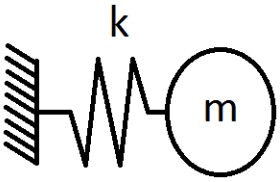


Figura 2.2- Sistema com um grau de Liberdade sem amortecimento

Na condição de vibração livre, a que se entende pelo fato de não haver amortecimento (c = 0) nem força externa atuante (P(t) = 0). Desse modo, para um sistema com um único grau de liberdade tem-se a equação abaixo.

$$m\,\ddot{v}(t) + k\,v(t) = 0 \tag{2.8}$$

Definindo-se um deslocamento inicial ($v = v(0)$) e velocidade inicial ($\dot{v} = \dot{v}(0)$) como condição de contorno, tem-se que a solução da equação anteriormente apresentada é dada por:

$$v(t) = v(o)\cos(\omega t) + \frac{\dot{v}(0)}{\omega} sen(\omega t) \tag{2.9}$$

Onde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.10}$$

A equação solução da equação diferencial evidencia que o sistema executa um movimento de vibração (ou oscilação) em torno de sua posição de equilíbrio estático. Além disso, essa solução evidencia que esse movimento se repete a cada $2\pi/\omega$ segundos, assim sendo, o período desse movimento é dado por $2\pi/\omega$ e é denominado por período natural de vibração. Trata-se portanto de um movimento harmônico simples.

Deste modo, evidencia que a frequência natural do sistema, com base na equação anteriormente descrita é dada por:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2.11}$$

Entretanto, de acordo com Chopra (2012), o termo frequência natural de vibração é usado tanto para f_n como para ω.

O termo *natural*, também de acordo com Chopra (2012), é utilizado para enfatizar o fato que T_n, f_n e ω são propriedades naturais do sistema quando o mesmo pode vibrar livremente sem excitação externa. Como o sistema é linear, essas propriedades são independentes da velocidade inicial e do deslocamento inicial.

2.2.4. Modos de vibração

Em um sistema com múltiplos graus de liberdade, a equação de movimento é similar à anteriormente descrita, com a única diferença de que se está tratando agora de vetores.

$$\vec{m}\ddot{\vec{v}}(t) + \vec{c}\dot{\vec{v}}(t) + \vec{k}\vec{v}\,(t) = \vec{p}(t) \tag{2.12}$$

Mais uma vez, simplificando do caso geral para o caso de vibração livre não amortecida, obtêm-se a equação a seguir:

$$\vec{m}\ddot{\vec{v}}(t) + \vec{k}\vec{v}\,(t) = \vec{0} \tag{2.13}$$

O problema de análise dinâmica consiste em determinar as condições sob as quais a equação de equilíbrio anteriormente descrita é satisfeita. Utilizando-se uma analogia com o caso de um único grau de liberdade e utilizando a regra de Cramer, como sugerido por (CLOUGH, 2003), obtém-se a seguinte equação que nada mais representa do que a solução da formulação anteriormente apresentada.

$$\left\|\vec{k} - \omega^2\vec{m}\right\| = 0 \tag{2.14}$$

A equação apresentada, nada mais é do que uma equação de autovalor, a qual, quando solucionada, fornecerá valores de frequências naturais de vibração.

Ao se expandir este determinante se obterá uma equação algébrica de grau N, onde N é o número de graus de liberdade das estrutura. As N raízes desta equação (ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, ... ω_n^2) representa as frequências dos N modos de vibração possíveis no sistema. Por definição, o modo com menor frequência é tido como o primeiro modo de vibração, o segundo modo de menor frequência, como o segundo modo de vibração, e assim sucessivamente. O vetor com esses modos organizados em ordem crescente é conhecido como vetor de frequências.

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \dots \\ \omega_N \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

Quando as matrizes de massa e rigidez definida para um sistema estável forem simétricas e composta por valores reais positivos sempre se obterá um vetor de frequência com raízes reais e positivas. (CLOUGH, 2003)

2.2.5. Tipo de excitação

A equação de movimento é uma equação diferencial de segunda ordem e, como tal, apresenta dificuldade de resolução analítica em caso de forças externas determinísticas irregulares. Além disso, essas forças costumam oferecer dificuldade para serem representadas matematicamente, a menos que sejam especificadas em código normativo de projeto ou em catálogos de equipamentos. Para simplificar a questão, tais forças são classificadas, e há métodos de determinação de resposta estrutural diferentes para cada um destes tipos.

De acordo com (SORIANO, 2014), as forças externas podem ser classificadas em periódicas e aperiódicas. Entretanto, de forma mais detalhada, essas forças são classificadas em quatro categorias:

- Harmônica
    - São expressas por senos ou cossenos com ou sem ângulo de fase.
- Periódica arbitrária
    - Atuam indefinidamente e tem configurações que se repetem em iguais períodos de tempo.
- Impulsiva
    - São de grande intensidade e curta duração (fração de segundos).
- Aperiódica arbitrária
    - Variam de forma arbitrária no tempo, sem ser de curta duração.

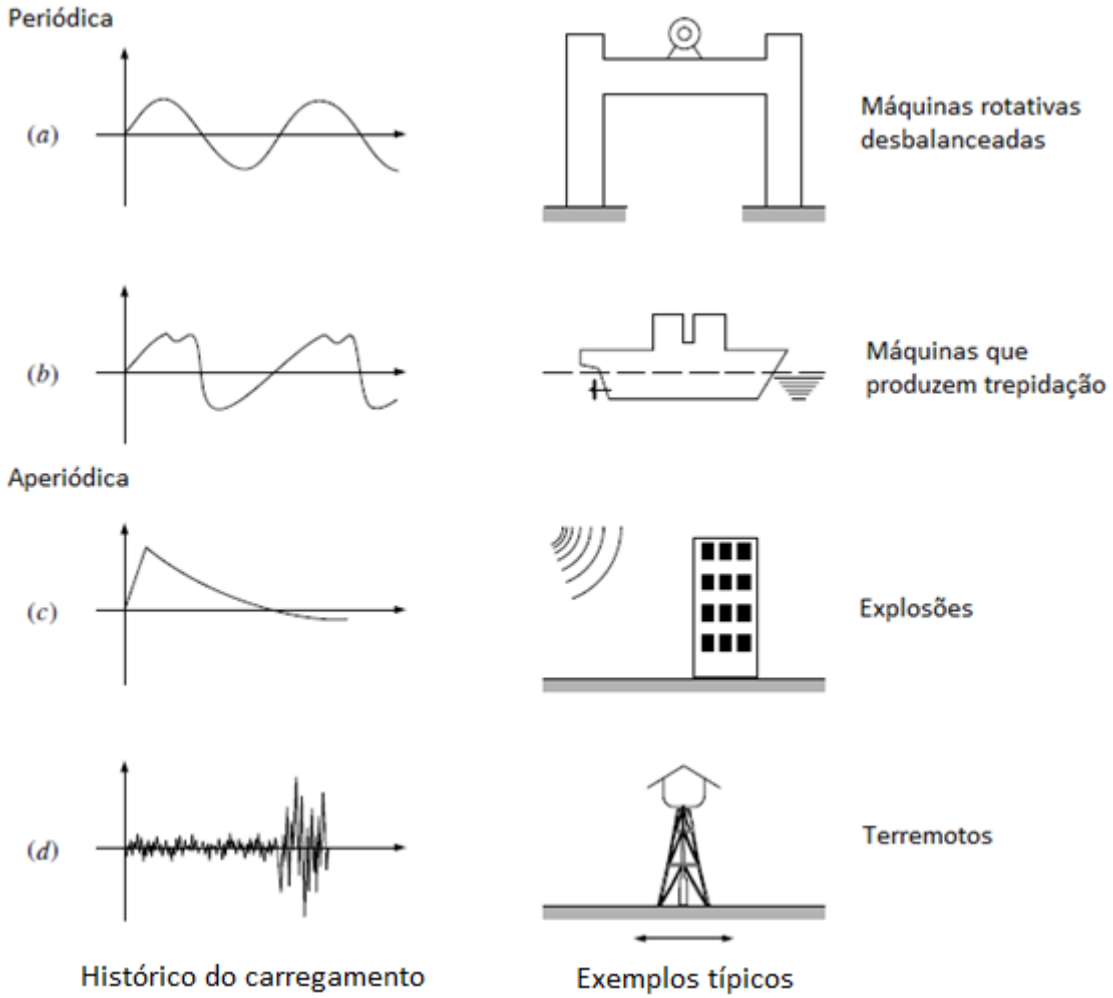


Figura 2.3- Tipos de Excitação (Adaptado de Chopra (2012))

2.2.6. Amortecimento

A dissipação de energia ocorre em todos os sistemas mecânicos oscilatórios, com o consequente decaimento da vibração livre ou atenuação dos picos de deslocamento em vibração forçada. Essa dissipação é útil quando a vibração é indesejável, e é mais relevante quando a estrutura oscila próxima à ressonância.

O conjunto dos mecanismos dessa dissipação e genericamente chamado de amortecimento e suas causas são complexas e associadas às características da estrutura, ao meio circundante e aos elementos não estruturais agregados à mesma.

Para o caso particular de vibrações livres amortecidas teremos a seguinte equação:

$$m\,\ddot{v}(t) + c\,\dot{v}(t) + k\,v(t) = 0 \tag{2.16}$$

Cuja solução se assemelha a de uma equação do segundo grau. Usando a relação $\omega^2 = \frac{k}{m}$, a solução geral de tal equação pode ser escrita na forma:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \tag{2.17}$$

Nesse cenário, podemos encontrar três possíveis tipos de raízes:

1. Reais e idênticas, quando o termo dentro da raiz quadrada resultar em zero;
2. Reais e distintas, quando o termo dentro da raiz resultar em um número real maior que zero;
3. Complexas, quando o termo dentro da raiz quadrada resultar em um número real menor que zero.

2.2.6.1. Vibrações criticamente amortecidas

O caso de vibrações criticamente amortecidas representa o caso particular da equação apresentada anteriormente onde se tem duas raízes reais distintas. Representa basicamente o ponto de transição entre a vibração subamortecida e vibração superamortecida, que serão discutidos mais à frente.

Ao se igualar o termo no interior da raiz quadrada da equação apresentada na sessão anterior, obtém-se o valor crítico de 'c' que produz duas raízes reais de mesmo valor numérico.

$$c_c = 2m\omega \tag{2.18}$$

Deste modo as duas soluções obtidas são dadas por:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega \tag{2.19}$$

A equação de movimento para este caso particular é dada, então, por:

$$v(t) = [C_1 + C_2 t]e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \tag{2.20}$$

Tal equação fornecerá uma resposta dinâmica como se mostra no gráfico abaixo.

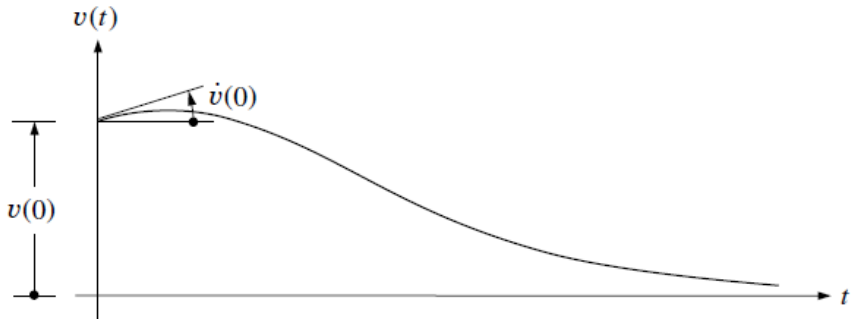


Figura 2.4 - Caso criticamente amortecido (Extraído de Clough (2003))

2.2.6.2. Vibrações subamortecidas

Para o caso particular que o amortecimento ('c') for menor que o amortecimento crítico ('c_c'), se terá o caso de uma raiz de um número negativo. Para se avaliar a resposta da vibração livre para este caso particular, é conveniente escrever o amortecimento em termos de taxa de amortecimento (ξ).

$$\xi = \frac{c}{c_c} \tag{2.21}$$

Deste modo, a solução da equação de movimento é dada por:

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \tag{2.22}$$

Onde:

$$\omega_D = \sqrt{1-\xi^2} \tag{2.23}$$

É a frequência de vibração livre do sistema amortecido. Adotando-se a equação exponencial como solução do sistema e utilizando-se os dois valores de 's' encontrados, encontra-se a seguinte equação para a equação de movimento desse sistema em vibração livre:

$$v(t) = \left[C_1 e^{i\omega_D t} + C_2 e^{-i\omega_D t}\right] e^{-\xi\omega t} \tag{2.24}$$

Essa equação também pode ser expressa na forma:

$$v(t) = [A cos(\omega_D t) + B sen(\omega_D t)] e^{-\xi\omega t} \tag{2.25}$$

O movimento descrito por esta equação é mostrado na figura abaixo.

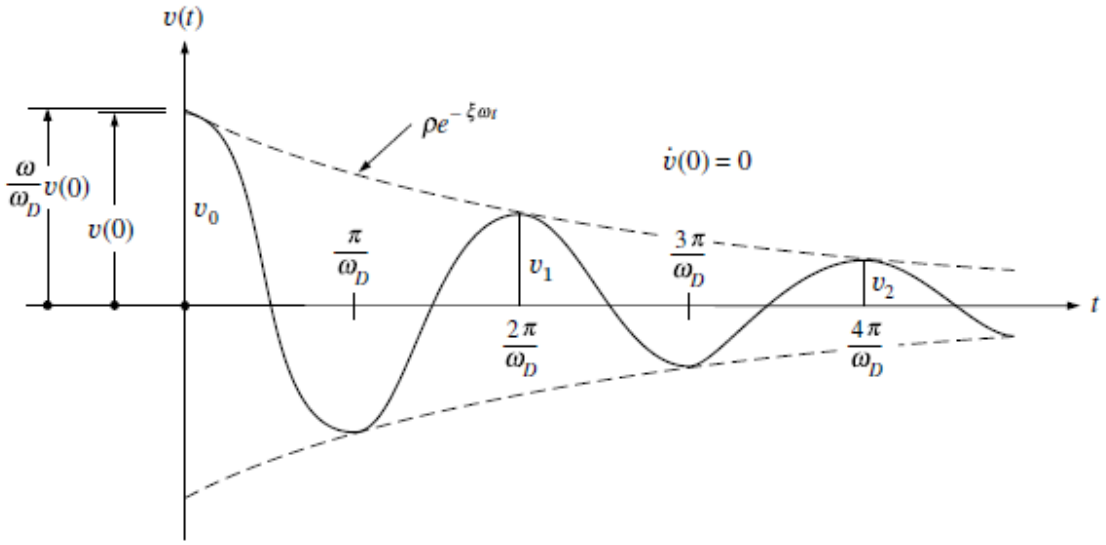


Figura 2.5 - Caso subamortecido (Extraído de Clough (2003))

2.2.6.3. Vibrações superamortecidas

De acordo com (CLOUGH, 2003), esse tipo de vibração é o menos usual, entretanto o mesmo ocorre em sistemas mecânicos eventualmente, o que justifica sua análise. Deste modo, quando se tem o valor de ξ maior do que uma unidade, é conveniente se escrever a solução da equação de apresentada no início desta sessão como:

$$s_{1,2} = -\omega\xi \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.26}$$

Quando se usa essas duas soluções para se desenvolver a equação de movimento para o caso de superamortecimento, obtem-se:

$$v(t) = \left\{Asenh\left[\left(\omega\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right] + Bcosh\left[\left(\omega\sqrt{\xi^2 - 1}\right)t\right]\right\} e^{-\xi\omega t} \tag{2.27}$$

Onde as constantes reais ‘A’ e ‘B’ podem ser calculadas com base nas condições de contorno, como as condições iniciais de velocidade e de deslocamento, por exemplo.

A resposta dinâmica do caso superamortecido se assemelha ao caso criticamente amortecido, entretanto, a função demora mais para convergir a zero devido ao excesso de amortecimento. Quanto mais amortecido, mais lentamente a função retornará a zero.

2.2.7. Resposta dinâmica (analise transiente)

Usando o caso de carregamento harmônico como caso base, pois é o que mais se assemelha a passagem de veículos por uma ponte, pode-se escrever a equação de movimento do sistema com um grau de liberdade, considerando amortecimento, como:

$$m\,\ddot{v}(t) + c\,\dot{v}(t) + k\,v(t) = p_0 sen(\bar{\omega}t) \tag{2.28}$$

Adotando-se condições iniciais de posição e velocidade, a solução particular desta equação diferencial é dada por:

$$u = u(0) \qquad \dot{v} = \dot{v}(0) \tag{2.29}$$

$$u_p(t) = Csen(\bar{\omega}t) + Dcos(\bar{\omega}t) \tag{2.30}$$

Onde:

$$C = \frac{p_0}{k}\frac{1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)}{\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)\right]^2} \tag{2.31}$$

$$D = \frac{p_0}{k}\frac{-2\omega\xi\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)}{\left[1-\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)\right]^2} \tag{2.32}$$

A solução homogênea da equação diferencial anteriormente descrita é dada por:

$$u_c(t) = e^{-\omega\xi t}\left\{Acos\left[\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right] + Bsen\left[\left(\omega\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right]\right\} \tag{2.33}$$

Deste modo a solução completa para a equação diferencial é dada pela soma da solução particular com a solução complementar.

$$u(t) = u_p(t) + u_c(t) \tag{2.34}$$

Usando-se os valores a seguir, obtém-se o seguinte gráfico.

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega} = 0{,}2 \qquad \xi = 0{,}05 \qquad u(0) = 0{,}5\frac{p_0}{k} \tag{2.35}$$

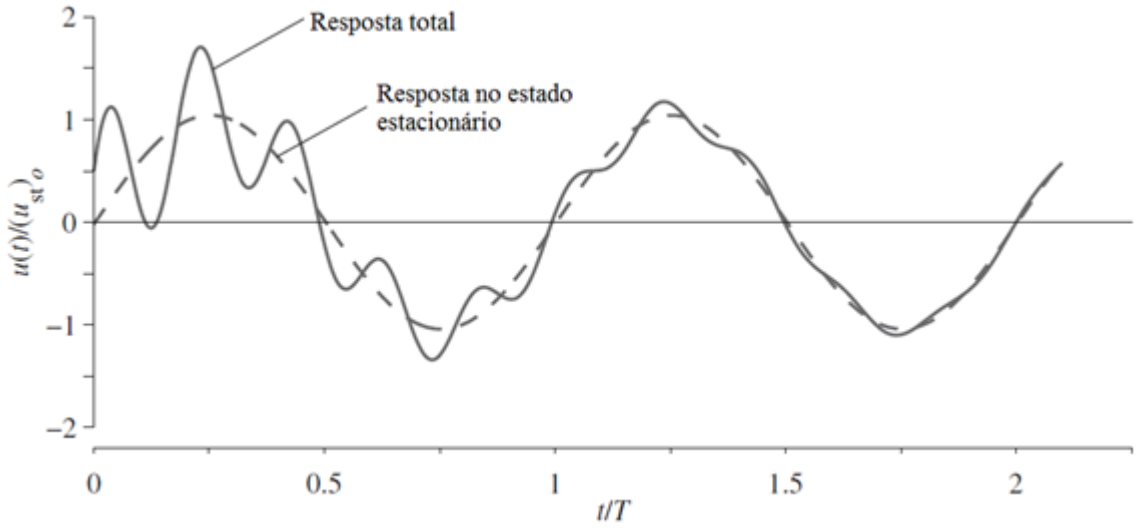


Figura 2.6 – Resposta dinâmica total de um sistema excitado em função do tempo (Adaptado de Chopra (2012))

A diferença entre as duas respostas mostradas no gráfico é dada pelo termo u_p, o qual decai exponencialmente em função da frequência do carregamento, da frequência natural na estrutura e da taxa de amortecimento, até que o ponto em que essa parcela se torna desprezível. Por isso essa fase inicial é chamada de resposta transiente ou resposta dinâmica. Após certo tempo apenas a resposta forçada continua, por isso se chama esta parcela estado estacionário. Deve-se ter em mente que, quando se analisa o estado estacionário, as maiores deformações provavelmente já ocorreram antes desse estado ter sido alcançado.

2.2.8. Fator de amplificação dinâmica

Chopra (2012) define que o Fator de Amplificação Dinâmica é o número adimensional o qual descreve quantas vezes a deformação ou tensão causada pelo carregamento estático deve ser multiplicada para representar os valores de deformação e tensão causados quando a carga dinâmica é aplicada à estrutura.

Seguindo-se a formulação deste mesmo autor, tem-se que, para o estado estacionário, a deformação de um sistema devido a forças harmônicas pode ser descrita pela seguinte equação:

$$v(t) = v_0 sen(\omega t - \varphi) \tag{2.36}$$

Onde:

- v_0 Representa a amplitude do movimento descrito pelo sistema;
- ω Representa a frequência do movimento descrito pelo sistema;
- φ Representa o ângulo de fase do movimento descrito pelo sistema.

Calculando-se a razão entre a amplitude do deslocamento dinâmico (v_0) e a do deslocamento estático, tem-se o valor de FAD.

$$FAD = \frac{v_0}{(v_0)_{estático}} \tag{2.37}$$

A formulação mais elaborada para o cálculo do FAD, considerando-se a frequência da aplicação de carga e o amortecimento será abordada na sessão seguinte.

2.2.9. Ressonância

Soriano (2014) define que ressonância é a condição de um sistema em vibração forçada em que qualquer pequena alteração na frequência da excitação provoca diminuição significativa nas amplitudes de deslocamento.

O autor Clough (2003), define como parâmetro de avaliação variável ‘β’, que representa a relação entre a frequência natural da estrutura e a frequência do carregamento aplicado.

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega} \tag{2.38}$$

A resposta dinâmica de um sistema sem amortecimento para quando o valor de 'β' tende a uma unidade apresenta uma amplitude que aumenta a cada período e tende a infinito com o tempo. Esse mesmo comportamento ocorre para sistemas com baixas taxas de amortecimento (ξ).

A condição de um sistema descrito por Soriano (2014), portanto, é dada quando o valor de β é igual a uma unidade.

Para encontrar o valor máximo do fator de amplificação dinâmica, Clough (2003) desenvolve uma formulação matemática levando em conta o amortecimento do sistema e encontra a seguinte relação.

$$\beta_{pico} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \tag{2.39}$$

Onde o valor de β_{pico} representa o valor de β que resultará em um maior fator de amplificação dinâmica, o qual será calculado com a fórmula que se segue.

$$FAD = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \tag{2.40}$$

Para maiores detalhes de como se chegar a essas formulações, consultar a Clough (2003).

2.2.10. Controle de vibrações

De acordo com Soriano (2014): estruturas podem ser excitadas através de movimento de suas bases ou suportes, como, por exemplo, devido a terremotos, explosões subterrâneas e tráfego, assim como estruturas veiculares são excitadas ao se deslocarem em pisos irregulares. De forma inversa, vibrações provenientes de equipamentos instalados em estruturas podem ser transmitidas às correspondentes bases e se propagar no meio exterior. Em ambas as circunstancias, as vibrações devem ser controladas para se evitar danos nas estruturas e correspondentes bases, como também para não afetar a utilização das mesmas, que é o caso do conforto de seus usuários e/ou do desgaste de peças e mau funcionamento de equipamentos sensíveis e vibrações. Em resumo, esse controle objetiva reduzir a transmissão, eliminando-se efeitos indesejáveis. E isso pode ser feito através de modificação da fonte excitadora, de alterações na estrutura, como também através de isoladores de base ou com a adição de dispositivos especiais que absorvam vibrações.

Os isoladores de vibração são usualmente molas metálicas, suportes constituídos de elastômeros ou dispositivos metálicos com partes que se deslocam entre si. Esses isoladores são classificados como passivos ou ativos. Os primeiros convertem energia cinética em calor, absorvem vibrações ou transferem energia entre modos naturais de vibração. Já os dispositivos ativos são os de atuação em tempo real, constituídos de sensores e controle digital, que ativam equipamentos hidráulicos que movimentam

massas que “contra balanceiam” as oscilações da estrutura. Dessa forma, o estudo do controle de transmissão de vibração tem diversas vertentes.

Analisaremos a seguir como prevenir danos nos suportes de estruturas devido a forças oscilatórias produzidas por um equipamento rotativo operando desbalanceado produzindo uma força vertical dada por $p_0 sen(\bar{\omega}t)$. Se a máquina estiver montada sobre uma mola com um grau de liberdade (como mostrado na figura ao lado), o deslocamento relativo em regime permanente da mesma pode ser escrito da seguinte forma:

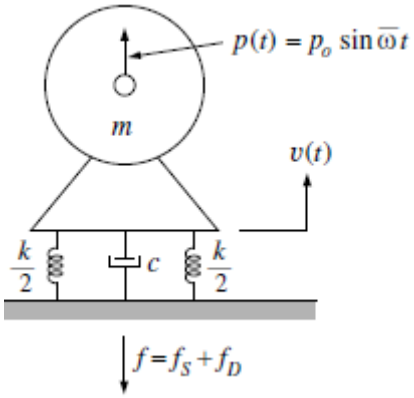


Figura 2.7 - Esquema de um equipamento rotativo desbalanceado com amortecimento (Extraído de Clough (2003))

$$v_p(t) = \frac{p_0}{k} D sen(\bar{\omega}t - \theta) \qquad (2.41)$$

Onde:

$$D = [(1 - \beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2]^{-0,5} \qquad (2.42)$$

Esse resultado assume que o deslocamento do apoio induzido pela força de reação é negligenciável em comparação com o movimento do sistema em relação ao suporte.

Usando-se a formulação apresentada em Clough (2003), pode-se obter as reações na mola(f_s) e no sistema de amortecimento(f_d) com as seguintes formulações:

$$f_s(t) = p_0 D sen(\bar{\omega}t - \theta) \qquad (2.43)$$

$$f_d(t) = 2\xi\beta p_0 E cos(\bar{\omega}t - \theta) \qquad (2.44)$$

Como as duas forças estão defasadas de 90 graus, é evidente que a amplitude total da reação na base é dada pela soma vetorial destes valores, assim sendo, tem-se:

$$f_{max}(t) = p_0 D[1 + (2\xi\beta)^2]^{0,5} \qquad (2.45)$$

Deste modo, a taxa entre a força máxima atuante na base e a força p0 aplicada no sistema, taxa essa conhecida como transmissibilidade do sistema de suporte, é tida como:

$$TR = D[1 + (2\xi\beta)^2]^{0,5} \qquad (2.46)$$

Um segundo tipo de situação é quando o controle de vibrações é importante pode ser visto quando se deseja evitar que instrumentos sensíveis à vibração sejam afetados quando se tem o deslocamento do suporte da estrutura. O esquema para este caso está ilustrado ao lado.

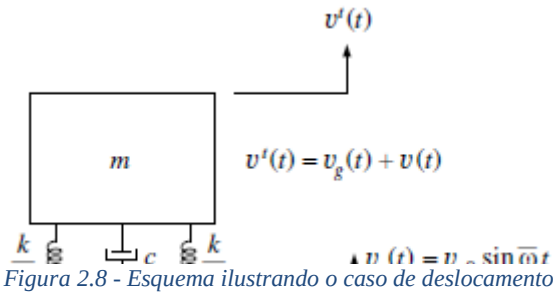


Figura 2.8 - Esquema ilustrando o caso de deslocamento do suporte da estrutura (Extraído de (CLOUGH, 2003))

Para tal caso, Clough (2003) descreve que o deslocamento da base ($v_g(t)$) força, em regime permanente, a seguinte resposta em termos de deslocamento relativo.

$$v_p(t) = v_{g0}\beta^2 D sen(\bar{\omega}t - \theta) \tag{2.47}$$

Ao se somar vetorialmente esta parcela com a parcela $v_g(t)$, a resposta total em estado permanente para a massa *m* é dada por:

$$v^t(t) = v_{g0}\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} E sen(\bar{\omega}t - \theta) \tag{2.48}$$

Se, neste caso, a transmissibilidade for definida como a razão entre o deslocamento máximo total da massa *m* em relação à correspondente amplitude do deslocamento da base, obtém-se a mesma fórmula de transmissibilidade que o caso anterior.

$$TR = D[1 + (2\xi\beta)^2]^{0,5} \tag{2.49}$$

Ao se analisar o gráfico descrito por esta equação (ver gráfico abaixo), verifica-se que todas as curvas passam pelo mesmo ponto $\beta = \sqrt{2}$. Por este motivo, conclui-se que aumentar o amortecimento, quando $\beta < \sqrt{2}$, melhora a eficiência do controle de vibração, por outro lado, quando $\beta > \sqrt{2}$, essa eficiência decai.

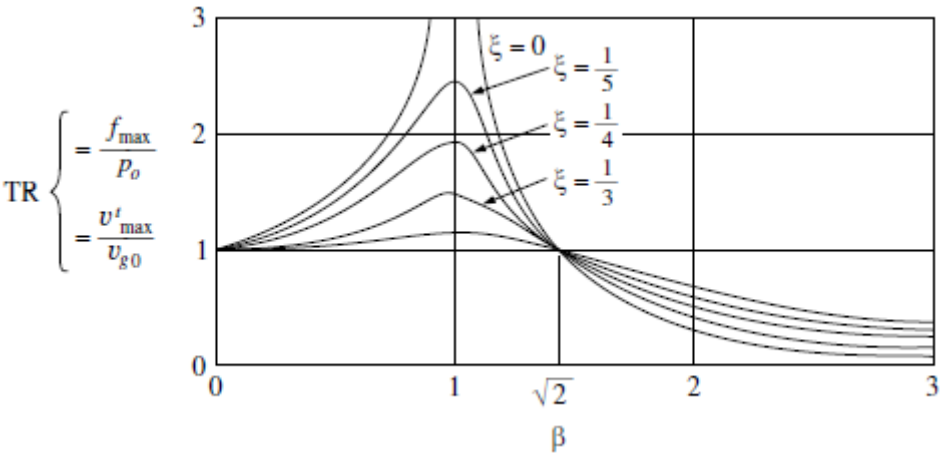


Figura 2.9 - Transmissibilidade em função de β (Extraído de Clough (2003))

2.2.11. Formulação Analítica para Carga Móvel sobre Viga

Frýba (1972) apresenta toda a formulação numérica no que diz respeito à vibração de sólidos e estruturas sobre a ação de cargas móveis. Deste modo, foge ao escopo deste trabalho apresentar a formulação e a resolução das equações diferenciais envolvidas para esse problema. Será apenas apresentado a formulação final utilizada para o caso de vigas biapoiadas com e sem amortecimento.

2.2.11.1. Formulação Sem Amortecimento

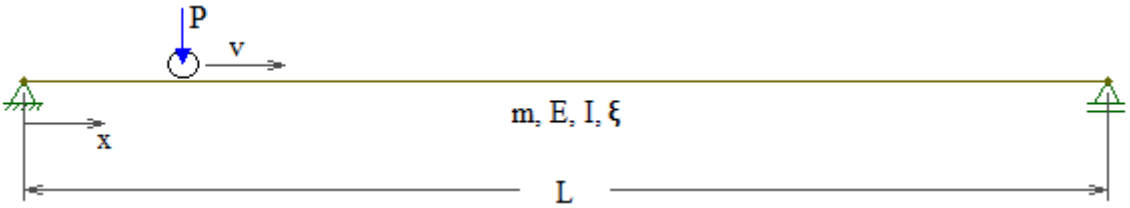


Figura 2.10 - Modelo de ponte submetida à ação de carga móvel

Para uma dada viga biapoiada sob a ação de uma carga pontual 'P' deslocando-se sobre a estrutura com uma velocidade 'v', Humar (2002) apresenta a seguinte formulação para a deformada dessa estrutura em função do tempo.

$$u(x,t) = \frac{2P}{mL}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 - {\omega_n}^2}\left\{\frac{n\pi v}{L\omega_n}\sin(\omega_n t) - \sin\left(\frac{n\pi v t}{L}\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.50)$$

Essa equação é válida apenas para quando $\frac{n\pi v}{L} \neq \omega_n$. Quando $\frac{n\pi v}{L} = \omega_n$, a parcela do somatório é dada por:

$$u_n(x,t) = \frac{P}{{\omega_n}^2 mL}\{\sin(\omega_n t) - \omega_n\, t\, cos(\omega_n t)\}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.51)$$

Onde:

u	Representa a deformada da viga para um dado tempo 't' e posição 'x';
ω_n	Representa a enésima frequência natural da viga;
P	Representa o valor da carga móvel;
m	Representa a massa por unidade de comprimento da viga;
L	Representa o vão;
v	Representa a velocidade da carga móvel.

2.2.11.2. Formulação Com Amortecimento Leve ($\xi \ll 1$)

O autor Frýba (1972) em sua obra apresenta a formulação para o deslocamento em uma viga biapoiada com amortecimento submetida a ação de uma carga móvel se deslocando a uma velocidade constante sobre a mesma. Para isso o mesmo define os seguintes variáveis:

$$\omega_f = \frac{\pi v}{L} \quad (2.52)$$

$$\omega_{(n)} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.53)$$

$$\alpha = \frac{\omega_f}{\omega_{(1)}} = \frac{v}{2f_{(1)}L} = \frac{T_{(1)}}{2T} = \frac{v}{v_{cr}} \tag{2.54}$$

$$\xi = \frac{\bar{\omega}}{\omega_{(1)}} \tag{2.55}$$

$$v_{cr} = 2f_{(1)}L \tag{2.56}$$

$$u_0 = \frac{PL^3}{48EI} \approx \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \tag{2.57}$$

Com base nessas variáveis, escreve-se a equação da deformada da viga em função destas para o caso em que α ≠ j.

$$u(x,t) \approx u_0 \sum_{j=1}^{\infty} sen\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \frac{1}{j^2(j^2-\alpha^2)} \left(sen(j\omega_f t) - \frac{\alpha}{j} e^{-\bar{\omega}t} \sin(\omega_{(j)} t)\right) \tag{2.58}$$

Quando se tem que α = n, tem-se que:

$$n = \frac{\omega_f}{\omega_{(1)}} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) \approx u_0 \frac{1}{2n^4} \left[e^{-\bar{\omega}t} \sin(n\omega_f t) - \frac{n^2}{\xi} \cos(n\omega t)\,(1 - e^{-\bar{\omega}t})\right] sen\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \\ + u_0 \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{\infty} sen\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \frac{1}{j^2(j^2-\alpha^2)} \left(sen(j\omega_f t) \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{j} e^{-\bar{\omega}t} \sin(\omega_{(j)} t)\right) \end{aligned} \tag{2.60}$$

Onde:

$v, l, E, I, c\ e\ m$	São os mesmos que definidos anteriormente;
v_{cr}	É denominada velocidade crítica (aquela à qual provocará a ressonância da estrutura);
P	Representa o valor da carga móvel;
m	Representa a massa por unidade de comprimento da viga;
L	Representa o vão;
v	Representa a velocidade da carga móvel;
$\bar{\omega}$	Representa a frequência do carregamento aplicado.

2.3. PRESCRIÇÕES NORMATIVAS E VEÍCULOS DE CARGA

Esta sessão visa apresentar ao leitor o que as normas nacionais e internacionais vigentes falam sobre pontes rodoviárias, coeficiente de impacto e seus veículos de carga.

2.3.1. NBR 7187:2003 – Projeto de pontes de concreto armado e concreto protendido

A NBR 7187:2003 fixa os requisitos que devem ser obedecidos no projeto, na execução e no controle das pontes de concreto armado e de concreto protendido, excluídas aquelas em que se empregue concreto leve ou outros concretos especiais.

Vale salientar que além das condições desta Norma, devem ser obedecidas as de outras normas específicas e as exigências peculiares a cada caso, principalmente quando se tratar de estruturas com características excepcionais, onde as verificações de segurança necessitam de considerações adicionais, não previstas nesta Norma.

2.3.1.1. Coeficiente de Impacto

Esta norma afirma que o efeito dinâmico das cargas móveis deve ser analisado pela teoria da dinâmica das estruturas. Porém, é permitido assimilar as cargas móveis a cargas estáticas, através de sua multiplicação pelos coeficientes de impacto definidos a seguir:

$$\varphi = 1{,}4 - 0{,}007l \geq 1 \tag{2.61}$$

Onde:

l É o comprimento de cada vão teórico do elemento carregado, qualquer que seja o sistema estrutural, em metros. No caso de vãos desiguais, em que o menor vão seja igual ou superior a 70% do maior, permite-se considerar um vão ideal equivalente à média aritmética dos vãos teóricos.

2.3.2. NBR 7188:2013 – Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas

A NBR 7188:2013 define os valores característicos básicos das cargas móveis rodoviárias de veículos sobre pneus e ações de pedestres, em projeto de pontes, viadutos, galerias, passarelas e edifícios-garagem.

2.3.2.1. Trem tipo brasileiro

No que diz respeito ao trem tipo brasileiro (definido como TB), esta norma afirma que a carga móvel rodoviária padrão TB-450 é definida por um veículo de 450 kN, com seis rodas, representadas, cada uma, por uma carga pontual P = 75 kN, três eixos de cargas

afastados entre si em 1,5 m, com área de ocupação de 18 m², circundada por uma carga uniformemente distribuída p = 5 kN/m², conforme pode ser visto nas figuras abaixo.

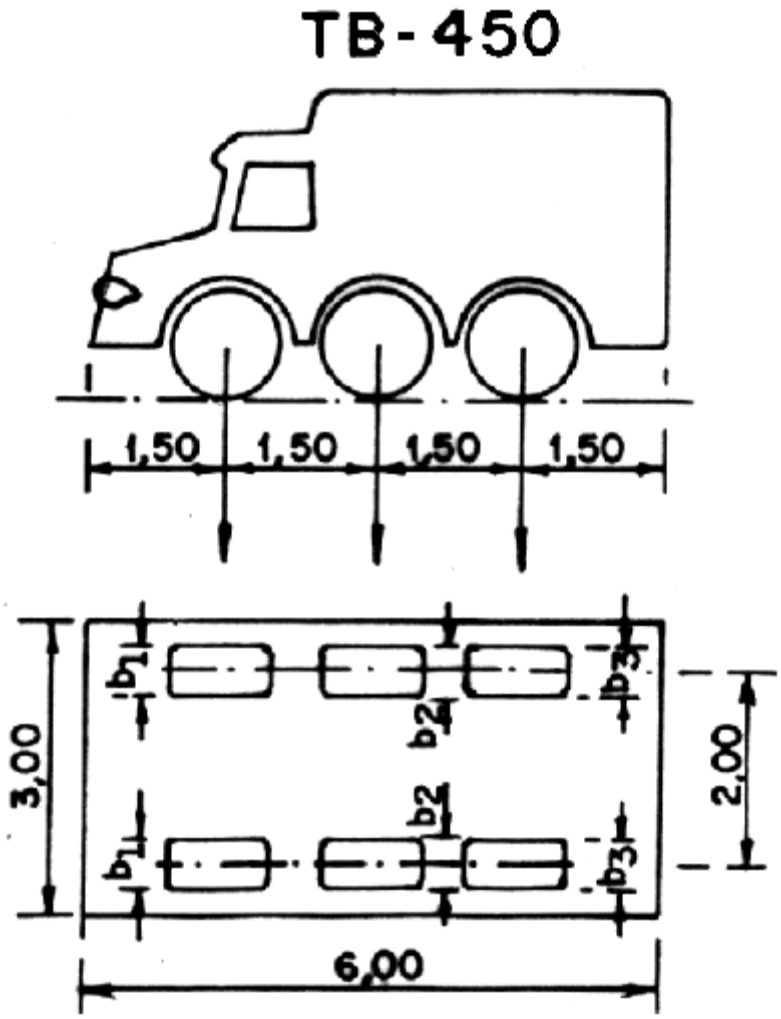


Figura 2.11 - Modelo esquemático do TB-450 (adaptado da NBR 7188:1982)

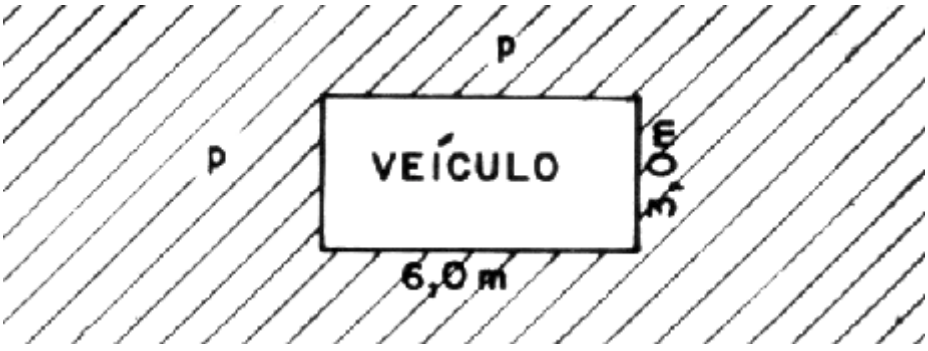


Figura 2.12 - Modelo esquemático de carga uniformemente distribuída para um trem-tipo normativo (extraído da NBR 7188:1982)

Essa carga móvel assume posição qualquer em toda a pista rodoviária com as rodas na posição mais desfavorável, inclusive acostamento e faixas de segurança. A carga distribuída deve ser aplicada na posição mais desfavorável, independentemente das faixas

rodoviárias. Admite-se a distribuição espacial da carga concentrada no elemento estrutural a partir da sua superfície de contato em um ângulo de 45º.

Para obras em estradas vicinais e municipais, a NBR 7188:2013 restringe que o trem tipo mínimo a ser utilizado seria um TB-240. Porém, este caso foge ao escopo deste trabalho, merecendo apenas sua citação.

2.3.2.2. Coeficientes de impacto

No que abrange as cargas móveis, esta norma define três diferentes coeficientes de impacto.

CIV É o coeficiente de impacto vertical. Esse coeficiente amplifica a ação da carga estática simulando o efeito dinâmico de carga em movimento e a suspensão dos veículos automotores. O CIV não simula e/ou elimina a necessidade de análise dinâmica nas estruturas sensíveis e/ou de baixa rigidez, em especial estruturas de aço e estaiadas.

CNF É o coeficiente do número de faixas. Representa a possibilidade da carga móvel ocorrer em função do número de faixas.

CIA É o coeficiente de impacto adicional. Consiste em um coeficiente destinado a majoração da carga móvel característica devido à imperfeição e/ou descontinuidade da pista de rolamento, no caso de juntas de dilatação e nas extremidades das obras, estruturas de transição e acessos.

A NBR 7188:2013 aponta que as cargas móveis verticais características definidas anteriormente devem ser majoradas para o dimensionamento de todos os elementos estruturais pelo Coeficiente de Impacto Vertical (**CIV**).

$$CIV = 1{,}35$$ Para estruturas com vão menor do que 10 metros. (2.62)

$$CIV = 1 + 1{,}06\left(\frac{20}{L_{iv} + 50}\right)$$ Para estruturas com vãos entre 10 e 200 metros. (2.63)

Onde:

Liv é o vão em metros para cálculo de CIV, conforme o tipo de estrutura. Sendo:

L_{iv} Usado para estruturas de vãos isostáticos. Liv: média aritmética dos vãos nos casos de vãos contínuos.

L_{iv} É o comprimento do próprio balanço para estruturas em balanço.

Para estruturas com vãos acima de 200,0 m, deve ser realizado o estudo específico para consideração da amplificação dinâmica do coeficiente de impacto.

O Coeficiente de Número de Faixas (**CNF**), por outro lado, tem função de ajustar as cargas móveis características definidas anteriormente. O mesmo é calculado como se segue.

$$CNF = 1 - 0{,}05 * (n - 2) > 0{,}9 \quad (2.64)$$

Onde:

n É o número (inteiro) de faixas de tráfego rodoviário a serem carregadas sobre um tabuleiro transversalmente contínuo. Acostamentos e faixas de segurança não são faixas de tráfego da rodovia.

Este coeficiente não se aplica ao dimensionamento de elementos estruturais transversais ao sentido do tráfego (laje, transversinas, etc.).

Esta norma também define o Coeficiente de Impacto Adicional (**CIA**), que atua nas regiões das juntas estruturais a extremidades da obra. Todas as seções dos elementos a uma distância horizontal, normal a junta, inferior a 5,0 m para cada lado da junta ou descontinuidade estrutural, devem ser dimensionadas com os esforços das cargas móveis majorados pelo coeficiente de impacto adicional, definido abaixo:

$CIA = 1{,}25$ Para obras em concreto ou mistas; (2.65)

$CIA = 1{,}15$ Para obras em aço. (2.66)

A aplicação destes coeficientes às cargas móveis é feita como se segue:

$$Q = P * CIV * CNF * CIA \quad (2.67)$$
$$q = p * CIV * CNF * CIA \quad (2.68)$$

Onde:

P Refere-se a carga em cada roda do veículo tipo (ex.: Para o TB-450, $P = 75kN$)

p Refere-se a carga distribuída ao redor do veículo tipo (ex.: Para o TB-450, $p = 5kN/m^2$)

O gráfico apresentado na página a seguir compara os valores do antigo Coeficiente de Impacto com o novo Coeficiente de Impacto Vertical e com este último associado com o Coeficiente de Número de Faixas. Como o Coeficiente de Impacto Adicional só é válido para pontos localizados ao longo da ponte, este coeficiente não foi incluído no gráfico.

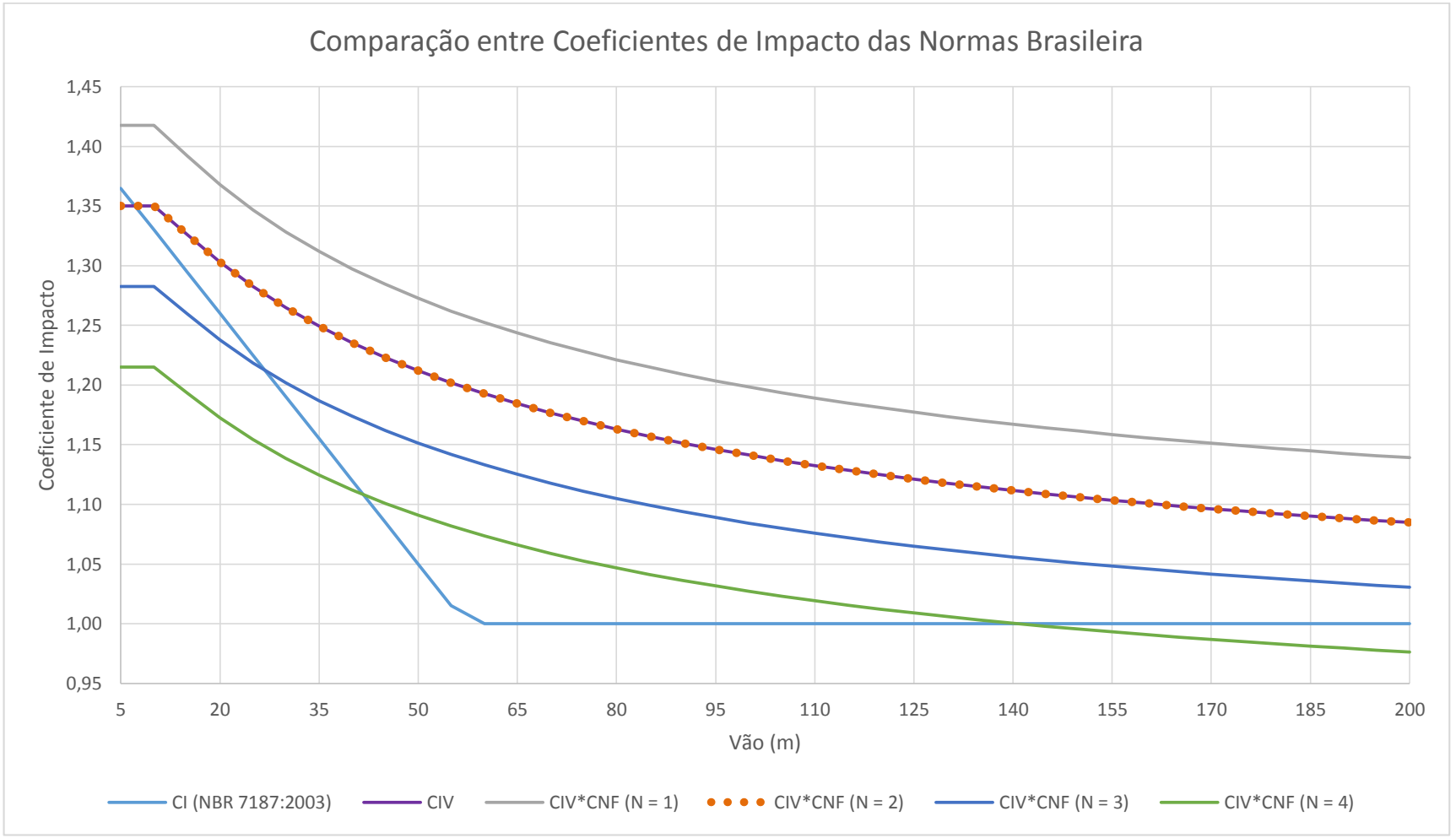


Figura 2.13- Comparação entre Coeficientes de Impactos apresentados pelas normas nacionais

Com base neste gráfico, os novos valores para coeficiente de impacto (CIV*CNF) parecem, de modo geral, quando o número de faixas (N) é menor que 4, ser mais conservadores para vãos maiores, uma vez que estes valores nunca convergem para 1 enquanto, de acordo com a antiga norma, este valor era alcançado quando se tem um vão de aproximadamente 57 m. Por outro lado, considerar o número de faixas igual a uma unidade resulta em valores de coeficientes de impacto ainda mais conservadores do que quando não se considerar o Coeficiente de Número de Faixas.

Um importante detalhe que vale ser salientado aqui, é que, para pontes com quatro ou mais faixas, pode-se encontrar, eventualmente, valores de Coeficientes de Impacto inferiores a uma unidade, uma vez que a nova norma não restringe o valor destes coeficientes para ser maiores ou iguais a uma unidade. Isso corresponde a dizer que a consideração do efeito dinâmico provocará esforços inferiores ao caso estático de carga, o que não parece ser muito lógico.

Vale ressaltar aqui que os valores encontrados para o Coeficiente de Impacto Vertical sozinho e o mesmo multiplicado pelo Coeficiente do Número de Faixas, quando o número de faixas é igual a duas unidades, são exatamente os mesmos. O que mostra que quando não se considera este último coeficiente, para pontes com números de faixas de rolamento superior a 2, geralmente se obtém resultados mais conservadores.

2.4. Normas Estrangeiras

2.4.1. Norma Americana - AASHTO

A norma americana (AASHTO) define o Fator de Impacto, o qual é dado por:

$$I = \frac{50}{125 + 3{,}28084 * L} < 30\% \qquad (2.69)$$

Onde:

L É o vão, expresso em metros (m).

O valor encontrado por esta fórmula irá ser somado a uma unidade e é multiplicado pelos esforços calculados com o trem-tipo de forma estática.

2.4.2. British Standard

A norma britânica (BS5400-2:2006) prevê as seguintes fórmulas para o que eles denominavam de fator dinâmico quando se está analisando o trem tipo mais pesado definido nesta norma.

Tabela 2.1 - Coeficiente de impacto para o BS5400-2

Dimensão L (Metros)	Fator Dinâmico	
	Para Momento Fletor	Para Esforço Cortante
Até 3,6	2,00	1,67
De 3,6 até 67	$0{,}73 + \frac{2{,}16}{\sqrt{L} - 0{,}2}$	$0{,}82 + \frac{1{,}44}{\sqrt{L} - 0{,}2}$
Acima de 67	1,00	1,00

2.4.3. Eurocode

O Fator de Impacto, definido de acordo com o Eurocode 2 Parte 1 para momento fletor é exatamente o mesmo que aparece no British Standard.

Vale a pena aqui se destacar que o Eurocode apresenta o que parece ser um critério muito sensato no que diz respeito à necessidade da análise dinâmica de uma ponte ou não, tal critério leva em consideração, por exemplo:

- A velocidade do veículo;
- A frequência natural da ponte;
- Continuidade da estrutura;
- O vão da ponte;
- O nível de complexidade da estrutura;

Por este motivo, o presente trabalho recomenda a adoção da metodologia desta norma para a definição da obrigatoriedade ou não da análise dinâmica para uma dada estrutura. Esses critérios podem ser vistos em mais detalhe no Anexo 1: Critério do Eurocode 1 Parte 2 para definir a necessidade ou não de análise dinâmica em pontes, ou ainda diretamente no próprio Eurocode 1 Parte 2.

Inicia-se a verificação avaliando-se se a velocidade permitida na pista é menor ou igual a 200 km/h e a partir daí compara-se alguns parâmetros da estrutura com os valores limite para estes parâmetros definidos nesta norma. Por fim, esta norma além de definir a necessidade ou não da análise dinâmica, a mesma ainda especifica que tipo de análise dinâmica deve ser feita. De um modo geral, o fluxograma presente no anexo é autoexplicativo.

No que diz respeito ao denominado Fator Dinâmico, esta norma propõe o seguinte critério.

1) Para pontes com boa manutenção

$$\Phi_2 = \frac{1{,}44}{\sqrt{L} - 0{,}2} + 0{,}82 \tag{2.70}$$

$$1{,}00 \leq \Phi_2 \leq 1{,}67 \tag{2.71}$$

2) Para pontes com manutenção padrão

$$\Phi_2 = \frac{2{,}16}{\sqrt{L} - 0{,}2} + 0{,}73 \tag{2.72}$$

$$1{,}00 \leq \Phi_2 \leq 2{,}00 \tag{2.73}$$

2.5. Comparação entre normas nacionais e estrangeiras

A figura na página seguinte apresenta um gráfico comparando os valores de coeficiente de impacto para todas as normas aqui apresentadas. Neste gráfico fica evidente a semelhança do novo coeficiente de impacto inserido pena NBR 7188:2013 e aquele definido pela AASHTO. Ressaltando-se aqui que os valores definidos pela NBR são sempre superiores aos definidos por esta norma americana.

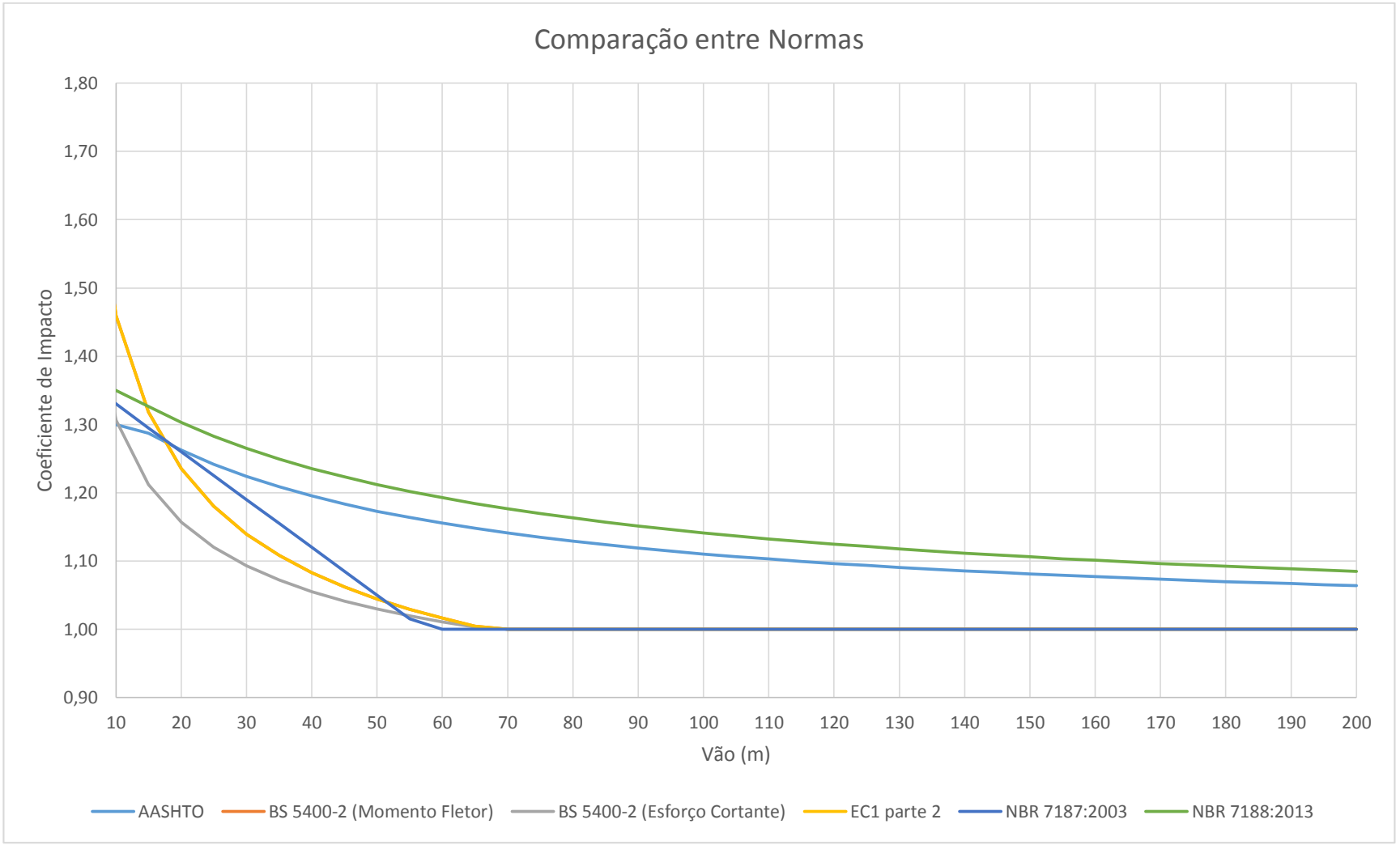


Figura 2.14 - Gráfico comparando os coeficientes de impacto de diversas normas

3. MODELAGEM NUMÉRICA DOS EFEITOS DINÂMICOS EM PONTES

Este capítulo tem como objetivo apresentar brevemente o código computacional utilizado neste trabalho. Se fará uma breve apresentação de como este programa funciona e que método de cálculo ele utiliza para analisar estruturas. Esse código foi elaborado por Hügül (2005) e foi traduzido pelo autor do presente trabalho.

Como o software em questão utiliza-se internamente do método dos elementos finitos para se encontrar os valores, tal método será apresentado inicialmente para melhor compreensão.

O código utilizado para análise neste trabalho encontra-se exposto no Anexo 6 deste trabalho.

3.1. Breve fundamentação do método dos elementos finitos (MEF)

Antes do aparecimento do Método dos Elementos Finitos, a análise dos problemas de meios contínuos em geral era efetuada por resolução direta dos sistemas de equações de derivadas parciais que regem o fenômeno, tendo em consideração as necessárias condições de contorno. Devido à sua complexidade, estes procedimentos só eram aplicáveis a meios contínuos homogéneos e de geometria simples (AZEVEDO, 2003).

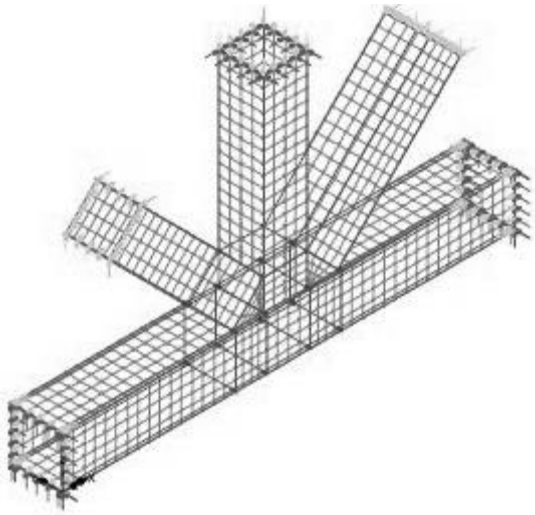


Figura 3.1- A figura representativa do método dos elementos finitos aplicado a problemas estruturais

Para tentar superar algumas destas limitações, frequentemente se substituía estas derivadas por derivadas aproximadas, através do Método dos Elementos Finitos. Estas soluções, entretanto, possuíam alguns limitadores e inconvenientes como a necessidade de se simplificar a geometria do problema real e de resolver grandes sistemas de equações, visto que o desenvolvimento dos computadores ainda não era suficiente para produzir algoritmos que tivessem condições de efetuar e acelerar o processo de cálculo.

Junto com desenvolvimento tecnológico a partir da década de 60, ganhou também cenário o Método dos Elementos Finitos, quando, segundo Azevedo (2003), passou a ser prática corrente a análise de estruturas de geometria arbitrária, constituídas por materiais variados e sujeitas a qualquer tipo de carregamento. Este avanço foi tão expressivo que os outros métodos anteriormente referidos praticamente deixaram de ser utilizados.

O então chamado Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em um método numérico que aproxima a solução dos problemas de cálculo de esforços em estruturas diversas, descritos por equações diferenciais parciais, através da subdivisão da geometria do problema em elementos menores, chamados elementos finitos, que são elementos de geometria simplificada.

Sendo assim, o contínuo das placas que representam a laje e vigas, juntamente com as barras que representam os pilares da ponte são substituídos por um conjunto de elementos finitos interconectados pelos seus pontos nodais. Deve-se então fazer a associação dos deslocamentos em todos os pontos nodais destes elementos finitos, garantindo a continuidade de deslocamentos entre eles.

Basicamente, no Método dos Elementos Finitos, tem-se que a solução das equações diferenciais que governam o problema podem ser determinadas por funções de aproximação que satisfazem condições descritas por equações integrais no domínio do problema. Geralmente para estas funções de aproximação utilizam-se funções polinomiais de grau elevado que satisfaçam as equações integrais em cada elemento finito.

Vale aqui salientar que, o Método dos Elementos Finitos não requer a utilização de malhas regulares, com intervalos entre nós adjacentes constantes. Isso permite a discretização em elementos com dimensões diferenciadas. Isto viabiliza a resolução de problemas de placas de geometria irregular, por exemplo, além de oferecer uma melhor aproximação em regiões onde há maior concentração de tensões.

Ao invés de utilizar uma função em todo o domínio para aproximar cada componente do campo de deslocamentos, uma alternativa consiste em dividir o domínio em subdomínios e utilizar uma função linear separada em cada um dos elementos (elementos finitos). Tem-se, então, que a metodologia do Método dos Elementos Finitos baseia-se nesta aproximação das equações das funções dos campos de deslocamentos por funções que podem ser facilmente integradas, como no caso, funções polinomiais. Os deslocamentos correspondentes a cada um dos pontos nodais da malha de elementos são assim obtidos por interpolação polinomial.

De um modo geral, quanto melhor o refinamento da malha, isto é, quando se aumenta o número de elementos de um determinado tipo ou quando se aumenta o grau de elementos, o erro da aproximação diminui. Como consequência natural disto, opta-se por refinar a malha de elementos em áreas onde há maior concentração de tensões de forma a obter resultados com melhores aproximações nas áreas críticas.

Para maiores informações sobre toda a formulação matemática que envolve o Método dos Elementos Finitos, como interpolação dos deslocamentos, cálculo das matrizes de rigidez, montagem dos sistemas de equações, soluções e exemplificações, podem ser encontradas em literaturas como Pereira (2005) e Szilard (2004).

Szilard (2004) afirma que podemos usar o Método dos Elementos Finitos de três maneiras: a primeira seria uma solução manual com a ajuda de calculadora científica, o que iria demandar um enorme trabalho e iria se limitar a soluções simples. A outra utilização é através da geração de algoritmos e rotinas utilizando uma linguagem de programação. A terceira maneira seria através da utilização de um programa computacional comercial que utilize método dos elementos finitos, como por exemplo, o SAP2000. É natural que seja de senso comum a utilização de programas computacionais para a solução dos problemas, já que o processo de cálculo fica totalmente automatizado. Contudo, deve-se ressalvar que um bom engenheiro deve ter sempre o conhecimento dos fundamentos teóricos do método de cálculo utilizado para resolução do problema, para que assim possa realizar uma simulação correta e analisar e interpretar os resultados corretamente. Esta ressalva não é válida somente para este caso específico, mas para qualquer tipo de forma de resolução de problemas quando se tratar da utilização de programas computacionais automatizados.

3.2. MATLAB

MATLAB, cujo nome deriva de MATrix LABoratory, trata-se de um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. O MATLAB integra cálculo com matrizes, construção de gráficos, análise numérica e processamento de sinais uma interface fácil de usar onde problemas e soluções são expressos muito similares a como eles são escritos matematicamente, ao contrário do que ocorre na programação tradicional.

O programa MATLAB é um sistema interativo cujo elemento básico de informação é uma matriz que não requer dimensionamento e que pode ter tanto números reais como complexos. Esse sistema permite a resolução de muitos problemas numéricos em apenas uma fração do tempo que se gastaria para escrever um programa semelhante em alguma linguagem computacional.

Embora na sua versão básica o MATLAB já possua um vasto conjunto de funções de carácter genérico, existem várias bibliotecas com funções adicionais (chamadas de toolboxes) que expandem as suas capacidades em domínios de aplicação mais específicos.

Os comandos executados pelo programa podem ser guardados em um arquivo de texto, tipicamente utilizando o MATLAB Editor, como um script (como é o caso que do programa apresentado mais adiante). Quando tal arquivo é aberto pelo programa, o MATLAB irá ler as linhas do arquivo e executar os comandos correspondentes, sendo, portanto, o Script um modo muito eficiente de se criar um programa.

3.3. Script do MATLAB

Para a análise numérica de alguns modelos apresentados no próximo capítulo foram foi utilizado um código elaborado por Hügül (2005) na sua dissertação de mestrado.

Esse código usa o método dos elementos finitos integrado com o método de Newmark para integração direta para encontrar os deslocamentos máximos de uma viga biapoiada submetida a uma carga pontual móvel e o coeficiente de amplificação dinâmica para o caso em análise. O código, originalmente escrito e comentado em turco foi traduzido e novos comentários foram adicionados ao mesmo para torna-lo mais didático, sendo esta uma das contribuições do presente trabalho.

Esse script foi testado e validado com a formulação matemática apresentada por Humar (2002) e Frýba (1972).

Por fim, este código foi modificado para se analisar o efeito de comboios de carga sobre a estrutura das pontes.

Para maiores detalhes sobre o procedimento utilizado pelo código turco para resolução do problema de carga móvel sobre viga biapoiada vide o código traduzido no final deste trabalho e a própria dissertação de mestrado que aparece nas referências deste trabalho. Um breve fluxograma deste script está mostrado na Figura 3.2 - Fluxograma de funcionamento do script do MATLAB.

Este código foi aqui traduzido para que futuros trabalhos possam utilizá-lo para análise de problemas mais complexos, além daqueles de vigas biapoiadas.

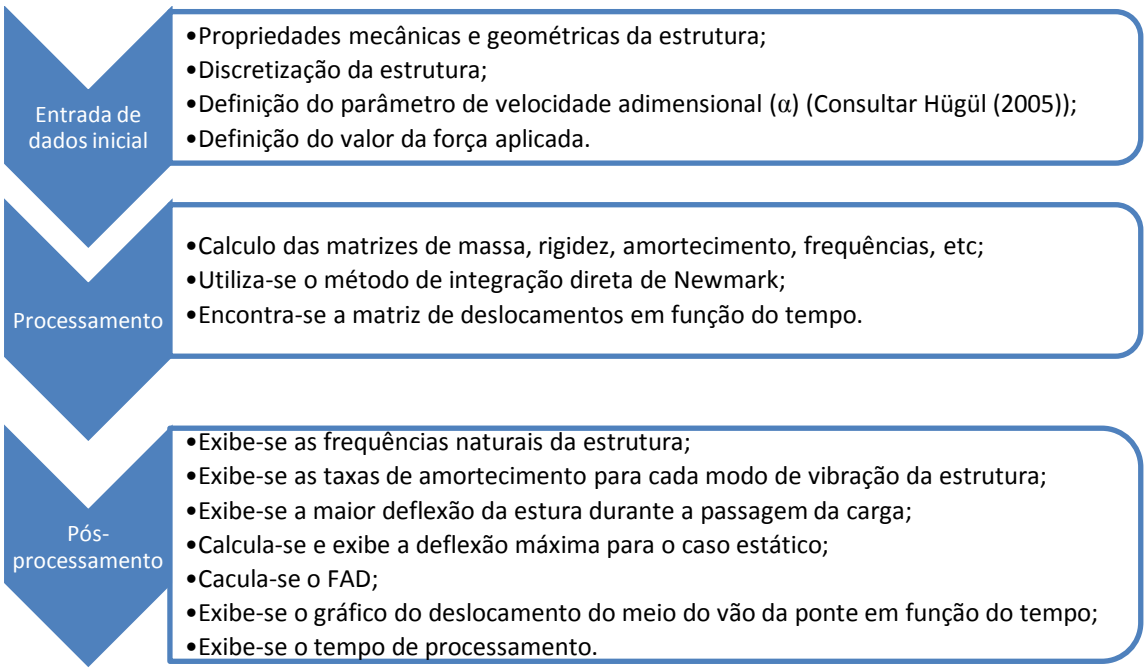


Figura 3.2 - Fluxograma de funcionamento do script do MATLAB

4. ESTUDO DE CASO

Esta seção tem como objetivo apresentar os modelos utilizados para o estudo de caso assim como os resultados obtidos e a discussão dos mesmos.

4.1. Modelos estudados

Este trabalho focou na análise de três casos:

1. Validação do código computacional escrito em MATLAB por meio da formulação analítica apresentada anteriormente aplicada para pontes de vãos 20, 30 e 40 metros e posterior aplicação do código para análise de comboios de cargas móveis trafegando sobre essas estruturas e as de maiores vãos;
2. Verificação do FAD e da influência da velocidade e do amortecimento para pontes de vãos menores (20, 30 e 40 metros);
3. Verificação do FAD e da influência da velocidade e do amortecimento para pontes de vãos maiores (60, 70 e 80 metros). Note que para estes casos a utilização da formulação do coeficiente de impacto da NBR 7187:2003 implicaria em valores unitários (ou seja, o efeito dinâmico seria desprezível).

Para todos os modelos analisados, foi adotado um fck de 35 MPa.

4.1.1. As seções transversais das pontes

Para se definir as seções transversais a serem utilizadas foram consultados AASHTO (2012), Caltrans (2003), Pfeil (1979) (que faz referência ao DNIT) e Leonhardt (1979). Por fim, notou-se que o perfil definido por Pfeil (1979) atende às demais normas com folga, porém, o mesmo não faz nenhuma referência à relação entre altura da viga e o vão da ponte (H/L). Por esta razão, adotou-se o critério apresentado em Leonhardt (1979) e em AASHTO (2012) para definir a altura de pontes de concreto protendido. Adotou-se as especificações de pontes de concreto protendido visto que o mesmo permite seções mais esbeltas e, portanto, susceptíveis a maiores deformações.

As seções para vãos menores estão apresentadas a seguir.

a) Vão de 20 metros

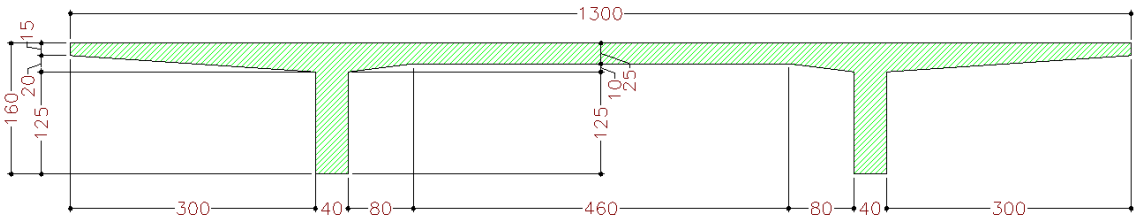


Figura 4.1 - Seção transversal da ponte de 20 metros de vão

b) Vão de 30 metros

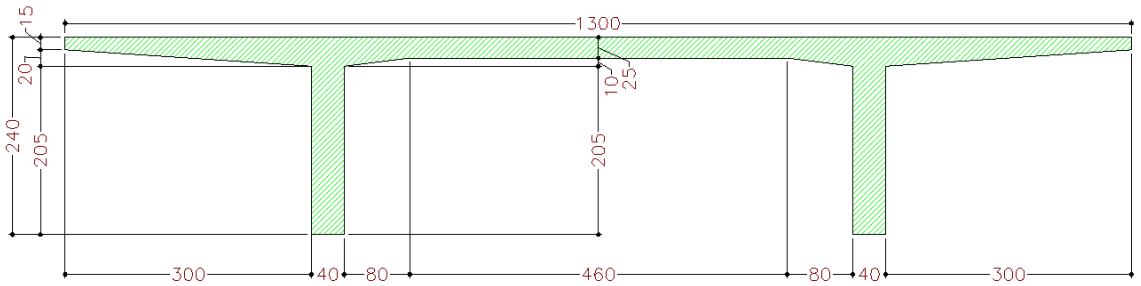


Figura 4.2 - Seção transversal da ponte de 30 metros de vão

c) Vão de 40 metros

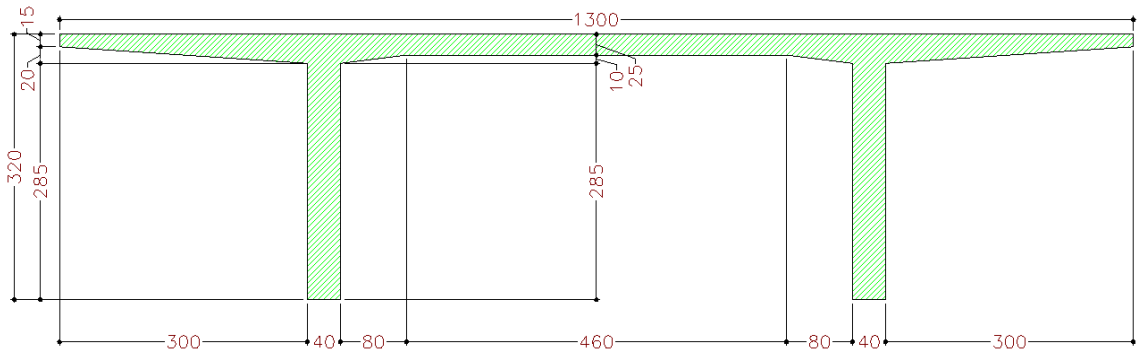


Figura 4.3 - Seção transversal da ponte de 40 metros de vão

A partir de 40 metros de vão, as normas passavam a exigir alturas de viga muito altas para seções tipo 'T'. Entretanto, como se deseja analisar ainda os valores do FAD para os vãos que a NBR 7187:2003 afirma que o coeficiente de impacto pode ser considerado como uma unidade, optou-se por adotar seções caixões, cuja altura mínima exigida para essas vigas é inferior às das vigas 'T'. Para tais seções, para se atender as restrições da AASHTO foi necessário se adicionar uma viga intermediária. Desta forma, se obteve as seções apresentadas a seguir.

a) Vão de 60 metros

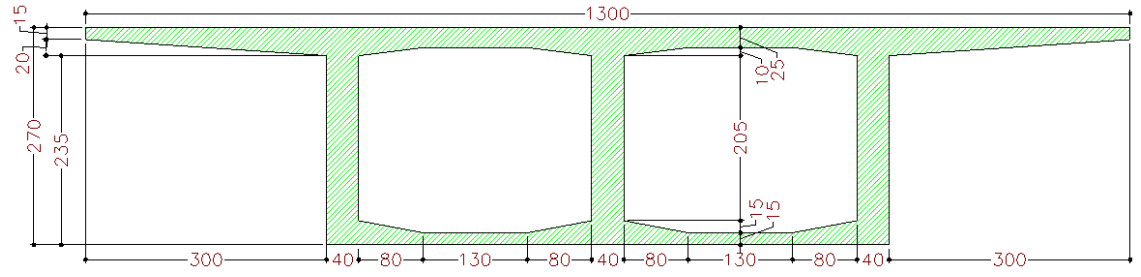


Figura 4.4 - Seção transversal da ponte de 60 metros de vão

b) Vão de 70 metros

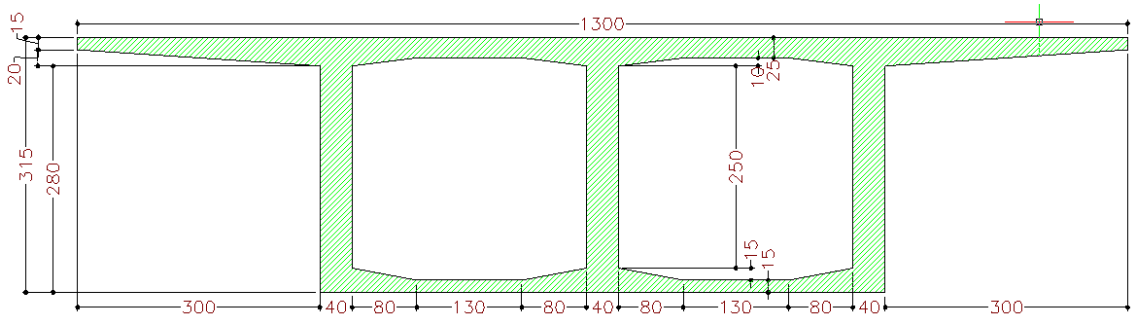


Figura 4.5 - Seção transversal da ponte de 70 metros de vão

c) Vão de 80 metros

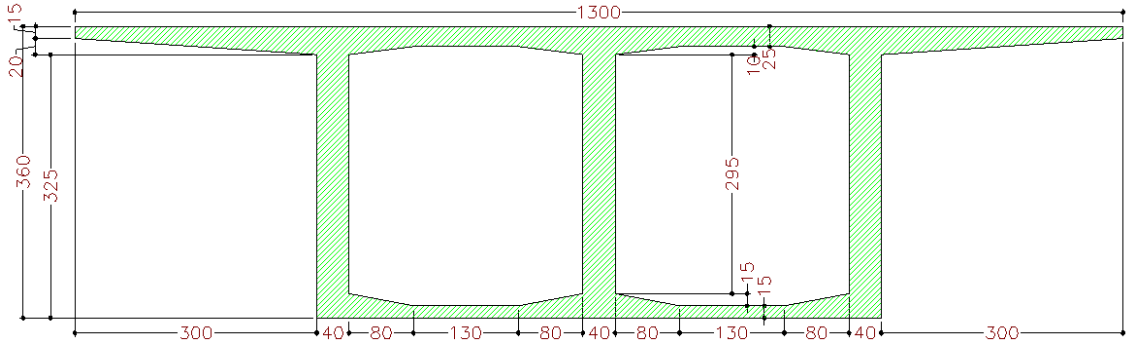


Figura 4.6 - Seção transversal da ponte de 80 metros de vão

Para tais seções transversais, tem-se as seguintes propriedades geométricas.

Tabela 4.1 - Resumo das propriedades geométricas das pontes analisadas

Vão (m)	Área (m^2)	Momento de Inércia (m^4)
20	4,41	0,698
30	5,05	2,299
40	5,69	5,239
60	7,46	7,539
70	8,00	10,989
80	8,54	15,233

4.1.2. Propriedades do material considerado

Para a análise destes modelos foi admitido um f_{ck} de 35 MPa, e, portanto, o módulo de elasticidade secante foi calculado de acordo com NBR 6118:2014. Como o tipo de agregado mais utilizado na região nordeste do Brasil é o granito e a gnaisse (α_E = 1,0), pode-se calcular o módulo de elasticidade da seguinte forma.

$$E_{ci} = 1{,}0 * 5600\sqrt{f_{ck}} = 1 * 5600\sqrt{35} \quad (4.1)$$

$$E_{ci} \approx 33130MPa \tag{4.2}$$

$$\alpha_i = 0{,}8 + 0{,}2\frac{f_{ck}}{80} = 0{,}8 + 0{,}2\frac{35}{80} = 0{,}8875 \tag{4.3}$$

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} = 0{,}8875 * 33130 \tag{4.4}$$

$$E_{cs} \approx 29400MPa \tag{4.5}$$

4.1.3. Velocidade diretriz

A norma do DNIT (1973) no seu artigo 2º, define que velocidade diretriz é a velocidade básica para a dedução das características do projeto. No seu artigo 7º, esta norma fixa que a maior velocidade diretriz a se considerar nos projetos de estradas de rodagem é 100km/h. Entretanto, este trabalho extrapola um pouco este valor em algumas de suas análises apenas para verificar a influência de uma velocidade ligeiramente maior sobre o FAD.

4.1.4. Modelo de carregamento

Para o nosso modelo, o trem tipo TB-450, definido em NBR 7188:2013, será representado por uma carga pontual com a carga total do veículo (450 kN) atravessando a ponte com uma velocidade constante. Isso acarretará em um pequeno acréscimo nos deslocamentos quando comparado com o caso de três cargas móveis defasadas passando pela estrutura. O modelo estrutural da estrutura considerada está ilustrado perfeitamente na Figura 1.1 - Modelo de Ponte sobre a ação de carga móvel.

4.2. Resultados

4.2.1. Validação do Modelo Numérico e Análise da Influência de Comboios

Para se fazer a validação do script mencionado no capítulo 3, foram analisadas as pontes com 20, 30 e 40 metros, com e sem amortecimento, no próprio MATLAB. Por fim, comparou-se os resultados obtidos com a formulação analítica apresentada no item 2.2.11. Formulação Analítica para Carga Móvel sobre Viga, a qual foi introduzida no MathCAD, que é um software de fácil utilização para realizar operações de cálculo. Feita essa verificação, modificou-se o código para se analisar o efeito de comboios nas pontes mencionadas. Os resultados obtidos estão expostos a seguir.

4.2.1.1. Modelo analítico sem amortecimento

Para encontrar os resultados sem amortecimento foi utilizada a formulação apresentada em (HUMAR, 2002), a qual confere perfeitamente com a apresentada por (FRýBA, 1972). Os resultados obtidos com a aplicação desta formulação estão apresentados a seguir.

Tabela 4.2- Resultados do modelo analítico sem amortecimento

Vão (m)	$\delta_{estático}$ (mm)	$\delta_{dinâmico}$ (mm)	FAD
20	3,653	4,148	1,136
30	3,746	4,042	1,079
40	3,896	4,195	1,077

4.2.1.2. Modelo Analítico com Amortecimento

Foi utilizada a formulação apresentada na seção 2.2.11.2. deste trabalho para computar a deflexão das vigas sob a ação de uma carga móvel quando se considera o amortecimento. Admitiu-se para este caso uma taxa de amortecimento de 5%.

Tabela 4.3 - Resultados do modelo analítico com amortecimento

Vão (m)	ξ	$\delta_{estático}$ (mm)	$\delta_{dinâmico}$ (mm)	FAD
20	0,05	3,6548	3,9497	1,081
30	0,05	3,7450	3,8694	1,033
40	0,05	3,8954	3,9743	1,020

4.2.1.3. Modelo Numérico sem Amortecimento

Para o modelo do MATLAB (Método dos Elementos Finitos) as vigas foram divididas em ‘N’ trechos de igual comprimento. A discretização adotada, tal como os deslocamentos obtidos e o FAD calculado estão apresentados na tabela que se segue.

Tabela 4.4 - Resultados do modelo numérico sem amortecimento

Vão (m)	N	$\delta_{estático}$ (mm)	$\delta_{dinâmico}$ (mm)	FAD
20	60	3,6548	4,1492	1,135
30	60	3,7450	4,0396	1,079
40	60	3,8954	4,1944	1,077

4.2.1.4. Modelo Numérico com Amortecimento

Para o modelo numérico com amortecimento as vigas foram discretizadas exatamente como no caso anterior e foi adotado uma taxa de amortecimento (ξ) de 5% para o primeiro e segundo modo de vibração, ksi1 e ksi2, respectivamente. Para tal caso os valores obtidos aparecem na tabela a seguir.

Tabela 4.5 - Resultados do modelo numérico com amortecimento

Vão (m)	N	ξ	$\delta_{estático}$ (mm)	$\delta_{dinâmico}$ (mm)	FAD
20	60	0,05	3,6548	3,9500	1,081
30	60	0,05	3,745	3,8670	1,033
40	60	0,05	3,8954	3,9735	1,020

4.2.1.5. Resumo dos FADs

A tabela abaixo apresenta os valores dos FADs calculados usando o modelo analítico e o modelo numérico.

Tabela 4.6- Resumo dos FADs para a validação do script

Vão (m)	Analítico (ξ = 0,00)	Numérico (ξ = 0,00)	Analítico (ξ = 0,05)	Numérico (ξ = 0,05)
20	1,136	1,135	1,081	1,081
30	1,079	1,079	1,033	1,033
40	1,077	1,077	1,020	1,020

Os valores obtidos nesta análise são suficientemente próximos e indicam que o script do MATLAB é confiável. O código numérico então está validado, entretanto, vale aqui ressaltar que o usuário deve estudar o programa com cuidado antes de utilizá-lo para que possa se ter um maior entendimento do mesmo e evitar erros grosseiros.

4.2.1.6. Estudo da Influência de Comboios de carga

Foi estudado aqui a influência da passagem de várias cargas consecutivas teria sobre o FAD das estruturas de pontes. Para isso, fixou-se o amortecimento em 5% (como foi mencionado anteriormente), a velocidade em 100 km/h e diminuiu-se a discretização para não se prejudicar tanto o tempo de processamento. Os resultados obtidos estão apresentados a seguir.

Para o caso de duas cargas consecutivas apenas, os resultados são os que se seguem.

Tabela 4.7 – Resumo dos FAD parra passagem de duas cargas móveis consecutivas

Vão (m)	N	ξ (%)	$\delta_{estático}$ (mm)	$\delta_{dinâmico}$ (mm)	FAD
20	30	5	3,6548	4,2722	1,1689
30	40		3,7450	4,0468	1,0806
40	60		3,8954	4,0964	1,0516
60	70		9,1362	11,001	1,2041
70	80		9,9531	11,978	1,2035
80	90		10,7179	12,9216	1,2056

a) 20 metros

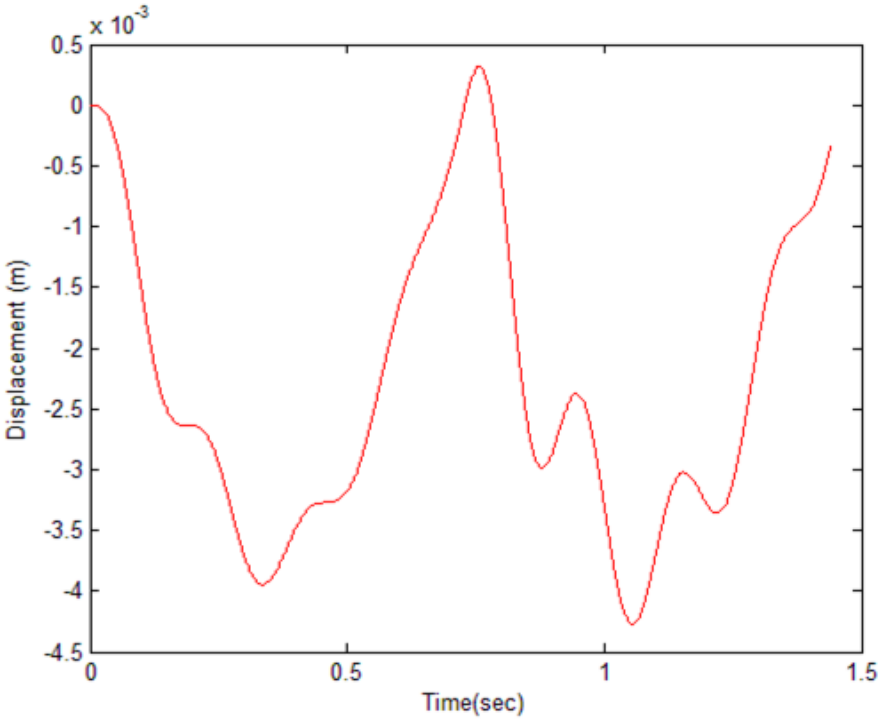


Figura 4.7 - Influência da passagem de duas cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 20 metros

b) 30 metros

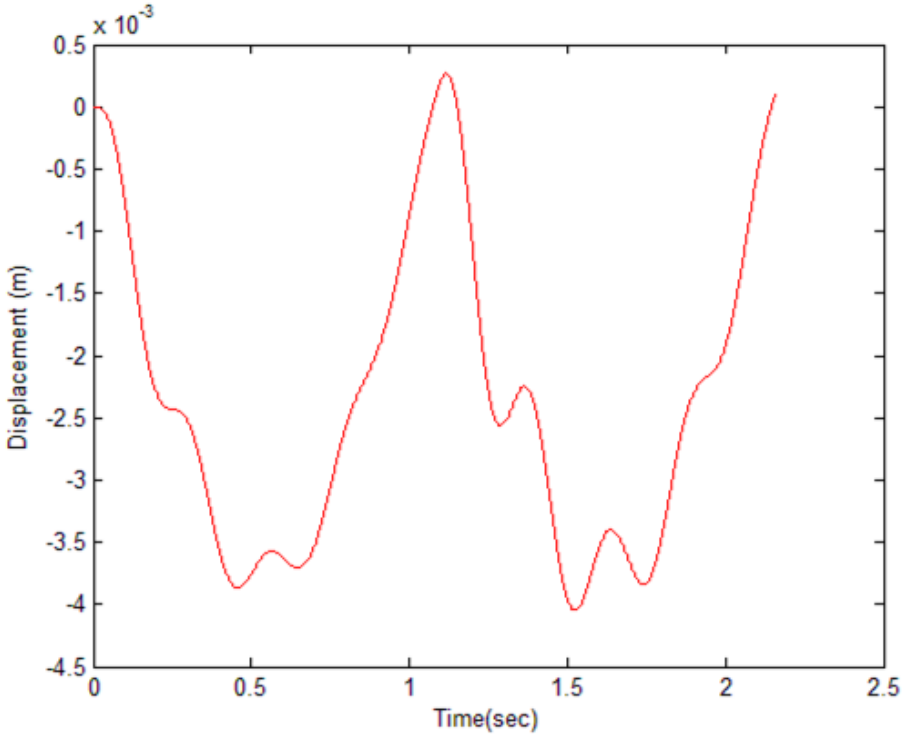


Figura 4.8 - Influência da passagem de duas cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 30 metros

c) 40 metros

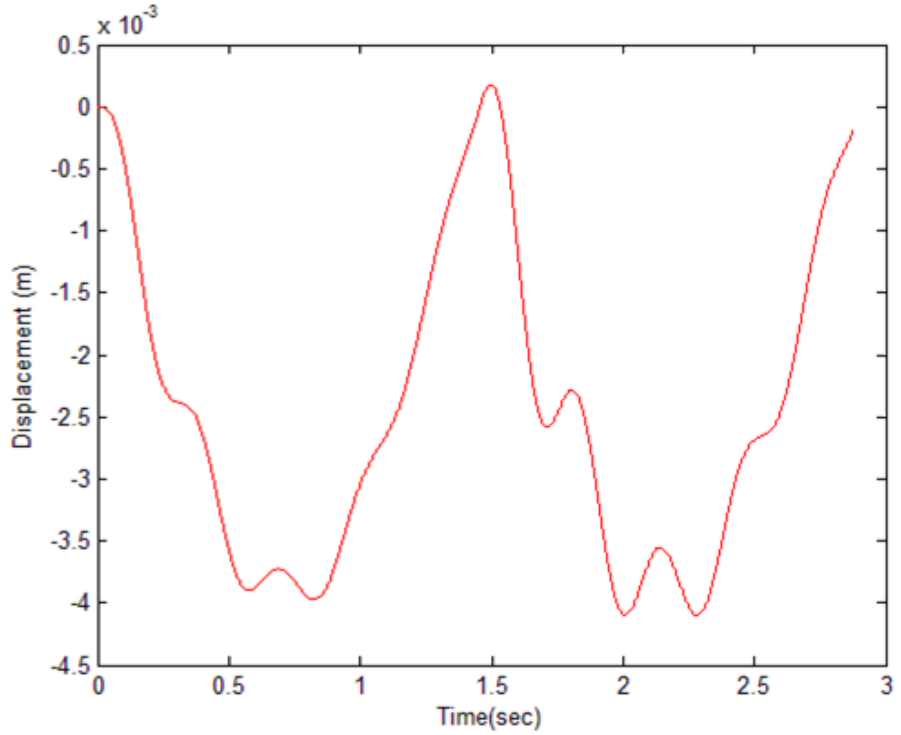


Figura 4.9 - Influência da passagem de duas cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 40 metros

d) 60 metros

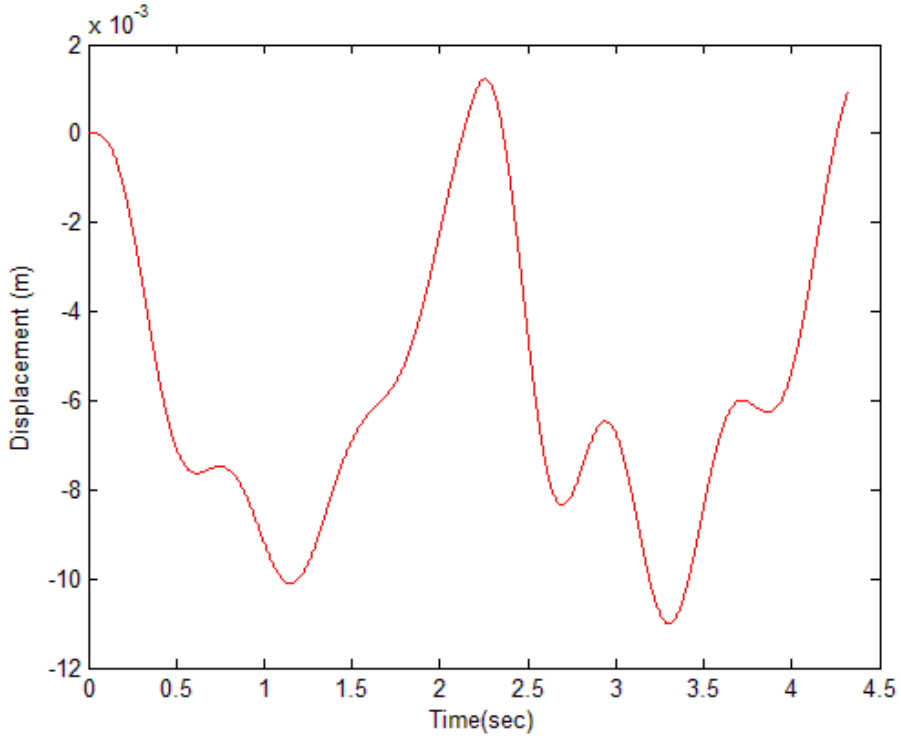


Figura 4.10 - Influência da passagem de duas cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 60 metros

e) 70 metros

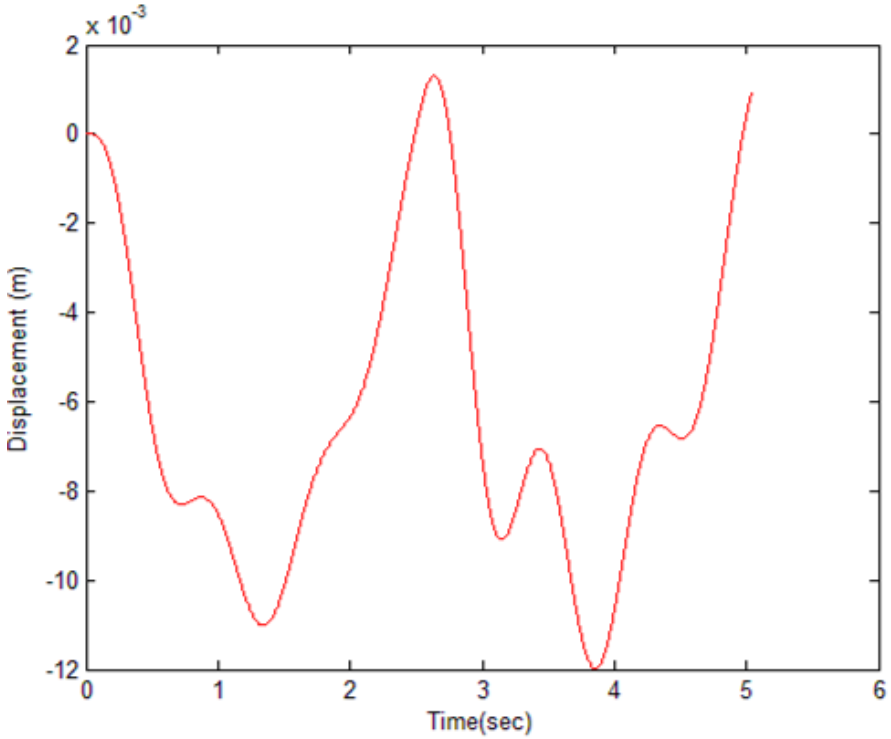


Figura 4.11 - Influência da passagem de duas cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 70 metros

f) 80 metros

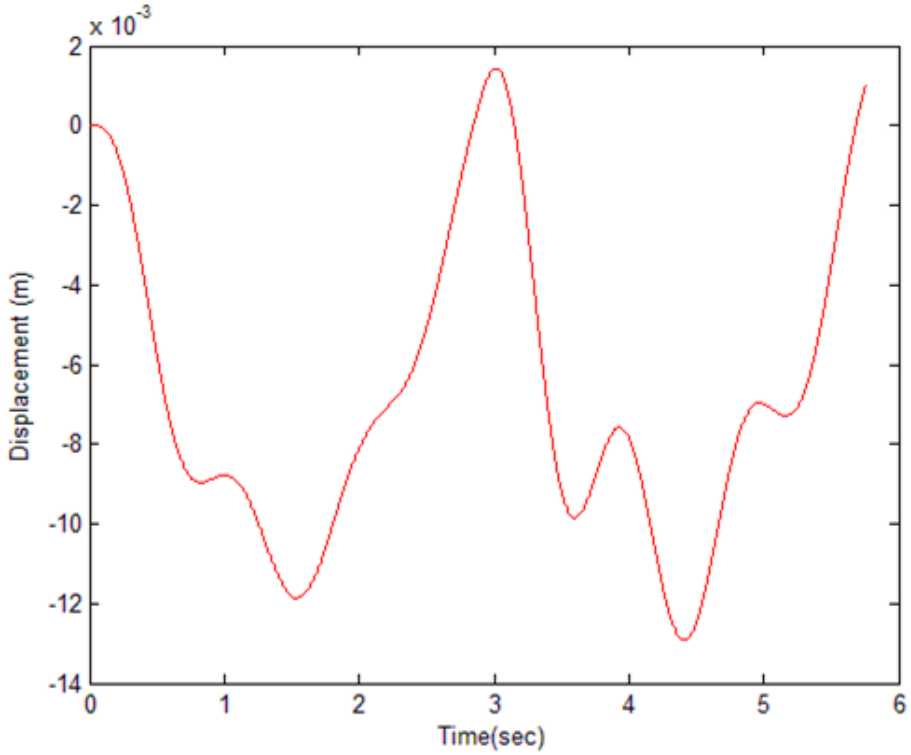


Figura 4.12- Influência da passagem de duas cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 80 metros

Para o caso de três cargas consecutivas apenas, o resumo dos resultados estão apresentados na tabela que se segue.

Tabela 4.8 – Resumo dos FAD parra passagem de três cargas móveis consecutivas

Vão (m)	N	ξ (%)	$\delta_{estático}$ (mm)	$\delta_{dinâmico}$ (mm)	FAD
20	30	5	3,6548	4,3330	1,1856
30	40		3,7450	4,0468	1,0806
40	60		3,8954	4,0964	1,0516
60	70		9,1362	11,0224	1,2065
70	80		9,9531	12,0045	1,2061
80	90		10,7179	12,9778	1,2109

a) 20 metros

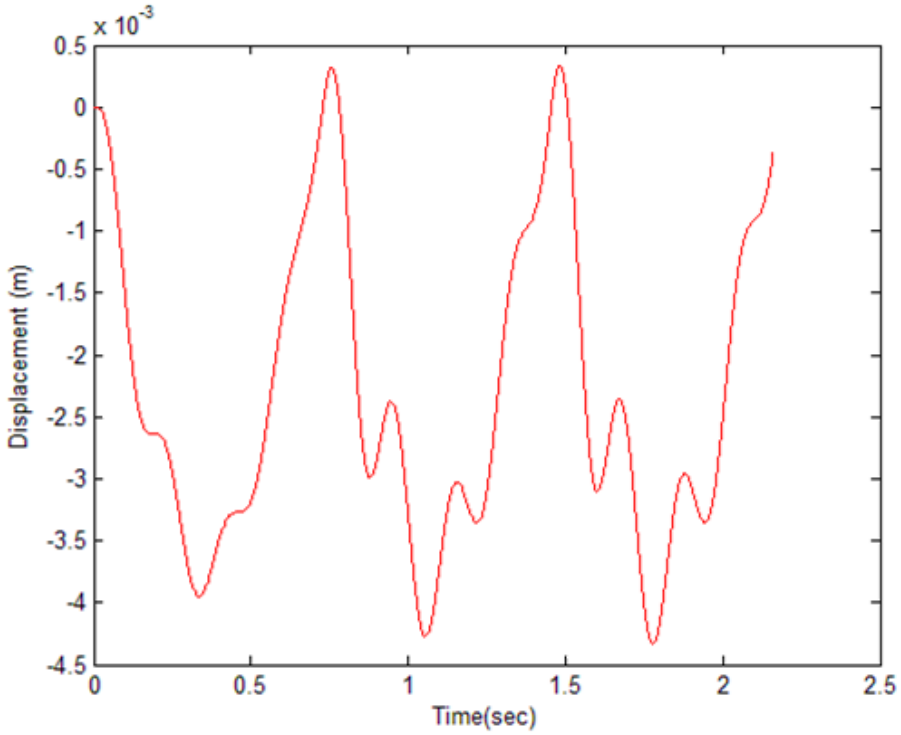


Figura 4.13- Influência da passagem de três cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 20 metros

b) 30 metros

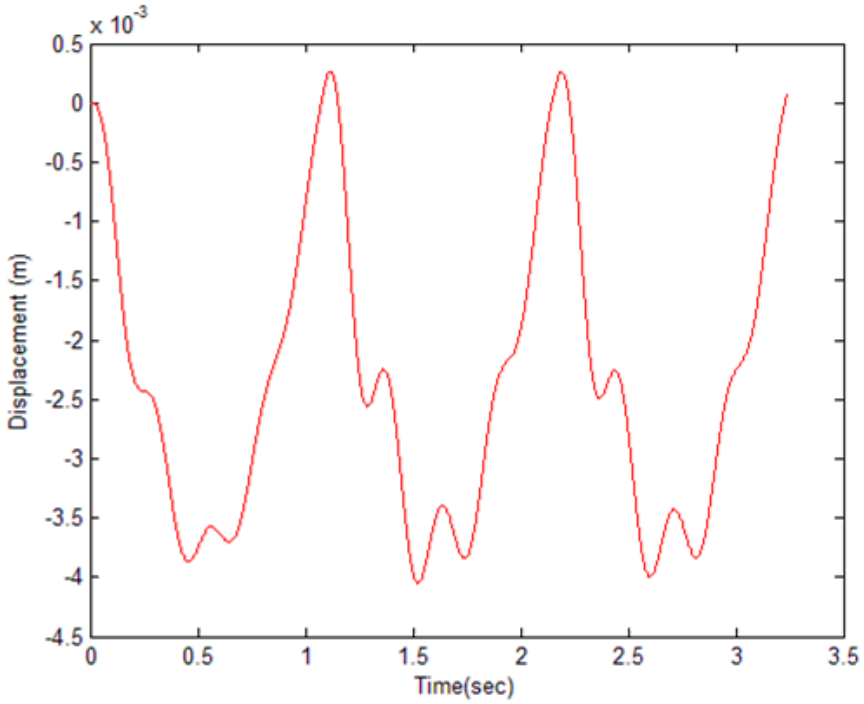


Figura 4.14 - Influência da passagem de três cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 30 metros

c) 40 metros

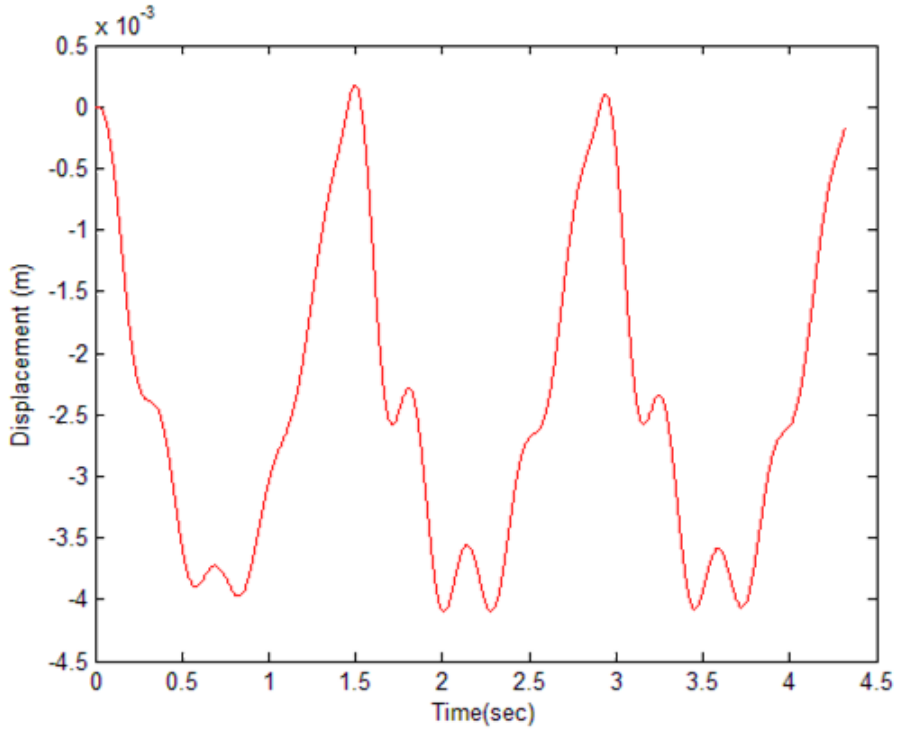


Figura 4.15 - Influência da passagem de três cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 40 metros

d) 60 metros

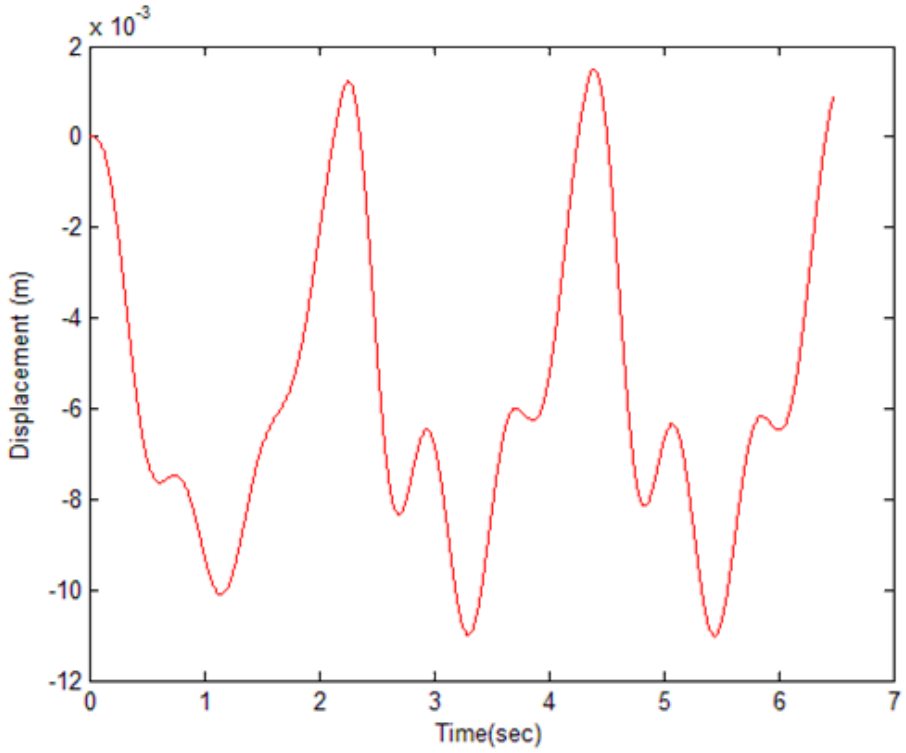


Figura 4.16 - Influência da passagem de três cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 60 metros

e) 70 metros

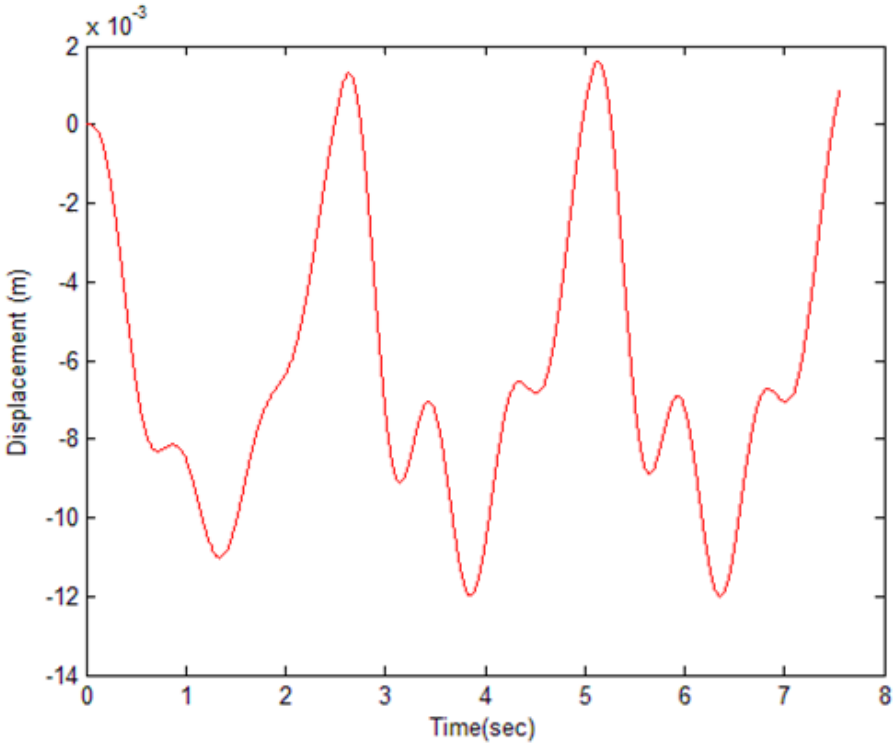


Figura 4.17 - Influência da passagem de três cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 70 metros

f) 80 metros

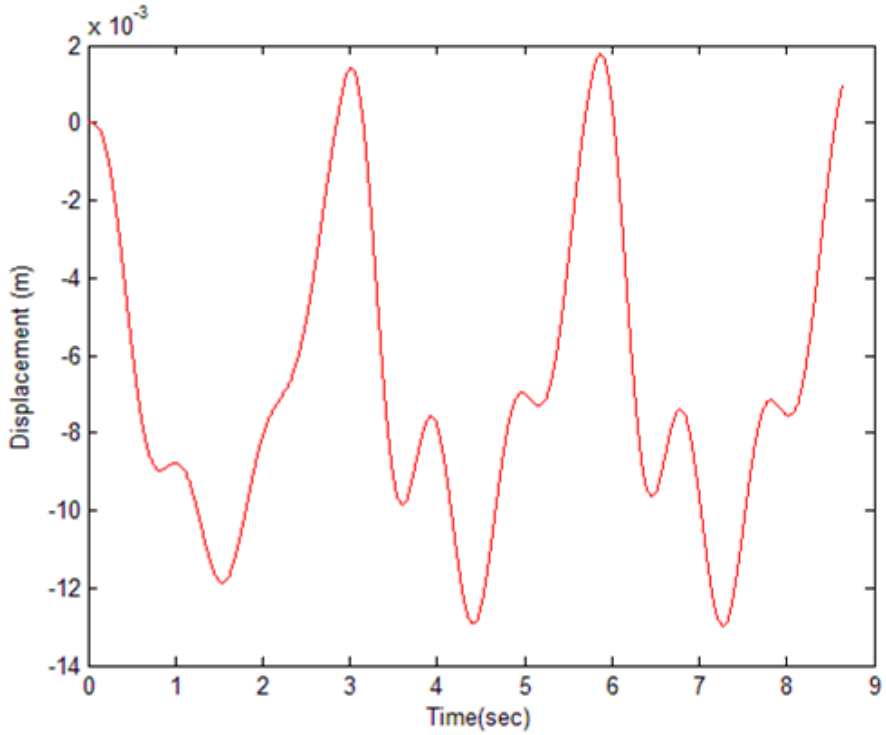


Figura 4.18 - Influência da passagem de três cargas móveis consecutivas sobre a ponte de 30 metros

4.2.2. Análise de vãos menores

Esta seção tem como objetivo inferir a influência que a velocidade e o amortecimento têm sobre o FAD quando se está analisando vãos relativamente pequenos de pontes, como 20, 30 e 40 metros. Para tal análise, foi implementada as formulações (2.50) e (2.58) no EXCEL devido a facilidade de modificação e geração de gráficos diversos dessa ferramenta.

4.2.2.1. Influência da Velocidade no FAD

Foram aqui analisadas as três pontes já discutidas anteriormente, só que agora com quatro velocidades distintas: 60, 80, 100 e 120 km/h. Admitiu-se, neste ponto, que o amortecimento (ξ) fosse igual a zero pois se desejava obter os maiores valores de FAD possíveis para comparação com a norma brasileira.

Os resultados a seguir apresentam o deslocamento vertical de um ponto situado no meio do vão das pontes em função do tempo.

Para o vão de 20 metros, obteve-se os seguintes resultados:

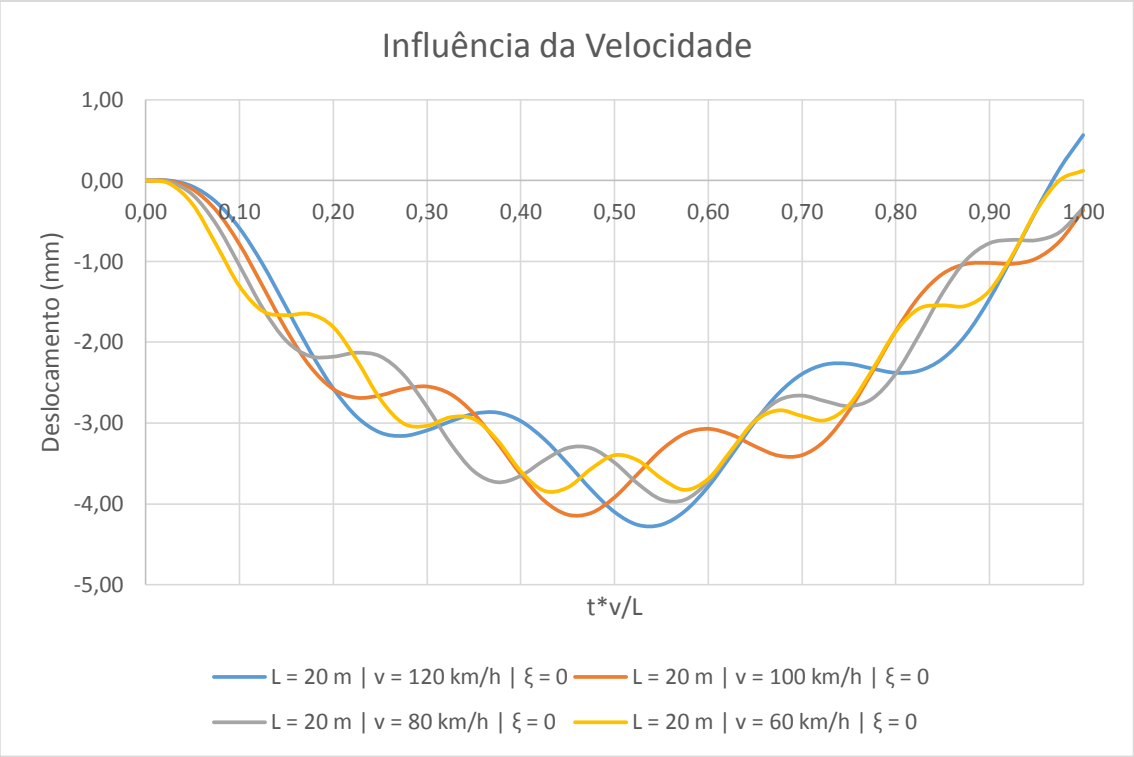


Figura 4.19 - Influência da velocidade no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 20 metros

Para o vão de 30 metros, obteve-se os dados a seguir.

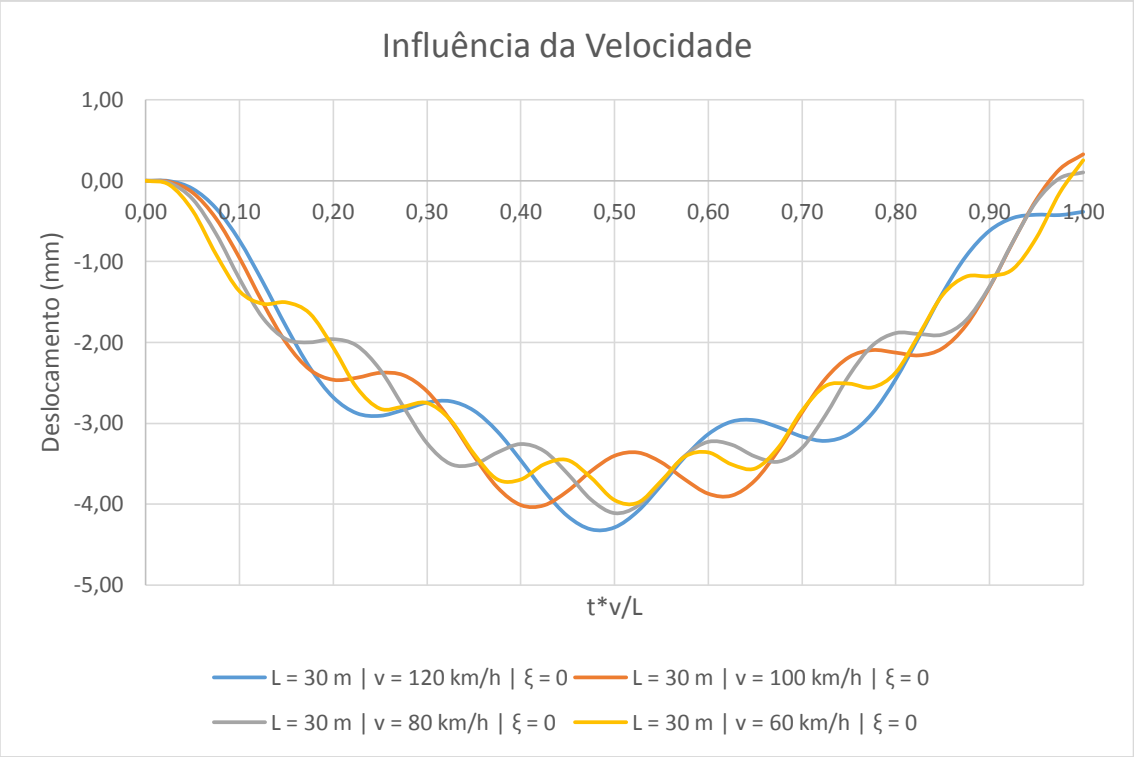


Figura 4.20 - Influência da velocidade no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 30 metros

Para o vão de 40 metros, os resultados obtidos estão mostrados no gráfico abaixo.

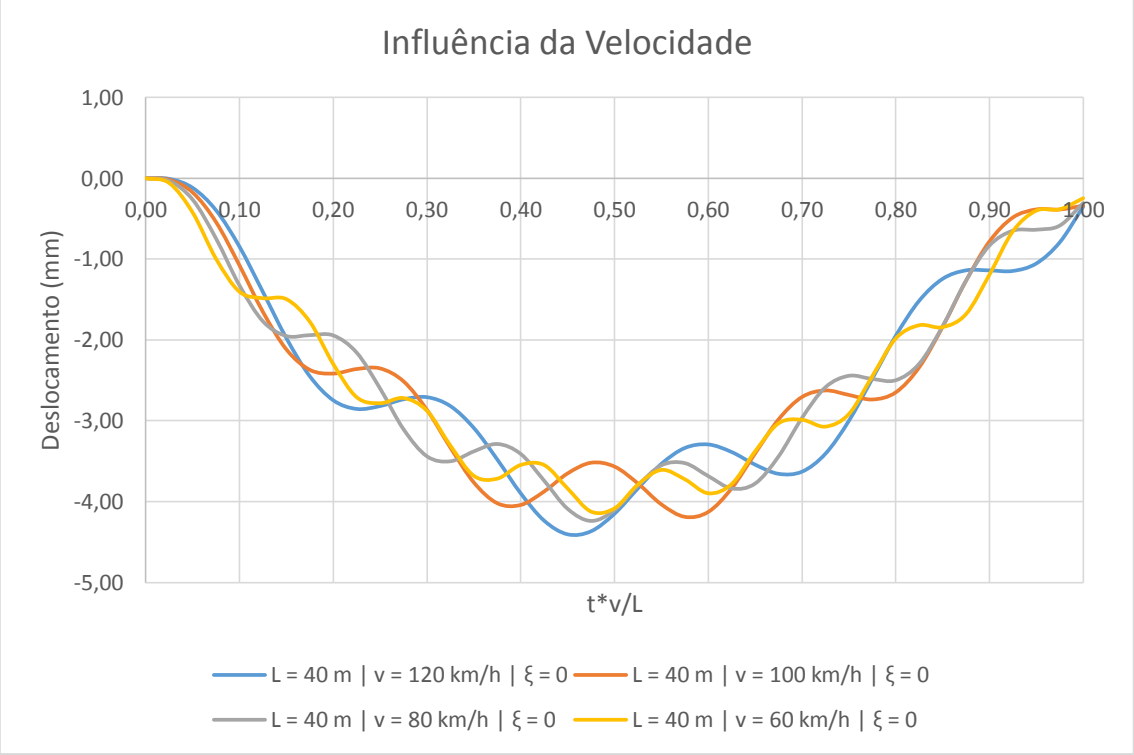


Figura 4.21 - Influência da velocidade no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 40 metros

A tabela a seguir apresenta os maiores deslocamentos e os FADs calculados para as estruturas anteriormente mencionadas. Além disso, pode-se verificar os valores dos

coeficientes de impactos sugeridos pelas NBR 7187 e 7188. Note que o deslocamento dinâmico máximo no meio do vão está representado por 'u_{max}' e o deslocamento no meio do vão para o caso estático 'u_0'.

Tabela 4.9 - Tabela resumo da influência da velocidade da carga móvel para pontes de pequenos vãos

L (m)	V (km/h)	ξ[1] (%)	u_{max} (mm)	u_0 (mm)	FAD	NBR 7187:2003	NBR 7188:2013
20	120	0	4,279	3,655	1,171	1,260	1,303
	100		4,144		1,134		
	80		3,975		1,088		
	60		3,859		1,056		
30	120		4,323	3,745	1,154	1,190	1,265
	100		4,039		1,078		
	80		4,111		1,098		
	60		4,008		1,070		
40	120		4,404	3,895	1,131	1,120	1,236
	100		4,194		1,077		
	80		4,225		1,085		
	60		4,150		1,065		

Nota-se que os valores do FAD obtidos para todos os vãos aumentam conforme se aumenta a velocidade da carga, entretanto, de modo geral, esses valores são inferiores aos coeficientes de impacto normativos, o que era de se esperar pois os valores de norma devem estar sempre a favor da segurança. Contudo, vale aqui salientar que, conforme o vão aumenta, os valores do FAD obtidos para velocidades maiores tende a se aproximar dos valores das NBR. Por essa perspectiva, pode-se concluir que as formulações da norma brasileira estão a favor da segurança no que diz respeito à análise dinâmica de uma carga móvel sobre uma ponte de pequeno vão. Vale aqui, contudo, apresentar a Tabela 4.10 - Comparação entre a massa do veículo a massa total das pontes menores.

Nesta última tabela, a variável 'M' representa a massa total da ponte e a variável "m" representa a massa total do veículo (a qual foi desprezada na análise). Os valores do coeficiente de impacto maiores que os FAD calculados possivelmente indicam que uma análise dinâmica incluindo a participação da massa do veículo no sistema deveria ser efetuada. Essa ideia é corroborada pelo fato de que a massa do veículo, em comparação com a da ponte de 20 metros, representa mais de 20% da massa da mesma, sendo, portanto, uma parcela que não deveria ser negligenciada na análise.

Tabela 4.10 - Comparação entre a massa do veículo a massa total das pontes menores

L (m)	M (kg)	m (kg)	m/M
20	220500	45872	20,8%
30	378750		12,1%
40	569000		8,1%

[1] Cenário hipotético desprezando-se o amortecimento estrutural

4.2.2.2. Influência do Amortecimento

Para se analisar a influência do amortecimento sobre pontes com vãos de 20, 30 e 40 metros, foi-se fixada a velocidade da carga como sendo igual a velocidade diretriz máxima definida pelo DNIT (100 km/h) e estudou-se três casos de amortecimento distintos de taxa de amortecimento:

- $\xi = 0\%$
- $\xi = 5\%$
- $\xi = 10\%$

Tais valores permitem verificar a influência que essa taxa tem sobre o FAD pois esses valores de amortecimento atendem ao critério exigido pela formulação apresentada em 2.2.11.2. Formulação Com Amortecimento Leve ($\xi \ll 1$).

Para o vão de 20 metros, os resultados obtidos estão apresentados no gráfico abaixo.

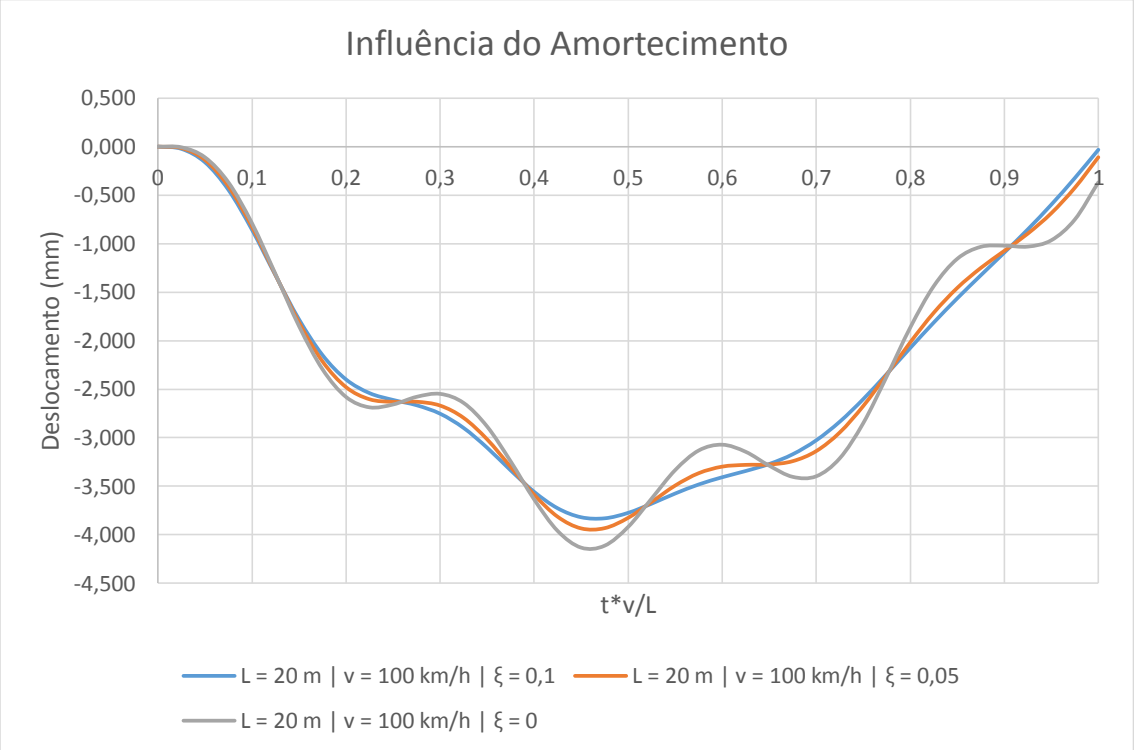


Figura 4.22 - Influência do amortecimento no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 20 metros

Para o vão de 30 metros, os valores de deslocamento para um ponto situado no meio do vão da ponte estão apresentados a seguir.

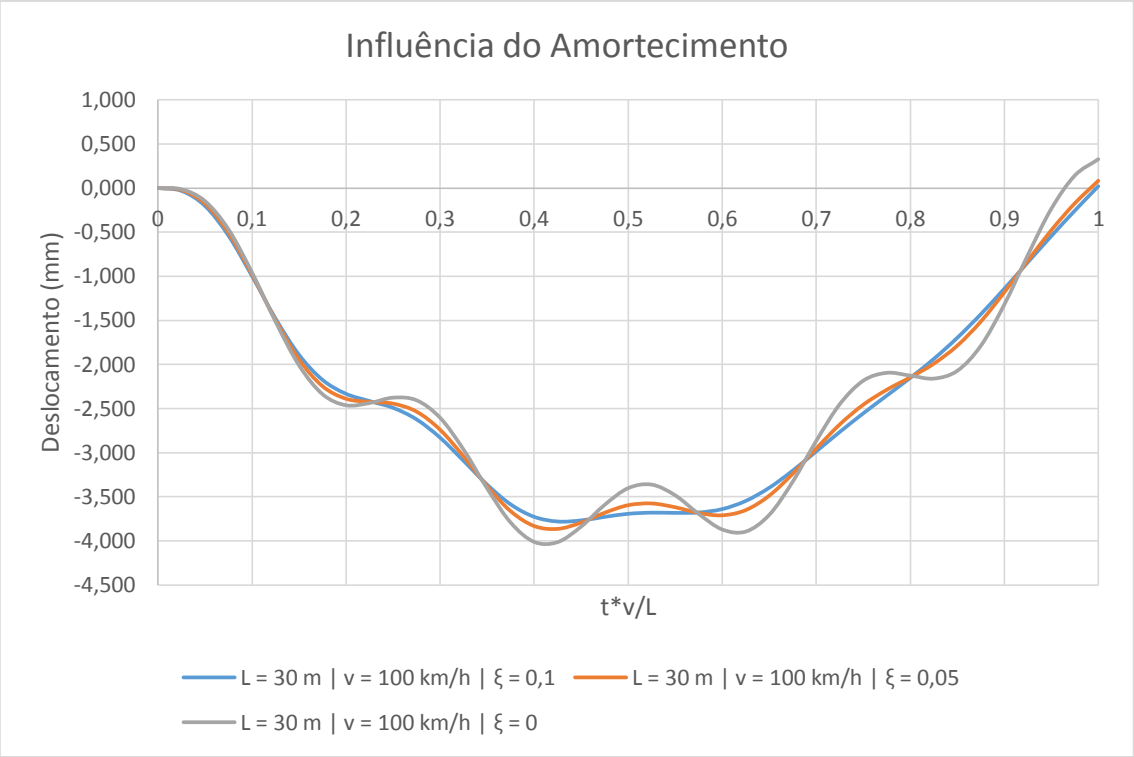


Figura 4.23 - Influência do amortecimento no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 30 metros

Para o vão de 40 metros, os resultados obtidos estão mostrados no gráfico abaixo.

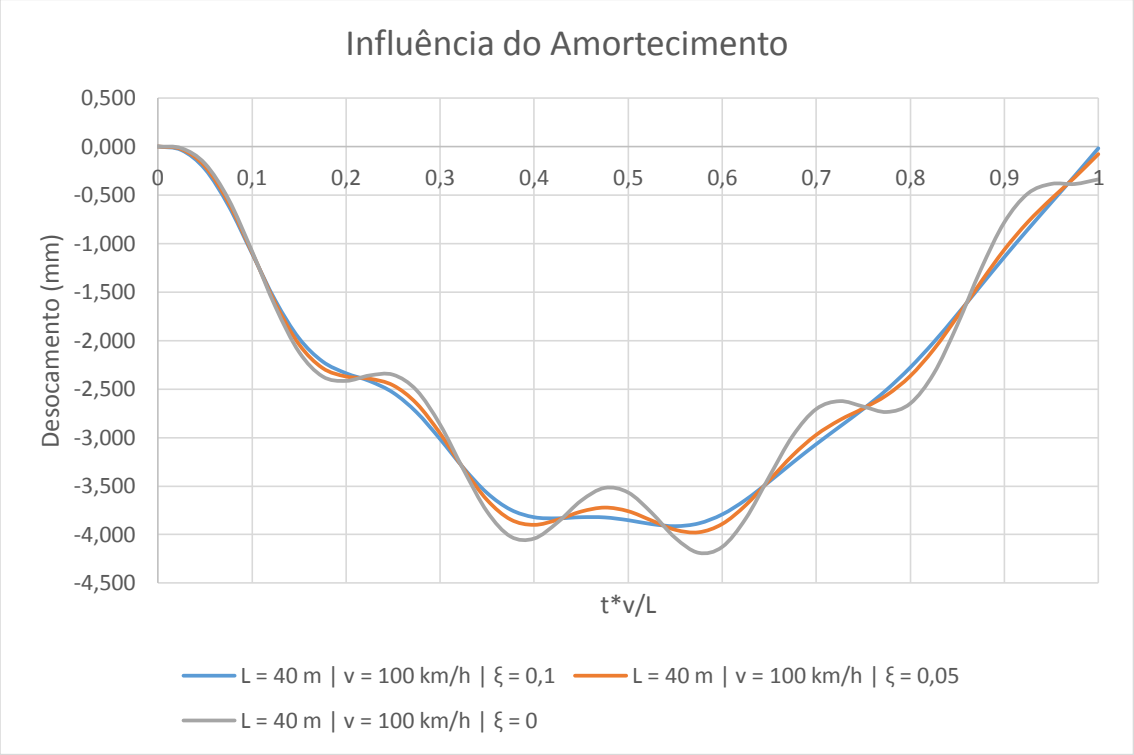


Figura 4.24 - Influência do amortecimento no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 40 metros

A tabela a seguir apresenta o resumo dos três gráficos anteriormente apresentados, explicitando-se o deslocamento dinâmico máximo no meio do vão (u.max) e o deslocamento no meio do vão para o caso estático (u.0).

Tabela 4.11 - Tabela resumo da influência do amortecimento da estrutura para pontes de pequenos vãos

L (m)	v (km/h)	ξ	u.max (mm)	u.0 (mm)	FAD	NBR 7187:2003	NBR 7188:2014
20	100	0,1	3,837	3,655	1,050	1,260	1,303
		0,05	3,948		1,080		
		0	4,144		1,134		
30		0,1	3,781	3,745	1,010	1,190	1,265
		0,05	3,868		1,033		
		0	4,039		1,078		
40		0,1	3,913	3,895	1,004	1,120	1,236
		0,05	3,977		1,021		
		0	4,194		1,077		

Pode-se verificar claramente na tabela acima que o aumento do amortecimento culmina em uma redução representativa do FAD, como era de se esperar. De modo geral, a inclusão do amortecimento afetou mais os vãos de 30 e 40 metros, os quais tiveram os seus FAD reduzidos para valores muito próximos de uma unidade, quando o amortecimento é da ordem de 10%.

É notório o fato de que, mais uma vez, os FAD calculados até aqui são bem inferiores aos coeficientes de impacto normativo. Mostrando-se assim que a simplificação adotada pelas normas se mostra conservadora. Vale, entretanto, ressaltar novamente o que foi comentado na seção anterior: para vãos menores, nos quais a massa do veículo representa uma parcela significativa da massa da ponte, a análise da estrutura apenas como carga móvel pode não ser a mais adequada para esses casos.

4.2.3. Análise de vãos maiores

Esta seção tem como objetivo se verificar a influência que a velocidade e o amortecimento têm sobre o FAD quando se está analisando vãos relativamente maiores de pontes, como 60, 70 e 80 metros. Para tal análise, foi implementada as formulações (2.50) e (2.58) no EXCEL devido a facilidade de modificação e geração de gráficos diversos dessa ferramenta.

Vale aqui ressaltar que para as estruturas a seguir, o coeficiente de impacto sugerido pela NBR 7187:2003 seria de unitário, o que implica dizer que os esforços dinâmicos provocados nestas estruturas são iguais aos estáticos.

4.2.3.1. Influência da Velocidade

Foram aqui analisadas as três pontes já mencionadas anteriormente, só que agora com quatro velocidades distintas: 60, 80, 100 e 120 km/h. Admitiu-se, neste ponto que o amortecimento (ξ) fosse igual a zero pois se desejava obter os maiores valores de FAD possíveis para comparação com a norma brasileira.

Os resultados a seguir apresentam o deslocamento vertical de um ponto situado no meio do vão das pontes em função do tempo.

Os resultados obtidos para as três pontes estão apresentados nos gráficos a seguir.

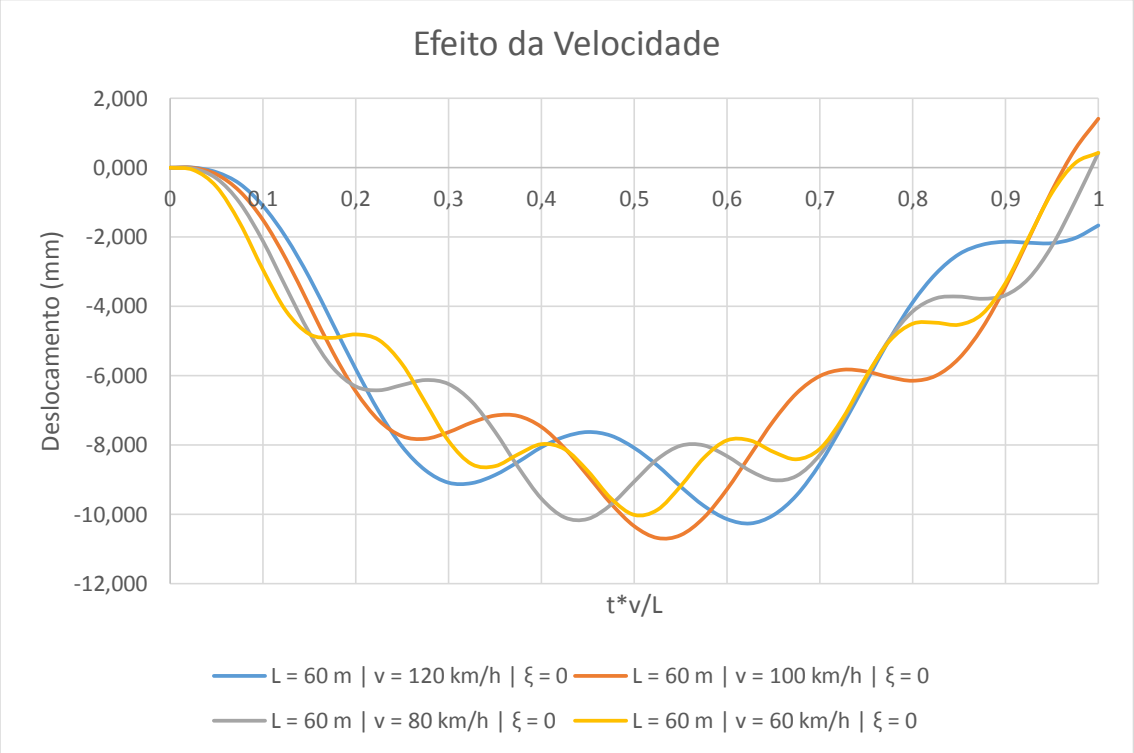


Figura 4.25 - Influência da velocidade no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 60 metros

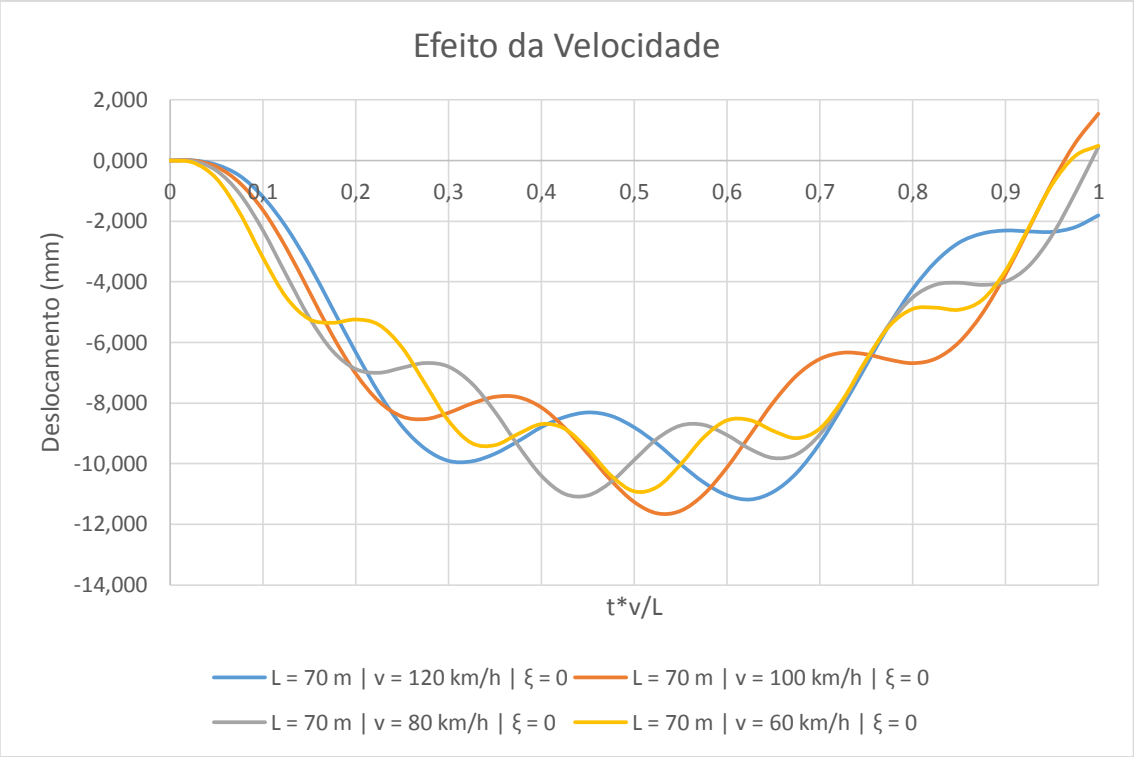


Figura 4.26 - Influência da velocidade no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 70 metros

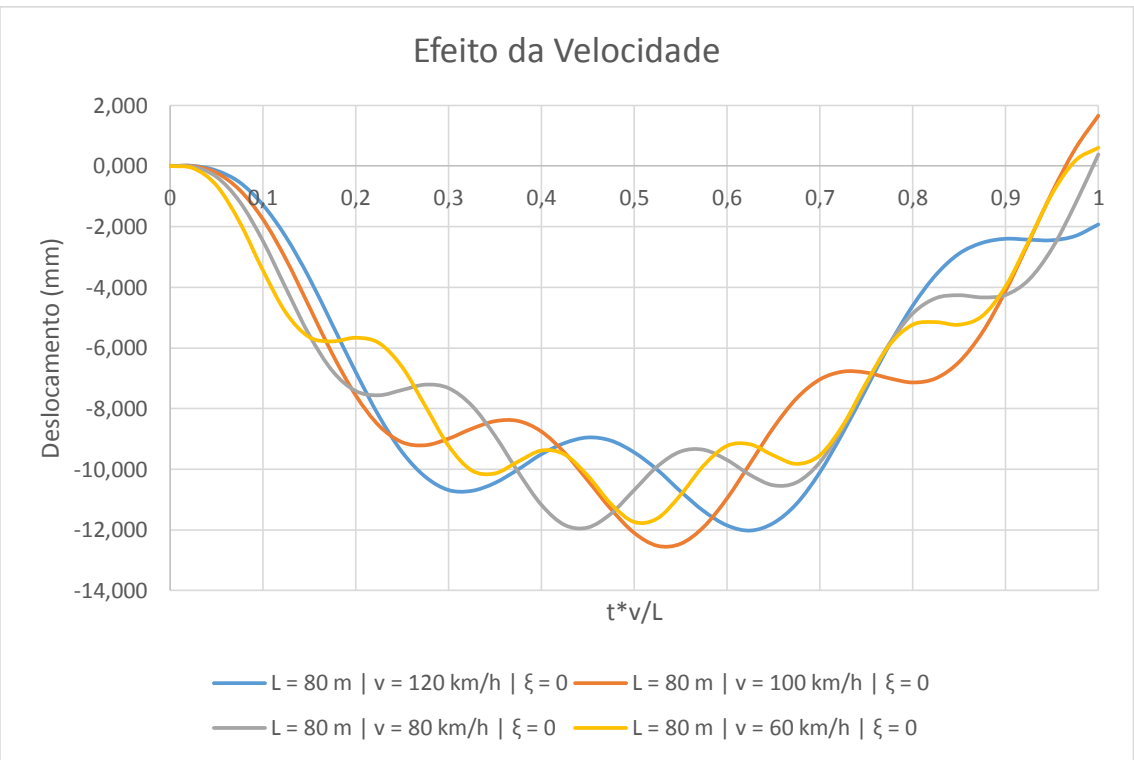


Figura 4.27 - Influência da velocidade no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 80 metros

A tabela a seguir apresenta os maiores deslocamentos e os FADs calculados para as estruturas anteriormente mencionados. Além disso, pode-se verificar os valores dos coeficientes de impactos sugeridos pelas NBR 7187 e 7188. Note que o deslocamento

dinâmico máximo no meio do vão está representado por 'u_{max}' e o deslocamento no meio do vão para o caso estático 'u_0'.

Tabela 4.12 - Tabela resumo da influência da velocidade da carga móvel para pontes de vãos maiores

L (m)	v (km/h)	ξ (%)	u_{max} (mm)	u_0 (mm)	FAD	NBR 7187:2003	NBR 7188:2013
80	120	0	12,002	10,718	1,120	1,00	1,163
	100		12,552		1,171		
	80		11,926		1,113		
	60		11,747		1,096		
70	120		11,170	9,953	1,122	1,00	1,177
	100		11,655		1,171		
	80		11,070		1,112		
	60		10,913		1,096		
60	120		10,258	9,136	1,123	1,00	1,193
	100		10,698		1,171		
	80		10,160		1,112		
	60		10,019		1,097		

Note aqui que os valores do FAD obtidos para todos os vãos aumentam conforme se aumenta a velocidade da carga, como era de se esperar. Entretanto, as velocidades de 100 km/h produzem um FAD superior àqueles produzidos por uma velocidade de 120 km/h. Pois para vãos maiores a velocidade crítica destes se aproxima de valores reais de velocidade de veículos.

É importante aqui ressaltar que, para todos os casos de velocidades estudados, com taxa de amortecimento igual a zero, todos os FAD obtidos deram maior do que os valores da NBR 7187:2003. Além disso, para o vão de 80 metros, para uma velocidade de 100 km/h, obteve-se um FAD superior ao da NBR 7188:2013, a qual sugere coeficientes de impacto de valor relativamente maiores que aqueles indicados pela norma de 2003.

Tabela 4.13 - Comparação entre a massa do veículo a Massa total das pontes maiores

L (m)	M (kg)	m (kg)	m/M
60	1119000	45871,56	4,1%
70	1400000		3,3%
80	1708000		2,7%

A tabela acima mostra que a relação entre a massa do veículo ('m') e a massa total da ponte ('M') para estes casos de estudo são todas inferiores a 5%. Deste modo, a consideração da massa do veículo sobre a estrutura não deve gerar valores representativamente maiores ou menores que os FAD calculados como carga móvel somente.

4.2.3.2. Influência do Amortecimento

Para se analisar a influência do amortecimento sobre pontes com vãos de 60, 70 e 80 metros, foi-se fixada a velocidade da carga como sendo igual a velocidade diretriz máxima definida pelo DNIT (100 km/h) e estudou-se três casos de amortecimento distintos de taxa de amortecimento:

- $\xi = 0\%$
- $\xi = 5\%$
- $\xi = 10\%$

Tais valores permitem verificar a influência que essa taxa tem sobre o FAD pois essa formulação atende ao critério exigido pela formulação apresentada em 2.2.11.2. Formulação Com Amortecimento Leve ($\xi \ll 1$).

Os resultados obtidos para as três pontes estão apresentados nos gráficos a seguir.

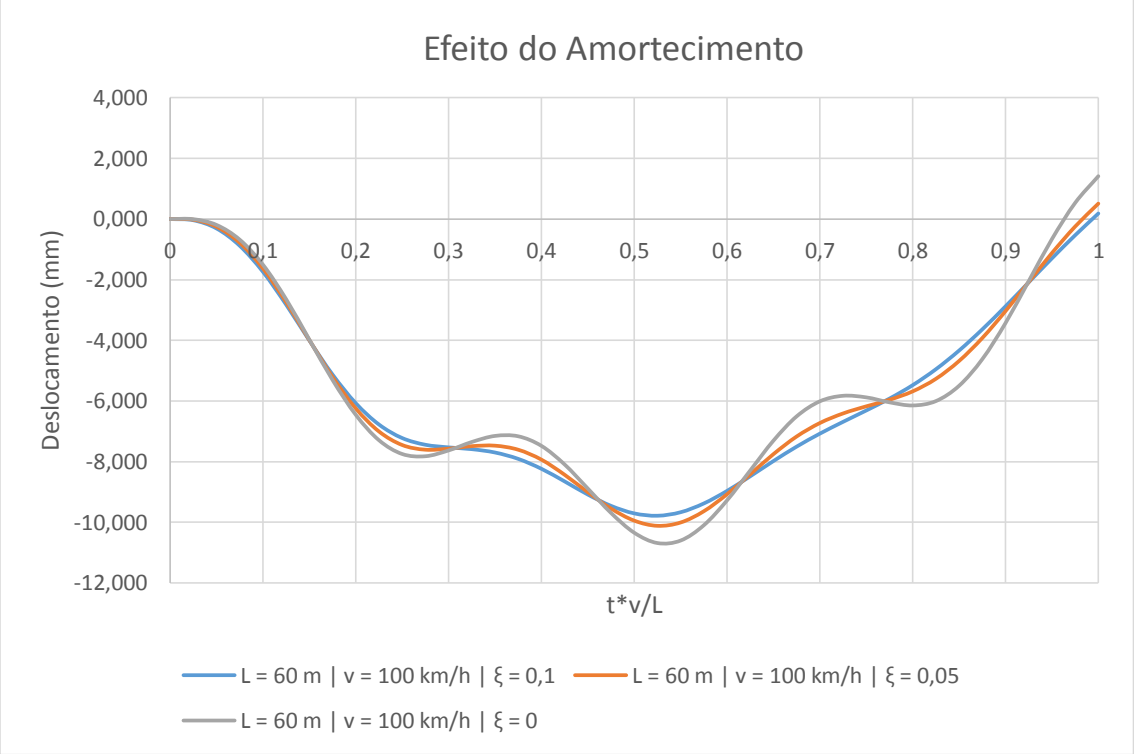


Figura 4.28 - Influência do amortecimento no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 60 metros

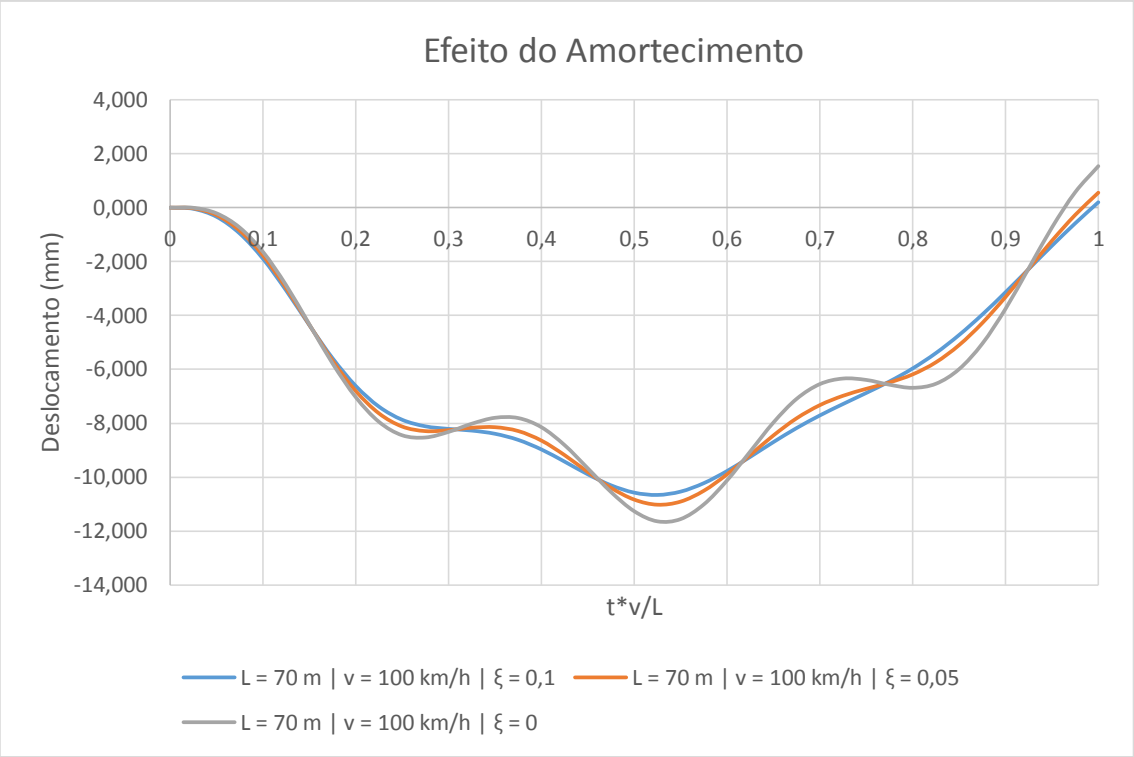


Figura 4.29 - Influência do amortecimento no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 70 metros

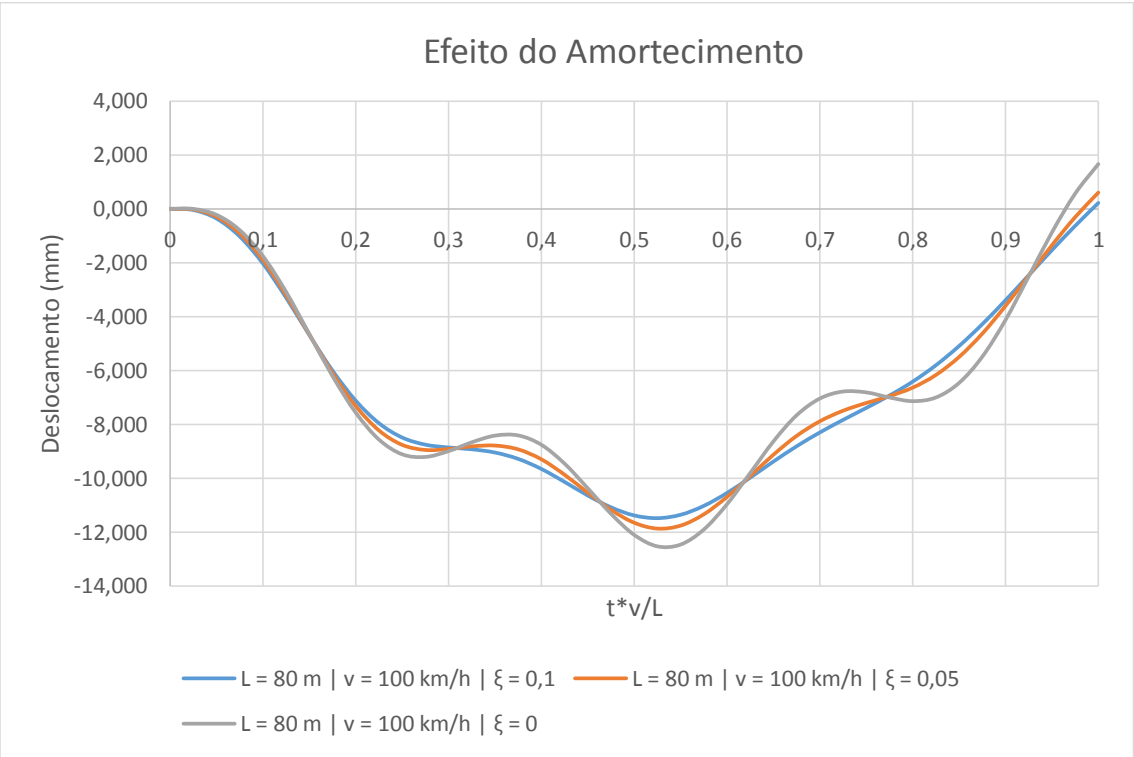


Figura 4.30 - Influência do amortecimento no deslocamento de um ponto situado no meio do vão da ponte de 80 metros

A tabela a seguir apresenta os maiores deslocamentos e os FADs calculados para as estruturas anteriormente mencionados. Além disso, pode-se verificar os valores dos coeficientes de impactos sugeridos pelas NBR 7187 e 7188. Note que o deslocamento

dinâmico máximo no meio do vão está representado por 'u_{max}' e o deslocamento no meio do vão para o caso estático 'u_0'.

Tabela 4.14 - Tabela resumo da influência do amortecimento para pontes de vãos maiores

L (m)	v (km/h)	ξ	u_{max} (mm)	u_0 (mm)	FAD	NBR 7187:2003	NBR 7188:2013
80	100	0,1	11,469	10,718	1,0701	1,00	1,163
		0,05	11,861		1,1066		
		0	12,552		1,1711		
70		0,1	10,654	9,953	1,0705	1,00	1,177
		0,05	11,011		1,1063		
		0	11,655		1,1710		
60		0,1	9,781	9,136	1,0705	1,00	1,193
		0,05	10,107		1,1063		
		0	10,698		1,1709		

Pode-se verificar claramente na tabela acima que o aumento do amortecimento culmina em uma redução representativa do FAD, como era de se esperar. Porém, para uma dada taxa de amortecimento, os valores dos FAD parecem convergir, independentemente do vão da ponte.

A inclusão do amortecimento para vãos maiores parece afetar de forma mais sutil vãos maiores do que os vãos menores. Note também que, mesmo para taxas de amortecimentos da ordem de 10%, os valores dos FAD não convergem para uma unidade, contradizendo a NBR 7187:2003.

4.3. Discussões

No que diz respeito à validação do script do MATLAB, pôde-se inferir que os resultados deste modelo, o qual usa o método dos elementos finitos associado com o método de integração direta de Newmark, são praticamente idênticos àqueles obtidos através da formulação analítica. Fica assim validado o código computacional, fazendo-se a ressalva que o usuário deve estuda-lo antes de utiliza-lo para não surjam erros grosseiros.

No que diz respeito à variação da velocidade com que a carga móvel se desloca sobre a ponte, infere-se que, para os vãos menores, conforme se aumentava a velocidade, notava-se um aumento significativo do FAD. O que mostra uma clara sensibilidade dessas estruturas à velocidade da carga. Por outro lado, para vãos maiores, o aumento da velocidade não proporciona de forma alguma o mesmo aumento do FAD que os casos de vãos menores. Além disso, para tais vãos ficou evidenciado que os maiores valores de FAD foram obtidos para uma velocidade de 100 km/h e não de 120km/h. Isso se justifica pelo fato de que, com o aumento do vão, os períodos referentes aos modos de vibração são relativamente maiores. Desse modo, o veículo trafegando a uma velocidade inferior

pode causar a excitação desse modo e, consequentemente, provocar maiores deslocamentos na ponte.

No que diz respeito ao amortecimento, como era de se esperar, o amortecimento provocou a diminuição dos FAD para todas as pontes. Entretanto, foram as pontes de menores vãos que se mostraram mais sensíveis a esse fator. As pontes de maior vão apresentaram uma tendência de convergir para um mesmo FAD conforme o amortecimento aumentava.

Vale aqui, mais uma vez, ressaltar que, como foi visto nas tabelas Tabela 4.10 - Comparação entre a massa do veículo a massa total das pontes menores e Tabela 4.13 - Comparação entre a massa do veículo a Massa total das pontes maiores, para pequenos vãos a desconsideração da participação da massa do veículo na análise dinâmica pode ser perigosa, visto que o automóvel pode representar uma parcela considerável da massa total da ponte e, consequentemente, sua parcela seria muito pertinente. Para os casos de vãos maiores ou iguais a 60 metros, foi visto que a massa do veículo representa menos de 5% da massa total da ponte, o que seria um indicativo de que a desconsideração da mesma na análise é aceitável.

Finalmente, para discutirmos os valores dos coeficientes de impacto normativo temos que nos ater a dois detalhes importantes:

- A taxa de amortecimento em estruturas de concreto usuais é tida como 5% de um modo geral;
- Como estamos tratando valores normativos, não faz sentido usar uma velocidade maior que a velocidade diretriz máxima definida pelo DNIT.

Tendo-se dito isso, para os casos de veículos passando sobre pontes com uma velocidade de 100 km/h e uma taxa de amortecimento de 5%, construiu-se a tabela a seguir com base nas análises anteriormente apresentadas.

Tabela 4.15 - Comparação entre os FAD calculados o os coeficientes de impacto normativos

Vão (m)	V (km/h)	ξ (%)	FAD	NBR 7187:2003	NBR 7188:2013
20	100	5	1,0803	1,260	1,303
30			1,0328	1,190	1,265
40			1,0211	1,120	1,236
60			1,1063	1,000	1,193
70			1,1063	1,000	1,177
80			1,1066	1,000	1,163

Por esta tabela, pode-se ver que a norma de 2003 apenas está a favor da segurança apenas para os vãos de 20, 30 e 40 metros. Para vãos maiores que esses, esta norma sugere de coeficientes de impacto unitários, representando assim valores de coeficientes de impacto inferiores aos FAD encontrados pela análise anteriormente apresentada.

Por outro lado, a norma de 2013, apresenta-se a favor da segurança para todos os casos mencionados. Ela cobre com uma certa margem de segurança os valores de FAD encontrados para todos os casos, o que é interessante visto que como estamos tratando de cargas móveis e não de massas móveis sobre uma ponte, os efeitos da irregularidades do pavimento não foram considerados. Esses efeitos, os quais foram comentados no capítulo 2, podem amplificar ainda mais os efeitos dinâmicos calculados para uma estrutura como essa.

No que diz respeito à influência dos comboios, obteve-se que a passagem de dois veículos consecutivos ocasionaria em um FAD bem superior ao caso com de um único veículo apenas. Entretanto, a adição do terceiro veículo trafegando sobre a ponte, não acrescentou nenhuma influência sobre o FAD dessas estruturas, uma vez que a velocidade com a qual os mesmos trafegam não é suficientemente grande para se causar a ressonância da estrutura. Nota-se, entretanto, que para vãos maiores, a passagem de comboios produz FAD maiores que aqueles sugeridos por todas as normas, o que sugere que a estrutura destas pontes seja relativamente flexível.

Para se verificar a questão da flexibilidade da estrutura, como foi mencionado no capítulo 2, este trabalho recomenda a utilização do critério apresentado no Anexo 1: Critério do Eurocode 1 Parte 2 para definir a necessidade ou não de análise dinâmica em pontes. O resumo desta verificação está apresentado na tabela a seguir.

Tabela 4.16 - Verificação da obrigatoriedade da análise dinâmica para as estruturas analisadas

L	n.0 max (Hz)	n.0 (Hz)	n.0 min (Hz)	v/n.0	(v/n.0) lim	m (kg/m)	Obrigatoriedade da Análise Dinâmica?
80	3,574	1,124	1,762	24,715	15,85	21350	**Sim**
70	3,949	1,288	1,907	21,563	15,83	20000	**Sim**
60	4,432	1,504	2,089	18,470	15,56	18650	**Sim**
40	6,002	3,230	2,655				Não
30	7,443	4,038	3,148				Não
20	10,080	5,357	4,000				Não

Pode-se verificar claramente que as estruturas com 60, 70 e 80 metros de vão seriam consideradas muito flexíveis para a aplicação do coeficiente de impacto segundo o Eurocode. Deste modo, justifica-se o fato de se encontrar FAD maiores que aqueles sugeridos por todos os códigos verificados. Note que a explicação dos termos apresentados na tabela acima estão explicados no Anexo 1: Critério do Eurocode 1 Parte 2 para definir a necessidade ou não de análise dinâmica em pontes.

O gráfico a seguir mostra os dados da Tabela 4.15 - Comparação entre os FAD calculados o os coeficientes de impacto normativos inserido no Figura 2.14 - Gráfico comparando os coeficientes de impacto de diversas normas. Esse gráfico permite uma visualização mais fácil dos resultados obtidos.

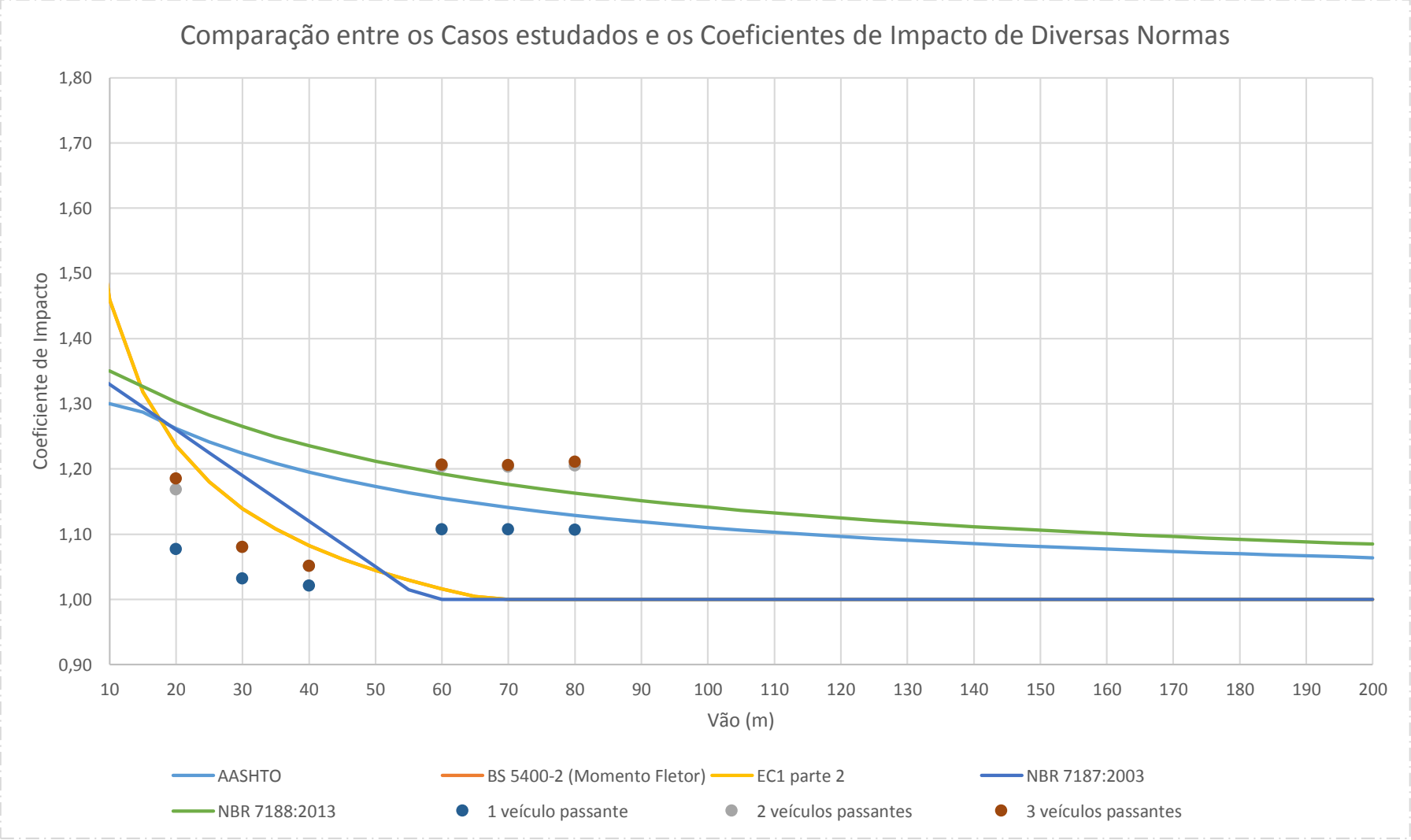


Figura 4.31 - Comparação entre dados calculados e diversas normas

5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

As normas NBR 7187:2003 e NBR 7188:2013 permitem que a análise dinâmica para a estrutura de pontes com vãos inferiores a 200 metros seja simplificada por uma análise estática majorada por um fator denominado de coeficiente de impacto. A razão para essa simplificação é dada visto a complexidade exigida para se fazer uma análise dinâmica completa da estrutura.

Esta simplificação obviamente não corresponde à realidade do comportamento das estruturas de pontes, uma vez que diversos parâmetros influenciam este comportamento. Entretanto, a adoção desta metodologia proporciona uma grande simplificação nos cálculos, pois representa de forma aceitável o comportamento dinâmico de certos tipos de estruturas.

Uma ressalva aqui deve ser feita no que diz respeito à quando a análise com base na dinâmica das estruturas é obrigatória e, portanto, não se pode usar o coeficiente de impacto definido em norma. A NBR 7188:2013 apenas diz que o coeficiente de impacto pode ser usado para pontes de vãos menores ou iguais a 200 metros, não fazendo qualquer referência à rigidez da estrutura. Este trabalho, por outro lado, recomenda a utilização do critério adotado pelo Eurocode 2 Parte 1, que sugere um critério simples e objetivo para definição da necessidade ou não da análise dinâmica da estrutura. [2] Esses critérios foram adotados para se verificar as estruturas analisadas e concluiu-se que para as estruturas de maiores vãos a análise dinâmica não poderia ser dispensada. Não poderia se chegar a esta conclusão pelas normas brasileiras, pois as mesmas usam apenas termos vagos como "estruturas sensíveis" e "baixa rigidez", sem sequer se quantificar que valores de caracterizariam tais tipo de estruturas ou se fazer referência a outras normas que o façam.

Foi apresentado neste trabalho o código do MATLAB escrito originalmente pelo autor Hügül (2005). Os termos presentes neste script foram traduzidos e o código foi validado para o caso de vigas biapoiadas sobre a ação de uma carga móvel com e sem a consideração do amortecimento. Tal programa fica disponibilizado no Anexo 6 deste trabalho para que outros autores possam usá-lo e aprimorá-lo.

No estudo sobre a influência da velocidade da carga móvel sobre o FAD chegou-se à conclusão que, de modo geral, o FAD tende a aumentar com o aumento da velocidade da carga. Isto se dá devido ao fato de que, conforme se aumenta a velocidade com a qual a carga trafega sobre a estrutura, está se aproximando cada vez mais do valor da velocidade que causaria ressonância da estrutura (a qual é chamada de velocidade crítica por Frýba (1972)). Isso fica evidente quando se analisa os vãos pequenos, nos quais se tem um pequeno período para os primeiros modos de vibração e, consequentemente, uma grande

[2] Para mais informações sobre esse procedimento, consultar o Anexo 1 deste trabalho.

velocidade crítica. No caso dos vãos maiores, onde se tem um período maior, a velocidade crítica começa a ter menores valores, se aproximando dos valores analisados.

Sobre o amortecimento, concluiu-se que o aumento do mesmo tende a diminuir os FAD (como já era de se esperar). Entretanto, os vãos menores se mostraram muito mais sensíveis às variações neste valor, chegando a valores muito próximos de uma unidade para taxas de amortecimento da ordem de 10%.

No que abrange o efeito dos comboios de carga, concluiu-se que quando se passa de um veículo para dois, se tem um aumento significativo no FAD, entretanto, quando se passa de dois para três, a influência é praticamente nula, uma vez que a velocidade dos veículos é muito inferior a velocidade a qual causaria a ressonância da estrutura.

No que diz respeito aos coeficientes de impacto normativos pôde-se concluir duas coisas. A primeira foi que, para os vãos da ordem de 20, 30 e 40 metros, ambas a NBR 7187:2003 e NBR 7188:2013 se mostraram a favor da segurança. Por outro lado, para os vãos maiores ou iguais a 60 metros, sobre o ponto de vista de uma carga móvel trafegando sobre uma ponte, a NBR 7187:2003 mostrou-se insatisfatória no que diz respeito a representar a análise dinâmica da estrutura. Por outro lado, a NBR 7188:2013 apresenta valores de coeficiente de impacto superiores aos FAD para todos os casos calculados, se mostrando, portanto, a favor da segurança.

Por fim, vale aqui mais uma vez salientar-se que seria interessante que em trabalhos futuros se fizesse uma análise considerando a iteração veículo-estrutura para se analisar os coeficientes de impacto obtidos para os casos de vãos pequenos, pois, como foi visto anteriormente, para estes, o veículo representa uma parcela representativa da massa total da ponte (chegando a mais de 20% para o vão de 20 metros). Deste modo, negligenciar essa parcela pode não conduzir a uma boa aproximação da realidade.

Mais uma vez, vale ressaltar que o trabalho aqui elaborado se restringiu ao caso de cargas móveis e, portanto, não incluiu a análise de fatores como a iteração veículo-estrutura, irregularidade do pavimento e ressaltos na cabeceira da ponte. Tais fatores são responsáveis por proporcionar fatores de amplificação dinâmica ainda maiores, a depender da representatividade da massa do veículo perante a massa da ponte.

Referências

AASHTO. **LRFD Bridge Design Specifications**. [S.l.]: [s.n.], 2012. Disponivel em: <http://utc2.edu.vn/Uploads/File/AASHTO%20LRFD%202012%20BridgeDesignSpecifications%206th%20Ed%20(US).PDF>. Acesso em: 08 maio 2015.

ABNT. **NBR 7188 - Carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestre**. Rio de Janeiro: ABNT, 1982.

ABNT. **NBR 7187 - Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2003.

ABNT. **NBR 7188 - Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas**. Rio de Janeiro: ABNT, 2013.

ABNT. **NBR 6118:** Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento. Rio de Janeiro: [s.n.], 2014.

ALMEIDA, R. S. D. Análise de vibrações em pontes rodoviárias induzidas pelo tráfego de veículos sobre pavimentos irregulares. **Dissertação de Mestrado**, Rio de Janeiro, 2006.

AZEVEDO, Á. F. M. Método dos elementos finitos. **Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**, Porto, 01 abr. 2003. Disponivel em: <http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ano5/aae/Livro_MEF_AA.htm>. Acesso em: 28 mar. 2015.

BÁRTOLO CALÇADA, R. A. Avaliação experimental e numérica de efeitos dinâmicos de cargas de tráfego em pontes rodoviárias. **Tese de Doutorado**, Porto, 2001.

BRADY, S. P.; O'BRIEN, E. J. The effect of vehicle velocity on the dynamic amplification of two vehicles crossing a simply supported bridge. **Journal of Bridge Engineering 11 (2):**, p. 250-256, mar. 2006. Disponivel em: <http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2006)11:2(250)>.

BRADY, S. P.; O'BRIEN, E. J.; ZNIDARIC, A. The effect of vehicle velocity on the dynamic amplification of a vehicle crossing a simply supported bridge. **Journal of Bridge Engineering, 11 (2):**, p. 241-249, 2006. Disponivel em: <http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2006)11:2(241)>.

BRASIL, R. M. L. R. F.; ARAÚJO DA SILVA, M. **Introdução à Dinâmica das Estruturas para a Engenharia Civil**. São Paulo: Blucher, 2013.

BRITISH STANDARD. **BS 5400-2: Steel, Concrete and Composite Bridges - Part 2: Specification for loads**. British Standard. [S.l.]. 2006.

CALTRANS. BRIDGE DESIGN SPECIFICATIONS. **California Department of Transportation**, 2003. Disponivel em:

<http://www.dot.ca.gov/hq/esc/techpubs/manual/bridgemanuals/bridge-design-specifications/page/section8.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2015.

CAVADAS, ; FIGUEIRAS, J. Deteção de dano em pontes de betão armado e pré-esforçado baseada. **56º Congresso Brasileiro de Concreto**, Outubro 2014.

CEN, E. C. F. S. **Eurocode 1:** Actions on structures - Part 2: Traffic loads on bridges. Bruxelas: [s.n.], 2010. Disponivel em: <https://ia801600.us.archive.org/30/items/en.1991.2.2003/en.1991.2.2003.pdf>.

CHANTRE LOPES, E. D. **Influência da velocidade, do espaçamento e do número de veículos sobre a resposta dinâmica de pontes rodoviárias de concreto armado**. Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2008.

CHOPRA, A. K. **Dynamics o Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering**. [S.l.]: Pearson, 2012.

CLOUGH, R. W. **Dynamics of Structures**. California: McGraw-Hill, 2003.

CSI AMERICA. CSI Bridge: Watch and Learn. **CSI America**. Disponivel em: <http://www.csiamerica.com/products/csibridge/watch-and-learn>. Acesso em: 31 março 2015.

CSI. Sap2000. **CSI America**. Disponivel em: <http://www.csiamerica.com/products/sap2000>. Acesso em: 2015 março 28.

CSI, C. &. S. I. CSI Analysis Reference Manual of SAP2000, ETABS and SAFE, Berkley, Abril 2009. Acesso em: mar. 2015.

EL DEBS, A. L. H. C. **Determinação do coeficiente de impacto em pontes estaiadas sob a ação de cargas móveis**. São Carlos. 1990.

EL DEBS, M. K.; TAKEYA, T. **Introdução às Pontes de Concreto**. São Carlos: [s.n.], 2009.

EUROPEAN STANDARD. **Actions on structures - Part 2:** Traffic loads on bridges. [S.l.]: European Standard, 2003.

FERNANDES SANTOS, L.; SCHUBERT PFEIL, M. **Desenvolvimento de modelo de cargas móveis para verificação de fadiga em pontes rodoviárias**. Rio de Janeiro. 2014.

FIGUEIREDO DOS SANTOS, E. **Análise e redução de vibrações em pontes rodoviárias**. Rio de Janeiro. 2007.

FILHO, W. N. F. Avaliação dos Coeficientes de impacto utilizado no cálculo de pontes rodoviárias via análise dinâmica de estruturas. **Trabalho Final de Curso**, Juiz de Fora, 2008.

FONSECA DA SILVA, P. et al. **Efeitos da mudança da NBR 7188:2013 nos projetos de pontes. Estudo de caso: Recuperação da Ponte sobre o Rio Correias na BR101/SC**. Rio de Janeiro. 2014.

FRýBA, L. **Vibration of solids and structures under moving loads**. Prague: Noordhoff International Publishing, 1972.

GOEL, R. K. IRICEN. **IRICEN**, set. 2009. Disponivel em: <http://wiki.iricen.gov.in/doku/lib/exe/fetch.php?media=technical_material_from_rdso:rkgoel_effect.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2015.

HÜGÜL, S. **VIBRATION ANALYSIS OF SYSTEMS SUBJECTED TO MOVING LOADS BY USING THE FINITE ELEMENT METHOD**. İzmir. 2005.

HUMAR, J. L. **Dynamics of Structures**. Ottawa: A.A. Balkema, 2002.

LEONHARDT, F. **CONSTRUÇÕES DE CONCRETO - VOLUME VI:** Princípios Básicos da Construção de Pontes de Concreto. [S.l.]: Editora Interciência, 1979.

LSE. **CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO DE PROJETOS**. LSE. São Paulo. 2010.

MINISTÉRIO DOS TRANSPORTES. DNIT. **Departamento Nacional de Estradas de Rodagem**, 1973. Disponivel em: <http://www.dnit.gov.br/rodovias/operacoes-rodoviarias/faixa-de-dominio/normas-projeto-estr-rod-reeditado-1973.pdf>. Acesso em: 31 março 2015. Portarias nº 19, de 10/01/1949 e nº 348, de 17/04/1950 - Reeditado em 1973.

NEDEV, G.; KHAN, U. CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY. **CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY**, 20 jun. 2015. Disponivel em: <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/146546.pdf>.

PEREIRA, O. J. B. A. **Introdução ao método dos elementos finitos na análise de problemas planos de elasticidade**. [S.l.]. 2005.

PFEIL, W. **Pontes em concreto armado**. Rio de Janeiro: LTC, v. único, 1979.

RUSCHI E LUCHI, L. A. **Reavaliação do trem-tipo à luz das cargas reais nas rodovias brasileiras**. São Paulo. 2006.

SAJAD AHMAD HAMIDI, F. D. Academia. **Academia**, 20 jan. 2010. Disponivel em: <https://www.academia.edu/6137565/Determination_of_impact_factor_for_steel_railway_bridges_considering_simultaneous_effects_of_vehicle_speed_and_axle_distance_to_span_length_ratio>. Acesso em: 2015 abr. 05.

SANTOS DA SILVA, J. G. Comportamento dinâmico de pontes rodoviárias submetidas à travessia de veículos sobre a superfície irregular do pavimento. **Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería**, p. 1-20, 2002.

SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

SOUZA DE MELO, E. **Interação Dinâmica Veículo-Estrutura**. Rio de Janeiro. 2007.

SZILARD, R. **Theories and applications of plate analysis:** classical, numerical and engineering methods. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

Anexo 1: Critério do Eurocode 1 Parte 2 para definir a necessidade ou não de análise dinâmica em pontes

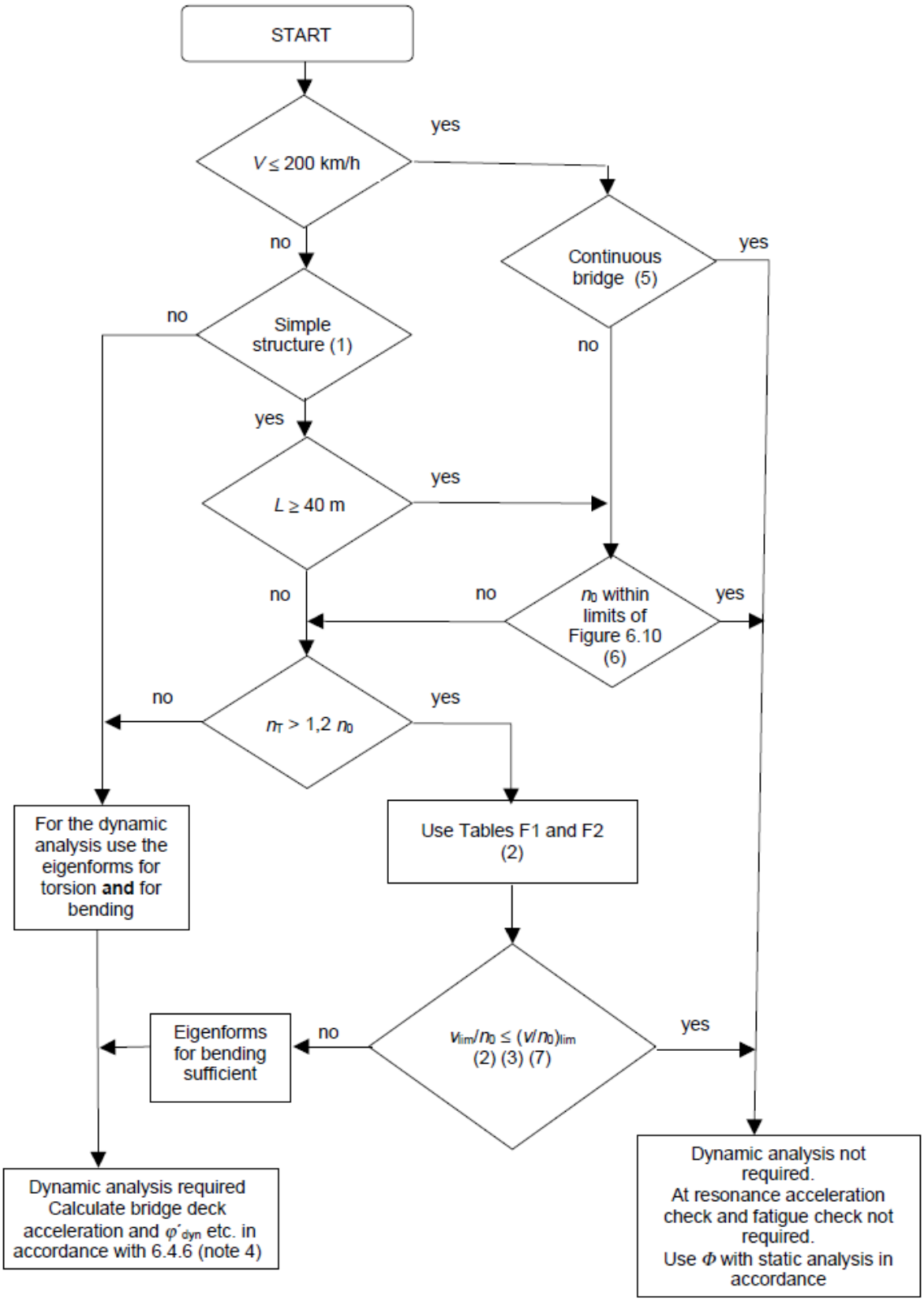


Figure 6.9 - Flow chart for determining whether a dynamic analysis is required

where:

V is the Maximum Line Speed at the Site [km/h]

L is the span length [m]

n_0 is the first natural bending frequency of the bridge loaded by permanent actions [Hz]

n_T is the first natural torsional frequency of the bridge loaded by permanent actions [Hz]

$(v/n_0)_{lim}$ is given as a function of v_{lim}/n_0 in annex F

NOTE 1 Valid for simply supported bridges with only longitudinal line beam or simple plate behaviour with negligible skew effects on rigid supports.

NOTE 2 For Tables F1 and F2 and associated limits of validity see annex F.

NOTE 3 A dynamic analysis is required where the Frequent Operating Speed of a Real Train equals a Resonant Speed of the structure. See 6.4.6.6 and annex F.

NOTE 4 φ'_{dyn} is the dynamic impact component for Real Trains for the structure given in 6.4.6.5(3).

NOTE 5 Valid providing the bridge meets the requirements for resistance, deformation limits given in EN 1990:2002, A.2.4.4 and the maximum coach body acceleration (or associated deflection limits) corresponding to a very good standard of passenger comfort given in EN 1990:2002, A.2.

NOTE 6 For bridges with a first natural frequency n_0 within the limits given by Figure 6.10 and a Maximum Line Speed at the Site not exceeding 200km/h, a dynamic analysis is not required.

NOTE 7 For bridges with a first natural frequency n_0 exceeding the upper limit (1) in Figure 6.10 a dynamic analysis is required. Also see 6.4.6.1.1(7).

The upper limit of n_0 is governed by dynamic increments due to track irregularities and is given by :

$$n_0 = 94{,}76L^{-0{,}748} \qquad (6.1)$$

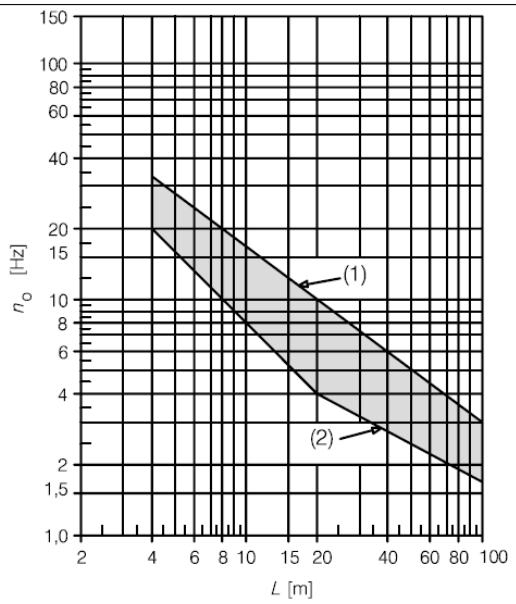
The lower limit of n_0 is governed by dynamic impact criteria and is given by :

$$n_0 = 80/L \quad \text{for } 4\text{m} \le L \le 20\text{m}$$
$$n_0 = 23{,}58L^{-0{,}592} \quad \text{for } 20\text{m} < L \le 100\text{m} \qquad (6.2)$$

where:

n_0 is the first natural frequency of the bridge taking account of mass due to permanent actions,

L is the span length for simply supported bridges or L_Φ for other bridge types.



Key
(1) Upper limit of natural frequency
(2) Lower limit of natural frequency

Figure 6.10 - Limits of bridge natural frequency n_0 [Hz] as a function of L [m]

NOTE 8 For a simply supported bridge subjected to bending only, the natural frequency may be estimated using the formula :

$$n_0\,[\text{Hz}] = \frac{17{,}75}{\sqrt{\delta_0}} \qquad (6.3)$$

where:

δ_0 is the deflection at mid span due to permanent actions [mm] and is calculated, using a short term modulus for concrete bridges, in accordance with a loading period appropriate to the natural frequency of the bridge.

Annex F
(informative)
Criteria to be satisfied if a dynamic analysis is not required

NOTE Annex F is not valid for Load Model HSLM

(1) For simply supported structures satisfying the maximum value of $(v/n_0)_{lim}$ given in Tables F.1 and F.2:
- maximum dynamic load effects (stresses, deflections etc.) and
- the fatigue loading at high speeds (except where the Frequent Operating Speed corresponds to a Resonant Speed and in such cases a specific dynamic analysis and fatigue check should be carried out in accordance with 6.4.6)

do not exceed the values due to $\Phi_2 \times$ Load Model 71 and no further dynamic analysis is necessary.

Table F.1 - Maximum value of $(v/n_0)_{lim}$ for a simply supported beam or slab and a maximum permitted acceleration of $a_{max} < 3.50 m/s^2$.

Mass m 10^3 kg/m		≥5.0 <7.0	≥7.0 <9.0	≥9.0 <10.0	≥10.0 <13.0	≥13.0 <15.0	≥15.0 <18.0	≥18.0 <20.0	≥20.0 <25.0	≥25.0 <30.0	≥30.0 <40.0	≥40.0 <50.0	≥50.0 -
Span $L \in$ m [a]	ζ %	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m
[5.00,7.50)	2	1.71	1.78	1.88	1.88	1.93	1.93	2.13	2.13	3.08	3.08	3.54	3.59
	4	1.71	1.83	1.93	1.93	2.13	2.24	3.03	3.08	3.38	3.54	4.31	4.31
[7.50,10.0)	2	1.94	2.08	2.64	2.64	2.77	2.77	3.06	5.00	5.14	5.20	5.35	5.42
	4	2.15	2.64	2.77	2.98	4.93	5.00	5.14	5.21	5.35	5.62	6.39	6.53
[10.0,12.5)	1	2,40	2.50	2.50	2.50	2.71	6.15	6.25	6.36	6.36	6.45	6.45	6.57
	2	2.50	2.71	2.71	5.83	6.15	6.25	6.36	6.36	6.45	6.45	7.19	7.29
[12.5,15.0)	1	2.50	2.50	3.58	3.58	5.24	5.24	5.36	5.36	7.86	9.14	9.14	9.14
	2	3.45	5.12	5.24	5.24	5.36	5.36	7.86	8.22	9.53	9.76	10.36	10.48
[15.0,17.5)	1	3.00	5.33	5.33	5.33	6.33	6.33	6.50	6.50	6.50	7.80	7.80	7.80
	2	5.33	5.33	6.33	6.33	6.50	6.50	10.17	10.33	10.33	10.50	10.67	12.40
[17.5,20.0)	1	3,50	6.33	6.33	6.33	6.50	6.50	7.17	7.17	10.67	12.80	12.80	12.80
[20.0,25.0)	1	5.21	5.21	5.42	7.08	7.50	7.50	13.54	13.54	13.96	14.17	14.38	14.38
[25.0,30.0)	1	6.25	6.46	6.46	10.21	10.21	10.21	10.63	10.63	12.75	12.75	12.75	12.75
[30.0,40.0)	1				10.56	18.33	18.33	18.61	18.61	18.89	19.17	19.17	19.17
≥40.0,	1				14.73	15.00	15.56	15.56	15.83	18.33	18.33	18.33	18.33

[a] $L \in [a,b)$ means $a \le L < b$

NOTE 1 Table F.1 includes a safety factor of 1.2 on $(v/n_0)_{lim}$ for acceleration, deflection and strength criteria and a safety factor of 1,0 on the $(v/n_0)_{lim}$ for fatigue.

NOTE 2 Table F.1 includes an allowance of $(1+\varphi''/2)$ for track irregularities.

Table F.2 - Maximum value of $(v/n_0)_{lim}$ for a simply supported beam or slab and a maximum permitted acceleration of $a_{max} < 5.0$ m/s^2

Mass m 10^3 kg/m		≥5.0 <7.0	≥7.0 <9.0	≥9.0 <10.0	≥10.0 <13.0	≥13.0 <15.0	≥15.0 <18.0	≥18.0 <20.0	≥20.0 <25.0	≥25.0 <30.0	≥30.0 <40.0	≥40.0 <50.0	≥50.0 -
Span $L \in$ m [a]	ζ %	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m	v/n_0 m
[5.00,7.50)	2	1.78	1.88	1.93	1.93	2.13	2.13	3.08	3.08	3.44	3.54	3.59	4.13
	4	1.88	1.93	2.13	2.13	3.08	3.13	3.44	3.54	3.59	4.31	4.31	4.31
[7.50,10.0)	2	2.08	2.64	2.78	2.78	3.06	5.07	5.21	5.21	5.28	5.35	6.33	6.33
	4	2.64	2.98	4.86	4.93	5.14	5.21	5.35	5.42	6.32	6.46	6.67	6.67
[10.0,12.5)	1	2.50	2.50	2.71	6.15	6.25	6.36	6.36	6.46	6.46	6.46	7.19	7.19
	2	2.71	5.83	6.15	6.15	6.36	6.46	6.46	6.46	7.19	7.19	7.75	7.75
[12.5,15.0)	1	2.50	3.58	5.24	5.24	5.36	5.36	7.86	8.33	9.14	9.14	9.14	9.14
	2	5.12	5.24	5.36	5.36	7.86	8.22	9.53	9.64	10.36	10.36	10.48	10.48
[15.0,17.5)	1	5.33	5.33	6.33	6.33	6.50	6.50	6.50	7.80	7.80	7.80	7.80	7.80
	2	5.33	6.33	6.50	6.50	10.33	10.33	10.50	10.50	10.67	10.67	12.40	12.40
[17.5,20.0)	1	6.33	6.33	6.50	6.50	7.17	10.67	10.67	12.80	12.80	12.80	12.80	12.80
[20.0,25.0)	1	5.21	7.08	7.50	7.50	13.54	13.75	13.96	14.17	14.38	14.38	14.38	14.38
[25.0,30.0)	1	6.46	10.20	10.42	10.42	10.63	10.63	12.75	12.75	12.75	12.75	12.75	12.75
[30.0,40.0)	1				18.33	18.61	18.89	18.89	19.17	19.17	19.17	19.17	19.17
≥40.0,	1				15.00	15.56	15.83	18.33	18.33	18.33	18.33	18.33	18.33

[a] $L \in [a,b)$ means $a \le L < b$

NOTE 1 Table F.2 includes a safety factor of 1.2 on $(v/n_0)_{lim}$ for acceleration, deflection and strength criteria and a safety factor of 1,0 on the $(v/n_0)_{lim}$ for fatigue.

NOTE 2 Table F.2 include an allowance of $(1+\varphi''/2)$ for track irregularities.

where:

L is the span length of bridge [m],
m is the mass of bridge [10^3 kg/m],
ζ is the percentage of critical damping in [%],
v is the Maximum Nominal Speed and is generally the Maximum Line Speed at the site. A reduced speed may be used for checking individual Real Trains for their associated Maximum Permitted Vehicle Speed [m/s],
n_0 is the first natural frequency of the span [Hz].

Φ_2 and φ'' are defined in 6.4.5.2 and annex C.

(2) Tables F.1 and F.2 are valid for:
- simply supported bridges with insignificant skew effects that may be modelled as a line beam or slab on rigid supports. Tables F.1 and F.2 are not applicable to half through and truss bridges with shallow floors or other complex structures that may not be adequately represented by a line beam or slab,
- bridges where the track and depth of the structure to the neutral axis from the top of the deck is sufficient to distribute point axle loads over a distance of at least 2,50 m,
- the Train Types listed in F(4),
- structures designed for characteristic values of vertical loads or classified vertical loads with $\alpha \ge 1$ in accordance with 6.3.2,
- carefully maintained track,
- spans with a natural frequency n_0 less than the upper limit in Figure 6.10,
- structures with torsional frequencies n_T satisfying: $n_T > 1.2 \times n_0$

(3) Where the above criteria are not satisfied a dynamic analysis should be carried out in accordance with 6.4.6.

(4) The following Real Trains were used in the development of the criteria in 6.4 and annex F (except Load Model HSLM which is based upon the train types permitted by the relevant interoperability criteria).

Anexo 2: Especificações da AASHTO quanto a seção transversal

2.5.2.6.3—Optional Criteria for Span-to-Depth Ratios

Unless otherwise specified herein, if an Owner chooses to invoke controls on span-to-depth ratios, the limits in Table 2.5.2.6.3-1, in which S is the slab span length and L is the span length, both in ft., may be considered in the absence of other criteria. Where used, the limits in Table 2.5.2.6.3-1 shall be taken to apply to overall depth unless noted.

Table 2.5.2.6.3-1—Traditional Minimum Depths for Constant Depth Superstructures

Superstructure		Minimum Depth (Including Deck) When variable depth members are used, values may be adjusted to account for changes in relative stiffness of positive and negative moment sections	
Material	Type	Simple Spans	Continuous Spans
Reinforced Concrete	Slabs with main reinforcement parallel to traffic	$\frac{1.2\ (S+10)}{30}$	$\frac{S+10}{30} \geq 0.54$ ft.
	T-Beams	$0.070L$	$0.065L$
	Box Beams	$0.060L$	$0.055L$
	Pedestrian Structure Beams	$0.035L$	$0.033L$
Prestressed Concrete	Slabs	$0.030L \geq 6.5$ in.	$0.027L \geq 6.5$ in.
	CIP Box Beams	$0.045L$	$0.040L$
	Precast I-Beams	$0.045L$	$0.040L$
	Pedestrian Structure Beams	$0.033L$	$0.030L$
	Adjacent Box Beams	$0.030L$	$0.025L$
Steel	Overall Depth of Composite I-Beam	$0.040L$	$0.032L$
	Depth of I-Beam Portion of Composite I-Beam	$0.033L$	$0.027L$
	Trusses	$0.100L$	$0.100L$

Anexo 3: Especificações da Caltrans quanto a seção transversal

8.10 COMPRESSION FLANGE WIDTH

8.10.1 T-Girder

8.10.1.1 The total width of slab effective as a T-girder flange shall not exceed one-fourth of the span length of the girder. The effective flange width overhanging on each side of the web shall not exceed six times the thickness of the slab or one-half the clear distance to the next web.

8.10.1.2 For girders having a slab on one side only, the effective overhanging flange width shall not exceed 1/12 of the span length of the girder, six times the thickness of the slab, or one-half the clear distance to the next web.

8.10.1.3 Isolated T-girders in which the T-shape is used to provide a flange for additional compression area shall have a flange thickness not less than one-half the width of the girder web and an effective flange width not more than four times the width of the girder web.

8.10.1.4 For integral bent caps, the effective flange width overhanging each side of the bent cap web shall not exceed six times the least slab thickness, or 1/10 the span length of the bent cap. For cantilevered bent caps, the span length shall be taken as two times the length of the cantilever span.

8.11 SLABS AND WEB THICKNESS

8.11.1 The thickness of deck slabs shall be designed in accordance with Article 3.24.3 but shall not be less than that specified in Article 8.9.

8.11.2 The thickness of the bottom slab of a box girder shall be not less than 1/16 of the clear span between girder webs or $5\,^1/_2$ inches, except that the thickness need not be greater than the top slab unless required by design.

8.11.3 When required by design, changes in girder web thickness shall be tapered for a minimum distance of 12 times the difference in web thickness.

Anexo 4: Especificações do Leonhardt quanto a seção transversal

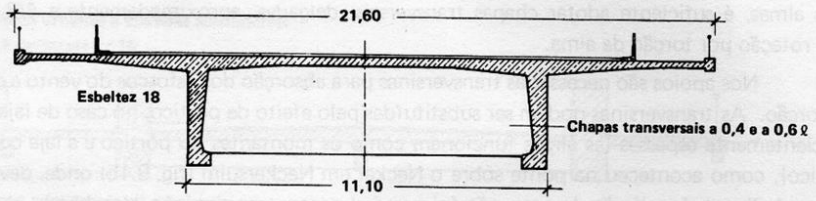


Figura 8.14

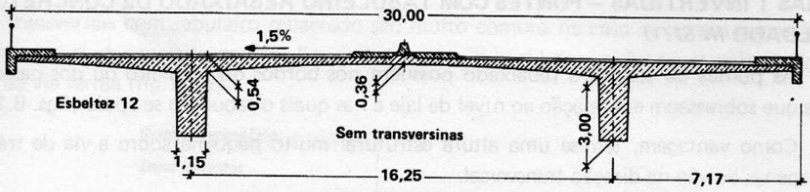


Figura 8.15

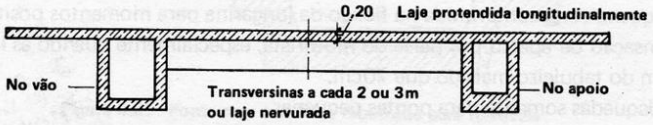


Figura 8.16

A alma lisa, sem abas, é certamente a preferível para concreto moldado *in situ*, por causa das fôrmas e da armadura que são mais simples. Em geral, as abas ou mesas valem a pena somente a partir de alturas de viga maiores que 2m.

As almas individuais podem também se transformar em seções em caixão estreitas, que melhor se adaptam para momentos negativos (fig. 8.16).

Para rodovias, freqüentemente adotam-se duas pontes, colocadas uma junto à outra e separadas por uma junta no canteiro central.

Para os valores das esbeltezas (ℓ_i : h) recomendam-se os seguintes valores:

	Concreto armado	Concreto protendido
Almas sem abas	8 a 12	10 a 18
Alma com abas ou alma engrossada	10 a 14	12 a 24

Os vãos atingem de ~ 15m a ~ 70m (viaduto de acesso à Ponte Emmerich sobre o Reno, fig. 8.14).

Transversinas

No caso de 3 ou mais almas, devem ser dispostas transversinas para a distribuição da carga — o melhor é uma viga no meio do vão; no caso de almas delgadas, duas vigas a ℓ/3. No caso de apenas

No caso de pontes urbanas com trânsito de pedestres, os passeios são dispostos, hoje em dia, de preferência longe do tráfego barulhento e malcheiroso, sob a laje em balanço do tabuleiro (como, por exemplo, a Ponte Stephan em Bremen). Aí os passeios podem ser detalhados de maneira mais atrativa e até mesmo "decorados". Uma condição prévia é, obviamente, que a seção em caixão da ponte tenha no mínimo 3m de altura (fig. 8.38).

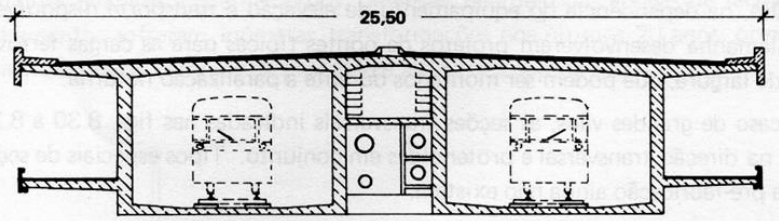


Figura 8.38 Seção transversal da nova Ponte do Império em Viena, de acordo com o edital de concorrência de 1977. Vias expressas nas seções em caixão, tubulações em canal aberto (devido ao gás). Passeios protegidos sob o tabuleiro em balanço

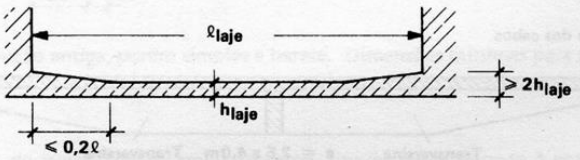
Valores-Limite para as Dimensões de Vigas em Caixão para Pontes

Esbeltezas de 30 a 40, dependendo da relação entre carga móvel e peso próprio.

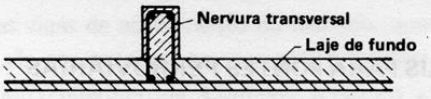
Espessura das paredes da alma (sem cabos de protensão): 250mm ou d/15.

Espessura das paredes da alma com os cabos principais de protensão: 200mm + Σ bainhas (mm)

A espessura da laje inferior do caixão, sem mísulas, deve ser no mínimo 120mm; melhor ainda 150mm ou ℓ/30; existindo mísulas, valem os mesmos valores para o trecho da laje entre as mísulas caso estas tenham as dimensões indicadas a seguir:



Para $\ell/h > 30$ mas < 40, a laje inferior na região comprimida deve ser enrijecida com nervuras transversais pré-moldadas, espaçadas de $a = \ell_{laje}$.



Vigas transversais, pórticos transversais ou diafragmas transversais em vigas com seção em caixão, são dispostas geralmente apenas nos apoios. Estes elementos estruturais podem também não existir, desde que, para os momentos negativos, a laje de fundo engrossada juntamente com as paredes da alma, localmente engrossadas, ou, além disso, almas suficientemente espessas produzam uma rigidez de pórtico da seção transversal (seção transversal como pórtico fechado) tal que a distorção da seção permaneça pequena e que os momentos de torção possam ser transmitidos aos apoios pelo efeito de pórtico. Este tipo de solução é necessário quando a viga em caixão servir de estrutura para metrôs (como a Ponte

Anexo 5: Especificações do Pfeil quanto a seção transversal

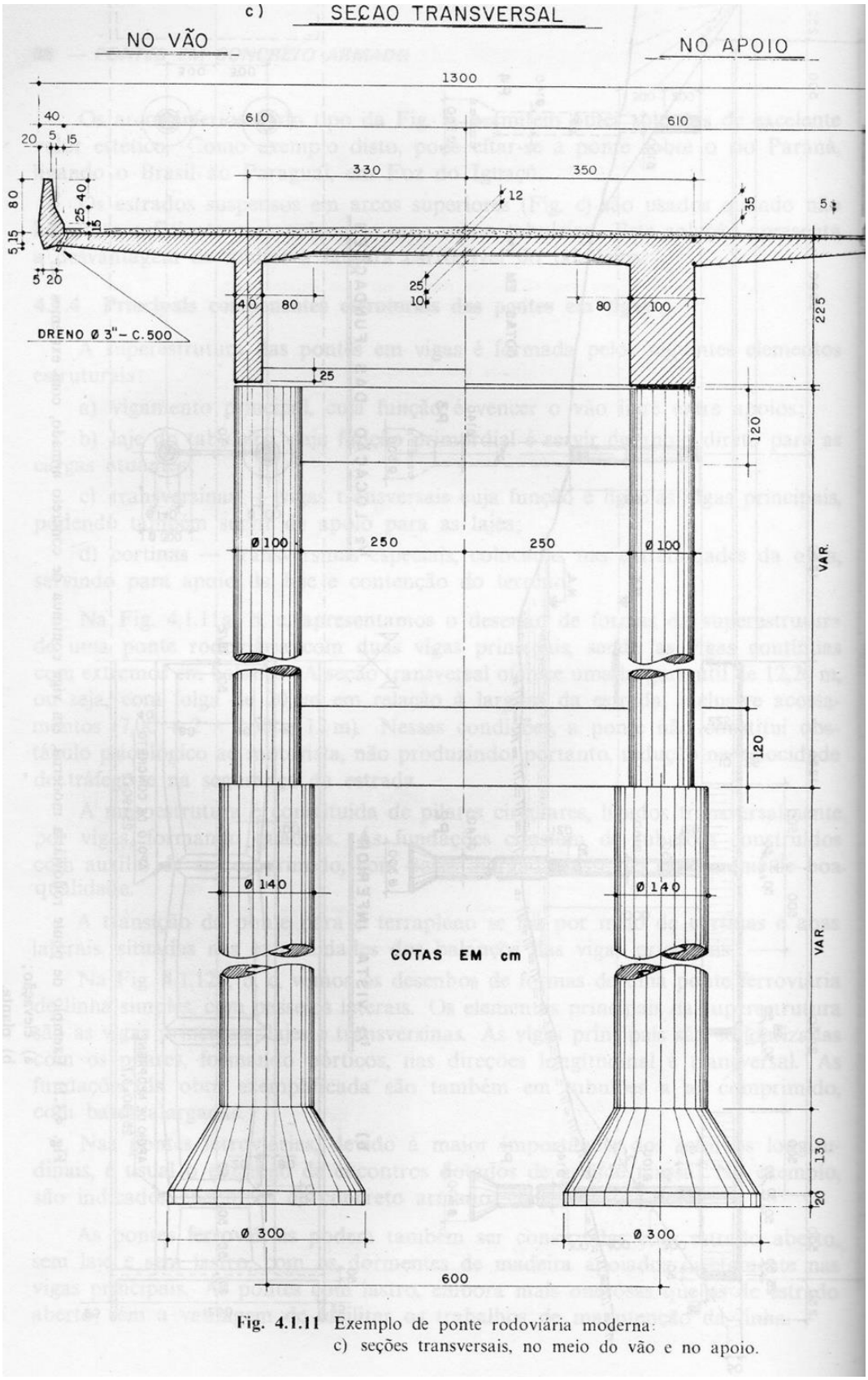


Fig. 4.1.11 Exemplo de ponte rodoviária moderna:
c) seções transversais, no meio do vão e no apoio.

Anexo 6: Script traduzido do Matlab para carga móvel sobre viga biapoiada elaborado por (HÜGÜL, 2005)

20metros_com_amortecimento.m

```
clc;clear
tic;
%Qualquer comentário aqui feito mencionando páginas ou
%formulas refere-se ao trabalho do autor deste código Hügül (2005)
lenL=20; %input('Insira o comprimento da viga=');
%b=0.01; %input('Insira a largura da seção transversal=');
%h=0.01; %input('Insira a altura da seção transversal=');
n=50; %input('Insira o número de elementos a ser considerado na viga=');
%Ro=input('Insira a densidade=');
%E=input('Insira o Modulu de Elasticidade=');
ksi1=0.05;%Taxa de amortecimento da primeira frequencia natural
ksi2=0.05;%Taxa de amortecimento da segunda frequencia natural
Ro=2500;%kg/m3
E=2.940e10;%N/m2
A=4.41;%m2
I=0.698;%m4
L=lenL/n;
%CALCULA-SE AS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ DO SISTEMA
mcof=(Ro*A*L)/420; %Constante para multiplicar a matriz de massa
kcof=(E*I)/L^3; %Constante para multiplicar a matriz de rigidez
alfa=0.2592;%input('Insira o valor de alfa=');
M=zeros(2*(n+1));
K=zeros(2*(n+1));
```

```
ki1=[12 6*L -12 6*L;
6*L 4*L^2 -6*L 2*L^2;
-12 -6*L 12 -6*L;
6*L 2*L^2 -6*L 4*L^2];
k1=ki1(1:2,1:2);
k2=ki1(1:2,3:4);
k3=ki1(3:4,1:2);
k4=ki1(3:4,3:4);
K(1:2,1:2)=k1;
K(1:2,3:4)=k2;
for i=1:n
K(2*i+1:2*i+2,2*i-1:2*i)=k3;
end
for i=1:n-1
K(2*i+1:2*i+2,2*i+3:2*i+4)=k2;
K(2*i+1:2*i+2,2*i+1:2*i+2)=k1+k4;
end
K(2*n+1:2*n+2,2*n+1:2*n+2)=k4;
K;
mi1=[156 22*L 54 -13*L;
22*L 4*L^2 13*L -3*L^2;
54 13*L 156 -22*L;
-13*L -3*L^2 -22*L 4*L^2];
m1=mi1(1:2,1:2);
m2=mi1(1:2,3:4);
m3=mi1(3:4,1:2);
m4=mi1(3:4,3:4);
```

```
M(1:2,1:2)=m1;

M(1:2,3:4)=m2;

for i=1:n

M(2*i+1:2*i+2,2*i-1:2*i)=m3;

end

for i=1:n-1

M(2*i+1:2*i+2,2*i+3:2*i+4)=m2;

M(2*i+1:2*i+2,2*i+1:2*i+2)=m1+m4;

end

M(2*n+1:2*n+2,2*n+1:2*n+2)=m4;

M;

K=K*kcof;

M=M*mcof;

KK=K([2:2*n 2*n+2],[2:2*n 2*n+2]);

MM=M([2:2*n 2*n+2],[2:2*n 2*n+2]);

%CALCULA-SE AS FREQUENCIAS NATURAIS DA ESTRUTURA

fr=sqrt(eig(KK,MM));

%CALCULA-SE OS COEFICIENTES DE PROPORCIONALIDADE DAS
MATRIZES DE MASSA E DE

%RIGIDEZ (Eq. 3.24)

r=(2*fr(1)*fr(2)/(fr(1)^2-fr(2)^2))*[fr(1) -fr(2);-1/fr(1) 1/fr(2)]*[ksi1;ksi2];

CC=r(1)*MM+r(2)*KK; %Matriz de amortecimento de Rayleigh (Eq. 3.23)

for i=1:2*n

ksi(i)=r(1)/(2*fr(i))+r(2)*fr(i)/2;

end

disp('Taxa de amortecimento de cada modo')

ksi'
```

```
fr=sort(sqrt(eig(KK,MM)))/(2*pi);
disp('Frequências naturais em Hertz')
vpa(fr,5)
% Metodo de Integracao direta de Newmark
beta=1/4; gama=0.5;
T1=1/fr(1);
dt=1/(fr(20)*20); %Define-se o passo dt = T20 / 20
tson=T1/alfa; %Define-se o valor de tal: Tempo para a carga cruzar a ponte
dof=2*n;
adimsay=tson/dt+1;
adimsay=int32(adimsay);
adimsay=double(adimsay);
dep=zeros(adimsay,dof);%Deslocamento
hiz=zeros(adimsay,dof);%Velocidade
ivm=zeros(adimsay,dof);%Aceleração
zaman=zeros(adimsay,dof);%Tempo
u0=zeros(dof,1);
ud0=zeros(dof,1);
F0=zeros(dof,adimsay);
FG=-450000;%N %DEFINE-SE A FORÇA ATUANTE NA PONTE
dtnod=tson/n;
adimsay1=dtnod/dt;
adimsay1=int32(adimsay1);
adimsay1=double(adimsay1);
%Define-se a carga em movimento
zz=1;
for i=2:2:dof-2;
```

```
k=1;
for stp=(zz*adimsay1-adimsay1)+1:zz*adimsay1+1;
F0(i,stp)=FG*(adimsay1-(adimsay1-(k-1)))/adimsay1;
k=k+1;
end
k=1;
for stp=zz*adimsay1+1:zz*adimsay1+adimsay1+1;
F0(i,stp)=FG*(adimsay1-(k-1))/adimsay1;
k=k+1;
end
zz=zz+1;
end
udd0=MM\(F0(:,1)-CC*ud0-KK*u0); %Ver página 17
dep(1,1:dof)=u0';%Deslocamento
hiz(1,1:dof)=ud0';%Velocidade
ivm(1,1:dof)=udd0';%Aceleração
zaman(1,1:dof)=0;%Tempo
sayac=2;%Contador
t=dt;
a0=1/(beta*dt^2); a1=gama/(beta*dt); a2=1/(beta*dt); a3=1/(2*beta)-1;
a4=gama/beta-1;
a5=(dt/2)*(gama/beta-2); a6=dt*(1-gama); a7=gama*dt;
KK=KK+a0*MM+a1*CC;%Calculo da matriz de rigidez efetiva (Pág. 17)
[L,U]=lu(KK);
ss=2;
while t<=tson;
%Carga efetiva no instante t+dt
```

```
F=F0(:,ss)+MM*(a0*u0+a2*ud0+a3*udd0)+CC*(a1*u0+a4*ud0+a5*udd0);
z=inv(L)*F;
u1=inv(U)*z;
udd1=a0*(u1-u0)-a2*ud0-a3*udd0;
ud1=ud0+a6*udd0+a7*udd1;
for i=1:dof
dep(sayac,i)=u1(i);%Deslocamento
hiz(sayac,i)=ud1(i);%Velocidade
ivm(sayac,i)=udd1(i);%Aceleração
end
zaman(sayac,1)=t;%Tempo
sayac=sayac+1;%Atualiza-se o contador
t=t+dt;%Atualiza-se os valores de partida para se continuar os calculos
u0=u1;
ud0=ud1;
udd0=udd1;
ss=ss+1;
end
minx=min(dep(:,n))*1000;
maxx=max(dep(:,n))*1000;
plot(zaman(:,1),dep(:,n),'red')
xlabel(‘Tempo (s)')
ylabel('Deslocamento (m)')
minx
bu=1000*(FG*lenL^3)/(48*E*I);%Deslocamento do caso estatico, calculado por fora
minx/bu %Fator de Amplificação dinâmica
toc
```

6. Apêndice A: Cronograma de Atividades

Periodo	Tempo para elaboração estimado	Item	Progresso	Percentual total do trabalho (acumulado)	Detalhes/Observações
até 15/02/2015	40 dias	Elementos pré-textuais	100%	10%	Etapa inicial, os elementos pré-textuais devem conforme normas técnicas da ABNT. O bibliográficos necessários para a fundamen tema serão reunidos desta eta
		Introdução (cap. 1)	100%		
		Revisão da Literatura (cap 2)	50-80%		
15/02/2015 até 07/03/2015	20 dias	Aspectos teóricos da dinâmica das estruturas (cap 2)	0%	30%	Será apresentada uma visão geral sobre o dinâmica das estruturas que é o ponto chav desse modo, se dissertará basicamente a c envolvido na disciplina eletiva de Dinâmica Esse capítulo não pode ser escrito antes do letivo visto que o autor ainda está pagando dinâmica, a qual é necessária para a elabora
07/03/2015 até 21/03/2015	14 dias	Prescrições Normativas e veículos de carga (cap 2)	0%	45%	Aqui será analisado os aspectos normativo NBR 7187) e suas precomendações e defin será visto o que a norma fala sobre veicul adotá-los no cálculo.
21/03/2015 até 10/04/2015	20 dias	Modelagem numérica dos efeitos dinâmicos em pontes (cap 3)	0%	60%	A partir desta etapa deve ser necessário m desenvolvimento do trabalho, onde a pa concentrada maior parte dos esforços. selecionados devem ser abrangidos com m maiores detalhes. Será necessário maior material teórico e maior contribuição do au conceitual do assunto a ser abordado. Nessa que várias dúvidas surjam. A parte do dese
10/04/2015 até 30/05/2015	50 dias	Estudos de caso (cap 4)	0%	85%	
30/05/2015 até 24/06/2015	25 dias		0%	99%	

		Resultados e Conclusões (caps 5 e 6)			estudos de caso provavelmente será a que tempo.
24/06/2015 até 12/07/2015	18 dias	Ajustes finais	0%	100%	Período para ajustes e revisões finais

Apêndice B: Formulação analítica para carga móvel apresentada no MathCAD

Estudo do Coeficiente de Amplificação Dinâmica para uma ponte de vão L com um veículo tipo (TB-450) passando a uma velocidade de 100km/h.

CASO 1: Caso não-amortecido

$P := 450kN$ $I := 0.698m^4$ $E := 29400MPa$ $L := 20m$ $A := 4.41m^2$

$v := 100\frac{km}{hr}$ $M := A\cdot\left(2500\frac{kg}{m^3}\right)$ $M = 1.103\times 10^4\,\frac{s^2}{m^2}\cdot N$ $E\cdot I = 2.052\times 10^7\,m^2\cdot kN$

$NN := 10$ $\omega_n(n) := n^2\cdot\pi^2\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I}{M\cdot L^4}}$

Aplica-se aqui a formulação apresentada por Humar (2002) página 887.

$U_1(x,t,P) :=$

$u \leftarrow 0$

for $n \in 1..NN$

$\omega_n \leftarrow n^2\cdot\pi^2\cdot\sqrt{\frac{E\cdot I}{M\cdot L^4}}$

if $\omega_n \neq \frac{n\cdot v\cdot\pi}{L}$

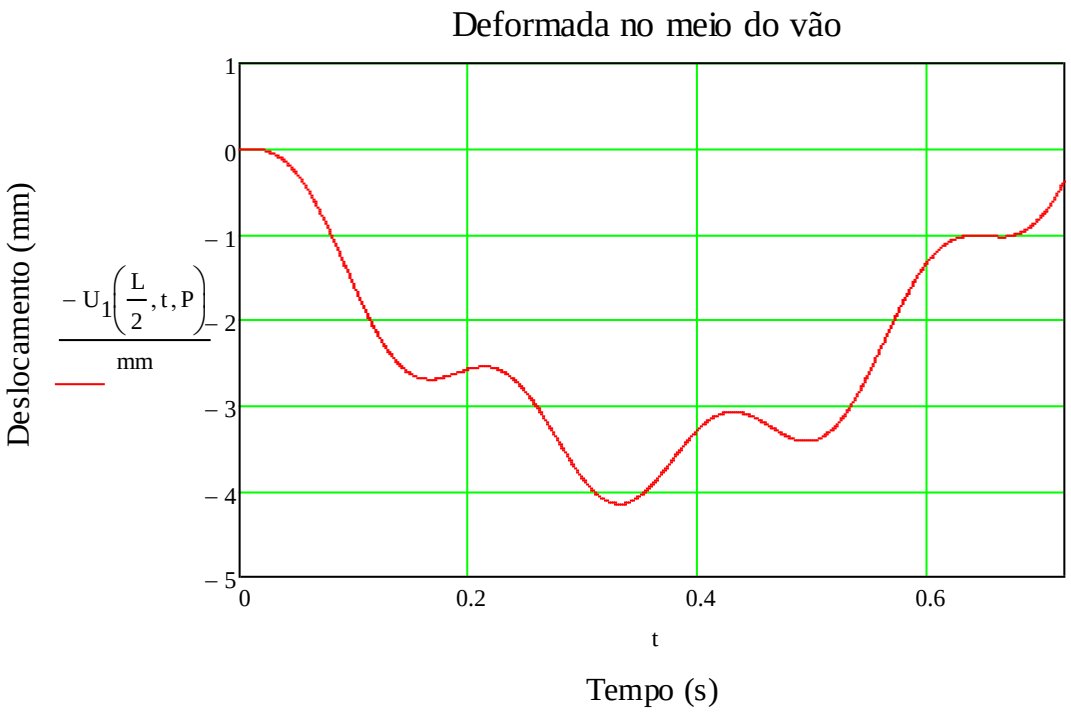
$a \leftarrow \frac{n\pi\cdot v}{L\cdot\omega_n}\cdot\sin(\omega_n\cdot t) - \sin\left(\frac{n\pi\cdot v\cdot t}{L}\right)$

$u \leftarrow u + \frac{1}{\left(\frac{n\cdot v\cdot\pi}{L}\right)^2 - \omega_n^2}\cdot(a)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\right)$

$u \leftarrow u + \frac{1}{2\cdot\omega_n^2}\cdot\left(\sin(\omega_n\cdot t) - \omega_n\cdot t\cdot\cos(\omega_n\cdot t)\right)$ otherwise

$u \leftarrow \frac{2\cdot P\cdot u}{M\cdot L}$

return u



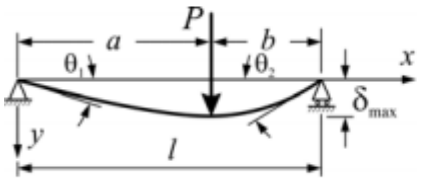
Deflexão máxima causada pelo carregamento sobre a ponte:

$t_{ref} := \frac{L}{2 \cdot v}$ $\quad k(t_{ref}) := U_1\left(\frac{L}{2}, t_{ref}, P\right)$

$t_{max} := \text{Maximize}(k, t_{ref}) = 0.332\,s$

$U_{max} := U_1\left(\frac{L}{2}, t_{max}, P\right) = 4.151\,mm$

Análise do caso estático:



DEFLECTION AT ANY SECTION IN TERMS OF x

$$y = \frac{Pbx}{6lEI}\left(l^2 - x^2 - b^2\right) \text{ for } 0 < x < a$$

$$y = \frac{Pb}{6lEI}\left[\frac{l}{b}(x-a)^3 + \left(l^2 - b^2\right)x - x^3\right] \text{ for } a < x < l$$

$u_{estático}(P, a, x) :=$ | $b \leftarrow L - a$

return $\frac{P \cdot b \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot \left(L^2 - x^2 - b^2\right)$ if $0 < x \le a$

otherwise

| return $\frac{P \cdot b}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} \cdot \left[\frac{L}{b} \cdot (x-a)^3 + \left(L^2 - b^2\right) \cdot x - x^3\right]$ if $a < x < L$

| return 0 otherwise

$u_{estático}\left(P, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) = 3.655mm$

$FAD_1 := \frac{U_{max}}{u_{estático}\left(P, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)}$

$FAD_1 = 1.136$

O valor esperado de acordo com as normas NBR-7187:2003 e NBR-7188:2013.

$FAD_{2003}(L) := \max\left(1.4 - 0.007\frac{L}{m}, 1\right)$

$FAD_{2003}(L) = 1.26$

$CIV_{2013}(L) := 1 + 1.06\left(\frac{20}{\frac{L}{m} + 50}\right)$

$CIV_{2013}(L) = 1.303$

CASO 2: Caso amortecido

$\xi := 0.05$

$\omega_b := \xi \cdot \omega_n(1)$

$\omega_b = 1.683\frac{1}{s}$

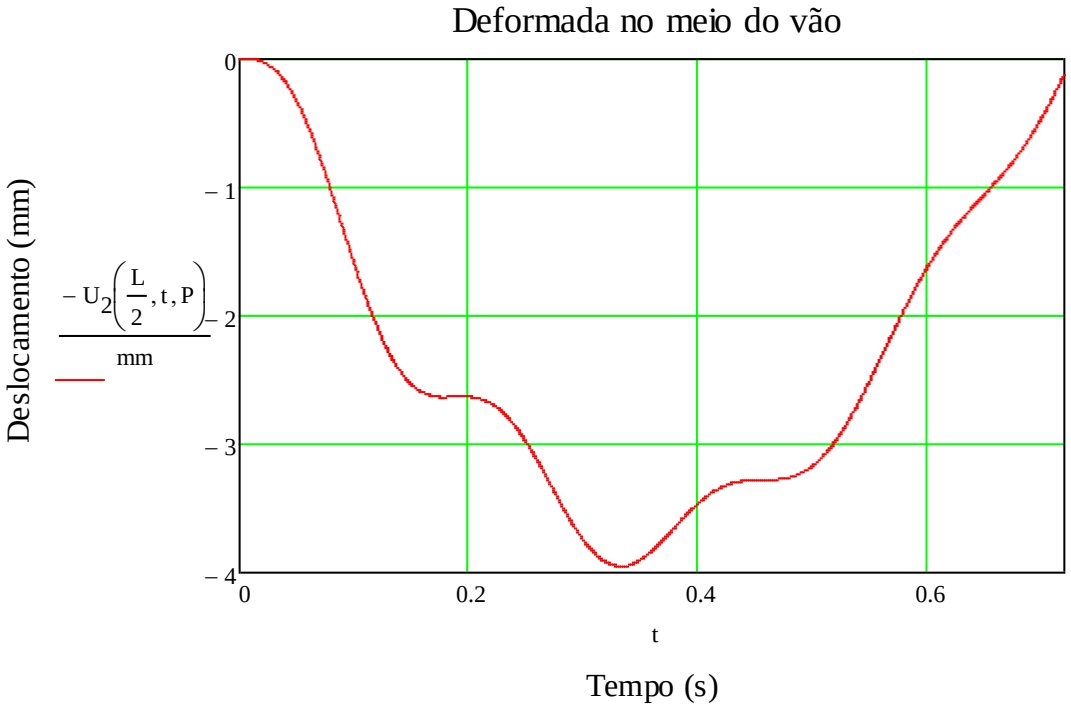
$\tau := \frac{L}{v} = 0.72s$

$T_1 := \frac{2\cdot\pi}{\omega_n(1)} = 0.186650032s$

$\alpha_f := \frac{T_1}{2\tau} = 0.13$

$\omega := \pi \cdot \frac{v}{L}$

$$U_2(x,t,P) := \left(\frac{2\cdot P\cdot L^3}{\pi^4\cdot E\cdot I}\right)\cdot\sum_{j=1}^{NN}\left[\sin\left(\frac{j\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot\frac{1}{j^2\cdot\left(j^2-\alpha_f^2\right)}\cdot\left(\sin(j\cdot\omega\cdot t) - \frac{\alpha_f}{j}\cdot e^{-\omega_b\cdot t}\cdot\sin\left(\omega_n(j)\cdot t\right)\right)\right]$$



$k(t_{ref}) := U_2\left(\frac{L}{2}, t_{ref}, P\right)$

$t_{max} := \text{Maximize}(k, t_{ref}) = 0.333s$

$$U_{max} := U_2\left(\frac{L}{2}, t_{max}, P\right) = 3.951\,mm$$

$$FAD_2 := \frac{U_{max}}{u_{estático}\left(P, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)}$$

$$FAD_2 = 1.081$$

Lembrando:

$FAD_1 = 1.136$

$FAD_{2003}(L) = 1.26$

$FAD_2 = 1.081$

$CIV_{2013}(L) = 1.303$

Entrada de dados do MATLAB:

$L = 20m$

$I = 0.698m^4$

$E = 2.94\times 10^{10}\cdot Pa$

$A = 4.41m^2$

$M = 1.103\times 10^4 \frac{s^2}{m^2}\cdot N$

$P = 4.5\times 10^5 N$

$$alfa := \frac{T_1}{\tau} = 0.2592$$