



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Elisa Joaquim Santos

Princípios do Máximo no Infinito e Aplicações

Recife

2022

Elisa Joaquim Santos

Princípios do Máximo no Infinito e Aplicações

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

S237p Santos, Elisa Joaquim
Princípios do máximo no infinito e aplicações / Elisa Joaquim Santos. –
2022.
90 f.: il., fig.

Orientador: Fábio Reis dos Santos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2022.

Inclui referências.

1. Geometria. 2. Campo vetorial. I. Santos, Fábio Reis dos (orientador). II.
Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE - CCEN 2022-120

ELISA JOAQUIM SANTOS

PRINCÍPIOS DO MÁXIMO NO INFINITO E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 25/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Prof. Dr. Luis José Alías Linares (Examinador Externo)
Universidad de Murcia - Espanha

A Deus e à minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela força que me deu durante esse caminho.

À minha mãe, Salomé Joaquim, e à minha avó, Josefa Caetana, por todo incentivo e amor incondicional.

Aos meus colegas de mestrado pela boa experiência compartilhada e aos meus amigos pessoais pelas constantes palavras e atitudes de apoio.

Ao meu orientador, Fábio Reis, por aceitar me orientar, pela grande paciência, pela dedicação e pelos ensinamentos contínuos. Desde os primeiros dias de aula que tive com ele, sempre me encantou pela forma que fala e ensina Geometria.

Aos professores Luis Alías e Henrique de Lima por aceitarem participar da minha banca e contrubuírem com a minha dissertação.

Agradeço aos funcionários, técnicos e professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPE pela colaboração na minha formação, mesmo que de modo remoto.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço à todos que contribuíram direta e indiretamente na minha formação e realização desse trabalho.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos duas versões dos princípios do máximo no infinito para variedades Riemannianas completas e não compactas. A primeira delas estabelece condições sobre uma variedade para que um campo vetorial suave tenha divergência identicamente nula. Na segunda versão, tendo como base o princípio do máximo anterior, também são apresentadas hipóteses sobre uma variedade e uma função suave, com as quais resultará em um campo com divergência nula. Como aplicação, veremos que uma hipersuperfície orientável, completa e não compacta com operador de Weingarten positivo semi-definido, em uma variedade Riemanniana ou Lorentziana, sob condições de transversalidade a um campo vetorial paralelo e de convergência no infinito para este campo, deve ser totalmente geodésica. Também apresentaremos novos resultados substituindo a hipótese do operador de Weingarten por curvatura média constante e limitação na curvatura de Ricci (Condição de Convergência Temporal na variedade Lorentziana). Por fim, serão obtidos resultados do tipo Bernstein e do tipo Calabi-Bernstein relativos a gráficos inteiros.

Palavras-chaves: campo vetorial paralelo; hipersuperfície totalmente geodésica; princípio do máximo no infinito.

ABSTRACT

In this work we will study two versions of the maximum principles at infinity for complete non-compact Riemannian manifolds. The first one sets conditions on a variety so that a smooth vector field has identically zero divergence. In the second version, based on the principle of the previous maximum, assumptions are also made about a variety and a smooth function, with which a field with zero divergence will result. As an application, we will show that an orientable hypersurface with nonnegative Weingarten operator, immersed isometrically in a Riemannian or Lorentzian manifold, under conditions of transversality to a parallel vector field and convergence at infinity to this field, is totally geodesic. We will show new results can be obtained by replacing the assumption with respect to the Weingarten operator by constant mean curvature and limitation in Ricci curvature (Timelike Convergence Condition in the Lorentzian manifold). In particular, we obtain Bernstein-type and Calabi-Bernstein-type results.

Keywords: maximum principle at infinity; parallel vector field; totally geodesic hypersurface.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estendendo ϕ à $(0, a]$	70
---	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	15
2.1	ELEMENTOS DE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS	15
2.1.1	Formas Diferenciais e Algumas Observações Sobre Integração	19
2.2	VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS	24
2.2.1	Formas Bilineares Simétricas	25
2.2.2	Métrica Semi-Riemanniana	28
2.2.3	Conexão de Levi-Civita	31
2.2.4	Geodésicas e Variedades Riemannianas Completas	32
2.2.5	Tensores e Curvaturas	37
2.2.6	Operadores Diferenciáveis	40
2.2.7	Orientação Temporal	45
2.3	IMERSÕES ISOMÉTRICAS	50
2.3.1	Hipersuperfícies Tipo-Espaço	59
3	RESULTADOS PRINCIPAIS	64
3.1	PRINCÍPIOS DO MÁXIMO	64
3.2	APLICAÇÕES	76
3.2.1	Resultados Auxiliares	76
3.2.2	O caso Riemanniano	80
3.2.3	O caso Lorentziano	85
	REFERÊNCIAS	89

1 INTRODUÇÃO

Considere uma variedade Riemanniana orientada M^n e uma $(n-1)$ -forma diferenciável ω em M^n . Se M^n é fechada, ou seja, compacta e sem bordo, o Teorema de Stokes implica que:

$$\int_M d\omega = 0. \quad (*)$$

Este resultado generaliza diversos teoremas do cálculo vetorial além de possuir aplicações na área de geometria diferencial, como por exemplo, na caracterização de imersões compactas em certos espaços ambientes. Contudo esta ferramenta lida apenas com objetos compactos, não sendo muito aplicável na obtenção de resultados geométricos de objetos não compactos. Assim, passou-se a pensar na validade de $(*)$ sem a hipótese da compacidade. Nessa direção, assumindo que M^n é relativamente compacta, isto é, que M^n possui fecho compacto, Bochner (BOCHNER, 1937) mostrou que se ω não se anula na fronteira de M^n e $d\omega$ é integrável, então a equação $(*)$ continua válida para este caso.

Por outro lado, é bem conhecido que a classe das variedades Riemannianas completas é muito maior do que a das variedades compactas. Dessa forma, começou-se a pensar na validade da equação $(*)$ para essas variedades. Neste sentido, em 1954, Gaffney (GAFFNEY, 1954) apresentou a primeira versão do Teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não compactas. Ele mostrou que se ω e $d\omega$ são ambas integráveis então a equação $(*)$ é verdadeira. Alguns anos mais tarde, em 1976, S-T. Yau (YAU, 1976) generalizou o resultado de Gaffney retirando a hipótese sob a integrabilidade de $d\omega$ sobre toda M^n . De fato, Yau mostrou que se ω possui norma integrável à Lebesgue em M^n , então existe uma sequência de domínios encaixados, isto é, $B_i \subset B_{i+1}$ em M^n tais que

$$M^n = \bigcup_i B_i \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Uma consequência importante da versão do Teorema de Stokes dada por Yau é a generalização do Teorema de E. Hopf para variedades Riemannianas completas e não compactas:

"Uma função subharmônica cuja norma do gradiente seja integrável à Lebesgue deve ser harmônica."

A fim de exibir outras extensões do Teorema de Gaffney, Karp (KARP, 1981) ampliou os resultados de Yau considerando um campo diferenciável no lugar do gradiente de uma

função suave. Em outras palavras, Karp mostrou que se X é um campo suave satisfazendo a condição

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \int_{B(2r) \setminus B(r)} |X| dM = 0,$$

tal que a sua divergência não muda de sinal fora de algum compacto, então ela deve ser nula. Nesta mesma perspectiva, Caminha (CAMINHA, 2011) percebeu que o resultado do Yau continuava válido substituindo o campo gradiente por um campo X cuja norma fosse integrável à Lebesgue em M^n , obtendo o seguinte resultado:

"Um campo suave com norma integrável à Lebesgue cuja divergência não muda de sinal deve ter divergência identicamente nula."

Observemos que este caso cobre alguns casos não incluídos no resultado de Yau, uma vez que os resultados de Yau são válidos apenas para o campo gradiente. Resultados desse tipo foram rotulados como Teoremas de Stokes para variedades não compactas.

Por outro lado, a aplicação de princípios do máximo na obtenção de resultados de caracterização em geometria diferencial constitui uma interessante área de pesquisa. Nessa linha, o estudo de propriedades geométricas de hipersuperfícies com curvatura média constante tem uma grande relevância.

Em ambiente Riemanniano ou Lorentziano, sabe-se que hipersuperfícies com curvatura média constante são soluções de primeira ordem para o problema isoperimétrico. Fisicamente, as hipersuperfícies Riemannianas com curvatura média constante identicamente nula são soluções para o problema de Cauchy associado às equações de Einstein, e no caso em que a curvatura média é diferente de zero, podem ser usadas para compreender o comportamento das ondas gravitacionais. Para maiores detalhes, sugerimos (CALABI, 1970), (CHOQUET et al., 1976), (GODDARD, 1977a), (GODDARD, 1977b), (CHOQUET-BRUHAT; FISCHER; MARSDEN, 1979), (MARSDEN; TIPLER, 1980) e (STUMBLES, 1981).

Matematicamente, hipersuperfícies Riemannianas desempenham um interessante papel devido às suas boas propriedades tipo Bernstein relacionadas a questões de existência e unicidade. Bernstein (BERNSTEIN, 1915) mostrou que os únicos gráficos inteiros com curvatura média nula em $\mathbb{R}^3$ são os planos. Alguns anos após, Simons (SIMONS, 1968) ampliou o resultado de Bernstein mostrando que os hiperplanos eram os únicos gráficos inteiros com curvatura média nula em $\mathbb{R}^n$, para $n \leq 7$. Em seguida, Bombieri, Giorgi e Guisti (BOMBIERI; GIORGI; GIUSTI, 1969) exibiram exemplos de gráficos inteiros com

curvatura média nula em $\mathbb{R}^n$ que não eram hiperplanos, para $n > 7$, mostrando que o resultado de Bernstein não é válido para qualquer dimensão. Este fato impulsionou vários matemáticos na busca pela validade do resultado de Bernstein sob hipóteses adequadas.

No caso em que a variedade ambiente é Lorentziana, o teorema de Bernstein também pode ser abordado considerando hipersuperfícies tipo-espaço. Neste cenário, Calabi (CALABI, 1970) mostrou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas com curvatura média nula no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ são os hiperplanos, para dimensão $n \leq 4$. Este resultado para dimensão arbitrária foi obtido por Cheng-Yau (CHENG; YAU, 1976) usando como ferramenta analítica o princípio do máximo de Omori-Yau.

A partir daqui, daremos uma descrição dos capítulos que constituem este trabalho. O Capítulo 2 está dividido em 3 seções onde será estabelecida uma teoria preliminar, além das notações que serão utilizadas. O Capítulo 3 está organizado em 2 seções. A primeira delas, 3.1, constrói condições para apresentarmos o princípio do máximo no infinito obtido por (ALÍAS; CAMINHA; NASCIMENTO, 2019) que afirma:

Teorema (cf. Teorema 3.1.1): Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa, não compacta, orientável e X um campo suave em M^n . Considere uma função suave $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ não negativa, não identicamente nula, convergindo para zero no infinito e tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$. Se $\operatorname{div} X \geq 0$ em M^n , então

- (1) $\langle \nabla f, X \rangle = 0$ em M^n ;
- (2) $\operatorname{div} X = 0$ em $M^n \setminus f^{-1}(0)$;
- (3) $\operatorname{div} X = 0$ em M^n se $f^{-1}(0)$ tem medida de Lebesgue nula.

A segunda parte do Capítulo 2 é composta por resultados que abordam equações em torno da curvatura de Ricci da variedade ambiente e de relações da curvatura de Ricci com o operador de Weingarten da imersão.

Na última Seção, 3.2, apresentamos aplicações do princípio do máximo no infinito descrito acima e os resultados principais dessa dissertação obtidos em (ALÍAS; CAMINHA; NASCIMENTO, 2019), além de duas novas aplicações obtidas no desenvolvimento dessa dissertação. Para citá-los, relembremos que uma hipersuperfície orientável é dita ser transversal a um campo Z da variedade ambiente quando Z nunca é tangente a hipersuperfície, ou seja, o ângulo entre o vetor normal a hipersuperfície e Z nunca se anula. Nesta configuração, o seguinte resultado caracteriza hipersuperfícies transversais como totalmente

geodésicas. A saber,

Teorema (cf. Teorema 3.2.1): Seja M^n uma hipersuperfície completa, não compacta e orientada de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, transversal ao campo paralelo unitário Z de $\overline{M}^{n+1}$ e orientada pela escolha de um campo normal unitário N tal que $\langle N, Z \rangle > 0$. Se o operador de Weingarten da imersão é positivo semi-definido e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica.

No caso em que o ambiente é Lorentziano, também obtém-se a mesma conclusão:

Teorema (cf. Teorema 3.2.3): Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não compacta de uma variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$, transversal ao campo paralelo unitário tipo-tempo Z de $\overline{M}^{n+1}$ e orientada pela escolha de um campo normal unitário tipo-tempo N tal que $\langle N, Z \rangle < 0$. Se o operador de Weingarten da imersão é positivo semi-definido e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica.

A hipótese do operador de Weingarten ser positivo semi-definido garante um sinal para o operador e para a curvatura média. Pensando em obter novas aplicações do princípio do máximo no infinito (cf. Teorema 3.1.1), observamos que as mesmas conclusões em relação a M^n são obtidas substituindo a hipótese do operador de Weingarten positivo semi-definido pela de curvatura média constante e uma certa restrição na curvatura de Ricci do ambiente. Em outras palavras, obtemos o seguinte resultado:

Teorema (cf. Teorema 3.2.2): Sejam M^n uma hipersuperfície completa, não compacta e orientada de uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, transversal ao campo paralelo e unitário Z de $\overline{M}^{n+1}$ e orientada pela escolha de um campo normal e unitário N tal que $\langle N, Z \rangle > 0$. Assuma que a curvatura de Ricci de $\overline{M}^{n+1}$ na direção de N seja não negativa. Se M^n possui curvatura média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$.

Assim como antes, o nosso resultado acima pode ser reobtido no caso em que a variedade ambiente $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Lorentziana. Neste caso assumimos que $\overline{M}^{n+1}$ satisfaça a Condição de Convergência Temporal (TCC) que significa dizer que a curvatura de Ricci do ambiente na direção de qualquer campo tipo-tempo é não negativa. Mais precisamente, obtemos

Teorema (cf. Teorema 3.2.4): Sejam M^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não compacta de uma variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$, transversal ao campo paralelo unitário tipo-tempo Z de $\overline{M}^{n+1}$ e orientada pela escolha de um campo normal unitário tipo-tempo N tal que $\langle N, Z \rangle < 0$. Assuma que $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a TCC. Se M^n possui curvatura

média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$.

Os resultados tipo Bernstein e tipo Calabi-Bernstein sobre gráficos inteiros são apresentados como corolários dessas aplicações.

Esta dissertação teve como base principal o artigo "*A maximum principle at infinity with applications to geometric vector fields*" devido à L.J. Alías, A. Caminha e F.Y. do Nascimento (ALÍAS; CAMINHA; NASCIMENTO, 2019), publicado em 2019 no Journal of Mathematical Analysis and Applications.

2 PRELIMINARES

2.1 ELEMENTOS DE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Esta seção estabelece uma base para estudarmos variedades semi-Riemannianas, que são variedades diferenciáveis munidas de um produto escalar. Para um tratamento minucioso, pode-se consultar (CARMO, 2008), (O'NEILL, 1983) e (TU, 2011).

Definição 2.1.1. *Uma variedade diferenciável n -dimensional (Hausdorff e com base enumerável) é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ definidas em abertos U_α do $\mathbb{R}^n$ tais que*

$$(1) \ M = \bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha);$$

(2) *Para quaisquer α e β de modo que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$ e $x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$ são abertos do $\mathbb{R}^n$ e as aplicações*

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \quad \text{e} \quad x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

são diferenciáveis.

Denotaremos M por M^n para indicar que M é uma variedade diferenciável de dimensão n . Para $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, o par (U_α, x_α) é chamado de parametrização (ou sistema de coordenadas) de M^n em p e U_α é a vizinhança coordenada em p .

A família $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ é o atlas de M^n que pode ser considerado maximal adicionando-se todas as aplicações suaves $x : U \rightarrow M^n$ tais que $x \circ x_\alpha$ e $x_\alpha \circ x$ sejam suaves para todo $\alpha \in \Lambda$. Assim, este atlas maximal é dito estrutura diferenciável de M^n .

Admitir que a variedade é Hausdorff e possui base enumerável significa que quaisquer dois pontos de M^n tem vizinhanças disjuntas (M^n é separável) e que a mesma pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas, respectivamente. Em realidade, se uma variedade M^n é conexa, as duas condições anteriores são equivalentes à existência de uma partição diferenciável da unidade, conceito que veremos mais adiante. Ao longo de todo o trabalho, as variedades diferenciáveis sempre serão consideradas conexas.

Exemplo 2.1.1. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável suave com uma única parametrização $(\mathbb{R}^n, I)$, na qual I é a aplicação identidade.*

Definição 2.1.2. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F : M^n \rightarrow N^m$ é diferenciável em $p \in M^n$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N^m$ em $F(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ em p tal que*

$$y^{-1} \circ F \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação F é diferenciável em um aberto de M^n se for em todo ponto neste aberto e será um difeomorfismo se F^{-1} for diferenciável.

Observe que a definição anterior independe da escolha das parametrizações.

Definição 2.1.3. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma curva diferenciável em M^n é uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ do intervalo aberto $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ em M^n . Sendo $\mathcal{C}^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em $\alpha(0) = p \in M$, o vetor tangente à α em $t = 0$ é o funcional linear $\alpha'(0) : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\bigg|_{t=0}; \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

O vetor tangente à M^n em p é o vetor tangente a alguma curva diferenciável α em $t = 0$ e o conjunto de todos os vetores tangentes a M^n em p é denotado por $T_p M$.

Sejam M^n uma variedade diferenciável, $p \in M^n$ e escolhamos uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ de M^n em p . Sendo $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e f uma função suave em M^n , podemos escrever para $q = (x_1, \dots, x_n) \in U$,

$$(f \circ x)(q) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad (x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}[f(x_1(t), \dots, x_n(t))]\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

Dessa forma, denotando por $\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$, temos que o conjunto $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ é uma base para $T_p M$, chamada base coordenada associada a parametrização x .

Não é difícil checar que o conjunto $T_p M$ dos vetores tangentes a uma variedade diferenciável M^n em $p \in M^n$ é um espaço vetorial real de dimensão n com as operações usuais de funções e com base associada $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$.

As demonstrações dos resultados a seguir podem ser encontradas no capítulo 0 de (CARMO, 2008). Uma vez conhecido o espaço tangente de uma variedade, o próximo resultado apresenta a diferencial entre espaços tangentes.

Proposição 2.1.1. *Seja $F : M^n \rightarrow N^m$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M^n$, e $v \in T_p M$ considere $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. A aplicação $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ definida por $dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$, chamada de aplicação diferencial de F em p , é linear e independe da escolha de α .*

Dizemos que duas variedades diferenciáveis M^n e N^n são difeomorfas se existe uma aplicação bijetiva $F : M^n \rightarrow N^n$ diferenciável com inversa diferenciável. A aplicação F é dita um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem abertos U de p em M^n e V de $F(p)$ em N^n tais que $F : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

O seguinte resultado é uma aplicação direta do Teorema da Função Inversa no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.1 (da Aplicação Inversa). *Se $F : M^n \rightarrow N^n$ é uma aplicação diferenciável entre variedades e se $p \in M^n$ é tal que $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ é um isomorfismo, então existe um aberto $U \subset M$ que contém p tal que $F|_U$ é um difeomorfismo.*

Os itens de definição a seguir são importantes para trabalharmos mais adiante com hipersuperfícies em variedades.

Definição 2.1.4. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente com $m > n$. Dizemos que a aplicação $F : M^n \rightarrow N^m$ é*

- (1) *uma imersão, se a aplicação diferencial $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M^n$;*
- (2) *um mergulho, se F é uma imersão e $F : M \rightarrow F(M)$ é um homeomorfismo (com $F(M)$ tendo a topologia induzida por N).*

Sendo F uma imersão ou um mergulho, $F(M)$ é chamada de subvariedade imersa ou mergulhada, respectivamente.

Exemplo 2.1.2. *Uma parametrização $x : U \rightarrow M^2$ de uma superfície regular $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma imersão, por definição.*

Como aplicação do Teorema da Aplicação Inversa 2.1.1, obtém-se:

Proposição 2.1.2. *Seja $F : M^n \rightarrow N^m$ é uma aplicação diferenciável entre variedades de dimensão $n \geq m$ e q é um valor regular de F . Então o conjunto $F^{-1}(q) \subset M^n$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão $n - m$.*

O seguinte resultado evidencia que toda imersão é localmente um mergulho.

Teorema 2.1.2. *Se $F : M^n \rightarrow N^m$ é uma imersão, então para cada $p \in M^n$ existe uma vizinhança U de p em M^n tal que $F|_U$ é um mergulho.*

Passaremos agora a definir um campo vetorial sobre uma variedade diferenciável. Antes disso, lembremos que o fibrado tangente de uma variedade diferenciável M^n é a união disjunta de todos os seus espaços tangentes, ou seja, é o conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} (\{p\} \cup T_p M).$$

Definição 2.1.5. *Um campo vetorial X em uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ que associa a cada ponto $p \in M^n$ um vetor $X(p) \in T_p M$. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.*

Em termos de coordenadas, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ é uma parametrização de M^n em p , temos

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \partial_i$$

onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções em U e $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ é a base coordenada associada a x . Deste modo, X é diferenciável se, e somente se, a_i for diferenciável para todo $i = 1, \dots, n$.

Podemos pensar no campo vetorial X como uma aplicação de $\mathcal{C}^\infty(M)$ no conjunto das funções em M^n , definido da seguinte maneira

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \partial_i(f)(p).$$

Deste modo, X é suave se, e somente se, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Denotaremos o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M^n por $\mathfrak{X}(M)$.

Encerraremos esta seção definindo o colchete de Lie de dois campos, bem como algumas de suas propriedades.

Proposição 2.1.3. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então existe um único campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Zf = (XY - YX)f$ para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

Definição 2.1.6. *O campo Z da Proposição 2.1.3 é chamado de colchete de X e Y e denotado por $[X, Y]$.*

Proposição 2.1.4. *Sejam X, Y e Z em $\mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e a, b números reais. Então, as seguintes propriedades são válidas,*

- (1) *Anticomutatividade*: $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (2) *$\mathbb{R}$ -linearidade*: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
- (3) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$;
- (4) *Identidade de Jacobi*: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

2.1.1 Formas Diferenciais e Algumas Observações Sobre Integração

Formas diferenciais são generalizações de funções definidas na variedade a valores reais. Iniciaremos definindo o fibrado cotangente de uma variedade diferenciável.

Definição 2.1.7. *Sejam M^n uma variedade diferenciável e $p \in M^n$. O espaço cotangente a M^n em p é o espaço dual T_p^*M de T_pM . Consequentemente, definimos o fibrado cotangente como o conjunto*

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ é uma parametrização de M^n em p , cujas coordenadas em U são $(x_1, \dots, x_n)$, temos que $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ é uma base de T_p^*M dual a base $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$.

Relembremos que um k -tensor é uma função k -linear $f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$, em que V é espaço vetorial. O mesmo é alternado se

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) f(v_1, \dots, v_k)$$

para qualquer permutação σ de S_k . Um k -tensor alternado é chamado de k -covetor em V . Consideremos $V = T_pM$ e denotemos por $\Lambda^k(T_p^*M)$ o espaço dos k -tensores alternados no espaço tangente T_pM .

Definição 2.1.8. *Uma k -forma diferencial em uma variedade diferenciável M^n é uma função que associa cada ponto $p \in M^n$ um k -covetor $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p^*M)$.*

O número k é o grau da forma diferencial. Uma função em M^n é uma 0-forma e uma n -forma é dita forma superior. Sendo ω uma k -forma em M^n e $X_1, \dots, X_k$ campos vetoriais em M^n , temos

$$\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega(p)(X_1(p), \dots, X_k(p)).$$

para cada $p \in T_p M$. Uma k -forma é escrita como

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{k,n}} a_I dx_I$$

onde $I = (i_1, \dots, i_k)$, com $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Com isso, ω é suave se as funções a_I são suaves, para todo $I \in \mathcal{I}_{k,n}$.

Definição 2.1.9. Se M^n é uma variedade diferenciável e ω é uma k -forma em M^n , definimos o suporte de ω como sendo o conjunto

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M^n : \omega(p) \neq 0\}}.$$

Diremos que ω possui suporte compacto se o conjunto $\text{supp}(\omega)$ for compacto.

A seguir, veremos algumas operações com formas diferenciais.

Definição 2.1.10. Considere uma aplicação diferenciável $F : M^n \rightarrow N^m$ e a sua diferencial $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, para $p \in M^n$. Sendo $\omega(F(p))$ uma k -forma em N^m , definimos o pullback de $\omega(F(p))$ por F como sendo a k -forma em M^n tal que

$$F^*(\omega(F(p)))(v_1, \dots, v_k) = \omega(F(p))(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)).$$

onde $v_1, \dots, v_k \in T_p M$.

Definição 2.1.11. Sejam α uma k -forma e β uma l -forma na variedade diferenciável M^n . Definimos o produto exterior $\alpha \wedge \beta$ como a $(k+l)$ -forma dada por

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+l}) = \sum \text{sgn}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}).$$

Com o intuito de tratar de derivação exterior, denotemos a álgebra graduada das formas diferenciais suaves em M^n por $\Omega^*(M)$. Lembremos que uma antiderivação de grau 1 em uma álgebra graduada $A = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear $d : A \rightarrow A$ tal que $\text{grau}(d\alpha) = \text{grau}(\alpha) + 1$ e

$$d(\omega \cdot \tau) = d(\omega)\tau + (-1)^k \omega d(\tau)$$

para todos $\alpha \in A$, $\omega \in A^k$ e $\tau \in A^l$.

Definição 2.1.12. A derivada exterior em uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear

$$d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$$

tal que

- (1) d é uma antiderivação de grau 1;
- (2) $d \circ d = 0$;
- (3) $(df)(X) = X(f)$, se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Assim, a derivada exterior de uma função f é

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

e a derivada exterior de uma k -forma ω é

$$d\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{k,n}} \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Definição 2.1.13. Considere uma k -forma α em uma variedade diferenciável M^n e $X \in \mathfrak{X}(M)$. A contração de α na direção de X é a $(k-1)$ -forma $i_X(\alpha)$ satisfazendo:

- (1) $i_X(\alpha) = 0$, se $k = 0$;
- (2) $i_X(\alpha) = \alpha(X)$, se $k = 1$;
- (3) $(i_X(\alpha))(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k)$, se $k \geq 2$;

para quaisquer $X_2, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$.

O próximo resultado garante uma caracterização da contração.

Proposição 2.1.5. Para quaisquer 1-formas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ em uma variedade diferenciável M^n e $X \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se

$$i_X(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha_i(X) \theta_i$$

onde $\theta_i = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \dots \wedge \alpha_k$, em que $\hat{\alpha}_i$ significa que este termo é omitido no produto exterior.

Demonstração. Ver o capítulo 5 de (TU, 2011). □

Para definir a integração de formas diferenciais em variedades diferenciáveis, precisamos que algumas condições sejam satisfeitas. Uma delas é a que vem a seguir.

Definição 2.1.14. Dizemos que uma variedade diferenciável M^n é orientável se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que:

- (a) Para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.

Se M^n é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição (a) é uma orientação para M^n . Duas estruturas diferenciáveis satisfazendo a condição (a) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição (a). Se uma variedade não satisfaz o item (a), então é dita ser não orientável.

Exemplo 2.1.3. (1) Toda variedade cujo atlas possui uma única parametrização é orientável, pois o atlas consistindo desta única parametrização é trivialmente coerente (isto é, $\det(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha) > 0$).

- (2) Variedades que podem ser cobertas por duas parametrizações cuja interseção é um conjunto conexo também são orientáveis. Se na interseção o determinante da derivada da mudança de coordenadas é negativo, basta trocar a ordem das variáveis em uma das parametrizações, para mudar o sinal do determinante e assim obter um atlas.

- (3) A esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser coberta por duas projeções estereográficas que se interceptam ao longo de um conjunto conexo (a interseção é a esfera menos os pólos).

O seguinte resultado é bem conhecido.

Proposição 2.1.6. Uma variedade diferenciável M^n é orientável se, e somente se, existe uma n -forma não nula em M^n .

Demonstração. Consulte o Capítulo 6 de (TU, 2011).

□

Considerando um sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$ em $U \subset \mathbb{R}^n$, as n -formas podem ser escritas como $\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ para uma única função $f(x)$ em $U \subset \mathbb{R}^n$. Nesse sentido, definimos a integral de ω em U pondo

$$\int_U \omega := \int_U f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_U f(x)dx_1 \cdots dx_n.$$

Sejam $T : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo, $x_1, \dots, x_n$ as coordenadas em U e $y_1, \dots, y_n$ as coordenadas em V . Denotemos por T_i a i -ésima componente de T e $J(T)$ a sua matriz Jacobiana. Temos $dT_1 \wedge \dots \wedge dT_n = \det(J(T))dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ e

$$\int_U \omega = \pm \int_V T^*(\omega)$$

a depender do sinal do $\det(J(T))$, onde ω é uma n -forma em U .

Considere M^n uma variedade diferenciável orientável com atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Denote por $\Omega_c^k(M)$ o espaço das k -formas suaves com suporte compacto em M^n . Sendo $\{(U, \phi)\}$ uma carta no atlas, desde que $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(U) = V$ é difeomorfismo e sendo $\omega \in \Omega_c^k(M)$, então $\phi^*(\omega)$ é uma n -forma com suporte compacto no aberto U . Nestes termos,

Definição 2.1.15. *Seja ω uma n -forma em um aberto $V \subset M^n$. Definimos a integral de ω em V como*

$$\int_V \omega = \int_U \phi^*(\omega).$$

A expressão acima define a integração em de uma n -forma em um aberto da variedade. Para definir sob toda a variedade precisaremos do seguinte conceito de partição diferenciável da unidade.

Definição 2.1.16. *Considere uma variedade diferenciável M^n com estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$. Uma família de funções diferenciáveis $\{f_\beta\}$ em M^n a valores reais é uma partição diferenciável da unidade se*

- (1) *para qualquer β , f_β é não negativa e $\text{supp}(f_\beta)$ está contido em uma vizinhança coordenada $V_\beta = x_\beta(U_\beta)$;*
- (2) *a família $\{V_\beta\}$ é localmente finita;*
- (3) $\sum_\beta f_\beta = 1$.

Diremos que a partição $\{f_\beta\}$ está subordinada à família $\{V_\beta\}$.

Assim, considere $\omega \in \Omega_c^n(M)$ e escolha $\{\rho_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada aos abertos $\{U_\alpha\}$. Por ω possuir suporte compacto e a partição possuir suportes localmente finitos, $\rho_\alpha \omega$ é identicamente nula exceto em uma quantidade finita. Em particular,

$$\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$$

é uma soma finita. Logo, $\text{supp}(\rho_\alpha \omega) \subset \text{supp}(\rho_\alpha) \cap \text{supp}(\omega)$, implicando que $\text{supp}(\rho_\alpha)$ é compacto. Assim, a integral

$$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

está bem definida.

Definição 2.1.17. *A integral de ω sob M^n é a soma finita*

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

Encerramos citando dois resultados clássicos sobre integrais que serão úteis para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Teorema 2.1.3 (de Stokes). *Seja M^n uma variedade diferenciável orientável e com fronteira. Considere $i : \partial M \hookrightarrow M^n$ o mapa inclusão. Se ω é uma $(n-1)$ -forma suave em M^n com suporte compacto, então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*(\omega).$$

Demonstração. Veja o Capítulo 6 de (TU, 2011).

□

Dizemos que uma variedade diferenciável é fechada se for compacta e sem bordo, isto é, $\partial M = \emptyset$.

Teorema 2.1.4 (de Gauss). *Se M^n é uma variedade diferenciável orientável fechada e ω é uma $(n-1)$ -forma suave em M^n com suporte compacto, então*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Demonstração. Aplicação direta do Teorema de Stokes 2.1.3.

□

2.2 VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

O estudo de variedades semi-Riemannianas envolve uma variedade diferenciável, vista anteriormente, e uma métrica definida como um produto escalar, para adquirirmos um modo de medir na variedade. A teoria desenvolvida ao longo desta seção pode ser encontrada em (O'NEILL, 1983) e (CARMO, 2008).

2.2.1 Formas Bilineares Simétricas

Consideremos um espaço vetorial V não degenerado.

Definição 2.2.1. *Uma forma bilinear simétrica é uma aplicação $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$(1) \quad b(au + v, w) = ab(u, w) + b(v, w);$$

$$(2) \quad b(u, av + w) = b(u, w) + ab(v, w);$$

$$(3) \quad b(u, v) = b(v, u);$$

para todos $u, v, w \in V$ e $a \in \mathbb{R}$.

Neste sentido, temos o conceito de positividade ou negatividade de uma forma.

Definição 2.2.2. *Uma forma bilinear simétrica b em V é*

$$(1) \quad \text{positiva definida, se para todo } v \in V \text{ não nulo temos } b(v, v) > 0;$$

$$(2) \quad \text{negativa definida, se para todo } v \in V \text{ não nulo temos } b(v, v) < 0;$$

$$(3) \quad \text{não degenerada, se } b(v, v) = 0 \text{ implica que } v \text{ é nulo.}$$

Do mesmo modo, podemos definir forma positiva ou negativa semi-definida trocando as desigualdades estritas.

Lema 2.2.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $A : V \rightarrow V$ um operador linear simétrico. Se A é positivo semi-definido e possui traço igual a zero, então A é o operador nulo.*

Demonstração. Sendo A simétrico, então existe uma base ortonormal em V que o diagonaliza e os elementos da diagonal principal são seus autovalores distintos. Como A é positivo semi-definido, todos seus autovalores são não negativos. Desde que $\text{tr } A = 0$ é a soma destes autovalores, então devemos ter todos os autovalores nulos. Isto nos diz que A é um operador nulo, como queríamos demonstrar. $\square$

Se W é um subespaço de V , uma forma bilinear simétrica b restrita à $W \times W$, que denotaremos por $b|_W$, continua sendo bilinear e simétrica. Com a definição 2.2.2, podemos falar do que seria o índice de b .

Definição 2.2.3. O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é a dimensão do maior subespaço W de V tal que $b|_W$ é negativa definida.

Assim, temos que $0 \leq \nu \leq n = \dim V$ e que $\nu = 0$ se, e somente se, b é positivo definido.

Definição 2.2.4. Uma forma bilinear simétrica e não degenerada g em V é dita produto escalar em V .

Com esta noção, dois vetores u e v em V são ortogonais, e denotamos por $u \perp v$, se $g(u, v) = 0$ e dois subespaços W_1 e W_2 são ortogonais se qualquer vetor de W_1 é ortogonal a qualquer vetor de W_2 e vice-versa. O conjunto de todos os vetores ortogonais aos vetores de um subespaço W é denotado por $W^\perp$, que é diferente do complemento ortogonal, pois $W + W^\perp$ não é necessariamente igual a V . Entretanto, podemos citar algumas propriedades úteis a este trabalho, como mostra o lema a seguir.

Lema 2.2.2. Sejam V um espaço vetorial com produto escalar g . Então,

- (1) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$;
- (2) $(W^\perp)^\perp = W$;
- (3) W é não degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^\perp$.

Demonstração. Para o item (1), suponha que $\dim V = n$, $\dim W = k$ e seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_k\}$ uma base de W . Completamos $\mathcal{B}$ para $\{e_1, \dots, e_n\}$ afim de obter uma base de V . Mostremos que $\dim W^\perp = n - k$. Se $\sum_{j=1}^n v_j e_j = v \in W^\perp$, então $v \perp e_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. Em termos de equação,

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} v_j = 0$$

onde $1 \leq i \leq k$ e $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Deste modo, temos k equações lineares em n incógnitas e cujas linhas da matriz $(a_{ij}) = (g_{ij})$ são linearmente independentes, pois g é não degenerada. Portanto, o espaço de soluções tem dimensão $n - k$ que nos fornecem a forma de vetores em $W^\perp$.

Para o item (2), basta notar que $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ e pelo item (1) aplicado à $W^\perp$ temos $\dim (W^\perp)^\perp = k$. Como ambos são subespaços de V segue o resultado.

Por fim, para o item (3), temos

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = n.$$

Esta equação e $W \cap W^\perp = \{0\}$ equivalem a $V = W \oplus W^\perp$. Mas a condição $W \cap W^\perp = \{0\}$ também é equivalente a W ser não degenerado e portanto segue o resultado. $\square$

Com o item (2) do lema anterior, W é não degenerado se, e somente se, $W^\perp$ é não degenerado. Isto nos permite construir uma base ortonormal pra V , através do processo de indução, tomando vetores em W e $W^\perp$ e os normalizando. Obtemos então o lema a seguir:

Lema 2.2.3. *Um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ com produto escalar possui base ortonormal.*

Assim, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de V , a matriz $(a_{ij}) = (g_{ij})$ é diagonal e então $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$. Ordenando de maneira que os sinais positivos venham primeiro, apenas trocando a ordem dos vetores da base, obtemos a assinatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Lema 2.2.4. *Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de V , com $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$, então todo $v \in V$ pode ser escrito de modo único como*

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

Demonstração. Mostremos que

$$v - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i = 0$$

sendo suficiente, para isso, mostrar que

$$\left(v - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i \right) \perp e_j,$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} g\left(v - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) e_i, e_j\right) &= g(v, e_j) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(v, e_i) g(e_i, e_j) \\ &= g(v, e_j) - g\left(v, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(e_i, e_j) e_i\right) \\ &= g(v, e_j) - g(v, e_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desde que e_j é arbitrário, segue o resultado.

□

Por último, temos um lema que relaciona a assinatura com o índice de V .

Lema 2.2.5. *Em relação à qualquer base ortonormal, o índice ν de V é o número de sinais negativos da assinatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.*

Demonstração. Sendo m a quantidade de sinais negativos da assinatura, se g é positiva definida, então temos $\nu = 0 = m$. Caso contrário, observe que no espaço W_1 gerado por $\{e_1, \dots, e_m\}$ temos que $g|_{W_1}$ é negativa definida, então $m \leq \nu$.

Para provar que $m \geq \nu$, sejam W um subespaço arbitrário tal que $g|_W$ é negativa definida e $\pi : W \rightarrow W_1$ dada por

$$\pi(w) = - \sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i.$$

Evidentemente π é linear, mostremos que também é injetiva, ou seja, que seu núcleo possui apenas o vetor nulo. Note que,

$$\pi(w) = 0 \implies \sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i = 0 \implies w = \sum_{i > m} g(w, e_i) e_i.$$

Como g é negativa definida em W , temos

$$g(w, w) \leq 0 \implies \sum_{i > m} [g(w, e_i)]^2 \leq 0 \implies \sum_{i > m} [g(w, e_i)]^2 = 0$$

de onde segue que $g(w, e_i) = 0$, ou seja, $w = 0$. Portanto π é injetiva implicando que $\dim W \leq \dim W_1 = m$. Como W é arbitrário, temos $\nu \leq m$ e concluímos $\nu = m$.

□

Por fim, se W é subespaço não degenerado de V temos

$$\text{ind } V = \text{ind } W + \text{ind } W^\perp. \quad (2.1)$$

2.2.2 Métrica Semi-Riemanniana

Definição 2.2.5. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma métrica semi-Riemanniana em M^n é uma aplicação que associa cada ponto $p \in M^n$ um produto escalar $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $T_p M$ com índice constante ν e que é diferenciável no seguinte sentido: se $x_1, \dots, x_n$*

são as funções coordenadas de um sistema de coordenadas de M^n , definido em um aberto U contendo p , então as funções

$$p \longmapsto \langle \partial_i(p), \partial_j(p) \rangle_p, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$$

são diferenciáveis em U , para $1 \leq i, j \leq n$. Em outras palavras, g_p é tal que

- (1) $\langle u, v \rangle_p = \langle v, u \rangle_p$ para todo $u, v \in T_p M$;
- (2) se $\langle u, v \rangle_p = 0$ para todo $v \in T_p M$, então $u = 0$;
- (3) $\text{ind}(T_p M) = \text{ind}(T_q M)$ para todo $p, q \in M^n$ com $p \neq q$.

Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável munida com uma métrica semi-Riemanniana. O índice de M^n é o índice $0 \leq \nu \leq n$ da métrica $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$. A seguir, apresentaremos alguns exemplos que serão utilizados neste trabalho.

Exemplo 2.2.1. (1) Uma variedade Riemanniana é uma variedade semi-Riemanniana de índice $\nu = 0$.

(2) Uma variedade semi-Riemanniana de índice $\nu = 1$ é dita variedade Lorentziana (ou variedade de Lorentz).

(3) Para $0 \leq \nu \leq n$, via identificação do $\mathbb{R}_\nu^n$ com $T_p(\mathbb{R}_\nu^n)$, escrevemos $u, v \in \mathbb{R}_\nu^n$ como

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i \text{ e } v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i.$$

A métrica dada por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-\nu} u_i v_i - \sum_{i=n-\nu+1}^n u_i v_i$$

é uma métrica semi-Riemanniana que resulta no espaço semi-euclidiano $\mathbb{R}_\nu^n$. Note que quando $\nu = 0$, temos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. No caso em que $\nu = 1$ e $n \geq 2$, $\mathbb{R}_1^n = \mathbb{L}^n$ é chamado de espaço de Lorentz-Minkowski.

A métrica aplicada a um vetor do espaço tangente nem sempre é positiva definida. Então podemos dar uma nomenclatura à este vetor de acordo com o sinal que ele assume.

Definição 2.2.6. Um vetor tangente v em M^n é dito

- (1) tipo-espaço, se $\langle v, v \rangle > 0$ ou se $v = 0$;
- (2) nulo, se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$;

(3) *tipo-tempo*, se $\langle v, v \rangle < 0$.

O cone nulo $\mathcal{C}_p$ em $p \in M^n$ é o conjunto todos os vetores nulos de $T_p M$. No caso de uma variedade Lorentziana, os vetores nulos são chamados de vetores tipo-luz e o cone nulo de cone tipo-luz.

Sendo M^n uma variedade Riemanniana orientável, veremos que a métrica Riemanniana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ nos fornece uma noção de volume em M^n . Considere $x : U \rightarrow M^n$ uma parametrização de M^n em $p \in M^n$ compatível com sua orientação. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal positiva de $T_p M$ e escrevamos a base associada $\{\partial x / \partial x_1, \dots, \partial x / \partial x_n\}$ a $T_p M$ como

$$\frac{\partial x}{\partial x_i} = X_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k.$$

Temos

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = \sum_{k,l=1}^n a_{ik} a_{jl} \langle e_k, e_l \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk},$$

onde utilizamos que $\langle e_k, e_l \rangle = 0$ se $l \neq k$ e $\langle e_k, e_l \rangle = 1$ se $l = k$. Desde que $\text{vol}(e_1, \dots, e_n) = 1$, teremos

$$\text{vol}(X_1, \dots, X_n) = \text{vol}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det(a_{ij}) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})}. \quad (2.2)$$

Se $y : V \rightarrow M^n$ é outra parametrização de M^n em p compatível com sua orientação, sendo $\{\partial y / \partial y_1, \dots, \partial y / \partial y_n\}$ a base associada, com $Y_i = \partial y / \partial y_i$ e $h_{ij} = \langle Y_i, Y_j \rangle$, obtemos por (2.2)

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \text{vol}(X_1, \dots, X_n) = J \text{vol}(Y_1, \dots, Y_n) = J \sqrt{\det(h_{ij})}, \quad (2.3)$$

onde J é o determinante positivo da matriz mudança de coordenadas de U para V .

Considere $D \subset M^n$ um aberto conexo com fecho compacto. Suponhamos que D está contido em uma vizinhança coordenada $x(U)$ de M^n e que a fronteira de $x^{-1}(D)$ tem medida nula no $\mathbb{R}^n$. Então, definimos o volume de D por

$$\text{vol}(D) = \int_{x^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx_1 \dots dx_n. \quad (2.4)$$

A expressão em (2.4) não depende da parametrização escolhida, ou seja, está bem definida, pois por (2.3) para outra parametrização y temos

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \int_{x^{-1}(D)} \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{y^{-1}(D)} \sqrt{\det(h_{ij})} \, J dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{y^{-1}(D)} \sqrt{\det(h_{ij})} \, dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Se D não está inteiramente contida em uma vizinhança coordenada, então tomamos uma partição diferenciável da unidade $\{\rho_i\}$ subordinada a cobertura finita de D por vizinhanças coordenadas $\{x_i(U_i)\}$ e definimos

$$\text{vol}(D) = \sum_i \int_{x_i^{-1}(U_i)} \rho_i \sqrt{\det(g_{ij})} dx_{i1} \dots dx_{in}$$

que não depende da escolha da partição $\{\rho_i\}$.

O integrando $\sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n$ em (2.4) é uma forma diferencial positiva de grau n , chamada de *forma volume* de M^n e denotada por dM . Assim, uma métrica Riemanniana é uma das maneiras de obtermos um elemento volume de M^n .

2.2.3 Conexão de Levi-Civita

A conexão vem da necessidade de definir derivada relativa à campos vetoriais. Para o espaço semi-euclidiano $\mathbb{R}_\nu^n$, temos uma maneira natural de definir, como segue:

Definição 2.2.7. Se X e $Y = \sum_i Y_i \partial_i$ são campos vetoriais em $\mathbb{R}_\nu^n$, definimos a derivada covariante natural de Y em relação à X como o campo

$$D_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y_i) \partial_i.$$

Como queremos generalizar esta definição para variedades semi-Riemannianas, introduzimos o conceito de conexão.

Definição 2.2.8. Uma conexão afim ∇ em M^n é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$(1) \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z;$$

$$(2) \nabla_X (aY + bZ) = a \nabla_X Y + b \nabla_X Z;$$

$$(3) \nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y;$$

para quaisquer funções $f, g \in C^\infty(M)$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\nabla_X Y$ é a derivada covariante de Y com respeito à X .

Observação 2.2.1. Com o auxílio de partição diferenciável da unidade, é possível mostrar que toda variedade diferenciável admite uma conexão.

Definição 2.2.9. Uma conexão afim ∇ de uma variedade Riemanniana M^n é simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Se para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$

dizemos que a conexão ∇ é compatível com a métrica de M^n .

Com as definições anteriores, podemos tratar da conexão de Levi-Civita.

Teorema 2.2.1. Em uma variedade semi-Riemanniana M^n existe uma única conexão ∇ tal que

(1) é simétrica;

(2) é compatível com a métrica.

Esta única conexão satisfazendo (1) e (2) é chamada de conexão de Levi-Civita de M^n e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Demonstração. Veja o Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983).

□

2.2.4 Geodésicas e Variedades Riemannianas Completas

Uma derivada covariante de campos pode ser determinada ao longo de curvas em M^n . Seja $\alpha : I \rightarrow M^n$ uma curva diferenciável e $\alpha'(t)$ o seu campo tangente. Sendo $t_0 \in I$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma extensão de $\alpha'(t_0)$ pode-se mostrar que $(\nabla_X Y)_{t_0}$ depende apenas de $\alpha'(t_0)$ e de Y restrito aos pontos de α . Assim, denotamos

$$\nabla_{\alpha'(t)} Y = \frac{DY}{dt} = \frac{D\alpha'}{dt}.$$

e dizemos que é o campo aceleração de α .

Definição 2.2.10. *Uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M^n$ na variedade semi-Riemanniana M^n é uma geodésica se*

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0.$$

A proposição a seguir garante a existência e unicidade de uma geodésica em um intervalo contendo $t = 0$.

Proposição 2.2.1. *Sejam $p \in M^n$ e $v \in T_p M$. Então existe um intervalo I contendo 0 e uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow M^n$ tal que*

$$(1) \quad \gamma(0) = p \text{ e } \gamma'(0) = v;$$

$$(2) \quad \text{se } \alpha : J \rightarrow M^n \text{ é outra geodésica com } \alpha'(0) = v, \text{ então } J \subset I \text{ e } \alpha = \gamma|_J.$$

Demonstração. Consulte o Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983).

□

Uma geodésica é dita maximal ou estendível se satisfaz o item (2) da Proposição 2.2.1.

Definição 2.2.11. *Uma variedade semi-Riemanniana é geodesicamente completa (ou apenas completa) se toda geodésica maximal está definida em todo $\mathbb{R}$.*

A fim de apresentar o Teorema de Hopf-Rinow em variedades Riemannianas, daremos o conceito breve da exponencial. Sendo $p \in M^n$, denotemos por $\mathcal{D}_p$ o conjunto de todas as geodésicas γ tais que $\gamma'(0) = v \in T_p M$ e a mesma está definida no mínimo em $[0, 1]$.

Definição 2.2.12. *A exponencial de M^n em p é a aplicação*

$$\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M^n$$

tal que $\exp_p(1) = \gamma(1)$ para todo $\gamma'(0) = v \in \mathcal{D}_p$.

Como aplicação do Teorema da Função Inversa, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.2. *Para cada $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U_0 \subset T_p M$ na qual $\exp_p$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança V_p em M^n .*

Na sequência, o próximo resultado garante a existência local de uma referencial ortonormal cujas derivadas covariantes num ponto é zero.

Proposição 2.2.3. *Dado $p \in M^n$, existe uma base ortonormal $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ de $T_p M$ tal que $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Considere $p \in M^n$ e $\{E_1, \dots, E_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Seja $V = \exp_p(U)$ vizinhança normal em p , ou seja, $U \subset T_p M$ é tal que $\exp_p|_U$ é difeomorfismo. Neste contexto, definamos $e_i = P_\gamma(E_i)$, ou seja, e_i é o transporte paralelo de E_i ao longo da geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, com $\|v\| = 1$, contida na vizinhança U . Deste modo,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle P_\gamma(E_i), P_\gamma(E_j) \rangle = \delta_{ij}$$

e

$$(\nabla_{e_i} e_j)(p) = \frac{d}{dt} \left(P_{\gamma(t)}^{-1}(e_j(\gamma(t))) \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (E_j(\gamma(t))) \Big|_{t=0} = 0,$$

implicando o resultado que queríamos. □

Definição 2.2.13. *Em uma variedade Riemanniana conexa M^n , a distância Riemanniana entre p e q é o ínfimo do comprimento de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam p a q .*

Sendo $p_0 \in M^n$ e $\delta > 0$, o conjunto dos pontos $p \in M^n$ tais que $d(p_0, p) < \delta$ é dito δ -vizinhança de p_0 em M^n . A proposição a seguir apresenta algumas propriedades da distância Riemanniana.

Proposição 2.2.4. *Em uma variedade Riemanniana conexa M^n a função distância Riemanniana d é uma métrica em M^n , ou seja, para todos $p, q, r \in M^n$*

$$(1) \quad d(p, q) \geq 0 \text{ e } d(p, q) = 0 \text{ se, e somente se, } p = q;$$

$$(2) \quad d(p, q) = d(q, p);$$

$$(3) \quad d(p, q) + d(p, r) \geq d(q, r).$$

Além disso, d é compatível com a topologia de M^n e fixado $p_0 \in M^n$ a função $\phi(p) = d(p_0, p)$ é contínua.

Demonstração. O comprimento de qualquer curva que ligue p a q é um número não negativo. Assim, por definição de ínfimo, $d(p, q) \geq 0$.

Se $p \neq q$, como M^n é Hausdorff, existe uma vizinhança de U de p que não contém q . Pela Proposição 2.2.2, existe uma vizinhança U_0 de p , que podemos considerar contida em U , tal que $\exp_p|_{U_0}$ é difeomorfismo. Assim, considerando uma δ -vizinhança de p em U_0 , como $q \notin U_0$, temos que $d(p, q) \geq \delta > 0$. Com isso, demonstramos o item (1).

O item (2) vem do fato do comprimento de uma curva não mudar se tomarmos a orientação oposta.

Dado $\delta > 0$, pelo conceito de ínfimo, existem curvas α e β em M^n que ligam p a q e p a r , respectivamente, tais que

$$l(\alpha) < d(p, q) + \frac{\delta}{2} \text{ e } l(\beta) < d(p, r) + \frac{\delta}{2}.$$

A curva $\gamma = \alpha^- \cup \beta$ é uma curva diferenciável por partes que liga q a r . Assim,

$$d(q, r) \leq l(\gamma) = l(\alpha^-) + l(\beta) = l(\alpha) + l(\beta) < d(p, q) + d(p, r) + \delta.$$

Como δ é arbitrário, fica provado o item (3).

Uma vez que cada vizinhança de um ponto de M^n contém uma δ -vizinhança deste ponto e que as δ -vizinhanças são abertos em M^n , então a métrica d é compatível com a topologia de M^n .

Consequentemente, a função $\phi(p) = d(p_0, p)$ é contínua, visto que é contínua na topologia induzida por d . Mais especificamente, basta ver que pelo item (3),

$$|d(p_0, p) - d(p_0, q)| \leq d(p, q),$$

para quaisquer $p, q \in M^n$.

□

As demonstrações do Teorema de Hopf-Rinow e suas consequências podem ser encontradas no Capítulo 7 de (CARMO, 2008).

Teorema 2.2.2 (de Hopf-Rinow). *Uma variedade Riemanniana conexa é geodesicamente completa se, e somente se, é completa como espaço métrico.*

Dessa forma, por simplicidade, diremos apenas que uma variedade Riemanniana conexa é completa para indicar que ela é geodesicamente completa. Uma consequência imediata do Teorema de Hopf-Rinow é:

Corolário 2.2.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa e $p \in M^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) *Existe um ponto $p \in M^n$ tal que $\exp_p$ está definida em todo $T_p M$,*
- (2) *M^n é completa se, e somente se, dados dois pontos em M^n existe uma geodésica minimizante ligando ambos,*

(3) *Todo subconjunto fechado e limitado de M^n é compacto.*

Em uma variedade Riemanniana M^n , uma curva divergente é uma curva diferenciável $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M^n$ tal que para todo compacto $K \subset M^n$, existe $t_0 \in (0, \infty)$ de modo que $\alpha(t) \notin K$ sempre que $t \geq t_0$. O comprimento desta curva é dado por

$$l(\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t |\alpha'(s)| ds.$$

Existe uma equivalência entre a completude de M^n e suas curvas divergentes, que apresentaremos a seguir.

Proposição 2.2.5. *Uma variedade Riemanniana é completa se, e somente se, o comprimento de toda curva divergente é infinito.*

Demonstração. Suponha que M^n é completa e que, por contradição, existe uma curva divergente α com comprimento finito, ou seja,

$$\int_0^t |\alpha'(s)| ds < \infty$$

para qualquer $t \in [0, \infty)$. Pelo Teorema de Hopf-Rinow 2.2.2, M^n é completa como espaço métrico. Então,

$$d(\alpha(0), \alpha(t)) \leq l(\alpha) = \int_0^t |\alpha'(s)| ds < \infty.$$

Logo, $\alpha([0, t])$ é limitado e assim $\overline{\alpha([0, t])}$ é compacto. Consequentemente o traço de α está contido em um compacto, o que contradiz a hipótese dela ser divergente.

Reciprocamente, suponha que toda curva divergente em M^n possui comprimento infinito. Se M^n não for completa, pelo item (1) do Corolário 2.2.1 existem $p \in M^n$, $v \in T_p M$, com $|v| = 1$, e $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ não está definida para $t \geq t_0$. Se $\gamma([0, t_0))$ está contida em um compacto K , então considerando uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, t_0)$ convergindo para t_0 , temos para $\gamma(t_n)$

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq |t_n - t_m|.$$

Isto nos diz que $(\gamma(t_n))$ é sequência de Cauchy no compacto K , então converge para $x_0 \in K$. Seja V uma vizinhança de x_0 tal que $\exp_q$ é difeomorfismo para todo $q \in V$. Considere n suficientemente grande tal que a sequência $\gamma(t_n)$ esteja contida em V . Assim, em V , existe única geodésica β ligando $\gamma(t_n)$ e $\gamma(t_m)$. Logo, β coincide com γ onde está

definida. Desde que a $\exp_{\gamma(t_n)}$ é difeomorfismo, então podemos estender γ para além de t_0 , o que é uma contradição. Logo, γ é uma curva divergente, entretanto

$$\int_0^{t_0} |\gamma'(s)| ds = \int_0^{t_0} ds = t_0 < \infty,$$

o que contradiz a hipótese. Portanto, devemos ter que M^n é completa. $\square$

Encerraremos com uma outra consequência do Teorema 2.2.2 que será de grande utilidade em nosso estudo relacionando a conexidade e completude entre duas variedades.

Corolário 2.2.2. *Sejam M e N variedades Riemannianas conexas tais que M é completa e $M \subseteq N$. Então $M = N$.*

Demonstração. Consideremos os espaços métricos $(M, d_M) \subseteq (N, d_N)$, em que d_N denota a distância Riemanniana induzida pela métrica Riemanniana em N e d_M a distância Riemanniana induzida por d_N em M . Pelo Teorema de Hopf-Rinow 2.2.2, (M, d_M) é um espaço métrico completo. Temos que M é um subconjunto aberto de N . Afirmamos que M é, também, fechado em N . A conclusão decorrerá, então, da conexidade de N . Se M não fosse fechado, existiria $q \in \partial M \setminus M$ e uma sequência $(q_n) \subset M$, tal que q_n converge para q segundo a distância d_N , o que é uma contradição. $\square$

2.2.5 Tensores e Curvaturas

Iniciaremos com alguns conceitos relativos a tensores numa variedade diferenciável M^n . Um tensor é uma generalização natural da idéia de campos de vetores. Veremos que assim como os campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

Definição 2.2.14. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Um tensor do tipo (r, s) é uma aplicação $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinear*

$$T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

Indicaremos por $\mathfrak{T}_s^r(M)$ o conjunto de todos os (r, s) campos tensoriais em M^n .

A métrica semi-Riemanniana g é um exemplo de um tensor do tipo $(0, 2)$. Também, toda k -forma diferencial ω em M^n é um $(0, k)$ -tensor.

Exemplo 2.2.2 (Identificação). Se $T : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilinear, defina o campo tensorial

$$\bar{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

por

$$\bar{T}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(T(X_1, \dots, X_s)).$$

O campo $\bar{T}$ é $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linear e, conseqüentemente, um campo tensorial do tipo $(1, s)$. Sendo assim, iremos considerar o próprio T como campo tensorial do tipo $(1, s)$.

Definição 2.2.15. A derivada covariante de um $(1, r)$ -tensor T é um $(1, r + 1)$ -tensor ∇T dado por

$$\begin{aligned} \nabla T(X_1, \dots, X_r, Z) &= (\nabla_Z T)(X_1, \dots, X_r) \\ &= Z(T(X_1, \dots, X_r)) \\ &\quad - T(\nabla_Z X_1, \dots, X_r) - \dots - T(X_1, \dots, \nabla_Z X_r). \end{aligned}$$

Dizemos que um tensor é paralelo quando $\nabla T = 0$. Em particular, se $Z \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o $(1, 1)$ -tensor

$$\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dado por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Neste sentido, dizemos que um campo é *paralelo* se $\nabla Z = 0$. Observe que o fato de Z ser paralelo implica que seu comprimento é constante ao longo de M^n . De fato, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos pela compatibilidade da conexão com a métrica

$$X(|Z|^2) = X \langle Z, Z \rangle = 2 \langle \nabla_X Z, Z \rangle = 0,$$

ou seja, $|Z|$ é constante.

Exemplo 2.2.3. Em uma variedade semi-Riemanniana M^n com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e a conexão ∇ compatível com a métrica, temos que $\nabla g = 0$. De fato, seja X, Y, Z campos vetoriais em M^n . Temos que,

$$\begin{aligned} \nabla g(X, Y, Z) &= \nabla_Z g(X, Y) \\ &= Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= Z \langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora introduziremos a definição de curvatura como um tensor que intuitivamente mede o quanto uma variedade deixa de ser Euclidiana.

Definição 2.2.16. *Em uma variedade semi-Riemanniana M^n com conexão de Levi-Civita ∇ , o tensor curvatura R é a aplicação*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Observe que o tensor curvatura é linear nas três entradas em relação às funções em $\mathcal{C}^\infty(M)$. Fixados X e Y em $\mathfrak{X}(M)$ podemos considerar o operador curvatura

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que leva cada Z em $R(X, Y)Z$.

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades do tensor curvatura.

Proposição 2.2.6. *Para quaisquer X, Y, Z e W em $\mathfrak{X}(M)$ temos*

- (1) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle$ (*antissimetria*);
- (2) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$ (*antissimetria*);
- (3) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*primeira identidade de Bianchi*);
- (4) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$ (*simetria de pares*).

Demonstração. Ver no Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983). □

A partir do tensor curvatura podemos construir tensores mais simples que carreguem algumas de suas propriedades. Se $p \in M^n$, um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ é chamado de plano tangente a M^n em p . Temos que σ é não degenerado se, e somente se,

$$\langle u, v \rangle^2 \neq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

para qualquer base $\{u, v\}$ em $T_p M$ de σ . O lema a seguir nos fornece o conceito de curvatura seccional, cuja demonstração é direta e será omitida, podendo ser encontrada no Capítulo 3 de (O'NEILL, 1983).

Lema 2.2.6. *Seja σ um plano não degenerado tangente à M^n em p com base $\{u, v\}$. A curvatura seccional de σ é o número*

$$K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{\langle u, v \rangle^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle}$$

que independe da escolha da base para σ .

Definição 2.2.17. *Sejam M^n uma variedade semi-Riemanniana, $p \in M^n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico em p e $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$, para todo $i = 1, \dots, n$. A curvatura de Ricci de M^n é o tensor $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ dado por*

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle R(X, e_i)Y, e_i \rangle. \quad (2.6)$$

A simetria de pares do tensor curvatura na Proposição 2.2.6 implica que o tensor de Ricci é simétrico. Além disso, a definição da curvatura de Ricci independe do referencial ortonormal geodésico escolhido. Se tomarmos o traço na equação (2.6) temos a curvatura escalar de M^n

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \text{Ric}(e_i, e_i). \quad (2.7)$$

Uma variedade que trabalharemos mais adiante é a variedade Einstein.

Definição 2.2.18. *Uma variedade semi-Riemanniana M^n é variedade Einstein se existe uma função $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que*

$$\text{Ric}(X, Y) = f \langle X, Y \rangle. \quad (2.8)$$

A conexidade de uma variedade Einstein M^n , com $n \geq 3$, implica que f é constante em (2.8). No caso $n = 3$, a curvatura seccional é constante. Sendo M^n Einstein, em (2.7) obtemos

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \text{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 f = n f,$$

ou seja,

$$f = \frac{S}{n}. \quad (2.9)$$

2.2.6 Operadores Diferenciáveis

Apresentaremos alguns operadores em variedades semi-Riemannianas que serão úteis ao longo do trabalho. Deixemos fixados uma variedade semi-Riemanniana M^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico em $p \in M^n$ e $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$.

Definição 2.2.19. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. O gradiente de f , denotado por ∇f , é um campo em M^n tal que*

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f), \quad (2.10)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

No sentido da Definição 2.2.19, um ponto $p \in M^n$ é ponto crítico de f se $\nabla f(p) = 0$. Em termos do referencial ortonormal geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$, escrevemos

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla f, e_i \rangle e_i \text{ e } X = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \langle X, e_j \rangle e_j.$$

Assim, reescrevemos a equação (2.10) como

$$X(f) = \langle \nabla f, X \rangle = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \nabla f, e_i \rangle \langle X, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i(f) \langle X, e_i \rangle. \quad (2.11)$$

O gradiente de uma função suave satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.2.7. *Sejam $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então,*

$$(1) \quad \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g;$$

$$(2) \quad \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f;$$

$$(3) \quad \nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f.$$

Demonstração. Considere X um campo suave arbitrário em M^n . Pela definição,

$$\langle \nabla(f + g), X \rangle = X(f + g) = X(f) + X(g) = \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle,$$

implicando que

$$\langle \nabla(f + g) - (\nabla f + \nabla g), X \rangle = 0$$

e então $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$, provando o item (1).

Para o item (2), note que

$$\langle \nabla(fg), X \rangle = X(fg) = fX(g) + gX(f) = f \langle \nabla g, X \rangle + g \langle \nabla f, X \rangle = \langle f\nabla g + g\nabla f, X \rangle$$

e assim

$$\langle \nabla(fg) - (f\nabla g + g\nabla f), X \rangle = 0$$

resultando em $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Por último, seguindo de modo análogo

$$\langle \nabla(\phi f), X \rangle = X(\phi f) = \phi'(f)X(f) = \phi'(f) \langle \nabla f, X \rangle = \langle \phi'(f)\nabla f, X \rangle$$

implicando que

$$\langle \nabla(\phi f) - \phi'(f)\nabla f, X \rangle = 0,$$

ou seja, $\nabla(\phi f) = \phi'(f)\nabla f$.

□

Outro conceito importante é o da divergência de um campo vetorial.

Definição 2.2.20. *Seja X um campo vetorial suave em M^n . Definimos a divergência de X como a função $\operatorname{div} X : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\operatorname{div}(X)(p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} X(p), e_i \rangle.$$

As seguintes propriedades são válidas para o divergente:

Proposição 2.2.8. *Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$(1) \operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y);$$

$$(2) \operatorname{div}(fX) = X(f) + f \operatorname{div}(X).$$

Demonstração. Observe que pela linearidade da conexão e da métrica,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X + Y)(p) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} (X + Y)(p), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} X(p) + \nabla_{e_i} Y(p), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} X(p), e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} Y(p), e_i \rangle \\ &= \operatorname{div}(X)(p) + \operatorname{div}(Y)(p), \end{aligned}$$

o que demonstra o item (1). Utilizando a reescrita em (2.11), ainda temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX)(p) &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} (fX)(p), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle e_i(f)(p)X(p) + f(p)\nabla_{e_i} X(p), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i(f)(p) \langle X(p), e_i \rangle + f(p) \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \nabla_{e_i} X(p), e_i \rangle \\ &= X(f)(p) + f(p) \operatorname{div} X(p), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

□

Em uma variedade Riemanniana podemos escrever a contração (cf. Definição 2.1.13) do elemento volume da variedade com respeito a um campo suave em termos da divergência deste campo, em outras palavras,

Lema 2.2.7. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, X um campo suave em M^n e $\omega = i_X(dM)$ a $(n-1)$ -forma contração de X na direção de dM . Então,*

$$d\omega = \operatorname{div}(X)dM \quad \text{e} \quad |\omega| = |X|.$$

Demonstração. Escrevamos

$$X = \sum_i f_i e_i$$

onde $f_i = \langle X, e_i \rangle$.

Sejam ω_i , $i = 1, \dots, n$, 1-formas diferenciais em M^n tais que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. Escolhamos campos $X_k = \sum_{j=1}^n f_{jk} e_j$, com $k = 1, \dots, n$ e notemos que

$$\omega_i(X_k) = \omega_i\left(\sum_{j=1}^n f_{jk} e_j\right) = \sum_{j=1}^n f_{jk} \omega_i(e_j) = f_{ik}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n)(X_1, \dots, X_n) &= \omega_1(X_1) \cdot \dots \cdot \omega_n(X_n) \\ &= f_{11} \cdot \dots \cdot f_{nn} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n f_{j1} dx_1(e_j)\right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{j=1}^n f_{jn} dx_n(e_j)\right) \\ &= dx_1(X_1) \cdot \dots \cdot dx_n(X_n) \\ &= (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(X_1, \dots, X_n) \\ &= dM(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Então, $dM = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$. Denotando $\theta_i = \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \dots \wedge \omega_n$, onde $\widehat{\omega_i}$ representa que ω_i foi omitido, podemos escrever pela Proposição 2.1.5,

$$i_X(dM) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \theta_i. \quad (2.12)$$

Derivando (2.12) temos,

$$d\omega = d(i_X(dM)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} d(f_i \theta_i) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i. \quad (2.13)$$

Sendo $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ uma base para o espaço das 1-formas, escrevemos

$$df_i = \sum_{j=1}^n df_i(e_j) \omega_j.$$

Por definição $df_i(e_i) = e_i(f_i)$ e considerando que $\omega_j \wedge \omega_j = 0$, na primeira parte da soma em (2.13) teremos

$$\begin{aligned}
 (-1)^{i+1} df_i \wedge \theta_i &= (-1)^{i+1} \left(\sum_{j=1}^n df_i(e_j) \omega_j \right) \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \dots \wedge \omega_n \\
 &= (-1)^{i+1} df_i(e_i) \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \dots \wedge \omega_n \\
 &= (-1)^{i+1} (-1)^{i-1} df_i(e_i) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_i \wedge \dots \wedge \omega_n \\
 &= e_i(f_i) dM.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Logo, substituindo (2.14) em (2.13), obtemos

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^n e_i(f_i) \right) dM + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \wedge d\theta_i. \tag{2.15}$$

Perceba que $d\theta_i$ possui todos os termos com alguma derivada de algum ω_k . Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial geodésico em p , temos que

$$d\omega_k(e_i, e_j) = e_i \omega_k(e_j) - e_j \omega_k(e_i) - \omega_k([e_i, e_j]) = -\omega_k(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i) = 0,$$

o que implica que $d\theta_i = 0$, anulando a segunda soma em (2.15). Além disto, como $\nabla_{e_i} e_i = 0$,

$$e_i(f_i) = e_i \langle X, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle,$$

Portanto,

$$d\omega(p) = \left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle(p) \right) dM = \operatorname{div}(X)(p) dM.$$

Como $p \in M^n$ é arbitrário, segue que $d\omega = \operatorname{div}(X) dM$. Por fim,

$$|\omega|^2 = |i_X(dM)|^2 = \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2 = |X|^2.$$

□

A partir da definição do divergente podemos obter a definição do Laplaciano de uma função.

Definição 2.2.21. *Se f é uma função suave em M^n , dizemos que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ é o Laplaciano de f .*

A proposição a seguir reúne algumas propriedades do Laplaciano.

Proposição 2.2.9. *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$(1) \Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g;$$

$$(2) \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Demonstração. Pelas propriedades do gradiente e do divergente nas Proposições 2.2.7 e 2.2.8, respectivamente, temos

$$\Delta(f + g) = \operatorname{div}(\nabla(f + g)) = \operatorname{div}(\nabla f) + \operatorname{div}(\nabla g),$$

provando o item (1) desta proposição. Além disso, ainda pelas Proposições 2.2.7 e 2.2.8,

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \operatorname{div}(\nabla(fg)) = \operatorname{div}(f\nabla g) + \operatorname{div}(g\nabla f) \\ &= (\nabla g)(f) + f\operatorname{div}(\nabla g) + (\nabla f)(g) + g\operatorname{div}(\nabla f) \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle, \end{aligned}$$

o que mostra o item (2). $\square$

Concluiremos esta seção com a definição a seguir:

Definição 2.2.22. Se $f \in C^\infty(M)$, dizemos que f é

- (1) *harmônica*, se $\Delta f = 0$ em M^n ;
- (2) *superharmônica*, se $\Delta f \leq 0$ em M^n ;
- (3) *subharmônica*, se $\Delta f \geq 0$ em M^n .

2.2.7 Orientação Temporal

Nesta subseção trataremos de variedades Lorentzianas, variedades semi-Riemannianas de índice constante igual a 1, cuja dimensão é maior ou igual a 2.

Seja V um espaço vetorial Lorentziano e denotemos por $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os vetores tangentes tipo-tempo em V . Para cada $u \in \mathcal{T}$, definamos o cone tipo-tempo de V contendo u por

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\}. \quad (2.16)$$

Cada espaço vetorial Lorentziano V possui dois cones tipo-tempo, o já expresso em (2.16) e

$$C(-u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle > 0\}.$$

Sendo $|u| = |\langle u, u \rangle|^{1/2}$, a proposição a seguir nos dá uma relação entre os dois cones e apresenta a desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa para vetores tangentes tipo-tempo.

Proposição 2.2.10. *Sejam $u, v \in \mathcal{T}$. Então,*

(1) *O subespaço $\{v\}^\perp$ é tipo-espaço e $V = \text{span}\{v\} \oplus \{v\}^\perp$. Particularmente, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$;*

(2) *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa)*

$$|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, v e w são linearmente dependentes;

(3) *Se $v \in C(u)$, temos que $w \in C(u)$ se, e somente se $\langle v, w \rangle < 0$*

Demonstração. Para o item (1), como v é um vetor tipo-tempo, então $\text{ind}(\text{span}\{v\}) = 1$. Além disso, $\text{span}\{v\}$ é não degenerado, ou seja, sendo $x = av \in \text{span}\{v\}$ para algum $a \in \mathbb{R}$, então, como $\langle v, v \rangle < 0$, temos

$$\langle x, x \rangle = 0 \implies a^2 \langle v, v \rangle = 0 \implies a = 0.$$

implicando que $x = 0$. Sendo assim, pelo Lema 2.2.2

$$V = \text{span}\{v\} \oplus (\text{span}\{v\})^\perp = \text{span}\{v\} \oplus \{v\}^\perp. \quad (2.17)$$

Pela equação (2.1),

$$1 = \text{ind}(V) = \text{ind}(\text{span}\{v\}) + \text{ind}(\{v\}^\perp) = 1 + \text{ind}(\{v\}^\perp),$$

ou seja, $\text{ind}(\{v\}^\perp) = 0$, e assim $\{v\}^\perp$ é tipo-espaço. Com isso mostremos que $\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v)$.

Se $z \in \mathcal{T}$, então $\langle z, z \rangle < 0$. Escrevendo $z = av + w$ pelo que foi obtido em (2.17), se $a > 0$, temos

$$\langle z, v \rangle = \langle av + w, v \rangle = a \langle v, v \rangle < 0$$

garantindo que $z \in C(v)$. Caso $a < 0$,

$$\langle z, v \rangle = a \langle v, v \rangle > 0$$

implicando que $z \in C(-v)$. De qualquer modo, $z \in C(v) \cup C(-v)$ e assim $\mathcal{T} \subseteq C(v) \cup C(-v)$.

Reciprocamente, suponha que $z \in C(v) \cup C(-v)$. Se $z \in C(v)$, temos $\langle z, v \rangle < 0$ e se $z \in C(-v)$, então $\langle z, -v \rangle < 0$. Em qualquer caso, $z \in \mathcal{T}$. Portanto,

$$\mathcal{T} = C(v) \dot{\cup} C(-v).$$

Para mostrarmos o item (2), a partir de (2.17), escrevamos $w = av + \tilde{w}$. Como $\{v\}^\perp$ é tipo-espaco pelo item (1), temos que $\langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \geq 0$. Sendo $w \in \mathcal{T}$, temos $\langle w, w \rangle < 0$. Deste modo,

$$\langle w, w \rangle = \langle av + \tilde{w}, av + \tilde{w} \rangle = a^2 \langle v, v \rangle + \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \implies \langle w, w \rangle - \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle = a^2 \langle v, v \rangle.$$

Logo, utilizando a equação anterior,

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle^2 &= (\langle v, av + \tilde{w} \rangle)^2 \\ &= (a \langle v, v \rangle + \langle v, \tilde{w} \rangle)^2 \\ &= [a^2 \langle v, v \rangle] \langle v, v \rangle \\ &= (\langle w, w \rangle - \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle) \langle v, v \rangle \\ &= \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle - \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \langle v, v \rangle \\ &\geq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle \\ &= (-\langle w, w \rangle)(-\langle v, v \rangle) \\ &= |w|^2 |v|^2, \end{aligned}$$

visto que $-\langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \langle v, v \rangle \geq 0$. Por fim, a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle = 0$, ou seja, $\tilde{w} = 0$ e assim $w = av$.

Na demonstração do item (3) podemos supor que u é unitário, pois $C(u/|u|) = C(u)$. Suponha que $w \in C(u)$ e escrevamos $v = au + \tilde{v}$ e $w = bu + \tilde{w}$ a partir do obtido em (2.17) para $\text{span}\{u\}$, onde $\tilde{v}, \tilde{w} \in \{u\}^\perp$. Como u, v e w são tipo-tempo,

$$\langle u, u \rangle = -1, \quad \langle v, v \rangle < 0 \quad \text{e} \quad \langle w, w \rangle < 0.$$

Desde que $\{u\}^\perp$ é tipo-espaco, temos

$$\langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle \tilde{w}, \tilde{w} \rangle \geq 0.$$

Assim, utilizando que $-\langle u, u \rangle = 1$,

$$\langle v, v \rangle < 0 \implies \langle au + \tilde{v}, au + \tilde{v} \rangle < 0 \implies a^2 \langle u, u \rangle + \langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle < 0 \implies |\tilde{v}| < |a|.$$

De modo análogo, encontramos que $|\tilde{w}| < |b|$. Logo,

$$\langle v, w \rangle = \langle au + \tilde{v}, bu + \tilde{w} \rangle = ab \langle u, u \rangle + \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle = -ab + \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle. \quad (2.18)$$

Por hipótese $v \in C(u)$, então

$$\langle v, u \rangle < 0 \implies \langle au + \tilde{v}, u \rangle < 0 \implies a \langle u, u \rangle < 0,$$

ou seja, $a > 0$. Como $w \in C(u)$,

$$\langle u, w \rangle < 0 \implies \langle u, bu + \tilde{w} \rangle < 0 \implies b \langle u, u \rangle < 0,$$

implicando que $b > 0$. Assim, utilizando que $|\tilde{v}||\tilde{w}| < |a||b| = ab$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz clássica para $|\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle|$, obtemos a partir de (2.18)

$$\langle v, w \rangle = -ab + \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle \leq -ab + |\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle| \leq -ab + |\tilde{v}||\tilde{w}| < -ab + ab = 0.$$

Para a volta, suponha que $\langle v, w \rangle < 0$, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz usual temos $-|\tilde{v}||\tilde{w}| \leq \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle$, garantindo a seguinte sequência de implicações:

$$\langle v, w \rangle < 0 \implies -ab + \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle < 0 \implies -ab - |\tilde{v}||\tilde{w}| \leq -ab + \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle < 0 \implies -ab - |\tilde{v}||\tilde{w}| < 0.$$

Deste modo,

$$0 < ab + |\tilde{v}||\tilde{w}| \leq ab + a|b| = a(b + |b|).$$

Como $a > 0$, devemos ter que

$$b + |b| > 0. \quad (2.19)$$

Se tivermos $b \leq 0$, então $|b| = -b$, o que não pode ocorrer, pois contradiz a desigualdade (2.19). Portanto $b > 0$ e, conseqüentemente,

$$\langle u, w \rangle = -b < 0,$$

como queríamos. □

Seja M^n uma variedade de Lorentz, $p \in M^n$ e apliquemos o que foi visto ao espaço vetorial $V = T_p M$. Como existem dois cones e não temos uma maneira intrínseca de distingui-los, escolher um deles significa orientar temporalmente $T_p M$. De maneira mais específica,

Definição 2.2.23. *Seja τ uma função que associa cada ponto $p \in M^n$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p M$. Esta função é diferenciável se para cada $p \in M^n$, existe um campo V em uma vizinhança U de p tal que $V(q) \in \tau_q$ para cada $q \in U$. A função τ é dita orientação temporal de M^n e diremos que M^n está temporalmente orientada.*

O teorema a seguir nos garante uma maneira equivalente de mostrar que M^n é temporalmente orientada.

Teorema 2.2.3. *Uma variedade Lorentziana M^n é temporalmente orientada se, e somente se, existe um campo $N \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo globalmente definido em M^n .*

Demonstração. Suponha que M^n é temporalmente orientada, ou seja, existe uma função diferenciável τ que associa cada ponto $p \in M^n$ um cone tipo-tempo $\tau_p \in T_p M$. Pela diferenciabilidade, para cada $p \in M^n$ existe um campo X_U definido em uma vizinhança U_p de p tal que $X_U(q) \in \tau_p$ para todo $q \in U$. Consideremos a família $\{U_\alpha\}$ destas vizinhanças, que claramente formam uma cobertura para M^n , junto com os campos vetoriais associados X_{U_α} . Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada à esta cobertura, satisfazendo os itens da Definição 2.1.16, e considere o campo

$$N = \sum_{\alpha} f_{\alpha} X_{U_{\alpha}}. \quad (2.20)$$

Pela Definição 2.1.16, a família $\{U_\alpha\}$ é localmente finita. Então a soma (2.20) é finita para cada ponto em M^n e N está bem definido. Além do mais, dado $p \in M^n$,

$$\langle N(p), N(p) \rangle = \left\langle \sum_{\alpha} f_{\alpha}(p) X_{U_{\alpha}}(p), \sum_{\beta} f_{\beta}(p) X_{U_{\beta}}(p) \right\rangle = \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha}(p) f_{\beta}(p) \langle X_{U_{\alpha}}(p), X_{U_{\beta}}(p) \rangle.$$

Como $X_{U_{\alpha}}(p), X_{U_{\beta}}(p) \in \tau_p$, pela Proposição 2.2.10,

$$\langle X_{U_{\alpha}}(p), X_{U_{\beta}}(p) \rangle < 0.$$

Desde que $0 \leq f_{\alpha}(p) \leq 1$, segue que

$$\langle N(p), N(p) \rangle < 0,$$

ou seja, $N(p)$ é tipo-tempo sendo p arbitrário. Portanto, N é campo tipo-tempo globalmente definido em M^n .

Reciprocamente, suponha existe um campo vetorial tipo-tempo N definido em toda M^n e defina a aplicação τ como

$$\tau_p = C(N(p)).$$

Com isso, já temos que τ é diferenciável e, portanto, determina uma orientação temporal em M^n .

□

Assim, a escolha de um campo tipo-tempo globalmente definido em M^n é o que nos dará a orientação temporal de M^n e diremos simplesmente que M^n está orientada (ou é orientável).

Exemplo 2.2.4. O espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ possui o campo de vetores

$$e_{n+1} = (0, \dots, 1)$$

globalmente definido e tipo-tempo. Portanto, $\mathbb{L}^{n+1}$ é temporalmente orientado.

2.3 IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Definição 2.3.1. Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades semi-Riemannianas com métricas g e $\overline{g}$, respectivamente, onde $m \geq n$. A aplicação $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ é uma imersão se para cada $p \in M^n$

$$d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \overline{M}$$

é injetiva e isométrica se

$$g(u, v) = \overline{g}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)).$$

para todos $u, v \in T_p M$.

Considerando $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ com M^n variedade diferenciável e $\overline{M}^m$ variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $g_{\overline{M}}$, podemos definir naturalmente uma métrica em M^n pela expressão $g = \varphi^*(\overline{g})$. Essa métrica é conhecida como métrica do *pullback*.

No que segue, a variedade $\overline{M}^m$ será chamada de variedade ambiente e o número não negativo $k = m - n$ de codimensão da imersão φ . Além disso, elementos munidos com uma "barra" sobre ele são elementos da variedade ambiente $\overline{M}^m$, salvo a métrica que será denotada por $\langle, \rangle$ tanto quando se tratar da variedade ambiente como da variedade imersa.

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ uma imersão isométrica. Uma vez que ao redor de cada ponto $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M^n$ tal que $\varphi|_U$ é um mergulho sobre $\varphi(U)$, pelo Teorema 2.1.2, podemos identificar U com a sua imagem $\varphi(U)$, isto é φ é localmente a aplicação inclusão. Dessa forma, para cada $p \in M^n$, o espaço tangente $T_p M$ pode ser visto como um subespaço não degenerado de $T_p \overline{M}$ e escrevemos, a partir do Lema 2.2.2,

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

em que $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Os vetores em $T_p M$ são ditos tangentes enquanto os vetores em $(T_p M)^\perp$ são ditos normais.

Assim, cada $u \in T_p \overline{M}$ pode ser escrito unicamente da forma

$$u = u^\top + u^\perp,$$

o que motiva a seguinte definição:

Definição 2.3.2. *Sejam $\overline{M}^m$ uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^m$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Com relação à $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$, pode-se mostrar que é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica de M^n . Segue da unicidade da conexão de Levi-Civita no Teorema 2.2.1 que $(\overline{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita de M^n e denotamos por ∇ .

Assim obtemos a fórmula de Gauss

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (2.21)$$

a qual define a aplicação

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$$

chamada de *Segunda Forma Fundamental* da imersão φ , onde $\mathfrak{X}(M)^\perp$ denota o conjunto dos campos normais em M^n .

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, pelas propriedades das conexões de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e ∇ temos que a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por $\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.

Consideremos os campos de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, e denotemos por $A_\xi(X)$ a componente tangencial de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$, pela equação anterior e pela fórmula de Gauss em (2.21), temos

$$\begin{aligned} 0 &= X \langle \xi, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp + (\overline{\nabla}_X \xi)^\top, Y \rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \rangle \\ &= \langle -A_\xi(X), Y \rangle + \langle \xi, \alpha(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle. \quad (2.22)$$

Em particular, a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X, \xi) = A_\xi(X)$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$. Assim, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e autoadjunta por (2.22), isto é

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle A_\xi(Y), X \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação A_ξ é chamada *Operador de Weingarten* da imersão φ .

A componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, que é denotada por $\nabla_X^\perp \xi$, define uma conexão compatível com o fibrado tangente normal $TM^\perp$ no seguinte sentido:

$$\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$$

é $C^\infty(M)$ -linear em X , $\mathbb{R}$ -linear em ξ e para todo $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X^\perp(f\xi) = f\nabla_X^\perp \xi + X(f)\xi.$$

Além disto, $\nabla^\perp$ é compatível com a métrica, ou seja,

$$X\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de $\bar{M}$. Dizemos que $\nabla^\perp$ é a conexão normal de φ e obtemos a fórmula de Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi. \quad (2.23)$$

A partir da segunda forma fundamental, introduzimos a seguinte definição:

Definição 2.3.3. *A subvariedade M^n é dita ser totalmente geodésica quando a segunda forma fundamental de M^n em $\bar{M}^m$ é identicamente nula, isto é $\alpha \equiv 0$.*

Ao considerar o traço da segunda forma fundamental, definimos uma importante quantidade geométrica, a saber,

Definição 2.3.4. *O vetor curvatura média de M^n em $\bar{M}^m$ é o traço da segunda forma fundamental. Mais especificamente,*

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\alpha). \quad (2.24)$$

Uma vez que o operador A_ξ é simétrico em cada direção $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ podemos definir a curvatura média em cada direção ξ . Isto é, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n , de (2.22) e (2.24), escrevemos

$$\langle \mathbf{H}, \xi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \alpha(e_i, e_i), \xi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle A_\xi(e_i), e_i \rangle = \frac{1}{n} \text{tr}(A_\xi). \quad (2.25)$$

Uma condição mais fraca que a de uma imersão totalmente geodésica é uma imersão com vetor curvatura média nulo.

Definição 2.3.5. *Seja M^n uma subvariedade de $\overline{M}^m$. Dizemos que uma imersão isométrica M^n possui vetor curvatura média nulo se $\mathbf{H}(p) = 0$ para todo $p \in M^n$.*

A partir de agora, iremos supor que M^n seja uma hipersuperfície imersa em $\overline{M}^{n+1}$, ou seja, que a imersão tem codimensão $k = 1$. Vamos supor também que existe um campo vetorial suave normal e unitário N , globalmente definido sobre M^n . Uma vez que só há duas escolhas para o campo normal unitário, N e $-N$, segue que o operador de Weingarten é único a menos de um sinal. Por esta razão, denotaremos o operador A_N simplesmente por A .

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$. Uma vez que $\alpha(X, Y)$ é um campo de vetores normais e $(T_p \overline{M})^\perp = \text{span}\{N\}$ para cada ponto $p \in M^n$, devemos que $\alpha(X, Y) = gN$, para alguma função $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Daí,

$$\langle \alpha(X, Y), N \rangle = g \langle N, N \rangle = \varepsilon g.$$

Pela identidade (2.22), escrevemos

$$g = \varepsilon \langle \alpha(X, Y), N \rangle = \varepsilon \langle A(X), Y \rangle,$$

onde

$$\alpha(X, Y) = \varepsilon \langle A(X), Y \rangle N.$$

Logo, de (2.21) obtemos a fórmula de Gauss para hipersuperfícies,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon \langle A(X), Y \rangle N. \quad (2.26)$$

Por outro lado, tomando $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos da fórmula de Weingarten (2.23)

$$\overline{\nabla}_X N = -A(X) + \nabla_X^\perp N. \quad (2.27)$$

Uma vez que $\langle N, N \rangle = \varepsilon$ é constante, tomando a derivada na direção de X ,

$$0 = X\langle N, N \rangle = 2\langle \nabla_X^\perp N, N \rangle,$$

resultando que $\nabla_X^\perp N = 0$. Substituindo em (2.27), obtemos a fórmula de Weingarten para hipersuperfícies

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N. \quad (2.28)$$

No caso de hipersuperfícies, o vetor curvatura média e a função curvatura média de M^n em $\overline{M}^{n+1}$ são dados, respectivamente por

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{tr}(A)N \quad \text{e} \quad H = \frac{\varepsilon}{n} \operatorname{tr}(A). \quad (2.29)$$

Consideremos, agora, os tensores de curvatura $\overline{R}$ e R de $\overline{M}^{n+1}$ e M^n , respectivamente. A seguinte proposição relaciona estes dois tensores por meio da segunda forma fundamental.

Proposição 2.3.1 (Equações Fundamentais das Imersões Isométricas). *Seja M^n uma hipersuperfície imersa isometricamente em $\overline{M}^{n+1}$. Então, para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

(1) *Equação de Gauss*

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \varepsilon \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle \\ &\quad - \varepsilon \langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle; \end{aligned} \quad (2.30)$$

(2) *Equação de Codazzi*

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \quad (2.31)$$

Demonstração. Para demonstrar o item (1) vamos desenvolver $\overline{R}(X, Y)Z$. Note que,

$$\overline{R}(X, Y)Z = -\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z,$$

onde pelas fórmulas (2.26) e (2.28) de Gauss e Weingarten para hipersuperfícies, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
-\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= -\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \varepsilon \langle A(Y), Z \rangle N) \\
&= -\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z) - \bar{\nabla}_X (\varepsilon \langle A(Y), Z \rangle N) \\
&= -\nabla_X \nabla_Y Z - \varepsilon \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle N - X (\varepsilon \langle A(Y), Z \rangle) N \\
&\quad - \varepsilon \langle A(Y), Z \rangle \bar{\nabla}_X N \\
&= -\nabla_X \nabla_Y Z + [-\varepsilon \langle A(X), \nabla_Y Z \rangle - X (\varepsilon \langle A(Y), Z \rangle)] N \\
&\quad + \varepsilon \langle A(Y), Z \rangle A(X)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + [\varepsilon \langle A(Y), \nabla_X Z \rangle + Y (\varepsilon \langle A(X), Z \rangle)] N \\
&\quad - \varepsilon \langle A(X), Z \rangle A(Y)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

e

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \varepsilon \langle A([X, Y]), Z \rangle N. \tag{2.34}$$

A soma das equações (2.32), (2.33) e (2.34) nos fornece $\bar{R}(X, Y)Z$ e o produto com o campo tangente W anula as partes normais. Além disso,

$$-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z = R(X, Y)Z.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \varepsilon \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle \\
&\quad - \varepsilon \langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle,
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

O item (2) também decorrerá de um desenvolvimento direto da expressão, além das fórmulas (2.26) e (2.28) de Gauss e Weingarten para hipersuperfícies, na respectiva ordem.

De fato,

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)N &= -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y N + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X N + \bar{\nabla}_{[X,Y]} N \\
&= \bar{\nabla}_X A(Y) - \bar{\nabla}_Y A(X) - A([X, Y]) \\
&= \nabla_X A(Y) + \varepsilon \langle A(X), A(Y) \rangle N - \nabla_Y A(X) - \varepsilon \langle A(Y), A(X) \rangle N \\
&\quad - A(\nabla_X Y) + A(\nabla_Y X) \\
&= \nabla_X A(Y) - A(\nabla_X Y) - \nabla_Y A(X) + A(\nabla_Y X).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Observe que a equação (2.35) mostra que $\overline{R}(X, Y)N$ não possui parte normal. Assim,

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = \overline{R}(X, Y)N. \quad (2.36)$$

Pela Definição 2.2.15,

$$-(\nabla_Y A)X = -\nabla_Y A(X) + A(\nabla_Y X) \quad (2.37)$$

e

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X A(Y) - A(\nabla_X Y). \quad (2.38)$$

Substituindo (2.36), (2.37) e (2.38) em (2.35), obtemos

$$(\overline{R}(X, Y)N)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X.$$

□

No caso em que o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ possui curvatura seccional constante igual a C , sabemos que

$$\overline{R}(X, Y)Z = C(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X), \quad (2.39)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Uma vez que $N \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, segue de (2.39) que $\overline{R}(X, Y)N = 0$ caso $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, as equações de Gauss e Codazzi se escrevem de maneira mais simples, ou seja,

(1) Equação de Gauss

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= C(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle) \\ &\quad - \varepsilon \langle A(Y), Z \rangle \langle A(X), W \rangle + \varepsilon \langle A(X), Z \rangle \langle A(Y), W \rangle; \end{aligned} \quad (2.40)$$

(2) Equação de Codazzi

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \quad (2.41)$$

Os espaços Euclidiano e de Lorentz-Minkowski são exemplos de variedades de curvatura seccional constante igual a zero. A seguir daremos dois exemplos de variedades Riemannianas com curvatura seccional não nula. A primeira delas é a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 2.3.1. *A esfera unitária n -dimensional*

$$\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} ; \langle p, p \rangle = 1\}$$

tem curvatura seccional constante igual a 1, se $n \geq 2$.

Sejam $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $Z(p) = p$ o campo em $\mathbb{R}^{n+1}$ que associa $p \in \mathbb{S}^n$ ao vetor posição unitário p . Dado qualquer $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ temos

$$\bar{\nabla}_X p = X.$$

Desde que $\langle p, p \rangle = 1$, derivando covariante ambos os lados, obtemos

$$0 = X(\langle p, p \rangle) = 2 \langle \bar{\nabla}_X p, p \rangle = 2 \langle X, p \rangle$$

implicando que o campo posição unitário é normal à $T_p(\mathbb{S}^n)$. Assim, definamos o campo normal em $\mathbb{S}^n$ por

$$N(p) = -p.$$

O operador de Weingarten será dado por

$$A(X(p)) = -\bar{\nabla}_{X(p)} N(p) = \bar{\nabla}_{X(p)} p = X(p),$$

ou seja,

$$A(X) = X,$$

para todo campo suave X em $\mathbb{S}^n$. Seja $\{X, Y\}$ uma base de um plano tangente à $\mathbb{S}^n$ não degenerado. Como a curvatura seccional do $\mathbb{R}^{n+1}$ é constante igual a zero e $\langle N, N \rangle = 1 = \varepsilon$, da equação de Gauss em (2.40) obtemos

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{-\langle A(Y), X \rangle \langle A(X), Y \rangle + \langle A(X), X \rangle \langle A(Y), Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{-\langle Y, X \rangle \langle X, Y \rangle + \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Desde que o plano tangente foi escolhido arbitrariamente, segue que $\mathbb{S}^n$ possui curvatura seccional constante igual a 1.

O segundo exemplo é o espaço hiperbólico em $\mathbb{L}^{n+1}$.

Exemplo 2.3.2. Definimos o espaço hiperbólico n -dimensional como a hiperquádrica de $\mathbb{L}^{n+1}$ dada por

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} \geq 1\}. \quad (2.42)$$

Mostraremos que $\mathbb{H}^n$ é uma subvariedade Riemanniana de codimensão 1 de $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura seccional constante igual a -1 .

Primeiro mostremos que $\mathbb{H}^n$ é a imagem inversa de valor regular de alguma função suave f . Considere a aplicação suave $f : \mathbb{L}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$f(p) = \langle p, p \rangle + 1.$$

Observe que $\mathbb{H}^n = f^{-1}(0)$, então mostremos que zero é valor regular de f .

Dados $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ e $v \in T_p(\mathbb{L}^{n+1})$, seja $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Considere que $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+1}$. Pela Definição 2.2.19 de gradiente,

$$\langle \bar{\nabla} f(p), v \rangle = df_p(v) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle + 1) \Big|_{t=0} = \langle 2\alpha(0), \alpha'(0) \rangle = \langle 2p, v \rangle.$$

Como v é arbitrário, temos que $\bar{\nabla} f(p) = 2p$. Deste modo, $\bar{\nabla} f(p) = 0$ se, e somente se, $p = 0$ e esta igualdade não ocorre para pontos $p \in \mathbb{H}^n$. Logo, zero é valor regular de f e portanto $f^{-1}(0) = \mathbb{H}^n$ é subvariedade de $\mathbb{L}^{n+1}$ pela Proposição 2.1.2.

Para mostrar que é subvariedade Riemanniana, devemos obter que $\text{ind } \mathbb{H}^n = 0$. Para isso, seja $p \in \mathbb{H}^n$ e notemos que $T_p(\mathbb{H}^n) = \ker(df_p)$. Assim, se $v \in \ker(df_p)$, temos

$$0 = df_p(v) = \langle \bar{\nabla} f(p), v \rangle = \langle 2p, v \rangle \implies 0 = \langle p, v \rangle.$$

Logo,

$$T_p(\mathbb{H}^n) = \{v \in \mathbb{L}^{n+1} : \langle p, v \rangle = 0\}.$$

Analisemos o conjunto $\text{span}\{\bar{\nabla} f(p)\}$. Primeiramente note que $\text{span}\{\bar{\nabla} f(p)\} = (T_p(\mathbb{H}^n))^\perp$. Além disso, se $v \in T_p(\mathbb{H}^n) \cap \text{span}\{\bar{\nabla} f(p)\}$, então $v = a\bar{\nabla} f(p)$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e $\langle p, v \rangle = 0$. Assim,

$$0 = \langle p, v \rangle = \langle p, a\bar{\nabla} f(p) \rangle = 2a \langle p, p \rangle = -2a,$$

ou seja, $a = 0$, então $v = 0$ e

$$T_p(\mathbb{H}^n) \cap \text{span}\{\bar{\nabla} f(p)\} = 0$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n$. Assim, pela Proposição 2.2.2 escrevemos

$$T_p(\mathbb{L}^{n+1}) = T_p(\mathbb{H}^n) \oplus \text{span}\{\bar{\nabla} f(p)\}. \quad (2.43)$$

Desde que $\text{span}\{\bar{\nabla} f(p)\}$ tem dimensão igual a 1 e, para $p \in \mathbb{H}^n$, temos $\langle p, p \rangle = -1 < 0$ obtemos

$$\langle \bar{\nabla} f(p), \bar{\nabla} f(p) \rangle = 4 \langle p, p \rangle = -4 < 0$$

implicando que $\text{ind}(\text{span}\{\bar{\nabla}f(p)\}) = 1$. A partir da soma direta em (2.43) e pela equação do índice em (2.1),

$$1 = \text{ind}(\mathbb{L}^{n+1}) = \text{ind}(T_p(\mathbb{H}^n)) + \text{ind}(\text{span}\{\bar{\nabla}f(p)\}) = \text{ind}(T_p(\mathbb{H}^n)) + 1,$$

ou seja, $\text{ind}(T_p(\mathbb{H}^n)) = 0$ e portanto $\mathbb{H}^n$ é subvariedade Riemanniana.

Em relação à curvatura seccional, vamos seguir de maneira semelhante ao Exemplo 2.3.1. Já temos que $(T_p(\mathbb{H}^n))^\perp$ é gerado por $\bar{\nabla}f(p)$, para cada $p \in \mathbb{H}^n$. O campo normal unitário em $\mathbb{H}^n$ será

$$N(p) = \frac{\bar{\nabla}f(p)}{|\bar{\nabla}f(p)|} = p$$

donde $\langle N, N \rangle = -1 = \varepsilon$. O operador de Weingarten para cada $p \in \mathbb{H}^n$ e $X \in T_p(\mathbb{H})^n$ será dado por

$$A(X(p)) = -\bar{\nabla}_{X(p)}N(p) = -\bar{\nabla}_{X(p)}p = -X(p),$$

isto é,

$$A(X) = -X$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$.

Sendo $\{X, Y\}$ uma base de um plano tangente não degenerado a $\mathbb{H}^n$, desde que a curvatura seccional de $\mathbb{L}^{n+1}$ é constante igual a zero, a equação de Gauss em (2.40) nos fornece

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\langle A(Y), X \rangle \langle A(X), Y \rangle - \langle A(X), X \rangle \langle A(Y), Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\langle -Y, X \rangle \langle -X, Y \rangle - \langle -X, X \rangle \langle -Y, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\langle X, Y \rangle^2 - \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= -1. \end{aligned}$$

A arbitrariedade na escolha do plano tangente resulta que $\mathbb{H}^n$ possui curvatura seccional constante igual a -1 .

2.3.1 Hipersuperfícies Tipo-Espaço

Abordaremos algumas propriedades de hipersuperfície tipo-espaço M^n imersa isometricamente em uma variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$. Para isto, vejamos quem é esta hiper-

superfície.

Definição 2.3.6. *Uma hipersuperfície M^n da variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$ é tipo-espaco se a sua métrica induzida pela imersão $\varphi : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é Riemanniana.*

Um resultado de grande utilidade é o relativo à orientação temporal de M^n .

Proposição 2.3.2. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaco de uma variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$ temporalmente orientada. Então M^n admite campo vetorial suave, normal, unitário e tipo-tempo $N \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ na mesma orientação de temporal de $\overline{M}^{n+1}$.*

Demonstração. Seja X o campo vetorial tipo-tempo que orienta temporalmente $\overline{M}^{n+1}$. De acordo com a Proposição 2.2.10, o conjunto $\mathcal{T}$ de todos os vetores tipo-tempo em $\overline{M}^{n+1}$ é $C(X(p)) \dot{\cup} C(-X(p))$. Então, para cada ponto $p \in M^n$ defina $N(p)$ como sendo um vetor unitário em $(T_p M)^\perp$ de modo que $N(p) \in C(X(p))$. Substituindo $N(p)$ por $-N(p)$ quando for necessário, obtemos um campo vetorial unitário e tipo-tempo, normal à M^n .

Para a suavidade, seja $p \in M^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em p . Assim,

$$Y = X - X^\top = X - \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle e_i$$

é campo suave e normal à M^n , onde

$$\begin{aligned} \langle Y, Y \rangle &= \left\langle X - \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle e_i, X - \sum_{j=1}^n \langle X, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \langle X, X \rangle - 2 \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2 + \sum_{i,j=1}^n \langle X, e_i \rangle \langle X, e_j \rangle \delta_{ij} \\ &= \langle X, X \rangle - 2 \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2 \\ &= \langle X, X \rangle - \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Escrevendo X como sua parte tangente e normal obtemos,

$$X = \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle e_i - \langle X, N \rangle N,$$

implicando que

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2 - \langle X, N \rangle^2. \tag{2.45}$$

Substituindo em (2.44) temos

$$\langle Y, Y \rangle = -\langle X, N \rangle^2 < 0,$$

garantindo que Y é tipo-tempo. Além disso, por (2.45)

$$\langle Y, X \rangle = \left\langle X - \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle e_i, X \right\rangle = \langle X, X \rangle - \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle^2 = -\langle X, N \rangle^2 < 0.$$

Portanto $Y(p) \in C(X(p))$ e, conseqüentemente, $N(p) = Y(p)/|Y(p)|$ é suave em p . Como p é arbitrário, segue que N é suave. □

Sabe-se que qualquer hipersuperfície tipo-espaco pode ser vista localmente como um gráfico sobre um subconjunto aberto de um hiperplano tipo-espaco. Assim, o exemplo a seguir trata de hipersuperfícies que são o gráfico de alguma função suave definida em um domínio conexo do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.3.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio conexo de $\mathbb{R}^n$. Definimos o gráfico vertical sobre Ω determinado pela função suave $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ pelo conjunto*

$$\text{Graf}(u) = \{(x, u(x)) ; x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}_\nu^{n+1}, \quad \nu = \{0, 1\}. \quad (2.46)$$

Dizemos que um gráfico é inteiro se $\Omega = \mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que $\text{Graf}(u)$ é uma subvariedade Riemanniana completa, não compacta e orientada de $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, se existe uma constante positiva c tal que

$$|Du|_{\mathbb{R}^n} \leq c < 1, \quad (2.47)$$

a mesma conclusão é válida para $\mathbb{L}^{n+1}$.

Definamos $f : \Omega \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x, t) = -u(x) + t.$$

Vamos mostrar que $\nabla f(p, t) \neq 0$, para qualquer $(p, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$. De fato, considere $v \in T_p(\Omega \times \mathbb{R})$ e $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = (x(0), h(0)) = p$ e $\alpha'(0) = (x'(0), h'(0)) = v$. Deste modo,

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v) = \left. \frac{d}{ds}(f \circ \alpha) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds}(-u(x(s)) + h(s)) \right|_{s=0} = \langle (-Du(p), \varepsilon); v \rangle,$$

onde $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, a depender do ambiente ser $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{L}^{n+1}$, respectivamente, e D é o operador gradiente em $\mathbb{R}^n$. Como v é arbitrário e a métrica é não degenerada, temos que $\nabla f = (-Du, \varepsilon)$. Assim, $\nabla f(p) \neq 0$ para todo $p \in \Omega \times \mathbb{R}$, implicando que qualquer

valor de p é regular. Logo, $f^{-1}(0) = \text{Graf}(u)$ é subvariedade de $\mathbb{R}_v^{n+1}$ de acordo com a Proposição 2.1.2.

Observe que $\text{Graf}(u)$ tem codimensão igual a 1 e que para pontos $p \in \text{Graf}(u)$ temos $\nabla f(p)$ ortogonal a qualquer $v \in T_p(\text{Graf}(u))$. Logo, mostremos sob quais condições ∇f é tipo-tempo. Sendo $\varepsilon = -1$, teremos que

$$\langle \nabla f(p), \nabla f(p) \rangle = |Du(p)|^2 - 1.$$

implicando que $\nabla f(p)$ é tipo-tempo se, e somente se, $|Du(p)| < 1$. Sob esta condição, pela Proposição 2.2.10, $\{\nabla f(p)\}^\perp = T_p(\text{Graf}(u))$ é tipo-espaco, ou seja, $\text{Graf}(u)$ é tipo-espaco. Consequentemente, pela Proposição 2.3.2, $\text{Graf}(u)$ é orientável. Além do mais, a orientação é dada por

$$N = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(-Du, \varepsilon)}{\sqrt{1 + \varepsilon|Du|^2}}.$$

Para a completude em $\mathbb{R}^{n+1}$, tomemos um gráfico inteiro, isto é, $\Omega = \mathbb{R}^n$. Provemos a seguinte afirmação:

Afirmção: Se $\alpha : [0, a) \rightarrow \text{Graf}(u)$ é uma curva divergente, então $\beta : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma curva divergente, onde β é a projeção de α sobre $\mathbb{R}^n$ via a aplicação $\pi : \text{Graf}(u) \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$.

De fato, suponha que β não é curva divergente. Então existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\beta([0, a)) \subset K$. Observe que π^{-1} é contínua, então $\pi^{-1}(K) \subset \text{Graf}(u)$ é compacto e contém $\alpha([0, a))$. Isto não pode ocorrer, pois α é divergente. Logo devemos ter que β é divergente, o que prova a afirmação.

Se X é um campo suave em $\text{Graf}(u)$, podemos escrever

$$X = \hat{X} + \delta \langle Du, \hat{X} \rangle \partial_t \quad (2.48)$$

onde $\delta = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = \pm 1$ e $\hat{X} = (\pi_{\mathbb{R}^n})_*(X)$. Assim, dividiremos a prova em dois casos de ambientes.

Caso 1: $\delta = 1$.

Temos o ambiente euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $\alpha : [0, a) \rightarrow \text{Graf}(u)$ é uma curva divergente, desde que α' é campo em $\text{Graf}(u)$ temos por (2.48)

$$\alpha' = \hat{\alpha}' + \langle Du, \hat{\alpha}' \rangle \partial_t = \beta' + \langle Du, \beta' \rangle \partial_t. \quad (2.49)$$

Como a métrica induzida por $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\text{Graf}(u)$ é dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} + dt^2$ temos que

$$|\alpha'|^2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle \beta', \beta' \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Du, \beta' \rangle^2 \langle \partial_t, \partial_t \rangle = |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2 + \langle Du, \beta' \rangle^2 \geq |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (2.50)$$

Então, por definição e por (2.50)

$$l(\alpha) = \int_0^a |\alpha'(s)| ds \geq \int_0^a |\beta'(s)| ds = l(\beta). \quad (2.51)$$

Pela **Afirmção**, se α é curva divergente, então β é curva divergente implicando que $l(\beta) = \infty$. Assim, por (2.51) temos $l(\alpha) = \infty$ e pela Proposição 2.2.5, $\text{Graf}(u)$ é completo.

Caso 2: $\delta = -1$.

Neste caso o ambiente é $\mathbb{L}^{n+1}$. Pelo que já vimos neste exemplo, $\text{Graf}(u)$ é tipo-espaço se, e somente se, $|Du|_{\mathbb{R}^n} < 1$. Então existe constante positiva $c < 1$ tal que $|Du|_{\mathbb{R}^n} \leq c < 1$.

De modo análogo, seja $\alpha : [0, a) \rightarrow \text{Graf}(u)$ uma curva divergente e note que de (2.48)

$$\alpha' = \hat{\alpha}' - \langle Du, \hat{\alpha}' \rangle \partial_t = \beta' - \langle Du, \beta' \rangle \partial_t,$$

onde utilizamos que a métrica induzida por $\mathbb{L}^{n+1}$ em $\text{Graf}(u)$ é $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} - dt^2$. Assim,

$$|\alpha'|^2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle \beta', \beta' \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Du, \beta' \rangle^2 \langle \partial_t, \partial_t \rangle = |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2 - \langle Du, \beta' \rangle^2. \quad (2.52)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz usual

$$-\langle Du, \beta' \rangle^2 \geq -|Du|_{\mathbb{R}^n}^2 |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2$$

implicando que em (2.52) temos

$$|\alpha'|^2 \geq |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2 - |Du|_{\mathbb{R}^n}^2 |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2 = (1 - |Du|_{\mathbb{R}^n}^2) |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2 \geq (1 - c^2) |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2 = d |\beta'|_{\mathbb{R}^n}^2,$$

ou seja, $|\alpha'| \geq \sqrt{d} \cdot |\beta'|_{\mathbb{R}^n}$. Por isso,

$$l(\alpha) \geq \sqrt{d} \cdot l(\beta)$$

Argumentando como no final do **Caso 1**, através da Proposição 2.2.5, concluímos que $\text{Graf}(u)$ é completo.

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo apresentaremos os resultados centrais desta dissertação. Primeiramente abordaremos dois princípios do máximo no infinito obtidos em (CAMINHA, 2011) e (ALÍAS; CAMINHA; NASCIMENTO, 2019) que irão auxiliar na obtenção dos resultados principais.

3.1 PRINCÍPIOS DO MÁXIMO

Iniciaremos citando dois resultados que serão importantes para a demonstração dos princípios do máximo. O primeiro deles é devido a (GAFFNEY, 1954).

Lema 3.1.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e não compacta. Se d é a distância Riemanniana em M^n medida a partir de um ponto fixado $p_0 \in M^n$ e, para cada $r > 0$, $B(r)$ é a bola centrada em p_0 de raio r , então podemos aproximar d por uma função g_r tal que*

- (1) *A menos de um número finito de $t < r$, $g_r^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície compacta regular;*
- (2) *$|dg_r| \leq \frac{3}{2}$ em $g_r^{-1}([0, r])$;*
- (3) *$g_r^{-1}(t) \subset B(t+1) \setminus B(t-1)$ para $t \leq r$.*

Demonstração. Veja (GAFFNEY, 1954). □

O segundo é uma fórmula de co-área para variedades.

Lema 3.1.2. *Se W é uma variedade Riemanniana, u é uma função diferenciável com suporte compacto em W e $\phi : W \rightarrow [0, \infty)$, então*

$$\int_W \phi |du| dW = \int_0^\infty \left(\int_{u^{-1}(t)} \phi d\sigma \right) dt.$$

Demonstração. Veja o Corolário 25.9 de (DRIVER, 2003). □

Para o que vem a seguir, precisaremos da seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma função f definida sobre M^n é integrável à Lebesgue se*

$$\int_M f(x) dM < +\infty. \quad (3.1)$$

Denotaremos por $\mathcal{L}^1(M)$ o espaço das funções integráveis à Lebesgue em M^n .

A proposição a seguir é uma versão do Teorema de Stokes para variedades Riemannianas completas e não compactas encontrada em (YAU, 1976).

Proposição 3.1.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa, não compacta, orientável e ω uma $(n-1)$ -forma diferencial em M^n tal que $|\omega| \in \mathcal{L}^1(M)$. Então existe uma sequência de domínios $B_i \subset B_{i+1}$ tais que $M^n = \bigcup_i B_i$ e*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Demonstração. Seja $p_0 \in M^n$ um ponto fixado e considere as aproximações g_r da função distância Riemanniana à p_0 para cada bola $B(r)$ centrada em p_0 de raio r , como no Lema 3.1.1. Fazendo $W = M^n$, $u = g_r$ e $\phi = |\omega|$ no Lema 3.1.2 temos,

$$\int_M |dg_r| |\omega| = \int_0^r \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt. \quad (3.2)$$

Pela condição (2) do Lema 3.1.1,

$$\int_M |dg_r| |\omega| \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|. \quad (3.3)$$

Assim, substituindo (3.2) em (3.3), obtemos

$$\int_0^r \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|.$$

Escrevendo $[0, r] = [0, r/2] \cup [r/2, r]$, obtemos na desigualdade anterior

$$\int_0^{r/2} \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt + \int_{r/2}^r \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|,$$

o que implica em

$$\int_{r/2}^r \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{3}{2} \int_M |\omega|. \quad (3.4)$$

Por outro lado, a função $f : [r/2, r] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \int_{r/2}^s \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt$$

é contínua em $[r/2, r]$ e diferenciável em $(r/2, r)$. Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_r \in (r/2, r)$, para cada r , tal que

$$f'(t_r) = \frac{f(r) - f(r/2)}{r - r/2}.$$

Sendo $f(r/2) = 0$, segue da equação anterior que

$$\int_{g_r^{-1}(t_r)} |\omega| = \frac{2}{r} \int_{r/2}^r \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt. \quad (3.5)$$

Pela desigualdade (3.4),

$$\frac{2}{r} \int_{r/2}^r \left(\int_{g_r^{-1}(t)} |\omega| \right) dt \leq \frac{2}{r} \cdot \frac{3}{2} \int_M |\omega| = \frac{3}{r} \int_M |\omega|.$$

Em junção com a equação (3.5), isto resulta que

$$\int_{g_r^{-1}(t_r)} |\omega| \leq \frac{3}{r} \int_M |\omega|. \quad (3.6)$$

Através do item (1) do Lema 3.1.1, podemos usar o Teorema de Stokes 2.1.3 para a $(n-1)$ -forma diferencial ω em $g_r^{-1}(t_r)$. Então,

$$\left| \int_{g_r^{-1}([0, t_r])} d\omega \right| = \left| \int_{g_r^{-1}(t_r)} \omega \right|. \quad (3.7)$$

Por desigualdade modular e por (3.6) temos,

$$\left| \int_{g_r^{-1}(t_r)} \omega \right| \leq \int_{g_r^{-1}(t_r)} |\omega| \leq \frac{3}{r} \int_M |\omega|.$$

Utilizando a (3.7) obtemos,

$$\left| \int_{g_r^{-1}([0, t_r])} d\omega \right| \leq \frac{3}{r} \int_M |\omega|. \quad (3.8)$$

Uma vez que g_r satisfaz (3) do Lema 3.1.1, então $g_i^{-1}([0, t_i]) \subset g_{i+1}^{-1}([0, t_{i+1}])$ e podemos escrever

$$M^n = \bigcup_i g_i^{-1}([0, t_i]),$$

obtendo a primeira parte do resultado desta Proposição, que é a existência dos domínios.

Fazendo $r = i$ na equação (3.8) e tomando o limite de ambos os lados quando i tende para $+\infty$, segue que

$$0 \leq \left| \int_{g_i^{-1}([0, t_i])} d\omega \right| \leq \frac{3}{i} \int_M |\omega| \implies 0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_{g_i^{-1}([0, t_i])} d\omega \right| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{3}{i} \int_M |\omega|.$$

Por hipótese, $|\omega|$ é integrável e, além disto, $3/i$ tende a zero quando i tende para $+\infty$. Logo,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \int_{g_i^{-1}([0, t_i])} d\omega \right| = 0.$$

Portanto segue que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{g_i^{-1}([0, t_i])} d\omega = 0$$

que prova a segunda parte da Proposição.

□

Como aplicação da Proposição 3.1.1, mostraremos um princípio do máximo no infinito devido a (CAMINHA, 2011).

Proposição 3.1.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, orientável e X um campo vetorial suave em M^n , tal que $\text{div}(X)$ não muda de sinal sobre M^n . Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\text{div}(X) \equiv 0$ em M^n .*

Demonstração. Seja $\omega = i_X(dM)$ a contração do elemento volume Riemanniano na direção do campo X . Pelo Lema 2.2.7 temos que $d\omega = \text{div}(X)dM$. Se M^n for fechada, segue do Teorema de Gauss 2.1.4 que

$$\int_M \text{div}(X)dM = \int_M d\omega = 0.$$

Como ou $\text{div}(X) \geq 0$ ou $\text{div}(X) \leq 0$, devemos ter que $\text{div}(X) \equiv 0$ em M^n .

Suponha que M^n é completa e não compacta. Usando mais uma vez o Lema 2.2.7, temos que $|\omega| = |X|$. Como $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$ segue que $|\omega| \in \mathcal{L}^1(M)$. Logo, estamos sob condições de aplicar o Lema 3.1.1, a fim de obter uma sequência de domínios $B_i \subset B_{i+1}$ tais que $M^n = \bigcup_i B_i$ e

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0 \implies \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} \text{div}(X)dM = 0,$$

implicando que $\text{div}(X) \equiv 0$ em M^n , uma vez que $\text{div}(X)$ não muda de sinal sobre M^n .

□

Uma primeira aplicação da Proposição 3.1.2 é a extensão do Teorema de E. Hopf para variedades Riemannianas completas obtida por (YAU, 1976).

Corolário 3.1.1. *Considere uma variedade Riemanniana completa, não compacta e orientável. Se $u \in C^2(M)$ é uma função subharmônica tal que $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(M)$, então u é harmônica.*

Demonstração. De fato, fazendo $X = \nabla u$ temos que $|X|$ é integrável à Lebesgue e como u é subharmônica de acordo com a Definição 2.2.22 temos

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u \geq 0.$$

Pela Proposição 3.1.2, $\operatorname{div}(\nabla u) = 0$, ou seja, $\Delta u = 0$ e portanto u é harmônica.

□

Note que o Corolário anterior também é válido quando u é superharmônica, como consequência da Proposição 3.1.2.

Para tratar do próximo princípio do máximo, que necessita de hipóteses no infinito, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1.2. *Se M^n é uma variedade Riemanniana completa, não compacta e f é uma função suave em M^n , dizemos que f converge para zero no infinito se satisfaz*

$$\lim_{d(o,p) \rightarrow +\infty} f(p) = 0,$$

onde d é a distância Riemanniana em M^n medida a partir de um ponto fixo $o \in M^n$. Em outras palavras, a convergência de f para zero no infinito equivalente a dizer que dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que $d(o,p) > \delta$ implica que $f(p) < 1/k$.

Para a prova da segunda aplicação da Proposição 3.1.2, precisaremos do seguinte lema auxiliar:

Lema 3.1.3. *Considere M^n uma variedade Riemanniana completa, não compacta, orientável e X um campo suave em M^n . Seja $f \in C^\infty(M)$ não negativa, não identicamente nula e convergindo para zero no infinito. Então existem funções $\phi, \psi : [0, \sup_M(f)] \rightarrow \mathbb{R}_+$ estritamente crescentes tais que*

- (1) ϕ e ψ são de classe $\mathcal{C}^1$ em $[0, \sup_M(f)]$;
- (2) $\phi \circ f = \phi(f) \in \mathcal{L}^1(M)$;
- (3) $(\psi \circ f)|X| = \psi(f)|X|$ é limitada em M^n .

Demonstração. Denotemos por μ a medida de Lebesgue de M^n e suponha que $\sup_M(f) = a > 1$, sem perda de generalidade. Para cada inteiro $k \geq 1$ consideremos o seguinte conjunto:

$$A_k = \left\{ p \in M; f(p) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Pela definição do conjunto A_k , temos que se $q \in A_k$, então q também pertence à A_{k+1} , pois

$$f(q) > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}.$$

Além disso, como $f \geq 0$, segue da Definição 3.1.2 que $0 < \mu(A_k) < +\infty$. De fato, se $\mu(A_k) = 0$, então $f \leq 1/k$ em quase todo ponto. Assim, tomando o limite quando $k \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(p) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

mostrando que $f \leq 0$. Sendo f não negativa, então devemos ter $f = 0$ em quase todo ponto. Usando agora que f converge para zero no infinito obtemos que $f \equiv 0$, o que é uma contradição.

Por outro lado, usando mais uma vez a não negatividade de f ,

$$p \in M^n \implies f(p) = 0 \quad \text{ou} \quad f(p) > 0 \implies p \in f^{-1}(0) \quad \text{ou} \quad p \in A_k,$$

para algum $k \geq 1$, pela densidade dos racionais na reta. Então podemos escrever

$$M^n = f^{-1}(0) \cup \bigcup_{k \geq 1} A_k.$$

Com isso, definamos a função $\phi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ pela relação:

$$\phi(a) = \frac{1}{\mu(A_1)} \quad \text{e} \quad \phi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2^k \mu(A_{k+1})}. \quad (3.9)$$

Observando que ocorre

$$\frac{1}{2^{k+1} \mu(A_{k+2})} < \frac{1}{2^k \mu(A_{k+1})} < \frac{1}{\mu(A_1)}$$

segue de (3.9) que

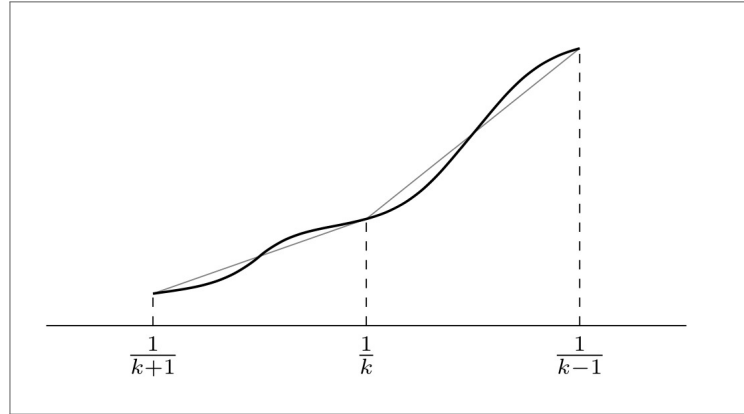
$$\phi\left(\frac{1}{k+1}\right) < \phi\left(\frac{1}{k}\right) < \phi(a),$$

ou seja, ϕ é estritamente crescente para todo $k \geq 1$.

Agora vamos mostrar o item (1) para a função ϕ . Usando interpolação Lagrangeana e o Teorema do Valor Médio, podemos estender ϕ a uma função de classe C^1 em $(0, a]$ estritamente crescente satisfazendo

$$0 < \phi'(t) < 2 \left(\frac{\phi\left(\frac{1}{k}\right) - \phi\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \right), \quad (3.10)$$

para todo $t \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$.

Figura 1 – Estendendo ϕ à $(0, a]$.

Fonte: (ALÍAS; CAMINHA; NASCIMENTO, 2019)

Admitindo que $\phi(0) = 0$, mostremos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi'(t) = 0 = \phi'(0)$$

para concluirmos que a extensão ϕ é de classe C^1 em $[0, a]$. Primeiramente, para $0 < t < 1/j$, existe $k \geq j$ tal que $1/(k+1) \leq t < 1/k$. Deste modo,

$$\frac{1}{t} \leq k+1 \quad \text{e} \quad \phi(t) < \phi\left(\frac{1}{k}\right).$$

Assim,

$$0 < \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} = \frac{\phi(t)}{t} < (k+1)\phi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k+1}{2^k \mu(A_{k+1})}.$$

Observando que $k \rightarrow +\infty$ implica que $t \rightarrow 0$, tomamos o limite quando $k \rightarrow +\infty$ na desigualdade anterior,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t)}{t} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{2^k \mu(A_{k+1})} = 0,$$

pois $1/\mu(A_{k+1}) < \infty$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} (k+1)/2^k = 0$. Então obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t)}{t} = 0,$$

resultando em $\phi'(0) = 0$.

Por outro lado, como $0 < \mu(A_k) < +\infty$ para todo $k \geq 1$, temos a seguinte sequência

de implicações:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(A_{k+1})}{2\mu(A_{k+2})} > 0 &\implies -\frac{\mu(A_{k+1})}{2\mu(A_{k+2})} < 0 \\
&\implies 1 - \frac{\mu(A_{k+1})}{2\mu(A_{k+2})} < 1 \\
&\implies \frac{2\mu(A_{k+2})}{2\mu(A_{k+2})} - \frac{\mu(A_{k+1})}{2\mu(A_{k+2})} < 1 \\
&\implies \frac{2\mu(A_{k+2}) - \mu(A_{k+1})}{2\mu(A_{k+2})} < 1.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Por (3.9), notemos que (3.11) implica que

$$2 \left(\frac{\phi\left(\frac{1}{k}\right) - \phi\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \right) = 2 \left(\frac{k(k+1)}{2^k \mu(A_{k+1})} \cdot \frac{(2\mu(A_{k+2}) - \mu(A_{k+1}))}{2\mu(A_{k+2})} \right) < \frac{k(k+1)}{2^{k-1} \mu(A_{k+1})}.$$

Da desigualdade anterior, a (3.11) e a (3.10) nos garantem que

$$0 < \phi'(t) < \frac{k(k+1)}{2^{k-1} \mu(A_{k+1})}.$$

Logo, fazendo $k \rightarrow +\infty$ na desigualdade anterior e então $t \rightarrow 0$, obtemos

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \phi'(t) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k(k+1)}{2^{k-1} \mu(A_{k+1})} = 0.$$

Portanto $\lim_{t \rightarrow 0} \phi'(t) = 0 = \phi'(0)$, como queríamos mostrar.

Mostraremos agora o item (2). Para isto vejamos que sendo $f(p) < a$ para todo $p \in M^n$, temos, em particular, que o mesmo vale para os pontos $p \in A_1$. Com ϕ é crescente, segue que $\phi(f(p)) < \phi(a)$ e, conseqüentemente, $\sup_{A_1} \phi(f) < \phi(a)$. Assim, de (3.9),

$$\left(\sup_{A_1} \phi(f) \right) \mu(A_1) < 1. \tag{3.12}$$

Analogamente, usando que ϕ é crescente e (3.9), se $p \in A_{k+1} \setminus A_k$ temos

$$f(p) \leq \frac{1}{k} \implies \phi(f(p)) \leq \phi\left(\frac{1}{k}\right) \implies \sup_{A_{k+1} \setminus A_k} \phi(f) \leq \frac{1}{2^k \mu(A_{k+1})}. \tag{3.13}$$

Como $\mu(A_{k+1} \setminus A_k) \geq 0$, podemos multiplicar ambos os lados de (3.13) a fim de obter

$$\left(\sup_{A_{k+1} \setminus A_k} \phi(f) \right) \mu(A_{k+1} \setminus A_k) \leq \frac{\mu(A_{k+1} \setminus A_k)}{2^k \mu(A_{k+1})}. \tag{3.14}$$

Uma vez que $A_k \subset A_{k+1}$, segue da propriedade aditiva de medida,

$$\mu(A_{k+1}) = \mu(A_k) + \mu(A_{k+1} \setminus A_k) > \mu(A_{k+1} \setminus A_k),$$

onde na última desigualdade foi usado que $\mu(A_k) > 0$. Assim,

$$\frac{1}{\mu(A_{k+1})} < \frac{1}{\mu(A_{k+1} \setminus A_k)}.$$

Portanto, usando a desigualdade anterior em (3.14), segue que

$$\left(\sup_{A_{k+1} \setminus A_k} \phi(f) \right) \mu(A_{k+1} \setminus A_k) < \frac{1}{2^k}. \quad (3.15)$$

Usando que $\phi(f) = 0$ em $f^{-1}(0)$, segue de (3.12) e (3.15),

$$\begin{aligned} \int_M \phi(f) &= \int_{f^{-1}(0)} \phi(f) + \int_{A_1} \phi(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{k+1} \setminus A_k} \phi(f) \\ &= \int_{A_1} \phi(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_{k+1} \setminus A_k} \phi(f) \\ &\leq \left(\sup_{A_1} \phi(f) \right) \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{A_{k+1} \setminus A_k} \phi(f) \right) \mu(A_{k+1} \setminus A_k) \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= 2, \end{aligned}$$

mostrando que $\phi(f)$ é integrável à Lebesgue em M^n .

Agora, para cada $k \geq 1$, seja $s_k = \sup_{A_k} |X| + 1$ e definamos a função $\psi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ pondo

$$\psi(a) = \frac{1}{s_1} \quad \text{e} \quad \psi\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2^k s_{k+1}}. \quad (3.16)$$

A idéia aqui é usar uma construção semelhante à que foi feita para a função ϕ . Primeiramente, notemos que

$$\frac{1}{2^{k+1} s_{k+2}} < \frac{1}{2^k s_{k+1}} < \frac{1}{s_1} \quad \implies \quad \psi\left(\frac{1}{k+1}\right) < \psi\left(\frac{1}{k}\right) < \psi(a),$$

para todo inteiro $k \geq 1$, mostrando que ψ é estritamente crescente. De maneira análoga, admitindo que $\psi(0) = 0$, extendemos ψ a uma função de classe C^1 em $(0, a]$ estritamente crescente e de modo que

$$0 < \psi'(t) < 2 \left(\frac{\psi\left(\frac{1}{k}\right) - \psi\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \right) \quad (3.17)$$

para todo $t \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$. Assim como feito para a função ϕ , mostremos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = 0 = \psi'(0)$$

para obtermos que ψ é de classe C^1 em $[0, a]$.

De fato, para $0 < t < 1/j$, existe $k \geq j$ tal que $1/(k+1) \leq t < 1/k$. Daí,

$$0 < \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t - 0} = \frac{\psi(t)}{t} < \frac{\psi(\frac{1}{k})}{\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{2^k s_{k+1}} \leq \frac{k+1}{2^k},$$

pois $s_{k+1} = \sup_{A_{k+1}} |X| + 1 \geq 1$. Logo, tomando o limite quando $k \rightarrow +\infty$ na desigualdade acima, obtemos pela regra de L'Hôpital,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t - 0} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{2^k} = 0,$$

ou seja, $\psi'(0) = 0$.

Por outro lado, como $s_k > 0$ para qualquer $k \geq 1$, note que

$$\begin{aligned} \frac{s_{k+1}}{2s_{k+2}} > 0 &\implies -\frac{s_{k+1}}{2s_{k+2}} < 0 \\ &\implies 1 - \frac{s_{k+1}}{2s_{k+2}} < 1 \\ &\implies \frac{2s_{k+2}}{2s_{k+2}} - \frac{s_{k+1}}{2s_{k+2}} < 1 \\ &\implies \frac{2s_{k+2} - s_{k+1}}{2s_{k+2}} < 1. \end{aligned}$$

A partir disto,

$$2 \left(\frac{\psi(\frac{1}{k}) - \psi(\frac{1}{k+1})}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \right) = 2 \left(\frac{k(k+1)}{2^k s_{k+1}} \cdot \frac{(2s_{k+2} - s_{k+1})}{2s_{k+2}} \right) < \frac{k(k+1)}{2^{k-1} s_{k+1}} \leq \frac{k(k+1)}{2^{k-1}}.$$

Logo, pela desigualdade anterior e por (3.17) temos,

$$0 < \psi'(t) < \frac{k(k+1)}{2^{k-1}},$$

e fazendo $k \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k(k+1)}{2^{k-1}} = 0.$$

Isso mostra que $\lim_{t \rightarrow 0} \psi'(t) = 0 = \psi'(0)$ e a validade do item (1) para ψ .

Por fim, para o item (3), sejam $p \in A_1$ e $q \in A_{k+1} \setminus A_k$. Uma vez que ψ é crescente, segue de (3.16),

$$\psi(f(p))|X|(p) < \psi(a)|X|(p) = \frac{|X|(p)}{s_1} < \frac{\sup_{A_1} |X| + 1}{s_1} = 1$$

e

$$f(q) \leq \frac{1}{k} \implies \psi(f(q))|X|(q) \leq \frac{|X|(q)}{2^k s_{k+1}} < \frac{\sup_{A_{k+1} \setminus A_k} |X| + 1}{2^k s_{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Assim, $\psi(f)|X| = 0$ em $f^{-1}(0)$,

$$\psi(f)|X| < 1 \quad \text{em} \quad A_1 \quad \text{e} \quad \psi(f)|X| < \frac{1}{2^k} \quad \text{em} \quad A_{k+1} \setminus A_k. \quad (3.18)$$

Isto mostra que $\psi(f)|X|$ é limitada em M^n , encerrando a demonstração.

□

Como aplicação do Lema 3.1.3, encerramos esta seção com a prova do segundo princípio do máximo no infinito.

Teorema 3.1.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa, não compacta, orientável e X um campo suave em M^n . Considere uma função $f \in C^\infty(M)$ não negativa, não identicamente nula, convergindo para zero no infinito e tal que $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$. Se $\operatorname{div}(X) \geq 0$ em M^n , então*

$$(1) \quad \langle \nabla f, X \rangle \equiv 0 \text{ em } M^n;$$

$$(2) \quad \operatorname{div}(X) \equiv 0 \text{ em } M^n \setminus f^{-1}(0);$$

$$(3) \quad \operatorname{div}(X) \equiv 0 \text{ em } M^n, \text{ se } f^{-1}(0) \text{ tem medida de Lebesgue nula.}$$

Demonstração. Pelas hipóteses sobre f , considere as funções ϕ e ψ dadas pelo Lema 3.1.3 e defina o campo vetorial $Y = \phi(f)\psi(f)X$. Uma vez que ϕ e ψ são de classe $\mathcal{C}^1$, segue que $\phi(f), \psi(f) \in \mathcal{C}^1(M)$ e consequentemente, Y é de classe $\mathcal{C}^1$ em M^n .

Calculemos agora $\operatorname{div}(Y)$. Primeiramente observemos que para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_Z Y = \nabla_Z (\phi(f)\psi(f)X) = Z(\phi(f)\psi(f))X + \phi(f)\psi(f)\nabla_Z X,$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M^n . Pela Proposição 2.2.7, o primeiro termo desta igualdade pode ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} Z(\phi(f)\psi(f))X &= \langle Z, \nabla(\phi(f)\psi(f)) \rangle X \\ &= \langle Z, \phi(f)\nabla(\psi(f)) + \psi(f)\nabla(\phi(f)) \rangle X \\ &= \langle Z, \phi(f)\psi'(f)\nabla f + \psi(f)\phi'(f)\nabla f \rangle X \\ &= (\phi'(f)\psi(f) + \psi'(f)\phi(f)) \langle \nabla f, Z \rangle X. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_Z Y = (\phi'(f)\psi(f) + \psi'(f)\phi(f)) \langle \nabla f, Z \rangle X + \phi(f)\psi(f)\nabla_Z X, \quad (3.19)$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico em $p \in M^n$. Fazendo $Z = e_i$ em (3.19), segue da Definição 2.2.20,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(Y) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} Y, e_i \rangle \\
 &= (\phi'(f)\psi(f) + \psi'(f)\phi(f)) \sum_{i=1}^n \langle \nabla f, e_i \rangle \langle X, e_i \rangle + \phi(f)\psi(f) \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
 &= (\phi'(f)\psi(f) + \psi'(f)\phi(f)) \sum_{i=1}^n e_i(f) \langle X, e_i \rangle + \phi(f)\psi(f) \operatorname{div}(X) \\
 &= (\phi'(f)\psi(f) + \psi'(f)\phi(f)) \langle \nabla f, X \rangle + \phi(f)\psi(f) \operatorname{div}(X).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Uma vez que, ϕ e ψ são não negativas, ϕ' e ψ' são positivas e, por hipótese $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ e $\operatorname{div}(X) \geq 0$, segue da equação (3.20) que $\operatorname{div}(Y) \geq 0$ em M^n . Além disto, como $\psi(f)|X|$ é limitada em M^n , existe um número real $K > 0$ tal que $\psi(f)|X| < K$. Logo, da integrabilidade de $\phi(f)$ temos que

$$\int_M |Y| = \int_M \phi(f)\psi(f)|X| < K \int_M \phi(f) < \infty,$$

mostrando que $|Y|$ é integrável à Lebesgue em M^n . Portanto, estamos sob condições de utilizar a Proposição 3.1.2 no campo Y , obtendo que $\operatorname{div}(Y) \equiv 0$ em M^n , ou seja, a equação (3.20) se escreve como:

$$(\phi'(f)\psi(f) + \phi(f)\psi'(f)) \langle \nabla f, X \rangle + \phi(f)\psi(f) \operatorname{div}(X) = 0.$$

Sendo a soma de duas funções não negativas, devemos ter

$$(\phi'(f)\psi(f) + \phi(f)\psi'(f)) \langle \nabla f, X \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \phi(f)\psi(f) \operatorname{div}(X) = 0. \tag{3.21}$$

Passemos agora a analisar as duas expressões de (3.21). Veja que em $M^n \setminus f^{-1}(0)$ temos

$$\phi'(f)\psi(f) + \phi(f)\psi'(f) > 0.$$

Isto implica que $\langle \nabla f, X \rangle = 0$ em $M \setminus f^{-1}(0)$. Por outro lado, note que qualquer $p \in f^{-1}(0)$ é ponto crítico de f , consequentemente $\nabla f(p) = 0$ e $\langle \nabla f(p), X(p) \rangle = 0$. Portanto,

$$\langle \nabla f, X \rangle = 0 \quad \text{em} \quad M^n.$$

Na segunda equação, como $\phi(f)\psi(f) > 0$ em $M \setminus f^{-1}(0)$, devemos ter $\operatorname{div}(X) = 0$ em $M \setminus f^{-1}(0)$. Logo, o conjunto $\{p \in M^n; \operatorname{div}(X(p)) > 0\}$ está contido em $f^{-1}(0)$ e será vazio quando $\mu(f^{-1}(0)) = 0$, isto é, se $f^{-1}(0)$ tem medida de Lebesgue nula. Portanto $\operatorname{div}(X)$ deve ser igual a zero neste último caso.

□

3.2 APLICAÇÕES

Este último capítulo apresenta os principais resultados da dissertação como aplicação dos princípios do máximo que estudamos na Seção 3.1. Para isso também apresentaremos alguns lemas auxiliares, válidos em contextos mais gerais do que o de hipersuperfícies transversais.

3.2.1 Resultados Auxiliares

No que segue veremos três resultados que nos ajudarão a simplificar as demonstrações dos resultados principais. Em síntese, os lemas relacionam a curvatura de Ricci do espaço ambiente com o gradiente ou divergente de campos tangentes específicos.

Lema 3.2.1. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana munida com um campo vetorial paralelo Z e M^n uma hipersuperfície Riemanniana orientada por um campo vetorial normal e unitário N . Então,*

$$(1) \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) = -\varepsilon \langle N, Z \rangle \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(N, N), \text{ onde } \varepsilon = \langle N, N \rangle;$$

$$(2) \text{ se } \overline{M}^{n+1} \text{ é Einstein, então } N \text{ é ortogonal a } Z \text{ ou } \overline{M}^{n+1} \text{ é Ricci flat.}$$

Demonstração. Seja $p \in M^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico móvel em uma vizinhança $U \subset M^n$ de p . Completamos este com $e_{n+1} = N$ a fim de obter um referencial móvel em $\mathfrak{X}(\overline{M})$. Uma vez que para cada $p \in M^n$ temos a decomposição $T_p \overline{M} = T_p M \oplus \operatorname{span}\{N\}$, escrevemos:

$$Z = Z^\top + \varepsilon \langle N, Z \rangle N. \tag{3.22}$$

Segue da linearidade e da simetria de pares do tensor curvatura,

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{R}(Z^\top, e_i)N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(Z^\top, e_i)N, e_i \rangle + \langle \overline{R}(Z^\top, N)N, N \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(Z^\top, e_i)N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(Z - \varepsilon \langle N, Z \rangle N, e_i)N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(Z, e_i)N, e_i \rangle - \varepsilon \langle N, Z \rangle \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, e_i)N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, e_i)Z, e_i \rangle - \varepsilon \langle N, Z \rangle \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, e_i)N, e_i \rangle.
\end{aligned}$$

Como Z é paralelo em $\overline{M}^{n+1}$, isto é, $\overline{\nabla}Z = 0$, temos

$$\overline{R}(N, e_i)Z = -\overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} Z + \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N Z + \overline{\nabla}_{[N, e_i]} Z = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) &= -\varepsilon \langle N, Z \rangle \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, e_i)N, e_i \rangle \\
&= -\varepsilon \langle N, Z \rangle \left(\sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(N, e_i)N, e_i \rangle + \langle \overline{R}(N, N)N, N \rangle - \langle \overline{R}(N, N)N, N \rangle \right) \\
&= -\varepsilon \langle N, Z \rangle \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i \langle \overline{R}(N, e_i)N, e_i \rangle \\
&= -\varepsilon \langle N, Z \rangle \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N)
\end{aligned}$$

o que demonstra o item (1).

Para provar o item (2), observe que por $\overline{M}^{n+1}$ ser Einstein e pelo item (1) temos

$$\lambda \langle Z^\top, N \rangle = -\varepsilon \langle N, Z \rangle \lambda \langle N, N \rangle \implies 0 = -\varepsilon^2 \lambda \langle N, Z \rangle \implies 0 = \lambda \langle N, Z \rangle,$$

implicando que $\langle N, Z \rangle = 0$ ou $\lambda = 0$. Se $\lambda = 0$, então para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$

$$\text{Ric}_{\overline{M}}(X, Y) = \lambda \langle X, Y \rangle = 0,$$

ou seja, $\text{Ric}_{\overline{M}} \equiv 0$. Portanto, N é ortogonal a Z ou $\overline{M}^{n+1}$ é Ricci flat.

□

Os próximos resultados auxiliares desta seção trazem algumas fórmulas bastante usuais.

Lema 3.2.2. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana munida de um campo vetorial paralelo Z e M^n uma hipersuperfície Riemanniana orientada por um campo vetorial normal e unitário N . Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $f = \varepsilon - \langle N, Z \rangle$, então $\nabla f = A(Z^\top)$.*

Demonstração. Sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal geodésico em $p \in M$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde escrevemos

$$X = \sum_{i=1}^n g_i e_i,$$

em que $g_i = \langle X, e_i \rangle$. Observe que,

$$\langle \nabla f, X \rangle = \sum_{i=1}^n e_i(f) g_i = \sum_{i=1}^n \left(-\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, Z \rangle - \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} Z \rangle \right) g_i.$$

Entretanto, como Z é paralelo, $\overline{\nabla}_{e_i} Z = 0$ e então $\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} Z \rangle = 0$. Usando isto juntamente com a fórmula de Weingarten (2.28) e por A ser autoadjunto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, X \rangle &= \sum_{i=1}^n \left(-\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, Z \rangle - \langle N, \overline{\nabla}_{e_i} Z \rangle \right) g_i = \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), Z^\top \rangle g_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle A(Z^\top), e_i \rangle g_i = \left\langle A(Z^\top), \sum_{i=1}^n g_i e_i \right\rangle = \langle A(Z^\top), X \rangle. \end{aligned}$$

Desde que X foi escolhido arbitrariamente, fica provado que $\nabla f = A(Z^\top)$.

□

Lema 3.2.3. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana munida de um campo vetorial paralelo Z e M^n uma hipersuperfície Riemanniana orientada por um campo vetorial normal e unitário N . Então*

$$(1) \operatorname{div}(Z^\top) = \varepsilon \langle N, Z \rangle \operatorname{tr}(A);$$

$$(2) \operatorname{div}(A(Z^\top)) = Z^\top(\operatorname{tr}(A)) - \operatorname{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) + \varepsilon \langle N, Z \rangle |A|^2.$$

Demonstração. Uma vez que $Z = Z^\top + \varepsilon \langle N, Z \rangle N$, segue da fórmula de Gauss em (2.26),

$$\overline{\nabla}_{e_i} Z^\top = \nabla_{e_i} Z^\top + \varepsilon \langle A(e_i), Z^\top \rangle N.$$

Por outro lado, das propriedades da conexão de Levi-Civita e por $\bar{\nabla}_{e_i} Z = 0$ segue que,

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{\nabla}_{e_i}(Z^\top + \varepsilon \langle N, Z \rangle N) \\
&= \bar{\nabla}_{e_i} Z^\top + \varepsilon \bar{\nabla}_{e_i}(\langle N, Z \rangle N) \\
&= \nabla_{e_i} Z^\top + \varepsilon \langle A(e_i), Z^\top \rangle N + \varepsilon e_i(\langle N, Z \rangle) N + \varepsilon \langle N, Z \rangle \bar{\nabla}_{e_i} N \\
&= \nabla_{e_i} Z^\top + \varepsilon \langle A(e_i), Z^\top \rangle N + \varepsilon \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, Z \rangle N + \varepsilon \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} Z \rangle N \\
&\quad + \varepsilon \langle N, Z \rangle \bar{\nabla}_{e_i} N \\
&= \nabla_{e_i} Z^\top + \varepsilon \langle A(e_i), Z^\top \rangle N - \varepsilon \langle A(e_i), Z^\top \rangle N - \varepsilon \langle N, Z \rangle A(e_i) \\
&= \nabla_{e_i} Z^\top - \varepsilon \langle N, Z \rangle A(e_i),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

implicando que

$$\nabla_{e_i} Z^\top = \varepsilon \langle N, Z \rangle A(e_i). \tag{3.24}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(Z^\top) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} Z^\top, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \varepsilon \langle N, Z \rangle A(e_i), e_i \rangle \\
&= \varepsilon \langle N, Z \rangle \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), e_i \rangle \\
&= \varepsilon \langle N, Z \rangle \operatorname{tr}(A).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Desta forma, fica estabelecido o item (1).

Para o segundo item, observe que pela equação (3.24) e pela Definição 2.2.15,

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} A(Z^\top) &= (\nabla_{e_i} A) Z^\top + A(\nabla_{e_i} Z^\top) \\
&= (\nabla_{e_i} A) Z^\top + A(\varepsilon \langle N, Z \rangle A(e_i)) \\
&= (\nabla_{e_i} A) Z^\top + \varepsilon \langle N, Z \rangle A^2(e_i).
\end{aligned}$$

A partir da equação de Codazzi em (2.31),

$$(\bar{R}(e_i, Z^\top) N)^\top = (\nabla_{e_i} A) Z^\top - (\nabla_{Z^\top} A) e_i,$$

ou seja,

$$(\nabla_{e_i} A) Z^\top = (\nabla_{Z^\top} A) e_i + \bar{R}(e_i, Z^\top) N.$$

Assim,

$$\nabla_{e_i} A(Z^\top) = (\nabla_{Z^\top} A) e_i + \bar{R}(e_i, Z^\top) N + \varepsilon \langle N, Z \rangle A^2(e_i). \tag{3.26}$$

Logo, pela equação (3.26),

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} (A(Z^\top)) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} A(Z^\top), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{Z^\top} A) e_i + \bar{R}(e_i, Z^\top) N + \varepsilon \langle N, Z \rangle A^2(e_i), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{Z^\top} A) e_i, e_i \rangle + \langle \bar{R}(e_i, Z^\top) N, e_i \rangle + \varepsilon \langle N, Z \rangle \langle A(e_i), A(e_i) \rangle \\
&= \operatorname{tr}(\nabla_{Z^\top} A) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, Z^\top) N, e_i \rangle + \varepsilon \langle N, Z \rangle |A|^2.
\end{aligned}$$

Usando a antissimetria do tensor curvatura, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, Z^\top) N, e_i \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(Z^\top, e_i) N, e_i \rangle \\
&= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(Z^\top, e_i) N, e_i \rangle - \langle \bar{R}(Z^\top, N) N, N \rangle \\
&\quad + \langle \bar{R}(Z^\top, N) N, N \rangle \\
&= - \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i \langle \bar{R}(Z^\top, e_i) N, e_i \rangle \\
&= - \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(Z^\top, N).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} (A(Z^\top)) &= \operatorname{tr}(\nabla_{Z^\top} A) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, Z^\top) N, e_i \rangle + \varepsilon \langle N, Z \rangle |A|^2 \\
&= Z^\top (\operatorname{tr}(A)) - \operatorname{Ric}_{\bar{M}}(Z^\top, N) + \varepsilon \langle N, Z \rangle |A|^2.
\end{aligned}$$

□

3.2.2 O caso Riemanniano

Esta seção exhibe aplicações do princípio do máximo da Seção 3.1 no caso de uma variedade ambiente Riemanniana. Ao longo do texto, $\bar{M}^{n+1}$ denotará uma variedade Riemanniana munida de um campo paralelo não nulo Z e M^n será uma hipersuperfície imersa isometricamente em $\bar{M}^{n+1}$ orientada pelo campo vetorial normal e unitário N .

Uma vez que Z é um campo paralelo, temos que $|Z|$ é constante. Dessa forma podemos assumir que Z é unitário, caso contrário trocamos Z por $Z/|Z|$. A seguinte definição será bastante usual.

Definição 3.2.1. *Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana munida com um campo paralelo e unitário Z . Dizemos que uma hipersuperfície M^n de $\overline{M}^{n+1}$ é transversal a Z se Z não é tangente a M^n em cada ponto de M^n .*

Salvo menção em contrário, de agora em diante $\overline{M}_Z^{n+1}$ sempre denotará uma variedade Riemanniana munida de um campo de vetores paralelos e unitários Z .

Uma vez que M^n é transversal ao campo Z , podemos ver pela decomposição ortogonal do campo vetorial Z ao longo de M^n , equação (3.22), que a função $\langle N, Z \rangle$ nunca se anula. Assim, escolhamos a orientação N de modo que $\langle N, Z \rangle$ seja positivo ao longo de M^n .

Considere $\theta : M^n \rightarrow [0, \pi/2)$ o ângulo acutângulo entre N e Z dado por

$$\langle N, Z \rangle = \cos \theta. \quad (3.27)$$

Observemos que se $\theta \equiv 0$ em M^n , então $\langle N, Z \rangle \equiv 1$. Consequentemente, por meio da identidade (3.22) para $\varepsilon = 1$,

$$1 = \langle Z, Z \rangle = \langle Z^\top, Z^\top \rangle + \langle N, Z \rangle^2 \langle N, N \rangle = \langle Z^\top, Z^\top \rangle + 1,$$

o que implica em $Z^\top = 0$. Desde que Z e N são unitários, devemos ter que $N \equiv Z$. Deste modo, para quaisquer $p \in M$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, segue da fórmula de Weingarten (2.28) e do paralelismo de Z ,

$$A(X(p)) = -\overline{\nabla}_{X(p)} N(p) = -\overline{\nabla}_{X(p)} Z(p) = 0.$$

Em outras palavras, M^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\overline{M}_Z^{n+1}$.

Se θ não é identicamente nulo, queremos hipóteses adequadas para que M^n ainda seja uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\overline{M}_Z^{n+1}$. Antes disto, daremos a seguinte definição:

Definição 3.2.2. *Seja M^n uma hipersuperfície completa, não compacta, orientada e imersa isometricamente em $\overline{M}^{n+1}$. Dizemos que o campo N converge para o campo Z no infinito se θ converge para zero no infinito.*

Agora estamos sob condições de provar o primeiro resultado desta dissertação.

Teorema 3.2.1. *Seja M^n uma hipersuperfície completa, não compacta e orientada de $\overline{M}_Z^{n+1}$, transversal a Z . Se o operador de Weingarten A é positivo semi-definido e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica.*

Demonstração. Suponha que θ é não identicamente nulo e seja $f = 1 - \langle N, Z \rangle$. Pelo Lema 3.2.2 e tomando $\varepsilon = 1$ no Lema 3.2.3 temos

$$\langle \nabla f, Z^\top \rangle = \langle A(Z^\top), Z^\top \rangle \quad \text{e} \quad \text{div}(Z^\top) = \langle N, Z \rangle \text{tr}(A). \quad (3.28)$$

Como A é positivo semi-definido, segue que $\text{tr}(A) \geq 0$ e $\langle \nabla f, Z^\top \rangle \geq 0$. Assim, inserindo essas duas desigualdades em (3.28), obtemos que

$$\langle \nabla f, Z^\top \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{div}(Z^\top) \geq 0. \quad (3.29)$$

Observe que f é não identicamente nula, não negativa e converge para zero no infinito, pois N converge para Z no infinito. Assim, o Teorema 3.1.1 aplicado ao campo $Z^\top$ garante que

$$\langle \nabla f, Z^\top \rangle \equiv 0 \quad \text{em} \quad M^n \quad \text{e} \quad \text{div}(Z^\top) \equiv 0 \quad \text{em} \quad M^n \setminus f^{-1}(0).$$

o que implica em particular que

$$\langle N, Z \rangle \text{tr}(A) = 0 \quad \text{em} \quad M^n \setminus f^{-1}(0).$$

Sendo $\langle N, Z \rangle > 0$, temos que $\text{tr}(A) = 0$. A partir disso e uma vez que A é positivo semi-definido, pelo Lema 2.2.1 temos $A \equiv 0$ em $M^n \setminus f^{-1}(0)$. Para mostrar que M^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica em $\overline{M}_Z^{n+1}$, basta provarmos que $A = 0$ em $f^{-1}(0)$. De fato, se $p \in \text{int}(f^{-1}(0))$, temos que $\langle N(p), Z(p) \rangle = 1$, isto é, $N(p) = Z(p)$. Assim, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, segue da fórmula de Weingarten (2.28)

$$A(X(p)) = -\overline{\nabla}_{X(p)} N(p) = -\overline{\nabla}_{X(p)} Z(p) = 0.$$

Dessa maneira, existe uma vizinhança de p em $f^{-1}(0)$ tal que $A \equiv 0$ nesta vizinhança. Como p foi escolhido arbitrariamente, temos que $A \equiv 0$ em $\text{int}(f^{-1}(0))$. Como N e Z coincidem em $\text{int}(f^{-1}(0))$, a continuidade de ambos implica que $N \equiv Z$ em $\partial(f^{-1}(0))$. Assim, segue que $A \equiv 0$ em $\partial(f^{-1}(0))$. Portanto, $A \equiv 0$ em M^n que será, deste modo, totalmente geodésica.

□

Ao longo da demonstração do Teorema 3.2.1, percebemos que a mesma conclusão pode ser obtida assumindo que a hipersuperfície possua curvatura média constante e que a curvatura de Ricci de $\overline{M}_Z^{n+1}$ na direção de N seja não negativa ao invés da semipositividade do operador de Weingarten da imersão, como veremos a seguir.

Teorema 3.2.2. *Sejam M^n uma hipersuperfície completa, não compacta e orientada de $\overline{M}_Z^{n+1}$, transversal a Z . Assuma que a curvatura de Ricci de $\overline{M}_Z^{n+1}$ na direção de N seja não negativa. Se M^n possui curvatura média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$.*

Demonstração. Assim como na prova do Teorema 3.2.1, vamos supor que θ é não identicamente nulo e considerar $f = 1 - \langle N, Z \rangle$. Como antes, vamos verificar que M^n satisfaz as hipóteses do Teorema 3.1.1 para o campo suave $A(Z^\top)$. De fato, pelo Lema 3.2.2 temos

$$\langle \nabla f, A(Z^\top) \rangle = \langle A(Z^\top), A(Z^\top) \rangle = |A(Z^\top)|^2 \geq 0.$$

Por outro lado, pelos Lemas 3.2.1 e 3.2.3 para $\varepsilon = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{div}(A(Z^\top)) &= Z^\top(\text{tr}(A)) - \text{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) + \langle N, Z \rangle |A|^2 \\ &= Z^\top(nH) + \langle N, Z \rangle \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + \langle N, Z \rangle |A|^2 \\ &= Z^\top(nH) + \langle N, Z \rangle (\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como H é constante, $Z^\top(nH) = 0$. Assim,

$$\text{div}(A(Z^\top)) = \langle N, Z \rangle (\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2).$$

Desde que $\langle N, Z \rangle > 0$, $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) \geq 0$ e $|A|^2 \geq 0$, temos $\text{div}(A(Z^\top)) \geq 0$.

Uma vez que f é não identicamente nula, não negativa e converge para zero no infinito, pois N converge para Z no infinito, pelo Teorema 3.1.1 aplicado ao campo $A(Z^\top)$ temos

$$\langle \nabla f, A(Z^\top) \rangle \equiv 0 \quad \text{em} \quad M^n \quad \text{e} \quad \text{div}(A(Z^\top)) \equiv 0 \quad \text{em} \quad M^n \setminus f^{-1}(0).$$

Assim, como $\langle N, Z \rangle > 0$ em $M^n \setminus f^{-1}(0)$ segue que

$$\langle N, Z \rangle (\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2) = 0 \implies \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0 \quad \text{e} \quad |A|^2 = 0.$$

implicando que $A \equiv 0$ e $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$ em $M^n \setminus f^{-1}(0)$.

No conjunto $f^{-1}(0)$, com os mesmos argumentos apresentados no final da demonstração do Teorema 3.2.1, temos que se $p \in \text{int}(f^{-1}(0)) \cup \partial(f^{-1}(0))$, então $N(p) = Z(p)$ e consequentemente $A \equiv 0$ em M^n .

Para a segunda parte, basta utilizar que em $\text{int}(f^{-1}(0))$ temos $N = Z$ e que o mesmo ocorre em $\partial(f^{-1}(0))$ pela continuidade de ambos. Além disso, sendo Z paralelo, segue da definição da curvatura de Ricci que

$$\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = \text{Ric}_{\overline{M}}(Z, Z) = 0. \quad (3.31)$$

Portanto $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$ em M^n . □

A luz do Teorema 3.2.2, conseguimos uma reformulação no caso em que o ambiente $\overline{M}_Z^{n+1}$ é variedade Einstein. Nessa nova configuração, além de obter que a hipersuperfície seja totalmente geodésica, também obtemos uma certa rigidez para o espaço ambiente, é o que mostra o seguinte resultado:

Proposição 3.2.1. *Seja M^n uma hipersuperfície completa, não compacta, orientada, imersa em uma variedade de Einstein $\overline{M}_Z^{n+1}$ e transversal a Z . Se M^n possui curvatura média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\overline{M}_Z^{n+1}$ é Ricci flat.*

Demonstração. A hipótese de curvatura média constante e a equação (3.30) nos fornecem que

$$\operatorname{div}(A(Z^\top)) = -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) + \langle N, Z \rangle |A|^2.$$

Como $\overline{M}^{n+1}$ é Einstein,

$$\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) = \lambda \langle Z^\top, N \rangle = 0.$$

Deste modo,

$$\operatorname{div}(A(Z^\top)) = \langle N, Z \rangle |A|^2 \geq 0,$$

uma vez que $\langle N, Z \rangle > 0$ e $|A|^2 \geq 0$. Seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.2.2 e aplicando o Teorema 3.1.1 ao campo $A(Z^\top)$, obtemos $|A|^2 = 0$, ou seja, $A \equiv 0$ em M^n . Portanto, M^n é totalmente geodésica.

Pelo Lema 3.2.1, como M^n é transversal a Z , ou seja, N não é ortogonal a Z , segue que $\overline{M}_Z^{n+1}$ é Ricci flat.

□

Considere $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ um campo vetorial fixado. Definimos o hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ ortogonal a e_{n+1} pelo conjunto

$$\mathcal{H} = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} ; \langle p, e_{n+1} \rangle = 0\}.$$

Encerraremos esta seção com um resultado do tipo Bernstein.

Corolário 3.2.1. *Seja M^n um gráfico inteiro em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante de modo que N converge para e_{n+1} no infinito. Então M^n é um hiperplano ortogonal a e_{n+1} .*

Demonstração. Pelo Exemplo 2.3.3 com $\varepsilon = 1$ temos

$$\langle N, e_{n+1} \rangle = \frac{\langle (-Du, 1), e_{n+1} \rangle}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} > 0.$$

Assim, M^n é transversal a $\mathbb{R}^{n+1}$ com respeito a e_{n+1} . Além disso, de acordo com o Exemplo 2.3.3, M^n é completa, não compacta e orientável. Então, pelo Teorema 3.2.2 (ou pela Proposição 3.2.1), visto que $\mathbb{R}^{n+1}$ tem curvatura de Ricci identicamente nula (particularmente é Einstein) e o campo constante e_{n+1} é um campo paralelo, então M^n é totalmente geodésica. Como as únicas hipersuperfícies totalmente geodésicas de $\mathbb{R}^{n+1}$ são os hiperplanos, temos que M^n está contida em um hiperplano $\mathcal{H}$. Desde que um gráfico inteiro e $\mathcal{H}$ são conexos, $M^n \subseteq \mathcal{H}$ sendo M^n completa, o Corolário 2.2.2 fornece que $M^n = \mathcal{H}$. Portanto o campo normal a M^n é constante igual a N_0 . Como N_0 e e_{n+1} são ambos constantes e N_0 converge para e_{n+1} no infinito, com ambos unitários, devemos ter que $N_0 = e_{n+1}$. Com isso, temos que M^n é um hiperplano ortogonal a e_{n+1} . □

3.2.3 O caso Lorentziano

O objetivo desta seção é reformular os resultados obtidos na seção anterior para o caso em que a variedade ambiente $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Lorentziana. De maneira semelhante, $\overline{M}_Z^{n+1}$ será uma variedade Lorentziana munida de um campo de vetores tipo-tempo paralelo e unitário Z , M^n será uma hipersuperfície tipo-espaco de $\overline{M}_Z^{n+1}$ com campo de vetores tipo-tempo normal e unitário N . Vamos assumir que N esteja na mesma orientação temporal de Z . Assim escolhamos N de modo que a função $\langle N, Z \rangle$ seja negativa ao longo de M^n . Pelo mesmo argumento aplicado na seção anterior podemos assumir que Z é unitário.

A função $\theta : M^n \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$\cosh \theta = -\langle N, Z \rangle \tag{3.32}$$

é o ângulo hiperbólico entre N e Z . Caso θ seja identicamente nulo em M^n , então $\langle N, Z \rangle = -\cosh 0 = -1$. Por isto e pela identidade (3.22) para $\varepsilon = -1$ temos

$$-1 = \langle Z, Z \rangle = \langle Z^\top, Z^\top \rangle + \langle N, Z \rangle^2 \langle N, N \rangle = \langle Z^\top, Z^\top \rangle - 1.$$

A equação anterior implica que $Z^\top = 0$. Como N e Z são tipo-tempo e unitários, temos $N \equiv Z$. Dessa maneira, para quaisquer $q \in M^n$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$, pelo paralelismo de Z ,

temos

$$A(Y(q)) = -\bar{\nabla}_{Y(q)}N(q) = -\bar{\nabla}_{Y(q)}Z(q) = 0.$$

Portanto, M^n é totalmente geodésica.

Observação 3.2.1. *Uma vez que N e Z são tipo-tempo e consoante a Definição 3.2.1, vemos que a hipersuperfície tipo-espço M^n de $\bar{M}_Z^{n+1}$ é automaticamente transversal a Z , pois $\langle N, Z \rangle$ não se anula. Portanto, nos resultados desta seção não precisamos assumir que M^n é transversal a Z .*

Como antes, queremos encontrar condições para que M^n seja totalmente geodésica mesmo que θ seja não identicamente nulo.

Definição 3.2.3. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espço completa e não compacta de $\bar{M}_Z^{n+1}$. Dizemos que o campo tipo-tempo N converge para o campo tipo-tempo Z no infinito se θ converge para zero no infinito.*

O primeiro resultado desta seção é a versão Lorentziana do Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.3. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espço completa e não compacta de $\bar{M}_Z^{n+1}$. Se o operador de Weingarten A é positivo semi-definido e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica.*

Demonstração. Partamos do pressuposto que θ não é identicamente nulo e seja $f = -1 - \langle N, Z \rangle$ a partir do Lema 3.2.2. Fazendo $\varepsilon = -1$ no Lema 3.2.3, obtemos

$$\langle \nabla f, Z^\top \rangle = \langle A(Z^\top), Z^\top \rangle \quad \text{e} \quad \text{div}(Z^\top) = -\langle N, Z \rangle \text{tr}(A),$$

Desde que $\text{tr}(A) \geq 0$, pois A é positivo semi-definido, e $-\langle N, Z \rangle > 0$, temos

$$\langle \nabla f, Z^\top \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{div}(Z^\top) \geq 0.$$

Observemos que a função $f = -1 - \langle N, Z \rangle$ é não identicamente nula e não negativa. Além disso, como N converge para Z no infinito, f converge para zero no infinito. Assim, podemos aplicar o Teorema 3.1.1 ao campo $Z^\top$ a fim de garantir que

$$\langle \nabla f, Z^\top \rangle \equiv 0 \quad \text{em} \quad M^n \quad \text{e} \quad \text{div}(Z^\top) \equiv 0 \quad \text{em} \quad M^n \setminus f^{-1}(0).$$

Logo, $-\langle N, Z \rangle \text{tr}(A) = 0$ em $M^n \setminus f^{-1}(0)$. Mas, $-\langle N, Z \rangle > 0$, implicando que $\text{tr}(A) = 0$. Com isso e por A ser positivo semi-definido, temos $A \equiv 0$ em $M^n \setminus f^{-1}(0)$ pelo Lema 2.2.1.

Para o caso em que $p \in \text{int}(f^{-1}(0))$ ou $p \in \partial(f^{-1}(0))$, procedemos de maneira análoga ao final da demonstração do Teorema 3.2.1, a fim de concluir que $A \equiv 0$ em M^n .

□

A próxima definição nos diz que em média, a gravidade atrai (para mais detalhes veja (O'NEILL, 1983)).

Definição 3.2.4. *Uma variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$ satisfaz a Condição de Convergência Temporal (TCC) se*

$$\text{Ric}_{\overline{M}}(X, X) \geq 0$$

para todo campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Por meio da Definição acima, notamos que a conclusão do Teorema 3.2.3 é verdadeira se assumirmos que a curvatura média de M^n é constante e que $\overline{M}_Z^{n+1}$ satisfaz a TCC, no lugar da hipótese sobre o operador de Weingarten.

Teorema 3.2.4. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não compacta de $\overline{M}_Z^{n+1}$. Assuma que $\overline{M}_Z^{n+1}$ satisfaz a TCC. Se M^n possui curvatura média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) = 0$.*

Demonstração. Considere $f = -1 - \langle N, Z \rangle$ e suponhamos que θ é não identicamente nulo. O Lema 3.2.2 nos proporciona que

$$\langle \nabla f, A(Z^\top) \rangle = \langle A(Z^\top), A(Z^\top) \rangle = |A(Z^\top)|^2 \geq 0.$$

Por outro lado, como H é constante, segue dos Lemas 3.2.1 e 3.2.3 para $\varepsilon = -1$,

$$\begin{aligned} \text{div}(A(Z^\top)) &= Z^\top(\text{tr}(A)) - \text{Ric}_{\overline{M}}(Z^\top, N) - \langle N, Z \rangle |A|^2 \\ &= -Z^\top(nH) - \langle N, Z \rangle \text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) - \langle N, Z \rangle |A|^2 \\ &= -\langle N, Z \rangle (\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Uma vez que a TCC implica que $\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) \geq 0$ e também temos $-\langle N, Z \rangle > 0$, segue que

$$\text{div}(A(Z^\top)) = -\langle N, Z \rangle (\text{Ric}_{\overline{M}}(N, N) + |A|^2) \geq 0.$$

Neste ponto, procedendo como na prova do Teorema 3.2.2, obtemos o resultado.

□

Obtemos uma reestruturação do Teorema anterior para o caso em que $\overline{M}_Z^{n+1}$ é um espaço-tempo Einstein. A demonstração segue as mesmas ideias desenvolvidas na prova da Proposição 3.2.1.

Proposição 3.2.2. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço completa e não compacta do espaço-tempo Einstein $\overline{M}_Z^{n+1}$. Se M^n possui curvatura média constante e N converge para Z no infinito, então M^n é totalmente geodésica e $\overline{M}_Z^{n+1}$ é Ricci flat.*

Assim como antes, definimos um hiperplano em $\mathbb{L}^{n+1}$ ortogonal ao vetor tipo-tempo e_{n+1} como o conjunto

$$\mathcal{H} = \{p \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle p, e_{n+1} \rangle = 0\}.$$

Observe que sendo e_{n+1} tipo-tempo, segue que $\mathcal{H} = \{e_{n+1}\}^\perp$ é tipo-espaço pelo Lema 2.2.10. Encerramos o trabalho com o seguinte resultado do tipo Calabi-Bernstein.

Corolário 3.2.2. *Seja M^n um gráfico inteiro em $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média constante de modo que seu campo normal tipo-tempo K converge para o vetor e_{n+1} no infinito. Então M^n é um hiperplano tipo-espaço ortogonal a e_{n+1} .*

Demonstração. Considere o campo normal $K = -N$ como orientação dada no Exemplo 2.3.3 com $\varepsilon = -1$. Assim,

$$\langle K, e_{n+1} \rangle = \frac{\langle (Du, 1); e_{n+1} \rangle}{\sqrt{1 - |Du|^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - |Du|^2}} < 0.$$

Logo M^n é transversal a $\mathbb{L}^{n+1}$ com respeito a e_{n+1} . Por outro lado, uma vez que M^n possui curvatura média constante, temos que a desigualdade (2.47) é válida, implicando que M^n é completa. Assim como no Corolário 3.2.1, pelo Exemplo 2.3.3, M^n é orientável, o campo constante e_{n+1} é um campo paralelo e $\mathbb{L}^{n+1}$ satisfaz a TCC (também é variedade Einstein). Pelo Teorema 3.2.4 (ou pela Proposição 3.2.2), M^n é totalmente geodésica. Seguindo os mesmos passos da demonstração do Corolário 3.2.1 e usando o Corolário 2.2.2, teremos que M^n é o hiperplano tipo-espaço ortogonal a e_{n+1} . $\square$

REFERÊNCIAS

- ALÍAS, L.; CAMINHA, A.; NASCIMENTO, F. do. A maximum principle at infinity with applications to geometric vector fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 474, n. 1, p. 242–247, 2019.
- BERNSTEIN, S. N. Sur un theoreme de geometrie et ses applications aux equations aux derivees partielles du type elliptique. *Comm. Inst. Sci. Math. Mech. Univ. Kharkov*, v. 15, p. 38–45, 1915.
- BOCHNER, S. Remark on the Theorem of Green. *Duke Mathematical Journal*, Duke University Press, v. 3, n. 2, p. 334–338, 1937.
- BOMBIERI, E.; GIORGI, E. D.; GIUSTI, E. Minimal cones and the Bernstein problem. *Inventiones mathematicae*, Springer, v. 7, n. 3, p. 243–268, 1969.
- CALABI, E. Examples of Bernstein problems for some non-linear equations. *Global Analysis*, Amer. Math. Soc., p. 223–230, 1970.
- CAMINHA, A. The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, Springer, v. 42, n. 2, p. 277–300, 2011.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- CHENG, S.-Y.; YAU, S.-T. Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces. *Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 104, n. 3, p. 407–419, 1976.
- CHOQUET, B. et al. Maximal submanifolds and submanifolds of constant extrinsic curvature of a Lorentzian manifold. 1976.
- CHOQUET-BRUHAT, Y.; FISCHER, A.; MARSDEN, J. Maximal hypersurfaces and positivity of mass. North-Holland, 1979.
- DRIVER, B. K. Analysis tools with applications. *Lecture notes*, 2003.
- GAFFNEY, M. P. A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 140–145, 1954.
- GODDARD, A. Foliations of space-times by spacelike hypersurfaces of constant mean curvature. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 54, n. 3, p. 279–282, 1977.
- GODDARD, A. Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1977. v. 82, n. 3, p. 489–495.
- KARP, L. On Stokes' theorem for noncompact manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 82, n. 3, p. 487–490, 1981.
- MARSDEN, J. E.; TIPLER, F. J. Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity. *Physics Reports*, Elsevier, v. 66, n. 3, p. 109–139, 1980.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. [S.l.]: Academic press, 1983. v. 4.

SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 62–105, 1968.

STUMBLES, S. M. Hypersurfaces of constant mean extrinsic curvature. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 133, n. 1, p. 28–56, 1981.

TU, L. W. *An introduction to manifolds*. [S.l.]: Springer., 2011.

YAU, S.-T. Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry. *Indiana University Mathematics Journal*, JSTOR, v. 25, n. 7, p. 659–670, 1976.