

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LETÔNIO JOSÉ DA SILVA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE
BIDIMENSIONAL COM OS MÉTODOS *BESO* E *SIMP***

Caruaru,
2018

LETÔNIO JOSÉ DA SILVA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE
BIDIMENSIONAL COM OS MÉTODOS *BESO* E *SIMP***

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste – CAA, da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Bono

Caruaru,

2018

Catálogo na fonte:

S586o Silva, Letônio José da.
Otimização topológica de problemas de elasticidade bidimensional com os métodos BESO e SIMP. / Letônio José da Silva. – 2018.
63f. ; 30 cm.

Orientador: Gustavo Bono.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, Engenharia Civil, 2018.
Inclui Referências.

1. Elementos finitos - Métodos. 2. Otimização. 3. Estruturas. 4. Engenharia. I. Bono, Gustavo (Orientador). II. Título.

620 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2018-001)

LETÔNIO JOSÉ DA SILVA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE
BIDIMENSIONAL COM OS MÉTODOS *BESO* E *SIMP***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste – CAA, da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em: ____ de _____ de ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras – UFPE/CAA

Profa. Dra. Mariana Fernandes dos Santos Villela – UFPE/CAA

Prof. Dr. Gustavo Bono – UFPE/CAA (Orientador)

Prof. Dr. Cléssio Leão S. Lima – UFPE/CAA (Coordenador da disciplina)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar aos meus pais, Antônio e Edvânia, conhecidos como Tonhe e Branca, por todo amor dado e pelos sacrifícios realizados. Sei que nesses vinte e um anos não mediram esforços para que eu tivesse oportunidade de chegar até esta etapa de minha vida.

À minha família, por acreditarem e investirem em mim, em especial a minha irmã Letícia e meus tios Gustavo e Solange, sempre procurando me ajudar de alguma forma.

Ao professor Dr. Gustavo Bono, não apenas pela paciência na orientação e ajuda nos imprevistos que apareceram no desenvolvimento deste trabalho, mas também pela amizade e pelos últimos três anos de orientação no PIBIC, contribuindo imensamente para minha formação acadêmica.

A todos os professores que me passaram seus ensinamentos durante a graduação, em especial à Prof.^a Dr.^a Michele, por ter me apresentado à linguagem C e ter deixado ser monitor da disciplina por tanto tempo, ao Prof. Dr. Saulo, por me ensinar que até os problemas mais difíceis podem ser autoexplicativos, ao Prof. Me. Douglas, por toda preocupação e incentivo durante as aulas, e ao Prof. Dr. José Moura, pela amizade, pelas conversas divertidas e pela ajuda ao longo de toda a graduação.

Aos meus amigos, pelas alegrias, tristezas e dores compartilhadas, em especial a Nelcito, Moura, Lucas e Éder, por todos os seminários e projetos realizados juntos. Sem a ajuda de vocês não teria concluído esse curso. Agradeço também às amizades formadas nas monitorias que dei no 2º semestre de 2014. Vocês tornaram o curso bem mais divertido e, se desse, citaria o nome de cada um, pois vocês são especiais para mim e merecem toda felicidade e sucesso neste mundo.

À Thayse, a pessoa mais incrível que conheci na graduação. Obrigado pelo carinho, pela paciência (infinita) e por sua capacidade única de me trazer paz na correria de cada semestre, renovando as minhas forças para seguir em frente durante esses cinco anos.

RESUMO

Neste trabalho, desenvolveu-se um programa em linguagem MATLAB para resolução de problemas de otimização topológica bidimensionais através dos métodos *BESO* e *SIMP*. Para a etapa de pré-processamento emprega-se o programa GID, exportando-se informações tais como: nós, conectividade dos elementos, carregamento, restrição de deslocamento, características do material, etc. Para a etapa de pós-processamento, emprega-se o Método dos Elementos Finitos para obter as principais variáveis (deformações, distribuições de tensões e tensão de von Mises) na estrutura otimizada. Utilizando-se exemplos clássicos da literatura, comparam-se os resultados obtidos pelo programa desenvolvido com os apresentados por outros autores. Os resultados obtidos com o programa desenvolvido mostram uma boa concordância para os dois métodos de otimização topológica, *BESO* e *SIMP*. Deve-se ressaltar, que o método *SIMP* apresentou os melhores resultados, quando comparados com os mostrados na literatura. Por fim, o programa permitiu a resolução de problemas com domínio não retangular, mostrando sua flexibilidade frente ao código utilizado como base, que só trabalha com domínios retangulares.

Palavras-chave: *BESO*. Método dos Elementos Finitos. Otimização Topológica. *SIMP*.

ABSTRACT

In this paper, a MATLAB language program was developed to solve two-dimensional topological optimization problems using the *BESO* and *SIMP* methods. For the pre-processing step the GID program is used, exporting information such as: nodes, connectivity of the elements, loading, restriction of displacement, characteristics of the material, etc. For the post-processing step, the Finite Element Method is used to obtain the main variables (deformations, stress distributions and von Mises stress) in the optimized structure. Using classic examples from the literature, the results obtained by the developed program are compared with those presented by other authors. The results obtained with the developed program show a good agreement for the two topological optimization methods, *BESO* and *SIMP*. It should be emphasized that the *SIMP* method presented the best results when compared with those shown in the literature. Finally, the program allowed the resolution of problems with non-rectangular domain, showing its flexibility against the code used as base, which only works with rectangular domains.

Keywords: *BESO*. Finite Element Method. Topological Optimization. *SIMP*.

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Latinos

B	Matriz de derivadas das funções de interpolação
B_e	Matriz de derivadas de interpolação do elemento
$C(x), C$	Energia total de deformação ou flexibilidade
E	Módulo de elasticidade longitudinal
E_e	Módulo de elasticidade longitudinal do elemento
E_{min}	Módulo de elasticidade longitudinal mínimo
f	Fração de volume
F	Vetor de forças externas
F^e	Vetor de forças externas do elemento
G	Módulo de elasticidade transversal
H_{ei}	Fator de peso do elemento
K	Matriz de rigidez global
K^e	Matriz de rigidez do elemento
K_A, K_B, K_C	Componentes da matriz de rigidez do elemento
lim	Fator limite de iteração
N_e	Conjunto de elementos dentro do filtro
N_i	Função de interpolação
ρ	Fator de penalização
r_{min}	Raio do filtro
RR	Raio de rejeição
u	Vetor de deslocamento global
u_{e_a}, u_{e_b}	Graus de liberdade do elemento
V_0	Volume total do domínio de projeto
V_{obj}	Volume objetivo
$V(x)$	Volume do elemento
x_e	Densidade do elemento
\widetilde{x}_e	Densidade física
x_e^{new}	Densidade do elemento na iteração posterior
x_i, x_j	Densidade do elemento dentro do filtro
r_{min}	Densidade mínima

Caracteres Gregos

$\Delta(e, i)$	Distância entre os centros dos elementos e e i
ε	Vetor de deformação específica do elemento
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$	Componentes da deformação específica do elemento
γ	Constante adotada
λ	Multiplicador de Lagrange
μ_e	Constante de volume de sensibilidade
ν	Coefficiente de Poisson
Ψ	Função $C(x)$ ou $V(x)$
ρ, μ	Coefficientes de Lamé
σ	Vetor de tensões do elemento
σ_{VM}	Tensão de von Mises
σ_e^{VM}	Tensão de von Mises do elemento
σ_{max}^{VM}	Tensão de von Mises máxima
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	Componentes da tensão do elemento
ζ_1, ζ_2	Sistema de coordenadas local

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de viga em balanço passando por otimização topológica	12
Figura 2 – Exemplo de problema tabuleiro de xadrez	20
Figura 3 – Fluxograma do processo de otimização de uma estrutura.....	26
Figura 4 – Malha gerada no GID	27
Figura 5 – Arquivo exportado pelo GID	28
Figura 6 – Estrutura otimizada via método <i>BESO</i>	29
Figura 7 – Distribuição de tensão do modelo otimizado.....	31
Figura 8 – Dimensões de projeto, condições de carregamento e contorno do balanço	32
Figura 9 – Disposição otimizada do balanço curto	32
Figura 10 – Evolução da solução do balanço curto com o método <i>BESO</i>	33
Figura 11 – Evolução da solução do balanço curto com o método <i>SIMP</i>	34
Figura 12 – Distribuição de tensão na direção x nas soluções finais	34
Figura 13 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada	35
Figura 14 – Deformação dos elementos do balanço curto otimizado.....	35
Figura 15 – Dimensões de projeto, condições de carregamento e contorno	36
Figura 16 – Disposição otimizada para o problema de duas barras.....	37
Figura 17 – Evolução da solução com o método <i>BESO</i>	38
Figura 18 – Evolução da solução com o método <i>SIMP</i>	38
Figura 19 – Distribuição de tensão na direção x nas soluções finais	39
Figura 20 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada	39
Figura 21 – Deformação dos elementos da estrutura final	40
Figura 22 – Domínio de projeto, condições de carregamento e de contorno	41
Figura 23 – Disposição otimizada do problema <i>L-shape</i>	42
Figura 24 – Evolução da solução com o método <i>BESO</i>	43
Figura 25 – Evolução da solução com o método <i>SIMP</i>	43
Figura 26 – Distribuição de tensão na direção x	44
Figura 27 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada	44
Figura 28 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método <i>SIMP</i> ...	45
Figura 29 – Domínio de projeto, condições de carregamento e de contorno	45
Figura 30 – Disposição otimizada do problema da mão francesa	46
Figura 31 – Evolução da solução da mão francesa com o método <i>BESO</i>	47
Figura 32 – Evolução da solução da mão francesa com o método <i>SIMP</i>	47
Figura 33 – Distribuição de tensão na direção x	48
Figura 34 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada	48
Figura 35 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método <i>BESO</i> ..	49
Figura 36 – Domínio de projeto, condições de carregamento e de contorno	49
Figura 37 – Disposição otimizada da viga MBB	50
Figura 38 – Evolução da função objetivo com o método <i>BESO</i>	50
Figura 39 – Evolução da função objetivo com o método <i>SIMP</i>	51
Figura 40 – Distribuição de tensão na direção x na estrutura otimizada	51

Figura 41 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada	52
Figura 42 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método <i>BESO</i> ..	52
Figura 43 – Domínio de projeto e demais condições da viga hiperestática de Michell	53
Figura 44 – Disposição otimizada da viga hiperestática de Michell.....	54
Figura 45 – Evolução da solução da viga de Michell pelo método <i>BESO</i>	54
Figura 46 – Evolução da solução da viga de Michell pelo método <i>SIMP</i>	55
Figura 47 – Distribuição de tensão na direção x	55
Figura 48 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada	56
Figura 49 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método <i>BESO</i> ..	56
Figura 50 – Domínio de projeto e demais condições da viga isostática de Michell ...	57
Figura 51 – Disposição otimizada da viga isostática de Michell	58
Figura 52 – Evolução da solução pelo método <i>BESO</i>	58
Figura 53 – Evolução da solução pelo método <i>SIMP</i>	59
Figura 54 – Distribuição de tensão na direção x	59
Figura 55 – Distribuição de tensão de von Mises na viga isostática de Michell	60
Figura 56 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método <i>BESO</i> ..	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos	13
1.1.1	Objetivo geral	13
1.1.2	Objetivos específicos	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO	14
3	METODOLOGIAS	15
3.1	Método dos Elementos Finitos	15
3.1.1	Formulação de Taylor	16
3.2	Método de otimização topológica <i>SIMP</i>	18
3.3	Método de otimização topológica <i>BESO</i>	21
3.3.1	Número de sensibilidade.....	23
3.4	Descrição do programa em linguagem MATLAB	25
3.4.1	Pré-processamento	25
3.4.2	Processo de otimização	28
3.4.3	Pós-processamento	29
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	31
4.1	Problema da viga em balanço curta	31
4.2	Problema de duas barras	36
4.3	Estrutura em "L"	40
4.4	Problema da mão francesa	45
4.5	Viga MBB	49
4.6	Viga hiperestática de Michell	52
4.7	Viga isostática de Michell	57
5	CONCLUSÕES	61
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

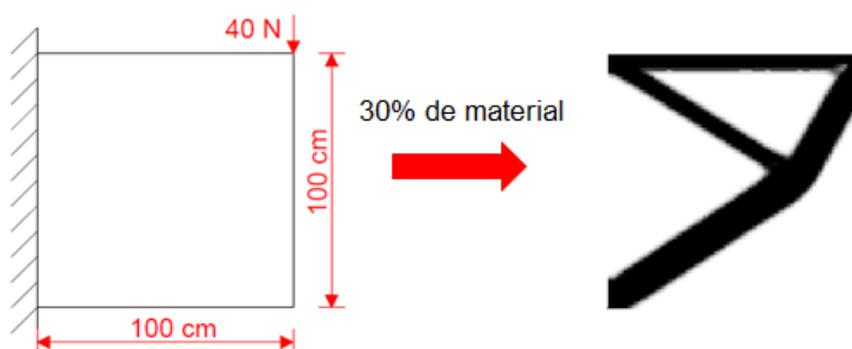
Quando se dimensiona uma estrutura (um edifício, por exemplo), se faz necessário levar em consideração diversos fatores, tais como segurança, custo, disponibilidade de mercado, tempo de execução, entre outros. Geralmente, os principais fatores que predominam são a segurança e a economia. A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) possui uma série de normas com diretrizes sobre os critérios de segurança que devem ser satisfeitos, por exemplo, os limites de resistências dos materiais tanto em situação última, como de serviço. Satisfeitas essas condições, pode-se pensar na economia, procurando escolher a geometria, os materiais e a topologia que minimize o custo do projeto.

No entanto, a forma convencional de se projetar estruturas baseia-se na maioria das vezes apenas nos critérios de segurança (normativa), não sendo muitas vezes eficaz economicamente. Trata-se de uma consequência do dimensionamento normativo da estrutura, utilizando apenas a experiência do profissional projetista. Uma análise mais sofisticada tornaria o trabalho desdenhoso para o profissional, caso este o realize de forma braçal.

Como solução, surgem às técnicas de otimização combinadas com o advento dos computadores. No dimensionamento ótimo, diversas alternativas de projeto são estudadas e analisadas numericamente, o projetista tem a possibilidade de avaliar diversas opções e, utilizando tanto a experiência como os resultados numéricos escolher a estrutura que melhor se enquadre no projeto, atendendo todos os requisitos de segurança e economia.

Um tipo de técnica de otimização de estruturas que pode ser empregada é a otimização topológica. Segundo Huang e Xie (2010), esta técnica consiste em determinar a distribuição de cavidades, “furos”, no domínio de projeto que maximize/minimize a função objetivo considerando a restrição de material. Pode-se observar na Figura 1 o resultado da aplicação de uma técnica de otimização topológica numa viga em balanço, reduzindo a estrutura a 30% do volume original.

Figura 1 – Exemplo de viga em balanço passando por otimização topológica



Fonte: Autor (2018)

O presente trabalho utiliza dois métodos de otimização topológica: *BESO* (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) e *SIMP* (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Com a estrutura otimizada, empregasse o Método dos Elementos Finitos para o cálculo das tensões e deformações que ocorrem na estrutura. Trata-se de um método numérico que permite que as equações diferenciais parciais de diversos problemas fossem resolvidas de modo aproximado, dividindo-se o domínio em uma quantidade finita de elementos (CLOUGH, 1990).

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Utilizar critérios de otimização topológica para o estudo de estruturas bidimensionais no Estado Plano de Tensão.

1.1.2 Objetivos específicos

Desenvolver no ambiente de programação de MATLAB um programa para otimização topológica de estruturas bidimensionais quaisquer empregando as metodologias *BESO* (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) e *SIMP* (*Solid Isotropic Material with Penalization*) combinados com o Método dos Elementos Finitos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Os métodos numéricos de otimização topológica começaram a serem desenvolvidos a partir do trabalho de Bendsøe e Kikuchi (1988), dando a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento desse tipo de otimização.

Bendsøe (1989) introduziu uma nova técnica de otimização, mais geral do que a técnica padrão de otimização de forma, conhecida como *SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization)*. Nessa técnica, a densidade do material de cada elemento da estrutura varia continuamente entre 0 e 1, aplicando materiais compósitos para densidades intermediárias. A vantagem é que esta técnica não modifica a malha de elementos finitos.

Sigmund (2001) e Bendsøe e Sigmund (2004) apresentaram um código de otimização topológica desenvolvido em MATLAB, considerando o método *SIMP*. O código criado por ele é livre, inclusive compõe a base para o desenvolvimento do presente trabalho. O destaque do código está no filtro de independência de malha adotado, que reduz bruscamente a chance do algoritmo não convergir para uma solução. No trabalho são explicadas alterações que podem ser feitas no algoritmo para que calcule outros exemplos.

Sigmund (2007) modificou o código de otimização topológica desenvolvido em 2001, acrescentando dois filtros: filtro de sensibilidade e filtro de densidade. Esses filtros combatem o problema de tabuleiro de xadrez (*checkerboard*), caracterizado pela alternância de regiões com e sem elementos, com ligações entre vizinhos sendo feitas apenas por nós, o que se assemelha a um tabuleiro de xadrez.

Huang e Xie (2010) apresentaram a técnica *BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization)*. Em seu livro, mostra-se inicialmente a técnica *ESO (Evolutionary Structural Optimization)*, que consiste na retirada de elementos da malha até que se atinja a fração de volume requisitada. Como a técnica somente retira elementos, Huang e Xie explicam que dependendo dos parâmetros introduzidos, o processo de otimização pode não encontrar solução e colapsar, caso o método retire elementos que futuramente se tornem importantes para a rigidez da peça. Para corrigir esse problema, foi desenvolvida a técnica *BESO*, que retira material e caso este venha se tornar importante posteriormente, é adicionado novamente à estrutura, por isso é chamada de bidirecional.

Andreassen *et al.* (2011) elaborou um código em MATLAB que aplica as técnicas de otimização topológica, utilizando como base o código desenvolvido por Sigmund (2001) e Sigmund (2007). No trabalho, procurou-se modificar a pré-alocação de arrays e a vetorização de laços do algoritmo predecessor, mantendo a adaptabilidade do algoritmo. Dessa forma, tornou o programa mais eficiente, além de um código reduzido para 88 linhas.

Em seu trabalho, Ochoa *et al.* (2016) apresenta um *benchmark* contendo um conjunto de problemas de referência para a otimização de topologia de malhas bidimensionais. No seu texto, foi empregado como base mais de 100 artigos na literatura especializada. Ochoa *et al.* identificou nesses artigos diferenças em especificações como comprimentos, unidades, materiais, etc. Por isso, o objetivo do *benchmark* foi unificar características físicas e mecânicas.

Sousa Junior (2016) modificou o código aberto fornecido por Huang e Xie (2010), para que fosse possível realizar a análise de tensões no modelo otimizado, empregando o Método dos Elementos Finitos. O código implementado plota as principais variáveis (distribuição de tensões e deformações) da estrutura otimizada através do método *BESO*. No trabalho, também, apresenta-se um estudo paramétrico dos principais parâmetros do método de otimização.

Pereira (2017), desenvolveu um programa de otimização topológica considerando os métodos *SIMP* (ANDREASSEN *et al.*, 2011) e *BESO* (HUANG e XIE, 2010). O programa foi empregado para realizar um estudo comparativo de sistemas de contraventamento em edificações considerando a influência das cargas de vento. O programa implementado, apresenta dois esquemas de interpolação das variáveis (ModSIMP e RAMP) e quatro métodos de atualização das variáveis, OC, SAO-QP, SAO-DUAL e MMA.

3 METODOLOGIAS

No presente trabalho, utilizou-se como base os códigos de Sousa Junior (2016) e Pereira (2017), estudantes da mesma instituição (UFPE/Núcleo de Tecnologia), tornando-se mais uma colaboração para o tema. Os códigos utilizados por Sousa Junior, Pereira e todos os programas que se baseiam em Sigmund (2001), Andreassen *et al.* (2011) e Huang e Xie (2010) só resolvem problemas que possuam domínio retangular. Contornando essa limitação, as alterações propostas nesse trabalho modificam os códigos permitindo domínios de projeto quaisquer.

As seções subsequentes apresentam os conceitos do Método dos Elementos Finitos e dos métodos de otimização topológica *SIMP* e *BESO*. Posteriormente, explicam-se as diferenças que vigoram entre o programa atual e suas versões anteriores.

3.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) surgiu na metade do século XX, quando apareceram os primeiros computadores. No entanto, os fundamentos

matemáticos do MEF já eram conhecidos havia tempo, desde 1795 com as funções de aproximação desenvolvidas por Gauss, que possibilitavam que as equações diferenciais parciais de diversos problemas fossem resolvidas de modo aproximado (CLOUGH, 1990). Infelizmente, as ferramentas de cálculo disponíveis para a época inviabilizavam a sua implementação e utilização.

Segundo Rao (2011), inicialmente o MEF foi aplicado na análise de problemas da mecânica dos sólidos, mas logo a sua aplicação estendeu-se a outros fenômenos físicos. Esta abrangência aliada ao sucesso do método propiciaram o estudo mais profundo e extenso dele. Da análise matemática do método resultaram critérios de estabilidade, que garantem aos resultados mais confiabilidade.

Ainda segundo Rao (2011), na Mecânica dos Sólidos, problemas físicos que possuem um domínio contínuo com infinitos graus de liberdade passavam, por meio de algum método numérico, a ser representado por um problema discreto, com um número finito de graus de liberdade. Normalmente, a acurácia da solução melhora com o aumento do número de elementos, em contrapartida o tempo de processamento e o custo computacional também aumentam.

Com o tempo o método evoluiu, passando de problemas inicialmente lineares para não-lineares, da análise de problemas estáticos para dinâmicos, entre outros exemplos (BARROS, 2002). Atualmente o MEF continua evoluindo nos seus diversos aspectos, sendo objeto de pesquisa em todo o mundo.

3.1.1 Formulação de Taylor

Para o presente trabalho, aplica-se a formulação de Elementos Finitos proposta por Taylor *et al.* (1976) para a análise bidimensional de estruturas no âmbito de elasticidade linear. Emprega-se o elemento quadrilátero isoparamétrico não conforme de Taylor. O Método dos Elementos Finitos é aplicado no pós-processamento, depois de realizada a otimização topológica.

Conforme apresentado por Silva (2012), a vantagem da formulação de Taylor está no enriquecimento dos campos de deformação, o qual não apresenta o aumento do número de nós por elemento. Aumenta-se a informação na interpolação com a adição de duas novas funções (N_5 e N_6), funções bolha, às funções já existentes (N_1 a N_4), conforme segue:

$$\begin{aligned} N_1(\zeta_1, \zeta_2) &= \frac{1}{4}(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2) \\ N_2(\zeta_1, \zeta_2) &= \frac{1}{4}(1 - \zeta_1)(1 + \zeta_2) \\ N_3(\zeta_1, \zeta_2) &= \frac{1}{4}(1 + \zeta_1)(1 - \zeta_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
N_4(\zeta_1, \zeta_2) &= \frac{1}{4}(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2) \\
N_5(\zeta_1, \zeta_2) &= 1 - \zeta_1^2 \\
N_6(\zeta_1, \zeta_2) &= 1 - \zeta_2^2
\end{aligned}$$

Com isso, o campo de deslocamentos passa a ser interpolado na forma de:

$$\mathbf{u}(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta_1, \zeta_2) \mathbf{u}_{e_a} + \sum_{i=5}^6 N_i(\zeta_1, \zeta_2) \mathbf{u}_{e_b} \quad (3.2)$$

em que ζ_1 e ζ_2 são sistemas de coordenadas local, \mathbf{u}_{e_a} são os graus de liberdade do elemento isoparamétrico bidimensional de 4 nos, e \mathbf{u}_{e_b} são os novos graus de liberdade. Essas novas componentes de deslocamento (4 componentes extras) acrescentam novos termos a matriz de derivadas das funções de interpolação \mathbf{B} , a qual tem a sua dimensão dada por:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4 \ | \ \mathbf{B}_5 \ \mathbf{B}_6] \quad (3.3)$$

onde, \mathbf{B}_1 até \mathbf{B}_6 são as submatrizes da matriz \mathbf{B} associadas com as funções de interpolação conforme apresentado por Soriano (2009) e Oñate (2009).

Conseqüentemente, a matriz de rigidez de cada elemento é da forma:

$$\mathbf{K}_{12 \times 12}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{A(8 \times 8)} & \mathbf{K}_{B(8 \times 4)} \\ \mathbf{K}_{B^T(4 \times 8)} & \mathbf{K}_{C(4 \times 4)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Como alguns termos dessa matriz estão relacionados aos deslocamentos \mathbf{u}_{e_b} , é necessário condensar a matriz $\mathbf{K}_{12 \times 12}^e$, de modo a eliminarem-se esses deslocamentos da formulação do problema. Isso pode ser feito com o uso das relações de equilíbrio da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_A \mathbf{u}_{e_a} + \mathbf{K}_B \mathbf{u}_{e_b} = \mathbf{F}^e \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}_B^T \mathbf{u}_{e_a} + \mathbf{K}_C \mathbf{u}_{e_b} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Manipulando algebricamente a Equação (3.6), obtém-se:

$$\mathbf{u}_{e_b} = -\mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \mathbf{u}_{e_a} \quad (3.7)$$

Inserindo-se a Equação (3.7) na Equação (3.5), chega-se à expressão da matriz de rigidez do elemento de Taylor, que, dessa forma, passa a ter, novamente, a dimensão 8x8 (oito graus de liberdade):

$$\mathbf{K}_{8 \times 8}^e = \mathbf{K}_A - \mathbf{K}_B \mathbf{K}_C^{-1} \mathbf{K}_B^T \quad (3.8)$$

Esse processo denomina-se como condensação estática. Posteriormente, a montagem da matriz de rigidez global é feita pelo procedimento usual de elementos finitos.

Após a solução dos deslocamentos nodais, o campo de deslocamento enriquecido é calculado em cada elemento como:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_a \mid \mathbf{u}_{e_b}] \quad (3.9)$$

Logo, as deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}$, podem ser calculadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.10)$$

e as tensões por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.11)$$

onde E é o módulo de elasticidade, \mathbf{B} a matriz de derivadas da função de interpolação e \mathbf{u} o vetor de deslocamento global.

3.2 Método de otimização topológica *SIMP*

A fundamentação teórica do método pode ser encontrada em Bendsøe (1989), Sigmund (2001) e Andreassen *et al.* (2011). No método *Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)*, a estrutura é discretizada por elementos quadriláteros regulares e emprega-se uma abordagem baseada em densidade para a otimização topológica, isto é, o e -ésimo elemento tem uma densidade x_e que pode variar no intervalo $[0, 1]$. O módulo de elasticidade E_e define-se conforme a equação abaixo:

$$E_e = E_{min} + x_e^p (E - E_{min}), \quad x_e \in [0,1] \quad (3.12)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ou de Young, do material, E_{min} é um valor mínimo para o módulo de elasticidade e p é um fator de penalização de densidades intermediárias. É importante definir um valor mínimo para o módulo de elasticidade para evitar que a matriz de rigidez do sistema se torne singular. Andreassen *et al.* (2011) adota $E_{min} = E 10^{-9}$.

O objetivo do método *SIMP* é determinar a distribuição ótima de material no domínio de projeto, respeitando as restrições quanto ao volume total e as variáveis de projeto. O conjunto de equações (3.13) apresentam o problema a ser resolvido.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } C(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N E_e(x_e) \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_e \\ \text{Sujeito à: } & \frac{V(\mathbf{x})}{V_0} = f \\ & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ & 0 \leq x_e \leq 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $C(\mathbf{x})$ é a flexibilidade, \mathbf{K}_0 é a matriz de rigidez do elemento, \mathbf{u}_e é o vetor de deslocamentos do e -ésimo elemento, $V(\mathbf{x})$ é o volume estrutural, V_0 é o volume total do domínio de projeto, f é a fração do volume total do domínio, \mathbf{K} é a matriz global de rigidez global, \mathbf{u} é o vetor de deslocamento global e \mathbf{F} é o vetor de esforços externos que agem no domínio.

Diferenciando a função objetivo e a restrição de volume em relação à densidade do elemento, encontra-se a sensibilidade de cada elemento, ou seja:

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = \frac{1}{2} p x_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_e \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = \mu_e \quad (3.15)$$

onde $\mu_e = 1$, conforme Andreassen *et al.* (2011) já que os elementos possuem tamanho unitário. No entanto, no presente trabalho a dimensão dos elementos depende da malha gerada durante a formulação do problema.

Para o problema de minimização da flexibilidade estrutural com restrição no volume, várias metodologias de otimização foram desenvolvidas, mostrando resultados satisfatórios. No presente trabalho, utilizou-se o método do critério de otimalidade (*Optimality Criteria*) (BENDSØE e KIKUCHI, 1988; BENDSØE e SIGMUND, 2004) para atualizar os valores do vetor de variáveis de projeto a cada iteração.

$$x_e^{new} = \begin{cases} \max(0, x_e - m) & \text{se } x_e B_e^\eta \leq \max(0, x_e - m) \\ \min(1, x_e + m) & \text{se } x_e B_e^\eta \geq \min(1, x_e + m) \\ x_e B_e^\eta & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (3.16)$$

sendo η igual a 1/2 (ver ANDREASSEN *et al.*, 2011) e

$$B_e = \frac{-\frac{\partial C}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_e}} \quad (3.17)$$

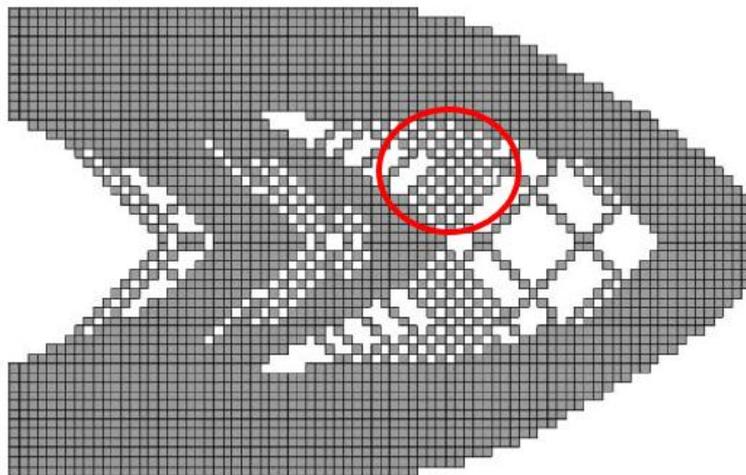
onde λ é o multiplicador de Lagrange que deve ser determinado de forma iterativa, respeitando a restrição de volume e m ($= 0,2$) é o limite de movimentação por iteração, valor sugerido por Sigmund (2001). O critério de convergência utilizado considera a i -ésima iteração, de modo que para todos elementos do domínio

$$|x_e^i - x_e^{i-1}| < \lim \quad (3.18)$$

onde \lim é um limite do erro máximo permitido entre duas soluções consecutivas.

Na Figura 2, apresenta-se o que se conhece em otimização topológica como problema do tabuleiro de xadrez, *checkerboard*. Para contorná-lo, Andreassen *et al.* (2011) desenvolveu um método de filtragem de campo de densidades e/ou sensibilidades aplicável às duas técnicas estudadas. Este problema é caracterizado pela ligação entre elementos vizinhos ocorrer apenas por nós, em vez de ligações entre as faces. Como consequência, tem-se a alternância entre elementos sólidos e vazios.

Figura 2 – Exemplo de problema tabuleiro de xadrez



Fonte: Huang e Xie (2010)

O filtro de sensibilidade modifica a sensibilidade $\frac{\partial C}{\partial x_e}$, conforme:

$$\frac{\widehat{\partial C}}{\partial x_e} = \frac{1}{\max(\gamma, x_e) \sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (3.19)$$

onde N_e é o conjunto de elementos i cuja distância centro-a-centro $\Delta(e, i)$ ao elemento e é menor que o raio do filtro r_{min} e H_{ei} é um fator de peso definido como:

$$H_{ei} = \max(0, r_{min} - \Delta(e, i)) \quad (3.20)$$

O termo $\gamma = (10^{-3})$ em (3.19) é um pequeno número positivo introduzido para evitar a divisão por zero, sugestão de Andreassen *et al.* (2011).

Enquanto isso, o filtro de densidade transforma a densidade original x_e em:

$$\widetilde{x}_e = \frac{1}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} \sum_{i \in N_e} H_{ei} x_i \quad (3.21)$$

Por conta deste filtro, as densidades originais x_e são designadas como as variáveis de projeto. As densidades filtradas \widetilde{x}_e são designadas como as densidades físicas. Esta terminologia é necessária para enfatizar o fato de que a aplicação de um filtro de densidade faz com que as densidades originais x_e percam seu significado físico. Por consequência, deve sempre apresentar o campo de densidade filtrada \widetilde{x}_e em vez do campo de densidade original x_e como a solução para o problema de otimização.

No caso de um filtro de densidade ser aplicado, as sensibilidades da função objetiva C e do volume de material V em relação às densidades físicas \widetilde{x}_e ainda são fornecidas por (3.14) e (3.15), desde que a variável x_e seja substituída por \widetilde{x}_e . As sensibilidades em relação às variáveis de projeto x_j são obtidas por meio da regra da cadeia:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = \sum_{e \in N_j} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{x}_e} \frac{\partial \widetilde{x}_e}{\partial x_j} = \sum_{e \in N_j} \frac{1}{\sum_{i \in N_e} H_{ei}} H_{je} \frac{\partial \Psi}{\partial \widetilde{x}_e} \quad (3.22)$$

onde a função ψ representa a função objetivo C ou o volume de material V .

3.3 Método de otimização topológica *BESO*

No presente trabalho, a abordagem do método *BESO* considera a formulação apresentada por em Huang e Xie (2010). Antes do método *BESO*, o método *ESO* (*Evolutionary Structural Optimization*) foi desenvolvido por Xie e Steven (1992).

O método *ESO* elimina os elementos que apresentam uma tensão menor que um determinado valor limite. Então a rigidez do elemento passa a ser desprezada, não contribuindo mais para a rigidez da estrutura. Um critério comumente utilizado para comparação é a tensão de von Mises. Logo, considerando a tensão de von Mises, é eliminado da estrutura todo elemento que atende a condição:

$$\frac{\sigma_e^{VM}}{\sigma_{max}^{VM}} \leq RR \quad (3.23)$$

onde σ_e^{VM} é a tensão de von Mises do elemento, σ_{max}^{VM} é a tensão de von Mises máxima na estrutura e RR é o raio de rejeição, fração da tensão máxima que caracteriza a exclusão do elemento.

A tensão de von Mises para o Estado Plano de Tensões é:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2} \quad (3.24)$$

onde σ_{xx} é a tensão na direção “x”, σ_{yy} é a tensão na direção “y” e σ_{xy} é a tensão de cisalhamento. Como aprimoramento do método *ESO*, surgiu o método *BESO*, com a finalidade de corrigir o problema de retirada prematura de material, pois nessa metodologia ocorre retirada e adição de elementos conforme o elemento perde ou ganha importância para a rigidez da estrutura. Neste método, parte-se de uma configuração inicial (usualmente considerando-se o domínio de projeto inteiro sólido). Os elementos não são diretamente eliminados da estrutura, mas tem sua contribuição para a rigidez diminuída.

Em um vetor x é armazenada a informação de cada elemento. Para o e -ésimo elemento, x_e , define-se o valor igual a 1 caso seja um elemento sólido ou o valor 0,001 caso seja um elemento suavizado. O elemento suavizado não é considerado vazio, mas sim com pouca contribuição à rigidez da estrutura.

Para o método *BESO*, procura-se:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } C(x) &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ \text{Sujeito à: } V_{obj} - \sum_{e=1}^N V_e x_e &= 0 \\ x_e &= 0 \text{ ou } 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde C é energia total de deformação da estrutura, ou flexibilidade, \mathbf{F} é o vetor de forças externas, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos, V_{obj} é o volume pretendido para a estrutura, V_e e x_e são o volume e a variável que determina se é sólido (1) ou suavizado (0) para o e -ésimo elemento, respectivamente. Minimizar a energia total de deformação é equivalente a maximizar a rigidez da estrutura.

Para determinar a contribuição de cada elemento, é feita um esquema de interpolação de material, onde parâmetros como o módulo de elasticidade do material são alterados baseados num fator de penalização. Este fator de penalização altera a matriz de rigidez do e -ésimo elemento de acordo com:

$$K_e = x_e^p K^e \quad (3.26)$$

onde K_e é a matriz de rigidez do elemento modificada pelo fator de penalização, K^e é matriz de rigidez calculada para o elemento, $x^e \in \{0,001; 1\}$ de acordo com o tipo do elemento e p é o chamado fator de penalização. Este último serve para aproximar a topologia obtida de um padrão de sólidos e vazios. Quanto maior o valor do fator de

penalização, melhor é o padrão de sólidos e vazios. Huang e Xie (2010) afirmaram que qualquer valor maior do que 1 é suficiente para conseguir efetividade do método, entretanto recomendaram o uso de fatores de penalização $p \geq 1,5$.

3.3.1 Número de sensibilidade

Para determinar se o elemento é sólido ou suavizado aplica-se o número de sensibilidade. Este número representa a eficiência de cada elemento na estrutura com relação à função objetivo e é obtido a partir da mesma. Sabendo que a função objetivo definida na Equação (3.25), tem-se que

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \quad (3.27)$$

Derivando a Equação (3.27) em relação ao elemento x_e , segue que

$$\frac{dC}{dx_e} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{F}^T}{dx_e} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}}{dx_e} \mathbf{F}^T \quad (3.28)$$

A equação de equilíbrio para estruturas estáticas é uma restrição adicionada ao problema, a qual é definida como:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.29)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos e \mathbf{F} é o vetor de carregamento aplicados à estrutura. Essa restrição pode ser adicionada a função objetivo, desde que seja acrescido um vetor com o multiplicador Lagrangiano λ , de modo que:

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{u} + \lambda^T (\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{u}) \quad (3.30)$$

Consequentemente, a equação de sensibilidade (3.28) recebe novos termos:

$$\frac{dC}{dx_e} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{F}^T}{dx_e} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}}{dx_e} \mathbf{F}^T + \frac{1}{2} \frac{d\lambda^T}{dx_e} (\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{u}) + \lambda^T \left(\frac{d\mathbf{F}}{dx_e} - \frac{d\mathbf{K}}{dx_e} \mathbf{u} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_e} \right) \quad (3.31)$$

Note que o terceiro termo da equação (3.31) é nulo devido ao equilíbrio estático ($\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$). Além disso, o vetor de forças é invariável com a mudança de elementos no domínio, portanto,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dx_e} = 0 \quad (3.32)$$

e, também,

$$\frac{d\mathbf{F}^T}{dx_e} = 0 \quad (3.33)$$

Desse modo, a equação de sensibilidade da função objetivo fica:

$$\frac{dC}{dx_e} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}}{dx_e} \mathbf{F}^T + \lambda^T \left(-\frac{d\mathbf{K}}{dx_e} \mathbf{u} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_e} \right) \quad (3.34)$$

$$\frac{dC}{dx_e} = \frac{d\mathbf{u}}{dx_e} \left(\frac{1}{2} \mathbf{F}^T - \lambda^T \mathbf{K} \right) - \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_e} \mathbf{u} \quad (3.35)$$

Huang e Xie (2010) adotam um valor para o multiplicador de Lagrange que anule o primeiro termo da equação (3.35). Considerando a equação de equilíbrio estático (3.29), escolhe-se:

$$\lambda = \frac{1}{2} \mathbf{u} \quad (3.36)$$

Substituindo a equação (3.36) na (3.35), tem-se:

$$\frac{dC}{dx_e} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_e} \mathbf{u} \quad (3.37)$$

Aplicando a equação (3.26) na (3.37), obtêm-se:

$$\frac{dC}{dx_e} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T p x_e^{p-1} K^e \mathbf{u} \quad (3.38)$$

Finalmente, a expressão definitiva para o número de sensibilidade do i -ésimo elemento, segundo Huang e Xie (2010), é:

$$\alpha_i = \begin{cases} -\frac{1}{2} p \mathbf{u}^T K^e \mathbf{u} & \text{para } x_e = 1 \\ -\frac{1}{2} p x_{min}^{p-1} \mathbf{u}^T K^e \mathbf{u} & \text{para } x_e = x_{min} \end{cases} \quad (3.39)$$

Com isso, as sensibilidades são calculadas e ordenadas. A cada iteração uma fração er ($= 0,02$) dos elementos com menor sensibilidade são trocados por vazios até que se atinja a restrição de volume. Nas iterações posteriores as sensibilidades continuam sendo calculadas e ordenadas de modo que elementos retirados podem ser restituídos se suas sensibilidades forem maiores que a de elementos sólidos. Por fim, é necessária a aplicação de filtros de sensibilidade para combater problemas de *checkerboard* como foi exemplificado na Figura 1.

3.4 Descrição do programa em linguagem MATLAB

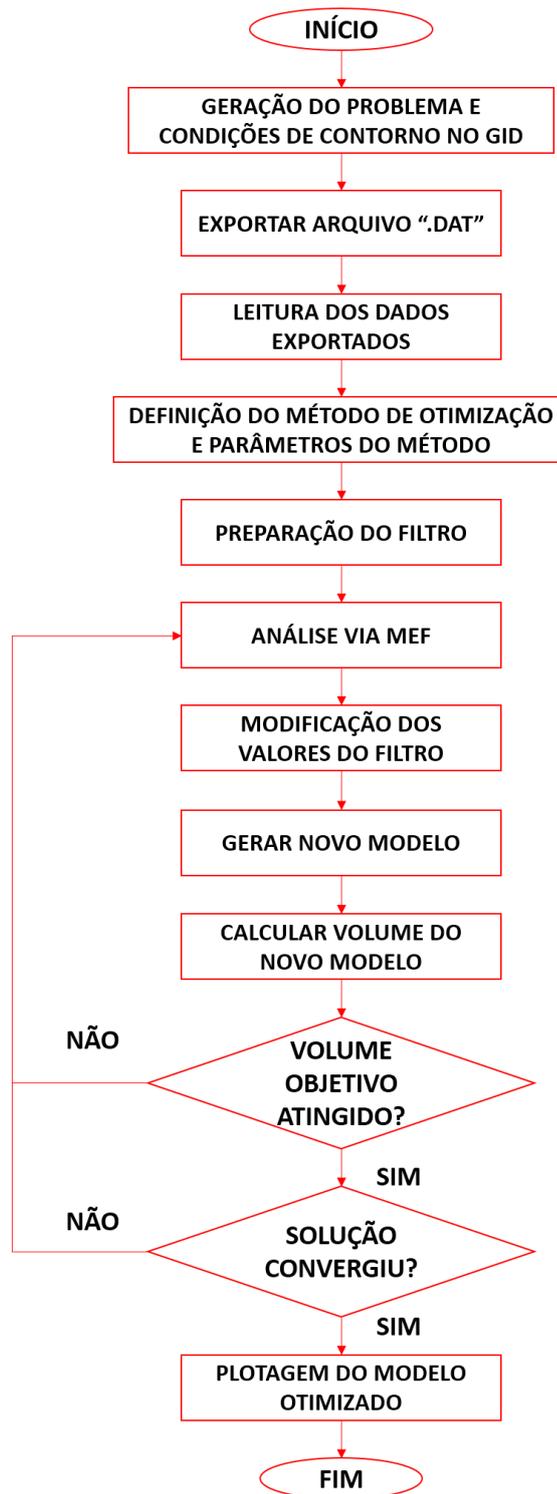
Na Figura 3, apresenta-se um fluxograma que descreve o processo empregado do pré ao pós-processamento para o presente trabalho. Nas subseções posteriores, descreve-se o passo-a-passo de cada etapa do programa.

3.4.1 Pré-processamento

O GID é um programa de pré e pós-processamento desenvolvido pelo CIMNE (*International Centre for Numerical Methods in Engineering*) para simulações numéricas em diversas áreas, como Análise Estrutural e Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), entre outras. Neste programa é possível, por exemplo, montar malhas bi ou tridimensionais com variados tipos de elementos (quadriláteros, triangulares, tetraédricos, etc).

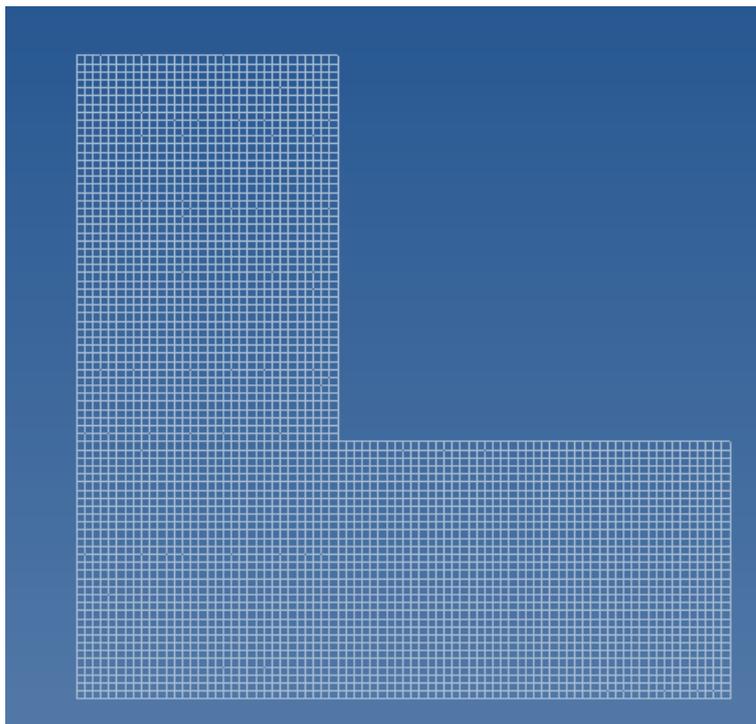
Empregando o GID (versão 13.0.2), cria-se a geometria do problema a ser analisado. Esta geometria é discretizada em uma malha de elementos quadriláteros uniformes, conforme a discretização desejada. Para inserir as condições de contorno (carregamento, restrição de deslocamento, características dos materiais, entre outros) é necessário indicar no *software* que o problema estudado envolve mecânica dos sólidos, mais especificamente o caso Ansys Bidimensional. Na Figura 4, ilustra-se um exemplo de malha gerada no GID.

Figura 3 – Fluxograma do processo de otimização de uma estrutura



Fonte: Autor (2018)

Figura 4 – Malha gerada no GID



Fonte: Autor (2018)

Após adicionadas todas as condições, exporta-se um arquivo com extensão “.dat”, que contém todas as informações relevantes, tais como as coordenadas dos nós, conectividade de cada elemento, posição dos carregamentos e deslocamento restritos, módulo de elasticidade longitudinal, entre outros. Apresenta-se, na Figura 5, um trecho do arquivo exportado.

Figura 5 – Arquivo exportado pelo GID

```

Arquivo  Editar  Formatar  Exibir  Ajuda
N,      1,      0,      3,
N,      2,      1,      3,
N,      3,      0,      2,
N,      4,      1,      2,
N,      5,      0,      1,
N,      6,      2,      3,
N,      7,      1,      1,
N,      8,      2,      2,
N,      9,      2,      1,
N,     10,      0,      0,
N,     11,      3,      3,
N,     12,      1,      0,
N,     13,      3,      2,
N,     14,      2,      0,
N,     15,      3,      1,
N,     16,      3,      0,
CSYS,0
EX,1,  2.9e+06
GXY,1,  1.1e+07
NUXY,1,  0.32
ALPX,1,  6.6e-06
DENS,1,  0.283
MAT,1
REAL,1
ET,1,PLANE42,,,3
KEYOPT,1,3,1
TYPE,1
EN,1,12,7,5,10
EN,2,14,9,7,12
EN,3,16,15,9,14
EN,4,7,4,3,5

```

Fonte: Autor (2018)

3.4.2 Processo de otimização

Conforme mencionado, o programa de otimização topológica foi escrito em ambiente de programação MATLAB tomando-se como base os códigos desenvolvidos por Sousa Junior (2016) e Pereira (2017), sendo que os mesmos são baseados em Andreassen *et al.* (2011) e Huang e Xie (2010). Os parâmetros de otimização empregados foram determinados com análises feitas previamente combinadas com os resultados obtidos por estes autores.

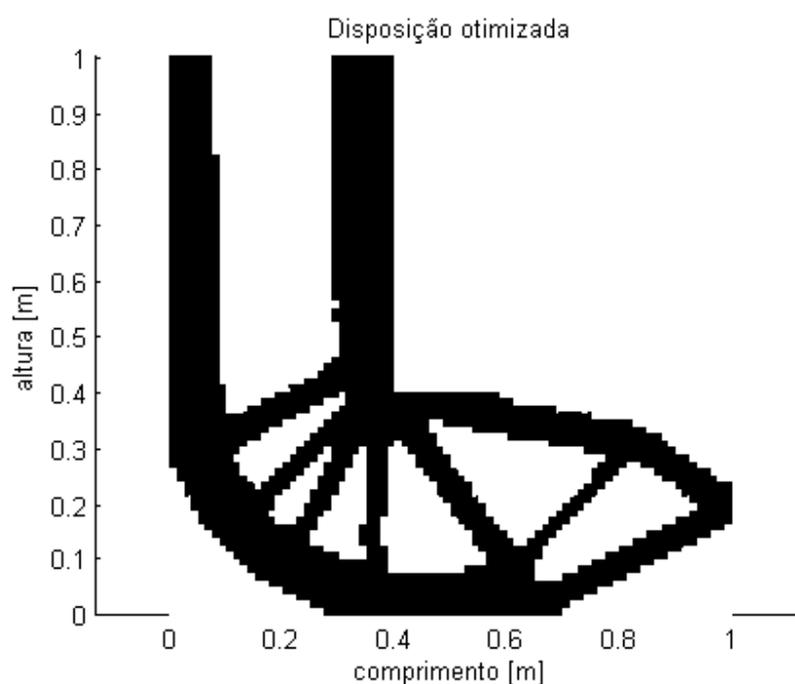
Inicialmente, são lidos os dados do arquivo que foi exportado na etapa de pré-processamento. Para o processo de otimização é definido o tipo de método desejado, *SIMP* ou *BESO*, a fração de volume que se deseja atingir, o raio do filtro, o fator de penalidade, p , o raio de rejeição, er e o módulo de elasticidade longitudinal.

A seguir prepara-se o filtro e o programa entra em um laço. Neste laço a primeira etapa é uma análise via Método dos Elementos Finitos, previamente monta-

se a matriz de rigidez global. Posteriormente, modificam-se os valores do filtro e um novo modelo é gerado, possuindo um certa fração do volume inicial. Se o novo volume obtido não atingiu a fração esperada o processo recomeça a partir da análise de elementos finitos. Caso o fração de volume desejada tenha sido atingida, verifica-se se a solução convergiu, isto é, se duas soluções consecutivas são próximas dentro de uma margem de erro.

Ao final do processo, plota-se a configuração final da estrutura. Na Figura 6, mostra-se um modelo otimizado através do método *BESO*.

Figura 6 – Estrutura otimizada via método *BESO*



Fonte: Autor (2018)

3.4.3 Pós-processamento

Uma vez finalizado o processo de otimização topológica, procede-se a analisar a distribuição de tensões e deformações na configuração final da estrutura. Como pode ser visto na Figura 6, apenas parte dos elementos da geometria inicial (Figura 4) permanece ao final do processo, tratam-se dos elementos mais importantes para a estrutura. Devido ao processo de eliminação dos elementos da malha inicial, se faz necessário renumerar os nós e os elementos, desconsiderando aqueles nos quais a densidade é nula. Somente após essa renumeração é que uma análise de tensões e deformações podem ser feitas, já que as rotinas empregadas

para análises de tensão/deformação exigem somente os elementos que permanecem na estrutura.

Para o presente trabalho, considera-se a análise bidimensional de problemas no Estado Plano de Tensões (EPT) no âmbito de elasticidade linear. Para o estudo emprega-se o elemento quadrilátero isoparamétrico linear. A equação que descreve a relação entre deformação específica (ε_x , ε_y e ε_{xy}) e tensão (σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy}) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho + 2\mu & \rho & 0 \\ \rho & \rho + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

onde ρ e μ são os coeficientes de Lamé.

Os coeficientes de Lamé estão relacionados ao módulo de Young e coeficiente de Poisson pelas expressões:

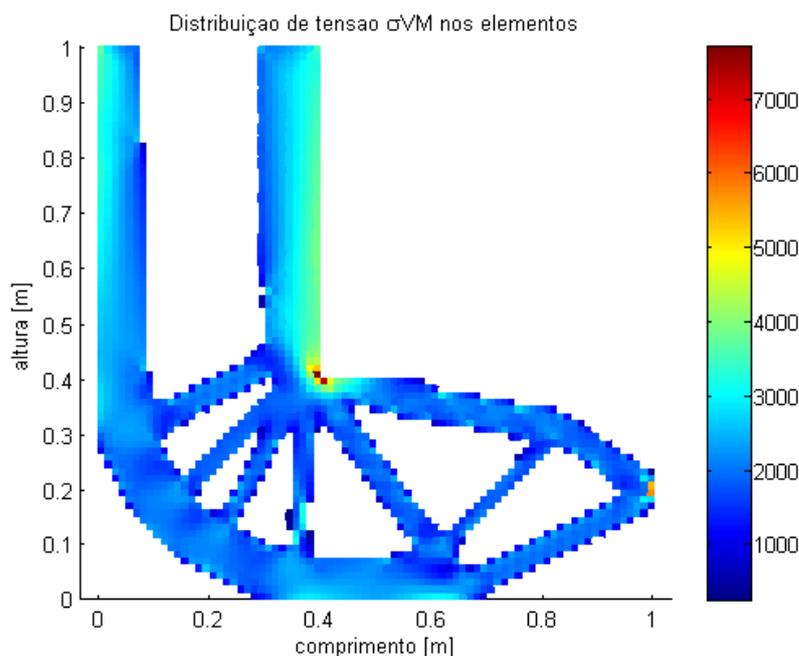
$$\rho = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (3.41)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.42)$$

em que E é o módulo de elasticidade (módulo de Young), ν é o coeficiente de Poisson, e G é o módulo de elasticidade transversal. Na Figura 7, apresenta-se um exemplo de distribuição de tensão σ_{VM} na estrutura otimizada pelo método *BESO*.

No método *SIMP*, a densidade de cada elemento varia de 0 a 1. Para a análise de tensões, adotou-se como elemento sólido aquele cuja densidade final fosse maior que 0,6. Desse modo, foi possível comparar as tensões pelos dois métodos.

Figura 7 – Distribuição de tensão do modelo otimizado



Fonte: Autor (2018)

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nos próximos itens, apresentam-se os problemas estudados e os resultados obtidos em cada caso para os métodos de otimização topológica *SIMP* e *BESO*. Para isso, utilizam-se exemplos presentes na literatura, permitindo a comparação com os resultados obtidos com o programa desenvolvido no presente trabalho. Conforme visto em itens anteriores, além da estrutura otimizada o programa calcula o deslocamento máximo, a distribuição de tensões (σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy}), os deslocamentos e a distribuição de tensões de von Mises (σ_{VM}).

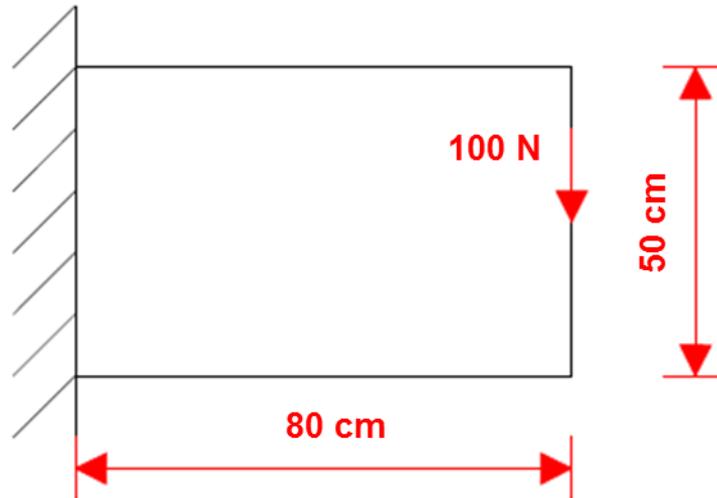
Para todos os exemplos analisados, foram considerados como parâmetros para resolução via método de otimização topológica *BESO* e *SIMP*: razão evolucionária de 2%, penalidade $p = 3$ e $r_{\min} = 2$ cm.

4.1 Problema da viga em balanço curta

Na Figura 8, ilustra-se o primeiro exemplo considerado para a otimização da rigidez, sendo retirado de Huang e Xie (2010). A viga em balanço curta, ou *short cantilever beam*, apresenta 80 cm de comprimento, 50 cm de altura e 1 cm de espessura. Uma força vertical de 100 N é aplicada no centro da extremidade livre. Adotaram-se o módulo de elasticidade longitudinal de 100 GPa e o coeficiente de Poisson de 0,3. Como feito por Huang e Xie (2010), deseja-se atingir a fração de

volume de 50% do domínio original. No pré-processamento, considerou-se para o domínio de projeto uma malha uniforme de 80 x 50 elementos.

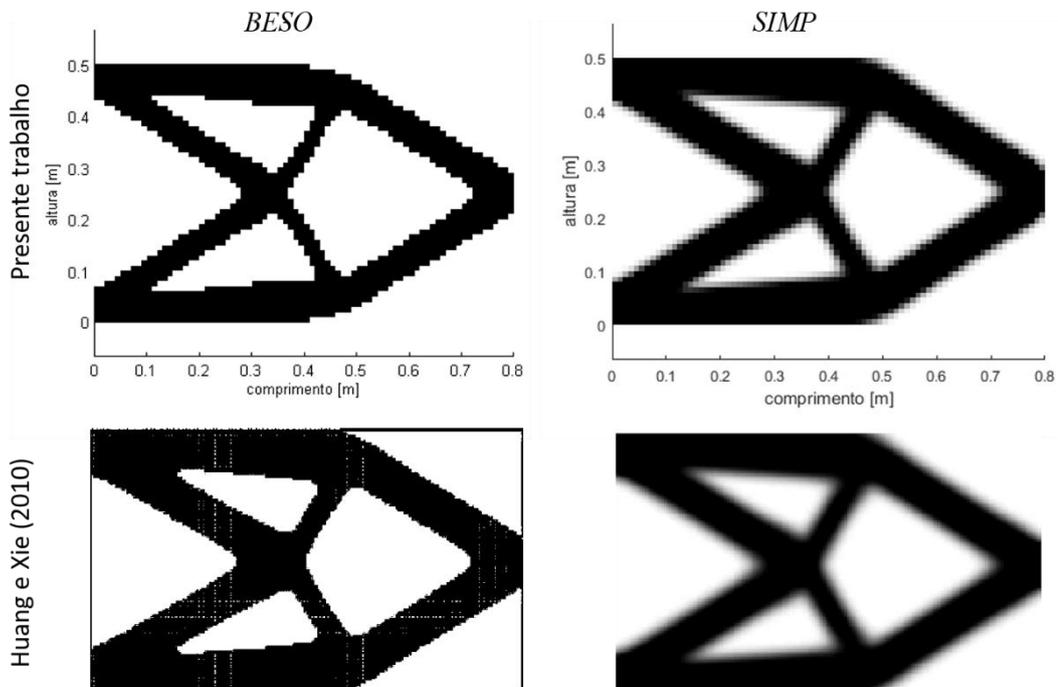
Figura 8 – Dimensões de projeto, condições de carregamento e contorno do balanço



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 9, apresentam-se os resultados da otimização via os métodos *BESO* e *SIMP*. Na mesma figura estão os resultados obtidos por Huang e Xie (2010) para comparação direta.

Figura 9 – Disposição otimizada do balanço curto

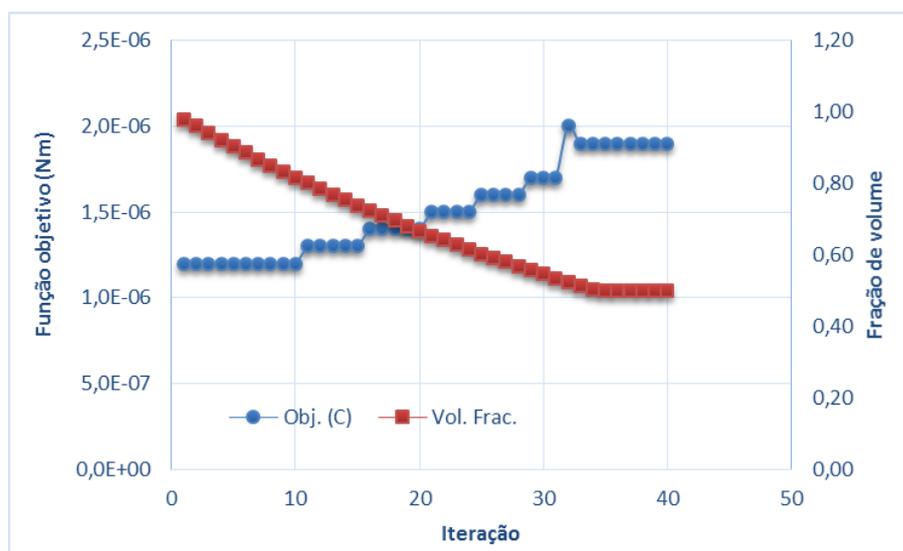


Fonte: Autor (2018)

Pode-se observar que os resultados dos métodos *BESO* e *SIMP* obtidos no presente trabalho mostram uma boa concordância com os dados por Huang e Xie (2010), até mesmo nas regiões de densidade intermediária (*SIMP*), caracterizada por tons de cinza.

A evolução da solução (valor da função objetivo) em função do número de iterações para o método *BESO* apresenta-se na Figura 10. Além disso, visualiza-se o valor a fração de volume da estrutura em função do número de iterações. Note que a função objetivo tende a aumentar conforme a fração do volume diminui, tendo em vista que elementos estão sendo retirados da estrutura, diminuindo sua rigidez e aumentando a flexibilidade, ou seja, a energia de deformação. Na iteração 35 a fração de volume foi atingida (50%), no entanto, as iterações continuam porque também é necessário atingir o critério de convergência da solução (ver itens 3.2 e 3.3) na iteração 40.

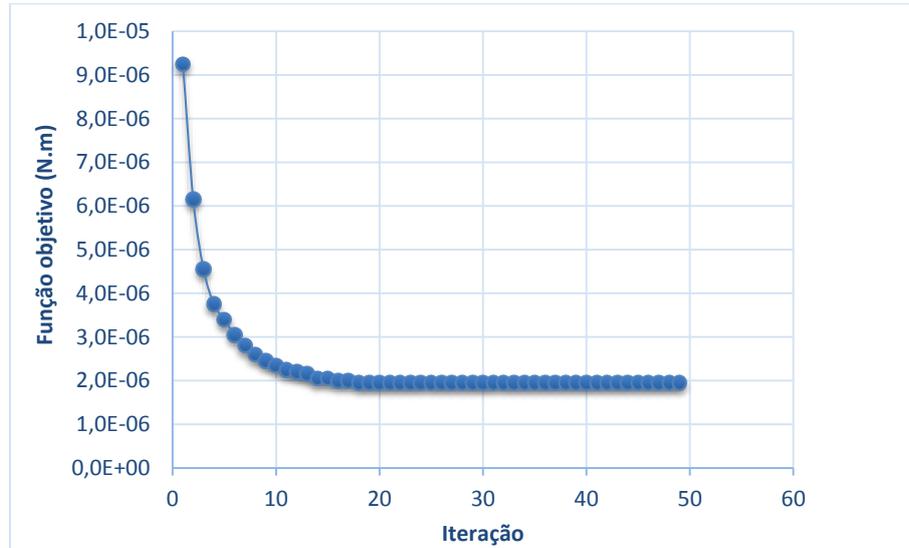
Figura 10 – Evolução da solução do balanço curto com o método *BESO*



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 11, apresenta-se o processo de evolução da solução para o método *SIMP*. No caso deste método, todos os elementos do domínio começam com densidade igual a fração de volume desejada, aumentando ou diminuindo em função da importância do elemento para a rigidez da estrutura, mas sempre mantendo um volume total igual ao desejado. Por conta disso, a função objetivo tende a diminuir a cada iteração, pois sua rigidez aumenta. Os valores finais da função objetivo nos métodos *BESO* e *SIMP* foram $1,90 \cdot 10^{-6}$ N.m e $1,95 \cdot 10^{-6}$ N.m, respectivamente.

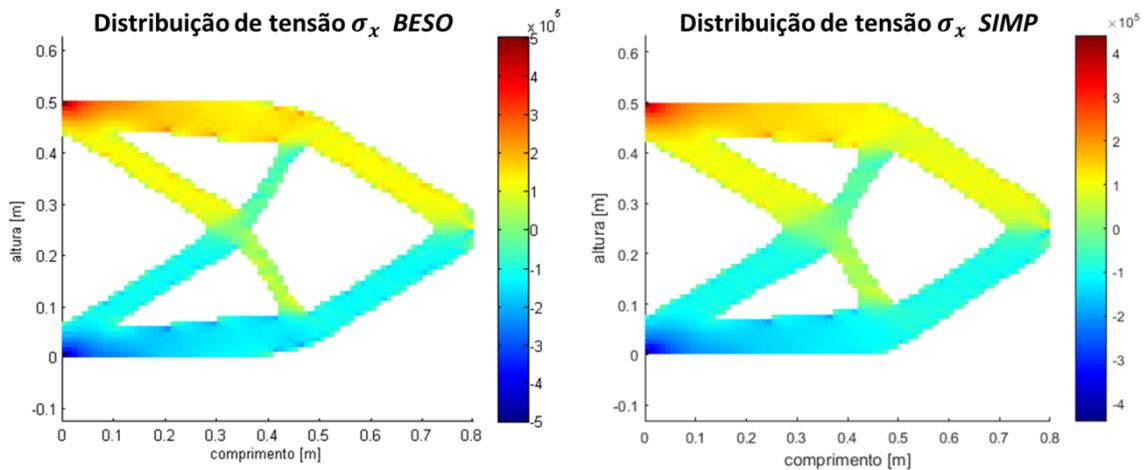
Figura 11 – Evolução da solução do balanço curto com o método *SIMP*



Fonte: Autor (2018)

Na etapa de pós-processamento, analisa-se o modelo estrutural otimizado com o programa descrito no item 3.4.3. Na Figura 12, apresentam-se as tensões horizontais, direção x, que agem nas duas estruturas otimizadas. Pode-se observar, que a parte superior das duas peças estão tracionadas, enquanto que a região inferior está sob compressão.

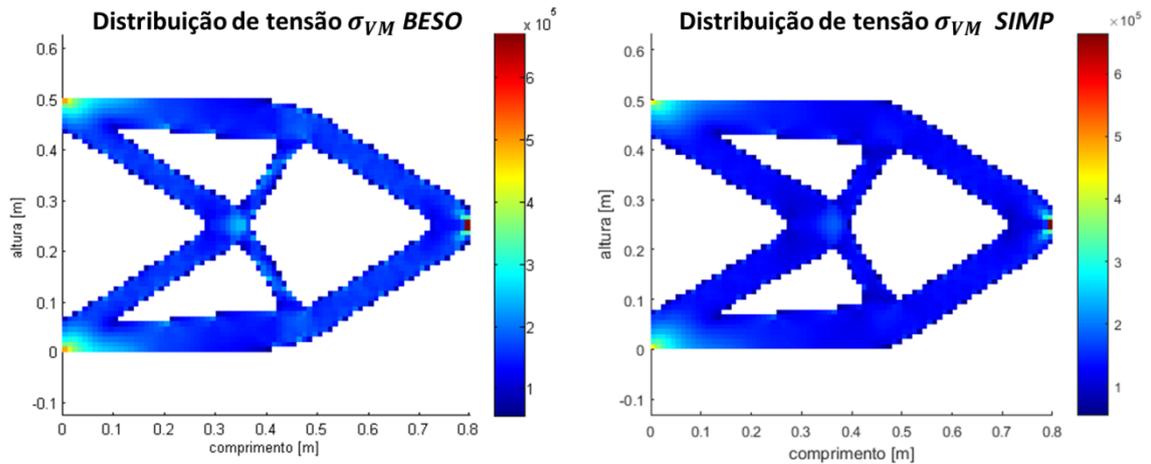
Figura 12 – Distribuição de tensão na direção x nas soluções finais



Fonte: Autor (2018)

A distribuição da tensão de von Mises para os dois métodos de otimização, *BESO* e *SIMP*, mostra-se na Figura 13. As maiores tensões são observadas no ponto de aplicação da carga concentrada e nas extremidades da borda, variando entre 400 e 600 kPa.

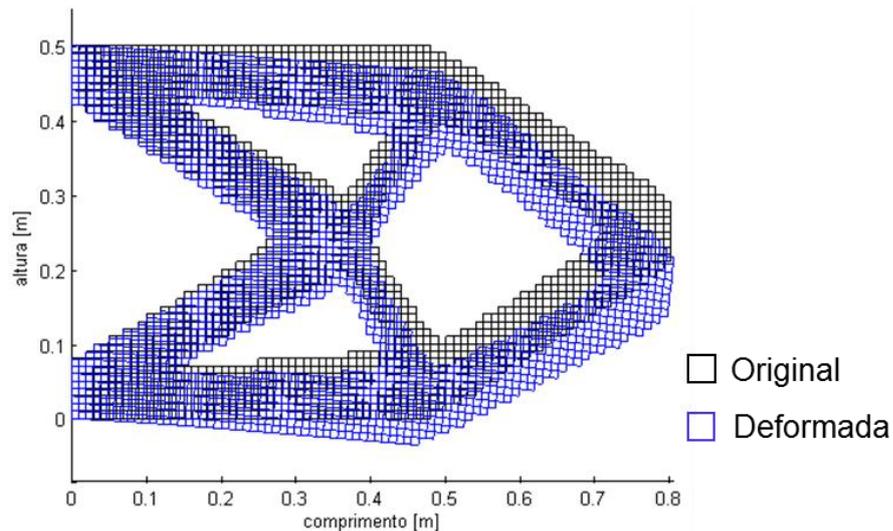
Figura 13 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 14, ilustra-se a deformação da estrutura otimizada pelo método de otimização *BESO*. Ao deslocamento da estrutura otimizada aplica-se um fator de escala, tornando perceptível a deformada. A deformação máxima para as estruturas obtidas pelos métodos *BESO* e *SIMP* foram $-3,76 \cdot 10^{-4}$ cm e $-3,86 \cdot 10^{-4}$ cm para baixo, respectivamente.

Figura 14 – Deformação dos elementos do balanço curto otimizado

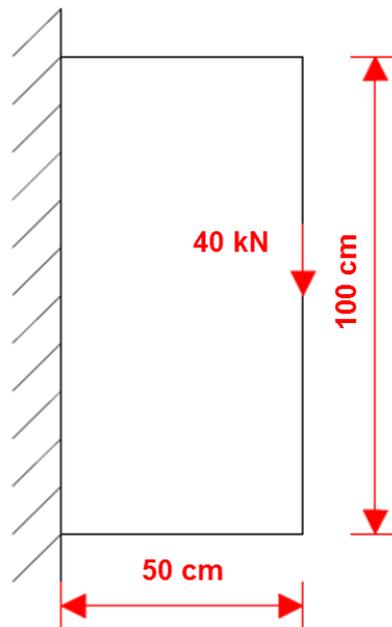


Fonte: Autor (2018)

4.2 Problema de duas barras

Na Figura 15, mostra-se o domínio de projeto e as condições de carregamento do segundo exemplo estudado. Conhecido como exemplo das duas barras, foram considerados os mesmos parâmetros de Wang *et al.* (2003), sendo o comprimento igual a 50 cm, 100 cm de altura e espessura de 1 cm. No centro à direita é aplicada uma força vertical de 40 kN. Adotou-se um coeficiente de Poisson igual a 0,3 e o módulo de Young de 210 GPa. Deseja-se atingir a fração de volume de 30% do domínio original. O domínio de projeto foi discretizado em uma malha uniforme de 50 x 100 elementos.

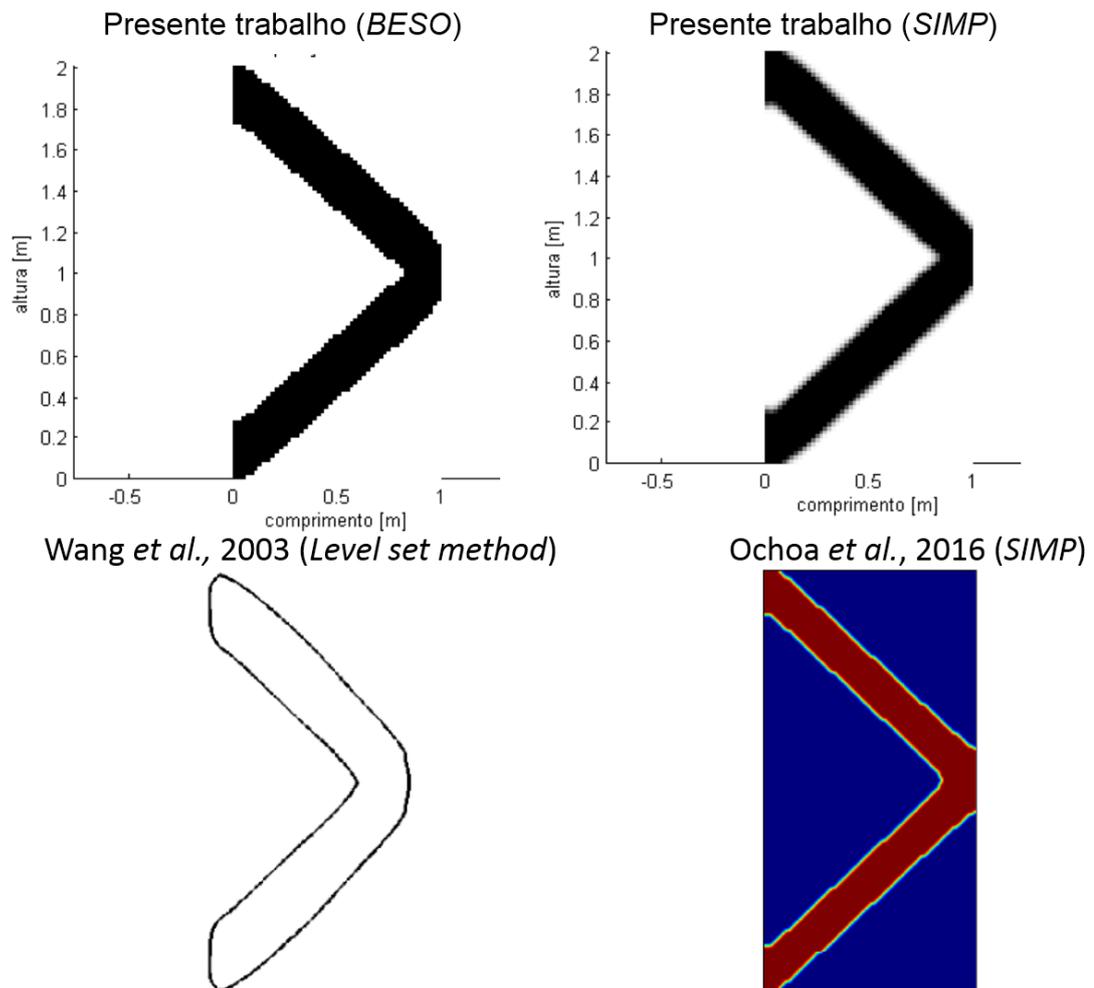
Figura 15 – Dimensões de projeto, condições de carregamento e contorno



Fonte: Autor (2018)

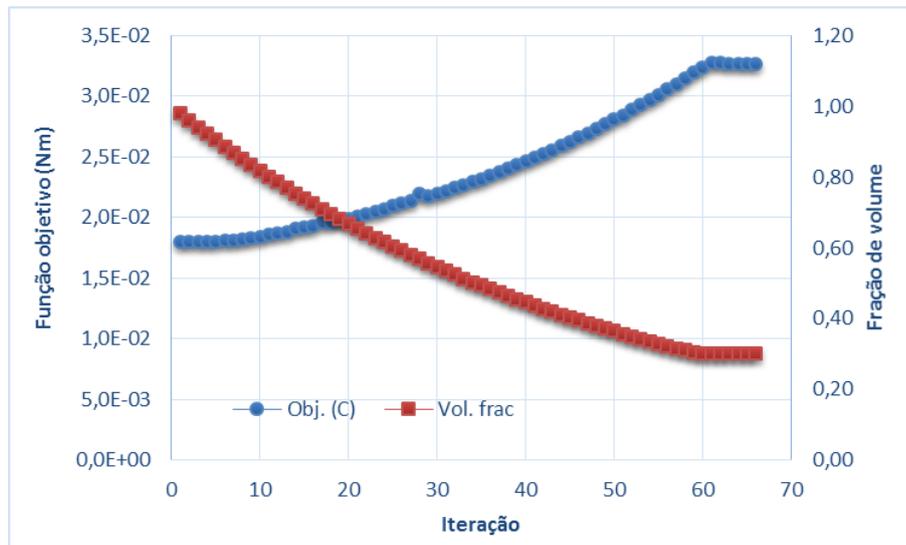
Na Figura 16, apresenta-se o resultado da otimização topológica via *BESO* e *SIMP*, além dos resultados obtidos por Wang *et al.* (2003) e Ochoa *et al.* (2016). Nota-se que as soluções obtidas são próximas entre si. É importante destacar que no resultado de Ochoa *et al.* (2016) a densidade do material varia de zero, representado pela cor azul, até um, representado pela cor vermelha, possuindo fronteiras com densidade intermediária.

Figura 16 – Disposição otimizada para o problema de duas barras



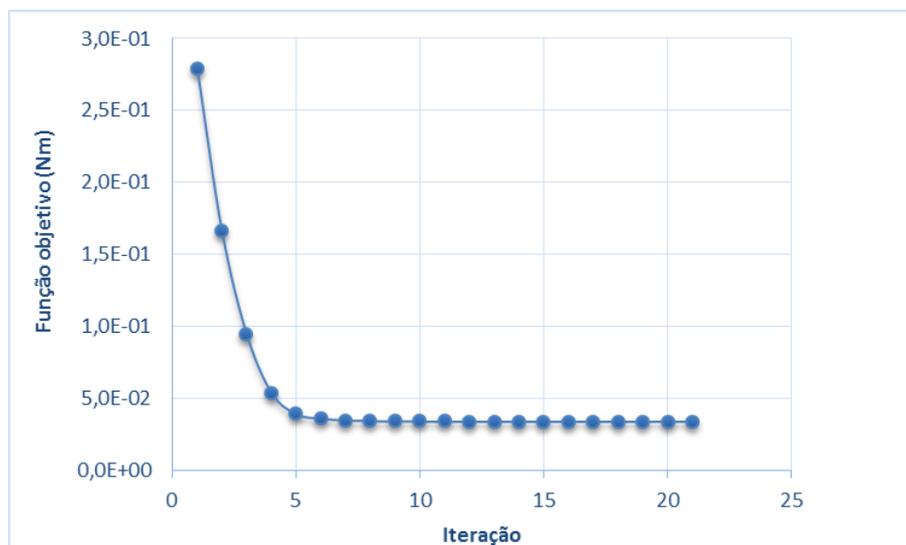
Fonte: Autor (2018)

Na Figura 17, mostra-se a evolução da solução e a fração de volume de acordo com o número de iterações para o caso *BESO*. A partir da iteração 60 a função objetivo sofre poucas mudanças, além do exemplo atingir 30% do volume original. A energia total de deformação na convergência é de, aproximadamente, $3,26 \cdot 10^{-2}$ N.m

Figura 17 – Evolução da solução com o método *BESO*

Fonte: Autor (2018)

Na Figura 18, apresenta-se o gráfico da função objetivo no caso do método *SIMP* em função do número de iterações. Pode-se observar, que a partir da iteração 5 a função varia muito pouco. Além disso, o método *SIMP* convergiu em bem menos iterações, atingindo $3,42 \cdot 10^{-2}$ N.m como solução da otimização. Ao comparar a função minimizada pelos dois métodos, percebe-se que os valores estão bem próximos, o que aumenta sua confiabilidade.

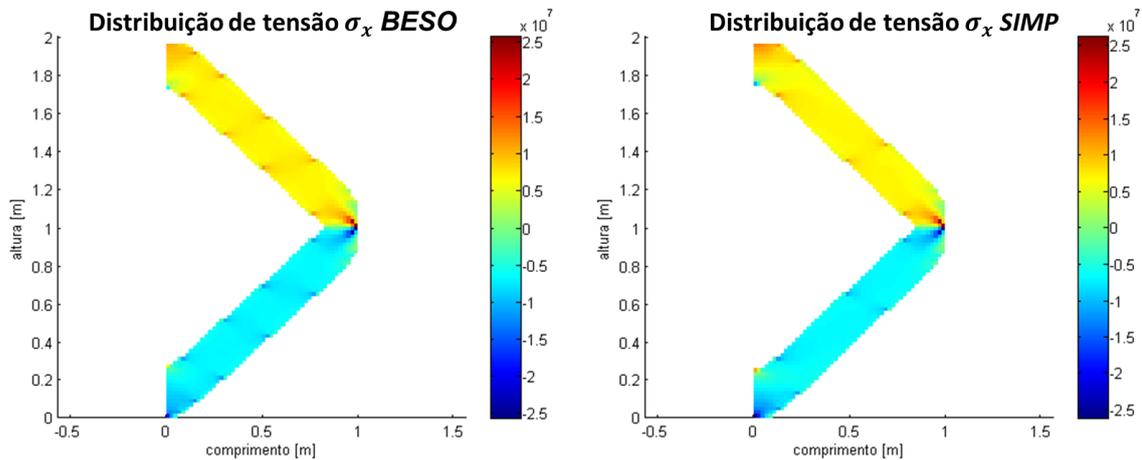
Figura 18 – Evolução da solução com o método *SIMP*

Fonte: Autor (2018)

Nas Figuras 19 e 20, mostram-se a distribuição de tensão na direção *x* e a tensão de von Mises. Percebe-se, no caso da Figura 19, que os resultados obtidos por ambos métodos são praticamente idênticos. Nota-se também que as tensões são inversamente simétricas a um eixo que passe em $y = 1$ m, isto é, valores

positivos na parte superior implicam em valores negativos em seu simétrico. Desse modo, a barra superior está tracionada, enquanto que a de baixo está comprimida. As tensões máximas em “x” ocorrem no ponto de aplicação da carga, com valores de 25,7 MPa e 26,2 MPa, respectivamente, para os métodos *BESO* e *SIMP*.

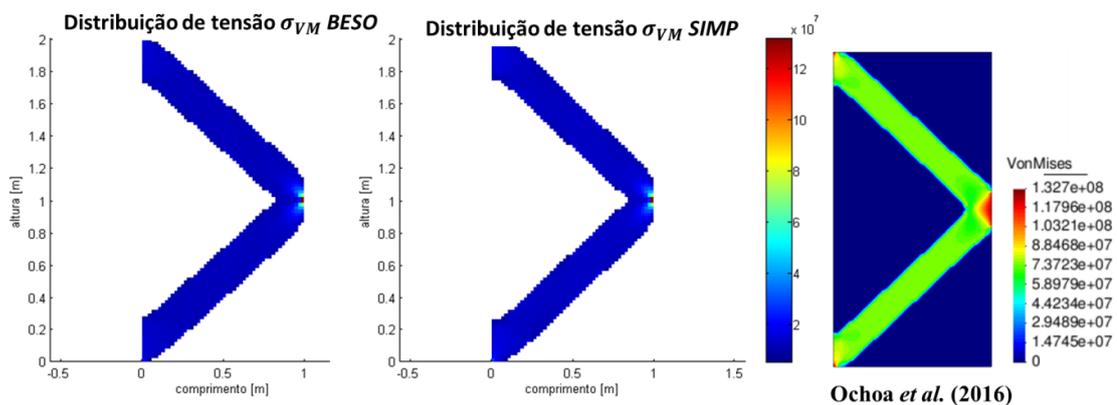
Figura 19 – Distribuição de tensão na direção x nas soluções finais



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 20, mostram-se as tensões de von Mises obtidas pelos dois métodos no problema otimizado e o resultado obtido por Ochoa *et al.* (2016). Como esperado, as tensões máximas ocorrem no ponto de aplicação da carga. Ochoa *et al.* (2016) obteve uma tensão máxima de von Mises igual a 132,7 MPa. Este resultado é próximo dos valores obtidos no presente trabalho, sendo 131,46 MPa com o método *BESO* e 131,53 MPa com o método *SIMP*.

Figura 20 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada

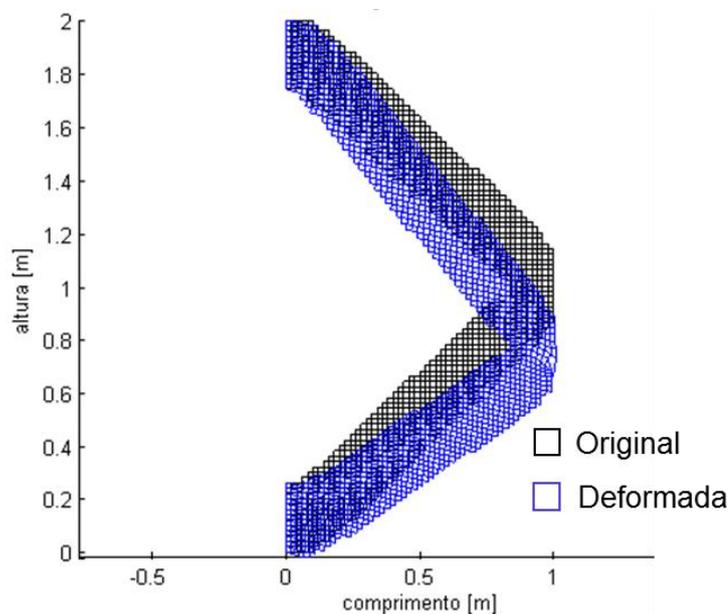


Fonte: Autor (2018)

Na Figura 21, ilustra-se o deslocamento da estrutura otimizada pelo método *BESO*, sendo aplicado um fator de escala para tornar possível visualizar a deformação. Note que o elemento onde a carga está aplicada sofre a maior

distorção. A deformação máxima para as estruturas obtidas pelos métodos *BESO* e *SIMP* foram 0,166 mm e 0,169 mm para baixo, respectivamente.

Figura 21 – Deformação dos elementos da estrutura final



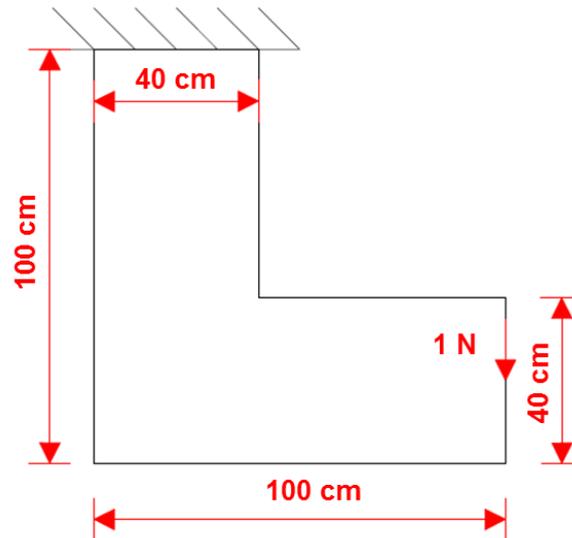
Fonte: Autor (2018)

4.3 Estrutura em "L"

Na Figura 22, apresenta-se as dimensões, bem como as condições de carregamento de um perfil em "L", *L-shape design*, analisado por Guo *et al.* (2011). O domínio do projeto não é retangular, por conta disso, não pode ser resolvido com os códigos originais de Huang e Xie (2010) e Andreassen *et al.* (2011). Porém, o código desenvolvido no presente trabalho é capaz de tratar com qualquer tipo de domínio, basta descrever no GID a malha e as condições de contorno e carregamento do problema. Na extremidade direita, bem ao centro, aplica-se uma carga de 1 N. Adota-se um coeficiente de Poisson igual a 0,3 e o módulo de Young de 1 Pa para os elementos sólido e 10^{-6} Pa para os elementos suavizados. Guo *et al.* (2011) não especifica a espessura da placa, daí adotou-se 1 cm. Deseja-se atingir a fração de volume de 30% do domínio original.

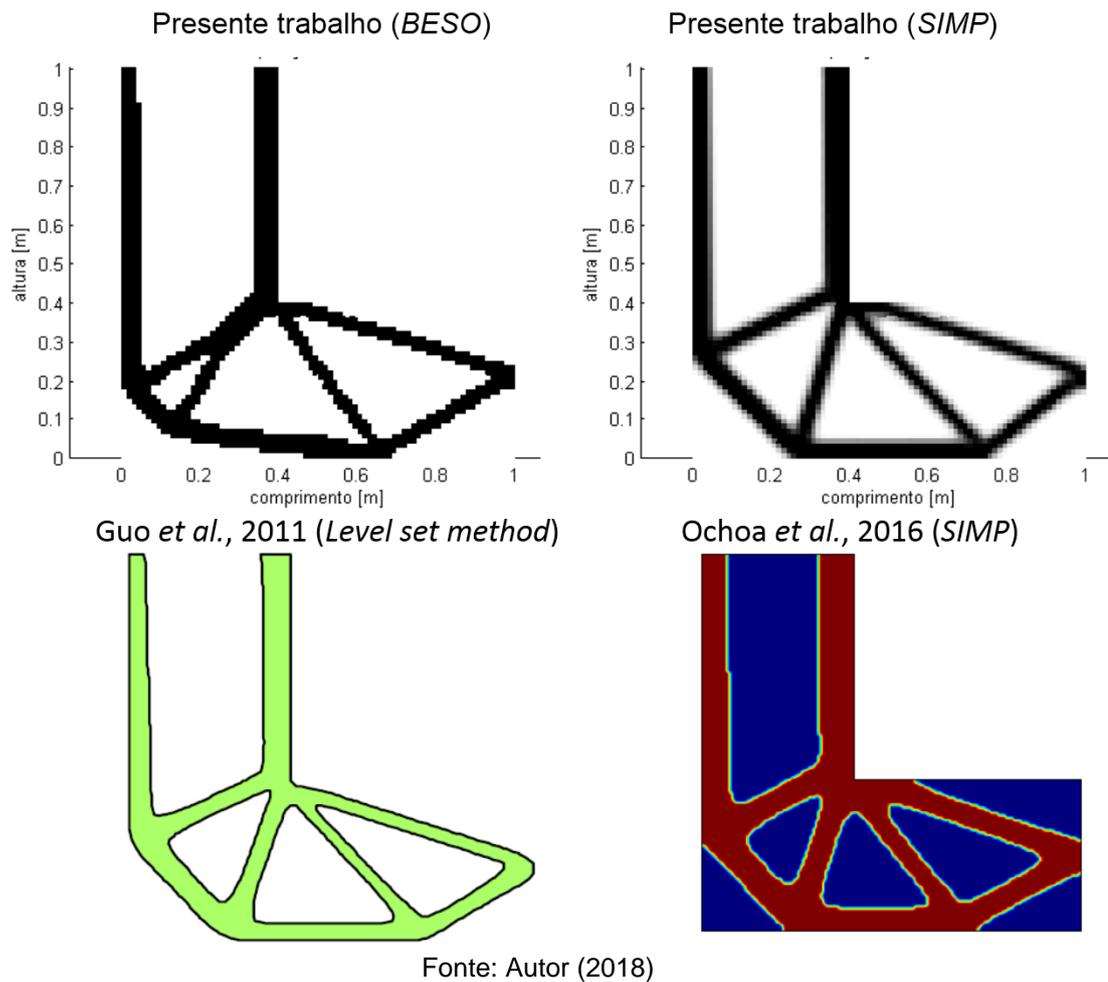
Para a discretização do domínio do projeto considera-se uma malha uniforme com 80 elementos nas arestas de 100 cm, 32 elementos nas arestas de 40 cm e 48 elementos nas arestas de 60 cm.

Figura 22 – Domínio de projeto, condições de carregamento e de contorno

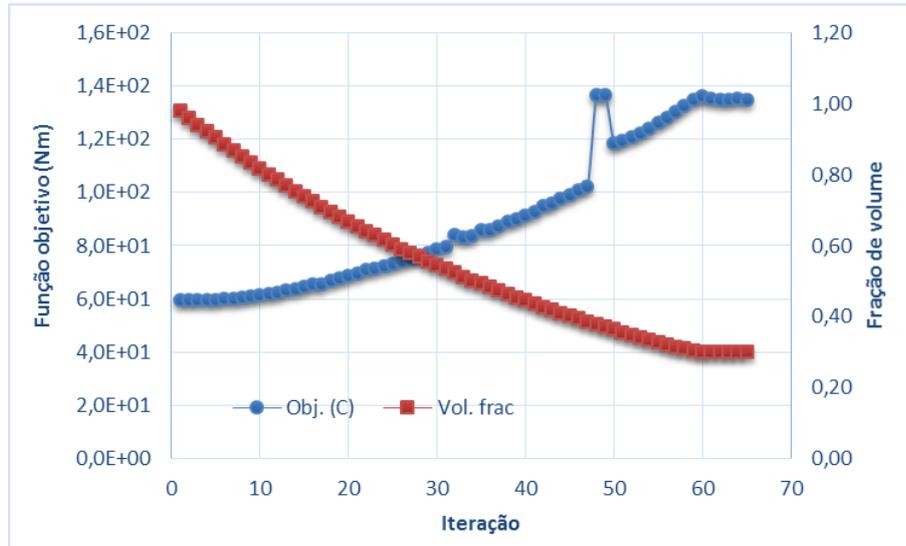


Fonte: Autor (2018)

Na Figura 23, mostram-se as geometrias otimizadas por ambos métodos e sua comparação com os resultados obtidos por Guo *et al.* (2011) e Ochoa *et al.* (2016). O modelo otimizado obtido pelo método *SIMP* é o que mais se aproxima dos exemplos da literatura. O exemplo obtido com o método *BESO* apresenta a barra do canto inferior esquerdo dividida.

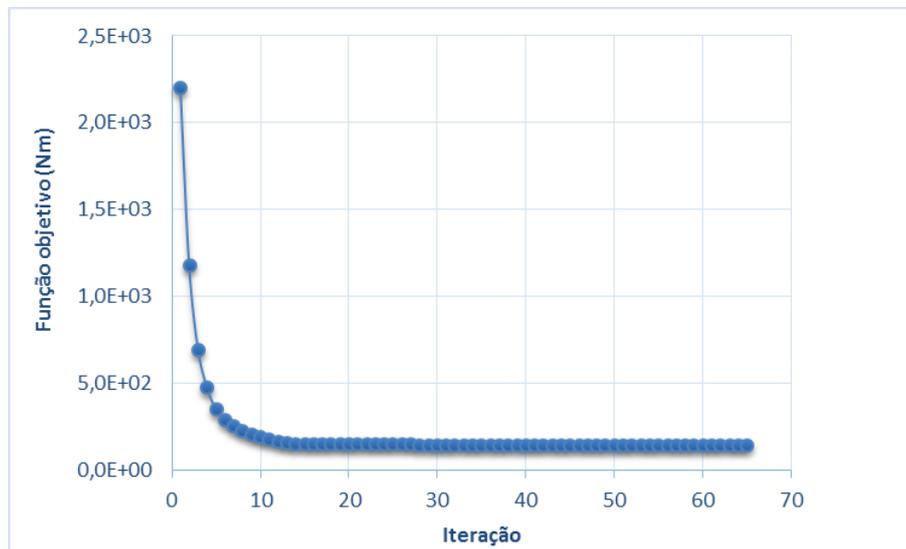
Figura 23 – Disposição otimizada do problema *L-shape*

Na Figura 24, ilustra-se o valor da função objetivo e a fração de volume para cada número de iteração do método *BESO*. Observa-se que a partir da iteração 60 a função objetivo sofre poucas mudanças, além do exemplo atingir 30% do volume original. A energia total de deformação na convergência é aproximadamente 134,8 N.m. Outro ponto interessante desse gráfico é o pico na iteração 48, que indica um aumento súbito na energia de deformação. Fisicamente, implica que houve a retirada de algum elemento importante para a estrutura, como uma barra, mas que na iteração seguinte retornou à estrutura, reduzindo a função objetivo.

Figura 24 – Evolução da solução com o método *BESO*

Fonte: Autor (2018)

De modo similar, na Figura 25 apresentam-se os valores da função objetivo em função do número de iterações para o método *SIMP*. Observa-se que a partir da iteração 12 a função varia muito pouco, mas só converge na iteração 65. Após a otimização, o valor da energia de deformação foi 144,46 N.m.

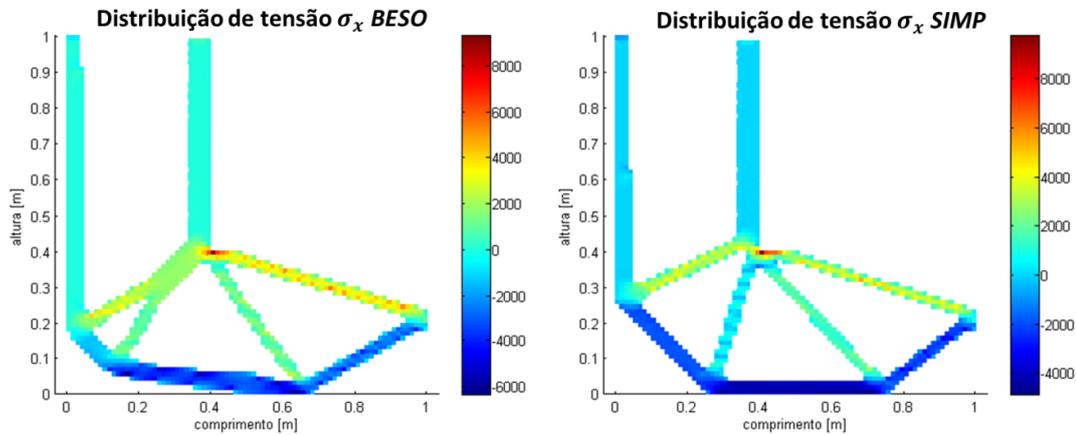
Figura 25 – Evolução da solução com o método *SIMP*

Fonte: Autor (2018)

Na Figura 26, mostram-se as distribuições de tensões na direção “x” para os métodos *BESO* e *SIMP*. Nota-se que o ponto de tensão máxima ocorre na região de interseção das duas arestas internas, não na região de aplicação da carga. Esta região forma uma concentração de tensões e tende a romper com angulação de 45°. Destaca-se também que as barras inferiores em ambos casos estão todas

comprimidas. As tensões máximas para os métodos *BESO* e *SIMP* são 9,29 kPa e 9,74 kPa, respectivamente.

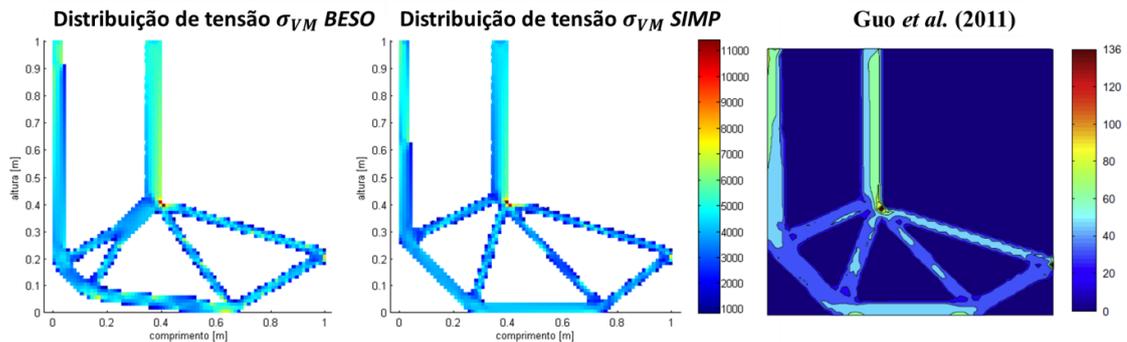
Figura 26 – Distribuição de tensão na direção x



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 27, mostram-se as tensões de von Mises para as estruturas finais obtidas pelos métodos *BESO* e *SIMP*, e sua comparação com o resultado obtido por Guo *et al.* (2011). As distribuições de tensões para ambos métodos são bem próximas entre si, obtendo-se as tensões máximas de von Mises de 9,93 kPa para o método *BESO* e 11,4 kPa para o método *SIMP*. Da comparação qualitativa com Guo *et al.* (2011), pode-se concluir que as distribuições de tensão são muito próximas em todos os casos.

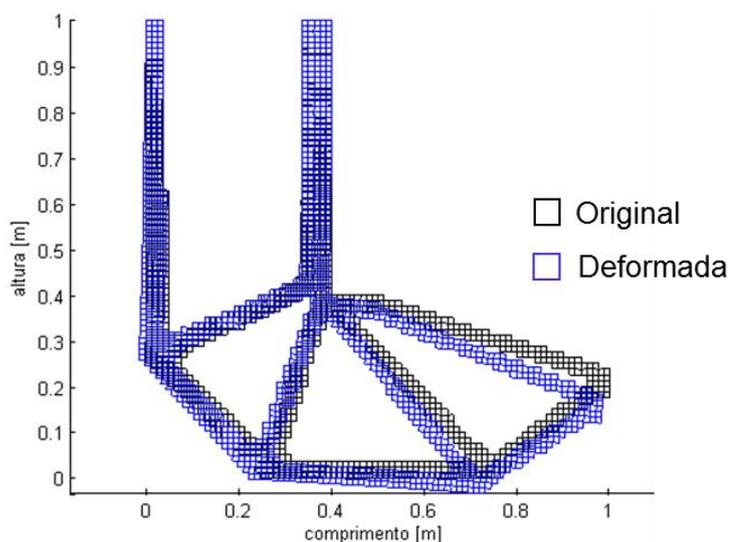
Figura 27 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 28, mostra-se a deformação da estrutura otimizada pelo método *SIMP*. Como emprega-se um módulo de elasticidade longitudinal igual a 1 Pa, as deformações são grandes em comparação com os resultados de uma peça real. Sendo assim, a Figura 27 serve apenas para indicar a tendência que a peça tem de se deformar mais no ponto de aplicação da carga, mesmo sem este ser o local de maior tensão.

Figura 28 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método *SIMP*

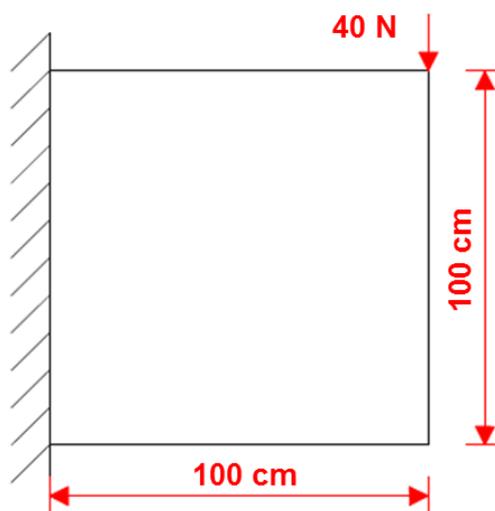


Fonte: Autor (2018)

4.4 Problema da mão francesa

Na Figura 29, mostra-se o exemplo conhecido como mão francesa. Os dados do modelo analisado foram obtidos de Neches e Cisilino (2008), sendo uma placa de 1 m de altura, 1 m de comprimento e 1 cm de espessura. Na extremidade direita superior aplica-se uma carga de 40 N, considerando ainda o coeficiente de Poisson igual a 0,3 e o módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa. O objetivo é encontrar uma estrutura com 30% do volume inicial. O domínio de projeto foi discretizado em uma malha uniforme de 80 x 80 elementos.

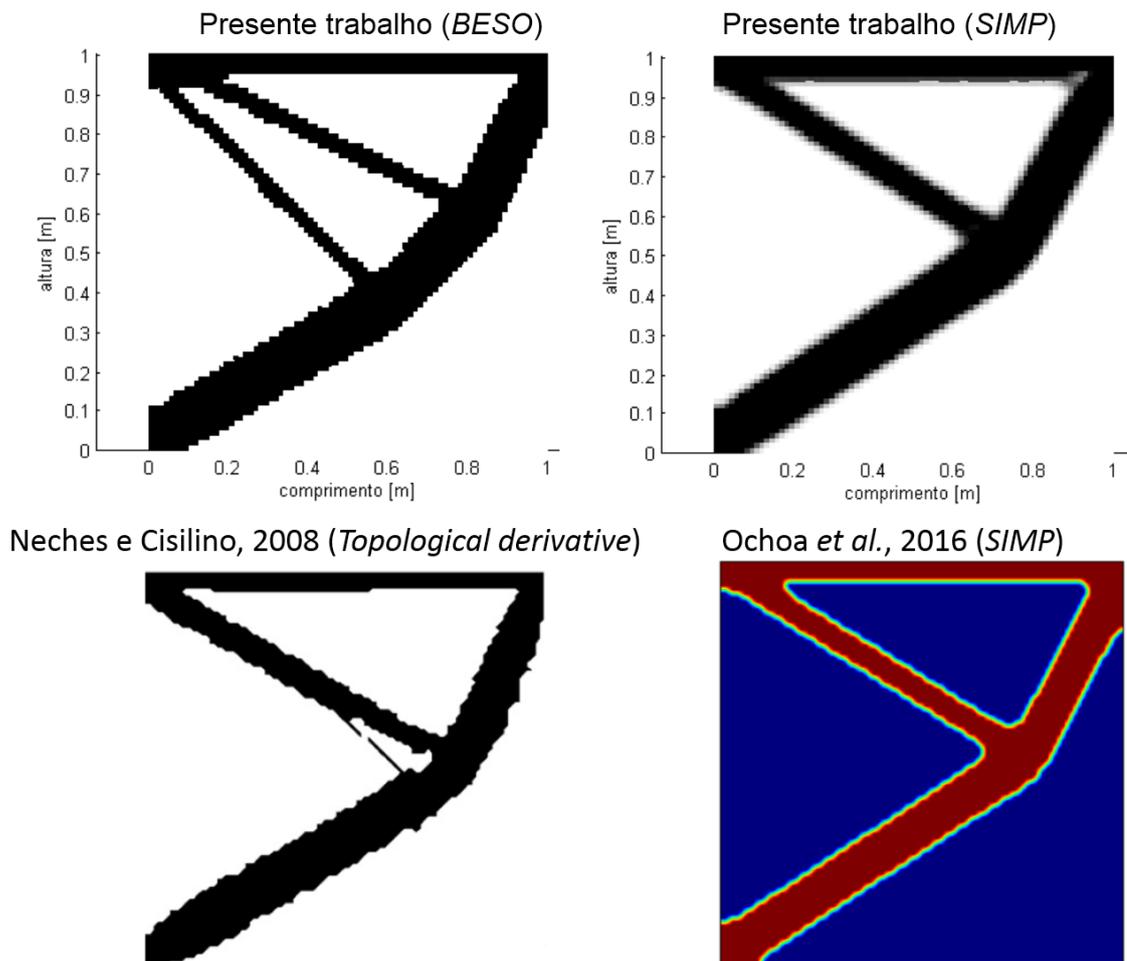
Figura 29 – Domínio de projeto, condições de carregamento e de contorno



Fonte: Autor (2018)

Os modelos otimizados pelos métodos *BESO* e *SIMP* e sua comparação com os resultados obtidos por Neches e Cisilino (2008) e Ochoa *et al.* (2016) podem ser vistos na Figura 30. Pode-se observar que o modelo otimizado obtido pelo método *SIMP* é muito próximo dos resultados de Neches e Cisilino (2008) e Ochoa *et al.* (2016). Em contrapartida, o modelo gerado pelo método *BESO* apresenta duas barras em lugar de somente uma.

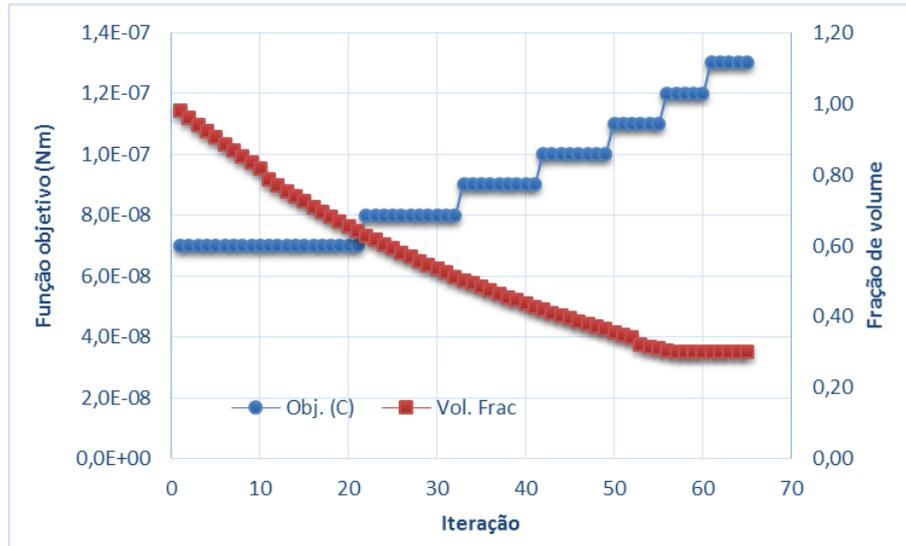
Figura 30 – Disposição otimizada do problema da mão francesa



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 31, ilustra-se o valor da função objetivo e a fração de volume em função do número de iterações do método *BESO*. A partir da iteração 60 a função objetivo sofre poucas mudanças, além do exemplo atingir 30% do volume original. A energia total de deformação na convergência é de, aproximadamente, $1,3 \cdot 10^{-7}$ N.m, valor pequeno devido ao alto módulo de elasticidade longitudinal, $E = 200$ GPa.

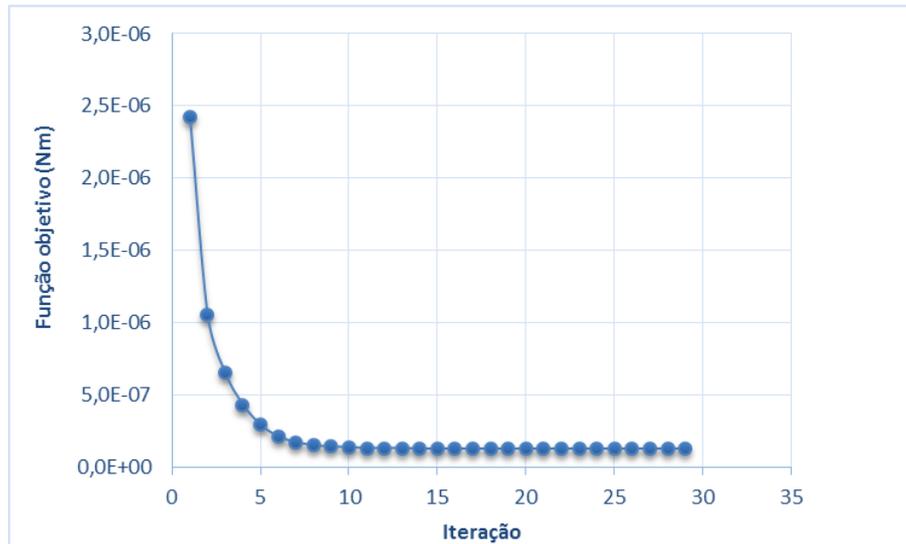
Figura 31 – Evolução da solução da mão francesa com o método *BESO*



Fonte: Autor (2018)

O gráfico que mostra a variação da função objetivo em função do número de iterações no método *SIMP*, apresenta-se na Figura 32. Observa-se, que a partir da iteração 7 a variação é muito pequena. Após a otimização, o valor da energia de deformação foi $1,3 \cdot 10^{-7}$ N.m, igual ao método *BESO*, para 2 algarismos significativos.

Figura 32 – Evolução da solução da mão francesa com o método *SIMP*

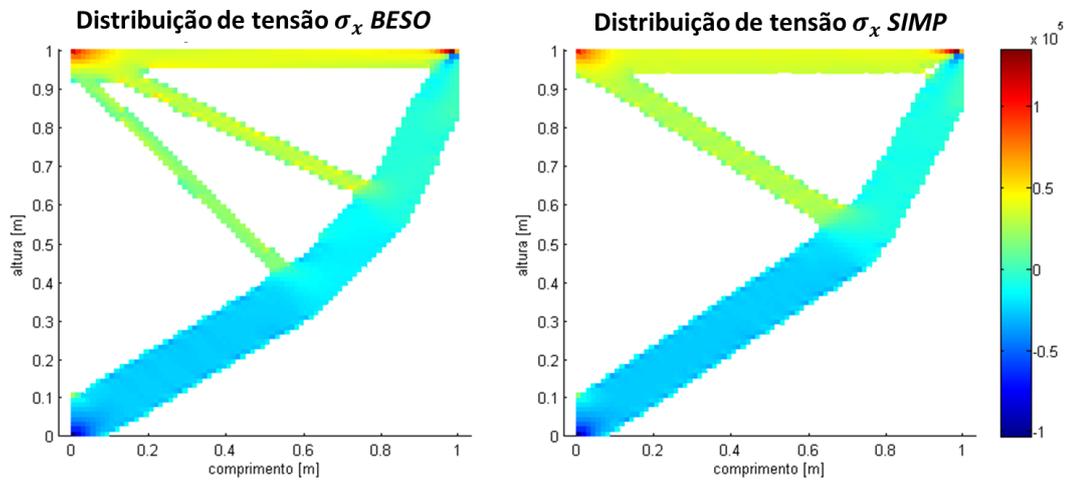


Fonte: Autor (2018)

Na Figura 33, comparam-se as tensões na direção “x” para os métodos de otimização topológica *BESO* e *SIMP*. Similar ao que acontece no problema *short cantilever beam*, a tensão máxima está no ponto de aplicação da carga. No encontro da peça com o engaste também existe altas tensões de compressão na parte inferior

e tração na parte superior. Os valores máximos em módulo para as tensões nos métodos *BESO* e *SIMP* foram: 133,0 kPa e 134,1 kPa, respectivamente.

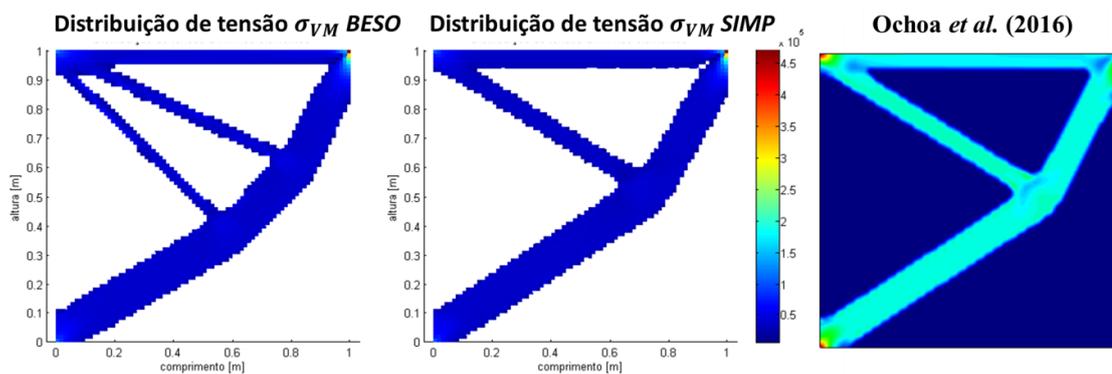
Figura 33 – Distribuição de tensão na direção x



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 34, apresentam-se as tensões de von Mises nas duas estruturas otimizadas pelos métodos *BESO*, *SIMP* e sua comparação com os resultados dados por Ochoa *et al.* (2016). As tensões máximas de von Mises foram 469,2 kPa para o método *BESO* e 469,3 kPa para o método *SIMP*. Para o exemplo de Ochoa a tensão máxima foi 219 MPa.

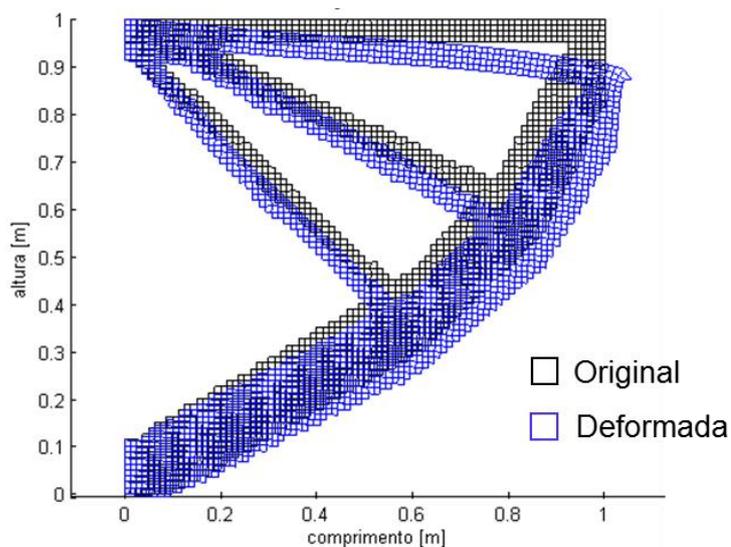
Figura 34 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada



Fonte: Autor (2018)

Analogamente aos exemplos anteriores, na Figura 35 mostra-se a estrutura original e deformada. A deformada foi obtida através do método *BESO*, mas espera-se que o comportamento da estrutura otimizada segundo o método *SIMP* seja muito similar. Os valores máximos de deformação foram $-6,36 \cdot 10^{-4}$ mm e $-6,52 \cdot 10^{-4}$ mm para os métodos *BESO* e *SIMP*, respectivamente.

Figura 35 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método *BESO*

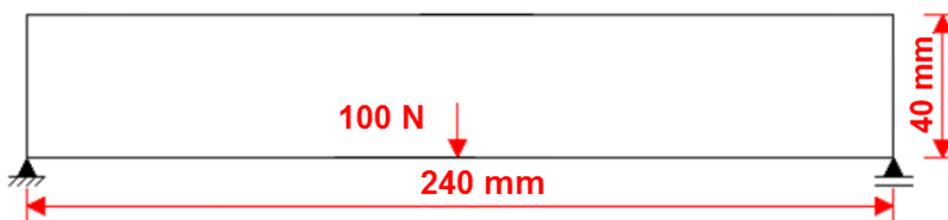


Fonte: Autor (2018)

4.5 Viga MBB

O exemplo da viga MBB (Messerschmitt-Bölkow-Blohm) é muito conhecido e trata-se de um exemplo tradicional nos problemas de otimização topológica bidimensional. Replica-se o exemplo apresentado por Huang e Xie (2010), como visto na Figura 36. A viga MBB é isostática e possui 240 mm de comprimento, 40 mm de altura e 1 mm de espessura. A carga $F = 100\text{ N}$ é aplicada exatamente no centro da viga MBB, na face inferior. Emprega-se o coeficiente de Poisson igual a 0,3 e o módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa. Para este exemplo, deseja-se que a estrutura final possua 50% do volume original. O domínio foi discretizado em uma malha uniforme de 240 x 40 elementos.

Figura 36 – Domínio de projeto, condições de carregamento e de contorno

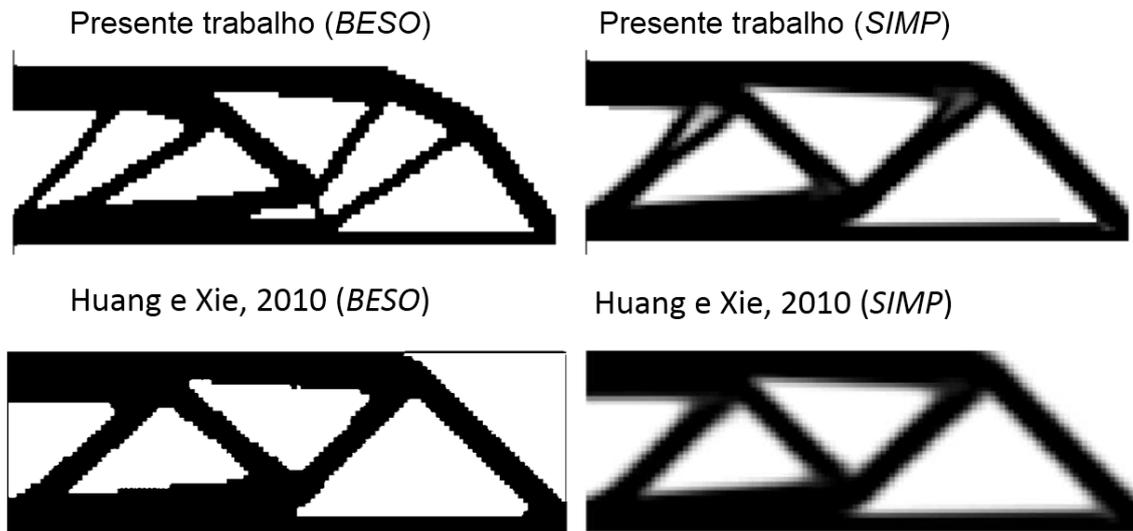


Fonte: Autor (2018)

Na Figura 37, mostram-se as soluções para os modelos otimizados pelos métodos *BESO* e *SIMP*, bem como os resultados obtidos por Huang e Xie (2010) com os métodos *BESO* e *SIMP*. Como o problema é simétrico, resolve-se apenas a

metade direita de cada exemplo. Nota-se que o método *BESO* do presente trabalho se distancia das demais soluções.

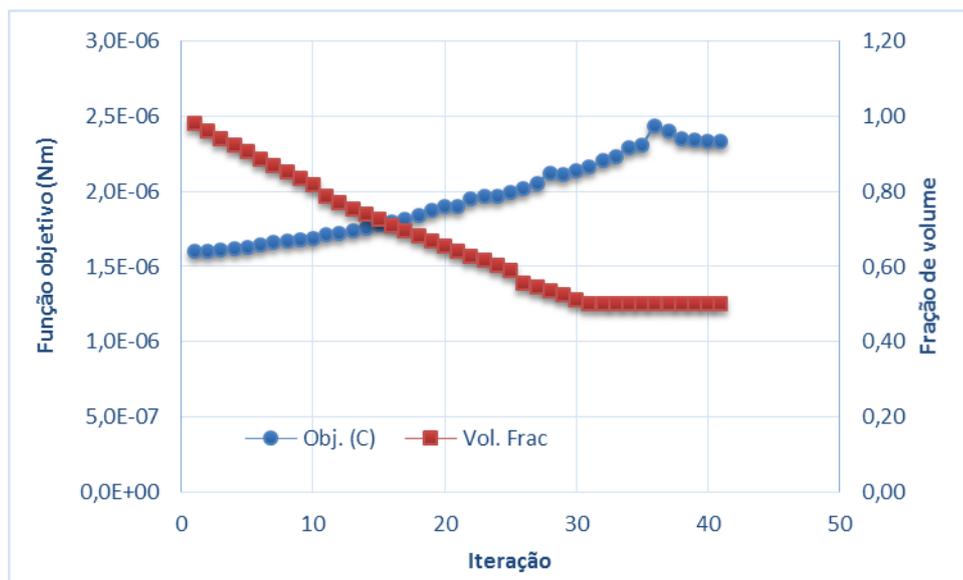
Figura 37 – Disposição otimizada da viga MBB



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 38, apresenta-se para o método *BESO* o comportamento da função objetivo e da fração de volume em relação ao número de iterações. O volume desejado é atingido a partir da iteração 32, mas só converge na 40ª iteração. A energia total de deformação na convergência é de, aproximadamente, $2,33 \cdot 10^{-6}$ N.m.

Figura 38 – Evolução da função objetivo com o método *BESO*

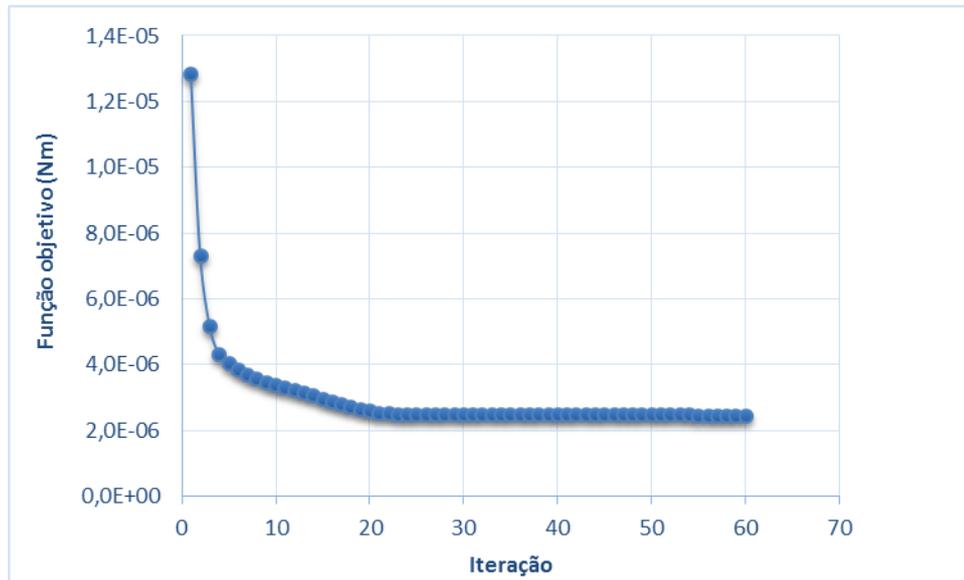


Fonte: Autor (2018)

Na Figura 39, mostra-se o gráfico da função objetivo em relação ao número de iterações para o método *SIMP*. Os valores variaram muito pouco a partir da 20ª

iteração. A estrutura otimizada, apresenta-se um valor de energia de deformação de $2,45 \cdot 10^{-6}$ N.m, praticamente igual ao valor obtido com o método *BESO*.

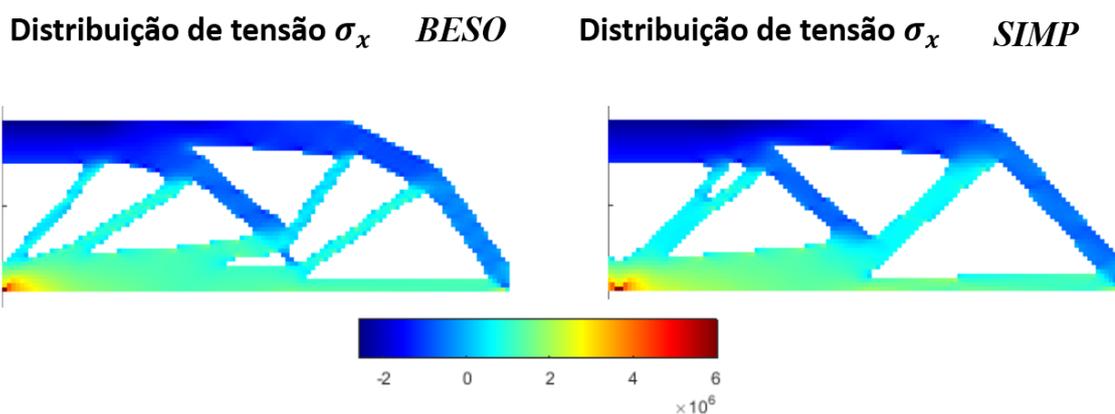
Figura 39 – Evolução da função objetivo com o método *SIMP*



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 40, comparam-se as tensões na direção “x” para os métodos de otimização topológica *BESO* e *SIMP*. As barras superiores estão sob compressão, enquanto que as inferiores estão sobre tração, com valores máximos ocorrendo nos apoios e no local de aplicação da carga. Os valores máximos em módulo para as tensões nos métodos *BESO* e *SIMP* foram: 6,02 MPa e 5,90 MPa, respectivamente.

Figura 40 – Distribuição de tensão na direção x na estrutura otimizada

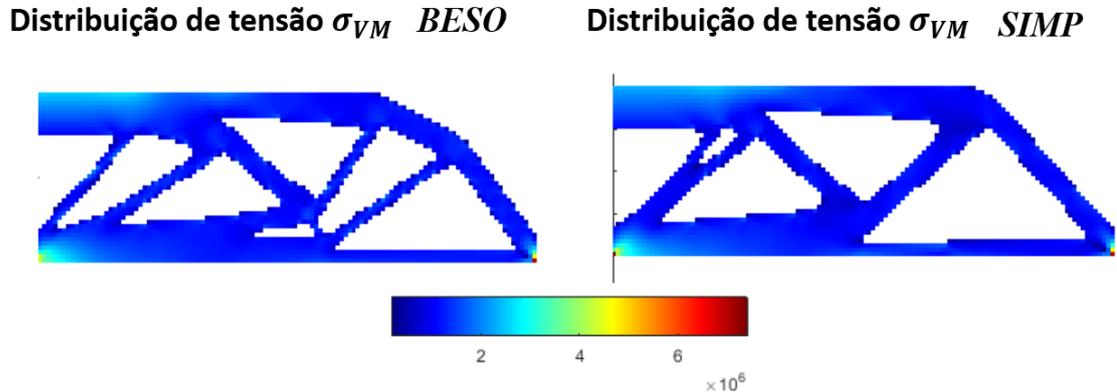


Fonte: Autor (2018)

As distribuições das tensões de von Mises para os dois métodos de otimização topológica são mostradas na Figura 41. Os maiores valores das tensões estão localizados nas regiões onde a carga está aplicada e nos apoios. As tensões

máximas de von Mises foram bem próximas, sendo estas 7,39 MPa e 7,34 MPa para os métodos *BESO* e *SIMP*, respectivamente.

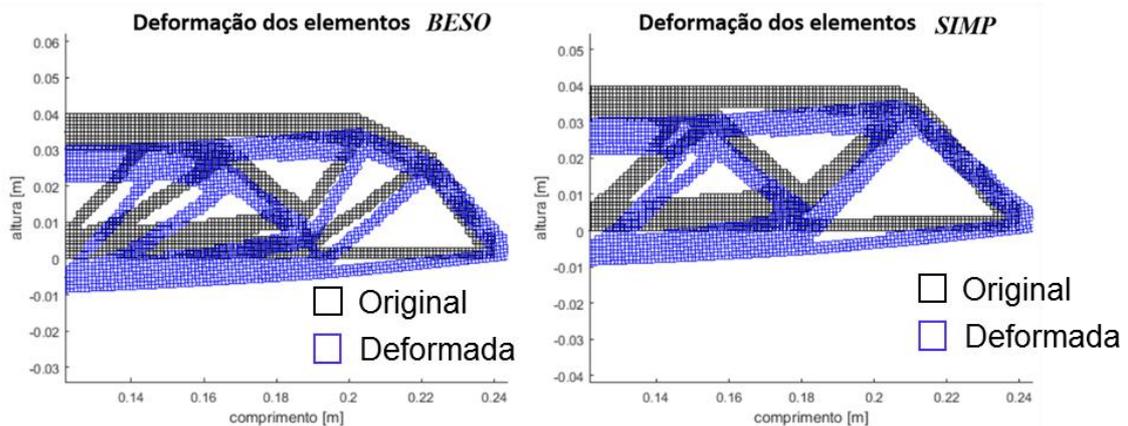
Figura 41 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 42, mostra-se a estrutura otimizada sem carregamento e deformada para os dois métodos, pois a estrutura final foi distinta entre si. Os valores máximos de deformação foram $-4,68 \cdot 10^{-3}$ mm e $-4,80 \cdot 10^{-3}$ mm para os métodos *BESO* e *SIMP*, respectivamente. Como o apoio direito é de primeiro gênero, não resiste a esforços horizontais, deslocando-se para a direita.

Figura 42 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método *BESO*



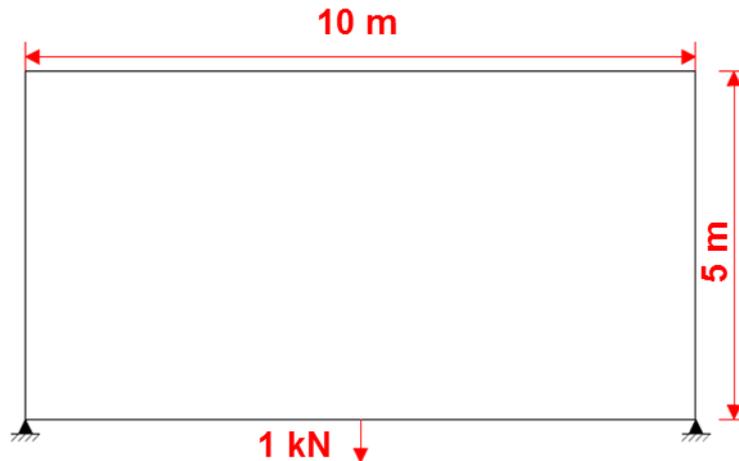
Fonte: Autor (2018)

4.6 Viga hiperestática de Michell

Na Figura 43, ilustra-se um exemplo de estrutura de Michell, esse tipo de estrutura recebe este nome devido a Michell (1904, *apud* Huang e Xie, 2010) ser o primeiro a realizar otimização com estruturas desse tipo. A viga bi-apoiada com carga aplicada no centro na face inferior e geometria cuja relação

comprimento/altura é 2:1, possui dimensões 10 m x 5 m e espessura de 1 cm, aplicando-se uma carga $F = 1$ kN. O coeficiente de Poisson tem valor de 0,3 e o módulo de Young é 100 GPa. O objetivo é encontrar uma estrutura com 50% do volume original. Para este exemplo, os apoios simples são de segundo gênero, deixando a estrutura hiperestática. A malha empregada considera uma discretização uniforme de 100 x 50 elementos.

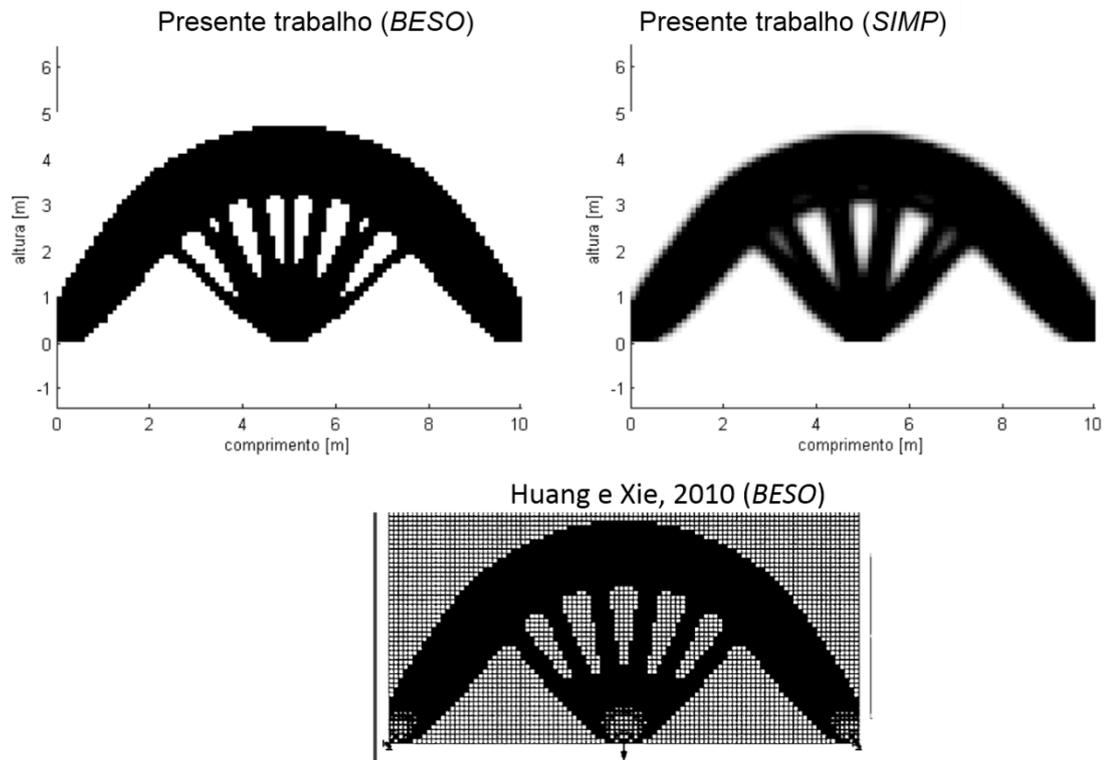
Figura 43 – Domínio de projeto e demais condições da viga hiperestática de Michell



Fonte: Autor (2018)

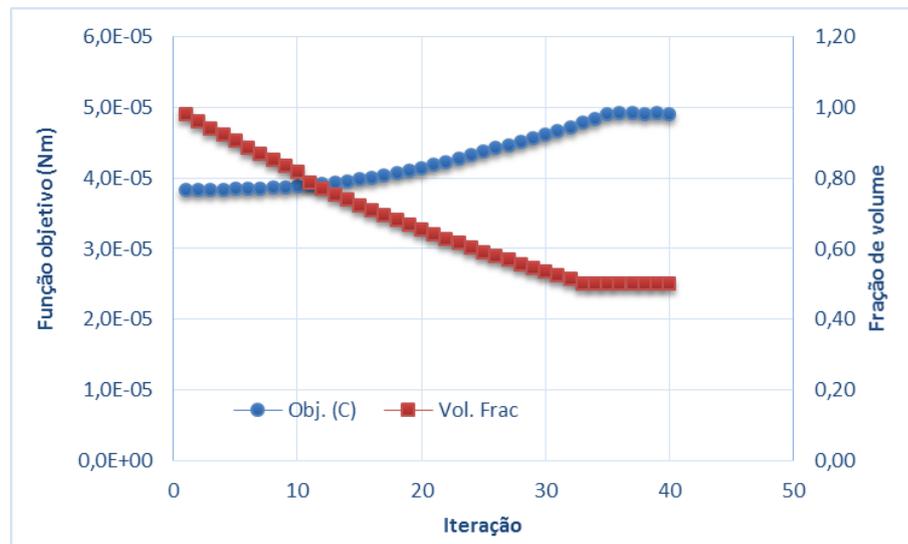
As estruturas otimizadas pelos métodos *BESO* e *SIMP* podem ser vistas na Figura 44, junto ao resultado obtido por Huang e Xie (2010). Os modelos otimizados através dos métodos *BESO* e *SIMP* possuem diferenças nas quantidades de barras, como a barra vertical do caso *BESO*, por exemplo. Na geometria final, observa-se a formação de um arco contendo boa parte do material, sendo o mesmo capaz de resistir bem à compressão. Ao redor do arco originam-se “cabos” que convergem ao centro onde está a carga concentrada, sendo os cabos capazes de suportar bem a tração.

Figura 44 – Disposição otimizada da viga hiperestática de Michell



Fonte: Autor (2018)

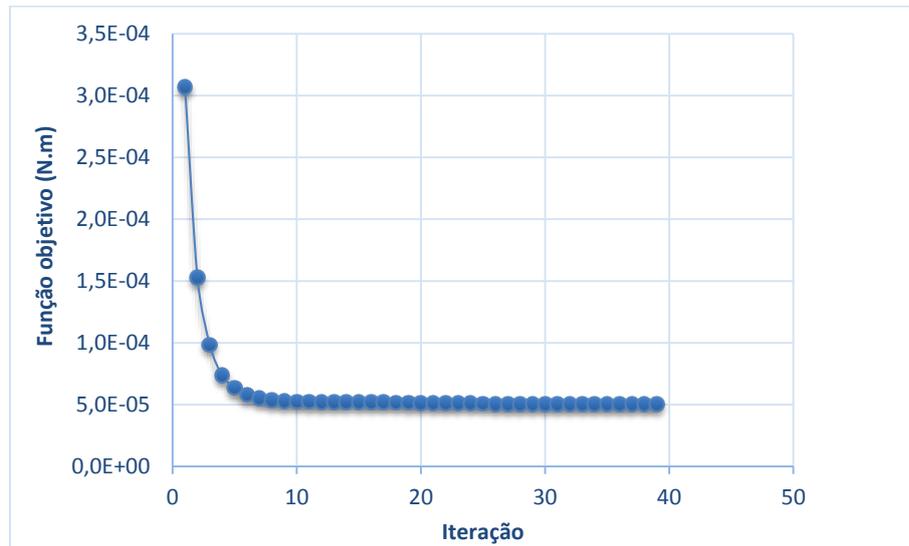
Na Figura 45, apresenta-se a evolução da função objetivo e a fração de volume em relação ao número de iterações do método *BESO*. Observa-se que somente na iteração 33 o método atingiu a fração do volume desejada, 50%. A energia total de deformação é de, aproximadamente, $4,9 \cdot 10^{-5}$ N.m, valor pequeno devido ao valor do módulo de Young, $E = 100$ GPa.

Figura 45 – Evolução da solução da viga de Michell pelo método *BESO*

Fonte: Autor (2018)

Na Figura 46, mostra-se o gráfico da função objetivo em relação ao número de iterações para o método *SIMP*. De forma similar aos outros exemplos, a partir da iteração 7 sofre pouca variação. Apesar disso, ainda são necessárias muitas iterações, 40, para que o exemplo convirja. Como resultado, o valor da energia de deformação foi $5,1 \cdot 10^{-5}$ N.m, valor bem próximo do apresentado pelo método *BESO*.

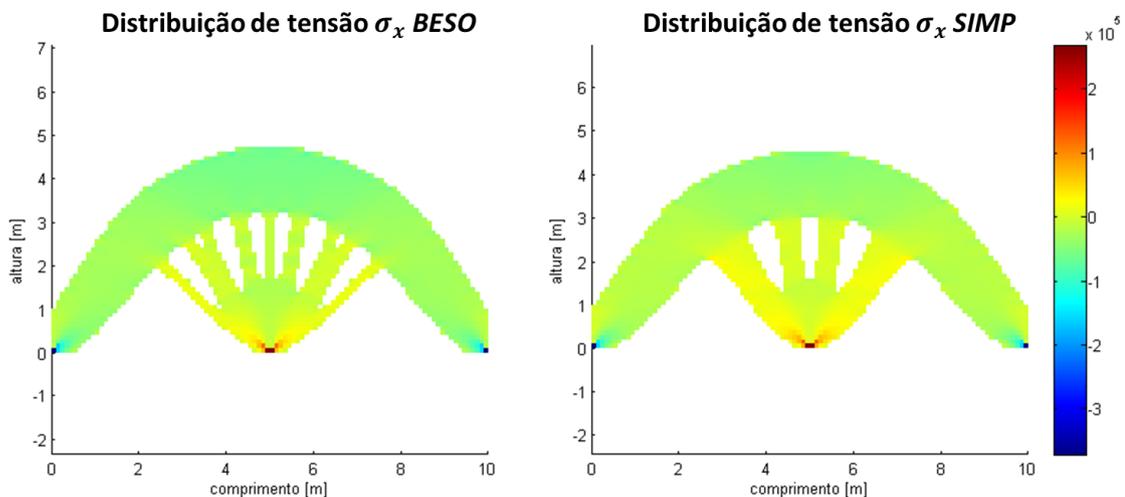
Figura 46 – Evolução da solução da viga de Michell pelo método *SIMP*



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 47, comparam-se as tensões na direção horizontal para os métodos *BESO* e *SIMP*. A tensão máxima de tração ocorre na região de aplicação do carregamento, enquanto que a tensão máxima de compressão acontece no apoio. Os valores máximos em módulo para as tensões nos métodos *BESO* e *SIMP* foram: 267,3 kPa e 267,2 kPa, respectivamente.

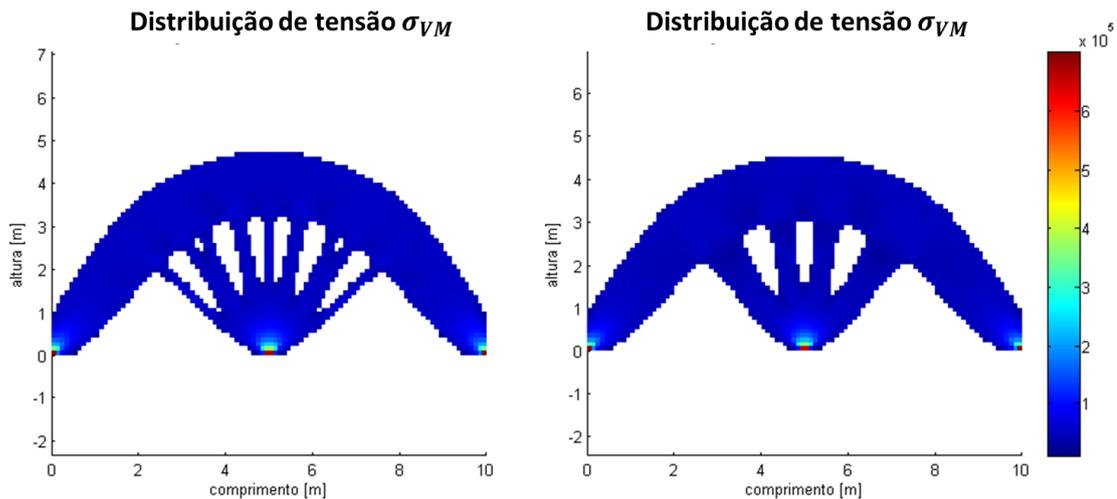
Figura 47 – Distribuição de tensão na direção x



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 48, apresentam-se as tensões de von Mises nos modelos obtidos pelos métodos *BESO*, *SIMP* e sua comparação com os resultados dados por Ochoa *et al.* (2016). As tensões máximas de von Mises foram 685,0 kPa para o método *BESO* e 699,5 kPa para o método *SIMP*. Os pontos com tensões elevadas são os dois apoios e o local de aplicação da carga, como já mostrado previamente.

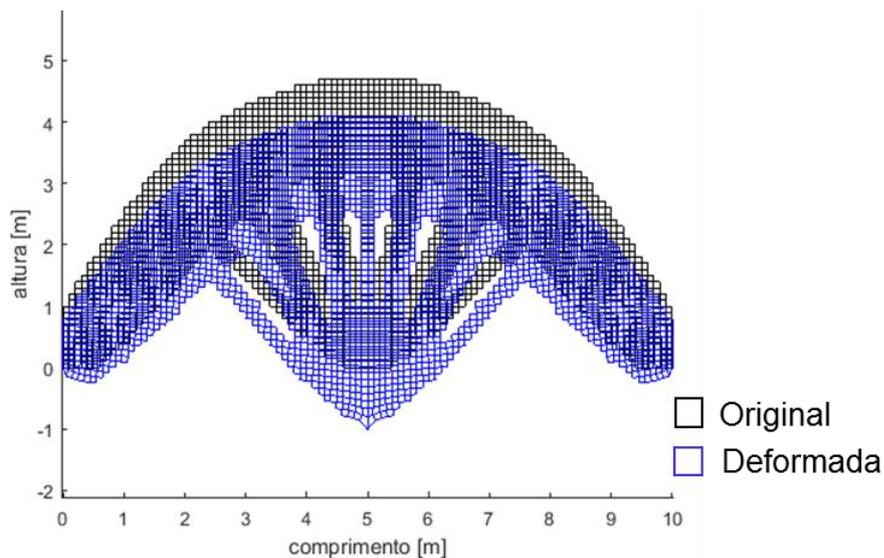
Figura 48 – Distribuição de tensão de von Mises na estrutura otimizada



Fonte: Autor

Na Figura 49, mostra-se a estrutura sem carregamento e deformada. Os máximos valores de deformação foram -0,0101 mm e -0,0102 mm para os métodos *BESO* e *SIMP*, respectivamente.

Figura 49 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método *BESO*

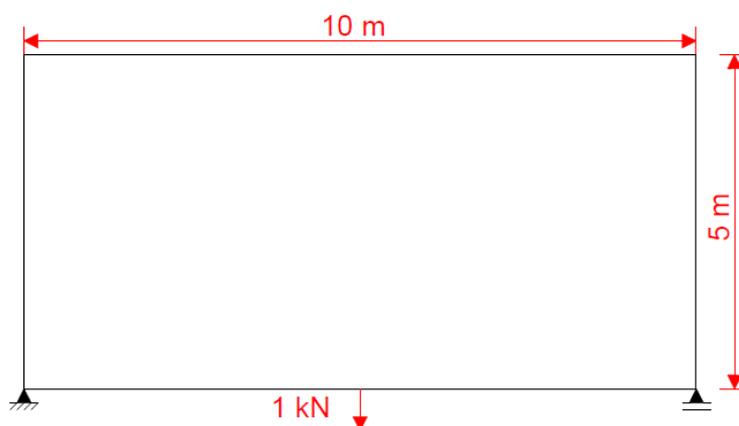


Fonte: Autor (2018)

4.7 Viga isostática de Michell

Similar ao exemplo anterior, na Figura 50 apresenta-se outro exemplo de estrutura de Michell, diferenciando apenas no gênero do segundo apoio, tornando a viga isostática. Utilizam-se as mesmas propriedades do exemplo de Michell hiperestático. O objetivo é encontrar uma estrutura com 50% do volume original, empregando uma malha uniforme de 100 x 50 elementos.

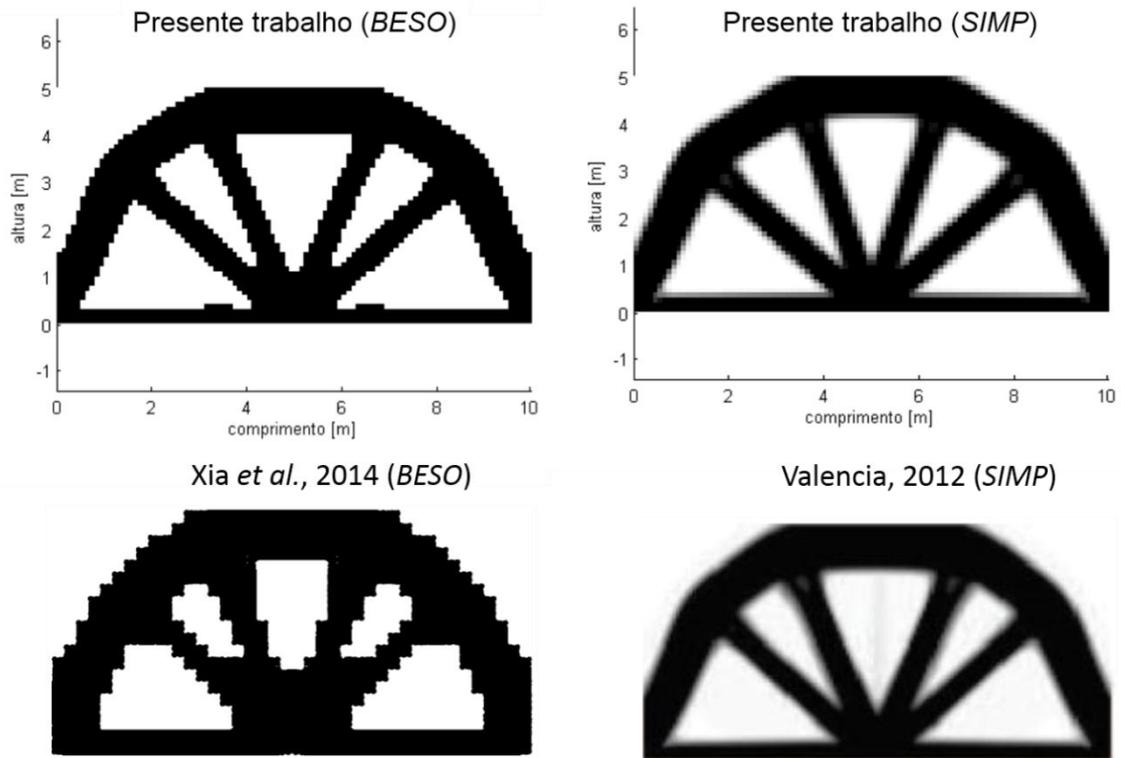
Figura 50 – Domínio de projeto e demais condições da viga isostática de Michell



Fonte: Autor (2018)

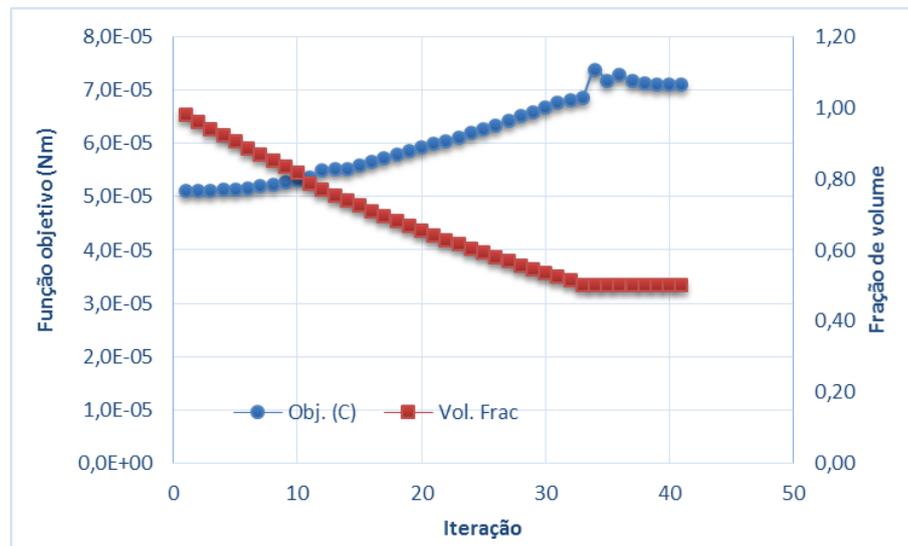
Na Figura 51, mostram-se os resultados obtidos no presente trabalho e sua comparação com as estruturas dadas por Xia *et al.* (2014) e por Valencia (2012). Todas as geometrias finais apresentam configurações semelhantes, apresentando 4 barras obliquas e duas horizontais convergindo para o local de aplicação da carga. Como o apoio da direita é de primeiro gênero, a força horizontal no apoio é necessariamente nula, como consequência, surge a barra horizontal direita para manter o equilíbrio com a força horizontal resultante do final do arco inclinado. Como o problema é simétrico surge a barra horizontal esquerda, mantendo o equilíbrio.

Figura 51 – Disposição otimizada da viga isostática de Michell



Fonte: Autor (2018)

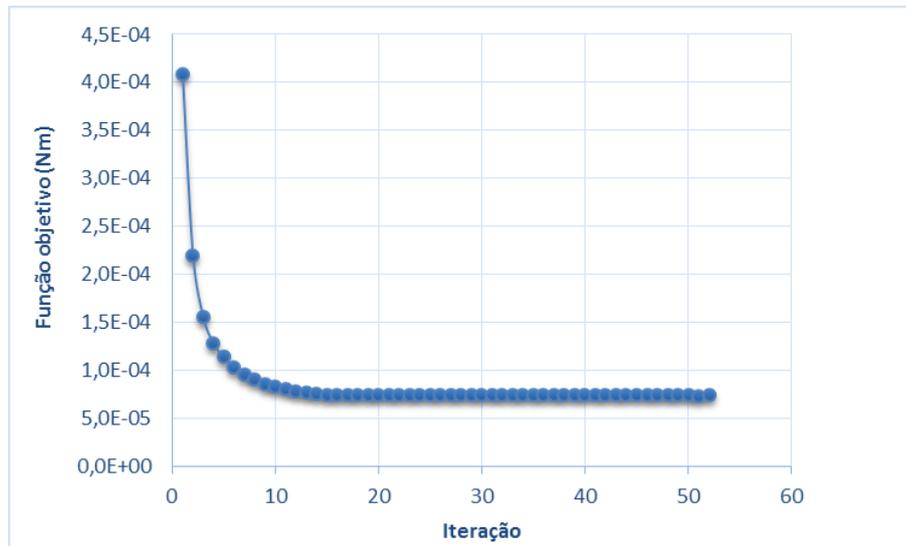
Na Figura 52, mostram-se as variações da função objetivo e da fração de volume em relação ao número de iterações no caso do método *BESO*. O volume desejado só é alcançado na iteração 33, convergindo na 40ª iteração. Na estrutura otimizada obteve-se a energia total de deformação de, aproximadamente, $7,1 \cdot 10^{-5}$ N.m.

Figura 52 – Evolução da solução pelo método *BESO*

Fonte: Autor (2018)

Na Figura 53, mostra-se o gráfico da função objetivo em relação ao número de iterações para o método *SIMP*. Pode-se observar, que a partir da iteração 13 a função objetivo sofre pouca variação. Apesar disso, ainda são necessárias 52 iterações para que o exemplo convirja. Como resultado, o valor da energia de deformação foi $7,4 \cdot 10^{-5}$ N.m, valor bem próximo do obtido com o método *BESO*.

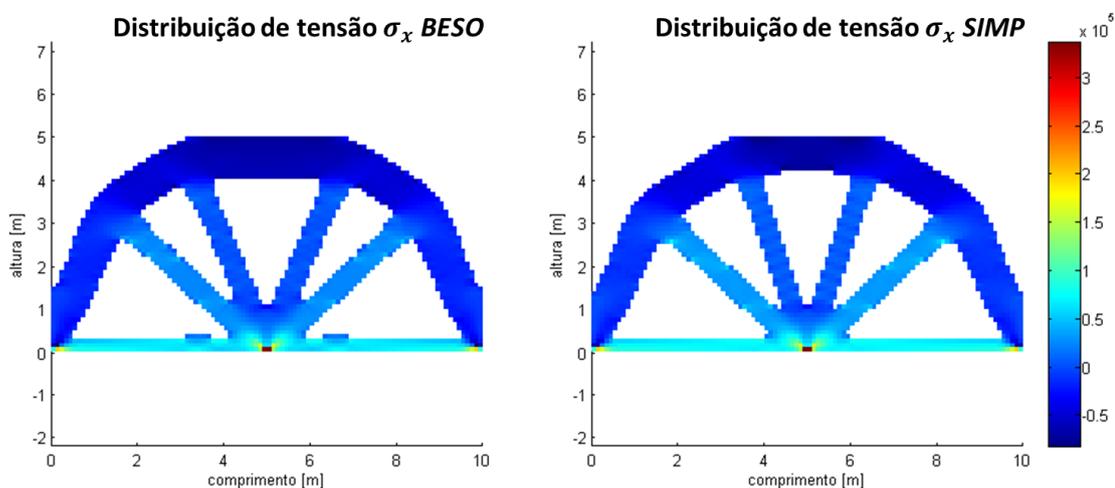
Figura 53 – Evolução da solução pelo método *SIMP*



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 54, comparam-se as distribuições de tensões na direção horizontal para os métodos *BESO* e *SIMP*. Similar ao exemplo hiperestático, a tensão máxima de tração ocorre no local de aplicação do carregamento, enquanto que a tensão máxima de compressão ocorre na região dos apoios. Os valores máximos em módulo para as tensões foram: 332,8 kPa e 335,8 kPa para os métodos *BESO* e *SIMP*, respectivamente.

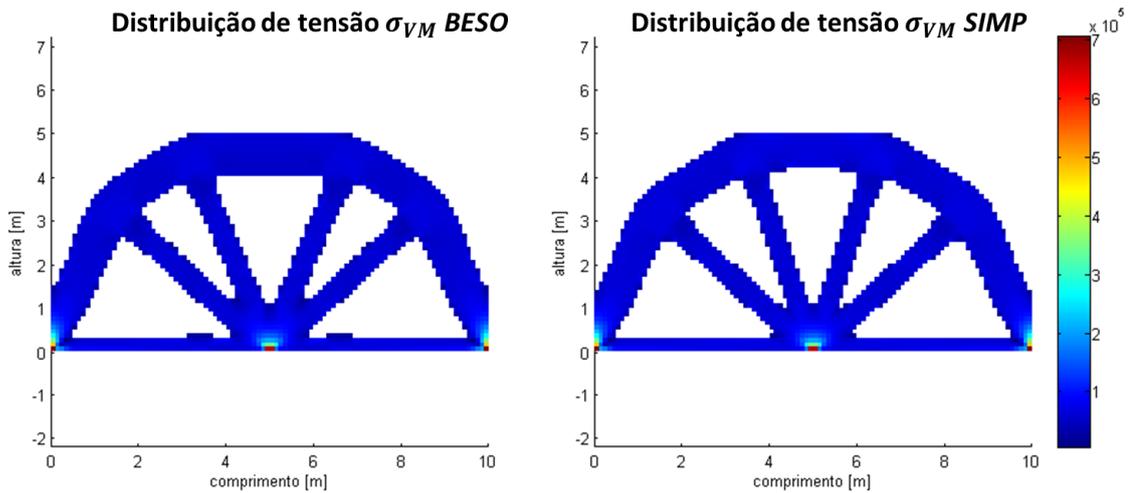
Figura 54 – Distribuição de tensão na direção x



Fonte: Autor (2018)

Na Figura 55, apresentam-se as tensões de von Mises para as configurações obtidas pelos métodos *BESO* e *SIMP*. As tensões máximas de von Mises foram 702,2 kPa para os dois métodos, aumentando a confiabilidade dos resultados encontrados ao longo deste trabalho. As maiores tensões são nos dois apoios e no local de aplicação da carga.

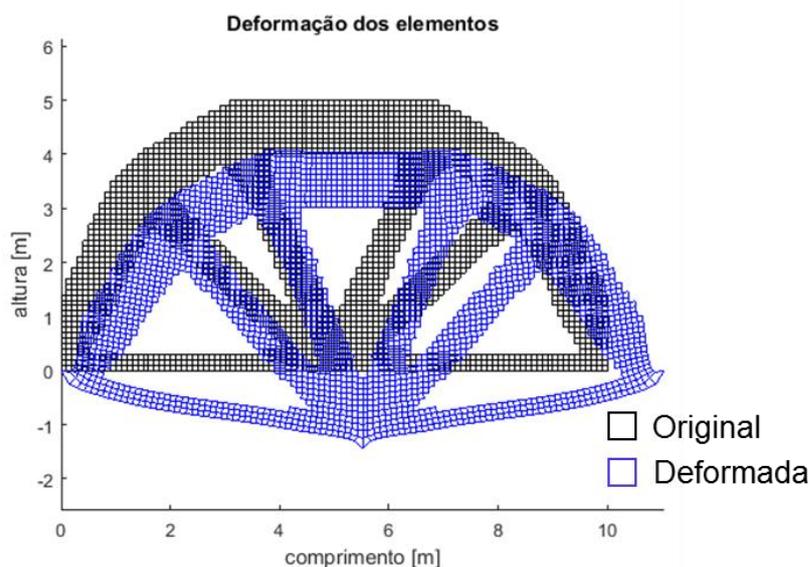
Figura 55 – Distribuição de tensão de von Mises na viga isostática de Michell



Fonte: Autor (2018)

Finalmente, na Figura 56 ilustra-se o comportamento da estrutura otimizada através do método *BESO* antes e depois de sofrer deformação. Os valores máximos de deformação foram $-1,4 \cdot 10^{-2}$ mm e $-1,5 \cdot 10^{-2}$ mm para os métodos *BESO* e *SIMP*, respectivamente.

Figura 56 – Deformação dos elementos da estrutura otimizada via método *BESO*



Fonte: Autor (2018)

5 CONCLUSÕES

Pode-se concluir que o trabalho atingiu o objetivo principal de desenvolver no ambiente de programação de MATLAB um programa que permite realizar o pré-processamento no GID e a otimização topológica de estruturas bidimensionais empregando as metodologias *BESO* (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) e *SIMP* (*Solid Isotropic Material with Penalization*) combinados com o Método dos Elementos Finitos.

Quando comparados os resultados obtidos no presente trabalho com os presentes na literatura, observa-se que as configurações otimizadas ficaram bem próximas, entretanto, o método *SIMP* apresenta uma melhor concordância. No caso da distribuição de tensão de von Mises, os resultados também apresentaram uma boa concordância quando comparados com os de outros autores.

Quando comparam-se os resultados obtidos para os diferentes exemplos com os métodos *BESO* e *SIMP*, observa-se que a distribuição de tensão de von Mises, distribuição de tensão na direção “x” e deformação máxima ficaram semelhantes.

O programa mostrou sua robustez, ao resolver problemas de otimização onde o domínio não é retangular (por exemplo, *L-shape design*), permitindo empregar o código desenvolvido em casos mais gerais.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se modificar o código para que o pós-processamento seja desenvolvido no GID, atualmente isso realiza-se no MATLAB. Dessa forma, o pré e pós-processamento seria realizado no GID.

REFERÊNCIAS

- ANDREASSEN, E., CLAUSEN, A., SHEVENELS, M., LAZAROV, B. S., SIGMUND, O. Efficient topology optimization in Matlab using 88 lines of code. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v. 43, p. 1-16. Springer-Verlag, 2011.
- BARROS, F.B. **Método sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BENDSØE, M.P., KIKUCHI, N. Generating optimizal topologies in structural design using a homonization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, p. 197-224, 1988.
- BENDSØE, M.P., SIGMUND, O. **Topology Optimization. Theory, Methods and Applications**. [S.l.]: Springer, 2004.
- BENDSØE, M.P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, p. 193-202, 1989.
- CLOUGH, R.W. Original formulation of the finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 7, p. 89-101, 1990.
- GUO, X., ZHANG, W.S., WANG, M.Y., WEI, P. Stress-related topology optimization via level set approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 3439-3452, 2011.
- HUANG, X., XIE, M. **Evolutionary topology optimization of continuum structures: methods and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.
- NECHES, L.C., CISILINO, A.P. Topology optimization of 2d elastic structures using boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, p. 533-544, 2008.
- OCHOA, M.A., VALDEZ, S.I., BOTELLO, S., CARDOSO, V. **Topology optimization benchmark I: Results for minimum compliance and minimum volume in plane stress problems**. Comunicación del CIMAT, nº I-16-01. México, 2016.
- OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Vol.1: The Basis and Solids**. [S.l.]: Springer, 2009.
- PEREIRA, R.E.L. **Otimização topológica de sistema de contraventamento em edificações, considerando os efeitos do vento**. Projeto de Qualificação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017.
- RAO, S.S. **The finite element method in engineering**. 5. ed. Burlington: Elsevier, 2011.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v. 15. p. 120-127 , 2001.

SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v. 33 p. 401-424, 2007.

SILVA, E. **Uma formulação de otimização topológica com restrição de tensão suavizada**. 2012. p. 102. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SOUSA JUNIOR, E.Q. **Otimização topológica de problemas estruturais bidimensionais com o método BESO**. 2016. p. 57. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil) – Núcleo de Tecnologia, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2016.

SORIANO, H.L. **Elementos Finitos. Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. [S.l.]: Ed. Ciência Moderna, 2009.

TAYLOR, R.L., BERESFORD, P.J., WILSON, E.L. A non-conforming element for stress analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10 p. 1211-1219, 1976.

VALENCIA, C.A.M. **Optimización topológica en el diseño de elementos estructurales mecánicos**. 2012. p. 68. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) – Facultad de Ingeniería – Universidad Autónoma de Occidente, Santiago de Cali, 2012.

WANG, M.Y., WANG, X., GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 227-246, 2003.

XIA, Q., WANG, M.Y., SHI, T. A level set method for shape and topology optimization of both structure and support of continuum structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 272, p. 340-353, 2014.

XIE, Y.M., STEVEN, G.P. Shape and layout optimization via an evolutionary procedure. **Proceedings of International Conference on Computational Engineering Science**, Hong Kong, p. 471, 1992.