UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES NO MERCADO DE DERIVATIVOS ATRAVÉS DO MODELO DE BLACK E SCHOLES.

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO

POR

PEDRO AUGUSTO ALECRIM COELHO

Orientador: Prof. Enrique Lopez

RECIFE, DEZEMBRO / 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES NO MERCADO DE DERIVATIVOS ATRAVÉS DO MODELO DE BLACK E SCHOLES

Trabalho de Conclusão apresentado ao Curso de Engenharia de Produção da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE – como requisito parcial para obtenção de Grau em Engenharia de Produção.

RECIFE, DEZEMBRO / 2010

C672p Coelho, Pedro Augusto Alecrim.
Precificação de opções no mercado de derivativos através do modelo de *blacks* e *scholes* / Pedro Augusto Alecrim Coelho. - Recife: O Autor, 2010.
v, 27 folhas, il., tabs.

TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Curso de Engenharia de Produção, 2010.

Orientador: Prof.º Enrique Lopez.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia de Produção. 2.Mercado Derivativo. 3.Teoria *Black & Scholes*. I.Lopez, Enrique (Orientador). II. Título.

UFPE

658.5 CDD (22. ed.) BCTG/2010-258

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, José Leovigildo de Melo Coelho e Tereza de Fátima Alecrim Coelho, aos meus irmãos José Leovigildo de Melo Coelho Filho e João Victor Alecrim Coelho pelo suporte que sempre me deram e pelos valores durante toda minha jornada de vida e nunca me faltaram mesmo com a distância física tentando nos atrapalhar.

- Ao meu amigo Wilton Bernardino da Silva, pelo apoio e amizade que sempre teve com minha pessoa.

- Aos meus tios, tias, avós, primos, sobrinho e demais amigos de graduação que me ajudaram a ser uma pessoa mais preparada para a vida.

- À Instituição UFPE, pelo ensino e disponibilidade do ambiente.

- Aos professores, pelos ensinos transmitidos.

- Ao meu companheiro de trabalho Marco Antônio Pereira pela paciência e compreensão que sempre teve com minha pessoa;

RESUMO

A metodologia do mercado derivativo de opções baseia-se na possibilidade de comprar uma opção de compra ou venda de ativos subjacentes, sob um preço acordado, até uma data futura acordada. Se o valor do ativo ultrapassa o valor acordado dentro do período, o comprador da opção exercerá o direito de compra do ativo, podendo vender imediatamente o mesmo e realizar o lucro. Caso contrário, não há necessidade de exercer o direito de compra, perdendo somente o dinheiro pago pela compra da opção. O gerenciamento de riscos baseia-se no fato de que se pode usar a matemática para informar o quanto de risco se está assumindo, de forma a ajudar na tomada de decisão a um preço justo. A fórmula de Black & Scholes informa aos investidores qual valor investir nos derivativos financeiros, tornando o que seria um jogo de adivinhação em ciência matemática, ao utilizar-se de quatro variáveis (tempo da opção, preços, taxas de juros e volatilidade de mercado) para gerar o preço justo que deve ser cobrado por uma opção. Esse trabalho busca expor essa ferramenta, pouco difundida nos cursos de Engenharia e mostrar um exemplo de aplicação da mesma no mercado derivativo, onde o modelo se mostrou bastante adequado a realidade dos preços praticados no mercado, além de expor como o Engenheiro de Produção pode utilizar modelos de precificação de opções no seu ambiente de trabalho como instrumento de suporte à tomada de decisão.

Palavras chave: Mercado Derivativo, Teoria Black & Scholes, Opções.

Sumário

1 Introdução

Em 1997, o Professor Emérito de Finanças da Universidade de Standford, Myron Scholes e o Economista da Universidade de Harvard, Robert C. Merton conquistaram o prêmio Nobel de Economia que, certamente, seria dividido por uma terceira pessoa, Fischer Black, não fosse sua morte em 1995. Esse prêmio é o resultado da descoberta em 1970 de uma única formula matemática, descoberta por Black e Scholes sendo desenvolvida por Merton. A idéia de que poderia se utilizar da matemática para precificar derivativos era, na época, revolucionária a ponto de Black e Scholes terem dificuldades de publicar seus trabalhos. Na sua primeira tentativa , em 1970 , os Jornais das Universidades de Chicago e de Harvard rejeitaram o artigo ("*The Pricing of Options and Corporate Liabilities.*") sem ao menos julgá-lo. Somente em 1973, após a influência de alguns membros da Universidade de Chicago que, finalmente, o "*Journal of Political Economy*" publicou o trabalho. Seis meses após a publicação do artigo de Black e Scholes, a *Texas Instruments* incorporava a nova fórmula em sua mais nova calculadora, anunciando o lançamento com meia página no "*The Wall Street Journal*".

Mercado Derivativo tornou-se extremamente importante no cenário econômico - financeiro mundial, sendo ativamente comercializado por diferentes Bolsas de Valores no mundo afora. O funcionamento do mercado de opções, por exemplo, baseia-se na possibilidade de comprar uma opção de compra ou venda de ativos, por um preço acordado (preço de exercício), até uma data futura (data de vencimento) determinada. Se o valor do ativo ultrapassa o valor acordado (caso esse na opção de compra) dentro do período, o comprador da opção poderá exercer o direito de compra do ativo, podendo vender imediatamente o mesmo e realizar o lucro. Caso contrário, não há obrigatoriedade de exercê-lo, perdendo somente o dinheiro pago pela compra da opção.

O segredo dos mercados de capitais é, simplesmente, comprar barato e vender caro; mas quando se sabe que o ativo está com um preço atrativo para investimento?

A fórmula de Black e Scholes informa aos investidores qual será o valor justo a ser pago nos derivativos financeiros, tornando o que seria um jogo de adivinhação em ciência matemática, ao utilizar-se de quatro variáveis (tempo da opção, preço, taxas de juros e volatilidade de mercado) para poder, finalmente, chegar ao preço justo por uma opção.

O moderno gerenciamento de risco, incluindo seguradoras, mercados de ações e futuros, baseia-se no fato de que se pode usar a matemática para prever o futuro. É razoável dizer que essa previsão está longe de ser com 100% de certeza, mas bem o suficiente para embasar tomada de decisões de onde aplicar os recursos. Na prática , quando o investidor compra ações ou adquire um seguro , a real mercadoria que está sendo negociada é o risco. O uso da matemática não pode remover o risco, mas pode informar o quanto de risco está assumindo de forma a embasar as tomadas de decisões.

A ferramenta de Black & Scholes servirá, não somente, para precificação das opções no mercado derivativo, mas também de base para a construção de um novo cenário de tomada de decisões, pois muitas Empresas estão sendo forçadas a buscar uma rápida adaptação às mudanças, em um mercado de ambiente acirrado e incerteza futura onde a flexibilidade se torna uma arma fundamental para criar uma vantagem competitiva perante os concorrentes. Diante disso, as Empresas precisam criar novas oportunidades, e incorporar a flexibilidade é uma forma de permitir que o risco e a incerteza sejam encarados como uma oportunidade estratégica. Modelos de precificação de opções, como o de Black & Scholes, deram base para criação de novas teorias como a conhecida "Teoria das Opções Reais" - que pode ser utilizada como método de precificação de novos projetos por incluir em sua metodologia a possibilidade de incertezas e flexibilidades gerenciais. O termo Opções Reais foi utilizado por MYERS (1977), destacando que as oportunidades de expansão de uma empresa (novos investimentos) podem ser vistas como sendo análogas às opções de compra. Iniciava-se assim uma nova abordagem para a análise de investimentos, que faz uma analogia entre uma opção e um projeto de investimento.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desse trabalho é fazer uma breve abordagem ao método matemático descoberto por Myron Scholes e Fischer Black, aplicando tal modelo em um exemplo prático no mercado derivativo, avaliando a adequação do modelo à realidade.

Objetivos específicos desse trabalho serão de:

- Apresentar exemplo de estudos de caso de aplicações na área de Engenharia de Produção;
- Aliar a teoria acadêmica com a prática em investimentos em mercados de capitais e análises de projetos através de precificação de opções com a finalidade de fortificar e difundir acerca desse tema;

1.2 Metodologia

A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho foi, primeiramente, a realização de uma pesquisa bibliográfica através de publicações, como livros, teses, monografias, periódicos, etc. com a finalidade de apresentar conceitos sobre processos estocásticos, mercado derivativo, teoria de Black & Scholes e sua extensão de aplicação. Posteriormente, foi realizado um estudo de caso com o ativo da Petrobras a fim de poder comparar os resultados do modelo de precificação sugerido por Black & Scholes e os preços praticados no mercado financeiro atual.

1.3 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho se desenvolverá da seguinte forma:

- O capitulo 02 irá realizar a base conceitual desse trabalho, ou seja, os conhecimentos existentes na literatura que servem de suporte teórico para o tema em estudo. Trata-se de uma apresentação sucinta sobre o mercado derivativo, conceitos de aplicações sobre processos estocásticos que fundamentam a equação de Black & Scholes, bem como, explanação do estudo das gregas.

- O capitulo 03 irá realizar precificação de opções de compra dos ativos da Petrobras através do modelo B&S e comparar os resultados com as cotações do ativo na BMF & BOVESPA a fim de poder verificar a tendência dos preços no mercado derivativo e poder ter embasamento para utilizar a fórmula de Black & Scholes como ferramenta de suporte de decisão. Além disso, o capítulo abordará exemplos de como modelos de precificação de opções podem ser aplicados pelo Engenheiro de Produção.

- No capítulo 04, serão abordadas as considerações finais.

2 Revisão Bibliográfica

Barbedo (2003) destaca que o modelo de Black & Scholes tem sido o modelo mais utilizado para a avaliação de opções pelo mercado. O uso da tal ferramenta, basicamente restrito às instituições financeiras, pode ser aberto para outros setores sem ser o financeiro, como o produtivo, por exemplo. Uma aplicação interessante do modelo foi feito por Souza & Barreto (1999), ao utilizar a fórmula de precificação de opção de compra para avaliar a viabilidade econômica dos direitos de uso e exploração comercial de uma patente. Outra extensão muito interessante foi exposta por Minardi (2008) ao utilizar o modelo B&S para estimar a probabilidade de inadimplência implícita no preço das ações no mercado acionário brasileiro.

As bases conceituais desse capítulo foram retiradas das seguintes referências literárias: Hull (2006) , Hull (2003) , Hull (2005) , Black and Scholes (1973) , Heiderich(2009) , Santos (1998) e Olga (2007), sendo desenvolvidos nos seguintes tópicos:

- Mercado Derivativo
- Teoria de Black & Scholes
- Equação de Black & Scholes
- Estudo das Gregas

2.1 Mercado Derivativo

No mundo esse tipo de mercado vem ganhando volume de negócios e importância aos investidores pela necessidade de encontrar mecanismos de proteção contra o risco de oscilações dos preços dos ativos. Segundo Santos (1998), "Derivativos são instrumentos financeiros onde o preço de mercado deriva do preço de mercado de um bem ou de outro instrumento financeiro". Por exemplo, uma opção da ação do Banco Bradesco é um derivativo porque seu valor depende do preço da ação Bradesco; um contrato futuro de café também é um derivativo, pois seu valor depende do preço do café, e assim por diante.

Não se sabe bem a dimensão e extensão desse mercado, mas o *Bank for Internacional Settlements (BIS)* divulgou um boletim em março de 2007 onde indica os valores referenciais dos contratos negociados em Bolsa de Valores e no Balcão (fora da Bolsa). Esse boletim indica cerca de U$ 430 trilhões de dólares foram negociados no ano de 2007. Isso mostra que, caso esse mercado parasse de ser operado, a economia mundial

sofreria bastante, haja vista que todo processo de negociação mundial está amparado em coberturas contra riscos de preços e taxas por meio de derivativos.
São três os tipos de mercados derivativos:

Mercado de Opções: De acordo com HULL (2003, p. 22) há dois tipos básicos de opções, a opção de compra (*call option*) e a opção de venda (*put option*). Silva Neto (1997, p. 88) destaca ainda que as opções podem ser classificadas por classe (definida pelo prazo de vencimento ou data de vencimento ou último dia útil de exercício) e também por série (dada por seu preço de exercício). Ainda de acordo com Silva Neto (1996, p. 19) pode-se conceituar opção por: "todo contrato que dá ao seu detentor ou comprador o direito, mas não o dever, de comprar, se for uma opção de compra, ou vender, se for uma opção de venda, determinado bem (objeto negociado), pelo preço acordado na efetivação do contrato (preço do exercício)". Em resumo, nesse mercado é negociado o direito de compra (*call*) e venda (*put*) de um bem por um preço fixo em uma data futura. O preço do contrato (valor futuro pelo qual o bem será negociado) é conhecido como **Preço de Exercício** e sua data (dia em que a posição será exercida) é conhecida como **Data de Vencimento**.

Mercado a Termo: Nesse mercado o comprador e o vendedor se comprometem a comprar ou vender certa quantidade de um bem por um preço fixado na data de realização do negócio para liquidação em data futura. Os contratos somente serão liquidados integralmente nas datas de vencimento.

Mercado Futuro: Evolução do Mercado a Termo tendo como diferença chave a liquidação dos contratos. No Mercado a Termo, os contratos só podem ser liquidados na data de vencimento. Já no Futuro, os negócios são ajustados financeiramente às expectativas do mercado referente ao preço futuro daquele bem por meio de ajustes diários. Outra diferença é que o Mercado Futuro só pode ser negociado em Bolsa de Valores.

2.2 Teoria Black & Scholes

Argumenta-se que qualquer variável cujo valor mude de maneira incerta com o tempo segue um processo estocástico. Aqui, nosso objetivo reside em derivar um processo estocástico para os preços de ações e seus derivativos. Para isso, utilizaremos o chamado Cálculo Estocástico. Esse processo foi desenvolvido por Fischer Black e Myron Scholes na década de 70 onde propuseram uma equação diferencial a qual deve ser satisfeita por qualquer derivativo de um ativo.

2.2.1 Processo de Markov

Tipo particular de processo estocástico onde seu princípio diz que o valor atual de uma variável encerra todas as informações contidas em seu histórico de preços, ou seja, somente o valor presente de uma variável é relevante para predizer seu valor futuro. Comumente se assume que a evolução de preços em ativos obedece a um processo de Markov com previsões de valores somente feitas em termos de distribuição de probabilidade. É fato que essa distribuição de probabilidade, segundo a propriedade de Markov, em um tempo futuro qualquer dependerá unicamente de seu valor presente. O histórico para preços é útil na determinação de algumas características do processo estocástico como, por exemplo, a volatilidade. Dito isso, mostra-se que se a análise técnica, muito difundida no meio financeiro, fosse uma arma mais poderosa, analistas técnicos teriam um desempenho muito superior ao interpretar gráficos de preços históricos.

2.2.2 Processo de Weiner

Tipo particular de processo estocástico de Markov, o Processo de Weiner tem como objetivo modelar o comportamento dos preços das ações. Esse processo é usado na física a fim de descrever o movimento de partículas que estão sujeitas a inúmeros choques moleculares.

O principio desse processo diz que o movimento de uma variável pode ser entendido considerando-se pequenas mudanças Δz nos seus valores em pequenos intervalos Δt. Há duas propriedades que deve apresentar Δz para que z siga tal processo.

- A mudança na variável *z* dada pela variável, Δz, é tal que

  $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, onde ε segue uma distribuição normal padrão.

- Os valores de Δz são independentes em intervalos de tempos distintos.

Obedecendo a esses pressupostos, *z* seguirá o processo de Weiner.

.

Supondo-se que z segue o processo de Weiner, podemos concluir que:

1. A média de Δz $(\mu \Delta z)$ é zero
2. A variância de Δz $(\sigma^2 \ \Delta z\ )$é Δt

Tais conclusões podem ser verificadas analisando, por exemplo, duas datas quaisquer, uma inicial (t=0) e outra final (T). Considere uma variação da variável *z* ao longo do intervalo de tempo mencionado. Considere uma partição no intervalo [0, T]. Denote por N o número de subintervalos desta partição de maneira que cada subintervalo tenha comprimento T/N e considere i como sendo o i-ésimo subintervalo da partição. Sendo assim,

$$\Delta t_i = \frac{T}{N}, i = 1, \ldots . N,$$

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon i \sqrt{\Delta t i},$$

Onde os Ɛi's são assumidos como variáveis independentes e igualmente distribuídas com distribuição normal padrão.

Em qualquer intervalo de tempo com extensão (T), a variação de uma variável que segue o Processo de Weiner segue uma distribuição Normal com média zero e variância T. Ou seja, $\mu[Z(T) - Z(0)] = 0 \ e \ \sigma^2[Z(T) - Z(0)] = T$, sendo μ e σ^2 a media e variância da variação de z em T, respectivamente.

2.2.3 Processo de Weiner Generalizado

Também conhecido como Movimento Browniano com *drift,* para uma variável x qualquer, pode ser definido em termos de dz como mostra a seguir:

$$dx = adt + bdz, \cdot$$

Sendo a e b constantes;

Para compreendermos melhor essa equação, iremos isolar e analisar o lado direito da mesma. O termo $\boldsymbol{adt}$ implica dizer que $\boldsymbol{x}$ tem uma taxa de deriva constante $\boldsymbol{a}$ ao longo do tempo. Retirando o termo $\boldsymbol{bdz}$ a equação torna-se:

$$dx = adt$$

Ou seja;

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{a} \quad \text{Ou ainda;} \quad x = x' + at$$

Onde ***x'*** é o valor de ***x*** em t = 0. No intervalo de tempo ***T, x*** cresce a uma taxa ***aT .*** O termo ***dz*** , sendo o responsável pelo processo de Weiner , será o fator de incerteza na mudança da variável ***x ,*** ou de outra forma , por uma variabilidade no caminho seguido por ***x .*** O produto de ***b*** pelo processo de Weiner dará a quantidade dessa variabilidade. Pelas formulas anteriores, podemos descrever em um pequeno intervalo de tempo Δt*,* uma mudança Δx *em x* será dada por;

$$\Delta \mathrm{x} = \mathrm{a}\Delta \mathrm{t} + \mathrm{b}\varepsilon\sqrt{\Delta \mathrm{t}}$$

Pode-se concluir que uma mudança no valor de ***x*** em um intervalo de tempo ***T*** é normalmente distribuída conforme especificado abaixo:

- Média de variação em $x = aT$
- Variância de uma variação em $x = b^2T$
- Desvio Padrão de uma variação em $x = b\sqrt{T}$

Desta forma,

$$\Delta \mathrm{x} \sim N\ (\mathrm{aT}\,, \mathrm{b}^2\mathrm{T}), \text{ sendo N distribuição Normal;}$$

Onde ***x*** possui uma taxa esperada de ***a*** (por unidade de tempo) e uma taxa de variância de ***b²(por unidade de tempo).***

2.2.4 Processo de Itô

Pode-se permitir que os parâmetros a e b no Processo de Weiner Generalizado variem em função de *x* e *t*. Feito isso, a variável *x* seguirá o processo de Itô descrito pela equação:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

2.2.5 Movimento Browniano Geométrico

O Movimento Browniano Geométrico é um caso particular do processo de Itô. Segundo Dixit e Pindyck (1994), o movimento geométrico browniano é geralmente utilizado para modelar preços de ações, bem como a taxa de juros e outras variáveis financeiras e econômicas. Existe uma restrição ao seu uso pelo fato de que esse processo pode divergir levando *x(t)* para o infinito, sendo assim, alguns modelos que seguem o MBG podem não expressar a realidade. Dadas essas considerações, o MBG tem a seguinte forma:

$$a(x,t) = \mu x \; e \; b(x,t) = \sigma x$$

Com μ e σ constantes;

Ficando a equação de Itô da seguinte forma;

$$dx = \mu x dt + \sigma x dz$$

Dividindo ambos os lados por *x* (pois ele não assume valor nulo), temos:

$$\frac{dx}{x} = \mu x dt + \sigma x dz$$

Sendo S o preço do ativo no tempo *t*, em um pequeno intervalo de tempo Δt, fornecemos o seguinte modelo:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

Ou seja,

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N\,(\mu \Delta t\,, \sigma \sqrt{\Delta t}\,)$$

Onde podemos interpretar que μ representará a taxa de retorno esperada do preço do ativo e σ a volatilidade do mesmo.

2.3 Equação de Black & Scholes

2.3.1 Equações Diferenciais Estocásticas e o Lema de Itô

O lema de Itô, na matemática, é usado em cálculo estocástico a fim de encontrar a diferencial de uma função de um tipo particular do processo estocástico. Ela pode ser usada para derivar a fórmula de Black e Scholes para uma opção como segue abaixo:

Supomos que o preço de uma ação segue uma equação diferencial estocástica dado por:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

Que, através de notações, pode ser escrita na forma:

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad ; \quad \text{com } \varepsilon \sim N(0,1)$$

Iniciamos com a fórmula da derivada de uma função $G(x,y)$ qualquer de duas variáveis dadas por:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy$$

Obtida a partir da formula de Taylor $\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2$... Com $\Delta x \to 0$;

Aplicando a expansão de Taylor à $F(x,t)$, obteremos a seguinte equação abaixo que representa um resultado importante na obtenção da fórmula de Black e Scholes:

$$dF = \left(a\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dt + b\frac{\partial F}{\partial x}dz$$

2.3.2 **Obtenção da Equação Diferencial de Black & Scholes**

Finalmente, obteremos a Equação Diferencial de Black e Scholes, admitindo que o preço **S** do ativo respeite as seguintes premissas abaixo:
Conforme Hull (1996) as premissas segue a seguinte lógica para a fórmula em questão:

1. O comportamento do preço da ação corresponde ao modelo lognormal, com μ e σ constantes;
2. Não há custos operacionais nem impostos. Todos os títulos são perfeitamente divisíveis;
3. A ação não receberá dividendos durante a vida da opção;
4. Não há oportunidade de arbitragem sem risco;
5. A negociação com títulos é contínua;
6. Os investidores podem captar ou emprestar à mesma taxa de juro livre de risco;
7. A taxa de juro livre de risco de curto prazo, r, é constante.

Assumindo que $\boldsymbol{S}$(preço da ação) siga um processo MBG e que f seja o preço do derivativo contigenciado sobre S, segue a equação abaixo;

$$dF = \left(a\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dt + b\frac{\partial F}{\partial x}dz$$

Obtemos;

$$df = \left(a\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial f}{\partial s}dz = \boldsymbol{\frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt}$$

Essa é uma equação diferencial estocástica, que pode ser simplificada explorando a hipótese de não arbitragem, transformando-a em uma equação diferencial determinística, eliminando o processo de Wiener , ficando , dessa forma, livre de riscos. Vamos considerar um portifólio com uma posição curta (quem vende assume essa posição) em uma opção e uma posição longa (quem compra assume essa posição) de um certo número , Λ , por exemplo , de ativos subjacentes a essa opção. O valor desse portfólio será:

$$\Pi = f(S,t) - \Delta S$$

Diferenciando Π , obtemos:

$$d\Pi = df - \Delta dS = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2})dt + (\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta)dS$$

Podemos eliminar os termos de dS escolhendo um portfólio tal que $\Delta = \frac{\partial f}{\partial s}$., fazendo com que o incremento de $d\Pi$ fique determinístico, isento de riscos. Portanto, sobre a hipótese de não arbitragem, obteremos:

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Ou seja, em cima da hipótese de não-arbitragem, o retorno de $d\Pi$, no fim do tempo dt, deve ser baseado na taxa de juros livre de risco. Se $d\Pi$ for maior que esse valor, uma oportunidade de arbitragem surge ao tomarmos Π emprestado, a taxa de juros livre de risco, e comprarmos o *portfolio*. Caso d Π _for menor que esse valor, um ganho sem risco pode ser obtido ao vender o *portfolio* a descoberto e emprestar o dinheiro a taxa de juros livre de risco.

Eliminando $d\Pi$ das equações anteriores, obtemos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)dt = r(f - S\frac{\partial f}{\partial s})dS$$

E, por fim;

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)dt + rS\frac{\partial f}{\partial s} - rf = 0$$

Essa é a Equação Diferencial de Black e Scholes, que não depende da taxa de variação média do ativo subjacente. A solução dessa equação foi referenciada no artigo de Black – Scholes como uma das aplicações de modelagem de transferência de calor. Contudo, a expressão mais difundida do Modelo de Black – Scholes é a solução da equação diferencial dada por:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$P = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Sendo:

C → Preço da Opção de Compra

P → Preço da Opção de Venda

S → Preço do ativo (da ação) no momento atual

X → Preço do Exercício

r → Taxa de juros livre de risco, em base anual, com capitalização contínua

T → Tempo para o vencimento da opção, expresso em ano

σ → Volatilidade do preço da ação, expressa ao ano. Os valores típicos da volatilidade estão no intervalo de 0,2 a 0,4 ao ano.

N(..) → Função de distribuição normal acumulada

Vamos expor um exemplo de utilização da fórmula, extraído de Hull (1996):

O preço de uma ação, seis meses antes da **data de vencimento** de uma opção, está em R**$42**; o **preço de exercício** da opção é de R**$40**; a **taxa de juro livre de risco** é de **10% a.a** e a **volatilidade**, de **20% a.a**. Qual deveria ser o preço da ação para que o comprador da opção de compra não tenha lucro nem prejuízo? E qual deveria ser o preço da ação para que o comprador da opção de venda não tenha lucro nem prejuízo?

Temos os seguintes dados:

$S = R\$42$; $X = R\$40$; $r = 0{,}1$; $\sigma = 0{,}2$; $T = 0{,}5$;

Calculamos então d_1, d_2 e Xe^{-rt}:

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 + 0{,}2^2 / 2)0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}2\sqrt{0{,}5} = 0{,}6278$$

$$Xe^{-rT}N = 40e^{-0{,}1.0{,}5} = 38{,}0492$$

Temos então que:

$$C = 42N(0,7693) - 38,0492N(0,6278)$$

$$P = 38,0492N(-0,6278) - 42N(-0,7693)$$

Utilizando a função dist.normp do Excel (distribuição cumulativa normal padrão), encontramos:

$$C = 42.\ 0,7791 - 38,0492.\ 0,7349 = 4,76$$

$$P = 38,0492.\ 0,2651 - 42.\ 0,2209 = 0,81$$

Desta forma, considerando-se que o preço da opção é de R$40, para que o comprador da opção de compra não tenha lucro ou prejuízo, a ação deveria estar em R$44,76 (R$40 + R$4,76), ou seja, ela deveria subir R$2,76 (R$44,76 - R$42). Analogamente, para que o comprador da opção de venda não tenha lucro nem prejuízo, o valor da ação deveria ser de R$39,19 (R$40 - R$0,81), ou seja, ela deveria cair R$2,81 (R$42 – $39,19).

2.4 Estudo das Gregas

As Gregas são variáveis derivadas da fórmula de Black e Scholes que mostram a sensibilidade e o comportamento dos preços às suas variações em relação a quatro fatores:

1. Mudança do Preço do Ativo Subjacente;
2. Mudança na Taxa de Juros;
3. Mudança na Volatilidade do Ativo Subjacente;
4. Mudança no Tempo.

Cada Grega mede um aspecto diferente na formação do preço da opção, são elas:

2.4.1 Delta

O Delta mede a variação do preço da opção em relação à variação de uma unidade monetária no ativo subjacente. Como por exemplo, se uma opção PETRK32 esteja valendo R$ 20,00 e seu Delta seja de 40% , isso mostra que caso a ação suba R$ 1,00, sua opção irá subir R$ 0,40 , no caso citado , irá custar R$ 20,40. Na prática, os investidores escolhem os papéis com Delta acima de 85% para poder aproveitar o mesmo movimento de subida das ações. Obviamente que os papéis com maiores Deltas irão custar mais dinheiro, ou seja, a escolha da opção deve levar em conta o Delta e o preço que é acessível a cada operador.

2.4.2 Gamma

O Gamma mede a variação do Delta em relação à variação de uma unidade monetária no ativo subjacente. Abaixo segue um exemplo para ficar mais claro com uma opção da ação VALE05 À R$ 31,00 com vencimento para 11/11/2008.

- Opção: VALEF26
- Strike (preço de exercício): R$ 25,50
- Delta: 97,80 %
- Gamma: 1,40%

Caso o ativo (VALE05), cotado no exemplo à R$ 31,00, fosse alterado para o preço de R$ 32,00, o que aconteceria com o Delta? Deve-se somar o valor do Gamma ao Delta, no caso o Delta passaria a valer 0, 0140+0, 9780 = 0, 9920 ou 99,20%.

2.4.3 Theta

O Theta mostra quanto a opção perde a cada dia que passa, ou seja, quanto a opção vai perder ao longo dos dias. Abaixo segue um exemplo com uma opção da ação VALE05 cotada à R$ 31,80 com vencimento para 11/11/2008.

- Opção: VALEF26
- Strike (preço de exercício): R$ 27,48
- Prêmio (valor justo da opção segundo Black e Scholes): R$ 4,55
- Theta: R$ 0, 0330

Quanto à opção com Strike R$ 27,48 perde a cada dia? Basta subtrair o valor de Theta ao prêmio da opção. Nesse caso, o prêmio passaria a valer R$ 4, 517 (4,55-0 0330).

2.4.4 Vega

A Vega mede o comportamento do prêmio em relação a mudança na sua volatilidade. Abaixo segue o mesmo exemplo anterior para exemplificar a Vega.

- Opção: VALEF26
- Strike: R$ 27,48
- Prêmio: R$ 4,55

- Vega: R$ 0, 0087

Caso a volatilidade do papel VALE05 aumentasse em 1%, deve-se somar o valor de Vega ao prêmio, passando a valer 4,55 + 0,0087 = R$ 4,5587.

Caso a volatilidade do papel VALE05 caísse em 1% ,deve-se diminuir o valor de Vega ao prêmio , passando a valer 4,55 – 0,0087 = R$ 4,5413.

2.4.5 Rho

A RHO mede o comportamento do prêmio em relação a mudança nas taxas de juros. Abaixo segue o mesmo exemplo anterior para exemplificar RHO.

- Opção: VALEF26
- Strike: R$ 27,48
- Prêmio: R$ 4,55
- Rho: R$ 0, 0074

Caso a taxa de juros aumentasse em 1%, deve-se somar o valor de RHO ao prêmio, passando a valer 4,55 + 0,0074 = R$ 4,5574.

Caso a taxa de juros caísse em 1%, deve-se diminuir o valor de RHO ao prêmio, passando a valer 4,55 – 0,0074 = R$ 4,5426.

3 Precificando Opções

O objetivo desse capítulo será precificar o ativo de maior liquidez negociada na BMF & BOVESPA (Petrobras), através da *Black and Scholes Calculadora de Opções (www.blackandscholes.com.br)*, usada no mercado para análise de opções, a fim de avaliar se os preços dos derivativos praticados estão coerentes com a metodologia Black & Scholes. Após a precificação, o capítulo também mostrará uma análise de sensibilidade através das Gregas dos resultados obtidos. Visto isso , o capítulo irá abordar como os modelos de precificação de opções pode ser inserido na Engenharia de Produção.

3.1 Aplicando B&S Na Petrobras

Os parâmetros para esse exemplo de precificação, através da *Black and Scholes Calculadora de Opções (acessível em www.blackandscholes.com.br)* será a opção PETRL20 com **vencimento** em 20/12/2010, **preço de exercício** R$ 19, 88, **volatilidade** histórica de 01 mês, e **taxa de juros** de 10,75 a.a, como segue abaixo:
A figura 01 mostra os principais dados do *strike* (preço de exercício) calculado.

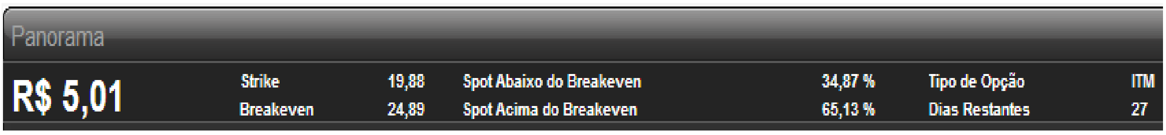

Figura 01: Interface da B&S Calculadora de Opções

- **Preço teórico do *strike* calculado**
- ***Strike*** – Preço de Exercício
- ***Breakeven*** – O *Breakeven* é a soma do *Strike* com o Preço Teórico. Ele é usado para informar quando você estará perdendo ou ganhando dinheiro. Por exemplo: Se você comprar uma opção a seco por R$ 5,00 e de *strike* R$ 20,00, o *breakeven* será R$25,00, ou seja, o investidor começa a ganhar dinheiro se o valor da opção estiver acima do *breakeven*.
- ***Spot* Abaixo do *Breakeven*** – Esta é a probabilidade do preço do ativo subjacente, *spot*, ficar abaixo do *breakeven*. Por exemplo: Se o preço da ação estiver R$25, o *breakeven* R$22, e o Spot Abaixo do *Breakeven* 30%, quer dizer que o preço da ação tem 30% de chance de ficar abaixo de R$22.

- **Spot Acima do Breakeven** – Esta é a probabilidade do preço do ativo subjacente, *spot*, ficar acima do *breakeven*. Por exemplo, se o preço da ação estiver R$25, o *breakeven* R$22, e o *Spot* Abaixo do *Breakeven* 70%, quer dizer que o preço da ação tem 70% de chance de ficar acima de R$22.
- **Dias Restantes** – São os dias restantes para o vencimento da opção.

3.2 Preenchimento de Parâmetros

A figura 02 mostra como são preenchidos cada parâmetro para que se possa calcular a opção desejada

Figura 02: Interface da B&S Calculadora de Opções

Nela, tem-se:

- **Valor do Ativo Subjacente** – Conhecido também como *Spot*, este é o valor da ação no momento do cálculo, no nosso caso: PETR4 cotada no dia 23/11/201 à R$ 24,73.
- **Preço de Exercício** – Conhecido também como *strike*, este é o valor garantido pela opção, no nosso caso R$19,88.
- **Volatilidade** – Esta é a volatilidade do *Spot* no ano. É usual que se escolha um período igual ao do vencimento das opções, ou seja, se faltam 03 meses para o vencimento, é razoável escolher um período de volatilidade de 03 meses.

- **Diferença entre os *Strikes* –** Este valor é *default* para o cálculo; ele é usado para calcular os prêmios e gregas para toda uma série. Por exemplo, se você quer calcular a opção VALEC20, com a diferença entre os *strikes* igual a 2, as opções calculadas serão: VALEC22, VALEC24, VALEC26. No mercado, geralmente é usada uma diferença de 2 entre os preços das ações.
- **Taxa de Juros (%) –** Esta é a taxa SELIC aplicada no cenário econômico.

3.3 Análise dos Resultados

A figura 03 mostra os dados calculados depois do preenchimento dos parâmetros. Pode-se então fazer uma análise global dos resultados incluindo uma análise de sensibilidade através das gregas. Todos os dados calculados serão explicados conforme abaixo:

Strike	Prêmios	Intrínseco	Extrínseco	Delta	Gamma	D/G	Theta	Vega	Rho	Spot Abaixo	Spot Acima
19,88	5,0105	4,85	0,1605	99,57 %	0,59 %	168,76	-0,0063	0,0009	0,0145	0,56 %	99,44 %
21,88	3,0844	2,85	0,2344	93,72 %	5,69 %	16,47	-0,0109	0,0083	0,0149	7,43 %	92,57 %
23,88	1,4651	0,85	0,6151	70,33 %	15,97 %	4,40	-0,0186	0,0233	0,0118	32,77 %	67,23 %
25,88	0,4876	0,00	0,4876	35,04 %	17,10 %	2,05	-0,0173	0,0249	0,0061	68,15 %	31,85 %
27,88	0,1093	0,00	0,1093	10,87 %	8,60 %	1,26	-0,0082	0,0125	0,0019	90,68 %	9,32 %
29,88	0,0167	0,00	0,0167	2,15 %	2,37 %	0,91	-0,0022	0,0035	0,0004	98,27 %	1,73 %
31,88	0,0018	0,00	0,0018	0,29 %	0,40 %	0,73	0,0004	0,0006	0,0001	99,78 %	0,22 %
33,88	0,0001	0,00	0,0001	0,03 %	0,05 %	0,60	0,0000	0,0001	0,0000	99,98 %	0,02 %
35,88	0,0000	0,00	0,0000	0,00 %	0,00 %	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	100,00 %	0,00 %
37,88	0,0000	0,00	0,0000	0,00 %	0,00 %	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	100,00 %	0,00 %
39,88	0,0000	0,00	0,0000	0,00 %	0,00 %	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	100,00 %	0,00 %

Figura 03: Interface da B&S Calculadora de Opções

- ***Strike* –** Preço de Exercício, no nosso caso R$ 19,88;
- **Prêmios** - Preço Justo, de acordo com Black & Scholes; no nosso caso R$ 5,0105;
- **Delta –** No nosso caso, está representando que caso o ativo PETR4 suba em seu valor de R$ 1,00 e a opção PETRL20 irá subir R$ 0,9957, ou seja, o seu derivativo está acompanhando quase que totalmente as oscilações do ativo subjacente;

- **Gamma** – No nosso caso, a leitura que Gamma nos oferece é que, caso o ativo PETR4 suba em seu valor de R$ 1,00, o seu Delta passaria a valer 0,0059+0,9957 = 1,0016 ou 100,16%;
- **Theta** – No nosso caso, Theta mostra que a opção PETRL20 perde em seu valor R$ 0,0063 por dia;
- **Vega** – Caso a volatilidade de PETR4 aumente em 1%, iremos somar o valor de vega ao prêmio, ou seja: o prêmio passaria a ser 0,0009 + 5,0105 = 5,0114;
- **Rho** – Caso a taxa de juros aumentasse em 1% , iremos somar o valor de Rho ao valor do prêmio , ou seja: 0,0145+5,0105 = 5,0250.
- ***Spot* Abaixo** - Esta é a probabilidade do preço do ativo subjacente, *spot*, ficar abaixo do *strike*. No nosso caso, o preço de PETR4 está R$24,73, o *strike* R$19,88, e o *Spot* Abaixo igual a 0,56%. Isto quer dizer que o preço da ação tem 0,56% de chance de ficar abaixo de R$19,88;
- ***Spot* Acima** – É a probabilidade do preço do ativo subjacente ficar acima do *strike*. No nosso caso, o preço da PETR4 está R$24,73, o *strike* R$19,88 e o *Spot* Acima igual a 99,44%. Isto mostra que o preço da ação tem 99,44% de chance de ficar acima de R$19,88.

Pode-se agora, depois dessa explicação, comparar todos os resultados dos prêmios (preço justo) de Black & Scholes com as cotações reais diárias da BMF&BOVESPA. Abaixo, tem-se uma tabela com esse comparativo no dia 23/11/2010.

COMPARATIVO B&S E BMF&BOVESPA

ATIVO	DERIVATIVO	PREÇO B&S	PREÇO BMF&BOVESPA	Dia Cotação
PETR4	PETRL20	R$ 5,01	R$ 5,03	23/11/2010
PETR4	PETRL22	R$ 3,08	R$ 3,24	23/11/2010
PETR4	PETRL24	R$ 1,46	R$ 1,53	23/11/2010
PETR4	PETRL26	R$ 0,48	R$ 0,43	23/11/2010
PETR4	PETRL28	R$ 0,11	R$ 0,12	23/11/2010
PETR4	PETRL30	R$ 0,02	R$ 0,04	23/11/2010
PETR4	PETRL32	R$ 0,00	R$ 0,02	23/11/2010
PETR4	PETRL34	R$ 0,00	R$ 0,01	23/11/2010
PETR4	PETRL36	R$ -	R$ -	23/11/2010
PETR4	PETRL38	R$ -	R$ -	23/11/2010
PETR4	PETRL40	R$ -	R$ -	23/11/2010

Tabela 01: comparativo B&S e BMFBOVESPA

Pode-se observar, neste exemplo, que as oscilações dos preços dos derivativos da Petrobras tendem para o *preço justo* calculado através do modelo Black & Scholes. Exemplos como o mostrado acima expõe a potencialidade do modelo matemático desenvolvido por Black e Scholes, pela sua capacidade de precificar o valor da opção de um ativo, ao permitir avaliar, na mesma base de cálculo, o valor esperado de um determinado ativo, com o cálculo de valor presente, considerando a incerteza (volatilidade) dos valores em questão

.

3.4 Potenciais Aplicações de Modelos de Precificação de Opções na Engenharia de Produção

No atual ambiente globalizado, marcado por constantes mudanças, as empresas estão enfrentando bastante competitividade, impondo as mesmas uma capacidade de se adaptar a cenários diversos em um curto espaço de tempo. Esse tipo de ambiente faz com que elas atuem de maneira eficaz e competitiva fazendo com que se aprimorem cada vez mais. De acordo com Kupfer(1992) a competitividade é a função da adequação das estratégias das empresas individuais ao padrão de concorrência. E que, nesse mercado, seriam competitivas aquelas que adotassem uma postura de inovação e investimento, que, nesse caso, seriam mais adequados ao padrão de concorrência. A flexibilidade gerencial proporciona a empresa verificar o melhor momento de investir, de forma a maximizar os lucros e minimizar as perdas, o que nos dias atuais é de fundamental importância para se ter uma vantagem competitiva perante a concorrência. Conforme Minardi (2004) "A flexibilidade gerencial é uma possibilidade, mas não uma obrigação de alterar um projeto em diferentes etapas em sua vida útil operacional.

O modelo de precificação de opções reais é um exemplo de como a flexibilidade gerencial pode trazer vantagem competitiva às empresas. Esse modelo propõe analisar projetos valendo-se dos métodos de precificação de opções financeiras (Black & Scholes, por exemplo). Rygolon (1999) propôs uma analogia que justifica a utilização de Opções Reais para avaliação de investimentos: "uma empresa que possui uma oportunidade de investimento irreversível tem a opção de adiar o investimento (opção de postergar). Ela possui o direito, mas não a obrigação, de comprar um ativo (o projeto) no futuro, a um preço de exercício (investimento inicial). Quando a empresa investe, ela exerce a opção e paga um custo de oportunidade igual ao valor investido. O exercício da opção (investimento) é irreversível, mas a empresa tem sempre a possibilidade de postergar o investimento, até que as condições do mercado tornem-se mais favoráveis e para que se possam obter mais informações a respeito do projeto e dos fatores que o influenciam, diminuindo assim, algumas incertezas".

Já existem grandes empresas e estudos feitos aplicando modelos de opções reais em seus departamentos de Engenharia Financeira para análises de mercado, novos projetos, análise do sistema produtivo da fábrica, compras de insumos, avaliação de empresas, enfim, um leque muito vasto de aplicações que não é restrito ao mercado financeiro. . Um exemplo disso tem sido na área de manufatura flexível; a flexibilidade conseguida pelos sistemas flexíveis de manufatura, tecnologia flexível de produção ou outro maquinário que tenha múltiplo uso, tem sido analisada com a perspectiva das opções por Kulatilaka (1988) e Triantis & Hodder (1990). Já Alvarez (1999) usa as opções para discorrer sobre a saída ótima do mercado e a avaliação de projetos sob demanda incerta. BALDWIN (1987), fala sobre a possibilidade de instalação de uma planta fabril em varios *sites*, a possibilidade de *timing* e a de construção seqüencial quando as empresas analisam o cenário do mercado global. Dias (1996) usa, em sua dissertação de mestrado, análises de investimentos sob incerteza em projetos de exploração e produção de petróleo. Já Mcdonald & Siegel (1985) desenvolvem e estudam uma metodologia para avaliar projetos de investimentos, onde existe uma possibilidade de parar a produção por determinado tempo, sem custos, quando a variável custo excede os ganhos operacionais. Em entrevista (Nichols, 1994), a CFO J. Lewent, de uma grande empresa farmacêutica dos EUA, a Merck & Co, Inc., declarou que a empresa usa a teoria das opções especialmente na análise de *joint ventures* para a pesquisa e desenvolvimento de novos produtos, citando a seguinte frase "*para mim, todos os tipos de decisões de negócios são opções.*

Como toda teoria incipiente e em processo de difusão e estabilização, as opções reais, assim como, o modelo de Black & Scholes apresentam suas limitações, sendo a maior dificuldade para sua difusão e utilização pelas empresas ainda é, principalmente, a complexidade das equações e dos modelos.

4 Considerações Finais

O presente trabalho se propôs a mostrar modelo matemático de precificação de opções no mercado derivativo e sua adequação com a realidade praticada. Para isso foi necessário mostrar uma base conceitual do modelo proposto além de um exemplo com o ativo da Petrobras como forma de mostrar sua adequação ao mercado. Pelo fato do tema do presente trabalho ser, relativamente novo, teve-se uma limitação em relação ao acervo de publicações, como, teses, livros, periódicos, etc.

A abordagem de modelos de precificação de opções pode servir como exemplos de novos estudos que vão permitir mostrar a importância da utilização de modelos matemáticos no suporte à tomada de decisão não somente no âmbito dos mercados de capitais e, sim também, em decisões estratégicas de grandes empresas.

A Engenharia de Produção pode se utilizar desses modelos para aplicação em diversas áreas, como pesquisa e desenvolvimento de novos produtos (P&D), análise de implantação de novas plantas fabris, gestão de projetos aplicando modelos de precificação fazendo com que a gestão fique mais flexível, tornando o projeto mais competitivo para mudanças repentinas, otimização de compras de commodities analisando se no mercado os preços praticados estão supervalorizados ou não, análises de viabilidade econômica de novos projetos, elaboração de estratégia empresarial.

Os resultados deste trabalho contribuem, portanto, para aliar o conhecimento teórico com aplicações práticas além ajudar a disseminar assuntos como os modelos de precificação de opções no ambiente da engenharia que será de fundamental importância no decorrer da formação de qualquer profissional na área das ciências exatas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ, L.H.R.(1999) *, Optimal Exit and Valuation Under Uncertainty: A Real Options Approach , European Journal of Operation Research* , v114;

B&S CALCULADORA DE OPÇÕES, *www.blackandscholes.com.br ;*

BALDWIN, C. Y. (1987), *Competing for Capital in a Global Environment*, Midland Corporate Finance;

BARBEDO, C. H. da S.; ARAÚJO, G. S.; LEMGRUBER, E. F. Inclusão do decaimento temporal na metodologia delta-gama para o cálculo do VaR de carteiras compradas em opções no Brasil. Banco Central do Brasil. Working Paper Series, n. 79, 2003;

BLACK, Fischer; MYRON Scholes (1973). *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities*". *Journal of Political Economy;*

BRAUMANN, C.A, 2005. Introdução as Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações. Ericeira:Sociedade Portuguesa de Estatística;

CASSETTARI, Ailton, 2001.

DIAS, M.A.G(1996) , Investimento sob incerteza em Exploração de Petróleo , Dep. De Eng. Industrial , PUC/RJ , Dissertação de Mestrado , Agosto de 1996;

DIXIT, A. K., PINDYCK, R. S. *Investment Under Uncertainty*. New Jersey: Princeton University Press, 1994;

DOS SANTOS, Evaristo. Dicionário de Derivativos. 1 ed. São Paulo: Atlas , 1998.

HEIDERICH, R.H, 2009. Um Estudo do Modelo de Black Scholes de Precificação de Derivativos. Monografia, IMECC-UNICAMP, Campinas / São Paulo.

HISSA,Maurício. Investindo em Opções, 8° Edição. São Paulo: Elsevier Editora, 2007;

HULL, J. C. Introdução aos mercados futuros e de opções. 2. ed. São Paulo. Cultura Editores Associados: 1996;

HULL, J. C. *Options, futures & others derivatives*. 5. ed. Upper Saddle River. Prentice Hall: 2003;

HULL, John. Introdução aos Mercados Futuros e de Opções, 4a. edição. São Paulo: Bolsa de Mercadoria & Futuros / Cultura Editores Associados, 2005;

KULATILAKA, N. (1988), *Valuing Flexibility of Flexible Manufacturing Systems, IEEE Transactions on Engineering Management*;

Kupfer,David. Padrões de Concorrência e Competitividade. Anais do XX Encontro Nacional da ANPEC ,Campos do Jordão , São Paulo , 1992;

MERTON, Robert C. (1973). "*Theory of Rational Option Pricing*". *Bell Journal of Economics and Management Science;*

MINARDI, A. M. A. F. (2000), Teoria de Opções Reais Aplicada a Projetos de Investimentos, Revista de Administração de Empresas /EAESP/FGV, São Paulo;

MINARDI, A. M. A. F. (2004), Teoria de Opções Reais Aplicada a Projetos de Investimentos, São Paulo , Atlas;

MINARDI, A.M.A.F.(2008), Probabilidade de Inadimplência de Empresas Brasileiras Refletida nas Informações do Mercado Acionário – ANPAD – Curitiba.;

NICHOLS, N. A. (1994), *Scientific Management at Merck: an interview with CFO Judy Lewent, Harvard Business Review,* Jan/Feb;

NUNES, A. da C. Testando o modelo de Black & Scholes para o mercado brasileiro. Resenha 123. BMF;

OGA, L.F, 2007. A Teoria da Ciência no Modelo Black Scholes de Apreçamento de Opções. Dissertação de Mestrado, FFLCH – USP, São Paulo;

PRUDENTE , L.F, 2009. Estimação da Superfície de Volatilidade dos Ativos através da Equação de Black Scholes Generalizada. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas/São Paulo;

RUBASH, Kevin. *A Study of Option Pricing Models*. Bradley University, Foster College of Business Administration, Peoria, Illinois, USA, 2001;

SILVA Neto, L. A. Derivativos: definições, emprego e risco. 4. ed. São Paulo: Atlas. 1997;

SILVA Neto, L. A. Opções: Do tradicional ao exótico. 2. ed. São Paulo: Atlas. 1996;

SOUZA, Antônio & BARRETO, Sandro. Avaliação de Ativos Intangíveis: Algumas Técnicas para Valorizar Tecnologia. Boletim Técnico Petrobrás no. 42, pág 09-17, Rio de Janeiro, 1999;