UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
MATEMÁTICA – LICENCIATURA

MATEUS CHAGAS LIMA

DIFERENÇAS E RELAÇÕES ENTRE OS CONCEITOS DE DERIVADA E DIFERENCIAL: uma contribuição para a interdisciplinaridade à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Caruaru
2022

MATEUS CHAGAS LIMA

DIFERENÇAS E RELAÇÕES ENTRE OS CONCEITOS DE DERIVADA E DIFERENCIAL: uma contribuição para a interdisciplinaridade à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Cleiton de Lima Ricardo.

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Lima, Mateus Chagas.
Diferenças e relações entre os conceitos de derivada e diferencial: uma contribuição para a interdisciplinaridade à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas / Mateus Chagas Lima. - Caruaru, 2022.
54p. : il., tab.

Orientador(a): Cleiton de Lima Ricardo
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2022.

1. Álgebra Linear. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Derivada. 4. Diferencial. 5. Representações. I. Lima Ricardo, Cleiton de. (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

MATEUS CHAGAS LIMA

DIFERENÇAS E RELAÇÕES ENTRE OS CONCEITOS DE DERIVADA E DIFERENCIAL: uma contribuição para a interdisciplinaridade à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 16/08/2022.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Cleiton de Lima Ricardo (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Marcos Luiz Henrique (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profº. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

À Deus pela dádiva da vida e que, por sua infinita bondade, me proporciona oportunidades cotidianas de oferecer melhores coisas para o mundo ao meu redor. Aos meus pais que, juntos, formam a pedra angular da minha constituição enquanto ser humano. À minha família. Aos professores que fizeram parte da minha jornada acadêmica, em particular ao professor Dr. Cleiton de Lima Ricardo pelo acompanhamento e orientações gentilmente fornecidos para o desenvolvimento deste trabalho. E, de modo geral, aos meus amigos e colegas com os quais tenho o privilégio de partilhar experiências e aprendizados enquanto cumprimos nossa missão nesta breve passagem que chamamos de vida.

[...] O Senhor é o Deus eterno, o criador de toda Terra. Ele não se cansa nem fica exausto; sua sabedoria é insondável. Ele fortalece o cansado e dá vigor ao que está sem forças. Até os jovens se cansam e ficam exaustos, e os moços tropeçam e caem; mas aqueles que esperam no Senhor renovam as suas forças. Voam alto como águias; eles correm e não ficam exaustos, eles andam e não se cansam.

Bíblia Sagrada. Isaías, 40: 28 – 31

RESUMO

Este trabalho consiste em apresentar uma investigação acerca de uma abordagem interdisciplinar a partir das relações entre derivada e diferencial em funções reais. Para isto, analisamos a apresentação destes temas em livros didáticos do ensino superior à luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (1995). Utilizamos como critério para definição dos livros analisados, o Programa dos Componentes Curriculares por Período (PCCP) do curso de Matemática – Licenciatura, Centro Acadêmico do Agreste, da Universidade Federal de Pernambuco. A partir das análises, verificamos as noções iniciais trazidas por alguns livros que constam nas referências bibliográficas apresentadas no PCCP, bem como as interpretações atribuídas às derivadas e às diferenciais em funções reais. Com isso, destacamos uma abordagem que conecta as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral II e a Álgebra Linear, evidenciando assim que tal abordagem, segundo a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, proporciona um melhor desenvolvimento cognitivo ao estudante, garantido por meio da mobilização entre diferentes tipos de registros.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Cálculo Diferencial e Integral. Derivada. Diferencial. Representações.

ABSTRACT

This work consists of presenting an investigation of an interdisciplinary approach based on the relations between derivatives and differentials in real functions. For this, we analyzed the presentation of these themes in higher education textbooks in the light of the Theory of Registers of Semiotic Representations by Raymond Duval (1995). We used as a criterion to define the analyzed books, the Program of Components by Period (PCCP) of the Mathematics – Licentiate course, Agreste Academic Center, Federal University of Pernambuco. From the analysis, we verified as initial notions brought by some examples of functions as interpreted to derivatives and references in reals. With this, we highlight an approach that connects the disciplines of Differential and Integral Calculus I, Differential and Integral Calculus II and Linear Algebra, thus showing that such an approach, according to the Theory of Registers of Semiotic Representations, provides a better cognitive development to the student, secured by moving between different types of records.

Keywords: Linear Algebra. Differential and Integral Calculus. Derivative. Differential. Representations.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O nível de abstração exigido nos cursos de graduação, em particular na área de exatas, revela-se como um desafio natural aos estudantes que estão nessa etapa de ensino. No entanto, a abordagem prática e superficial de conceitos elementares presentes nas disciplinas iniciais da graduação, faz com que o processo de aprendizagem não aconteça de forma íntegra, comprometendo a formação desse estudante. Isto é, a construção da passagem que direciona o conhecimento matemático ao saber matemático (apreensão de um conceito) não se dá de forma consistente.

Tendo em vista estes fatos, o presente trabalho trata-se de uma investigação voltada para o ensino superior, especificamente para os cursos de graduação nas áreas de ciências exatas e naturais. E temos por intuito, não apenas realizar um aprofundamento na definição e distinção entre dois conceitos recorrentes em disciplinas desta área das ciências; como também, analisar a forma como essas temáticas são apresentadas nos livros didáticos do ensino superior; bem como, apresentar uma abordagem interdisciplinar oriunda da relação entre tais conceitos.

Contudo, inicialmente tomamos como referencial teórico para nossa investigação, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval (1995). Esta teoria foi selecionada por fornecer subsídios fundamentais para que se possa analisar as abordagens utilizadas, sejam elas algébricas, geométricas ou na própria língua materna, para apresentação e construção de um determinado conceito. Especificamente a TRRS trata dos aspectos cognitivos do conhecimento matemático que levam ao saber matemático, isto é, ela trata dos aspectos cognitivos que levam a apreensão e consolidação de um determinado conceito matemático. Para isso a TRRS considera as relações existentes entre um objeto matemático e seus diferentes representantes.

Quanto à interdisciplinaridade, foi utilizada a perspectiva trazida por Japiassú (1976), segundo a qual o conceito “interdisciplinar” não apresenta uma definição acabada e pode ser compreendido de modos distintos, a depender do pensamento teórico sobre o qual ele está sendo considerado. No entanto, o autor indica que a ideia de interdisciplinaridade passa por uma cooperação entre disciplinas que converge à uma determinada finalidade, partindo de uma axiomática comum a estas disciplinas. Desse modo, nosso trabalho considera a interdisciplinaridade como uma abordagem capaz de integrar diferentes disciplinas de uma mesma etapa de ensino a partir de uma temática comum, visando um determinado objetivo.

Neste sentido, temos como foco desta pesquisa, a relação e a distinção entre os conceitos de diferencial e derivada de funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$. Sendo estas temáticas apresentadas, inicialmente, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), a investigação da abordagem interdisciplinar envolverá as disciplinas de CDI I e CDI II, visto que, nestas disciplinas os conceitos considerados são estudados acerca de funções definidas, respectivamente, em conjuntos abertos da reta real $\mathbb{R}$, e em conjuntos abertos do espaço $\mathbb{R}^n$ (em particular, para o caso $n = 2$). Com isso, pretendemos ressaltar os conteúdos de tais disciplinas sob o ponto de vista teórico, e não apenas o procedimento mecânico comumente abordado, por exemplo, com as derivadas parciais ou com as aproximações lineares.

Com essa perspectiva, foi utilizada uma interpretação dos conceitos de derivada e diferencial de uma função real que está intrinsecamente relacionada com temas presentes na disciplina de Álgebra Linear (AL), a saber: transformação linear e matriz de uma transformação linear. Apresentamos a definição de diferencial e derivada de uma função como sendo, respectivamente, uma transformação linear e a matriz associada a esta transformação. Com isso, esta interpretação auxilia no processo de distinção entre as ideias de derivabilidade e diferenciabilidade de funções; algo que pode não ocorrer na disciplina de CDI I pelos seus estudos serem desenvolvidos acerca de funções definidas em conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, onde a derivada (matriz da transformação linear) em um dado ponto do domínio, trata-se de uma matriz unitária e, portanto, um número real.

A importância destes temas também é ressaltada por Aguiar, Siple e Moro (2012)

> O ensino de derivada e diferencial é imprescindível para todos os cursos de ciências exatas e este conteúdo está presente no currículo dos cursos de todas as engenharias e no currículo das chamadas ciências básicas (matemática, física e química). Em nível avançado a derivada está presente em todas as áreas do conhecimento. (AGUIAR, SIPLE e MORO, 2012, p. 3).

Evidenciando-se assim que o entendimento das diferentes representações de diferenciais e derivadas se faz necessário para o estudo de fenômenos naturais descritos e modelados por funções de uma ou mais variáveis, essa pesquisa justifica-se por se tratar de um material acadêmico que fornece recursos para uma análise mais íntegra, sob o ponto de vista interdisciplinar, norteada pela TRRS, de conceitos presentes nos livros didáticos do ensino superior. Contribuindo assim, para que o estudante tenha uma base teórica mais sólida que o auxilie tanto na produção de pesquisas científicas, quanto em um melhor aproveitamento não apenas nos cursos de graduação como de pós-graduação voltados à área.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Investigar a abordagem interdisciplinar oriunda da relação entre derivada e diferencial fundamentada pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Discorrer sobre a Teoria dos Registros de Representações Semióticas como uma ferramenta para a análise de conceitos;
- Apresentar e distinguir os conceitos de derivada e diferencial sob a ótica de transformação linear e matriz de uma transformação linear;
- Analisar as representações utilizadas por livros didáticos do ensino superior para introduzir os conceitos de derivada e diferencial;
- Apresentar a relação entre derivada e diferencial como meio interdisciplinar;
- Avaliar a abordagem interdisciplinar a luz da Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

3 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) é uma ferramenta que trata dos aspectos cognitivos do conhecimento matemático necessários para o desenvolvimento e consolidação do saber matemático. Segundo ela, os objetos matemáticos precisam ser acessados através de suas representações e o saber matemático ocorre quando há a mobilização dessas representações. Para tanto, tal teoria é fundamentalmente construída levando em consideração a importância de se distinguir, inicialmente, um objeto de sua representação.

Quando se trata de objeto matemático é feita, na verdade, uma referência a uma definição que não possui materialidade, isto é, os objetos matemáticos tal como são definidos, sejam números, figuras geométricas ou outros elementos, não podem ser visualizados fisicamente. As origens desse pensamento remontam da Grécia antiga, onde filósofos e matemáticos já discutiam a natureza do objeto matemático. Segundo Ponte et al. (1997), pelo menos desde Platão, os matemáticos da época já trabalhavam com a noção de que os objetos sobre os quais eram desenvolvidos o conhecimento matemático, sejam números, figuras geométricas ou grandezas, eram acessados apenas por abstração, como imagens geradas a partir de elementos acessíveis aos sentidos.

Nesse sentido, no que diz respeito à percepção, ao entendimento e ao acesso a um objeto matemático, Duval (2012) reforça que "os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos 'reais' ou 'físicos'". Consequentemente, faz-se necessário a utilização de representantes. No entanto, a possibilidade de existência de várias representações para um mesmo objeto ressalta que este não pode ser confundido com um de seus representantes. Diante dessa perspectiva, Duval (2011) afirma que: "Ao contrário do objeto, suas representações mudam ao mesmo tempo de acordo com os pontos de vista considerados e os sistemas usados para obter uma representação dele. O objeto aparece como o invariante de todas as variações possíveis de suas representações." (DUVAL, 2011, p. 4).

Esta diferenciação ressalta a necessidade de se utilizar mais de um representante para o desenvolvimento do saber matemático. No entanto, apesar das representações assumirem um papel decisivo no que se refere à compreensão de um objeto matemático, elas não são as estruturas mais simples. Na verdade, uma representação é um conjunto de componentes mais elementares, os signos, munida de regras bem definidas. Esses componentes mais simples foram definidos por Duval (2011): "Signos são unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chaves, ou gestos de mão.

O que equivale a considerar os signos como as coisas pelas quais é preciso começar para dar um sentido.” (DUVAL, 2011, p. 18).

Percebe-se, portanto, que embora os signos sejam as estruturas mais elementares que atribuem significado a algo, eles por si só não são suficientes. Para isso, as representações podem ser consideradas as estruturas mais básicas dotadas de coerência organizacional. Decorre deste fato sua estreita relação com o objeto matemático, pois cada representação, isto é, cada conjunto de signos dotados de regras bem definidas, apresenta uma característica particular do objeto representado. Contribuindo, assim, para o acesso a ele.

Logo, percebe-se que, devido à natureza do objeto matemático, sua compreensão consiste em um processo tanto complexo quanto paradoxal. Pois, à medida em que as representações são necessárias para se acessar um objeto; é necessário, também, o conhecimento deste objeto para poder representá-lo, evidenciando-se seus diferentes aspectos. Desse modo, é essencial que exista uma abordagem semiótica para este processo.

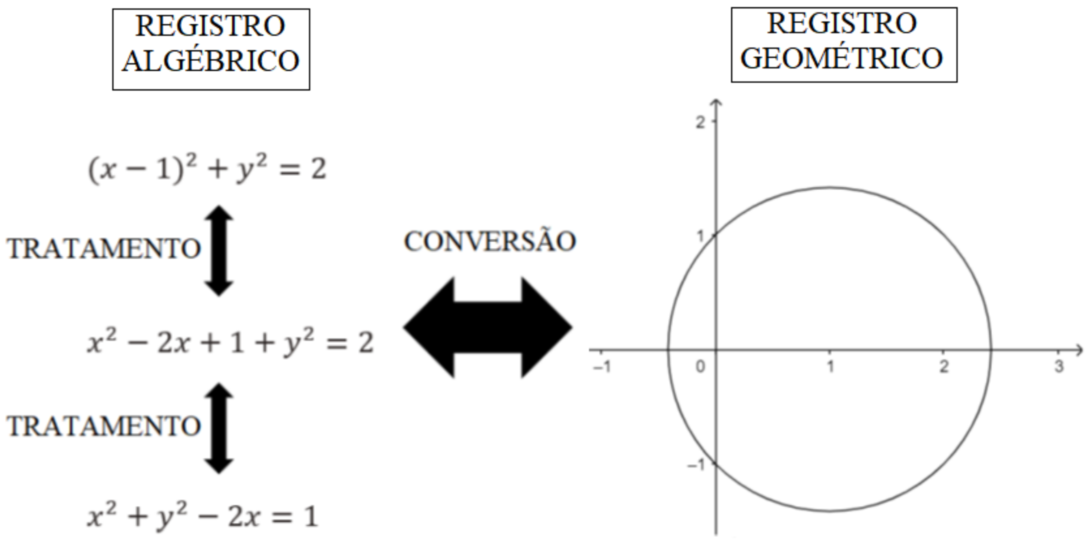
Com abordagem semiótica referimo-nos ao “modo como nós, seres humanos reconhecemos e interpretamos o mundo à nossa volta, a partir das inferências em nossa mente” (NICOLAU et al., 2010, p. 4). Esta perspectiva se trata, na verdade, da semiótica sob o ponto de vista de Charles Sanders Peirce, filósofo, cientista e matemático estadunidense que trouxe contribuições, não só para a semiótica, como também para a lógica e para a matemática. Desse modo, percebemos que a compreensão de um objeto ou situação do mundo real, depende inicialmente da interpretação que atribuímos a partir da nossa representação mental, isto é, a partir da nossa percepção intuitiva. Em particular, o saber matemático está intimamente relacionado aos sistemas semióticos.

Entende-se por sistema semiótico como sendo “um sistema que produz, transmite e interpreta signos de diferentes tipos” (QUEIROZ, 2010, p. 8). Especificamente, para que haja uma distinção entre os sistemas semióticos utilizados na matemática dos outros sistemas semióticos que estão fora da matemática, foi empregado o termo registro (DUVAL, 2015). Além disso, Duval (2011) reforça que um registro é um sistema semiótico particular, caracterizado pelas suas operações cognitivas específicas.

Para indicar os diferentes tipos de registros dentro da atividade matemática, é utilizado o termo registro de representação semiótica. Podendo ser citados como alguns exemplos desses registros: a língua materna, a escrita algébrica, os gráficos e as tabelas. Nesse sentido, os registros de representações semióticas são registros de representações que, além de permitir a formação de uma representação de um determinado objeto, proporciona a realização de duas atividades cognitivas: o tratamento e a conversão.

Enquanto a primeira atividade diz respeito às transformações que ocorrem em um mesmo sistema de representação. A segunda se refere às transformações entre registros de representações diferentes. Esta diferenciação é nítida ao se analisar que, no tratamento, cada etapa que compõem as transformações de um mesmo registro, não possui necessariamente um significado em um outro registro. Em suma, alguns aspectos do objeto matemático são específicos de certos registros de representação.

Figura 1 – Esquema de conversão e tratamento



Fonte: Autor (2022)

Na figura 1, evidencia-se que ao realizar uma manipulação da representação no registro algébrico, essa ação consiste na atividade de tratamento. Enquanto que a conversão consiste no processo de representação em um outro registro, neste caso, é observado a representação do gráfico da equação no registro geométrico. Constata-se assim, que embora ocorram transformações da representação no registro algébrico, estas manipulações não implicam em alterações da representação no registro geométrico.

Desse modo, entende-se que diferentes registros de representações revelam diferentes aspectos de um mesmo objeto matemático. Logo, o processo de aquisição conceitual exige que o estudante seja apresentado a mais de uma representação, pois, caso contrário, haveria uma limitação por parte do estudante quando este fosse exigido a solucionar problemas envolvendo tal objeto.

Com isso, a TRRS salienta que a compreensão de um conceito por parte do estudante ocorre quando este demonstra autonomia em realizar o tratamento, enquanto atividade cognitiva, em mais de um registro de representação, ou seja o estudante também deve ter domínio da atividade cognitiva de conversão. Caso contrário, a limitação da representação de um objeto matemático a um único registro, provoca uma margem de erro no processo de aprendizagem, fazendo que o estudante confunda o objeto com um de seus representantes. Nesta situação, o estudante pode ser capaz de entender e solucionar problemas em um determinado registro, no entanto a aquisição conceitual será comprometida.

Este fato revela que os registros de representações semióticas não são meras ferramentas coadjuvantes no processo de aprendizagem, pelo contrário, elas são necessárias para que haja a apreensão de um conceito. Desse modo, os tipos de registros de representações semióticas adotados, e a forma de abordagem de um determinado objeto matemático, sejam pelos autores dos livros didáticos, seja pelo professor em sala de aula; bem como os exercícios de conversão e tratamento envolvidos, compõem as ferramentas essenciais para que o objeto matemático em questão possa ser apresentado, discutido e compreendido pelos leitores e estudantes.

4 OS CONCEITOS DE DERIVADA E DIFERENCIAL

O CDI é uma fascinante ferramenta desenvolvida ao longo da história da humanidade por várias gerações de matemáticos e estudiosos das ciências exatas. Seu entendimento como um conjunto de técnicas para realização de operações de derivação e integração, remonta ao século XVII, com os trabalhos de Gottfried Leibniz e Isaac Newton; os quais foram desenvolvidos quase que simultaneamente, mas de forma independente. Ao longo dos anos muitas personalidades exerceram significativa influência para o CDI, podendo ser citados: Lagranje, Riemann, Cauchy, Euler, Bernoulli, Laplace e D'Alambert. De um modo geral, estes estudos desenvolvidos podem ser aplicados nas mais diversas áreas das ciências.

A nível acadêmico a disciplina de CDI está presente nos mais diversos cursos de graduação das ciências exatas. Tendo em vista que seu objeto de estudo se trata de funções e suas características e ferramentas associadas, como o limite, a continuidade, a derivada, a diferencial e a integral; o CDI se torna uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas do mundo real que são descritos, ou modelados, por funções de uma ou mais variáveis.

Em particular, os estudos acerca da derivada e diferencial de uma função são relevantes ao se estudar fenômenos naturais ou sociais que estão relacionados a taxas de variação: o deslocamento de uma partícula em função do tempo, a velocidade do fluxo sanguíneo em uma artéria, o cálculo do custo marginal, dentre outros. Na matemática, a compreensão de tais conteúdos é importante para se determinar a inclinação da reta tangente à uma curva em um dado ponto; analisar as aproximações lineares de funções, sejam por retas tangentes ou por planos tangentes; desenvolver a teoria das equações diferenciais e calcular integrais de funções via Teorema Fundamental do Cálculo.

Contudo, existem diversas possibilidades de interpretações e representações nos mais variados registros, para que sejam analisados os conceitos de derivada e diferencial de uma função. Dentre elas, é possível compreender estes temas a partir de uma definição em função de transformação linear e matriz associada a esta transformação.

4.1 A RESPEITO DA ÁLGEBRA LINEAR

Para que sejam desenvolvidos os temas referentes ao CDI, é necessária uma menção prévia a alguns conceitos da AL: espaço vetorial, base, dimensão, combinação linear, dependência e independência linear. Nesse intuito, para a sistematização destes conceitos foi utilizado como base o livro “Álgebra Linear” de Steinbruch e Winterle (1987).

Entende-se por Espaço Vetorial como sendo um conjunto V não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de soma entre seus elementos (os quais são chamados de vetores) e multiplicação por escalar (isto é, para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $u + v \in V$ e $\alpha u \in V$) que, além disso, goza dos seguintes axiomas

A1. $(u + v) + w = u + (v + w)\ \forall\ u, v, w \in V$

A2. $u + v = v + u\ \forall\ u, v \in V$

A3. $\exists\ \mathbf{0} \in V$ tal que $\forall\ u \in V, u + \mathbf{0} = u$

A4. $\forall\ u \in V, \exists\ (-u) \in V$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$

M1. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)\ \forall\ u \in V\ e\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

M2. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u\ \forall\ u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

M3. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v\ \forall\ u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

M4. $1u = u\ \forall\ u \in V$

Outro conceito fundamental para nossas análises trata-se da base de um espaço vetorial. A base $\mathcal{B}_V$ de um espaço vetorial V é um conjunto não vazio de vetores de V que cumpre duas condições:

i) Qualquer vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}_V$, e

ii) Os vetores de $\mathcal{B}_V$ são linearmente independentes.

Entende-se por combinação linear de vetores de $\mathcal{B}_V \subset V$ como sendo a soma finita

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

onde os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, são chamados de coordenadas do vetor $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ com relação à base $\mathcal{B}_V$ e $v_1, \dots, v_n$ são os vetores de $\mathcal{B}_V$.

Dizemos que uma combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}_V$ é linearmente independente se a igualdade

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \tag{1}$$

só for possível quando

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Caso contrário, isto é, se existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que a equação (1) seja satisfeita, então dizemos que a combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}_V$ é linearmente dependente. Além disso, a quantidade de vetores presentes na base de um espaço vetorial é um invariante, ou seja, quaisquer duas bases distintas de um mesmo espaço vetorial apresentam a mesma quantidade de vetores. Por fim, temos que a quantidade de vetores presentes em uma base de um espaço vetorial é definida como a dimensão deste espaço, isto é, se uma base de um espaço vetorial V contem n vetores, dizemos que a dimensão do espaço vetorial V é igual a n, e denotamos por $\dim(V) = n$.

Vale ressaltar que as considerações feitas acerca de espaços vetoriais, se referem a espaços vetoriais de dimensão finita, isto é, espaços vetoriais cujas bases apresentam uma quantidade finita de vetores. Pois, neste trabalho não trataremos de espaços vetoriais de dimensão infinita.

4.1.1 Transformação linear

Definição 1: *Sejam V e W espaços vetoriais. Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, uma aplicação $T: V \to W$ que satisfaz as condições:*

i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

é dita uma transformação linear.

Partindo da definição anterior, V e W são chamados, respectivamente, de espaço vetorial de partida e espaço vetorial de chegada. Associados à uma transformação linear T, temos dois conjuntos importantes: Imagem e Núcleo. A Imagem de uma transformação linear T, denotada por $Im(T)$, trata-se do conjunto dos elementos de W que são imagem de vetores de V pela aplicação T; simbolicamente

$$Im(T) = \{T(v) \in W; v \in V\}.$$

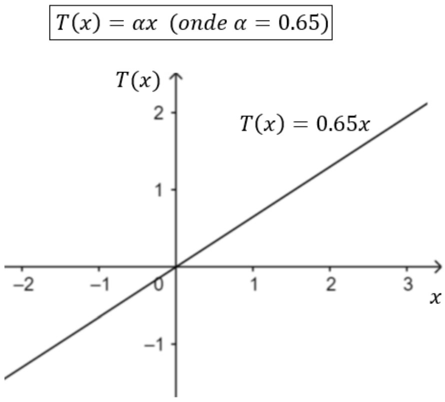
Já o Núcleo de uma transformação linear T, denotado por $N(T)$, trata-se do conjunto dos elementos de V que são levados ao vetor nulo de W (comumente denotado por $\mathbf{0}_W$) pela aplicação T; simbolicamente

$$N(T) = \{v \in V; T(v) = \mathbf{0}_W\}.$$

Em particular, estamos interessados em dois tipos de transformação linear específicos:

1) Seja $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma transformação linear, dada por $T(x) = \alpha x$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Geometricamente podemos interpretar esta transformação como a reta $r \subset \mathbb{R}^2$ que passa pela origem de $\mathbb{R}^2$, cujo coeficiente angular é α.

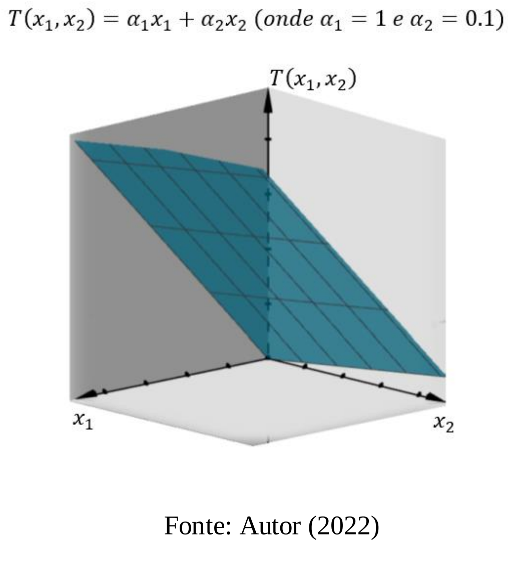
Figura 2 – Transformação linear 1



Fonte: Autor (2022)

2) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma transformação linear, dada por $T(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Geometricamente podemos interpretar esta transformação como um plano $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$.

Figura 3 – Transformação linear 2



Fonte: Autor (2022)

Em geral, ao considerarmos uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $T(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Temos que esta transformação pode ser interpretada geometricamente como um hiperplano $\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.1.2 Matriz de uma transformação linear

Sejam V e W espaços vetoriais tais que $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ duas bases de V e W, respectivamente. Tome $T: V \to W$ uma transformação linear. Podemos expressar um vetor $v \in V$ da seguinte forma

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Ou então,

$$v_{\mathcal{B}_V} = (a_1, \dots, a_n).$$

E a imagem $T(v)$ por

$$T(v) = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m. \tag{2}$$

Ou então,

$$T(v)_{\mathcal{B}_W} = (b_1, \dots, b_m).$$

Sendo T uma transformação linear temos que

$$T(v) = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n). \tag{3}$$

Sendo $T(v_1), \dots, T(v_n)$ vetores de W, podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}_W$. Desse modo,

$$T(v_1) = b_1^1 w_1 + \cdots + b_m^1 w_m$$

$$T(v_2) = b_1^2 w_1 + \cdots + b_m^2 w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = b_1^n w_1 + \cdots + b_m^n w_m.$$

Substituindo esses resultados na equação (3) temos

$$T(v) = a_1(b_1^1 w_1 + \cdots + b_m^1 w_m) + \cdots + a_n(b_1^n w_1 + \cdots + b_m^n w_m).$$

Ou ainda,

$$T(v) = (a_1 b_1^1 + \cdots + a_n b_1^n) w_1 + \cdots + (a_1 b_m^1 + \cdots + a_n b_m^n) w_m. \tag{4}$$

Comparando a equação (4) com a equação (2) conclui-se que

$$b_1 = a_1 b_1^1 + \cdots + a_n b_1^n$$

$$b_2 = a_1 b_2^1 + \cdots + a_n b_2^n$$

$$\vdots$$

$$b_m = a_1 b_m^1 + \cdots + a_n b_m^n$$

Ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m^1 & b_m^2 & \dots & b_m^n \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}. \tag{5}$$

Simbolicamente, podemos expressar a equação (5) da seguinte forma

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}[v]_{\mathcal{B}_v}.$$

Observa-se que as dimensões $(m \times n)$ da matriz $[T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ são dadas pelas respectivas dimensões dos espaços vetoriais W e V. Além disso, cada coluna da matriz, são as componentes das imagens dos vetores da base $\mathcal{B}_V$ em relação à base $\mathcal{B}_W$. Com isso, afim de sintetizar estes resultados, chegamos a seguinte definição:

Definição 2: *Sejam V e W dois espaços vetoriais, $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ duas bases de V e W, respectivamente; e $T: V \to W$ uma transformação linear. A matriz, denotada por $[T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$, que satisfaz a equação*

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}[v]_{\mathcal{B}_v}, \textit{ onde } v \in V$$

é chamada a matriz da transformação linear $T: V \to W$ com relação às bases $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.

Vale ressaltar que os elementos da matriz de uma transformação linear dependem das bases adotadas para os espaços vetoriais de partida e de chegada. Consequentemente, existe uma infinidade de formas de se representar a matriz de uma transformação; no entanto, fixada as bases, a matriz é única. Comumente, é mais conveniente adotar às bases canônicas desses espaços vetoriais.

Em particular, estaremos interessados em determinar uma matriz da transformação linear de dois tipos de transformações lineares que serão descritos a seguir:

1) A matriz da transformação linear $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(v) = \alpha v$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}$.

Sabe-se que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{1\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}$. Tomando $v \in \mathbb{R}$ temos que

$$T(v) = \alpha v$$

ou ainda,

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = [\alpha v]_{1\times 1}.$$

Sendo as dimensões dos espaços vetoriais de partida e de chegada iguais a 1, temos que a matriz da transformação linear é uma matriz unitária. Sabendo que $[v]_{\mathcal{B}_v} = [v]_{1\times 1}$, conforme a equação anterior, conclui-se que $[T]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = [\alpha]_{1\times 1}$.

2) A matriz da transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $T(v_1, \dots, v_n) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, com relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}$.

Sabe-se que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{1\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}$. Tomando $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$T(v) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

ou ainda,

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = [\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n]_{1\times 1}$$

Sabe-se que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ e $\dim(\mathbb{R}) = 1$, logo a matriz da transformação linear é uma matriz de dimensão $(1 \times n)$. Sabendo que

$$[v]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n\times 1},$$

e conforme a equação anterior, conclui-se que $[T]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]_{1\times n}$.

Estes dois resultados serão úteis quando se estiver analisando a derivada e a diferencial de funções reais definidas em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^n$.

4.2 A RESPEITO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Os conceitos e definições desenvolvidos nesta seção considera algumas abordagens trazida pelos livros: “Cálculo” volumes 1 e 2 de Stewart (2013) e “Advenced Calculus of Several Variables” de Edwards (1973); bem como a perspectiva trazida pelo trabalho de Aguiar, Siple e Moro (2012)

4.2.1 Derivada e diferencial de funções reais definidas em $\mathbb{R}$

A princípio será analisada a derivada e a diferencial de uma função real de apenas uma variável. Contudo, é necessário previamente, recordar o conceito topológico de conjunto aberto. Um conjunto D é dito aberto se, e somente se, dado um ponto qualquer $a \in D$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in B_\varepsilon(a)$ (bola aberta centrada em a e de raio ε), então $x \in D$.

Esta noção será útil para garantir que uma função f definida em um aberto, também está bem definida em uma vizinhança suficientemente próxima de um ponto qualquer do domínio da função. Neste sentido, serão considerados $D \subset \mathbb{R}$, um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e um acréscimo $\Delta x \in \mathbb{R}$ não nulo, suficientemente pequeno, afim de que faça sentido considerar a função $f: D \to \mathbb{R}$, avaliada no ponto $x + \Delta x$, onde x é um ponto qualquer do domínio. Desse modo, sob o ponto de vista do CDI, podemos definir a derivada de uma função f como sendo, ela própria uma função; levando em consideração o limite em cada ponto do seu domínio.

Definição 3: *Seja uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A derivada de f com relação à variável x, é a função denotada por $f'(x)$ dada por*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

se o limite existir.

Outras notações também utilizadas para representar a derivada de uma função $y = f(x)$ são: y', $\dot{y}, \dot{f}, D_x f, \frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$. Quanto a estas duas últimas representações, está sendo considerada a notação de Leibniz. É necessário destacar que elas não representam um quociente entre os termos dy e df e o termo dx, mas sim um operador $\frac{d}{dx}$ aplicado à função $y = f(x)$. Além disto, esta notação é útil no estudo do cálculo de integrais e de equações diferenciais.

Associada a definição 3 temos que uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita derivável em x_0 se existe $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{6}$$

E dizemos que f é derivável no intervalo aberto D se for derivável para todo $x \in D$.

Geometricamente, tomando uma função $y = f(x)$ derivável em x_0, o valor numérico $f'(x_0)$ pode ser interpretado como o coeficiente angular da reta tangente à curva descrita pelo gráfico de f, no ponto $(x_0, f(x_0))$. Ou ainda, a derivada $f'(x_0)$ representa o limite, quando $\Delta x \to 0$, das retas secantes do gráfico da função f, que passam pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

A partir dessas considerações pode-se introduzir a seguinte definição:

Definição 4: *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável, a diferencial de* f *em* x_0 *é a transformação linear* $df_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$*.*

Algebricamente, através de uma manipulação da equação (6), obtemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = 0\,,$$

e assim,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0\,.$$

Tomando $\Delta f_{x_0}(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ e aplicando o resultado oriundo da Definição 2, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_{x_0}(\Delta x) - df_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Com isso, conclui-se que a diferencial $df_{x_0}(\Delta x)$ é uma boa aproximação para a variação $\Delta f_{x_0}(\Delta x)$ para valores de Δx suficientemente pequenos. Isto é, df_{x_0} é uma aproximação linear (linearização) da função f para uma vizinhança do ponto x_0.

Tomaremos agora uma abordagem distinta para a diferencial de uma função que permitirá uma nova interpretação para a derivada de uma função.

Considerando $y = f(x)$, uma outra representação para a diferencial da função é dada por

$$dy = f'(x)dx, \qquad (7)$$

onde a diferencial dx é uma variável independente; e, portanto, a diferencial dy é uma variável dependente que tem seu valor definido a partir dos valores atribuídos a x e a dx. Logo, desde que $dx \neq 0$, temos que a derivada da função $y = f(x)$, pode ser expressa como o quociente de duas diferenciais:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Vale enfatizar que, neste contexto, a derivada é, de fato, um quociente das diferenciais dy e dx, diferentemente da notação de Leibniz para as derivadas que, embora seja representada da mesma forma, tem uma conotação distinta, como já exposto. Desse modo, comparando a equação (7) com os resultados da definição 4, observa-se que $df_{x_0} = dy$ e $\Delta x = dx$.

Por fim, levando em consideração que df_{x_0} é uma transformação linear dada por $df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$, temos que a matriz dessa transformação com relação à base canônica de $\mathbb{R}$, é uma matriz unitária (1×1), cujo seu único elemento é $f'(x)$. Em outras palavras, a derivada de uma função é a matriz de sua diferencial (transformação linear). Deste modo, apesar de uma possível confusão quanto a definição da derivada e da diferencial de uma função, pelo fato de que a matriz da transformação é simplesmente um número, esta distinção torna-se mais evidente quando se analisa funções definidas em abertos do $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$. No entanto, é preciso antes compreendermos as derivadas parciais.

4.2.2 Derivadas parciais

Para funções definidas em abertos do $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ é necessário compreender que as derivadas dessas funções passam a ter um caráter parcial. No entanto, é importante ressaltar que essas chamadas “derivadas parciais” da função não devem ser confundidas com a derivada da função.

A princípio, será considerado o caso $n = 2$. Nesta situação, teremos duas variáveis dependentes que serão representadas, por x_1 e x_2. Consequentemente e, analogamente como desenvolvido para funções definidas em $\mathbb{R}$, temos agora duas derivadas parciais: uma com relação à variável x_1 e outra com relação à variável x_2.

Definição 5: *Sejam um conjunto aberto* $D \subset \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x_0}(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ *um ponto deste aberto e uma função* $f: D \to \mathbb{R}$. *A derivada parcial de* f *no ponto* $\boldsymbol{x_0}$, *com relação à variável* x_1 *é dada por*

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_1},$$

se o limite existir. E, a derivada parcial de f *no ponto* $\boldsymbol{x_0}$, *com relação à variável* x_2 *é dada por*

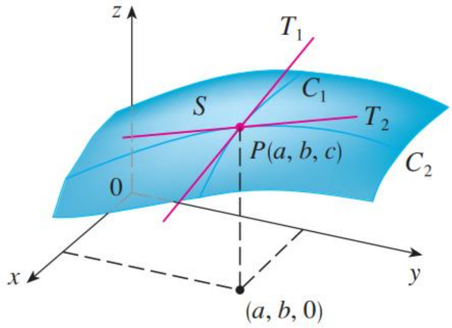
$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)}{\Delta x_2},$$

se o limite existir.

Outras notações para derivadas parciais de uma função $z = f(x_1, x_2)$ com relação à variável x_1 são: f_{x_1}, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ ou $D_{x_1}f$.

Geometricamente, temos que o gráfico de uma função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Desse modo, podemos interpretar as derivadas parciais de f no ponto $\boldsymbol{x_0}(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$, como sendo as inclinações das retas tangentes à superfície S em $\boldsymbol{x_0}$, na direção dos eixos coordenados x_1 e x_2. Como exemplo, utilizaremos uma abordagem trazida por Stewart (2013)

Figura 4 – Derivadas parciais



Fonte: Stewart (2013, p. 814).

Na figura 4, observa-se o gráfico de uma função $z = f(x, y)$, representada pela superfície S. Podemos observar que a curva C_1 é a intersecção entre a superfície S e o plano $y = b$, enquanto que a curva C_2 é a intersecção entre a superfície S e o plano $x = a$. Assim, a projeção de C_1 no plano xy é paralela ao eixo coordenado x, e a inclinação da reta tangente T_1 à curva C_1 no ponto P, é dada por $f_x(a, b)$. Analogamente, $f_y(a, b)$ é a inclinação de T_2, reta tangente à curva C_2 no ponto P.

Consequentemente, algebricamente, podemos generalizar a definição 5 para funções definidas em abertos do $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$. Desse modo, a derivada parcial de uma função $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no ponto $\boldsymbol{x_0}(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0) \in D$ com relação à variável x_i, onde $i \in [1, n]$, é dada por

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_i}$$

se o limite existir.

4.2.3 Derivada e diferencial de funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$

Analogamente às definições de derivada e diferencial de funções reais cujos domínios são abertos da reta $\mathbb{R}$, podemos considerar $D \subset \mathbb{R}^n$, um aberto do $\mathbb{R}^n$, tal que o ponto $\boldsymbol{x_0}(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$. Por definição de conjuntos abertos sabe-se que, para qualquer ponto do conjunto, pode-se tomar uma bola aberta centrada no ponto e com raio suficientemente pequeno, e ainda assim esta bola aberta estará contida no conjunto. Isto significa que se uma função está definida em um ponto $\boldsymbol{x_0}$, também estará nas proximidades deste ponto. Desse modo, considerando $\Delta\boldsymbol{x}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ cujas coordenadas $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n \in \mathbb{R}$ são, uma a uma, suficientemente próximas de zero, no entanto não todas nulas; tem-se que a função f está bem definida no ponto $\boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}$. Ciente destas informações, temos a seguinte definição:

Definição 6: *Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, um aberto do $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x_0} \in D$ e uma função $f: D \to \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é diferenciável em $\boldsymbol{x_0}$, se e somente se, existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{\Delta x \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0}) - T(\Delta\boldsymbol{x})}{|\Delta\boldsymbol{x}|} = 0$$

onde $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$. A transformação T, que será denotada por $df_{\boldsymbol{x_0}}$, é chamada a diferencial de f no ponto $\boldsymbol{x_0}$. Enquanto que a matriz dessa transformação linear será denotada por $f'(\boldsymbol{x_0})$ e é chamada a derivada de f em $\boldsymbol{x_0}$.

Observa-se que, diferentemente de como ocorriam com as funções definidas em conjuntos abertos da reta $\mathbb{R}$, a matriz da transformação linear com relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$, não é mais uma matriz unitária, e sim uma matriz linha $1 \times n$, cujos elementos de sua linha são as derivadas parciais da função f no ponto $\boldsymbol{x_0}$, isto é,

$$[df_{\boldsymbol{x_0}}] = f'(\boldsymbol{x_0}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Desse modo, a diferencial de f em $\boldsymbol{x_0}$, aplicada em $\Delta\boldsymbol{x}$, $df_{\boldsymbol{x_0}}(\Delta\boldsymbol{x})$, não se trata mais de um produto usual entre dois números reais, e sim, de um produto entre duas matrizes, a saber: $f'(\boldsymbol{x_0})$, uma matriz $1 \times n$; e a matriz coluna $n \times 1$ cujos elementos são as coordenadas de $\Delta\boldsymbol{x}$. Assim temos,

$$df_{\boldsymbol{x_0}}(\Delta\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x_0})\Delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}.$$

E, portanto,

$$df_{\boldsymbol{x_0}}(\Delta\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x_0})}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

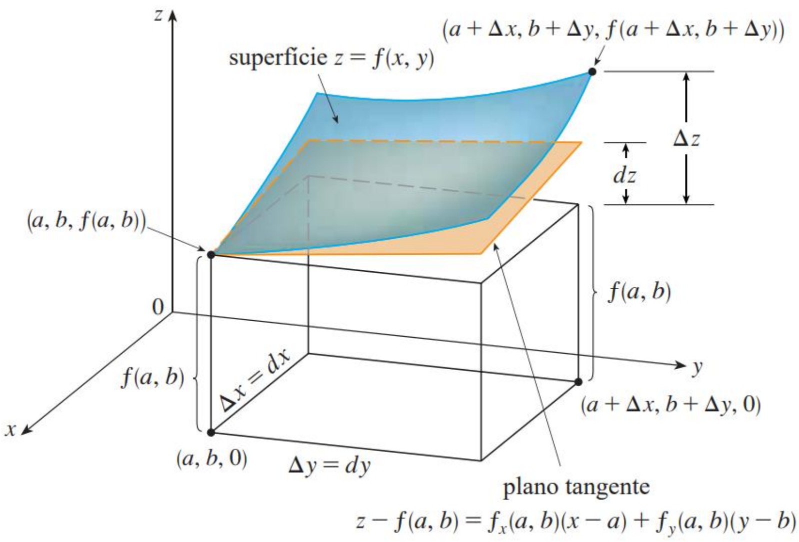
Analogamente às funções reais definidas em $\mathbb{R}$, temos que a diferencial dz de uma função real $z = f(x_1, \dots, x_n)$ pode ser expressa como uma variável dependente das diferenciais $dx_1, \dots, dx_n$, sendo estas variáveis independentes. Deste modo a expressão

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

é chamada de diferenciação total. E, fixado um ponto $\boldsymbol{x_0}$ que pertence ao domínio de z, temos que dz representa uma aproximação linear para a variação $\Delta z = f(\boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})$, onde $\Delta\boldsymbol{x}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $dx_1 = \Delta x_1, \dots, dx_n = \Delta x_n$. Isto é, $f \approx f(\boldsymbol{x_0}) + dz$, na vizinhança do ponto $\boldsymbol{x_0}$

Podemos considerar $n = 2$ e visualizar este fato geometricamente, tomando uma função $z = f(x, y)$ e sua diferenciação total em um ponto (a, b) do seu domínio:

Figura 5 – Diferenciação total



Fonte: Stewart (2013, p. 827).

Com esta representação trazida por Stewart (2013), observamos que o plano tangente de equação: $z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ se ajusta à superfície do gráfico de $z = f(x, y)$ nas proximidades do ponto $(a, b, f(a, b))$.

5 METODOLOGIA

O presente trabalho analisa as diversas representações e interpretações atribuídas à apresentação dos conceitos de derivada e diferencial, pelos livros didáticos do ensino superior, evidenciando-se suas relações e distinções. Com isso, nossa pesquisa busca investigar uma abordagem interdisciplinar, ao longo do curso de graduação em ciências exatas, entre as disciplinas de CDI I, CDI II e AL, a partir de uma apresentação dos temas citados, em função de conceitos presentes na AL. Com este intuito, a análise dos livros didáticos foi realizada à luz da TRSS.

Neste sentido, nossa investigação tem caráter qualitativo, por se tratar de uma análise com o cunho de compreender, interpretar e dialetizar (MINAYO, 2012, p. 622). O critério para a definição dos livros a serem analisados, se baseou no "Programa dos Componentes Curriculares por Período", um documento oficial do curso de Matemática – Licenciatura, Centro Acadêmico do Agreste, da Universidade Federal de Pernambuco, onde consta, dentre outras informações, a bibliografia básica e complementar de cada disciplina.

Antes da análise realizada, já vimos no Capítulo 3 uma descrição do nosso referencial teórico utilizado, e em seguida, no Capítulo 4, trouxemos uma relação entre a derivada e a diferencial, para que estas pudessem ser interpretadas como uma transformação linear e a matriz associada a esta transformação. Com isso, buscamos apresentar representações e notações que proporcionassem aberturas para a interdisciplinaridade. Ressaltando nosso interesse em, a partir da relação existente entre derivada e diferencial, conseguir estabelecer interações entre as disciplinas, visando um entendimento mais completo à cerca da distinção destes elementos ao estudar-se funções reais definidas no espaço $\mathbb{R}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Assim, foram analisados, a princípio, os livros: "Cálculo", volume 1 de James Stewart (2013) e "Um curso de cálculo", volume 1 de Hamilton Luiz Guidorizzi (2001). E, em um segundo momento, o livro: "Cálculo", volume 2 de James Stewart (2013). Neste sentido, buscamos analisar o tratamento dado à derivada e à diferencial quanto às funções reais definidas em $\mathbb{R}$ e, em seguida, quanto às funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$.

Além dos livros citados, foram trazidas algumas ideias e interpretações dos livros: "Um curso de cálculo", volume 2 de Hamilton Luiz Guidorizzi (2001) e "Advanced Calculus of Several Variables" de Edwards (1973). Embora ambos os livros não constassem na bibliografia das disciplinas consideradas, eles foram utilizados, respectivamente, por se tratar da continuação do livro já considerado no primeiro momento e por apresentar uma abordagem que proporciona uma interrelação com conceitos da Álgebra Linear.

No primeiro volume do livro "Cálculo" de Stewart (2013) analisamos as seções: 2.7 Derivadas e Taxas de Variação, 2.8 A Derivada como uma função e 3.10 Aproximações Lineares e Diferenciais. No volume 1 do livro "Um curso de cálculo" de Guidorizzi (2001) analisamos as seções 7.1 Introdução, 7.2 Derivada de uma função, 7.9 Notações para a derivada e 7.14 Interpretação de $\frac{dy}{dx}$ como um quociente. Diferencial.

Quanto ao volume 2 do livro "Cálculo" de Stewart (2013) foram analisadas as seções 14.1 Funções de Várias Variáveis, 14.3 Derivadas Parciais e 14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares. Já para o volume 2 do livro "Um curso de cálculo" de Guidorizzi (2001) analisamos as seções 11.4 Diferencial e 11.5 O vetor gradiente. Por fim, analisamos também algumas noções iniciais trazidas pelo primeiro e segundo capítulos do livro "Advanced Calculus of Several Variables" de Edwards (1973).

Para esta investigação, realizamos também, uma comparação entre os livros selecionados, considerando as situações e os exemplos iniciais trazidos por cada autor na apresentação dos temas estudados. A partir disto, analisamos como os diferentes tipos de registros de representações são aplicados em cada uma das situações e quais as estratégias utilizadas pelos autores para relacionar as diferentes representações em mais de um registro. Por fim, elencamos os motivos pelos quais a abordagem interdisciplinar dos conceitos de derivada e diferencial tomados sob a perspectiva de transformação linear e matriz de uma transformação, contribui para um melhor desenvolvimento cognitivo do estudante segundo a TRRS, proporcionando uma melhor apreensão dos conceitos envolvidos.

6 ANÁLISE

Almejamos neste capítulo, analisar as abordagens utilizadas por livros didáticos do ensino superior para apresentar os conceitos de derivada e diferencial de funções reais.

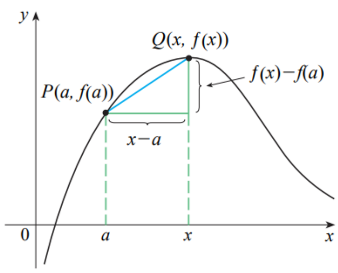
6.1 LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Tomando como base a disciplina de CDI I, iniciamos nossa análise com os livros "Cálculo" volume 1 de James Stewart (2013) e "Um curso de cálculo" volume 1 de Hamilton L. Guidorizzi (2001).

As primeiras noções trazidas pelos autores Guidorizzi (2001) e Stewart (2013) para formalizar a ideia de derivada são semelhantes. A princípio, é enfatizada a problemática de se determinar a equação da reta tangente a um determinado ponto de uma curva. Em seguida, ambos apresentam uma construção para a solução através da ideia de aproximação por retas secantes. Com isso, os autores trazem inicialmente, na representação em língua materna, a determinação do coeficiente angular de uma reta secante à curva do gráfico de uma função $f(x)$. Por exemplo, Stewart (2013) traz que: "Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P\big(a, f(a)\big)$, consideraremos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ: $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$." (STEWART, 2013, p. 131).

Partindo da mesma ideia inicial, ambos os autores fazem uso da representação no registro geométrico para sistematizar essas ideias.

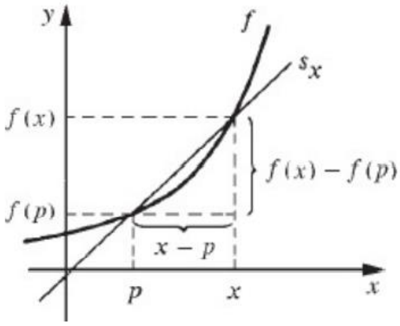
Figura 6 – Reta secante 1



Fonte: Stewart (2013, p. 131).

Na figura 6 percebemos que a reta secante considerada passa pelos pontos P e Q do gráfico da curva $f(x)$. Já na figura 7 observamos que a reta secante que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$ é denotada por s_x.

Figura 7 – Reta secante 2

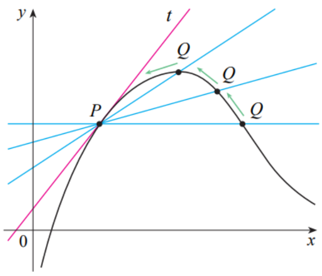


Fonte: Guidorizzi (2001, p. 136).

Neste momento, ambos os autores apresentam um maior detalhamento quanto ao procedimento de obtenção do coeficiente angular da reta tangente à curva em um dado ponto. Algo que é definido por Stewart (2013): "A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$." (STEWART, 2013, p. 131).

Em seguida, ambos os autores se preocupam em representar estas ideias no registro geométrico.

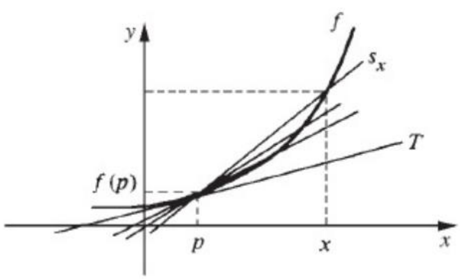
Figura 8 – Aproximação por retas secantes 1



Fonte: Stewart (2013, p. 131).

Na figura 9 percebemos uma representação menos nítida com relação a figura 8.

Figura 9 – Aproximação por retas secantes 2



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 137).

Contudo, ambas as figuras apresentam uma ideia de movimento, o que pode ser considerado, sob a perspectiva da TRRS, como a atividade cognitiva de tratamento dentro do registro geométrico. Pois, embora elas estejam sendo representadas em imagens únicas, percebe-se que deve ser considerada a reta secante em diferentes momentos, se aproximando das retas tangentes representada por Stewart (2013) pela reta t e por Guidorizzi (2001) pela reta T. Neste sentido, é proposto ao leitor que ele seja capaz de exercer esta atividade cognitiva enquanto faz a leitura destas figuras.

Em seguida, os autores complementam esta ideia de reta tangente apresentando uma representação no registro algébrico, contribuindo assim para a atividade cognitiva de conversão. Esta representação é dada através da escrita da equação da reta tangente, visto que ela é possível de ser determinada, levando em consideração que já são conhecidos um ponto da curva pelo qual a reta deve passar, e o seu coeficiente angular definido anteriormente.

Contudo, quanto a representação algébrica, Stewart (2013) exemplifica a situação apresentada.

Figura 10 – Exemplo 1 no registro algébrico

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

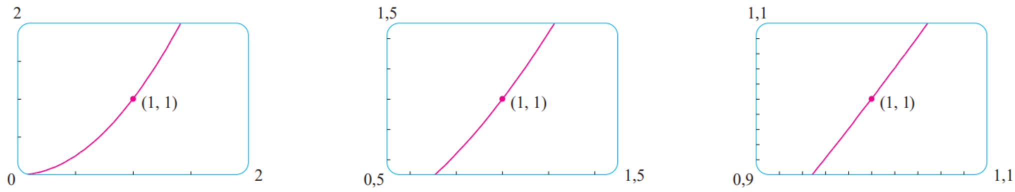
Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

Fonte: Stewart (2013, p. 131).

Assim percebemos que o exemplo trazido pelo autor visa exercitar a atividade cognitiva de tratamento no registro algébrico. Assim, a ideia apresentada inicialmente de forma generalizada por uma função $y = f(x)$ pode ser tratada, algebricamente a partir da função $y = x^2$. Logo em seguida, Stewart (2013) exibe uma sequência de imagens para complementar este exemplo.

Figura 11 – Aproximação de uma curva à uma reta



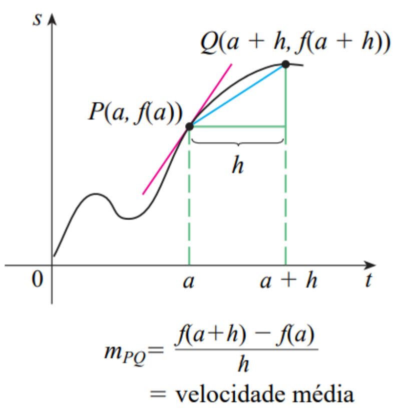
Fonte: Stewart (2013, p. 132).

Onde ressalta-se que a medida em que se amplia a imagem em torno do ponto (1,1) a curva se aproxima cada vez mais de uma reta.

Em seguida, Stewart (2013) ainda traz uma definição equivalente àquela dada inicialmente para o coeficiente da reta tangente a um dado ponto definindo o coeficiente m em termos de um acréscimo h: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h}$. Observamos que, mais adiante, Guidorizzi (2001) faz uso de uma representação similar.

Na sequência, ambos os autores trazem uma contextualização para um outro problema: o cálculo da velocidade em um determinado instante, a partir do limite das velocidades médias em intervalos cada vez menores e cada vez mais próximos do instante analisado. A princípio eles utilizam o registro na língua materna. No entanto, Stewart (2013) faz uso de uma maior quantidade de representações em diferentes registros, como por exemplo o registro geométrico observado na figura 12, onde $s = f(t)$ representa a função deslocamento de um objeto.

Figura 12 – Gráfico da função deslocamento



Fonte: Stewart (2013, p. 133).

Enquanto Guidorizzi (2001) se restringe, além do registro em língua materna, a representação no registro algébrico: "$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$" (GUIDORIZZI, 2001, p. 137).

Podemos observar que ambos os autores adotaram estratégias muito parecidas para exemplificar situações práticas que introduzem a noção de derivada. Para isso, foram utilizados representantes em diferentes registros, onde neles, foram desenvolvidas as atividades cognitivas de tratamento e conversão. Observamos, portanto, que estas apresentações introdutórias e a mobilização entre os representantes analisados preparam o leitor para a definição de derivada de uma função, que é apresentada pelos dois autores. Inicialmente Stewart (2013) traz a seguinte definição: "A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$, é $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se o limite existir." (STEWART, 2013, p. 133).

Enquanto Guidorizzi (2001), além da definição de derivada de uma função, introduz os termos diferenciável e derivável como características de uma função.

Figura 13 – Derivada de função de uma variável

Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p.

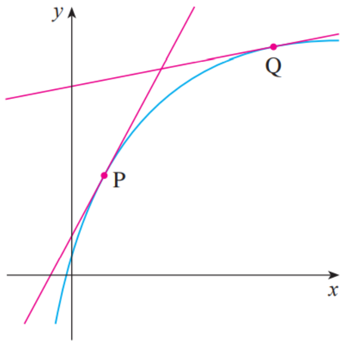
Fonte: Guidorizzi (2001, p. 137).

Em seguida, como um complemento a definição introduzida, notamos que os dois autores fazem uso de exemplos de tratamento no registro algébrico afim de destacar como ocorrem as manipulações neste registro.

Uma outra abordagem, comumente associada a ideia de derivada, é trazida por Stewart (2013) logo em seguida. A derivada, agora, é interpretada como uma taxa de variação de uma variável y (Δy) que depende da variação de outra variável x (Δx). Esta interpretação, denominada taxa de variação, é analisada quando toma-se um incremento (variação) na variável independente. Neste sentido, o autor descreve a ideia de derivada como uma taxa instantânea de variação de y em relação a x e reescreve o limite que descreve a derivada de uma função: "taxa instantânea de variação = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$." (STEWART, 2013, p. 135).

O autor Stewart (2013) ainda ressalta a importância desta ideia afirmando que uma interpretação complementar para a derivada é que esta ferramenta indica o quão rápido os valores de y estão variando em função de x. Isto é, um valor $|f'(x)|$ próximo de zero indica que os valores de y variam minimamente, por mais que seja tomada uma pequena variação em x; consequentemente $|f'(x)|$ distante de zero indica que os valores de y apresentam uma maior variação na vizinhança do ponto considerado.

Figura 14 – Taxa de variação



Fonte: Stewart (2013, p. 135).

A figura 14 é utilizada para representar graficamente a ideia trazida anteriormente. Com ela é possível observar que a curva se apresenta mais íngreme nas proximidades do ponto P, o que indica que $|f'(x)|$ está relativamente distante de zero, ou seja, y apresenta uma grande variação na vizinhança deste ponto. Geometricamente, o autor ressalta que, sendo a derivada a inclinação da reta tangente a um ponto considerado, este resultado pode ser observado pela inclinação da reta tangente à curva no ponto P, a qual está mais próxima de uma inclinação vertical. O mesmo se aplica à tangente à curva no ponto Q, a qual está mais próxima de uma inclinação horizontal. Com isso, observamos que Stewart (2013) conecta diretamente a interpretação da derivada como uma taxa instantânea de variação com a interpretação anteriormente atribuída a esta ideia.

Percebemos que estas conexões entre diferentes interpretações quanto ao significado de derivada são aspectos que contribuem para o entendimento deste conceito. Pois, segundo a TRRS, cada representação apresenta uma característica particular do objeto analisado e, ao serem feitas comparações diretas com as representações e interpretações atribuídas a ideia de derivada, isto contribui para o acesso ao entendimento deste conteúdo.

Ainda com relação as ideias iniciais de derivada, Stewart (2013) enfatiza o uso de representações em diferentes registros. Um deles trata-se de uma interpretação a partir da representação no registro em língua materna.

Figura 15 – Derivada em língua materna

V EXEMPLO 6 Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é $C = f(x)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?
(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1\,000) = 9$?
(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5\,000)$?

Fonte: Stewart (2013, p. 135).

Com este exemplo observa-se uma situação real onde a derivada pode ser aplicada. Neste contexto a taxa de variação é interpretada como sendo o custo marginal (conceito da economia). Algo que o autor aborda mais adiante. Desse modo, é trazido uma contextualização com os conceitos e sistematizações retratados anteriormente, no entanto, desta vez a ênfase está na descrição por meio do registro em língua materna.

Outra situação prática adotada pelo livro, diz respeito à taxa de variação da dívida de um país com relação ao tempo. Esta situação é explorada a partir da representação no registro numérico, a partir de uma tabela de valores. Foi observado que após descrever o problema no registro em língua materna, o autor determina uma tabela de valores, onde nela constam as taxas médias de variação da dívida do país com relação ao tempo. Com isto, Stewart (2013) apresenta a derivada através desse novo registro.

Tabela 1 – Tabela de valores para aproximações da derivada

t	$\dfrac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$
1994	13,3
1996	−1,1
2000	−5,5
2002	−6,3

Fonte: Stewart (2013, p. 136).

A partir dessas ideias Stewart (2013) define a derivada, não mais em um ponto fixo que pertence ao domínio da função, mas agora como uma função de uma variável x que pertence ao domínio da f ou a um conjunto estritamente contido no domínio da f. Nesta situação, a derivada representada por $f'(x)$ é interpretada como uma função de uma variável real.

Neste caso a função derivada $f'(x)$ representa os valores do coeficiente angular da função f (função da qual ela foi derivada), em cada ponto x que pertence ao domínio da f'. E esta situação é representada geometricamente pelo autor, dentre outras formas, a partir do exemplo tomando uma função $f(x) = \sqrt{x}$. Além da representação no registro geométrico, as funções são representadas no registro algébrico: $f(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nesse sentido o autor utiliza diferentes representações para indicar que o domínio da função derivada $f'(x)$ pode ser menor que o domínio da f. Como podemos concluir do exemplo anterior, onde o domínio da f se trata do intervalo $[0, \infty)$, enquanto o domínio da f' corresponde ao intervalo $(0, \infty)$. Pode ser observado que a inclinação da reta tangente à curva do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ cresce indefinidamente para valores de x próximos de zero, mas não está definida para $x = 0$, isto é, não existe derivada. Algo que é representado geometricamente, analisando que a curva do gráfico da função $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ assume valores cada vez maiores à medida em que são tomados valores de x cada vez mais próximos de zero.

Em seguida, os autores fazem uso de outras notações para a representação de derivada.

Figura 16 – Notações para a derivada

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

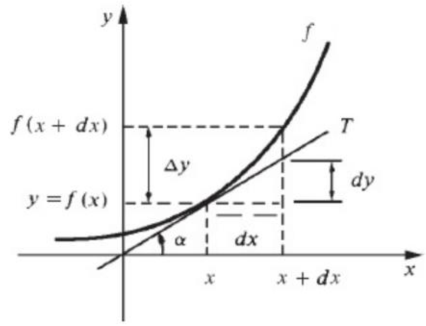
Fonte: Stewart (2013, p. 142).

Stewart (2013) ainda ressalta que os símbolos D, D_x e d/dx são operadores que representam o processo de cálculo de uma derivada. Em especial, o símbolo d/dx, também conhecido como notação de Leibniz, representa uma equivalência à f', e não um quociente. Este operador é trazido também por Guidorizzi (2001), assim como por Stewart (2013), para indicar além da função derivada, a derivada em um dado ponto.

Em seguida, analisamos as representações iniciais trazidas pelos autores para introduzirem as interpretações inicias quanto a ideia de diferencial. Observamos que o autor Stewart (2013) apresenta uma contextualização inicial para este tema, explicando que a ideia inicial de se trabalhar com a diferencial é o que está por trás da chamada linearização ou aproximação linear de uma função. Esta ideia já havia sido citada pelo autor anteriormente, como observamos no exemplo da figura 11. Quanto ao autor Guidorizzi (2001), a apresentação das diferenciais se dá de forma mais direta. No entanto, as estratégias utilizadas por ambos os autores se assemelham.

A construção da ideia da diferencial de uma função $y = f(x)$ é analisada em termos de dy/dx que, diferentemente do significado atribuído na notação para as derivadas, recebe uma nova conotação. Guidorizzi destaca que, de fato, esta representação indicará um quociente entre dois acréscimos, dy e dx, sendo o primeiro, definido em função do segundo. O acréscimo dx representa um acréscimo em x. Quanto a dy, o autor destaca, que se trata de uma variação vertical na reta tangente T ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, cujo coeficiente angular é dado por $f'(x)$.

Figura 17 – A diferencial



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 193).

Com a figura 17 observamos que a utilização da representação no registro geométrico, além de ressaltar a interpretação da diferencial dy como sendo a variação vertical da reta tangente T, torna mais nítida a distinção entre dy e a variação $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$. Ressaltando que, por outro lado, a variação em x é igual a diferencial dx, isto é, $\Delta x = dx$.

Analogamente, o autor Stewart (2013), apresenta uma representação similar no registro geométrico. E, a partir dessas situações, os autores destacam dois resultados importantes: dy é uma boa aproximação para a variação Δy, nas proximidades do ponto analisado; e, a derivada $f'(x)$, por se tratar do coeficiente angular da reta tangente ao ponto analisado, pode ser expressa como o quociente de diferenciais dy/dx.

Ainda vale salientar a formalização trazida por Guidorizzi (2001): “Fixado x, podemos olhar para a função linear que a cada $dx \in \mathbb{R}$, associa $dy \in \mathbb{R}$, em que $dy = f'(x)dx$. Tal função denomina-se diferencial de f em x, ou, simplesmente, diferencial de $y = f(x)$.” (GUIDORIZZI, 2001, p. 193). Nesta interpretação, a conotação atribuída a diferencial se aproxima da ideia de sua definição como sendo uma transformação linear $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Por fim, ambos os autores se preocupam em realizar atividades de tratamento e conversão entre as representações nos registros em língua materna, geométrico e algébrico. Este fato, pode ser ilustrado pelo exemplo trazido por Stewart (2013).

Figura 18 – Exemplo 3 no registro em língua materna

EXEMPLO 3 Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x varia (a) de 2 para 2,05 e (b) de 2 para 2,01.

Fonte: Stewart (2013, p. 228).

Ao se interpretar a representação no registro em língua materna, é feita, em seguida, uma conversão para o registro algébrico, afim de realizar o tratamento neste registro.

Figura 19 – Exemplo 3 no registro algébrico

(a) Temos

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1 = 9{,}717625$$

$$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625$$

Em geral, $$dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$$

Quando $x = 2$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, torna-se

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}05 = 0{,}7$$

(b) $$f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2(2{,}01) + 1 = 9{,}140701$$

$$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$$

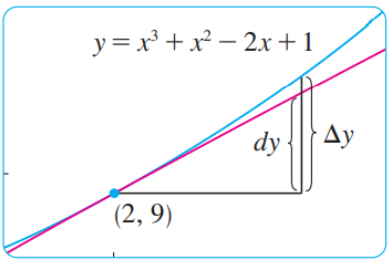
Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14$$

Fonte: Stewart (2013, p. 228).

Por fim, é realizada uma nova conversão entre os registros, chegando-se à representação no registro geométrico.

Figura 20 – Exemplo 3 no registro geométrico



Fonte: Stewart (2013, p. 228).

Percebemos com esta sequência de representações que, para o desenvolvimento do pensamento matemático no que tange ao entendimento de diferenciais, é proporcionado ao leitor que este possa acessar tal objeto matemático partindo de diferentes perspectivas. Neste sentido, é proporcionada uma experiência de mobilização à ideia de diferencial, assim como ocorreu para a noção de derivada.

6.2 LIVROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Na disciplina de CDI II, a extensão destes conceitos é abordada a partir da construção de resultados similares aos desenvolvidos anteriormente, no entanto considerando um estudo a partir de funções $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diante destes fatos, as ideias iniciais partem do entendimento das derivadas parciais. E, quanto a isto, observamos as noções, interpretações e representações trazidas pelo livro "Cálculo" volume 2 de James Stewart (2013).

As derivadas parciais são abordadas na seção 3 do capítulo 14, no entanto, observamos que o início do capítulo nos fornece um indicativo de como os temas serão desenvolvidos.

Figura 21 – Tipos de registros

Nesta seção estudaremos as funções de duas ou mais variáveis sob quatro pontos de vista diferentes:

- verbalmente (pela descrição em palavras)
- numericamente (por uma tabela de valores)
- algebricamente (por uma fórmula explícita)
- visualmente (por um gráfico ou curvas de nível)

Fonte: Stewart (2013, p. 792).

Percebemos que os pontos de vista citados por Stewart, tratam-se, segundo a TRRS, de diferentes registros de representação. Nesta perspectiva, na seção 1 deste capítulo, o autor apresenta um estudo acerca de funções reais de duas variáveis, detalhando suas características e ideias adjacentes, como as curvas de nível e uma extensão para funções de três variáveis ou mais; revelando continuamente exemplos de situações onde as representações de tais funções podem ser analisadas em diferentes tipos de registros. Com esta mesma estratégia, na seção 2, Stewart (2013) aborda o limite e a continuidade para funções de duas ou mais variáveis, temas que são essenciais para o desenvolvimento das derivadas parciais.

Antes de definir as derivadas parciais, observamos que o autor utiliza um exemplo prático de uma situação que é descrita a partir de duas variáveis. A estratégia inicial, trata-se de abordar este exemplo através de uma representação no registro numérico, a partir de uma tabela de valores.

Tabela 2 – Índice de temperatura-humidade

Temperatura real (°C)	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
		Umidade relativa (%)								
	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Fonte: Stewart (2013, p. 811).

As duas variáveis independentes envolvidas neste problema são: Temperatura real (T) e Umidade relativa (H). Definidos estes valores, uma nova variável tem seu valor numérico determinado. Esta variável trata-se da Temperatura aparente do ar (I) e é compreendida em função das variáveis anteriores, isto é, $I = f(T, H)$. O autor anuncia que a análise será feita, inicialmente, fixando o valor 60 para a variável H. Visualmente, podemos verificar que este fato é representado destacando-se em azul a coluna vertical referente ao valor $H = 60$. Algebricamente, Stewart (2013) representa esta situação a partir de uma função real g que está em função apenas da variável T. Em outras palavras, o autor retrata que para se analisar funções reais de duas variáveis, inicialmente uma de suas variáveis deve ser fixada, e a análise será feita considerando a outra, o que reduz o problema ao estudo de funções de uma única variável.

Neste sentido, as variáveis são consideradas, parcialmente, ora como variáveis de fato, ora como uma constante. Desse modo, temos um indicativo de que a derivada de uma função de mais de uma variável terá uma conotação parcial. Além disso, ainda utilizando o exemplo anterior, o autor revela, a partir de representações no registro algébrico, que tais derivadas não são necessariamente iguais, por mais que esteja sendo considerado um mesmo ponto da função.

Esta situação, também é representada visualmente pela tabela de valores mostrada na tabela 2, ao fixar-se o valor $T = 30$ (evidenciado pelo destaque em azul na linha horizontal correspondente a este valor). Percebe-se que no ponto $(30, 60)$ a Temperatura aparente do ar sofre uma variação diferente ao se analisar as variações na Temperatura real ou na Umidade relativa. Este fato é percebido na tabela pelo fato de que um acréscimo de duas unidades na variável T, fixado $H = 60$, indica um aumento de quatro unidades na variável I; enquanto que o acréscimo de cinco unidades na variável H, fixado $T = 30$, representa um acréscimo de duas unidades na variável I. Como as proporções dessas variações nas duas variáveis não são iguais, isto revela que as derivadas parciais com relação a T e com relação a H, são distintas. Neste caso, temos que a derivada de $f(30{,}60)$ com relação a T é maior do que a derivada parcial neste mesmo ponto com relação a H.

Para a construção destes resultados, observamos que Stewart (2013) faz uso de três tipos de registros: numérico, língua materna e algébrico. O registro em língua materna trata-se do primeiro utilizado, pois a realização da representação é descrita com palavras. Logo em seguida, pôde ser observado uma atividade de conversão para a representação no registro numérico, a partir da apresentação de uma tabela de valores que ilustra a situação descrita anteriormente. E, por fim, são utilizadas representações no registro algébrico para que as definições posteriores possam ser melhores compreendidas.

A partir desta situação, são feitas referências as construções já realizadas para funções reais definidas em $\mathbb{R}$ para se determinar as chamadas derivadas parciais de uma função em um determinado ponto e, em seguida, esses conceitos são interpretados como funções. Com isso, Stewart (2013) define: "Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais são as funções f_x e f_y definidas por $f_x(x,y) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$ e $f_y(x,y) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$." (STEWART, 2013, p. 813).

Em seguida, o autor apresenta a representação de derivadas parciais em outras notações.

Figura 22 – Notações para as derivadas parciais

Notações para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Fonte: Stewart (2013, p. 813).

Em complemento a estas definições, o autor apresenta uma nova interpretação para as derivadas parciais tomando como base representações no registro geométrico. Nesta situação, a função real de duas variáveis $z = f(x,y)$ é interpretada como uma superfície $C \subset \mathbb{R}^3$, o que é analisado a partir do seu gráfico. Desse modo, considerando um ponto P da curva C as derivadas parciais f_x e f_y avaliadas em P representam as inclinações das retas tangentes à curva C no ponto P nas direções dos eixos coordenados. Algo que é ilustrado pela figura 4, apresentada no capítulo 4 deste trabalho.

No intuito de consolidar esta interpretação, Stewart (2013) utiliza um exemplo para analisá-lo em diferentes registros.

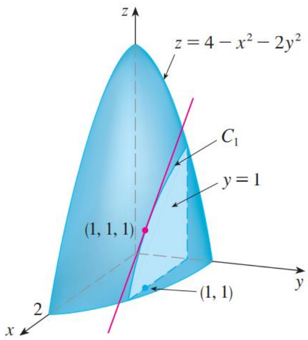
Figura 23 – Exemplo derivadas parciais

EXEMPLO 2 Se $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$ e interprete esses números como inclinações.

Fonte: Stewart (2013, p. 814).

A partir desta representação, o autor determina as derivadas $f_x = -2x$ e $f_y = -4y$ e, em seguida, os valores numéricos avaliados no ponto $(1,1)$, $f_x(1,1) = -2$ e $f_y(1,1) = -4$. Com isso o autor detalha que f_x representa, geometricamente, a reta tangente (C_1) à curva do gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1,1)$ na direção do eixo coordenado x. E que, nesta situação, tem coeficiente angular igual a -2.

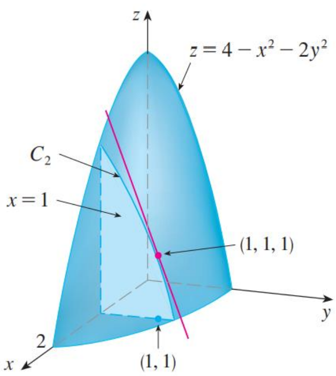
Figura 24 – Derivada com relação a x no registro geométrico



Fonte: Stewart (2013, p. 814)

Analogamente, f_y representa, geometricamente, a reta tangente (C_2) à curva do gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1,1)$ na direção do eixo coordenado y. E que apresenta coeficiente angular igual a -4.

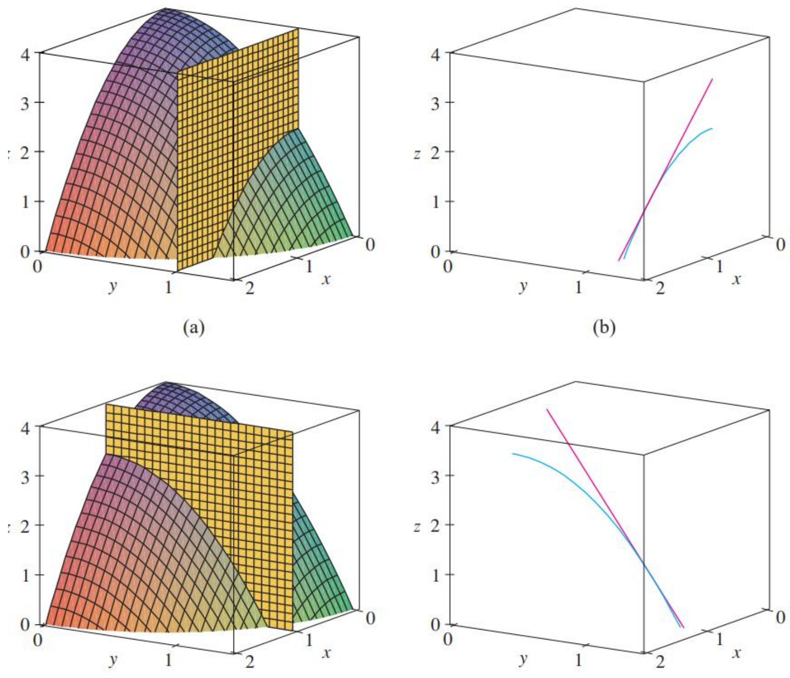
Figura 25 – Derivada com relação a y no registro geométrico



Fonte: Stewart (2013, p. 814).

Por fim, o autor apresenta uma sequência de imagens que proporcionam a visualização do exemplo destacado, sob uma nova perspectiva.

Figura 26 – Nova perspectiva de visualização para as derivadas parciais



Fonte: Stewart (2013, p. 814).

Com estas representações, percebemos que o autor realiza a atividade de tratamento, por representar a situação anterior de maneiras distintas mantendo o mesmo registo de representação. Desse modo, compreendemos que também é realizada a atividade cognitiva de conversão, devido ao fato que esta sequência de imagens ilustram as explicações e representações realizadas anteriormente tanto em língua materna, quanto no registro algébrico.

Quanto as diferenciais, é realizada uma construção similar à adotada para funções reais de uma única variável. As aproximações lineares são utilizadas neste contexto, para aproximar valores de uma função $z = f(x, y)$ em torno de algum ponto (a, b) do seu domínio. Assim, são definidas as funções ditas diferenciáveis. Inicialmente, Stewart (2013) traz que: “Se $z = f(x, y)$, então f é diferenciável em (a, b) se Δz puder ser expresso da forma $\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ onde ε_1 e ε_1 $\rightarrow$ 0 quando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$.” (STEWART, 2013, p. 826). Em seguida, o autor apresenta um teorema que permite uma verificação mais direta quanto a diferenciabilidade de uma função: “Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).” (STEWART, 2013, p. 826).

Em seguida, observamos que o autor faz uso de alguns exemplos para tratar de aproximações lineares. São apresentados exemplos de situações tanto no registro algébrico, quanto em tabela de valores, através do Índice de temperatura-humidade retratado anteriormente na tabela 2.

Posteriormente, são apresentadas as diferencias de uma função real de duas variáveis. A abordagem é análoga a utilizada para funções reais definidas em $\mathbb{R}$, a diferencial dz de uma função $z = f(x, y)$ é definida como uma variável dependente das diferenciais dx e dy, considerando-as como variáveis independentes. Neste sentido define-se a diferencial dz, também chamada de diferenciação total através da expressão

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

A partir desta noção, são apresentadas algumas representações no registro algébrico bem como no registro geométrico, o qual é abordado a partir de uma imagem, representada na figura 5, que mostra o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ e seu plano tangente associado a um determinado ponto do seu domínio. Por fim, o autor estende estas ideias para funções reais de três variáveis ou mais.

Contudo, notamos que, a princípio, o autor não fornece uma indicação alternativa quanto a natureza da derivada ou da diferencial de uma função real de mais de uma variável. As derivadas ainda ganham um tratamento especial na seção 14.6 Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente, onde a derivada direcional é definida em termos do produto escalar entre um vetor, chamado de vetor gradiente, o qual tem como coordenadas as derivadas parciais da função com relação às suas variáveis, e um vetor unitário que indica a direção para a qual estamos observando a taxa de variação desta função.

No entanto, ainda assim, esses estudos apesar de indicarem novas interpretações, não revelam com clareza qual o objeto matemático que pode ser entendido sob a denominação de derivada ou de diferencial de uma função real de duas ou mais variáveis, e não mais a caráter parcial ou direcional. Percebemos, neste ponto, uma oportunidade para apresentar tais conceitos como uma transformação linear e a matriz de uma transformação linear.

Uma abordagem interessante é trazida pelo livro “Um curso de cálculo” volume 2 do autor Hamilton L. Guidorizzi (2001). Na seção 11. 4 Diferencial, ao tratar de funções diferenciáveis, o autor utiliza o conceito de transformação linear: “Seja $f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0) e consideremos a transformação linear (transformação é sinônimo de função)

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $L(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)k$." (GUIDORIZZI, 2001, p. 205). Na sequência, o autor denomina a transformação linear L de diferencial de f em (x_0, y_0).

Na seção posterior, 11.5 O vetor gradiente, Guidorizzi (2001) traz uma interpretação para a derivada de uma função $z = f(x,y)$ como sendo um vetor: o vetor gradiente da função f. Apesar deste fato, não é feita uma menção mais direta quanto a relação da derivada com a diferencial compreendida como uma transformação linear.

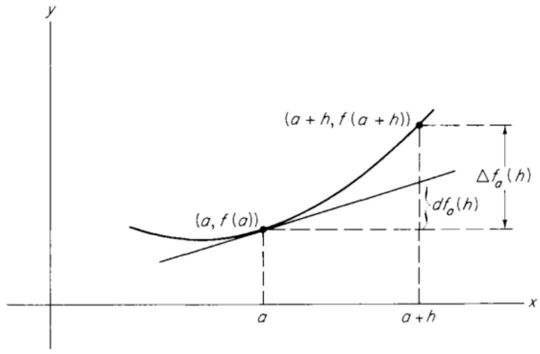
6. 3 UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR

Neste sentido, analisamos que a abordagem trazida pelo livro "Advanced Calculus of Several Variables" de Edwards (1973), faz uso desta conexão entre os conceitos de derivada e diferencial com temas da AL. Vale ressaltar, no entanto, que os estudos desenvolvidos neste livro tratam não apenas de funções reais, como também de funções vetoriais do tipo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, onde $n, m \in \mathbb{N}$. Desse modo, nas duas primeiras seções do capítulo 1, o autor trata do espaço $\mathbb{R}^n$: vetores neste espaço e subespaços de $\mathbb{R}^n$. Enquanto que na seção 3, é feito um estudo acerca do produto interno e da ortogonalidade.

Observamos que, na seção 4 Linear mappings and matrices deste mesmo capítulo, o autor Edwards (1973) inicia um estudo acerca de temas da AL. E este fato é justificado pelo autor: "Uma das ideias centrais do cálculo multivariável é a de aproximar transformações não lineares por transformações lineares." (EDWARDS, 1973, p. 20, tradução nossa). Na sequência, a seção 5 é voltada para um complemento do estudo de transformações lineares, onde são detalhados o núcleo e a imagem destas transformações, enquanto que a seção 6 se dedica ao estudo de determinantes. Por fim, as seções 7 Limits and continuity e 8 Elementary topology of $\mathbb{R}^n$, complementam o capítulo 1, abordando temas, tais como limite, continuidade e conjuntos abertos, os quais são necessários para o desenvolvimento do cálculo diferencial abordado no capítulo posterior.

No capítulo 2, analisamos que o autor reitera sua justificativa, detalhada anteriormente, de poder aproximar transformações não lineares por transformações lineares. Para isso, Edwards (1973) além do registro em língua materna, faz uso da representação no registro algébrico para detalhar que se uma função real f de uma variável é diferenciável em um certo ponto a do seu domínio, então é possível determinar a reta tangente à curva do gráfico da função f no ponto a.

Figura 27 – Aproximação por reta tangente



Fonte: Edwards (1973, p. 56).

Percebemos que a figura 27 é uma representação muito similar àquelas adotadas tanto por Stewart (2013) quanto por Guidorizzi (2001), como retratado na figura 17. No entanto, Edwards (1973) complementa as abordagens trazidas por esses outros autores, fazendo uso da representação, tanto no registro em língua materna, quanto no registro algébrico para expressar a ideia de diferencial e derivada de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em termos de transformação linear e matriz dessa transformação:

> Para tornar isso mais preciso, vamos escrever $h = x - a$, $\Delta f_a(h) = f(a+h) - f(a)$, e $df_a(h) = f'(a)h$. A transformação linear $df_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $df_a(h) = f'(a)h$, é chamada a *diferencial* de f em a; isto é simplesmente a transformação linear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja matriz é a *derivada* $f'(a)$ de f em a (sendo a matriz da transformação linear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ apenas um número real). Com esta terminologia, nós encontramos que quando h é pequeno, a variação linear $df_a(h)$ é uma boa aproximação para a atual variação $\Delta f_a(h)$, no sentido que
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f_a(h) - df_{x_0}(\Delta x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0.$$
>
> (EDWARDS, 1973, p. 57, tradução nossa).

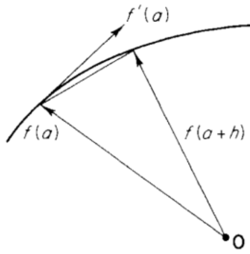
Em seguida, Edwards (1973) defende esta abordagem citando que a representação no registro geométrico é de suma importância para o estudo de cálculo de multivariáveis:

> A grosso modo, nosso ponto de vista neste capítulo será de que uma aplicação $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é (por definição) diferenciável em $\boldsymbol{a}$ se e somente se existe próximo $\boldsymbol{a}$ uma transformação linear apropriada $df_{\boldsymbol{a}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Neste caso, $df_{\boldsymbol{a}}$ será chamado de diferencial de f em $\boldsymbol{a}$; sua matriz $(m \times n)$ será chamada de derivada de f em $\boldsymbol{a}$, preservando assim a relação acima entre a diferencial (uma transformação linear) e a derivada (sua matriz). Veremos que essa abordagem é geometricamente bem motivada e permite que os ingredientes básicos do cálculo diferencial (por exemplo, a regra da cadeia etc.) sejam

desenvolvidos e utilizados em um cenário multivariável. (EDWARDS, 1973, p. 57, tradução nossa).

Em particular, para funções reais de n variáveis, percebemos que a sua derivada será dada por uma matriz $(1 \times n)$. Além disso, foi constatado também que, na seção 1 Curves in $\mathbb{R}^m$ deste capítulo, o autor adota a estratégia de abordar um exemplo em diferentes registros de representação. Nesta situação Edwards (1973) considera uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que descreve o deslocamento de uma partícula em função do tempo t, e assim aborda o conceito de velocidade instantânea em um certo tempo $t = a$ como sendo a derivada de f no ponto a. Além disso, para esta ideia, o autor faz uso da representação no registro geométrico.

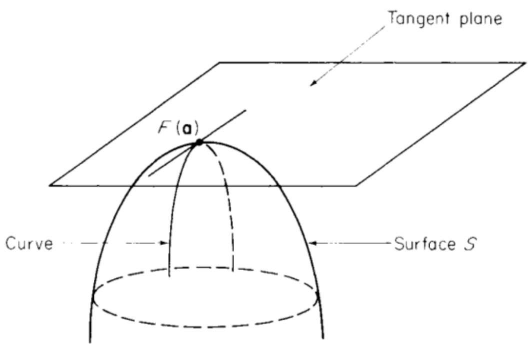
Figura 28 – Vetor velocidade



Fonte: Edwards (1973, p. 58).

Mais adiante, na seção 2, Edwards (1973) ao tratar de diferenciais e derivadas direcionais em funções $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, o autor expande a visualização geométrica adotada anteriormente com a figura 27, para um cenário de aproximação por plano tangente.

Figura 29 – Aproximação por plano tangente



Fonte: Edwards (1973, p. 64).

Com estas análises, percebemos que a abordagem interdisciplinar trazida por Edwards (1973), embora tenha por intuito o estudo do cálculo de multivariáveis; também pode ser aplicada ao estudo de funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$, o que pôde ser constatado pelas similaridades no tratamento das representações utilizadas para se apresentar os conceitos envolvidos.

Dessa forma, concluímos que esta conexão entre os conteúdos do CDI com temas da AL, favorece a consolidação do saber matemático. Esta consideração, baseia-se nas ideias trazidas por Raymond Duval (1995) com a TRRS, onde a mobilização em diferentes registros de representação (neste caso a conotação atribuída para derivadas e diferenciais de funções reais em termos de transformação linear e matriz desta transformação) proporciona um melhor desenvolvimento cognitivo aos estudantes. Neste sentido, o acesso a estes conceitos matemáticos é fortalecido através da apresentação de um cenário interdisciplinar, o qual favorece uma discussão mais ampla não apenas com relação as diferenças, como também acerca das relações existentes entre estes temas sob diferentes perspectivas.

.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação possibilitou um maior aprofundamento quanto às ideias de derivada e diferencial de funções reais definidas em $\mathbb{R}$, e de modo mais geral, funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$. Com isso, foi possível verificar a diferença entre tais conceitos bem como as relações intrínsecas existentes. Desse modo, nosso referencial teórico, dado pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (1995), foi de suma importância para o desenvolvimento dos objetivos centrais que direcionaram este trabalho.

No que diz respeito às representações inicias utilizadas para a apresentação dos conceitos, percebemos que os livros analisados permitem, através das várias estratégias adotadas, uma visão em diferentes perspectivas sobre os objetos estudados. Contudo, constatamos que uma interpretação desses conceitos em função de temas da AL é pouco explorada pelos autores. Nesse sentido, foi proporcionado, também, uma maior visibilidade para esta abordagem de modo que ela possa ser aplicada.

A partir disto, foi verificado que a perspectiva interdisciplinar que liga as disciplinas de CDI I, CDI II e AL, sob a luz da TRRS, consiste em uma abordagem favorável ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes, levando em consideração que as mobilizações de representações em diferentes registros apresentadas, proporcionam discussões mais nítidas acerca das diferenças e relações existentes entre os conceitos estudados. Com isso, também foram fornecidas ferramentas que indicam como esta abordagem pode ser melhor explorada.

Vale ressaltar que esta abordagem pode ser dada de uma forma mais ampla, considerando outras disciplinas que não foram trazidas nesta pesquisa. Em especial, podemos citar as disciplinas de Análise Real e Análise no $\mathbb{R}^n$ que também contemplam em sua ementa os conteúdos analisados, bem como a disciplina de CDI III (ou Cálculo Vetorial) que trata do estudo de funções vetoriais. Contudo, nosso intuito consistiu em concentrar nossas atenções para as disciplinas iniciais que compõem a grade curricular de diversos cursos à nível superior.

Compreendemos também, a existência de dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem destes conteúdos, sejam o nível de abstração exigido, dificuldades em se interpretar resultados algébricos ou geométricos, e até mesmo as várias possibilidades de representações existentes. Contudo, esperamos que este material acadêmico proporcione recursos para que o processo de ensino se torne mais abrangente, tanto nas salas de aula, quanto na realização de projetos interdisciplinares, palestras ou minicursos voltados à esta temática.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, R.; SIPLE, I. Z.; MORO, G. Conceito de derivada e diferencial: Concepções e relações. In: III Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 3., 2012, Ponta Grossa. **Anais […].** Paraná: UDESC, 2012.

DUVAL, Raymond. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. [Entrevista cedida à] José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, 2015.

DUVAL, Raymond; CAMPOS, T. M. M. (org.). **Ver e ensinar a matemática de outra forma.** Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM editora, 2011, v. 1.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

EDWARDS, C. H. **Advanced Calculus of Several Variables**. Academic Press Inc. London. 1973.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo**. Volume 1, 5. ed. Rio de Janeiro: LTC Ed. Ltda, 2001.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo**. Volume 2, 5. ed. Rio de Janeiro: LTC Ed. Ltda, 2001.

JAPIASSU, Hilton. **A interdisciplinaridade e a patologia do saber**. Rio de Janeiro: Imago, 1976.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. **Ciência & saúde coletiva**, v. 17, p. 621-626, 2012.

NICOLAU, Marcos et al. Comunicação e Semiótica: visão geral e introdutória à Semiótica de Peirce. **Revista eletrônica temática**, v. 6, n. 08, 2010.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., e ABRANTES, P. (1997). **Didáctica da matemática: Ensino secundário.** Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

QUEIROZ, João. Sistemas semióticos, artefatos cognitivos, Umwelt–uma contribuição ao Design da Informação. **InfoDesign**, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 7-12, 2010.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Makron Books, 1987.

STEWART, James. **Cálculo**. Volume 1, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, James. **Cálculo**. Volume 2, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.