

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**



**ANÁLISE ESTRUTURAL DE TABULEIROS DE PONTE EM
LAJE USANDO O MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA**

Ricardo Gomes Duarte Freire

RECIFE, MAIO DE 2013

Ricardo Gomes Duarte Freire

**ANÁLISE ESTRUTURAL DE TABULEIROS DE PONTE EM
LAJE USANDO O MÉTODO DE ANALOGIA DE GRELHA**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Civil.



Orientador: Prof. Bernardo Horowitz

RECIFE, MAIO DE 2013

F886a Freire, Ricardo Gomes Duarte

Análise estrutural de tabuleiros de ponte em laje usando o método de analogia de grelha / Ricardo Gomes Duarte Freire. – Recife: O Autor, 2013.

47 folhas, il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz

TCC (graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Departamento de Engenharia Civil e ambiental, 2013.

Inclui referências.

1. Engenharia Civil. 2. Lajes 3. Teoria de flexão das placas. 4 Ponte em laje. I. Horowitz, Bernardo (orientador). II. Título.

624 CDD (22. ed.)

UFPE

SUMÁRIO

Lista de símbolos	I	
Lista de Figuras	II	
Lista de tabelas	IV	
1	Introdução	1
	1.1 Pontes em laje	1
	1.2 Métodos Construtivos	2
	1.2.1 Laje Maciça	2
	1.2.2 laje com vazios incorporados	2
	1.2.3 Seção com vigas pré-moldadas	3
2	Teoria de flexão das placas	6
	2.1 Equações governantes	6
	2.2 Analogia de Grelha	11
	2.2.1 Propriedades dos elementos	12
	2.2.2 Aplicação das cargas	14
	2.2.3 Exemplo	16
	2.2.4 Discretização de lajes vazadas	19
3	Estudo de caso	23
	3.1 Estrutura analisada	23
	3.2 Modelagem da estrutura	24
	3.2.1 Cargas atuantes	25
	3.3 Estrutura de referência	28
	3.3.1 Cargas atuantes	30
	3.4 Resultados obtidos	32
	3.5 Detalhamento da estrutura	35
	3.5.1 Verificação da fadiga das armadura	35
	3.5.2 Ancoragem das armaduras no apoio	37
	3.5.2.1 Esforço cortante máximo	37
	3.5.3 Verificação de ancoragem nos apoios	39
	3.5.4 Limite de fissuração	40
	3.5.5 Detalhamento final da estrutura	39
	Referências bibliográficas	44
	Anexos	45

LISTA DE SIMBOLOS

P	Carga concentrada
$P_{s,car}$	Carga concentrada solicitante referente a uma roda to trem-tipo
Q	Carga Distribuída
V_s	Esforço cortante solicitante
V_d	Esforço cortante de dimensionamento
V_{Rd1}	Esforço cortante resistente de projeto
A_s	Área de aço
A'_s	Área de concreto equivalente a A_s
$A_{s,cor}$	Área de aço corrigida
E_s	Módulo de elasticidade do aço
E_c	Módulo de elasticidade do concreto
D	Rigidez a flexão da placa
E	Modulo de elasticidade
M	Momento fletor
I	Inércia a flexão
I_p	Inércia a torção
h	Altura da laje
a_i	Área de influencia
t	Tonelada
m	Metro
l	vão teórico
l_i	Distância entre pontos de momento fletor nulo
γ	Peso específico
γ_c	Peso específico do concreto
γ_q	Coefficiente de majoração das cargas
γ_f	Coefficiente de ponderação das ações
τ_{Rd}	Tensão de cisalhamento resistente de projeto
f_{ctd}	Resistencia a tração de projeto
w	Deflexão vertical
ν	Coefficiente de Poisson
ρ	Raio de curvatura
ϕ	Coefficiente de impacto
f_y	Tensão de escoamento do aço
f_{cj}	Resistência característica do concreto na idade j
f_{ck}	Resistência característica do concreto aos 28 dias
n	Fator de transformação
d	Altura útil da seção
y	Profundidade da linha neutra
σ	Tensão norma
n_s	Coefficiente de aumento da área de aço, de flexão, devido a fadiga

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 Seção Transversal de uma ponte em laje maciça
- Figura 1.2 Plantas irregulares , ponte esconsa(a),ponte com largura variável (b)
- 1.3 Seção típica de um bueiro em laje
- Figura 1.4 Seção possível para uma ponte em laje maciça
- Figura 1.5 seção para uma ponte em laje ferroviária
- Figura 1.6 Seções típicas para laje com forma perdida indicando dimensões mínimas recomendadas em milímetros
- Figura 1.7 Seção típica de uma ponte em laje com tabuleiro em vigas pré-moldadas
- Figura 1.8 Modelos Comerciais de vigas pré-moldadas Tarmac
- Figura 1.9 Modelos Comerciais de vigas pré-moldadas ABM Precon
- Figura 1.10 Alternativa para uso de lajes com vazios incorporados e vigas pré-moldadas
- Figura 1.11 Seção de uma laje vazada formada por elementos pré-moldados(esquerda)
Seção composta por vigas caixão de paredes finas onde o esforço cortante é transmitido por ranhuras *shear key* (direita)
- Figura 1.12 Detalhe dos furos para armadura transversal,cotas em milímetros.
- Figura 2.1 Esforços nos elementos da grelha
- Figura 2.2 Transmissão dos esforços entre barras
- Figura 2.3 Modelo de tabuleiro e grelha equivalente
- Figura 2.4 Localização Ideal para bordos livre de lajes
- Figura 2.5 Área de influência de um nó da malha
- Figura 2.6 Elementos longitudinais da grelha na seção transversal a esquerda e elementos transversais em planta a direita.
- Figura 2.7 Grelha com todos os elementos.
- Figura 2.8 Distribuição de momentos no ,modelo de elementos finitos,na direção X
- Figura 2.9 Modelo proposto para análise de tabuleiros vazados,estrutura em planta com localização da carga móvel (a), seção transversal(b),cotas em centímetro.
- Figura 2.10 Modelos de tabuleiros vazados (a) Elementos finitos tridimensionais ,(b) elementos finitos planos (c) modelo de grelha.
- Figura 3.1 Planta e seção transversal do tabuleiro
- Figura 3.2 Seção transversal simplificada
- Figura 3.3 Faixas transversais e seção longitudinal com eixos das faixas longitudinais
- Figura 3.4 Detalhe típico do guarda roda,cotas em centímetros.
- Figura 3.5 Detalhe da aplicação da carga referente ao guarda roda
- Figura 3.6 Vista geral da distribuição da carga referente ao peso próprio.
- Figura 3.7 detalhe da distribuição da carga referente ao peso próprio.
- Figura 3.8 Representação gráfica do trem-tipo
- Figura 3.9 Carro posicionado na borda do tabuleiro,cotas em centímetros.
- Figura 3.10 Distribuição das cargas do trem-tipo (a) carro localizado na borda (b) carro no centro do tabuleiro

Figura 3.11 Modelo em elementos finitos

Figura 3.12 Destaque da áreas de aplicação da carga da defesa

Figura 3.13 Espraiamento da carga da roda

Figura 3.14 Distribuição das cargas do trem-tipo no modelo de elementos finitos (a) carro localizado na borda (b) carro no centro do tabuleiro

Figura 3.15 Distribuição de momentos tracionando as fibras paralelas ao eixo da ponte. (a) Modelo de grela com carro posicionado na borda,(b)Modelo de grelha com carro no centro do tabuleiro (c) Modelo em elementos finitos com carro posicionado na borda,(d)Modelo em elementos finitos com carro no centro do tabuleiro.

Figura 3.16 Seção de 1 metro de laje com armadura longitudinal.

Figura 3.17 Seção de 1 metro de laje homogeneizada.

Figura 3.18 Espraiamento horizontal da carga da roda

Figura 3.19 seção crítica típica para tabuleiros em laje

Figura 3.20 Concreto de envolvimento das armaduras

Figura 3.21 Armação do tabuleiro

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Propriedades geométricas dos elementos

Tabela 2.2 Valores de correção da inércia a torção pelo método de Ward e Cassell

Tabela 2.3 Deslocamentos máximos em cada modelo

Tabela 3.1 Propriedades dos elementos da grelha

Tabela 3.2 Valores das grandezas consideradas para o dimensionamento do tabuleiro

1 Introdução

1.1 Pontes em laje

São estruturas destinadas a transpor obstáculos desprovidas de Vigas ou qualquer elemento estrutural, de maior rigidez, que auxiliem a laje do tabuleiro a suportar os esforços solicitantes. O tabuleiro em laje é estruturalmente contínuo nas duas direções do plano da laje com isso as cargas aplicadas são suportadas por uma distribuição bidirecional de esforços cortantes, momentos fletores e torsores.

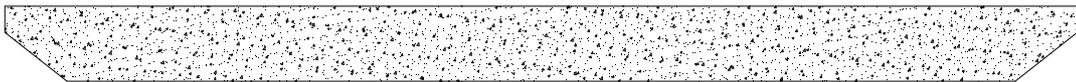


Figura 1.1 Seção Transversal de uma ponte em laje maciça

Este tipo de estrutura é geralmente indicada para pontes de um só vão de até 20 metros e estruturas contínuas com vão máximo de 36 metros. As pontes em laje também são especialmente indicadas para estruturas esconsas ou pontes com largura variável.

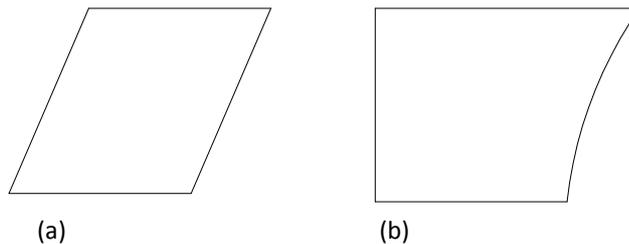
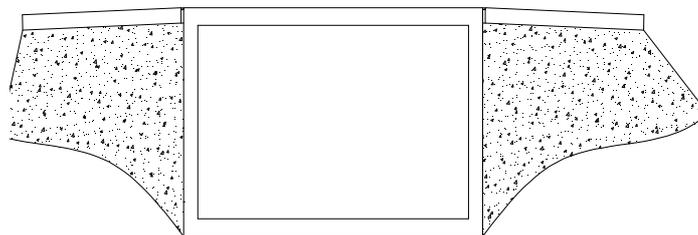


Figura 1.2 Plantas irregulares , ponte esconsa(a), ponte com largura variável (b)

Por fim podemos indicar esse modelo estrutural no caso de pequenas pontes em pórtico ou bueiros em arco, nos quais os montantes também são constituídos por lajes.



1.3 Seção típica de um bueiro em laje

A esbeltez l/h ou l_1/h a ser adotada pode seguir as recomendações (LEONHARDT, 1982):

Ponte classe 45 a 30	15 a 22, para concreto armado
	18 a 30, para concreto protendido
Ponte classe 16	20 a 25, para concreto armado
	26 a 60, para concreto protendido

1.2 Métodos Construtivos

As pontes em laje apresentam-se sob diversos métodos construtivos os quais buscam atender necessidades específicas de cada situação de projeto. A seguir estão detalhados os principais modelos de projeto.

1.2.1 Laje Maciça

É a forma mais simples tanto do ponto de vista de projeto como execução, por isso é uma boa alternativa quando se procura uma execução mais rápida. Pode ter sua seção variável tanto longitudinalmente como transversalmente. Do ponto de vista de comportamento estrutural o tabuleiro pode ser analisado como isotrópico, apresentando a mesma rigidez em todas as direções.

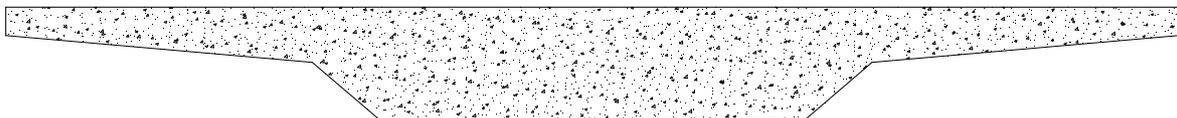


Figura 1.4 Seção possível para uma ponte em laje maciça

O principal inconveniente deste tipo de tabuleiro vem do elevado consumo de concreto resultando em um alto peso próprio que o torna inviável quando se precisa de lajes com maior espessura.

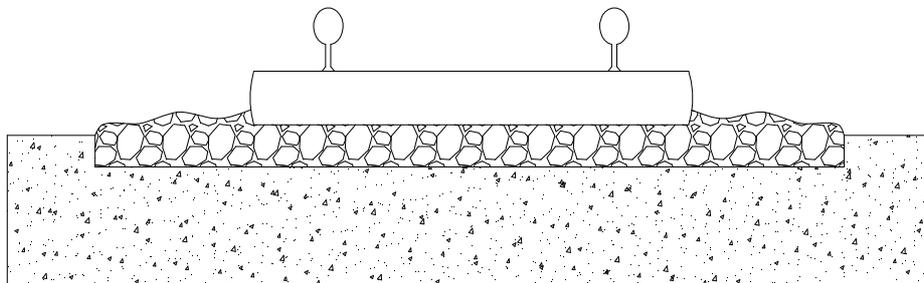


Figura 1.5 seção para uma ponte em laje ferroviária

1.2.2 Laje com vazios incorporados

Este tipo de seção é indicada quando o peso próprio se torna um inconveniente no projeto. Os vazios são incorporados através de fôrmas perdidas que podem ser cilíndricas ou prismáticas. A seguir temos seções típicas deste método construtivo destacando dimensões mínimas recomendadas.

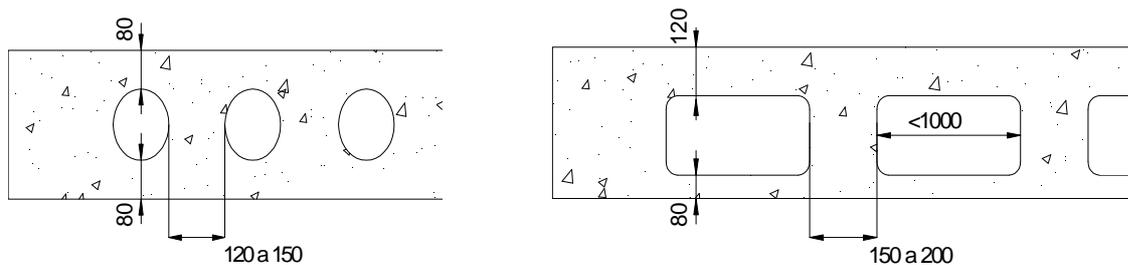


Figura 1.6 Seções típicas para laje com forma perdida indicando dimensões mínimas recomendadas em milímetros

Esse método construtivo também exigem estribos adicionais para proteção dos vazios e que haja uma ancoragem das fôrmas para evitar que elas flutuem na ocasião da concretagem, além disso devem ser previstos seções maciças próximo aos apoios de forma a uniformizar a distribuição de tensões. Por fim não devemos tentar usar essa alternativa como forma de economia devido a redução do volume de concreto, pois as formas utilizadas tem valor que se equiparam ao volume de concreto que é reduzido além de exigirem armaduras adicionais já citadas anteriormente. Do ponto de vista do comportamento estrutural este modelo construtivo é similar ao maciço desde que respeitadas algumas limitações como será estudado a seguir.

1.2.3 Seção com vigas pré-moldadas

Método executivo que se destaca por dispensar formas e escoramento, se caracteriza pela colocação de vigas com seção T invertido justapostas de forma a criar uma base capaz de suportar seu peso próprio e as solicitações da fase executiva e a carga do concreto moldado *in loco*, usado para preencher a seção.

O Conjunto final formado pelas vigotas, o concreto moldado *in loco* e as armaduras adicionais constituem o tabuleiro destinado a suportar os esforços solicitantes.

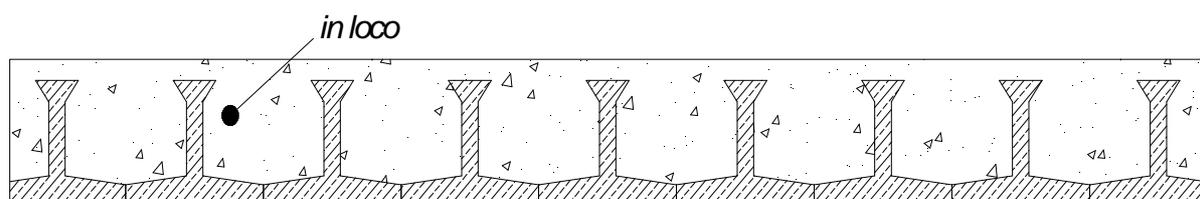


Figura 1.7 Seção típica de uma ponte em laje com tabuleiro em vigas pré-moldadas

A seguir tem-se alguns dos modelos comerciais das vigas pré-moldadas utilizadas para este tipo de ponte, na figura 1.7 estão representadas seções típicas com suas aplicações, vantagens e vão aos quais são mais indicadas. Na figura 1.8 há mais um modelo comercial de viga mostrando alguns detalhes como o furo opcional para passagem de armadura transversa, o abatimento para colocação de pré-lajes e figuras com suas aplicações.

T Beam

p 6-7

typical applications:

Short and medium span bridges and commercial developments.

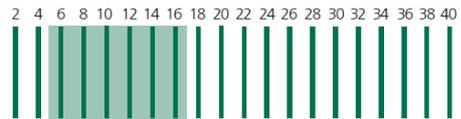
advantages:

Provides a closely assembled soffit. No need for formwork.

profile



span range (in metres)



TY Beam

p 8-9

typical applications:

Short and medium span bridges, commercial developments, jetties and marine decks.

advantages:

Provides a closely assembled soffit with lower number of beams required and less insitu concrete. No need for formwork.

profile



span range (in metres)

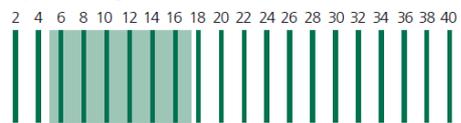


Figura 1.8 Modelos Comerciais de vigas pré-moldadas Tarmac

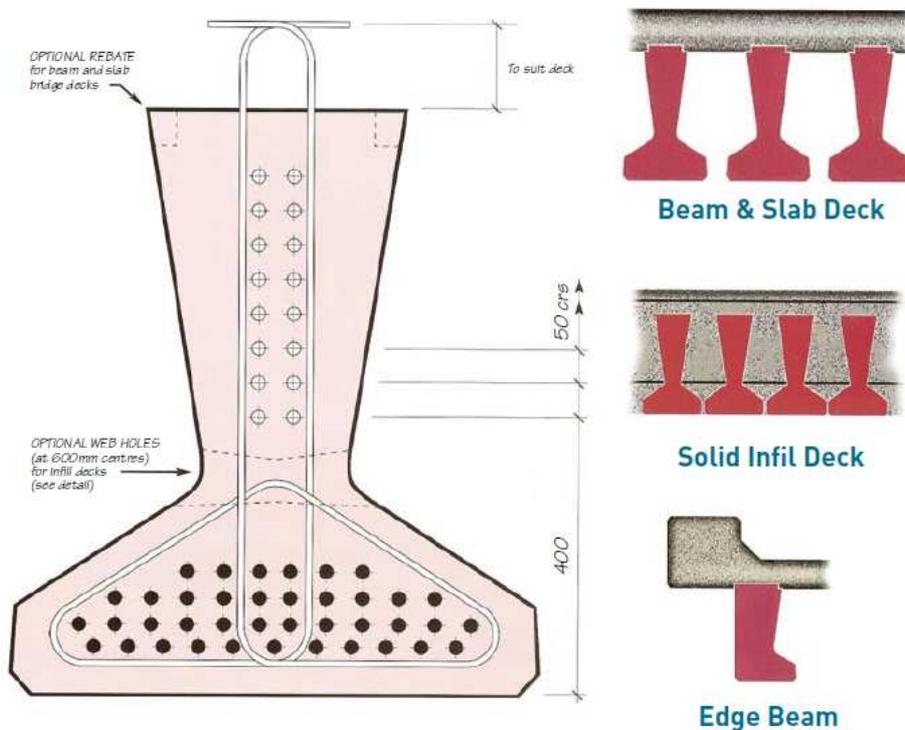


Figura 1.9 Modelos Comerciais de vigas pré-moldadas ABM Precon

Neste tipo de método também é possível introduzir vazados fazendo uma concretagem parcial da base até uma altura adequada ,posteriormente são colocadas pré-lajes e feita a concretagem final ,formando uma estrutura com os atributos do uso das vigas pré moldadas e das seções vazadas, conforme indicado no esquema seguinte.

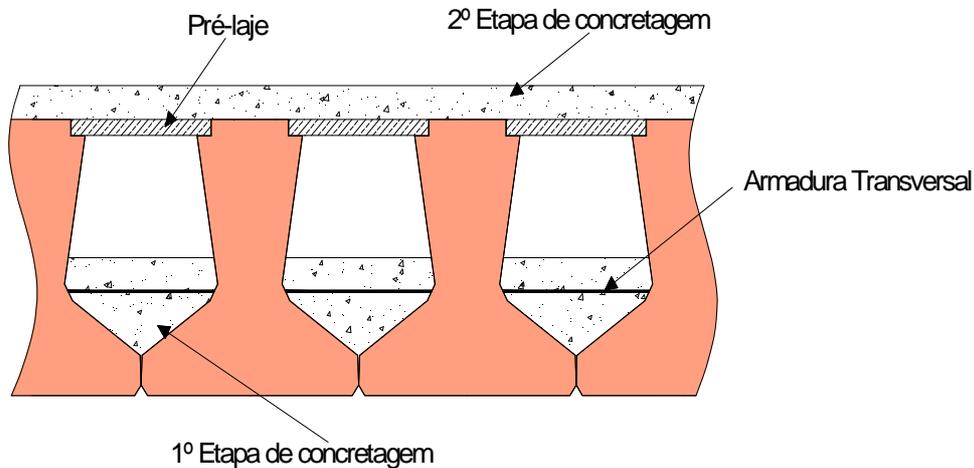


Figura 1.10 Alternativa para uso de lajes com vazios incorporados e vigas pré-moldadas

Por fim é importante destacar que neste método construtivo podemos utilizar outros elementos pré-moldados diferente das vigas em T, podem ser usados elementos com vazios incorporados de fabrica e vigas com seção caixão. Em ambos os casos pode ser utilizada uma protensão transversal para garantir o comportamento contínuo da laje nesta direção.Em todos os casos são dispostos furos,como os da figura1.10, destinadas tanto para cabos de potência como para armaduras passivas.

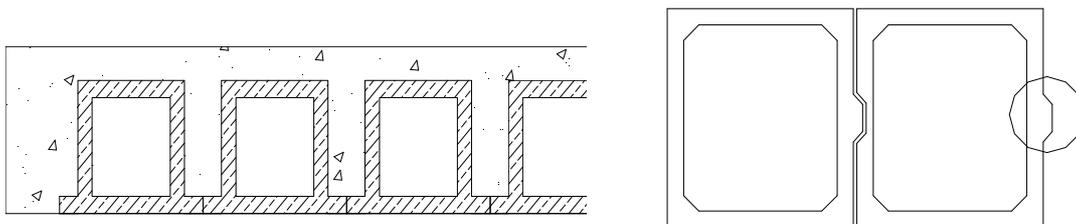


Figura 1.11 Seção de uma laje vazada formada por elementos pré-moldados(esquerda)
Seção composta por vigas caixão de paredes finas onde o esforço cortante é transmitido por ranhuras *shear key* (direita)

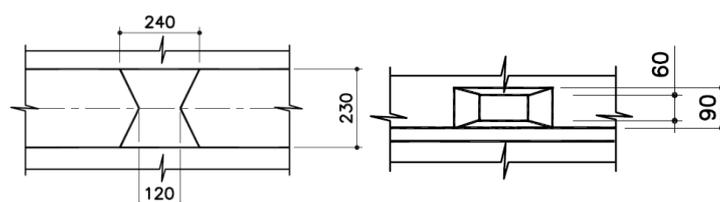


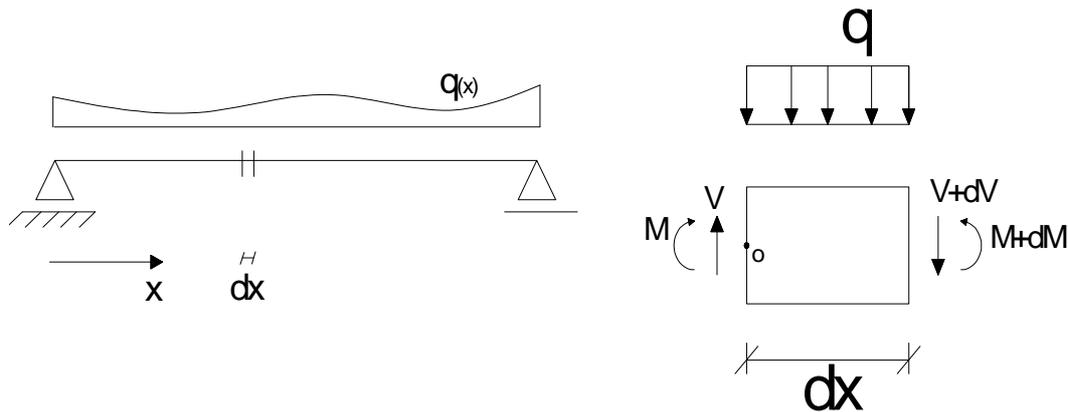
Figura 1.12 Detalhe dos furos para armadura transversal,cotas em milímetros

2 Teoria de flexão das placas

2.1 Equações governantes

Para compreender os esforços internos vamos inicialmente compreender algumas relações matemáticas, inerentes as viga.

Inicialmente deve-se considerar uma Viga com um carregamento qualquer e isolar uma porção com comprimento dx



Tomando o equilíbrio estático da porção em torno do ponto O e de translação vertical:

$$\sum M_o = M - (M + dM) + dx(V + dV) + \frac{q + dx^2}{2} = 0$$

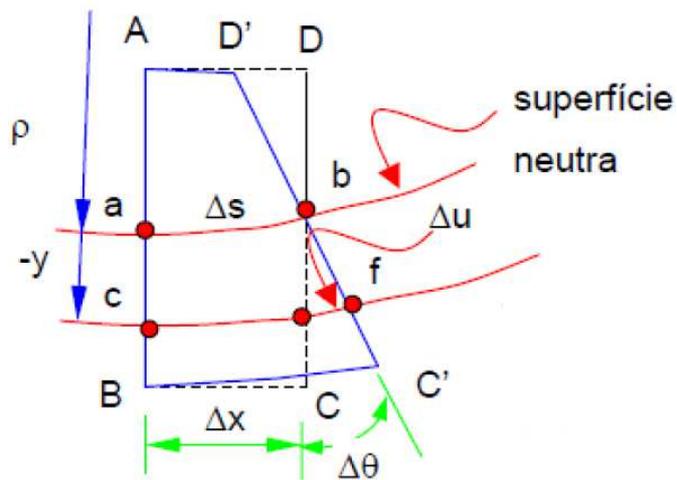
$$\sum F_v = V - (V + dV) - qdx = 0$$

Após desenvolver as equações, sendo os infinitesimais de ordem superior desprezíveis, tem-se:

$$-dM + Vdx = 0 \therefore V = \frac{dM}{dX} \quad (2.1)$$

$$-dV - qdx = 0 \therefore -q = \frac{dV}{dx} \quad (2.2)$$

Agora será estudada a relação entre o momento e a curvatura analisando um trecho de viga fletido



Da análise da seção apresentada e sabendo que para pequenas rotações é válido fazer $\text{sen}\theta = \Delta\theta$, temos:

$$\Delta u = -y\Delta\theta$$

$$\Delta s = \rho\Delta\theta$$

dividindo-se ambos os termos por Δs ficamos com:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad (2.3)$$

É fácil observar que $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ representa a deformação linear ε de uma fibra distante y do eixo neutro e fazendo $\lim(\Delta s \rightarrow 0)$ podemos escrever

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \varepsilon \quad (2.4)$$

Da mesma forma chegamos a

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \quad (2.5)$$

Substituindo 2.4 e 2.5 em 2.3 escrevemos

$$\varepsilon = -y \frac{1}{\rho} \quad (2.6)$$

Considerando que a viga encontra-se no regime linear elástico são válidas as relações

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.7)$$

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad (2.8)$$

Substituindo 2.7 em 2.8

$$\varepsilon = -\frac{My}{EI}$$

Aplicamos agora este resultado em 2.6 e desenvolvendo a equação chegamos a :

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \quad (2.9)$$

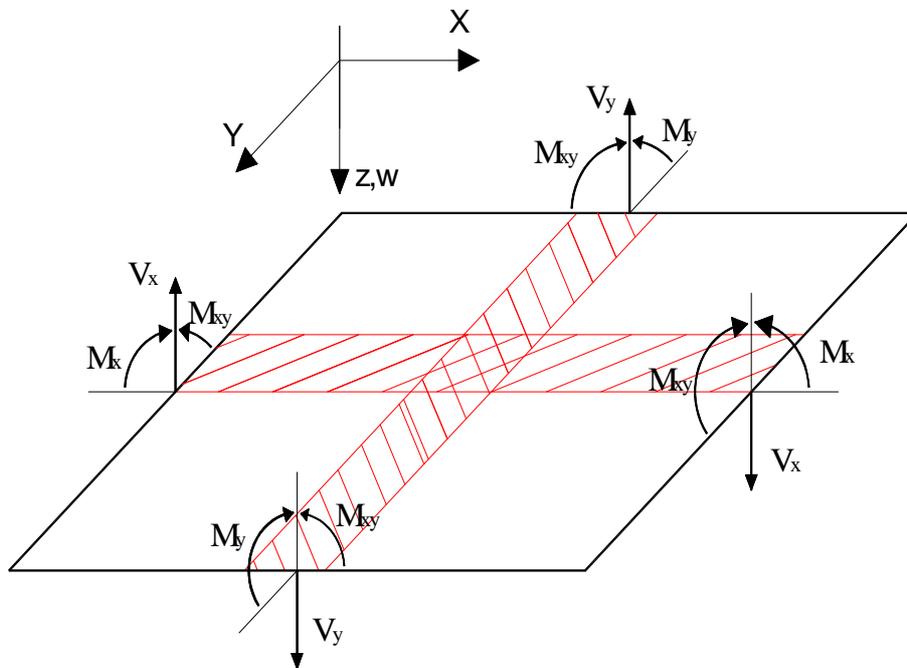
Por fim, é conhecido da geometria analítica que em coordenadas cartesianas a curvatura de uma curva é definida por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{[1+(\frac{dw}{dx})^2]^{3/2}} = \frac{w''}{[1+w'^2]^{3/2}} \quad (2.10)$$

Onde w e x são as coordenadas de um ponto da curva, no caso particular que estamos tratando x define um ponto da linha elástica e w nos dá a deformação neste ponto, além disso como tratamos com deformações muito pequenas a declividade $\frac{dw}{dx}$ torna-se muito pequena resultando em um valor desprezível em para o estudo em questão, com isso é possível simplificar a equação 2.10 para

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.11)$$

Após desenvolvidos estes conceitos podemos nos envolver com o estudo mais detalhado das lajes. Vamos considerar uma placa destacando duas faixas transversais passando no centro do plano.



Consideraremos esta nossa estrutura com bordos simplesmente apoiados e sujeita a uma carga vertical não representada na figura. É fácil observar que as faixas terão o mesmo deslocamento vertical no ponto de interseção e para uma das faixas caso fosse considerada isolada teríamos aplicado 2.09 em 2.11

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2w}{dx^2}$$

Porem no estudo de uma laje devemos considerar a interação entre os elemento concorrentes, pois o elemento transversal ao se deformar impõe uma deformação ao seu concorrente devido ao efeito de Poisson gerando com isso um momento adicional. O valor para este esforço adicional é dado por

$$M_v = v \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Com isso temos que para uma faixa da laje o momento atuante é dado por:

$$M_x = D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + v \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \quad (2.12)$$

$$M_y = D \left(v \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \quad (2.13)$$

Sendo M_x e M_y o momento que traciona as fibras paralelas a x e y, respectivamente e D a rigidez a flexão da placa por unidade de largura, dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.14)$$

Analogamente a 2.1 e 2.2 temos para a laje

$$V_x = \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_{xy}}{dy} \quad (2.15)$$

$$V_y = \frac{dM_y}{dy} + \frac{dM_{xy}}{dx} \quad (2.16)$$

$$q = -\frac{dV_x}{dx} - \frac{dV_y}{dy} \quad (2.17)$$

Substituindo 2.15 e 2.16 em 2.17 temos:

$$q = -\frac{d^2 M_x}{dx^2} - 2 \frac{d^2 M_{xy}}{dx dy} - \frac{d^2 M_y}{dy^2} \quad (2.18)$$

Substituindo 2.12 e 2.13 em 2.18

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{q}{D} \quad \text{Equação de Lagrange}$$

Esta equação é valida para uma placa com rigidez a flexão constante, trata-se de uma equação diferencial de quarta ordem. Com isso o problema consiste em determinar uma expressão para a superfície deformada $w(x,y)$ que satisfaça a equação de Lagrange e as condições de contorno da estrutura. Com isso os esforços internos podem ser calculados com as relações apresentadas.

Agora se faz necessário uma correlação entre o modelo de grelha e a laje correspondente. Na análise do modelo os esforços internos e deformações são saídas do processo computacional com isso a análise estrutural é feita trabalhando-se esses dados. Na figura 2.1 está a representação de um ponto da grelha onde se encontram as barras longitudinais b_1 e b_2 a as transversais b_3 e b_4 com os seus respectivos esforços internos, o momento M_{b_1} corresponde ao momento atuante em uma porção de laje com largura igual a da faixa representada por b_1 . É importante observar que surge uma variação entre os momento atuando nos extremos de uma barra continua, essa diferença surge devido a parcela de momento transmitida a barra transversal na forma de torção (Figura 2.2).

Para calcular o esforço atuante na seção é válido fazer a média entre cada face adjacente da barra tomando os esforços imediatamente antes e depois do ponto de concorrências dos elementos por fim sabendo-se que na análise de laje os esforços são fornecidos por unidade de largura devemos dividir o valor da média encontrada pela largura da faixa correspondente obtendo-se assim o valor de interesse para o dimensionamento da estrutura no caso que se segue podemos encontrar o momento longitudinal atuante na barra b1-b2 através da expressão abaixo:

$$M_L = \frac{Mb_1 + Mb_2}{2} \times \frac{1}{b}$$

M_L – Momento Longitudinal

b – Largura da faixa

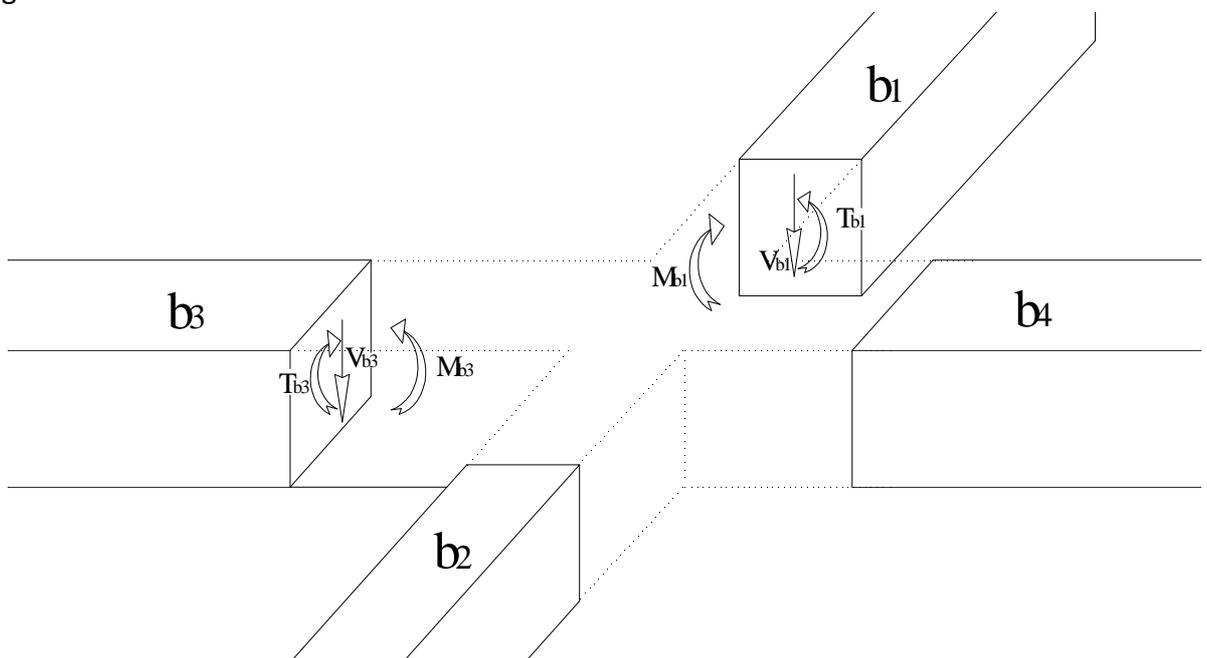


Figura 2.1 Esforços nos elementos da grelha

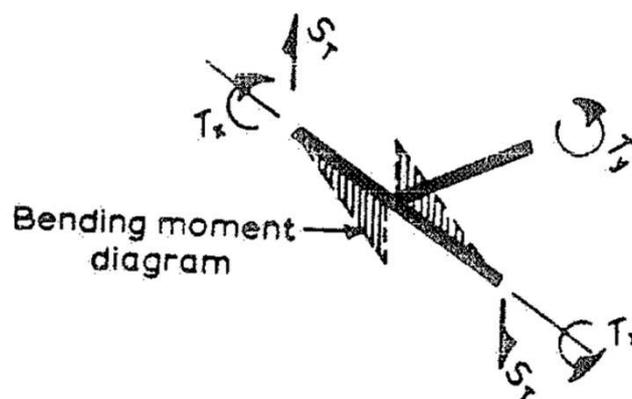


Figura 2.2 Transmissão dos esforços entre barras

2.2 Analogia de Grelha

A analogia de grelha é um dos métodos mais conhecidos para análise de tabuleiros de pontes, devido a facilidade com que é empregado e compreendido além de se mostrar uma forma confiável de análise. Este tipo de modelagem estrutural se caracteriza por discretizar o tabuleiro em uma série de vigas, criando uma grelha. Cada elemento da grelha tem as propriedades geométricas e recebe as cargas da porção que ela representa.

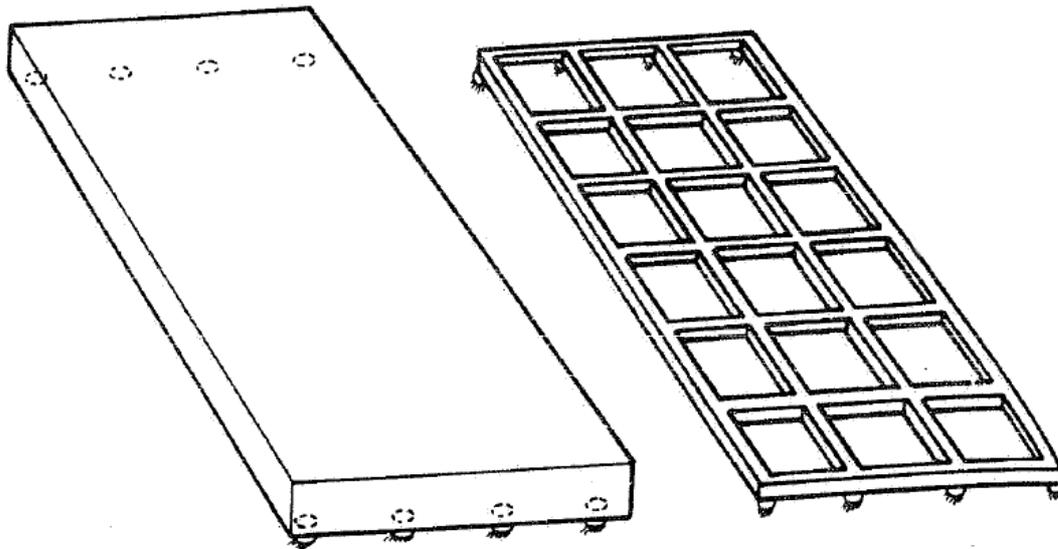


Figura 2.3 Modelo de tabuleiro e grelha equivalente

A escolha da malha pode variar muito devido a grande gama de tabuleiros que podem ser modelados, com isso não é possível fixar regras para criação do sistema de vigas mas existem orientações que ajudam a criar um modelo que represente de forma satisfatória o comportamento da estrutura.

A seguir estão expostas algumas dessas recomendações:

- Deve ser feita uma reflexão em relação ao comportamento da estrutura e locar as vigas da grelha com eixo coincidindo com a direção dos esforços principais.
- A distribuição de esforços internos também deve ser considerada na distribuição dos elementos no interior da estrutura. Podemos exemplificar esse item em uma estruturas com bordos livres em que a barra deve ser locada onde encontra-se a componente vertical do fluxo de cisalhamento que em geral em lajes maciças acontece a $0,3h$ da borda (Figura 2.4).

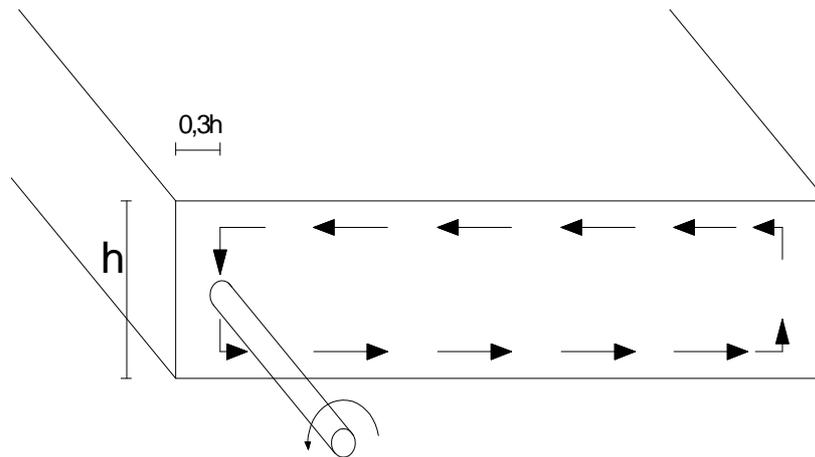


Figura 2.4 Localização Ideal para bordos livre de lajes

- O numero de elementos longitudinais pode variar de um em casos onde o tabuleiro e estreito o suficiente para se comportar como uma viga até aproximadamente 20 faixas em estruturas mais largas.
- As barras devem ser distribuídas com distância entre eixos de duas a três vezes a altura da laje do tabuleiro sem superar o valor de $\frac{1}{4}$ do vão efetivo
- O espaçamento entre elementos transversais devem ser suficientemente pequeno para representar com precisão a distribuição de esforços dos elementos longitudinais. Recomenda-se um distância inferior a $\frac{1}{4}$ do vão efetivo, também devemos ficar atentos para regiões de mudança brusca ao longo do tabuleiro como apoios intermediários nestes casos devemos reduzir o espaçamento entre os elementos transversais para obter uma maior fidelidade do resultado.
- O espaçamento entre elementos longitudinais e transversais devem ser razoavelmente semelhantes para haver uma distribuição coerente de cargas.
- As barras da grelha devem formar um ângulo reto entre si inclusive em estrutura esconsas.

2.2.1 Propriedades dos elementos

Inicialmente para a determinação das propriedades dos elementos é preciso fazer a divisão do tabuleiro em faixas que serão discretizadas por barras, esta divisão deve ser feita segundo as recomendações anteriores. De posse da divisão do tabuleiro devemos agora tratar cada faixa como um elemento isolado e encontrar suas Inércias a flexão e a torção. Para elementos com seção transversal retangular temos:

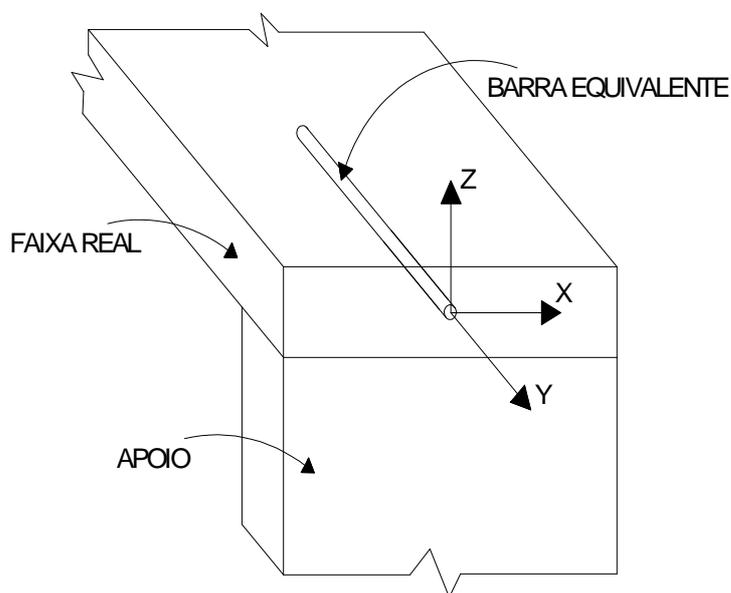
$$I = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$I_p = \frac{b \times h^3}{6}$$

Essas propriedades devem ser tomadas em relação ao eixo baricentrico da seção transversal total do tabuleiro, e não de cada peça individual.

Alem disso a inércia a flexão pode ser corrigida multiplicando seu valor pelo fator $\frac{1}{(1-\nu^2)}$ que representa o incremento de rigidez devido a interação dos elementos longitudinais e transversais. Esse fator pode ser dispensado em tabuleiros ortotropicos já que influência da mesma forma nas duas direções do plano e não gera alteração nos resultados dos esforços internos sedo mais influente na análise de deformações da estrutura. Em estruturas de concreto o incremento da rigidez é da ordem de 4%.

Por fim devem ser associadas as condições de contorno de cada elemento obedecendo os graus de liberdade da faixa real conforme exemplo seguinte.



Para o elemento de grade que represente esta porção do tabuleiro devemos ter as condições de apoio de acordo com o expresso no quadro a seguir, baseado-se na análise da faixa de tabuleiro real.

Movimento	Restrição
Rotação em torno de X	Livre
Rotação em torno de Y	Fixo
Rotação em torno de Z	Fixo
Translação em X	Fixo
Translação em Y	Fixo
Translação em Z	Fixo

2.2.2 Aplicação das cargas

Após a discretização da grelha deve ser feita a aplicação das cargas atuantes na ponte. Essas cargas devem ser aplicadas nos nós da estrutura de forma que não haja esforços localizados que podem a vir a trazer resultados falsos.

Um método bastante simples e eficiente para aplicação das cargas é o conceito de área de influencia que se aplica de forma mais eficiente em cargas que encontram-se uniformemente distribuída no tabuleiro, como por exemplo a pavimentação e a carga de multidão do trem-tipo. Além disso podemos fazer assim a aplicação da carga referente ao peso próprio da estrutura.

Neste método é considerado a área de influencia do nó, que é delimitada pelas linhas médias do ponto analisado e o seu nó seguinte conforme exemplificado a seguir.

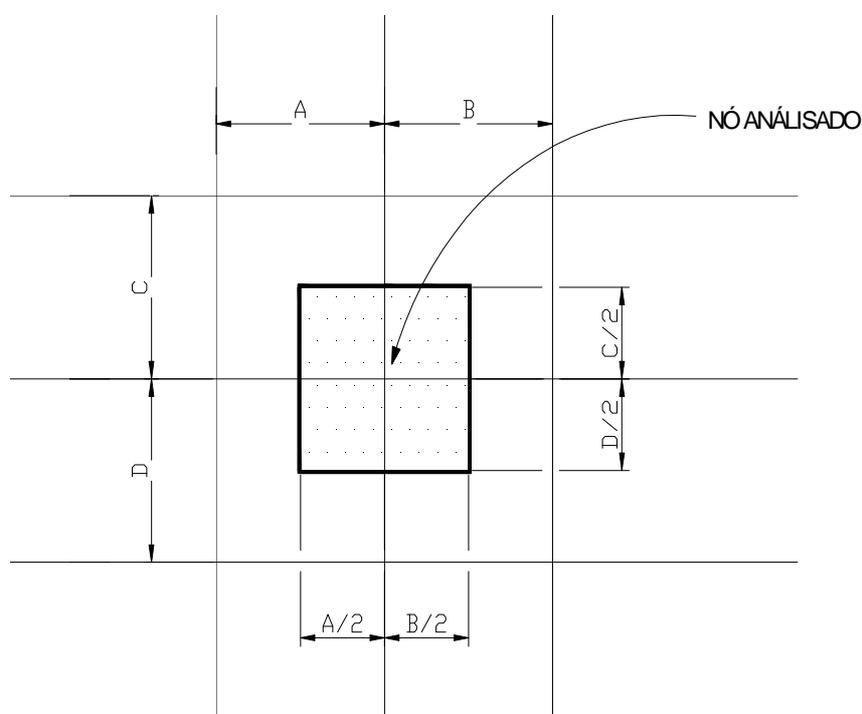
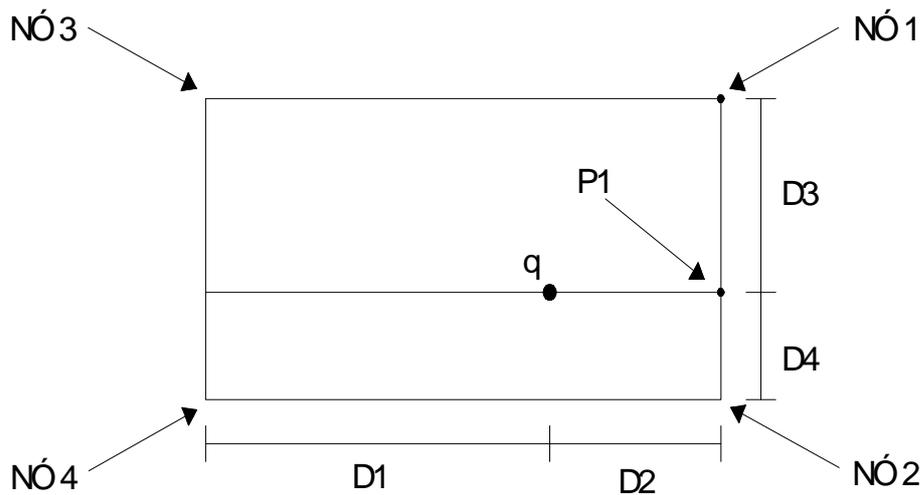


Figura 2.5 Área de influência de um nó da malha

Nesta Figura temos um sistema de grelha e destacados temos a área de influência de um determinado nó onde irá ser aplicada a carga.

A área de influência neste caso é dada por $a_i = \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \times \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2}\right)$. Onde A,B,C,D estão apresentados na figura. A carga a ser aplicada no nó será uma carga concentrada de valor $a_i \times q$ onde q é o valor da carga uniformemente distribuída.

Para cargas concentradas o método anterior não se mostra muito satisfatório sendo utilizado uma forma na qual a carga localizada em um ponto qualquer entre os nós é redistribuída até ser determinado sua parcela que atua sobre um determinado nó, como será detalhado no caso genérico que se segue.



Baseado na figura acima será detalhado o método para distribuição de uma carga concentrada em um ponto qualquer da malha. Vamos inicialmente detalhar o processo para encontrar a carga atuante no nó 1 devido a carga q , em seguida vamos generalizar para os demais nós da malha.

O primeiro passo neste processo é determinar a carga atuante em P1 devido a q , seu valor é encontrado de forma similar ao que é feito para encontrar a reação de apoio de uma viga bi-apoia. Com isso a parcela de q que atua em P1 é: $\frac{q \times D1}{D1 + D2}$

De posse deste valor vamos redistribuir a carga encontrada em P1 da mesma forma e encontrar a reação no NÓ1 que é dada pela expressão $\frac{(\frac{q \times D1}{D1 + D2}) \times D4}{D4 + D3}$ de forma similar fazemos para os nós seguintes e encontramos os seguintes valores

$$\text{NÓ 2: } \frac{(\frac{q \times D1}{D1 + D2}) \times D3}{D4 + D3}$$

$$\text{NÓ 3: } \frac{(\frac{q \times D2}{D1 + D2}) \times D4}{D4 + D3}$$

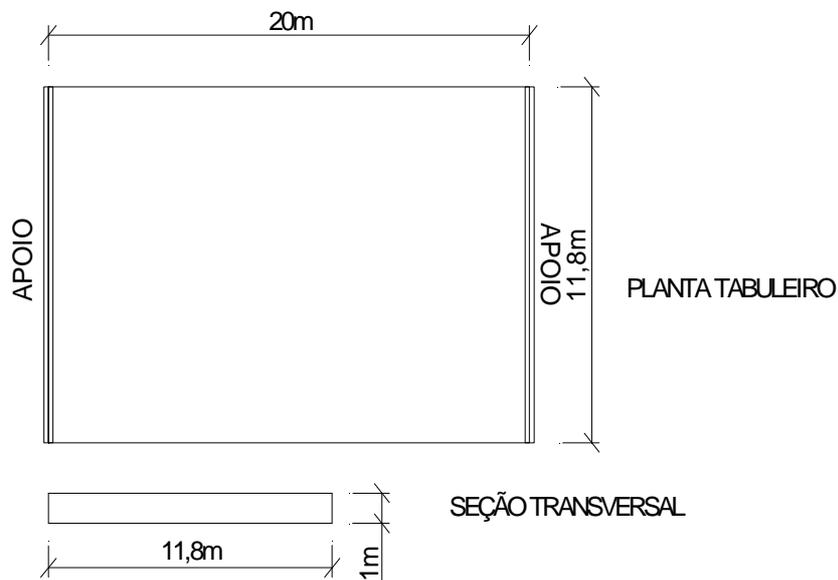
$$\text{NÓ 4: } \frac{(\frac{q \times D2}{D1 + D2}) \times D3}{D4 + D3}$$

É válido alertar que a soma das cargas aplicadas nos nós deve ter o mesmo valor da carga aplicada.

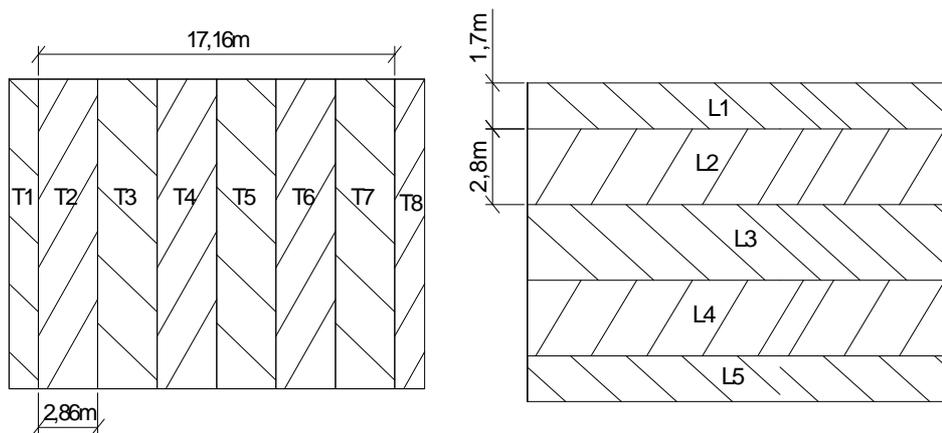
No ANEXO A está apresentada uma rotina computacional para este processo.

2.2.3 Exemplo

Agora baseado no que foi exposto será feita uma modelagem do um tabuleiro fictício apresentado a seguir.



1° PASSO Fazer a distribuição conveniente do tabuleiro em Faixas longitudinais e transversais:



2° PASSO Com a distribuição das faixas Devem ser calculadas as propriedades geométricas de cada elemento que representa o tabuleiro utilizando as equações conhecidas.

Tabela 2.1 Propriedades geométricas dos elementos

Elemento	$I(m^4)$	$I_p(m^4)$
T1 e T8	0,118	0,236
T2,T3,T4,T5,T6 e T7	0,237	0,474
L1 e L5	0,142	0,284
L2,L3 e L4	0,233	0,467

O posicionamento das barras na seção transversal pode ser ajustado de acordo com os critérios estudados. Neste caso as barras longitudinais serão locadas no eixo da faixa com exceção das barras da borda que serão posicionadas a 0,3h da borda livre visando atender as recomendações previamente expostas.

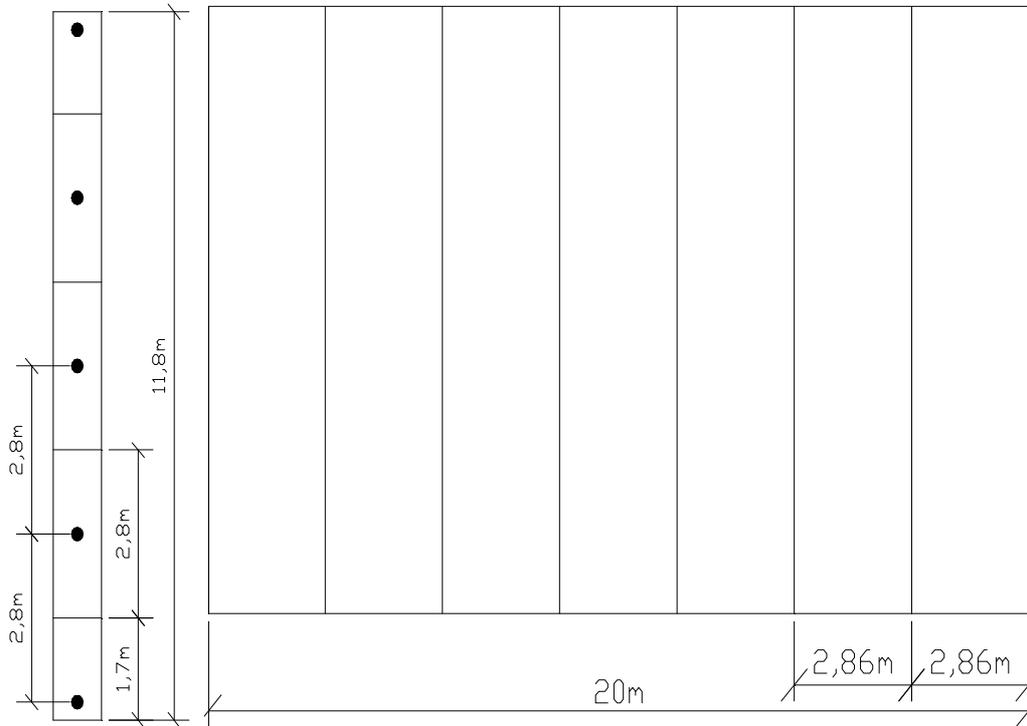


Figura 2.6 Elementos longitudinais da grelha na seção transversal a esquerda e elementos transversais em planta a direita.

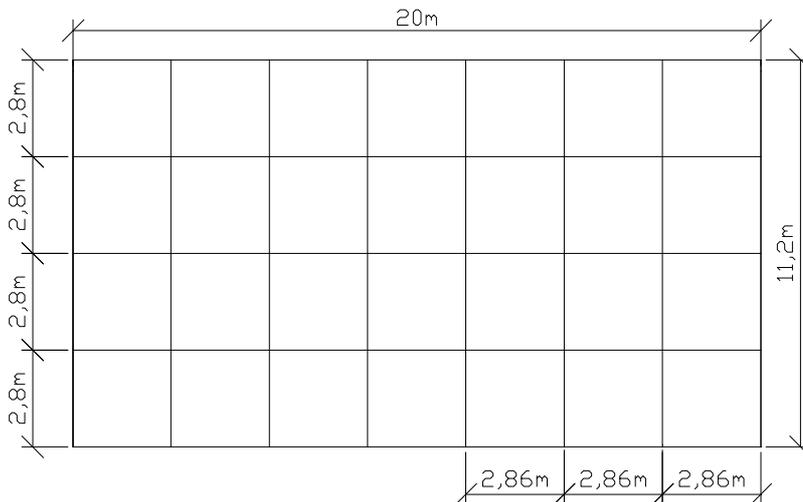


Figura 2.7 Grelha com todos os elementos.

3° PASSO Aplicar nos nós da malha as cargas referentes as solicitações previstas para a estrutura, para este exemplo vamos considerar apenas o peso próprio do tabuleiro, também podemos observar que é possível dividir os nós em dois grupos em relação a área de influência os pontos centrais da estrutura e os nós da periferia que tem metade da área de influencia dos centrais. A seguir estão apresentados os cálculos

Carga permanente devido ao peso próprio do tabuleiro:

$$g = h \times \gamma_c \therefore 2,5 \text{ t/m}^2$$

Área de Influência dos nós

$$\text{Nós centrais : } a_{i,\text{central}} = 2,86 \times 2,8 = 8,01 \text{ m}^2$$

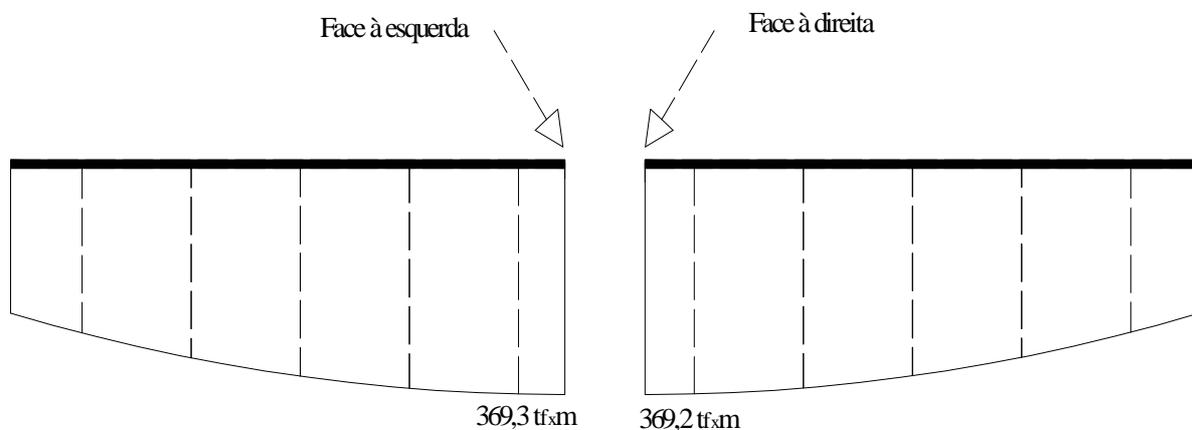
$$\text{Nós Periféricos : } a_{i,\text{periferia}} = a_{i,\text{central}} / 2 = 4 \text{ m}^2$$

Com esses dados temos a carga a que sera aplicada em cada nó devido ao peso próprio da estrutura.

$$\text{Nós centrais : } P_{,\text{central}} = 20 \text{ t}$$

$$\text{Nós Periféricos : } P_{,\text{periferia}} = 10 \text{ t}$$

A grelha foi modelada no *Software* SAP2000 a seguir está apresentado a saída de resultados dos momentos na faixa longitudinal central do modelo.



Neste exemplo devido as condições de contorno e a região analisada a torção é desprezível tornando o momento a esquerda e a direita do ponto de análise tão próximos que nos permite dispensar a média com isso o valor do momento longitudinal no centro do vão para nosso exemplo é:

$$M = 369,3 \times \frac{1}{2,8} = 131,9 \text{ tf} \times \text{m/m}$$

De forma análoga podem ser encontrados os demais esforços em qualquer região da laje.

Modelando-se a mesma estrutura em elementos finitos temos um valor de $129 \text{ tf} \times \text{m/m}$ no centro do vão como mostrado na figura 2.5

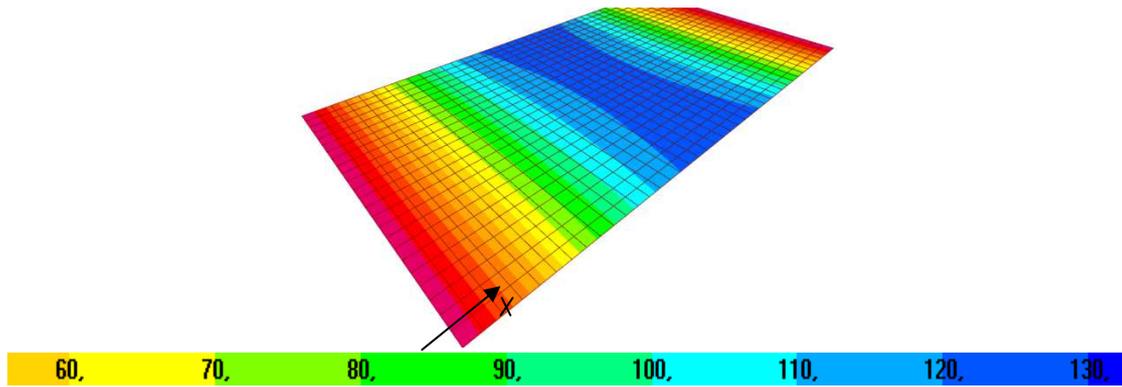


Figura 2.8 Distribuição de momentos no ,modelo de elementos finitos,na direção X

2.2.4 Discretização de lajes vazadas

Em certos casos como visto anteriormente é interessante o uso de uma estrutura com vazios incorporados, para tanto é necessário que seja feita uma análise adequada da estrutura. Consta na literatura que em tabuleiros onde a altura dos vazios não excedam $0,60h$ a análise estrutural pode ser feita considerando a laje maciça sem que haja perda de fidelidade dos resultados, esta afirmação será analisada em detalhes a seguir. Para os casos onde se deseja uma análise mais rigorosa são feitas correções na rigidez dos elemento de forma a considerar os elementos vazados.

Para a seção longitudinal a determinação da rigidez a flexão segue a definição clássica calculando a rigidez da seção descontando-se as porções vazias. Para os elementos transversais recomenda-se o método de Elliott onde a rigidez é uma função da altura da seção e do diâmetro da célula.

$$I = \frac{bh^3}{12} \left[1 - 0,95 \left(\frac{d_v}{h} \right)^4 \right]$$

Onde d_v é o diâmetro da célula e b é a largura da faixa

Este método tem o fator limitante de não considerar o espaçamento entre os vazios de forma que elementos com maior espaçamento teriam uma maior rigidez. Além disso a expressão considera que o centro das células e o centroide da seção estão a meia altura.

Para ajuste da inércia a torção o método que pode ser empregado é o de Ward e Cassell onde encontramos na tabela um fator de correção que deve ser multiplicado pela inércia a torção da seção maciça.

Tabela 2.2 Valores de correção da inércia a torção pelo método de Ward e Cassell

		d_v/s_v				
		0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
d_v/h	0.90	0.45	0.48	0.51	0.56	0.62
	0.85	0.55	0.58	0.61	0.64	0.69
	0.80	0.64	0.66	0.68	0.71	0.75
	0.75	0.70	0.72	0.74	0.77	0.80
	0.70	0.76	0.78	0.79	0.82	0.84
	0.65	0.81	0.82	0.84	0.86	0.88
	0.60	0.85	0.86	0.87	0.89	0.90

Onde s_v é o espaçamento entre centroides das células. Caso se faça necessário podemos fazer interpolação linear para encontrarmos os valores desejado. Este valor é valido para correção para os elementos longitudinais e transversais.

Como estudo dos tabuleiros vazados foi proposto a análise de um tabuleiro genérico,apresentado a segui, com uma largura de 9,28m um vão efetivo de 5,00m e a carga referente ao veiculo distribuído na faixa central elem do peso próprio.

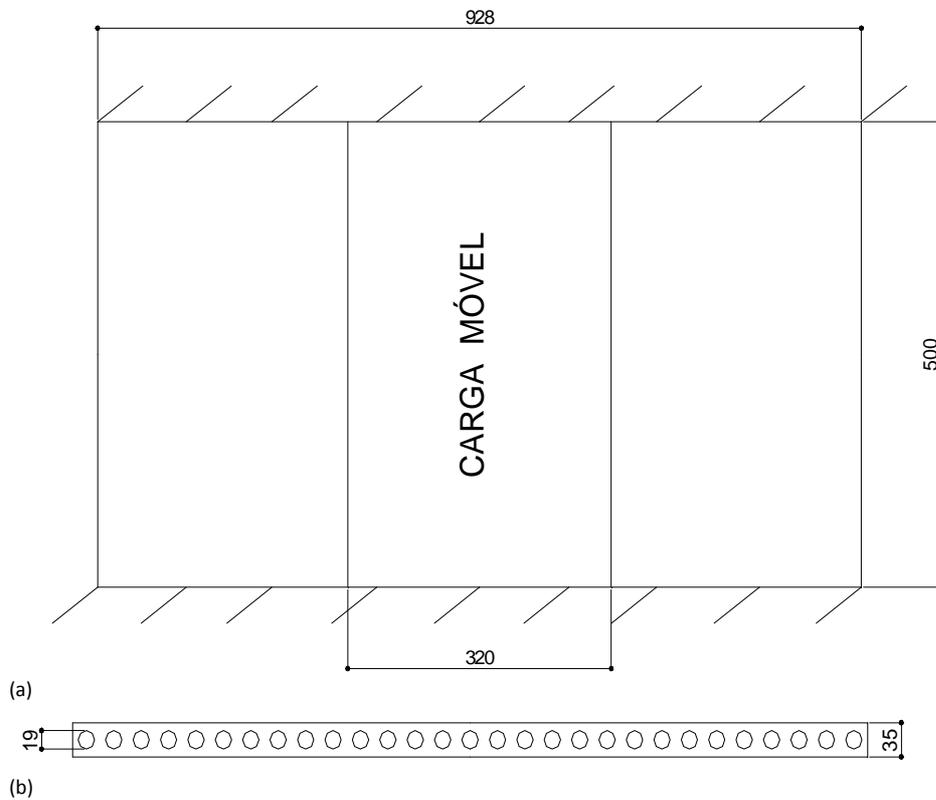


Figura 2.9 Modelo proposto para análise de tabuleiros vazados,estrutura em planta com locação da carga móvel (a), seção transversal(b),cotas em centímetro.

No caso do tabuleiro apresentado os vazios tem diâmetro inferior a $0,60h$ de forma que a análise pode ser feita considerando a laje maciça como já foi exposto anteriormente. Com isso foi feito um modelo do tabuleiro vazado em elementos finitos sólidos com extremo rigor de forma a ter um parâmetro de referencia com máxima fidelidade a realidade, um segundo modelo foi feito com elementos de casca considerando a laje maciça para podermos avaliar a afirmação que é feita a respeito do comportamento similar entre essas estruturas. Além desses modelos, entrando no estudo da analogia de grelha, foram feitos mais dois modelos um considerando com rigor todas as variações de rigidez devido os vazios nos elementos longitudinais e transversais através dos métodos apresentados anteriormente e um modelo visando analisar a viabilidade de simplificar o modelo através da consideração das células apenas nos elementos longitudinais, que tem seu cálculo bem mais simples, é considerando os elementos transversais maciços de forma a tornar o processo geral da modelagem menos penoso e susceptível a erros.

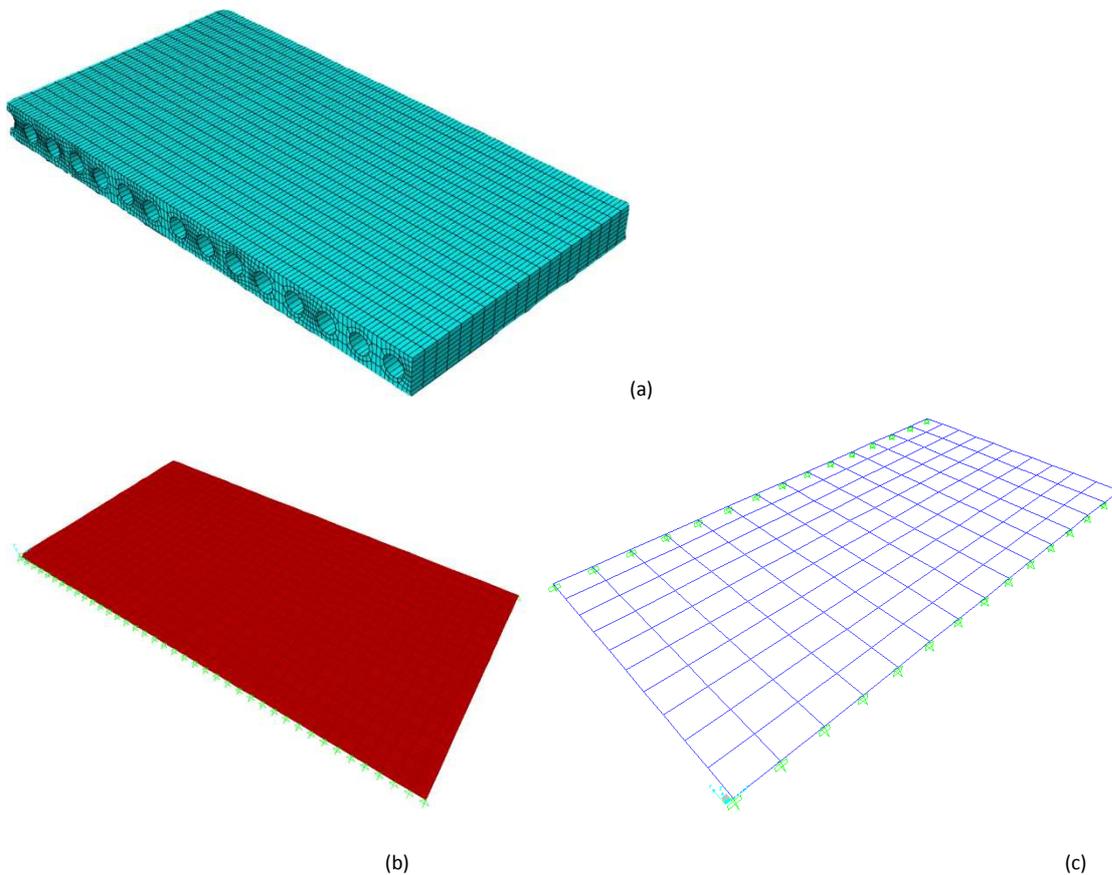


Figura 2.10 Modelos de tabuleiros vazados (a) Elementos finitos tridimensionais ,(b) elementos finitos planos (c) modelo de grelha.

Com a finalidade de fazer a avaliação comparativa entre os modelos foram verificadas as deformações verticais no centro do vão os resultados estão apresentados na tabela abaixo

Tabela 2.3 Deslocamentos máximos em cada modelo

Modelo	Δ (mm)	$\Delta\%$ em relação ao modelo (01)
(1)Vazada sólido 3D	2,08	0
(2)Maciça placa	2,06	-0,1
(3)Grelha Maciço	2,13	+2,4
(4)Grelha rigoroso	2,15	+3,3
(5)Grelha simplificado	2,13	+2,4

Diante desses resultados pode-se verificar que há a possibilidade de se fazer a análise de tabuleiros com vazios incorporados utilizando a simplificação em estudo. Visto que até para o caso mais distante da realidade temos um resultado dentro de uma margem satisfatória e com tendência a favorecer a segurança.

3 Estudo de caso

3.1 Estrutura analisada

No estudo de caso foi utilizado uma estrutura real para fazer a modelagem usando o método em estudo além de outros modelos mais avançados com intuito de validar e verificar a precisão dos resultados. A seguir estão apresentadas as plantas que caracterizam a estrutura.

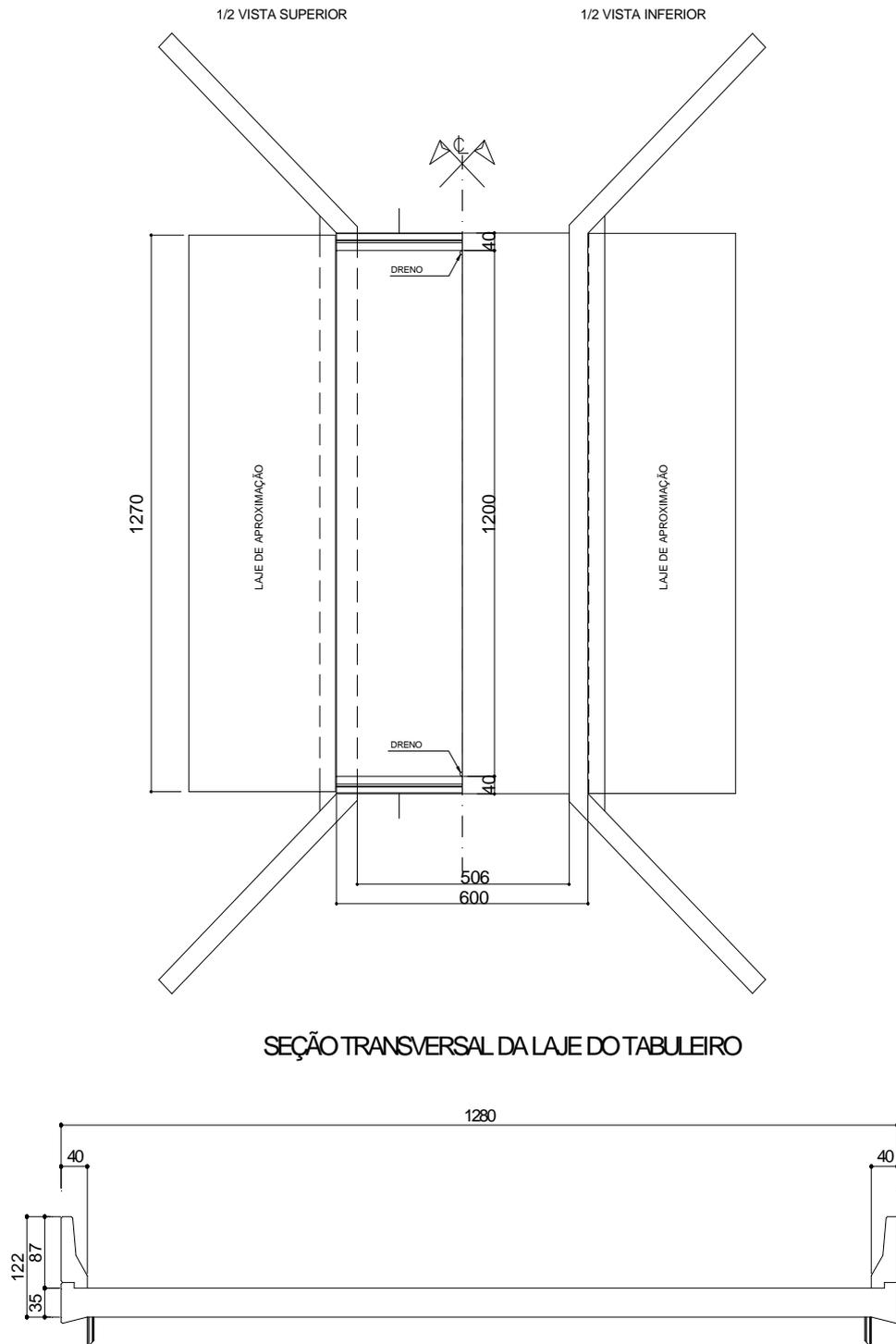


Figura 3.1 Planta e seção transversal do tabuleiro

3.2 Modelagem da estrutura

Na análise da estrutura foi criada uma seção transversal simplificada de forma que as propriedades dos elementos pudessem ser mais facilmente determinadas e sem que houvesse perda de fidelidade. Na simplificação foram desconsiderados os alargamentos existente nas bordas assim como não foram representados os guarda roda que encontram-se desconectados do tabuleiro de forma que não geram influencia na resistência da estrutura sendo apenas levado em consideração como carga nos bordos. Com isso tivemos o perfil apresentado a seguir com distribuição das faixas longitudinais com seus respectivos eixos.

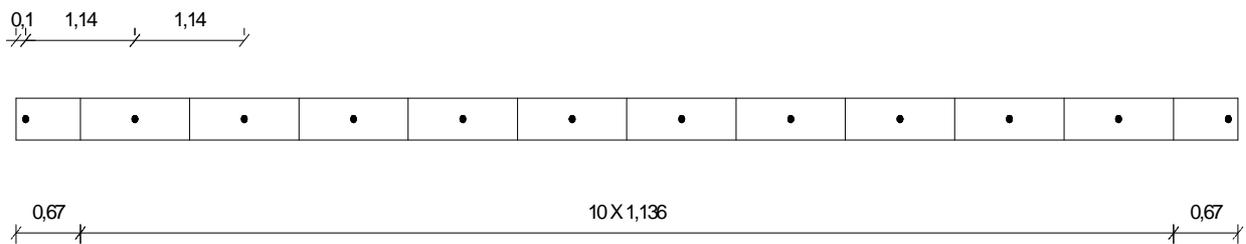


Figura 3.2 Seção transversal simplificada

Note que a distribuição das faixas foram feitas de forma a manter o mesmo espaçamento entre eixos assim como os eixos dos bordos livres estão afastados de $0,3h$ da borda.

Os elementos Transversais foram determinados distribuindo-se o vão, entre os eixos dos apoios, em onze faixas de forma que tivemos a distribuição apresentada a seguir.

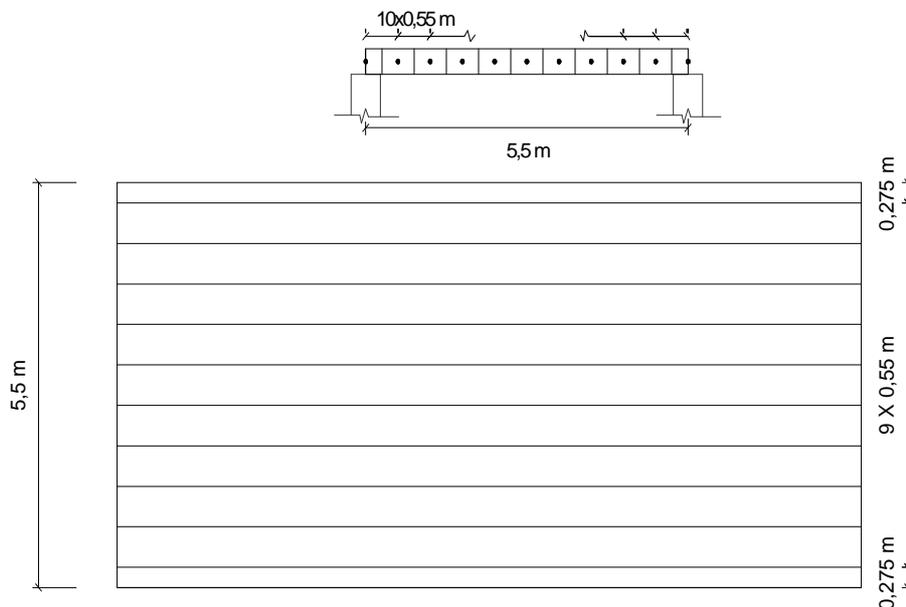


Figura 3.3 Faixas transversais e seção longitudinal com eixos das faixas longitudinais

Em seguida foi determinada a rigidez de cada elemento, lembramos que a rigidez deve ser determinada em relação ao baricentro da seção que em nosso caso é coincidente com os eixos da faixas. A tabela que se segue resume os valores das propriedades dos elementos.

Tabela 3.1 Propriedades dos elementos da grelha

Elemento	$I(10^{-3}m^4)$	$I_p(10^{-3}m^4)$
Longitudinal Borda	2,48	4,77
Longitudinal Centro	4,23	8,11
Transversal Apoio	1,02	1,96
Transversal Centro	2,05	3,93

3.2.1 Cargas atuantes

No modelo foram impostas as carga referentes a defesa,o peso próprio da estrutura e a carga móvel caracterizada pelo trem-tipo, considerou-se que o veiculo trafega diretamente sobre a laje do tabuleiro de forma que não foi feita nenhuma consideração a respeito da pavimentação.

A carga referente a defesa foi determinada pelo calculo do peso da estrutura de proteção e posteriormente a carga foi distribuída entre nos nós da borda. A aplicação da carga diretamente sobre o elemento de barra longitudinal não é correta pois gera efeitos localizados de deformação e esforços que destoam da realidade.

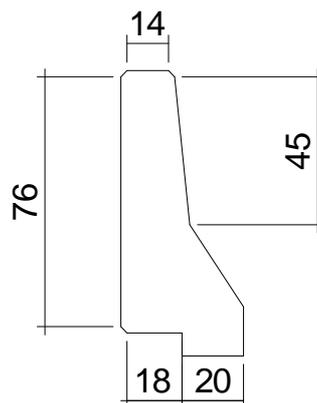


Figura 3.4 Detalhe típico do guarda roda,cotas em centímetros.

A seguir estão apresentados os cálculos referentes a carga a ser aplicada

Área da seção transversal: $A_d=0,218\text{m}^2$

Carga Total da defesa: $g_d= A_d \times \gamma_c = 0,218\text{m}^2 \times 2,5\text{t/m}^3 = 0,545 \text{ t/m}$

Carga por nó: $P= (g_d \times \ell)/n^\circ \text{ nós} = 0,545 \times 5,5/11=0,27$

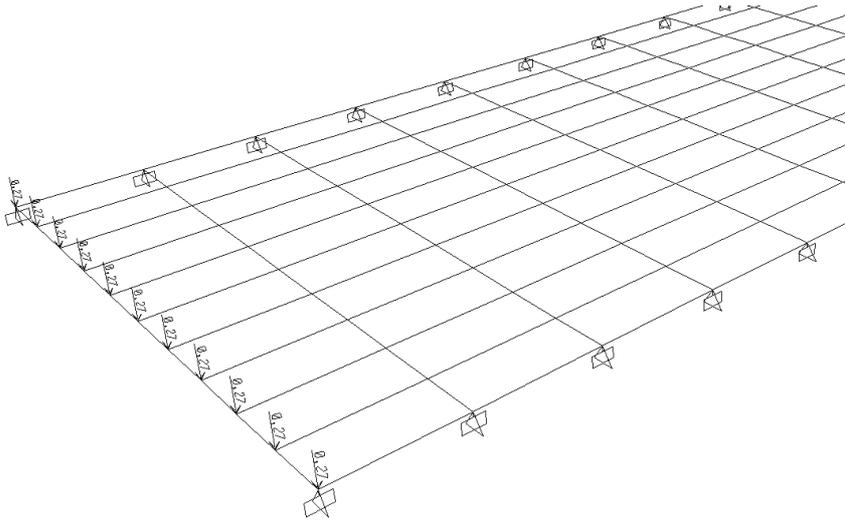


Figura 3.5 Detalhe da aplicação da carga referente ao guarda roda

A carga do peso próprio da estrutura foi considerado como uma carga uniformemente distribuída sobre o tabuleiro com valor referente ao peso da laje em uma unidade de área. Com isso tivemos a distribuição de carga apresentada a seguir.

$$g=h \times \gamma_c = 0,35\text{m} \times 2,5\text{tf/m}^3 = 0,875 \text{ tf/m}^2$$

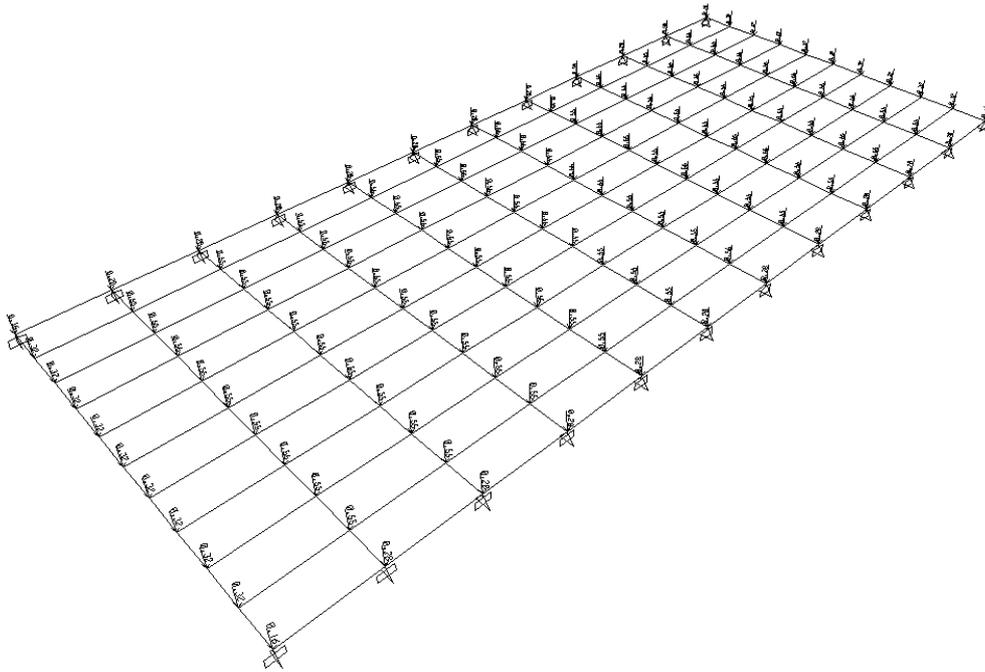


Figura 3.6 Vista geral da distribuição da carga referente ao peso próprio.

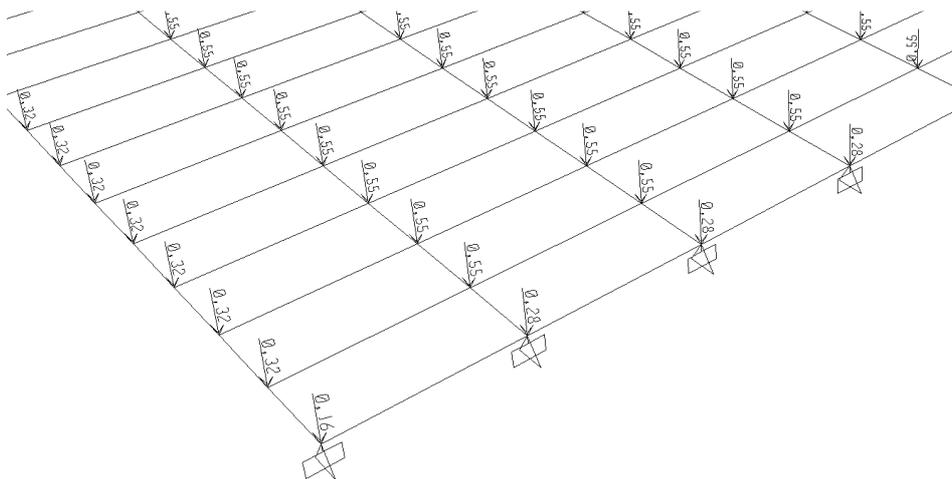


Figura 3.7 detalhe da distribuição da carga referente ao peso próprio.

Por fim foi aplicada na estrutura a carga referente ao carregamento móvel sobre o tabuleiro. A ponte foi projetada para um trem-tipo classe 45 identificado abaixo.

Classe da ponte	Veículo		Carga uniformemente distribuída	
	Tipo	Peso Total(tf)	Carga na pista(tf/m ²)	Carga no passeio(tf/m ²)
45	45	45	0,500	0,300

Quantidade de eixos	3
---------------------	---

Peso total do veículo(tf)	45
Peso de cada roda dianteira(tf)	7,5
Peso de cada roda traseira(tf)	7,5
Peso de cada roda intermediária(tf)	7,5
Largura de contato b_1 de cada roda dianteira(m)	0,50
Largura de contato b_2 de cada roda intermediária(m)	0,50
Largura de contato b_3 de cada roda traseira(m)	0,50
Comprimento de cada roda(m)	0,20
Área de contato de cada roda(m ²)	0,2 x b
Distância entre eixos(m)	1,50
Distância entre os centros de roda de cada eixo(m)	2,00

TIPOS 45 E 30

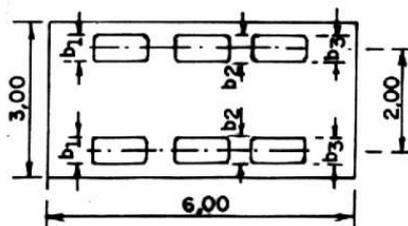
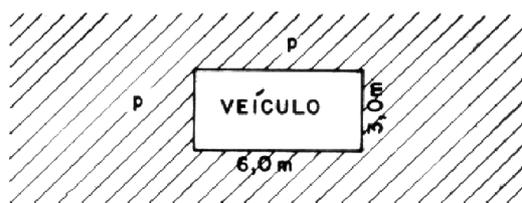
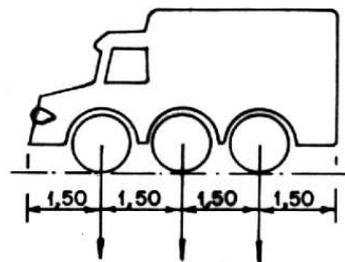


Figura 3.8 Representação gráfica do trem-tipo

A carga referente ao carro tipo foi considerada como uma carga pontual localizada no centro de cada roda. Com o intuito de se determinar a situação na qual o esforço solicitante no tabuleiro é máximo o carro foi posicionado na borda da estrutura e no centro. No posicionamento do carro na lateral do tabuleiro a carga concentrada da roda foi posicionada considerando-se a roda encostada no guarda roda conforme esquematizado abaixo.

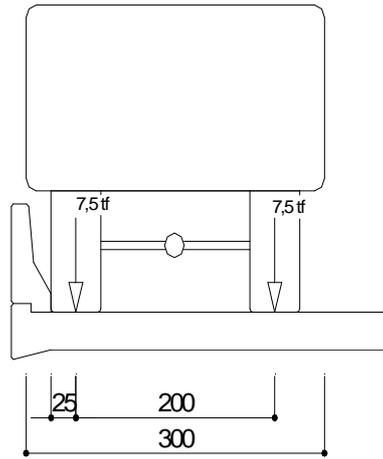


Figura 3.9 Carro posicionado na borda do tabuleiro, cotas em centímetros.

As cargas foram distribuídas conforme metodologia já apresentada para cargas concentradas em um ponto qualquer da malha. Além das cargas das rodas também haviam as cargas distribuídas que devem ser aplicadas por todo o tabuleiro excetuando-se a região delimitada pelo carro. Em nosso caso não existe passeio devido a isso a carga distribuída a ser considerada é de $0,500 \text{ tf/m}^2$.

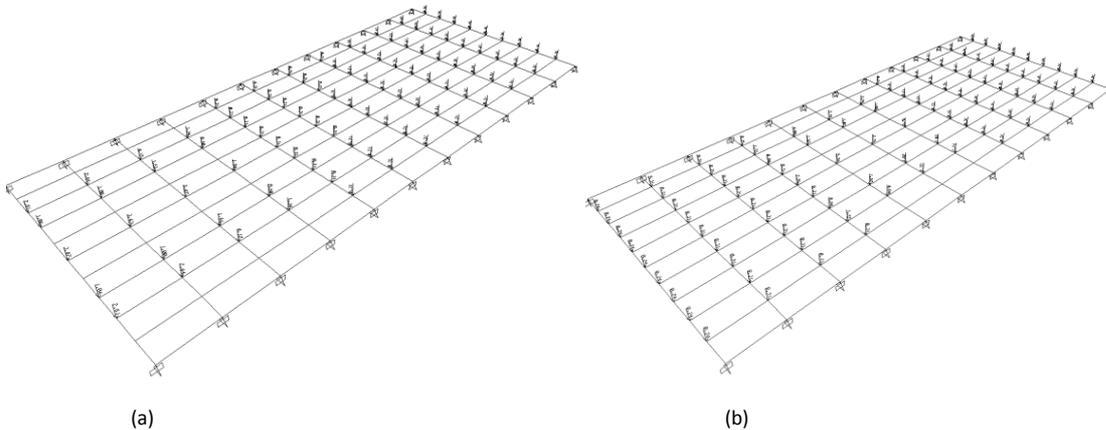


Figura 3.10 Distribuição das cargas do trem-tipo (a) carro localizado na borda (b) carro no centro do tabuleiro

Note que cada carga concentrada do roda dá origem a quatro cargas aplicadas no nós.

3.3 Estrutura de referência

Para fins de comparação e avaliação foi elaborado um modelo em elementos finitos levando em consideração todos os aspectos relevantes para se obter um resultado mais fiel

a realidade quanto possível. Este modelo levou em consideração todas as solicitações atuantes que foram expostas anteriormente .

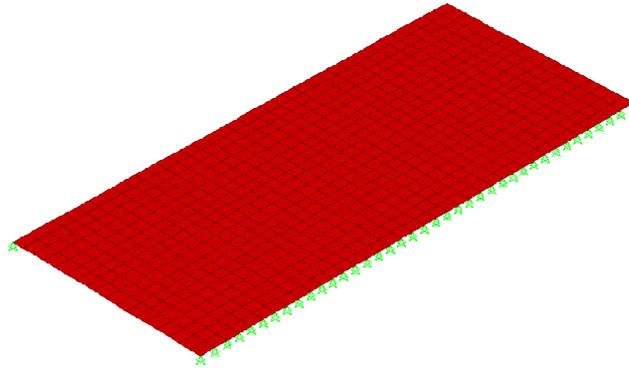


Figura 3.11 Modelo em elementos finitos

3.3.1 Cargas atuantes

As cargas impostas na estrutura foram as mesmas aplicadas no modelo de grelha. A carga referente ao peso próprio, diferente da analogia de grelha, não foi aplicada na estrutura. Nesta modelagem o software calcula esses dados automaticamente, quando dado o peso específico do concreto, pois a geometria da seção é a mesma da real. Havia a possibilidade de aplicar a carga de forma uniformemente distribuída mas em nosso caso de estudo não se fez necessário. A carga referente ao guarda roda foi aplicada através de um carregamento superficial aplicado nas faixas laterais com a mesma largura dessa estrutura.

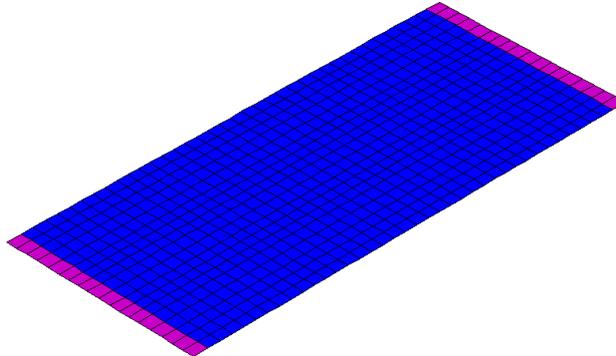


Figura 3.12 Destaque das áreas de aplicação da carga da defesa

A carga referente ao carregamento móvel também tiveram uma atenção especial neste caso. Além de serem feitas as considerações quanto ao posicionamento do veículo a aplicação da carga também foi feita da forma mais rigorosa possível.

Sabendo-se que no modelo considerado está representado o eixo médio da estrutura a carga referente a cada roda foi espreada da face da laje até a superfície média da estrutura de forma a ter a melhor representação da carga atuante na realidade, conforme está esquematizado a seguir.

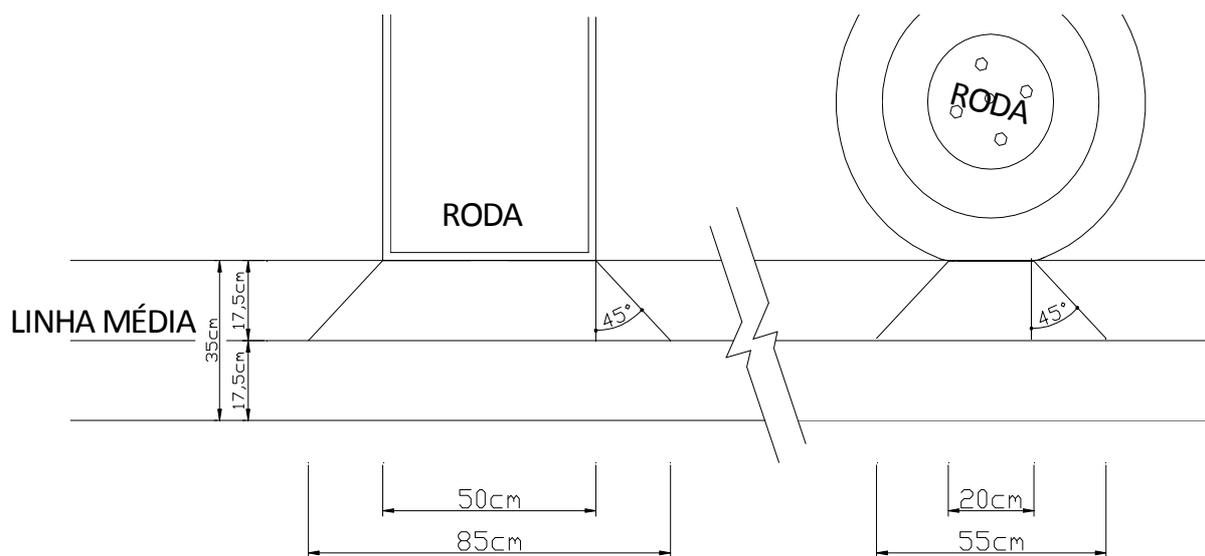


Figura 3.13 Espalhamento da carga da roda

Com isso tivemos a mancha da roda originalmente com 50x20cm espalhada até a superfície média resultando em uma área equivalente de 85x55cm. Na configuração da malha do modelo esta consideração foi levada em conta de forma a existir uma região, criada durante a divisão dos elementos, com esta dimensão no ponto de aplicação da carga. A peso referente a roda foi distribuído nesta área gerando uma carga de 16,04tf/m². A carga distribuída de multidão também foi considerada de forma análoga ao modelo de grelha.

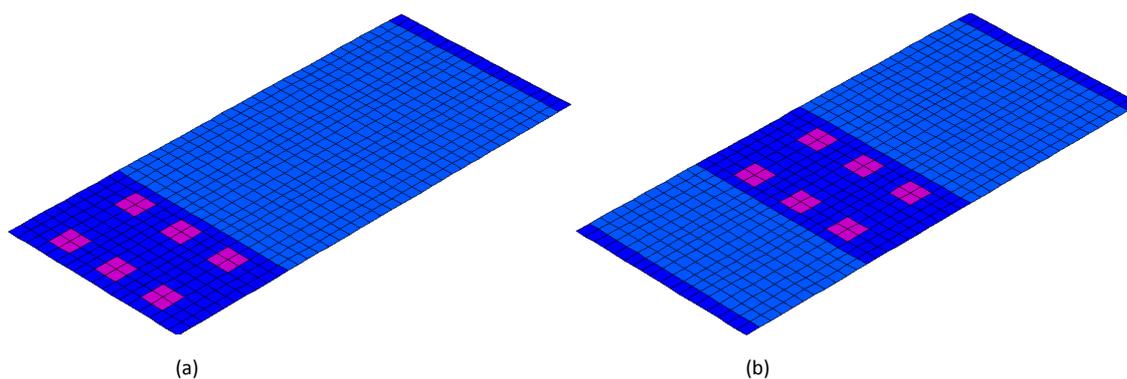


Figura 3.14 Distribuição das cargas do trem-tipo no modelo de elementos finitos (a) carro localizado na borda (b) carro no centro do tabuleiro

Coefficiente de impacto

O coeficiente de impacto possui a função de majorar a carga móvel que é aplicada estaticamente de forma a provocar um efeito similar a situação real, onde o deslocamento dos carros geram uma carga dinâmica na estrutura. Segundo a NBR7187

Para pontes rodoviárias o coeficiente de impacto é dado por:

$$\varphi = 1,4 - 0,007 \ell \geq 1,0$$

Assim para nossa estrutura temos:

$$\varphi = 1,4 - 0,007 \times 5,5 = 1,36;$$

3.4 Resultados obtidos

Para análise e dimensionamento da estrutura foram levados em consideração inicialmente os valores dos momento fletores de maior intensidade, determinados pela análise da estrutura sob ação da carga móvel posicionada na situação mais desfavorável além das demais cargas descritas anteriormente. Também foi analisada a deformação no ponto mais desfavorável comparadas com os limites admissíveis. Na tabela que se segue estão apresentados os valores dessas grandezas para ambos os modelos. Os valores já estão majorados através do coeficiente de impacto φ aplicado ao carregamento referente ao trem-tipo e do coeficiente de segurança γ_q aplicado sobre todos os carregamentos.

Tabela 3.2 Valores das grandezas consideradas para o dimensionamento do tabuleiro

Elementos Finitos				Analogia de grelha			
M_x (tf m /m)	M_y (tf m /m)	V_z (tf)	W (m)	M_x (tf m /m)	M_y (tf m /m)	V_z (tf)	W (m)
23,83	5,33	14,57	0,0085	24,56	2,64	15,15	0,0081

Onde:

M_x – Momento fletor na direção paralela ao eixo da ponte

M_y – Momento fletor perpendicular ao eixo da ponte

V_z – Esforço cortante máximo

W – Deflexão máxima do tabuleiro

A seguir temos a distribuição de momentos na direção paralela ao tráfego nos dois modelos para os posicionamento do trem-tipo considerados.

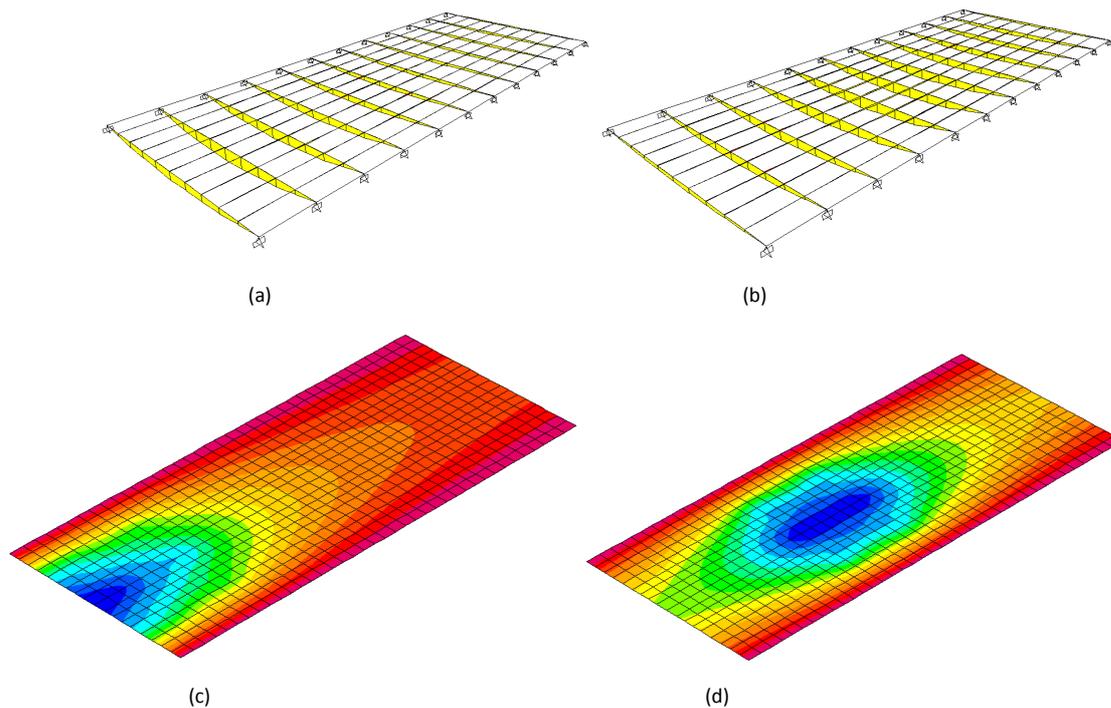
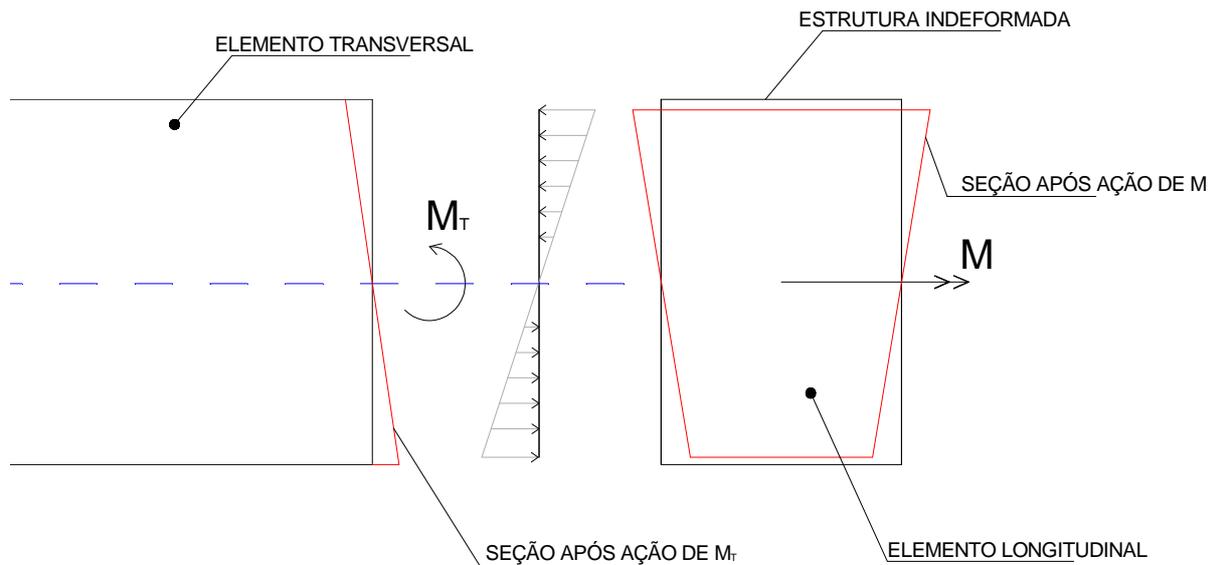


Figura 3.15 Distribuição de momentos tracionando as fibras paralelas ao eixo da ponte. (a) Modelo de grela com carro posicionado na borda,(b)Modelo de grela com carro no centro do tabuleiro (c) Modelo em elementos finitos com carro posicionado na borda,(d)Modelo em elementos finitos com carro no centro do tabuleiro.

É importante destacar a discrepância entre os momentos transversais ao eixo das pontes que no nosso caso se afastam de mais de 100% esse fato se deve ao modelo de grela considerar os eixos das peças com isso os momento transmitido aos elementos transversais pelo coeficiente de *Poisson* não existem. Resultando apenas uma pequena parcela devido a cargas locais que destoam totalmente da realidade. Esse fato é fortemente observado em estruturas bi-apoiadas ou contínuas com bordas livres modeladas com analogia de grela. O valor correto para esse caso é o fornecido pelo modelo em elementos finitos que tem valor próximo a 20% do momento principal, valor devido exatamente ao coeficiente de *Poisson* que para o concreto tem valor usual de 0,20. A seguir temos uma esquema que ilustra esse fato observado na modelagem da estrutura.



Considerando o elemento longitudinal sujeito ao momento fletor M , devido as forças externas, sua seção transversal assume a configuração destacada em vermelho devido ao coeficiente de Poisson. Onde a região sujeita a tensão compressão sofre um alargamento e as áreas tracionadas geram uma redução na largura da seção. Essa deformação gera uma distribuição de tensões no elemento transversal como está representado na figura, essas tensões geram o mesmo efeito do momento equivalente M_T . Como podemos observar no eixo da peça não existe influência do coeficiente de *Poisson* pois nesta região as tensões são nulas. Assim sendo se considerarmos apenas o eixo do elemento longitudinal não haverá nenhuma tensão sobre o elemento transversal. Fato que explica que nos modelos de grelha temos, em alguns casos, um valor tão inferior a realidade para as barras transversais, devendo levar isso como alerta, buscando observar que o valor do momento transversal deve ter um valor mínimo próximo a 0,20 do momento principal, como sugerido na NBR .6118 .

3.5 Dimensionamento e detalhamento

De posse dos de todos os resultados obtidos podemos realizar o detalhamento da estrutura inicialmente vamos determinar a área de aço necessária devido ao momento fletor nas duas direções para isso foi usado a rotina computacional apresentada no ANEXOB. A seguir estão relacionados os materiais usados na estrutura.

Aço CA 50 $f_y = 500 \text{ Mpa}$

Concreto C35 $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

Com isso temos as áreas de aço:

Paralelo ao eixo da ponte

$A_s = 28 \text{ cm}^2/\text{m}$; Adotar $\phi 20 \text{ c}/10$

Perpendicular ao eixo da ponte, neste caso usamos o valor encontrado no modelo em elementos finitos por razões já compreendidas anteriormente.

$A_s = 5,4 \text{ cm}^2/\text{m}$; Adotar $\phi 16 \text{ c}/30$

3.5.1 Verificação da fadiga das armadura

Esta verificação tem como objetivo verificar a flutuação de tensão nas armaduras e avaliar sua suscetibilidade a romper sob uma tensão inferior ao previsto devido a aplicação de uma carga cíclica proveniente do trem-tipo. Caso se faça necessário a área de aço deve sofrer um incremento de forma a reduzir os esforços atuante nas barras.

As tensões atuantes foram determinadas através da homogeneização da seção e em seguida com ajuda da fórmula de *Morh* foram determinados os esforços atuantes nas armaduras quando estas encontram-se sob ação das cargas permanentes e sob ação das cargas permanentes e carga móvel atuando simultaneamente.

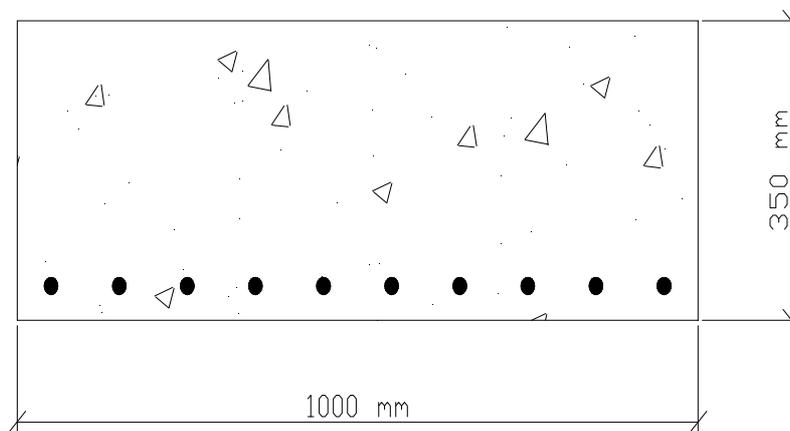


Figura 3.16 Seção de 1 metro de laje com armadura longitudinal.

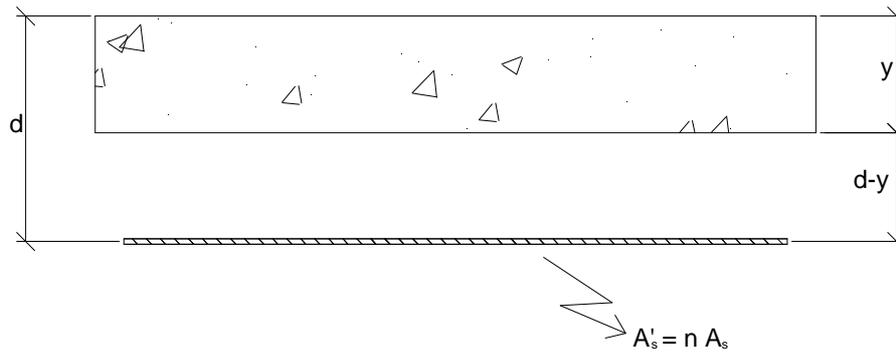


Figura 3.17 Seção de 1 metro de laje homogeneizada.

Vamos fazer a transformação da seção através da substituição da área de aço por uma seção de concreto equivalente através da multiplicação da área de aço original A_s pelo fator de transformação n dado abaixo:

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

No nosso caso temos:

$$n = \frac{200.000}{23.800} = 8,4$$

Assim:

$$A'_s = 8,4 \times A_s = 8,4 \times 3141,6 = 26389,5 \text{ mm}^2$$

Com isso podemos determinar a profundidade da linha neutra através do equilíbrio dos momentos estáticos da seção de concreto e da porção de aço homogeneizado.

$$1000 \times y \times \frac{y}{2} = (d - y)A'_s$$

O desenvolvimento desta equação leva a uma equação do segundo grau da qual uma das raízes fornece o valor de y . Para nossa seção y é igual a 107 mm

Por fim devemos calcular o momento de inércia da seção em torno do eixo de flexão

$$I = \frac{1000 \times 107^3}{12} + 1000 \times 107 \times \left(\frac{107}{2}\right)^2 + 26389 \times 218^2$$

$$I = 1662458503 \text{ mm}^4$$

Com isso podemos calcular os limites de tensão que a armadura está submetida.

Caso 1 – Laje submetida apenas as cargas permanentes.

$$\sigma_1 = \frac{11,1 \text{ tfm} \times 0,218\text{m}}{1662458503 \times 10^{-12}\text{m}^4} = 1455 \frac{\text{tf}}{\text{m}^2} = 14,5\text{MPa}$$

Caso 2 – Laje submetida apenas as cargas permanentes e carga móvel.

$$\sigma_2 = \frac{24,6 \text{ tfm} \times 0,218\text{m}}{1662458503 \times 10^{-12}\text{m}^4} = 3224 \text{ tf/m}^2 = 32,2\text{MPa}$$

Segundo a NBR 6118 para não haver necessidade de correção da área de aço longitudinal a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\gamma_f \Delta\sigma_s \leq \Delta f_{sd,fad}$$

Onde

$\Delta\sigma_s$ - É a amplitude máxima da flutuação de tensões

$\Delta f_{sd,fad}$ - Amplitude máxima permitida

γ_f – Devemos adota 1

Com isso temos para nossa estrutura

$$\Delta\sigma_s = 17,7 < \Delta f_{sd,fad} = 180 \text{ (Tabela 23.2 NBR 6118)}$$

A condição é satisfeita, caso não fosse atendido a relação a área de aço deveria ser aumentada multiplicando-se a área inicial pelo fator de fadiga n_s dado pela relação entre $\Delta\sigma_s$ e $\Delta f_{sd,fad}$.

$$n_s = \frac{\Delta\sigma_s}{\Delta f_{sd,fad}}$$

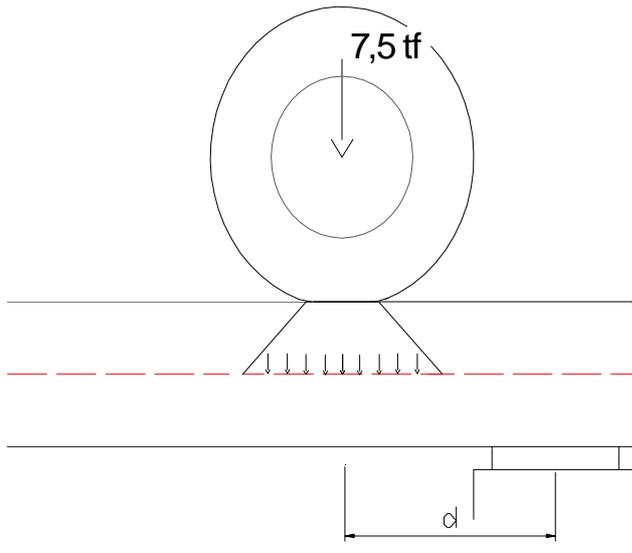
A nova área de aço seria dada por:

$$A_{s,cós} = n_s A_s$$

3.5.2 Ancoragem das armaduras no apoio

3.5.2.1 Esforço cortante máximo.

A máxima sollicitação devido ao esforço cortante foi Considerada quando a roda do carro encontra-se sobre o apoio os valor dos esforços foram determinados através do espraiamento da mancha da roda até o plano médio da laje e em segui levado a carga ao eixo do apoio sob um ângulo de distribuição de 45°. Essa metodologia está apresenta nas figuras a seguir.



Inicialmente a carga da roda foi distribuída de forma a encontrar sua mancha equivalente no plano médio da laje, de forma semelhante ao processo feito para aplicar a carga no modelo de casca.

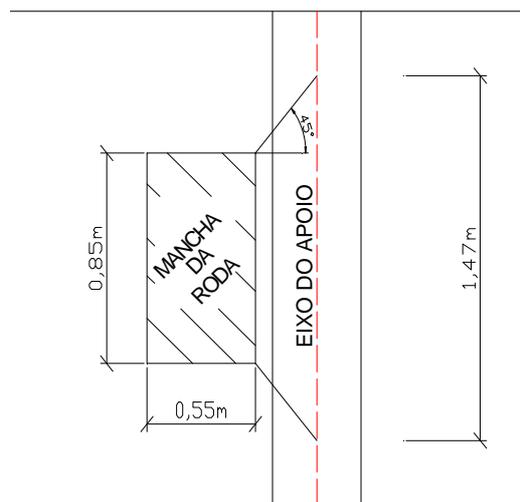


Figura 3.18 Espreadimento horizontal da carga da roda

Em seguida a carga da roda foi distribuída a partir da mancha equivalente no cetro da laje até o eixo do apoio gerando uma faixa de distribuição de 1,47m onde aplicaremos a carga da roda.

Alem da carga referente ao carro sobre o apoio foram somadas as cargas dos demais carregamentos.

$$V_{s,car} = \frac{P_{s,car}}{1,47m} = \frac{7,5\text{ tf}}{1,47m} = 5,1\text{ tf/m}$$

$$V_{s,defensa} = 2,5\text{ tf/m}$$

$$V_{s,multidão} = 0,65\text{ tf/m}$$

O esforço cortante de dimensionamento considerado foi obtido com a equação seguinte

$$V_d = \gamma_q V_{s,defensa} + \gamma_q V_{s,multidão} + \varphi \gamma_q V_{s,car}$$

$$V_d = 1,4 \times 2,5 + 1,4 \times 0,65 + 1,36 \times 1,4 \times 5,1 = 14,1\text{ tf/m}$$

3.5.3 Verificação de ancoragem nos apoios.

Segundo a NBR 6118 para termos uma ancoragem satisfatória de armadura longitudinal nos apoios em lajes sem armaduras transversais devemos obedecer a seguinte relação:

$$V_{sd} \leq V_{Rd1}$$

A resistência de projeto é dada por:

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd}k(1,2 + 40\rho_1) + 0,15\sigma_{cd}]b_wd$$

Onde:

$$\tau_{Rd} = 0,25 f_{ctd}$$

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf}/\gamma_q$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_wd}, \text{ não maior que } 0,02$$

$$\sigma_{cd} = \frac{N_{sd}}{A_c}$$

A_{s1} é a armadura longitudinal que se estende não menos que $d + \ell_{b,Nec}$ da seção considerada.

N_{sd} é a força longitudinal devido a protensão ou carregamentos

Com isso podemos determinar a resistência de projeto da nossa estrutura, vamos inicialmente determinas os parâmetros isoladamente.

$$\tau_{Rd} = 0,4 \text{ MPa}$$

$$\rho_1 = \frac{28}{100 \times 35} = 0,009$$

Vamos usar a área de aço que passa pela seção critica, para elementos estruturais sob ação de cargas verticais aplicadas na face superior da peça e reação na face oposta a seção critica considerada está localizada a uma distância d da face do apoio conforme figura 3.16

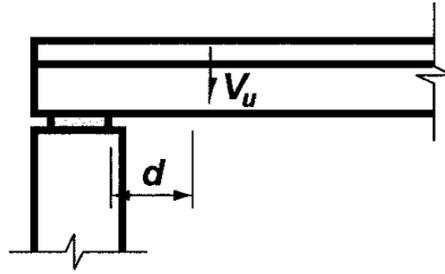


Figura 3.19 seção crítica típica para tabuleiros em laje

$$\sigma_{cd} = \frac{N_{sd}}{A_c} \text{ Como não ha esforço longitudinal } \sigma_{cd} = 0$$

k é um fator que tem os seguintes valores:

- para elementos onde 50% da armadura inferior não chega até o apoio $k=1$
- para os demais casos $k = |1,6 - d|$, não menor que $|1|$, com d em metros

No nosso caso $k = |1,6 - 0,32| = 1,28$ pois consideraremos a principio 100% das barras sendo ancoradas no apoio com gancho alem de $d + \ell_{b,Nec} = 0,32 + 0,35 = 67\text{cm}$.

Podemos finalmente chegar ao valor de V_{Rd1}

$$V_{Rd1} = [0,4\text{MPa} \times 1,28(1,2 + 40 \times 0,009) + 0,15 \times 0]1\text{m} \times 0,32\text{m} = 25\text{tf/m}$$

Assim, como

$$V_{sd} \leq V_{Rd1}$$

Não haverá problema com o detalhamento previsto da estrutura.

3.5.4 Limite de fissuração

Adicionalmente foi feita a verificação relativa ao controle da fissuração através da abertura estimada das fissuras, conforme procedimento recomendado na NBR 6118

$$w = \frac{\phi_i}{12,5\eta_i} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ctm}}$$

$$w = \frac{\phi_i}{12,5\eta_i} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right)$$

onde:

σ_{si} , ϕ_i , E_{si} , ρ_{ri} são definidos para cada área de envolvimento em exame;

A_{cri} é a área da região de envolvimento protegida pela barra ϕ_i ;

E_{si} é o módulo de elasticidade do aço da barra considerada, de diâmetro ϕ_i ;

ϕ_i é o diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada;

ρ_{ri} é a taxa de armadura passiva ou ativa aderente (que não esteja dentro de bainha) em relação à área da região de envolvimento (A_{cri});

σ_{si} é a tensão de tração no centro de gravidade da armadura considerada, calculada no estágio II.

Onde o valor a ser considerado é o maior entre os calculado.

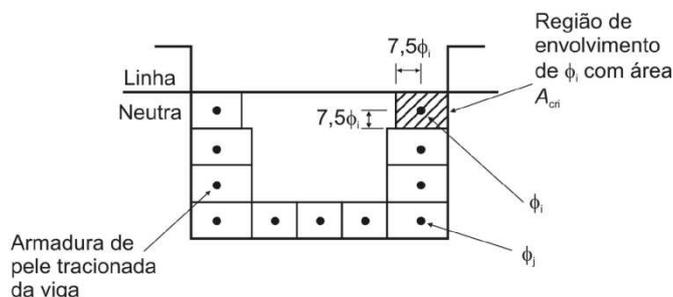


Figura 3.20 Concreto de envolvimento das armaduras

$$w_1 = \frac{20}{12,5 \times 2,25} \times \frac{32,2}{200.000} \times \frac{3 \times 32,2}{2,56} = 0,004_{mm}$$

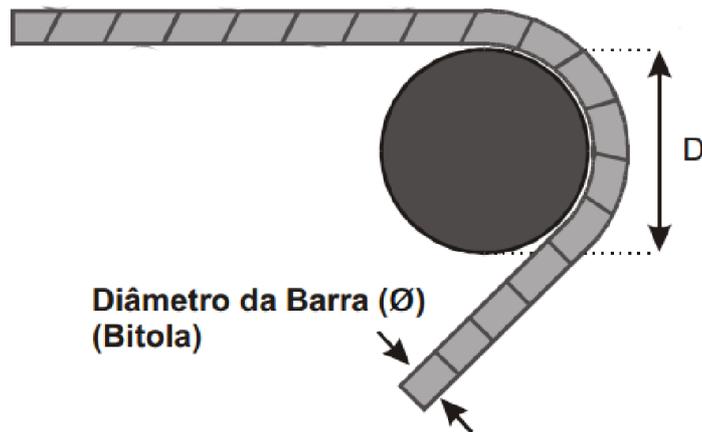
$$w_2 = \frac{20}{12,5 \times 2,25} \times \frac{32,2}{200.000} \times \left(\frac{4}{0,014} + 45 \right) = 0,03_{mm}$$

Este valor satisfaz todos os limites estabelecidos pela norma NBR 6118, de forma que não se faz necessário nenhuma alteração na armação da estrutura.

3.5.5 Detalhamento final da estrutura

Por fim após feitas essas verificações e dimensionamento podemos partir para o detalhamento final da estrutura. A seguir estão colocados mais alguns dados relevantes ao detalhamento final da estrutura

Raio de dobramento das barras



O diâmetro de dobramento das barras foi determinado conforme quadro abaixo (Item 9.4.2.3 NBR6118)

Diâmetro da barra	CA – 25	CA – 50	CA – 60
$\phi < 20_{\text{mm}}$	4 ϕ	5 ϕ	6 ϕ
$\phi \geq 20_{\text{mm}}$	5 ϕ	8 ϕ	-

Com isso temos

$$D_{\phi 20} = 160_{\text{mm}}$$

$$D_{\phi 16} = 80_{\text{mm}}$$

® Comprimento de emenda por transpasse

Segundo o item 9.5.2.2 NBR6118 para barras isoladas devemos ter o comprimento de transpasse.

$$l_{0t} = \alpha_{0t} l_{b,nec} \geq l_{0t,min}$$

Onde

$l_{0t,min}$ l_{0t} é o maior valor entre $0,6l$, 15ϕ e 200_{mm}

Barras emendadas na mesma seção %	≤ 20	25	33	50	> 50
Valores de α_{0t}	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0

Para nossa estrutura devemos fazer o transpasse nas barras de 16_{mm} , vamos considerar que metade das barras serão emendadas na seção, para isso faremos um detalhe de forma que os emendas sejam feitas alternadamente em lados opostos do tabuleiro.

$$l_{0t} = 1,8 \times 700_{\text{mm}} = 1260_{\text{mm}}$$

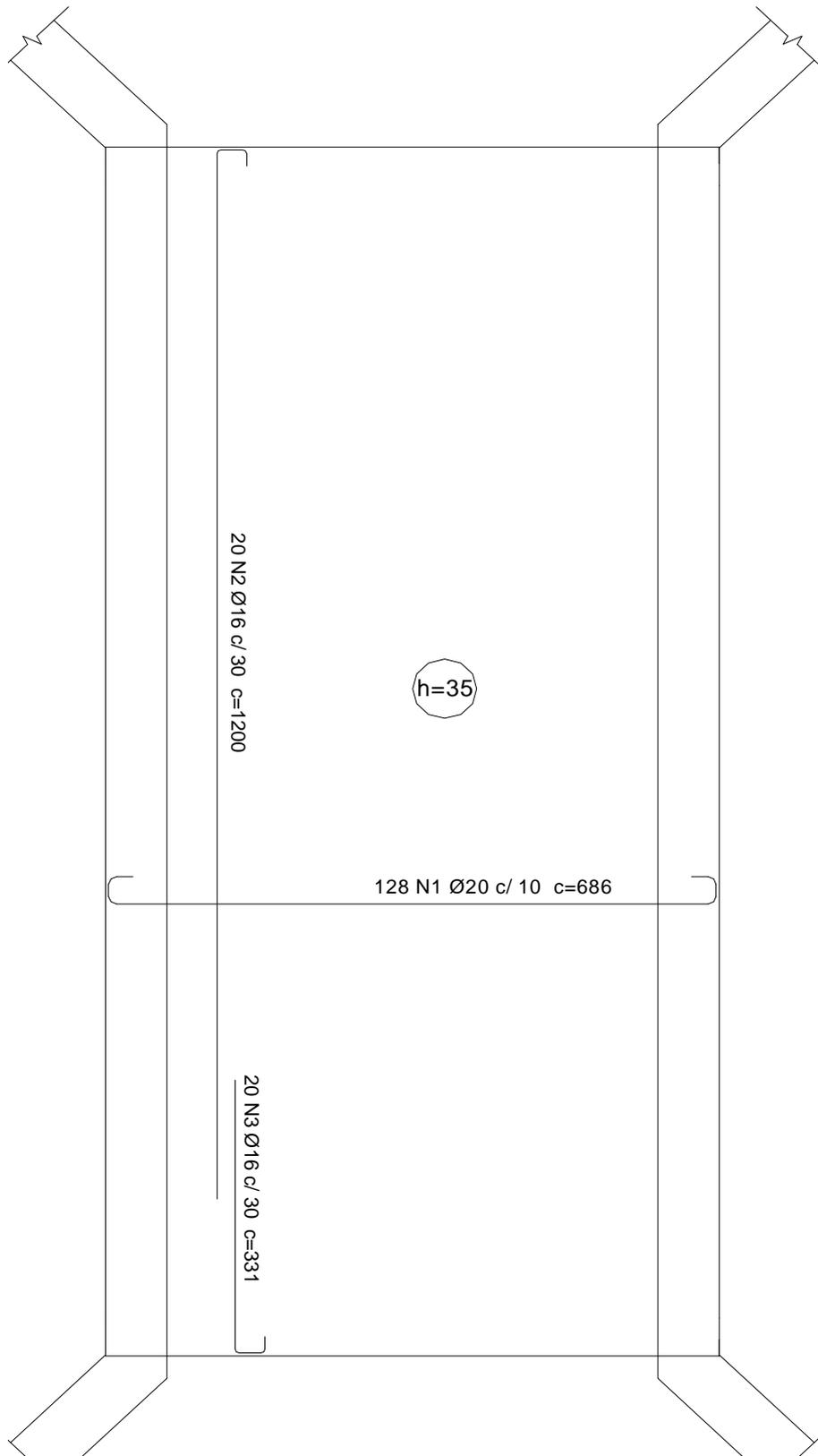


Figura 3.21 Armação do tabuleiro

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 (2004). *Projeto de estrutura de concreto armado*

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NB 6 (1982). *Carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestre*

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7187 (2003). *Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido.*

E.C.Hambly. *Bridge deck behaviour.*

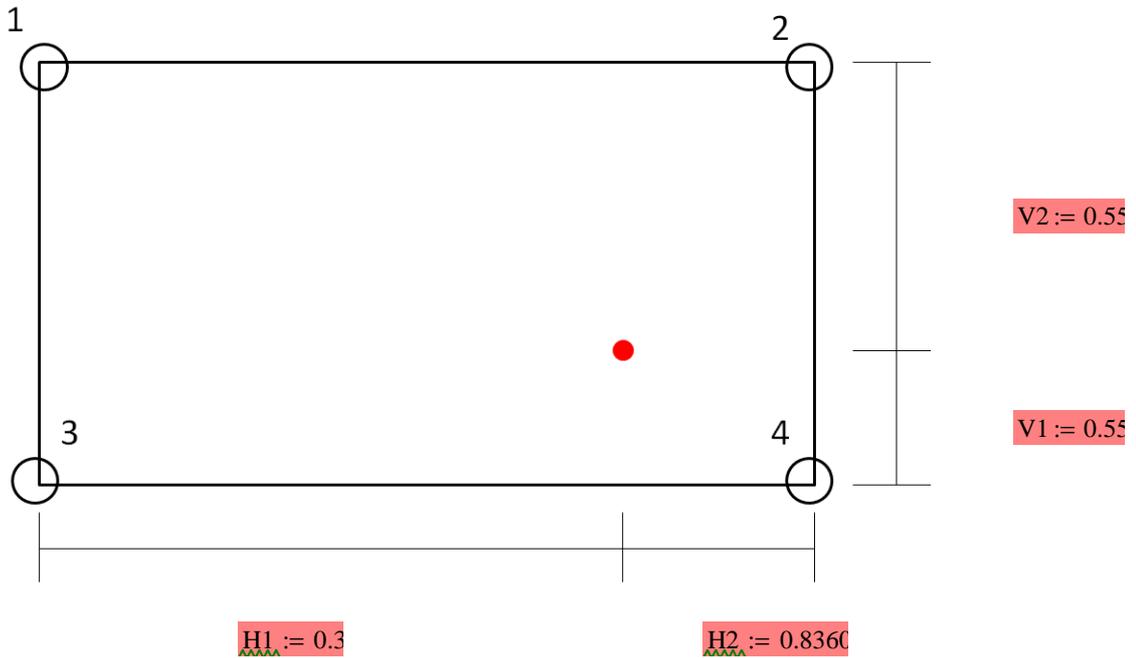
Eugene j. o'brien and Damien L. Keogh. (1999). *Bridge Deck Analysis* Departament of Civil Engineering, Universit College Dublin, Ireland

F. Leonhardt. (1909). *Principios básicos para construção de pontes de concreto.*

Roberto Chusr Carvalho e Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho(2007) *Calculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR-6118: 2003*

Anexo A

Determinação das cargas nodais da malha devido a força aplicada em um ponto qualquer



$P := 7.5$ Carga pontual atuante no ponto indicado em vermelho

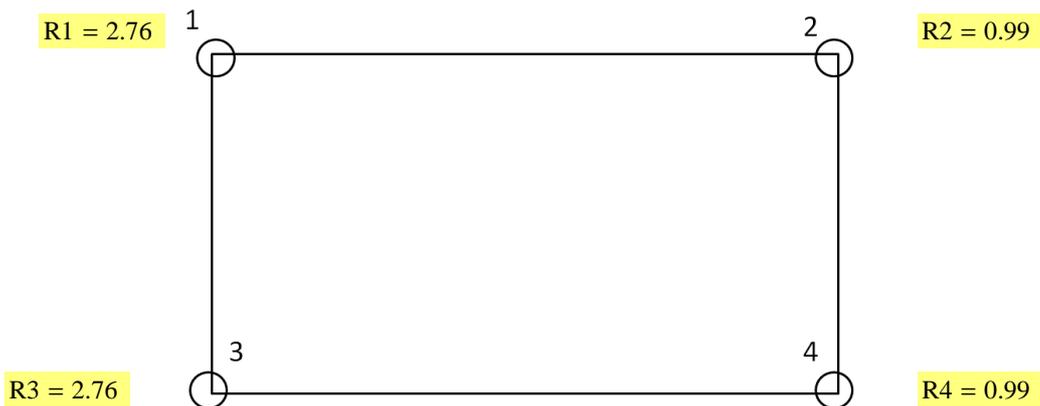
$$\underline{H} := H_1 + H_2$$

$$\underline{V} := V_1 + V_2$$

$$Q_1 := P \cdot \frac{H_2}{H} \quad Q_2 := P \cdot \frac{H_1}{H}$$

$$R_1 := Q_1 \cdot \frac{V_1}{V} \quad R_3 := Q_1 \cdot \frac{V_2}{V}$$

$$R_2 := Q_2 \cdot \frac{V_1}{V} \quad R_4 := Q_2 \cdot \frac{V_2}{V}$$



ARMADURA DE LAJES

Espessura da laje	$h := 35$	cm
Diâmetro da armadura	$\phi := 20$	mm
Cobrimento da armadura	$c := 2.5$	cm
Momento de calculo	$M_k := 250$	kN.m
Fck da obra	$f_{ck} := 25$	MPa
Fyk do aço	$f_{yk} := 500$	MPa

$$\gamma_m := 1.4$$

$$\gamma_c := 1.4$$

$$\gamma_s := 1.15$$

$$\phi_{\text{cov}} := \frac{\phi}{10}$$

$$d := \begin{cases} (h - \phi - c) & \text{if } \phi \geq 0 \\ (h - c) & \text{if } \phi = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{h} := \frac{d}{100} \quad d = 0.31$$

$$f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$f_c := 0.85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad f_c = 15.18$$

$$M_d := M_k \cdot \gamma_m \quad M_d = 350$$

$$\mu := \frac{M_d \cdot 10^{-3}}{(f_c \cdot d^2)} \quad \mu = 0.25$$

$$\omega := 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu} \quad \omega = 0.29$$

$$A_s := \left(\omega \cdot \frac{f_c}{f_{yd}} \right) \cdot d \cdot 1000 \quad A_s = 30.87$$

$$A_b := 3.1415 \frac{\phi^2}{4} \quad A_b = 3.14$$

$$Qtd := \left(\text{trunc} \left(\frac{As}{Ab} \right) \right) + 1 \quad Qtd = 10$$

$$S := \text{round} \left(\frac{100}{Qtd} \right) \quad s = 1 \text{ s}$$

$$\phi := \phi \cdot 10$$

As = 30.87	Área de aço (cm ² /m)
φ = 20	Diâmetro da armadura (mm)
S = 10	Espaçamento (cm)
Qtd = 10	Quantidade de barras(unidade/m)