UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

CÉSAR THIAGO JOSÉ DA SILVA

O USO DE UM ARTEFATO COMPUTACIONAL COMO SUPORTE AO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COVARIACIONAL EM FUNÇÃO

RECIFE
2022

CÉSAR THIAGO JOSÉ DA SILVA

O USO DE UM ARTEFATO COMPUTACIONAL COMO SUPORTE AO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COVARIACIONAL EM FUNÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Verônica Gitirana

RECIFE

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecário Natália Nascimento, CRB-4/1543

S586u Silva, César Thiago José da.
O uso de um artefato computacional como suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional em função. / César Thiago José da Silva . – Recife, 2022.
343 f.: il.

Orientadora: Verônica Gitirana.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2022.
Inclui Referências e Apêndices

1. Funções – Ensino e Aprendizagem 2. Raciocínio Covariacional. 3. Educação Matemática – Tecnologias Digitais. 4. UFPE - Pós-graduação. I. Gitirana, Verônica. (Orientadora). II. Título.

370 (23. ed.) UFPE (CE2022-042)

CÉSAR THIAGO JOSÉ DA SILVA

O USO DE UM ARTEFATO COMPUTACIONAL COMO SUPORTE AO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COVARIACIONAL EM FUNÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 24/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Iranete Maria da Silva Lima (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Rogério da Silva Ignácio (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa (Examinador Externo)
Universidad de Antioquía

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Pela graça de Deus alcancei o final deste percurso, por isso, expresso a Ele a minha gratidão por toda a trajetória.

À minha esposa, Irla, por compartilhar ao meu lado cada etapa dessa trajetória, suportando com paciência a minha ausência nos momentos de dedicação à pesquisa, por me apoiar sempre e me motivar com o seu entusiasmo por cada etapa superada.

Aos meus pais, Carlos e Joseli, pelo seu esforço, dedicação e pela forma como se doaram pela vida e pela educação dos filhos. Aos meus irmãos e a todos os meus familiares, que sempre me apoiaram.

À minha orientadora, profª. Dra. Verônica Gitirana, com quem aprendi muito desde a graduação, por ser uma referência como docente, pesquisadora e pessoa. Sou grato por todo o seu apoio e confiança.

Aos professores que fizeram parte das bancas de qualificação e defesa, pelas contribuições valiosas para o aprimoramento deste trabalho: prof. Dr Jhony Villa-Ochoa, prof. Dr. Victor Giraldo, prof. Dr. Rogério Ignácio, profª. Dra. Iranete Lima e prof. Dr. Jadilson Ramos.

Aos professores e aos colegas dos grupos de pesquisa GERE e LEMATEC, pela amizade e pela importância que tiveram na minha trajetória como pesquisador.

Aos professores e aos colegas do Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação Edumatec/UFPE, pelos momentos de discussão e construção compartilhados.

Aos licenciandos que voluntariamente se disponibilizaram como sujeitos da pesquisa, pela doação do seu tempo e dedicação para produzir dados para este estudo. Aos licenciandos que deram um apoio fundamental ao experimento da pesquisa atuando como monitores: Edson Sobral, Matheus Almeida e Tarcis Teles.

A todo o corpo docente e técnico-administrativo do Programa de Pós-Graduação Edumatec/UFPE, por todo o suporte nos anos do Mestrado e do Doutorado.

Presto uma homenagem à memória dos professores Pierre Rabardel (*in memoriam*) e Gérard Vergnaud (*in memoriam*), que fizeram contribuições fundamentais para o conhecimento científico e especialmente neste estudo, mas que deixaram esta vida durante o percurso desta pesquisa.

RESUMO

O raciocínio covariacional em função envolve pensar em como uma variável varia em relação à variação na outra variável. Ao passo que pesquisas têm apontado dificuldades dos estudantes para raciocinar covariacionalmente, tecnologias computacionais têm sido utilizadas para apoiar essa forma de raciocínio; no entanto, pouca atenção é dada a como possibilidades e restrições decorrentes da representação matemática no meio computacional (transposição informática) influenciam a atividade e o desenvolvimento conceitual. Neste estudo, utilizamos a lente da Abordagem Instrumental para investigar os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes e a sua relação com a transposição informática da covariação nesse artefato. A metodologia consistiu em um estudo de casos múltiplos das respectivas gêneses instrumentais de três licenciandos em Matemática que exploraram situações de covariação concebidas no *software* Geogebra. O estudo envolveu um experimento de ensino estruturado por orquestrações instrumentais, além da aplicação de um questionário e de entrevistas baseadas em tarefas. Uma análise microgenética foi aplicada aos dados com foco no uso instrumentado do Geogebra e na mobilização do raciocínio covariacional dos estudantes. Os resultados mostraram como o uso instrumentado do Geogebra e a sua relação com aspectos da transposição informática influenciaram o raciocínio covariacional dos estudantes. A gênese instrumental de ferramentas que permitiram o suporte à quantificação da variação em y em função da variação em x e à coordenação da covariação contínua, bem como a exploração da covariação em representações dinâmicas e conectadas entre si, contribuíram para a interpretação covariacional do gráfico e de aspectos como a variação variável e a variação negativa. Por outro lado, os esquemas mobilizados pelos estudantes para explorar situações envolvendo a covariação complexa e os esquemas para esboçar o gráfico covariacionalmente mostraram-se limitados. Neste último aspecto, foi revelada a influência de esquemas convencionais que são desenvolvidos no ambiente papel e lápis e baseados em uma abordagem de correspondência de funções, assim como em um pensamento da forma estática do gráfico; este resultado mostrou a necessidade do desenvolvimento de esquemas que articulem as possibilidades do meio computacional às formas de representar o gráfico covariacionalmente. O papel que a representação da variação por segmentos dinâmicos exerceu nas dificuldades dos estudantes em interpretar a variação negativa revelou a necessidade de que sejam levadas em conta as restrições e as possibilidades que são geradas com a criação de novos objetos em materiais didáticos concebidos no ambiente computacional, um processo que propusemos caracterizar como transposição informática de segunda ordem.

Palavras-chave: Funções – Ensino e Aprendizagem. Raciocínio Covariacional. Educação Matemática – Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

Covariational reasoning in function involves thinking of how one variable changes in relation to the change in the other variable. While research has indicated students' difficulties to reason covariationally, computational technologies have been used to support this form of reasoning; however, little attention is paid to how possibilities and constraints arising from mathematical representation in the computational environment (informatics transposition) influence activity and conceptual development. In this study, we used the Instrumental Approach lens to investigate the effects of using a computational artifact on students' covariational reasoning, and the relationship between said effects and the informatics transposition of covariation in this artifact. Methodology consisted of a multiple case study of the instrumental genesis of three pre-service mathematics teachers who explored situations of covariation that were conceived in the Geogebra software. The study involved a teaching experiment structured by instrumental orchestrations and also the application of a questionnaire and task-based interviews. A microgenetic analysis was applied to the data focusing on instrumented use of Geogebra and also on mobilization of students' covariational reasoning. Results showed how students' instrumented use of Geogebra and relationships with aspects of informatics transposition influenced students' covariational reasoning. The instrumental genesis of tools that supported quantification of variation in y as a function of variation in x and the coordination of continuous covariation, as well as exploring covariation in dynamic and interconnected representations, have contributed to covariational interpretation of graph and also the interpretation of change in variation and negative variation. On the other hand, students' schemes to explore situations involving complex covariation and also schemes to sketch graphs in a covariational way were limited. In this last aspect, the influence of conventional schemes which are developed in the paper and pencil environment and that are based on a correspondence approach to functions was revealed; as well as on a static shape graph thinking; this result pointed out the need to develop schemes that articulate possibilities of computational environment to ways of representing graph covariationally. The role that representing variation by dynamic segments played in students' difficulties on interpreting negative variation revealed the need to take into account restrictions and possibilities which are generated by the creation of new objects in computer-based didactic materials, such a process we proposed to characterize as second-order informatics transposition.

Keywords: Functions – Teaching and Learning. Covariational Reasoning. Mathematics Education – Digital Technologies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa insere-se na problemática da integração e dos efeitos do uso de artefatos computacionais no ensino e aprendizagem da matemática, particularmente na aprendizagem de funções por uma perspectiva covariacional, ou seja, com ênfase em como a variação em uma variável afeta a variação na outra variável. O objetivo proposto foi investigar os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato. A seguir, delimitaremos a problemática na qual a pesquisa se situa, além de definirmos as questões e os objetivos da pesquisa. Finalizaremos esta seção com uma descrição da estrutura do texto da tese. Por fim, retornaremos à problemática ao final da seção 2 para, a partir da construção dos aspectos teóricos e das questões levantadas na literatura, delimitarmos os aspectos a serem enfatizados na pesquisa.

1.1 PROBLEMÁTICA

A forma como atualmente ‘função’ é definida enfatiza uma relação abstrata entre conjuntos, fruto de uma evolução histórica influenciada pela formalização matemática e pela complexidade, cada vez maior, das aplicações da ideia de função. Essa evolução levou a um enfraquecimento da ideia de função como uma relação entre quantidades variáveis na qual a variação em uma variável afeta a variação em outra variável, o que é referido como uma abordagem covariacional de função.

Embora a ideia de covariação tenha sido enfraquecida com a definição formal abstrata de ‘função’, pensar em termos de variáveis variando simultaneamente torna-se necessário para construir ideias fundamentais do Cálculo como limites, derivadas e continuidade (CARLSON *et al.*, 2002; KAPUT, 1992; MALIK, 1980; REZENDE, 2003; THOMPSON; CARLSON, 2017). Mesmo antes da matemática de nível superior, a taxa de variação em funções é abordada em diferentes contextos no Ensino Médio em termos de uma relação quantitativa entre a variação em y e a variação em x.

Na pesquisa em Educação Matemática, a ‘abordagem covariacional’ começou a ser enfatizada de forma mais explícita pelos trabalhos de Confrey e Smith (1994) e Thompson (1994). Os primeiros autores partiram de uma distinção entre as abordagens de correspondência e covariação: na correspondência, enfatiza-se a associação de um único valor de x com um único valor de y por meio de uma regra; na covariação, enfatiza-se a coordenação da variação em uma variável com a variação na outra variável.

Já Thompson (1994) e mais recentemente Thompson e Carlson (2017) trataram a covariação como a conceitualização de quantidades cujos valores variam simultaneamente: "uma pessoa raciocina covariacionalmente quando ela imagina os valores de duas quantidades variando e os imagina variando simultaneamente." (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 425, tradução nossa). Os autores defendem que o raciocínio covariacional é necessário para uma concepção robusta de função.

Ao passo que diversos autores identificaram processos e conceitualizações subjacentes ao raciocínio covariacional, as pesquisas na área também apontaram dificuldades dos estudantes em mobilizar tal raciocínio. Carlson *et al.* (2002) mostraram que mesmo estudantes de alta performance em Cálculo tiveram dificuldades para representar a covariação no gráfico, a partir de situações dinâmicas de funções. Na pesquisa de Moore (2014), estudantes também tiveram dificuldades para interpretar a covariação no gráfico. Já os estudos de Ellis *et al.* (2016) e Lagrange (2014) relataram dificuldades para quantificar a variação e relacionar a variação em uma variável com a variação na outra variável.

Na crescente tendência da utilização de tecnologias computacionais para apoiar a aprendizagem da matemática, alguns estudos analisaram o raciocínio covariacional de estudantes apoiando-se nas possibilidades de representação e no dinamismo dessas tecnologias. Dois aspectos da tecnologia computacional destacados foram: a possibilidade de representação e manipulação dinâmica das variáveis (ELLIS *et al.*, 2016; LAGRANGE; PSYCHARIS, 2014) e a conexão dinâmica e simultânea de representações para explorar a covariação (LAGRANGE, 2014).

Embora uma parte desses estudos dê destaque a contribuição de alguns aspectos das tecnologias computacionais, a maioria deles não aborda o problema de como os efeitos do uso desses artefatos, no raciocínio covariacional, se relacionam com as características e restrições específicas desses artefatos e com as condições e consequentes formas de uso desenvolvidos pelos sujeitos. Tal fato revela uma visão do papel secundário da tecnologia na construção do conhecimento matemático.

Nossa posição é a de que, ao passo que o uso de tecnologias tem o potencial de contribuir para a aprendizagem, essa contribuição não é irrestrita, uma vez que envolve restrições e limitações determinantes para influenciar nos conhecimentos construídos pelos estudantes. Uma análise que leve em conta essas restrições pode revelar a emergência de uma série de fenômenos (ARTIGUE, 1996b, 2002) que contrariam a ilusão de uma neutralidade desses artefatos (TROUCHE, 2005).

Por um lado, essas questões têm relação com a representação dos objetos matemáticos no meio computacional que Balacheff (1993) situou dentro do processo da transposição informática, no qual os objetos a ensinar são representados no computador. Essa transposição tem implicações na forma como o conhecimento é representado no 'universo interno' da máquina, isto é, na sua concepção e programação, assim como também influenciam a interação com o usuário na 'interface'. Por outro lado, essas questões também têm relação com o processo pelo qual os estudantes interagem, se apropriam gradativamente e desenvolvem formas de uso dos artefatos tecnológicos no processo que é definido como gênese instrumental (RABARDEL, 1995).

A abordagem instrumental de Rabardel (1995) alinha-se a essa discussão, pois enfoca o processo de gênese instrumental, no qual o sujeito concebe o instrumento ao desenvolver esquemas de utilização do artefato. Esse processo envolve a interação entre as particularidades do sujeito e as propriedades do artefato e é determinante na pré-estruturação da atividade e do conhecimento construído pelo sujeito.

Nesse contexto, nosso interesse se debruça sobre uma abordagem instrumental da construção do conhecimento matemático, a saber: o raciocínio covariacional, com o suporte de uma tecnologia computacional. Assim, propomos analisar a influência do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional de estudantes e como os efeitos de tal uso têm relação com a transposição informática da covariação nesse artefato.

Para abordar o problema posto, nos apoiamos teoricamente nos seguintes quadros e noções: (i) Raciocínio Covariacional, sistematizado por Thompson e Carlson (2017); (ii) Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), da qual tomamos a noção de gênese instrumental e para a qual contribui o construto teórico dos Esquemas, de Vergnaud (2009); (iii) Transposição Informática de Balacheff (1993), na qual baseamos a discussão sobre a representação matemática da covariação no meio computacional.

A articulação entre esses quadros teóricos, em conjunto com as questões postas na literatura científica da área, nos permitem delimitar, a seguir, as questões de pesquisa e os objetivos específicos aos quais retornaremos ao final da seção 2 desta tese.

1.2 QUESTÕES DE PESQUISA

1) De que forma o uso de um artefato computacional para explorar a covariação em relações funcionais influencia no raciocínio covariacional dos estudantes?
2) Como os efeitos do uso do artefato podem ser relacionados aos aspectos da transposição informática da covariação nesse artefato?

1.3 OBJETIVOS

Objetivo geral:

- Investigar os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes, e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato.

Objetivos específicos:

- Descrever e analisar os aspectos da transposição informática da ideia de covariação no artefato computacional Geogebra;
- Descrever e analisar a gênese instrumental de licenciandos em Matemática com o Geogebra, em situações de covariação;
- Analisar os efeitos do uso do artefato pelos estudantes no seu raciocínio covariacional;
- Relacionar os efeitos do uso do artefato pelos sujeitos com aspectos da transposição informática da covariação no artefato.

1.4 ESTRUTURA DO TEXTO

Na seção 2, articulamos os fundamentos teóricos da pesquisa com o arcabouço da literatura relacionada à área, além de revisitar a problemática de um ponto de vista mais situado, ao final da seção. Tal articulação teórica é feita a partir dos quadros: (i) Raciocínio Covariacional, com base em uma sistematização teórica proposta por Thompson e Carlson (2017), o qual articulamos uma revisão de literatura com base na abordagem covariacional;

(ii) Transposição Informática de Balacheff (1993), descrita teoricamente e discutida no contexto da aplicação das tecnologias computacionais para abordar covariação; (iii) Abordagem Instrumental, proposta por Rabardel (1995) e do suporte da noção de esquema de Vergnaud (2009) aos conceitos de instrumento e gênese instrumental, bem como de uma discussão da Abordagem Instrumental à aprendizagem da matemática, por Artigue (1996, 2002). Finalizamos a seção com um retorno à problemática da pesquisa para situar e delimitar aspectos deste trabalho com as perspectivas dos quadros e da literatura discutidas na seção.

Na seção 3, descrevemos o quadro metodológico que articula a abordagem do estudo de caso (YIN, 2015) aos princípios metodológicos da pesquisa em Educação Matemática. Delimitamos a pesquisa como um estudo de casos múltiplos (YIN, 2015), caracterizamos os casos e os contextos nos quais as suas trajetórias se desenvolveram . Descrevemos, em seguida, a estrutura da análise dos dados, apoiada na análise microgenética (MEIRA, 1994). Em seguida, descrevemos o planejamento das três etapas do estudo: aplicação de questionários; concepção de um experimento de ensino; aplicação de entrevistas baseadas em tarefas. O planejamento do experimento de ensino foi descrito e estruturado com o suporte do Modelo de Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2005), bem como o desenho das situações, dos materiais desenhados no *software* Geogebra e das *análises a priori*. Finalmente, a seção encerra-se com a descrição do planejamento das entrevistas baseadas em tarefas.

Na seção 4, elaboramos as análises e discussões dos dados, com o suporte da análise microgenética (MEIRA, 1994). Primeiramente, foram analisados os dados do questionário aplicado aos sujeitos, em seguida, os dados diversos do experimento de ensino do qual os sujeitos do estudo participaram e, por fim, os dados de entrevistas baseadas em tarefas. A seção é finalizada com uma síntese de cada caso, na qual se discutem aspectos da gênese instrumental e do raciocínio covaricional de cada caso, além das relações entre os resultados e aspectos envolvidos na transposição informática da covariação no Geogebra.

Na seção 5, apresentamos as conclusões do estudo, as limitações encontradas e as possíveis perspectivas de investigações futuras.

2. QUADROS TEÓRICOS E REVISÃO DA LITERATURA

Nesta seção, apresentaremos os quadros teóricos que fundamentam a pesquisa, iniciando pelo Quadro do Raciocínio Covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017) e uma revisão de literatura sobre o raciocínio covariacional no contexto do ensino e aprendizagem de funções. Posteriormente, discutiremos o uso de tecnologias computacionais para uma abordagem covariacional de função sob a lente do construto da Transposição Informática (BALACHEFF, 1993) e, em seguida, abordaremos a Teoria da Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995) e a noção de Esquema de Vergnaud (2009) como suporte ao conceito de gênese instrumental nessa teoria.

2.1 ABORDAGEM COVARIACIONAL DE FUNÇÃO

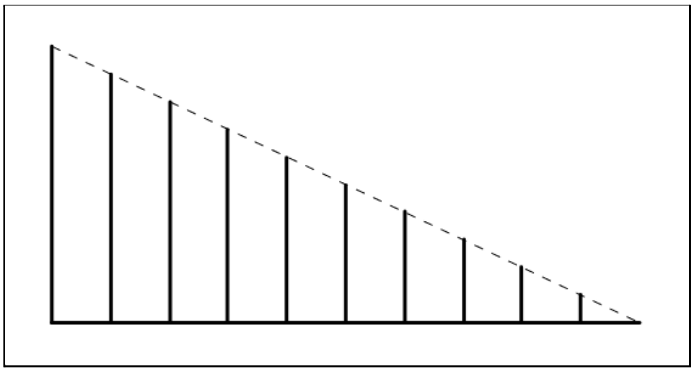
A seguir, situaremos a abordagem covariacional de função a partir do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de função e descreveremos a perspectiva teórica do raciocínio covariacional e a literatura atual sobre o ensino e aprendizagem de funções nessa perspectiva.

2.1.1 O significado de covariação no contexto do desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função

Até os primeiros passos para que a ideia de função fosse explicitada, ela não foi estudada como uma entidade em si. Aspectos de funções eram mobilizados para explorar relações funcionais no estudo dos fenômenos nas ciências, nos quais o interesse era entender "como a variação em uma quantidade afetaria a variação em outra quantidade". (GITIRANA, 1999, p.2). Para Malik (1980, p. 490), a investigação da relação entre duas grandezas variáveis foi fundamental para se chegar ao conceito de função.

Uma formulação que chama a atenção por explicitar uma imagem da covariação entre grandezas foi a construção da teoria geométrica das latitudes de Oresme (1323-1382). Tal construção representa a velocidade em função do tempo (Figura 1); na qual este foi representado ao longo de uma linha horizontal (longitudes) e as velocidades associadas a cada instante foram representadas por linhas perpendiculares (latitudes) (BOTELHO; REZENDE, 2007).

Figura 1 – Relação entre grandezas na teoria de Oresme



Fonte: (BOTELHO; REZENDE, 2007, p. 66)

Para Botelho e Rezende (2007), a transição de uma descrição qualitativa para uma descrição quantitativa do movimento contribuiu para o surgimento do conceito de função. Essa transição teve em Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) dois dos principais expoentes, de forma que, para Malik (1980), o conceito de função originou-se quando Galileu propôs um programa para o estudo do movimento.

Nesse primeiro momento, a exploração das relações funcionais na perspectiva da covariação entre quantidades era tácita e mobilizada no contexto do movimento, todavia, não formalizada em termos de função, nem enfatizava as representações matemáticas formais.

No século 17, as relações funcionais tiveram por principal aplicação as curvas e os conceitos geométricos associados. Com os desenvolvimentos algébricos de Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650), curvas foram associadas às equações algébricas; já a representação das variáveis envolvidas nessas equações foi feita em um sistema de coordenadas (BOTELHO; REZENDE, 2007). Em 1673, Leibniz introduziu os termos *variável, constante e parâmetro* e usou pela primeira vez a palavra função para indicar "quantidades que variam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente" (BOTELHO; REZENDE, 2007, p.70).

Nessa perspectiva, as variáveis envolvidas nas relações funcionais eram, sobretudo, grandezas geométricas. Em 1692, Leibniz e Bernoulli adotaram o termo função como "certa quantidade geométrica variável, tais como ordenadas, tangentes e raios de curvatura" (BOYER, 1946, p. 12 apud GITIRANA, 1999, p. 2). Essa perspectiva de função como a variação de quantidades ao longo de curvas também estava presente na construção do Cálculo de Newton (1669-1687) a partir de problemas da física. No seu "método das fluxões", a imagem das variáveis (fluentes) é a de pontos fluindo sobre curvas e o seu papel é a aplicação no cálculo de taxas de variação (fluxos) (KLEINER, 1989; BOTELHO; REZENDE, 2007).

No contexto do século 17, a abordagem da covariação tomou o seu lugar nas grandezas geométricas e contou com a articulação entre as representações algébrica e gráfica, provida pela geometria analítica. A covariação como uma relação entre quantidades variáveis é enfatizada pelo conceito emergente de função. Além disso, o desenvolvimento do cálculo aplicado à física de Newton permitiu a quantificação da variação relativa entre as variáveis por meio da ideia da taxa de variação, porém, ainda não havia ênfase na relação entre variáveis por meio de uma expressão algébrica.

A partir do século 18, o contexto geométrico deu lugar a uma perspectiva do conceito de função como representado por expressões algébricas. Em 1718, Johann Bernoulli (1667-1748) apresentou o que Kleiner (1989) classificou como a primeira definição formal de função: "Chama-se aqui função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes" (RÜTHING, 1984, p. 72 apud KLEINER, 1989, p. 284, tradução nossa)[1].

Em 1748, Euler apresentou a seguinte definição: "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma forma daquela quantidade variável e números ou quantidades constantes" (RÜTHING, 1984, p. 72 apud KLEINER, 1989, p. 284, tradução nossa)[2]. No entanto, como apontou Boyer (1946, p.12 apud GITIRANA, 1999, p.2) "Euler viu que qualquer curva desenhada a mão-livre no plano determina uma relação funcional que pode não ser representável, tanto implícita quanto explicitamente, de forma analítica ordinária". Mais tarde, Lacroix (1765-1843) definiu função da seguinte forma: "qualquer quantidade, o valor que depende de um ou mais quantidades é dita ser uma função das demais, caso ou não saiba-se por qual operação passa-se das demais para a primeira" (BOYER, 1946, p.12 apud GITIRANA, 1999, p.2).

[1] One calls here Function of a variable a quantity composed in any manner whatever of this variable and of constants. (RÜTHING, 1984, p. 72 apud KLEINER, 1989, p. 284)

[2] A function of a variable quantity is an analytical expression composed in any manner from that variable quantity and numbers or constant quantities. (RÜTHING, 1984, p. 72 apud KLEINER, 1989, p.284)

Nessa fase, a covariação ainda estava presente no conceito de função como uma relação entre variáveis, porém a ênfase estava na fórmula algébrica que expressa essa relação e permite obter o valor de uma variável por meio de operações envolvendo a outra variável.

Os problemas que mobilizaram o conceito de função levaram à necessidade de uma definição cada vez mais abrangente e formal, matematicamente. Segundo Botelho e Rezende (2007), o problema da corda vibrante proposto por D'Alembert (1717 - 1783) – que envolveu, entre outros, Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange – provocou uma evolução no conceito de função para abranger funções definidas por expressões analíticas diferentes e em diferentes intervalos e funções desenhadas à mão-livre e que, provavelmente, não eram dadas por combinações de símbolos algébrico.

Já no século 19, em 1837, Dirichlet (1805-1859) apresentou a seguinte definição: “y é uma função de x, para um domínio dado de valores de x, sempre que uma lei precisa pode ser dada relacionando x e y” (BOYER, 1946, p.12-13 apud GITIRANA, 1999, p.2). Nessa definição, segundo Gitirana (1999), o sentido de “lei precisa” é o da correspondência unívoca entre x e y. Botelho e Rezende (2007) também afirmam que Dirichlet foi o primeiro a definir função como uma relação arbitrária entre variáveis, independentemente de fórmulas algébricas.

O conceito de variável de Dirichlet expressa uma mudança sutil no significado de variável, enfraquecendo uma associação com grandezas físicas, geométricas ou representações de valores que mudam de forma contínua. Com isso, o significado passa a ser baseado em um objeto representativo de um conjunto de valores que, inclusive, podem ser atribuídos arbitrariamente:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. (EVES, 2011, p. 661)

Embora a definição de função caminhasse para uma perspectiva cada vez mais abstrata e lógica, a imagem de variáveis, variando entre si, ainda podia ser observada, por exemplo, no uso de expressões sugestivas de uma imagem dinâmica (*enquanto x percorre…y varia gradualmente da mesma forma…)* na definição dada pelo próprio Dirichlet para funções contínuas:

> Suponhamos que a e b são dois valores dados e x é a quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Se para cada x corresponde um único y, de modo que, enquanto x percorre o intervalo de a até b, y = f(x) varia gradualmente da mesma forma, então y é chamada função contínua de x para este intervalo. Além disso, não é absolutamente necessário que y dependa de x no intervalo inteiro de acordo com a mesma lei; sem dúvida, não é necessário pensar somente em relações que possam ser expressas através de operações matemáticas. (RÜTHING, 1984 apud BOTELHO; REZENDE, 2007, p. 72)

Já na definição de Cauchy (1789-1857), embora percebe-se um significado inicial da variável como representativa de um conjunto de valores, a evocação do conceito de limite traz consigo uma imagem de uma aproximação cada vez maior de um valor dado, sugerindo, mais uma vez, uma perspectiva dinâmica do significado de variável:

> Nomeamos quantidade variável aquela que se considera como passível de receber sucessivamente muitos valores diferentes uns dos outros. [...] Chamamos, ao contrário, quantidade constante [...] toda quantidade que recebe um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a terminar por dele diferir tão pouco quanto queiramos, esse último é chamado o limite de todos os outros. (CAUCHY, 1821, p. 4 apud BARONI; OTERO-GARCIA, 2014, p. 29).[3]

Segundo Malik[4] (1980), a introdução dos conceitos de espaço métrico e topologia levou o conceito de função a um nível mais abstrato: “foi descoberto que as propriedades de uma função dependem da estrutura dos conjuntos nos quais ela é definida e de onde ela toma

---

[3] On nomme quantité variable celle que l’on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. [...] On appelle au contraire quantité constante [...] toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s’approchent indéfiniment d’une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l’on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. (CAUCHY, 1821, p.4 apud BARONI; OTERO-GARCIA, 2014, p. 29)

[4] With the introduction of the concepts of metric space and topology, it was realized that the properties of a function depend on the structure of the sets on which it is defined and where it takes its values. This led to the concepts of domain and range… (MALIK, 1980, p.491)

os seus valores. Isso levou aos conceitos de domínio e imagem" (MALIK, p. 491, tradução nossa). Com a contribuição de Bourbaki em 1939, a definição atual de função ancorou-se de forma definitiva na abstração e na lógica da teoria dos conjuntos:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ou não ser distintos. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é chamada de relação funcional em y se, para todo x $\in$ E, existe um único y $\in$ F que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que, desta forma, associa a cada elemento x $\in$ E o elemento y $\in$ F que está na relação dada com x; y é dito ser o valor da função no elemento x, e a função é dita determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (BOTTAZZINI, 1986, p.7 apud KLEINER, 1989, p. 299, tradução nossa).[5]

Segundo Kleiner (1989), Bourbaki também deu uma definição de função como um subconjunto do produto cartesiano entre dois conjuntos dados; isto é, como um conjunto de pares ordenados (x,y). Nessa definição, foram enfatizados os aspectos da relação entre conjuntos e da correspondência unívoca entre os elementos associados por tal relação. A visão de covariação ficou, assim, enfraquecida na definição atual de função.

Apesar do gradual enfraquecimento da covariação na definição de função, uma visão covariacional é necessária no estudo do Cálculo e, posteriormente, da Análise. A definição de objetos e propriedades como limites, derivadas e continuidade, é feita em termos de relações nas quais é perceptível a metáfora de um movimento relativo entre as variáveis, onde as visões de lógica de conjuntos, transformação ou correspondência entre valores parecem não ser suficientes. Malik[6] (1980) expressa essa preocupação:

> A definição moderna é algébrica em seu espírito. Ela apela para a faculdade discreta do pensamento e carece de sensibilidade às variáveis. Ao passo que, para o Cálculo e outras ciências práticas, o treinamento necessário deve

[5] Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if, for all x $\in$ E there exists a unique y $\in$ F which is in the given relation with x. We give the name of function to the operation which in this way associates with every element x $\in$ E the element y $\in$ F which is in the given relation with x; y is said to be the value of the function at the element x, and the function is said to be determined by the given functional relation. Two equivalent functional relations determine the same function.(BOTTAZZINI, 1986, p.7 apud KLEINER, 1989, p. 299)

[6] The modern definition is algebraic in its spirit. It appeals to the discrete faculty of thinking and lacks a feel for the variable.Whereas, for calculus and other practical sciences the requisite training should enable the student to develop a feel for smooth change of the variables in phenomena. These are two different frames of thought and it is not obvious how one helps in understanding the other, particularly at the elementary level.(MALIK, 1980, p. 492)

> capacitar o estudante a desenvolver um senso para a mudança suave das variáveis nos fenômenos. São duas estruturas de pensamento diferentes e não é óbvio como uma ajuda a compreender a outra, principalmente no nível elementar. (MALIK, 1980, p. 492, tradução nossa)

No Cálculo, os conceitos de continuidade, limite e derivada são definidos da seguinte forma, respectivamente:

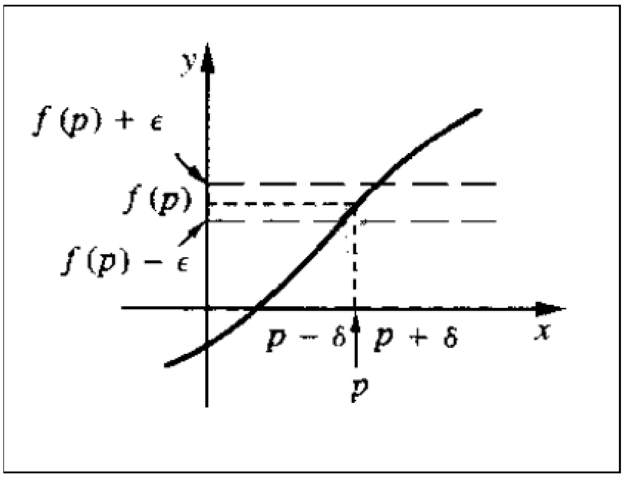
> Sejam *f* uma função e *p* um ponto de seu domínio. Definimos:
> *f* contínua em p $\Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $x \in D_f$
>
> $$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$
>
> (GUIDORIZZI, 2001, p.62)

> Sejam *f* uma função e *p* um ponto do domínio de *f* ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de *f*. Dizemos que *f* tem limite L, em *p,* se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,
>
> $$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$
>
> Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \to p} f(x)$.
>
> (GUIDORIZZI, 2001, p.72)

> Sejam *f* uma função e *p* um ponto de seu domínio. O limite
>
> $$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$
>
> quando existe e é finito, denomina-se derivada de *f* em *p* e indica-se por *f*'(*p*) (leia: *f* linha de *p*). Assim
>
> $$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$
>
> Se *f* admite derivada em *p*, então diremos que *f* é derivável ou diferenciável em *p*.
>
> (GUIDORIZZI, 2001, p.137)

Essas definições têm em comum uma imagem sugestiva de operações de escolhas sucessivas de valores para os valores de ε e δ de forma a construir uma imagem de uma aproximação indefinida entre os valores de *x* e *p*; refletindo no mesmo comportamento com relação a *f(x) e f(p),* como é possível verificar, a seguir (Figura 2):

Figura 2 – Ilustração gráfica da definição de função contínua



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 60)

Assim, a imagem de uma variação dinâmica em *y* e *x* parece emergir naturalmente, mesmo nas definições abstratas atuais do cálculo. Isso leva a entendermos que a covariação não é um aspecto de importância apenas na história do desenvolvimento do conceito de função, mas uma das faces fundamentais para a construção robusta desse conceito e de outros conceitos relacionados.

2.1.2 Raciocínio Covariacional

Como destacado no desenvolvimento histórico-epistemológico da ideia de função, a covariação estava presente na conceitualização dos matemáticos das relações funcionais entre quantidades variáveis. Segundo Thompson e Carlson (2017), o raciocínio covariacional não era um conceito matemático explícito, mas sim uma forma de pensar.

Thompson e Carlson (2017) descreveram o raciocínio covariacional como um construto teórico a partir das primeiras caracterizações de covariação nos trabalhos de Confrey e Smith (1994) e Thompson (1994) e, posteriormente, nas contribuições de outros trabalhos: Saldanha e Thompson (1998); Carlson *et al.* (2002); Castillo-Garsow (2010, 2012), entre outros.

Segundo Thompson e Carlson (2017), Confrey e Smith caracterizaram a covariação em termos da coordenação de duas variáveis conforme os valores delas variam. Eles distinguiram duas abordagens pelas quais as relações funcionais podem ser conceitualizadas: correspondência e covariação. A abordagem de correspondência enfatiza a associação de um único valor de x com um único valor de y, por meio de uma regra; já a covariação implica "poder mover operacionalmente de y_m para y_{m+1} coordenando com o movimento de x_m para x_{m+1}" (CONFREY; SMITH, 1994, p. 33, tradução nossa). Em uma tabela, por exemplo, essa abordagem envolve poder "coordenar a variação nas colunas conforme move-se para cima ou para baixo na tabela" (CONFREY; SMITH, 1994, p. 33, tradução nossa).

Para Confrey e Smith (1994), a abordagem de covariação é mais poderosa que a abordagem de correspondência e dá visibilidade e centralidade ao conceito de taxa de variação. Os autores usam tal conceito para caracterizar a função exponencial a partir da construção da ideia de uma unidade multiplicativa.

Thompson e Carlson (2017) afirmam que Confrey e Smith (1995) enfatizam a centralidade de sequências, no seu significado de covariação, quando expressam uma função como sendo entendida (covariacionalmente) como "a justaposição de duas sequências, cada uma das quais é gerada independentemente por meio de um padrão de valores de dados" (CONFREY; SMITH, 1995, p. 67 apud THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 424, tradução nossa).

Para Thompson e Carlson (2017), o significado de covariação de Confrey e Smith (1994) envolve a imagem de que a variação, em uma variável, é coordenada com a variação em outra variável, mas – voltando à imagem da covariação na tabela – eles não abordaram como alguém pode pensar sobre o que acontece entre as entradas em uma tabela.

A abordagem de Thompson teve por foco inicial as "formas como estudantes concebem situações como compostas de quantidades e relações entre quantidades cujos valores variam e as formas como os estudantes concebem a taxa de variação" (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 424, tradução nossa)[7]. Nessa perspectiva, a noção de 'quantidade' foi definida por Thompson como "a conceituação de alguém de um objeto, de modo que ele tenha um atributo que possa ser medido" (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 425, tradução nossa)[8].

[7] Thompson's primary concern was to understand ways students conceive situations as composed of quantities and relationships among quantities whose values vary and ways students conceive rate of change. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 425)

[8] … someone's conceptualization of an object such that it has an attribute that could be measured.(THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 425)

Com base na noção de quantidade, Thompson definiu o raciocínio quantitativo[9] como "a conceitualização de alguém de uma situação em termos de quantidades e relações entre quantidades" (THOMPSON; CARLSON, p. 425). As noções de variação e covariação tornaram-se necessárias na Teoria do Raciocínio Quantitativo de Thompson, sobretudo para "explicar o raciocínio de estudantes que conceituaram uma situação quantitativamente e, ao mesmo tempo, a consideraram dinâmica - eles imaginaram quantidades em sua situação conceitual como tendo valores que variavam" (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 425, tradução nossa)[10]. Assim, nessa construção, uma pessoa raciocina covariacionalmente "quando imagina os valores de duas quantidades variando e os imagina variando simultaneamente." (p. 425, tradução nossa)[11].

Segundo Saldanha e Thompson[12] (1998), raciocinar covariacionalmente implica a concepção de um objeto multiplicativo[13] que, segundo os autores, é um objeto conceitual criado a partir da união mental dos atributos de duas quantidades:

> Pensar em covariação como a coordenação de sequências se encaixa bem com o emprego de tabelas para apresentar estados sucessivos de uma variação. Achamos útil estender essa ideia, para considerar possíveis fundamentos imagéticos para a capacidade de alguém de "ver" a covariação. A respeito disso, nossa noção de covariação é de alguém que tem em mente uma imagem sustentada de dois valores de quantidades (magnitudes) simultaneamente. Isso implica unir as duas quantidades, de modo que, no entendimento de alguém, um objeto multiplicativo é formado pelas duas. Como um objeto multiplicativo, rastreia-se cada valor de uma quantidade com a percepção imediata, explícita e persistente de que, a cada momento, a

---

[9] Quantitative reasoning, in Thompson's theory, is someone conceptualizing a situation in terms of quantities and relationships among quantities. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 425)

[10]… to explain the reasoning of students who conceptualized a situation quantitatively and at the same time took it as dynamic—they envisioned quantities in their conceptualized situation as having values that varied. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p.425)

[11]…when she envisions two quantities' values varying and envisions them varying simultaneously. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p.425)

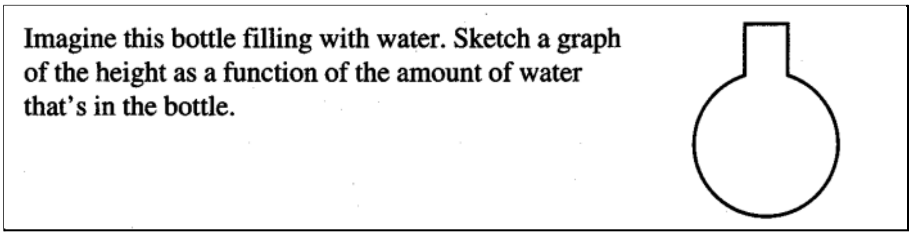
[12] Thinking of covariation as the coordination of sequences fits well with employing tables to present successive states of a variation. We find it useful to extend this idea, to consider possible imagistic foundations for someone's ability to "see" covariation. In this regard, our notion of covariation is of someone holding in mind a sustained image of two quantities' values (magnitudes) simultaneously. It entails coupling the two quantities, so that, in one's understanding, a multiplicative object is formed of the two. As a multiplicative object, one tracks either quantity's value with the immediate, explicit, and persistent realization that, at every moment, the other quantity also has a value. (SALDANHA; THOMPSON, 1998, p. 299 apud THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 426)

[13] Thompson e Carlson (2017, p. 433) afirmam que a ideia de objeto multiplicativo de Saldanha e Thompson (1998) é baseada na noção de Piaget do 'e' como um operador multiplicativo, no contexto das operações de classificação e seriação do desenvolvimento do pensamento nas crianças.

> outra quantidade também possui um valor. (SALDANHA; THOMPSON, 1998, p. 299 apud THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 426, tradução nossa)

Carlson *et al.* (2002) também contribuíram para o construto do raciocínio covariacional a partir de estudos sobre a representação da covariação no gráfico mediante situações dinâmicas de funções. Em Carlson (1998), a autora mostrou que a maioria dos estudantes de alta performance de Cálculo não conseguiu construir gráficos apropriados da covariação entre as variáveis envolvidas na situação dada, a seguir (Figura 3):

Figura 3 – O problema da garrafa[14]



Fonte: Carlson *et al.* (2002, p.360)

Segundo Thompson e Carlson (2017), as formas de pensar que os estudantes exibiram no estudo de Carlson (1998) levaram Carlson *et al.* (2002) a criarem um quadro para analisar o raciocínio covariacional daqueles estudantes e estender as construções de Saldanha e Thompson (1998). Assim, tais estudos visavam incluir as noções de coordenação dos estudantes de taxa média de variação e taxa instantânea de variação com relação a duas quantidades em covariação.

Carlson *et al.*[15] (2002) definiram o raciocínio covariacional como "as atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades variáveis enquanto se atende às formas como elas mudam uma em relação à outra" (CARLSON *et al.*, 2002, p. 354, tradução nossa). O quadro desenvolvido pelos autores estrutura o raciocínio covariacional em termos de ações e níveis de coordenação mental da covariação das variáveis e foi revisitado por Thompson e Carlson (2017).

---

[14]Imagine esta garrafa cheia de água. Esboce um gráfico da altura em função da quantidade de água que está na garrafa.

[15]…we define covariational reasoning to be the cognitive activities involved in coordinating two varying quantities while attending to the ways in which they change in relation to each other. (CARLSON *et al.*, 2002, p. 354)

Castillo-Garsow (2012) também contribuiu para o Quadro do Raciocínio Covariacional ao descrever formas pelas quais é possível conceber a variação. Nessa perspectiva, os estudantes podem conceber o valor de uma quantidade variando de forma discreta ou contínua; essa última, por sua vez, pode ser distinguida entre variação contínua suave e variação contínua segmentada. Na variação suave se raciocina sobre a variação em termos de uma variação em progresso, já na variação segmentada, apesar da imaginação de um aspecto contínuo entre os valores, o estudante imagina essa variação ocorrendo por 'pedaços':

> Variação contínua segmentada é uma maneira de pensar semelhante a pensar que os valores variam discretamente, exceto pelo fato de o aluno ter uma imagem tácita de um continuum entre valores sucessivos (...) Essa imagem de variação é como colocar as réguas de ponta a ponta e marcar os pontos de extremidade. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 427, tradução nossa)[16]

Thompson e Carlson (2017) revisitaram o Quadro do Raciocínio Covariacional construído inicialmente por Carlson *et al.* (2002). No quadro revisitado, os autores reúnem as contribuições teóricas de Carlson *et al.* (2002), Confrey e Smith (1994), Saldanha e Thompson (1998) e Castillo-Garsow (2012).

[16] Chunky continuous variation is a way of thinking that is similar to thinking that values vary discretely, except that the student has a tacit image of a continuum between successive values (...) This image of variation is like laying rulers end to end and marking the endpoints. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 427)

Quadro 1 – Níveis de raciocínio covariacional

Nível	Descrição
Covariação contínua suave	A pessoa imagina acréscimos ou decréscimos (de agora em diante, variações) no valor de uma quantidade ou variável (de agora em diante, variável) como acontecendo simultaneamente com variações no valor de outra variável, e imagina as duas variáveis variando suavemente e continuamente.
Covariação contínua segmentada	A pessoa visualiza variações no valor de uma variável como ocorrendo simultaneamente com as variações no valor de outra variável e visualiza ambas as variáveis em variação contínua segmentada.
Coordenação de valores	A pessoa coordena os valores de uma variável (x) com valores de outra variável (y) com a antecipação da criação de uma coleção discreta de pares (x, y).
Coordenação grosseira de valores	A pessoa forma uma imagem bruta dos valores das quantidades variando juntos, como "essa quantidade aumenta enquanto essa quantidade diminui". A pessoa não visualiza que valores individuais das quantidades andam juntos. Em vez disso, a pessoa visualiza um vínculo frouxo e não multiplicativo entre as mudanças gerais nos valores das duas quantidades.
Pré-coordenação de valores	A pessoa imagina que os valores de duas variáveis variam, mas de forma assíncrona - uma variável varia e a segunda variável varia, depois a primeira e assim por diante. A pessoa não antecipa criando pares de valores como objetos multiplicativos.
Sem coordenação	A pessoa não tem imagem de variáveis variando juntas. A pessoa foca na variação de uma ou outra variável sem coordenação de valores.

Fonte: Thompson e Carlson (2017, p. 441, tradução nossa)

Usando o quadro mencionado acima, os autores descrevem possíveis pensamentos associados a cada nível no problema da garrafa do estudo de Carlson *et al.* (2002):

> Um aluno sem nível de coordenação reconheceria que o topo da água está subindo na garrafa ou que mais água está sendo adicionada à garrafa, mas não faria nenhuma tentativa de coordenar a altura da água na garrafa com a quantidade de água adicionada à garrafa. Um aluno no nível de pré-coordenação perceberia que, depois que uma certa quantidade de água é colocada na garrafa, o nível da água na garrafa aumenta. Um aluno no nível de coordenação grosseira descreveria a covariação como "a altura aumenta à medida que o volume aumenta." Um aluno no nível de coordenação de valores se concentraria na altura da água na garrafa e no número de xícaras de água adicionadas à garrafa, sem pensar nos valores intermediários de volume ou altura. Um aluno no nível de covariação contínua segmentada imaginaria o nível da água subindo para cada incremento de água adicionado, incluindo todos os valores de volume e altura entre valores sucessivos, mas sem prever a altura e o volume passando por esses valores. Finalmente, um aluno no nível contínuo suave poderia imaginar o volume e a altura da água variando suavemente através de intervalos simultaneamente, enquanto antecipa que dentro de cada intervalo a quantidade de água e a

> altura da água variam suavemente e continuamente. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 442, tradução nossa)[17]

Thompson e Carlson (2017) também apresentam o que consideram um significado de função baseado em um raciocínio covariacional:

> Uma função, covariacionalmente, é uma concepção de duas quantidades variando simultaneamente, de modo que exista uma relação invariante entre seus valores que possui a propriedade de que, na concepção da pessoa, todo valor de uma quantidade determina exatamente um valor da outra. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 444, tradução nossa)[18]

Os autores destacam alguns aspectos específicos nesta definição. Primeiramente, eles evidenciam a função como uma concepção que reside no pensamento de uma pessoa e que, no caso dessa pessoa, tal concepção está relacionada particularmente a ela. Os teóricos também ressaltam que por 'relação invariante' eles querem afirmar que a pessoa que concebe a função pode usar tal relação para determinar o valor de uma variável a partir do valor da outra, inclusiv, por uma relação qualitativa, sem regra de atribuição.

Thompson e Carlson (2017) destacam que a ideia de função covariacionalmente, pode ser relacionada com uma função definida parametricamente e com base no que eles chamaram de tempo conceitual[19]:

---

[17] A student at the no coordination level would recognize that the water's top is going up in the bottle, or that more water is being added to the bottle, but would make no attempt to coordinate the height of the water in the bottle with the amount of water added to the bottle. A student at the precoordination level would notice that after some amount of water is poured into the bottle, the water level on the bottle rises. A student at the gross coordination level would describe the covariation as "the height increases as the volume increases." A student at the coordination of values level would focus on the water's height in the bottle and the number of cups of water added to the bottle with no thought given to intermediate values of volume or height. A student at the chunky continuous covariation level would imagine the water level rising for each increment of water added, including all values of volume and height between successive values, but without envisioning height and volume passing through those values. Finally, a student at the smooth continuous level would imagine both the water's volume and height varying smoothly through intervals simultaneously, while anticipating that within each interval the amount of water and height of water vary smoothly and continuously. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 442)

[18] A function, covariationally, is a conception of two quantities varying simultaneously such that there is an invariant relationship between their values that has the property that, in the person's conception, every value of one quantity determines exactly one value of the other. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 444)

[19] In terms of relationships between quantities, each quantity has a value that exists in conceptual time, with conceptual time made explicit in the person's awareness. Thus, the coordination of quantities' values is like forming the pair [x(t), y(t)], where t stands for a value of conceptual time. We distinguish between experiential time and conceptual time as follows: Experiential time is the experience of time passing, whereas conceptual time is an image of measured duration. We say image of measured duration to dispel interpretations that someone must think he is actually timing an event. Rather, we are speaking of someone imagining a quantity as having different values at different moments, and envisioning that those moments happen continuously and rhythmically. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p.444)

> Em termos de relações entre quantidades, cada quantidade tem um valor que existe no tempo conceitual, com o tempo conceitual explicitado na consciência da pessoa. Assim, a coordenação dos valores das quantidades é como formar o par [x (t), y (t)], onde t representa um valor de tempo conceitual. Nós distinguimos entre o tempo experiencial e o tempo conceitual da seguinte maneira: o tempo experiencial é a experiência da passagem do tempo, enquanto o tempo conceitual é uma imagem de duração medida. Dizemos imagem de duração medida para dissipar interpretações de que alguém deve pensar que está na verdade cronometrando um evento. Em vez disso, estamos falando de alguém imaginando uma quantidade como tendo valores diferentes em momentos diferentes e imaginando que esses momentos acontecem contínua e ritmicamente. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p.444, tradução nossa)

Os autores também afirmam que uma concepção de função como relação invariante está menos propícia a que se pense no gráfico da função como uma forma. Para eles, isso está relacionado com o que foi definido por Moore e Thompson (2015) como pensamento da forma estática e emergente[20]:

> O pensamento da forma estática significa fazer inferências sobre o comportamento de uma função estritamente por ter construído associações entre as formas dos gráficos e as propriedades da função. O pensamento da forma emergente é interpretar um gráfico como um traço emergente de variáveis que covariaram. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 445, tradução nossa)

Descreveremos, a seguir, alguns resultados no contexto do ensino e a aprendizagem de função com base na ótica do raciocínio covariacional.

[20] Static shape thinking means to make inferences about a function's behavior strictly by having built associations between graphs' shapes and function properties. Emergent shape thinking is to interpret a graph as an emergent trace of variables having covaried. (THOMPSON; CARLSON, 2017, p. 445)

2.1.3 Literatura sobre o ensino e a aprendizagem de função sob a perspectiva covariacional

Discutiremos, a partir desta seção, os resultados de uma uma revisão sistemática da literatura sobre o raciocínio covariacional em função, sob os pontos de vista cognitivo, didático, epistemológico e, inclusive, do ponto de vista do uso de tecnologias computacionais. Tais revisões foram articuladas com base em artigos publicados em periódicos entre os anos de 2014 a 2019 (SILVA; GITIRANA, no prelo). Nesta seção, traremos apenas a primeira parte da revisão e, na próxima, daremos ênfase especial ao uso de tecnologias computacionais como suporte ao raciocínio covariacional nas pesquisas.

Os resultados da revisão sistemática apontaram alguns aspectos acerca das diversas óticas que influenciam no desenvolvimento do raciocínio covariacional em função.

Do ponto de vista cognitivo, os resultados reportam a importância de processos para o raciocínio covariacional; como a criação de objetos multiplicativos, a quantificação e o uso de imagens suaves de variação. Os estudos ainda apontam que, para a maioria dos sujeitos, raciocinar covariacionalmente requer um esforço incomum. As dificuldades estão relacionadas a aspectos como: (i) quantificar a variação; (ii) conceber a variação conjunta entre variáveis/quantidades e a forma como elas variam; (iii) modelar relações funcionais covariacionalmente e; (iv) representar e interpretar a covariação em diferentes registros de representação.

A quantificação é essencial para o raciocínio quantitativo e covariacional (THOMPSON, 1994; THOMPSON; CARLSON, 2017), esse processo envolve a conceitualização de um objeto, tal que ele tenha um atributo que possa ser medido. Os estudos de Johnson e McClintock (2018), Johnson, McClintock e Hornbein (2017) e Moore (2014) apontam a importância de conceber os atributos como coisas capazes de variar e possíveis de medir, para um raciocínio covariacional efetivo.

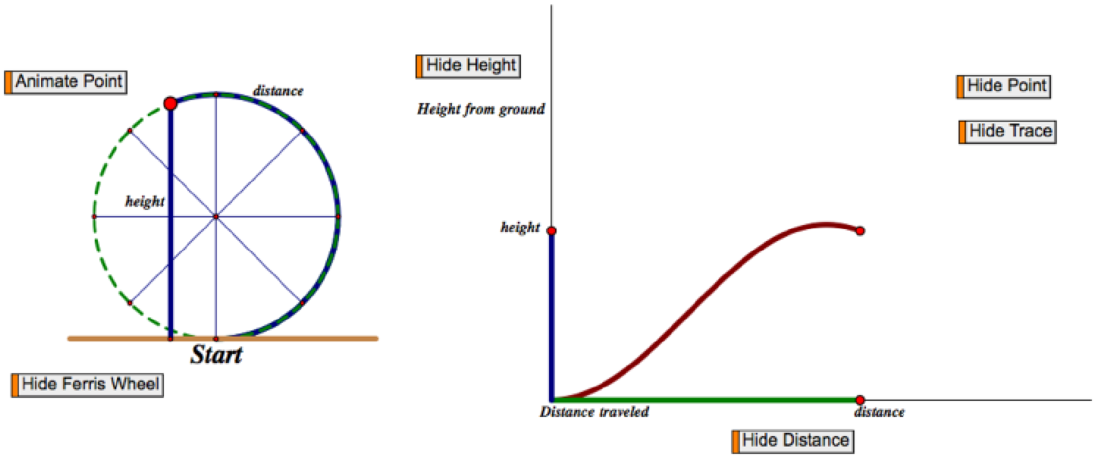
No estudo de Johnson e McClintock (2018), estudantes exploraram relações funcionais entre o comprimento e a área de figuras planas, nas quais existiam situações de variação no aumento ou decréscimo das variáveis (ex.: aumento com variação decrescente), os autores concluíram que os alunos que discerniram essa variação haviam quantificado a variação, ou seja, concebido as quantidades envolvidas como possíveis de medir e variar. Já

Moore (2014) considerou que a quantificação da medida do ângulo foi um trampolim crítico para um aluno raciocinar covariacionalmente na abordagem da função seno.

Outro processo apontado como importante é a criação de um objeto multiplicativo dos atributos das quantidades em covariação (SALDANHA; THOMPSON, 1998). Thompson *et al.* (2017) investigaram o raciocínio covariacional de 487 professores que, após assistirem a uma animação dinâmica mostrando valores de duas magnitudes variáveis, foram solicitados a esboçar um gráfico que expressasse a relação entre ambas. Um dos resultados obtidos pelo estudo indica que os professores que criaram objetos multiplicativos dos valores das duas quantidades construíram os gráficos mais precisos.

O uso de imagens suaves de variação (CASTILLO-GARSOW, 2012; THOMPSON; CARLSON, 2017) foi apontado como importante por Johnson, McClintock e Hornbein (2017) e Johnson (2015b) para fomentar o raciocínio covariacional e dar suporte aos estudantes no discernimento da variação na intensidade da variação[21] (Figura 4).

Figura 4 – Uma tarefa envolvendo variação na intensidade da variação na relação funcional entre a distância percorrida e a altura relativa.



Fonte: (JOHNSON; MCCLINTOCK; HORNBEIN, 2017, p.854)

Pesquisas também apontam que as concepções dos estudantes de conceitos relacionados à covariação podem estar relacionadas a um raciocínio covariacional mais consistente ou não. O conceito de razão foi apontado nos estudos de Johnson (2015a) e

[21] Johnson e McClintock (2018, p.302) definiram o discernimento da variação na variação unidirecional como: “a concepção da possibilidade de variar a intensidade da variação, enquanto se mantém a direção da variação invariante. Por discernimento, queremos chamar a atenção do aluno a uma situação em termos de certos aspectos críticos (Marton, 2015). Por intensidade, queremos dizer o 'grau em que um atributo está presente'.”

Johnson (2015b) como tendo um papel importante na concepção dos estudantes de taxa de variação e em como eles utilizaram esse conceito para raciocinar covariacionalmente. Já, concepções que envolveram equívocos relacionados ao conceito de limites tiveram um papel limitador para o raciocínio covariacional de estudantes nas pesquisas Jones (2015) e Nagle *et al.* (2017).

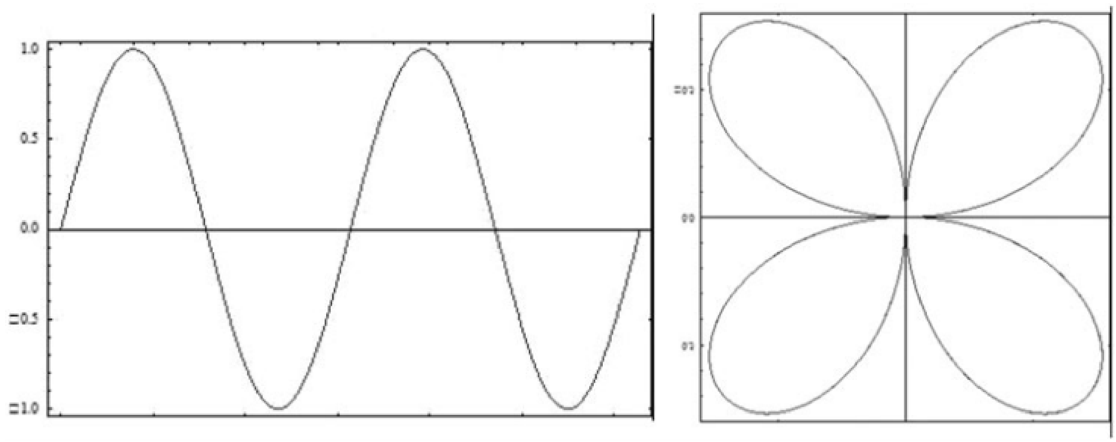
Com relação às dificuldades dos sujeitos em covariação, a complexidade em quantificar a variação foi apontada por Lagrange (2014), Ellis *et al.* (2016) e Moore (2014) como uma limitação ao raciocínio covariacional, pois, embora visualizassem a variação, os estudantes geralmente não conseguem quantificar a forma como ela ocorre. No estudo de Ellis *et al.* (2016), estudantes exploraram uma simulação computacional envolvendo uma planta cuja altura crescia exponencialmente em função do tempo. Segundo os autores, no início do experimento de ensino, embora os alunos descrevessem qualitativamente o crescimento exponencial, eles não conseguiam quantificar a maneira como a planta crescia; uma condição semelhante a essa é apontada no estudo de Villa-Ochoa (2011) com situações de covariação na função quadrática. Já no estudo de Lagrange (2014), ao analisar as interações de estudantes que exploraram a covariação em um *software*, o autor apontou que alguns estudantes percebiam a variação, mas não entendiam que ela poderia ser quantificada.

Outra dificuldade apontada nos estudos realizados é a dificuldade de relacionar a variação de uma variável com a variação em outra variável. Nagle *et al.* (2017) investigaram a compreensão de limite de estudantes de Cálculo e apontaram que muitos estudantes descreviam os valores em uma variável aproximando-se mais e mais de um valor específico, mas não descreviam o 'movimento' correspondente nos valores da outra variável. Já Ellis *et al.* (2016) e Aranda e Callejo (2017) relatam casos nos quais os estudantes não conectaram o crescimento dos valores na variável dependente com o crescimento dos valores na variável independente nos contextos das funções exponencial e integral. Nos estudos de Lagrange (2014) e Ayalon, Watson e Lerman (2016), os alunos precisavam realizar escolhas adequadas das variáveis dependente e independente para modelar uma relação de covariação entre variáveis em um artefato computacional. Os resultados revelaram dificuldades na identificação das variáveis que estavam em covariação.

A interpretação de gráficos de funções por uma visão covariacional também foi apontada como uma dificuldade para estudantes e também para professores em formação inicial. Ao analisar o raciocínio quantitativo de estudantes de Pré-Cálculo no contexto da função seno, Moore (2014) apontou que – em um momento inicial do experimento – eles interpretaram o gráfico com base em aspectos não-quantitativos, da forma e dos movimentos físicos envolvidos na situação, sem levar em conta a variação conjunta das variáveis envolvidas: “para os alunos, o gráfico era suave porque o percurso era suave tanto em movimento quanto em forma.” (MOORE, 2014 p.26, tradução nossa). Os estudantes também tiveram dificuldades em interpretar o comportamento da taxa de variação a partir do gráfico da função. Nos estudos de Ayalon, Watson e Lerman (2016) e Yemen-Karpuzcu, Ulusoy e Işıksal-Bostan (2017), os sujeitos interpretaram os gráficos incluindo uma variável independente “tempo” em situações nas quais essa quantidade não estava envolvida, como gráficos de volume em função da altura.

Algumas dificuldades estão intimamente ligadas às diferentes formas de representar a covariação. Como exemplo, Habre (2017) investigou como os estudantes coordenaram a covariação no sistema de coordenadas polares[22] com a covariação no sistema cartesiano (Figura 5). Os resultados dessa investigação mostraram que os modos de pensar dos estudantes sobre gráficos estavam enraizados no sistema cartesiano, o que dificultou uma interpretação covariacional dos gráficos no sistema polar; principalmente, em situações com distâncias radiais negativas.

Figura 5 – Gráficos de y = sen (2*x*) e de r = sen (2*θ*)



Fonte: Adaptado de Habre (2017, p. 61)

[22] No sistema de coordenadas polares, as coordenadas de um ponto P envolvem a distância radial desse ponto à origem e o ângulo entre o segmento definido pelo ponto P e a origem e o eixo x positivo, no sentido anti-horário: (r, θ).

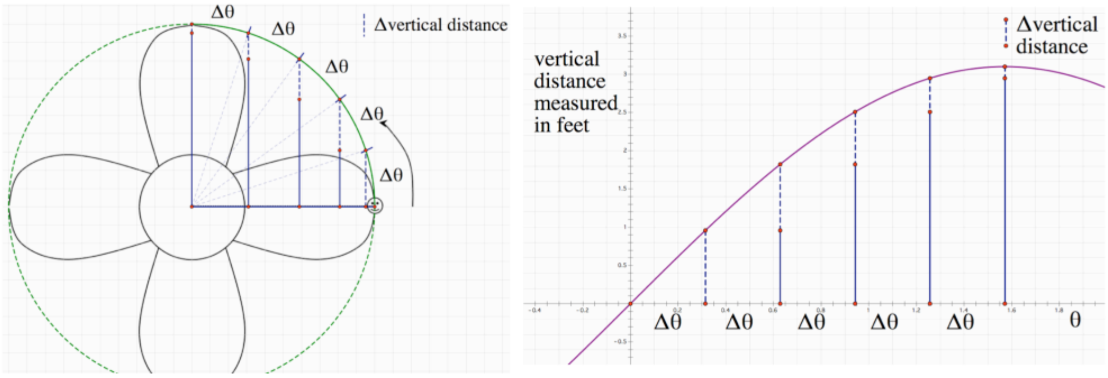
Raciocinar covariacionalmente a partir de um modelo algébrico ou fórmula também foi apontado como um desafio. Jones (2017) mostrou que estudantes interpretaram expressões da taxa de variação e da derivada pensando nelas como montantes para a quantidade original; como, por exemplo, interpretar $dF/fm = GM/r^2$ como se fosse $F = GM/r^2$. Mesmo aquelas expressões que não envolviam uma equação foram interpretadas, por alguns estudantes, como representando um montante e não uma taxa de variação ou uma expressão que define uma relação entre as variáveis.

Do ponto de vista epistemológico, os diferentes tipos de função têm diferentes aspectos covariacionais ligados à sua epistemologia matemática. Alguns estudos mostraram a necessidade de se levar em conta características intrínsecas a cada função para uma compreensão covariacional e que há dificuldades em covariação que estão intimamente relacionadas a essas características.

Ellis *et al.* (2016) abordaram o raciocínio covariacional de estudantes secundários acerca do crescimento exponencial e mostraram que uma imagem desse crescimento, como "multiplicações repetidas" e limitado a pequenos intervalos na reta, dificultou a generalização para intervalos arbitrariamente grandes ou pequenos, embora essa forma de raciocinar esteja naturalmente relacionada à forma como a função exponencial é definida. Os autores apontaram que a superação das dificuldades e uma evolução em termos de raciocínio covariacional nos estudantes se iniciaram com a mudança das imagens de repetição multiplicativa para uma capacidade de coordenar a razão de valores de y para variações em x por múltiplas unidades.

Com relação às funções trigonométricas, Moore (2014) chamou atenção para a necessidade do raciocínio covariacional não ser apoiado apenas numericamente, visto que essas funções não podem ser calculadas por operações aritméticas. O autor apontou a quantificação da medida do ângulo como um trampolim crítico para uma abordagem covariacional da função seno, uma vez que essa quantificação apoiou um processo dinâmico envolvendo o ato de medir ao longo de um arco e, com isso, deu suporte ao raciocínio covariacional do sujeito (Figura 6).

Figura 6 – Representação da covariação no problema do ventilador



Fonte: (MOORE, 2014, p.11)

As funções polinomiais têm um padrão de variação relacionado entre si, particularmente a variação nas funções afim e quadrática costumam ser mais exploradas (LIMA *et al.*, 2005). Hohensee (2016) pesquisou como os alunos percebem aspectos covariacionais na função afim, após terem participado de uma instrução sobre a função quadrática. Os resultados mostraram que a maioria dos estudantes percebeu a caracterização da covariação na função afim após terem percebido a covariação na função quadrática. Os autores concluíram que, em certas condições, 'perceber' aspectos em novos conceitos (no caso, taxa de variação na função quadrática) pode influenciar a 'perceber' os mesmos aspectos em conceitos previamente encontrados (no caso, taxa de variação na função afim).

Do ponto de vista do ensino, estudos revelaram que escolhas e aspectos didáticos podem influenciar no raciocínio covariacional dos estudantes.

Alguns estudos mostraram como diferentes contextos pedagógicos nacionais e currículos influenciam nas diferenças entre estratégias, erros e concepções de estudantes e professores (WATSON; AYALON; LERMAN, 2018; THOMPSON *et al.*, 2017; AYALON; WATSON; LERMAN, 2016). Como exemplo, o estudo de Watson, Ayalon e Lerman (2018) – com estudantes de dois contextos nacionais diferentes – mostrou que diferentes abordagens curriculares de função foram relacionadas com diferentes estratégias dos estudantes para resolver problemas com foco na variação entre as variáveis. Os alunos do primeiro contexto foram mais intuitivos para a variabilidade, enquanto os do segundo contexto tiveram um maior êxito em generalizações por meio de uma expressão algébrica e no uso da abordagem de correspondência.

A influência do *design* das tarefas também foi apontada como diretamente relacionada ao raciocínio covariacional mais explícito e efetivo (JOHNSON; McCLINTOCK, 2018; WATSON; AYALON; LERMAN, 2018; AYALON; WATSON; LERMAN, 2015). Como exemplo, Watson, Ayalon e Lerman (2018) apontaram que experiências de tarefas escolares e as formas nas quais elas são apresentadas podem ter um efeito determinante no uso de um raciocínio baseado em covariação ou correspondência. Estudos também apontaram para a necessidade de integrar diferentes representações (LAGRANGE, 2014; ARANDA; CALLEJO, 2017; LAGRANGE; PSYCHARIS, 2014) e usar diferentes contextos (JONES, 2017; LAGRANGE; PSYCHARIS, 2014) para abordar função por uma perspectiva covariacional.

As pesquisas relacionadas ao conhecimento matemático e aos significados de professores de covariação na prática e na formação inicial mostraram que as dificuldades enfrentadas por eles são semelhantes às dificuldades encontradas por estudantes do ensino regular; o que aponta para a necessidade de discutir o papel da formação docente nesse contexto. Foram relatados problemas com os significados de professores de conceitos centrais como taxa de variação e com a interpretação de gráficos de funções covariacionalmente, além de outros problemas que revelaram um raciocínio covariacional limitado.

Os estudos de Musgrave e Carlson (2017), Zengin (2018) e Byerley e Thompson (2017) mostraram significados frágeis e limitados de professores para taxa de variação, como significados que envolvem "computar" um valor ou ligados à velocidade. Yemen-Karpuzcu, Ulusoy e Işıksal-Bostan (2017) apontaram que alguns professores podem interpretar gráficos de funções pela forma do gráfico, sem referência a como as variáveis mudam em conjunto, além de terem problemas para interpretar o papel de cada variável e incluírem o tempo como variável, mesmo em relações não dependentes do tempo. Já Zengin (2018) mostrou casos nos quais professores em formação inicial – ao explorarem situações envolvendo relações entre os conceitos de diferencial, derivada, tangente e inclinação – interpretaram objetos como pontos e retas tangentes ao gráfico, atribuindo movimento aos objetos em si: "a secante se torna tangente", revelando um significado equivocado de variável.

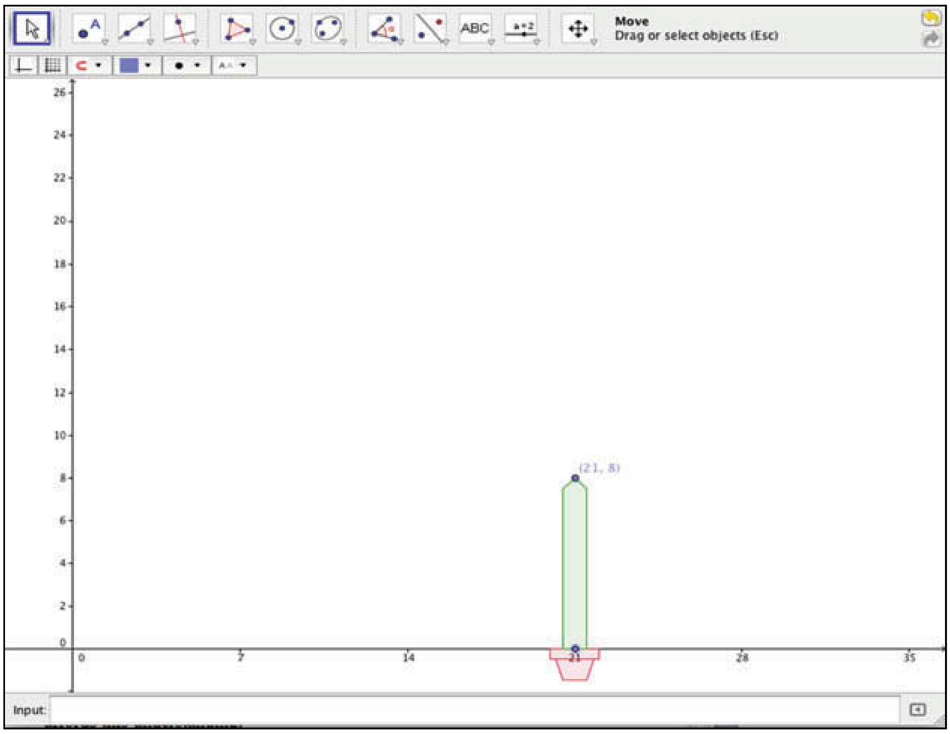
2.1.4 Literatura sobre o uso de tecnologias computacionais para explorar covariação

Uma parte dos estudos sobre o raciocínio covariacional em funções tem utilizado tecnologias computacionais para dar suporte ao raciocínio dos sujeitos. A partir de uma revisão de literatura (SILVA; GITIRANA, no prelo), vimos que a presença desses artefatos nas pesquisas não implica necessariamente em uma análise da sua efetiva contribuição no desenvolvimento conceitual. No entanto, analisamos de forma geral o que esses estudos trazem acerca do papel e da influência das tecnologias computacionais e discutimos sobre que aspectos computacionais podem potencialmente contribuir para explorar a covariação por meio dessas tecnologias.

Os aspectos e contribuições das tecnologias computacionais destacados nos estudos incluem: a representação da variação de forma dinâmica e contínua, que permite a manipulação dinâmica de variáveis; a conexão dinâmica e simultânea entre representações; a possibilidade de ação sobre as representações; a escala automática e contínua do gráfico e as ferramentas para a testagem de hipóteses e visualização da invariância.

Ellis *et al.* (2016), Zengin (2018) e Lagrange e Psycharis (2014) apontaram contribuições da representação e manipulação dinâmica de variáveis para o desenvolvimento do raciocínio covariacional. Os primeiros autores utilizaram uma simulação dinâmica do crescimento de uma planta para abordar a covariação no crescimento exponencial (Figura 7), os resultados apontaram que a possibilidade de manipular as quantidades de forma 'contínua' em um ambiente dinâmico fomentou a capacidade dos estudantes de coordenarem o crescimento multiplicativo em y com o crescimento aditivo em x, que é um aspecto central no crescimento exponencial.

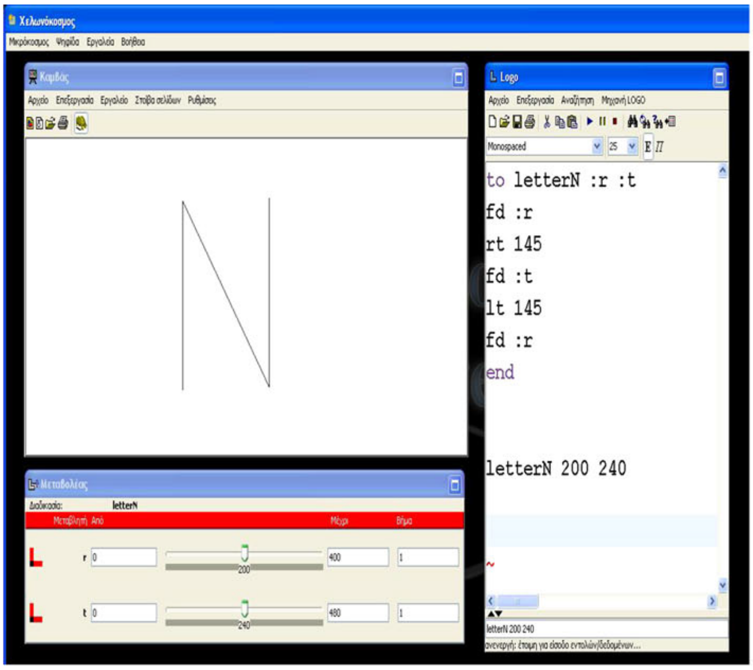
Figura 7 – O *script* “Jactus” no ambiente Geogebra



Fonte: (ELLIS *et al.*, 2016, p.157)

Para Lagrange e Psycharis (2014), a exploração dinâmica da covariação em um ambiente LOGO (Figura 8) revelou um potencial para que os estudantes identificassem e caracterizassem tipos de dependências (aditiva, multiplicativa) entre as quantidades envolvidas em uma situação de construção de um modelo da letra “N”. Além disso, a manipulação dos valores das variáveis – por meio de controles deslizantes – permitiu que os estudantes percebessem, por intermédio das deformações da figura, se as suas construções foram bem sucedidas ou não e avaliassem as implicações das suas escolhas na modelagem funcional. Já Zengin (2018) apontou que o uso de controles deslizantes e a possibilidade de arrastar pontos no gráfico contribuíram para examinar a inclinação da secante e a sua conexão com a inclinação da curva no ponto, o que permitiu relacionar a tangente a uma curva com a derivada.

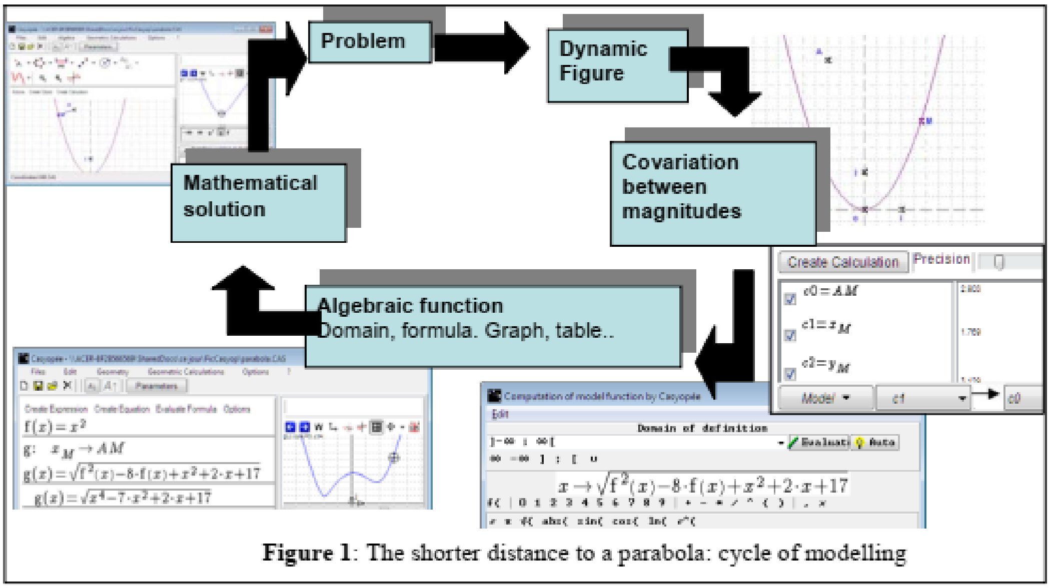
Figura 8 – Construção de um modelo da letra N no ambiente LOGO



Fonte: Lagrange e Psycharis (2014, p. 266)

Outro aspecto significativo do meio computacional foi a conexão dinâmica e simultânea entre representações/notações (LAGRANGE, 2014; JOHNSON; MCCLINTOCK, 2018; ELLIS *et al.*, 2016; ARANDA; CALLEJO, 2017) que possibilita representar a variação dinâmica simultaneamente em múltiplas representações. Segundo Kaput (1992), ideias complexas raramente são bem representadas quando é usado apenas um sistema de notação e, ainda, a conexão de notações se justifica por "expor diferentes aspectos de uma ideia complexa e revelar os significados de ações em uma notação por meio da exibição das suas consequências em outra notação" (KAPUT, 1992, p. 542, tradução nossa). Como exemplo, Lagrange (2014) destacou o potencial de um *software* que relaciona formas simbólicas (gráficos, fórmulas algébricas, etc.) às manipulações dinâmicas de objetos geométricos para os alunos estabelecerem ligações com as magnitudes em situações de covariação (Figura 9).

Figura 9 – Modelagem da covariação com articulação de representações



Fonte: (LAGRANGE, 2014, p.3)

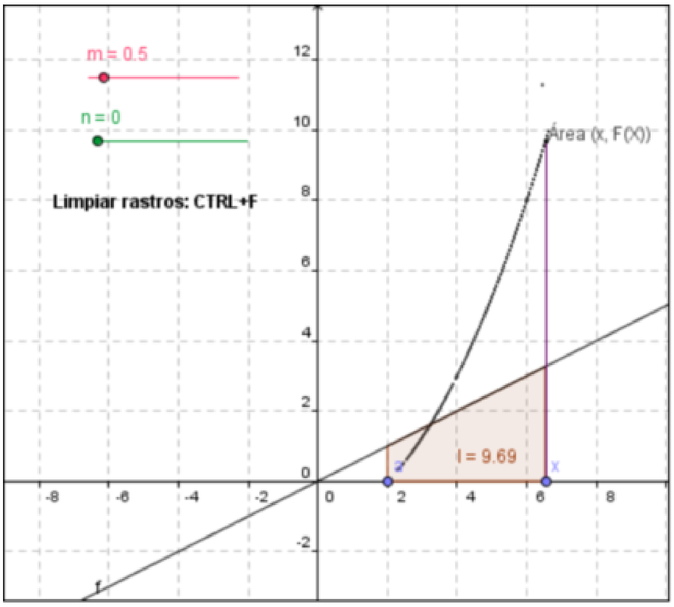
A possibilidade de ação sobre as representações/notações foi destacada nos estudos de Aranda e Callejo (2017), Zengin (2018), Lagrange e Psycharis (2014) e Moore (2014). Kaput (1992) diferenciou uma notação de ação de uma notação de exibição: os sistemas usados apenas para exibir informações são referidos como notações de exibição, já aqueles sistemas que são usados como bases para transformações, são referidos como notações de ação. Assim, um gráfico que apenas exibe a curva de uma função pré-definida distingue-se de um gráfico que permite, além da exibição, ações como variar as variáveis, o intervalo e a escala no próprio gráfico, com alteração simultânea da curva. Essas possibilidades estão presentes nos estudos citados acima.

Considerando que o raciocínio covariacional envolve coordenar a variação de uma variável com a variação da outra variável, a possibilidade de manipular as variáveis diretamente no gráfico, em vez de apenas observar a variação passivamente, sugere uma contribuição para um raciocínio mais efetivo, pois variar e observar o comportamento da variável são feitos de forma direta e simultânea pelo usuário.

No estudo de Aranda e Callejo (2017), a possibilidade de variar o intervalo e o valor da variável no próprio gráfico (Figura 10) foi utilizada para dar suporte à construção de relações de covariação entre uma variável, uma função *f* definida no intervalo dado e a sua integral no contexto de uma covariação complexa (KOUROPATOV; DREYFUS 2014), ou seja, quando estão envolvidas mais de duas variáveis em covariação. Já Lagrange e Psycharis

(2014) afirmaram que as várias representações e a oportunidade de ação nessas representações estabeleceram um *milieu*[23] rico, oferecendo múltiplas oportunidades de geração de significados.

Figura 10 – Manipulação de variáveis diretamente no gráfico



Fonte: Aranda e Callejo (2017, p.786)

Outra possibilidade interativa do meio computacional, a escala automática e contínua do gráfico, foi destacada no estudo de Ellis *et al.* (2016) por dar suporte à construção de imagens de variação suave (CASTILLO-GARSOW, 2012; THOMPSON; CARLSON, 2017) na exploração do crescimento exponencial dos estudantes que antes tinham uma imagem desse crescimento como limitando-se a uma multiplicação repetida.

Os estudos de Lagrange e Psycharis (2014), Moore (2014) e o estudo de Weber e Thompson (2014) contém exemplos de como os estudantes utilizaram as tecnologias computacionais como ferramentas para testar suas hipóteses sobre covariação e testar a invariância em relações funcionais. No estudo de Lagrange e Psycharis (2014), em um dos *softwares* do estudo, tal teste se deu por meio da deformação ou não do objeto gráfico com a variação por meio dos controles deslizantes; no outro *software* do estudo, estudantes perceberam que, ao mover um ponto horizontalmente em uma janela, o traçado do gráfico não

[23] Da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau: o *milieu* refere-se ao subsistema autônomo, antagônico ao sujeito.

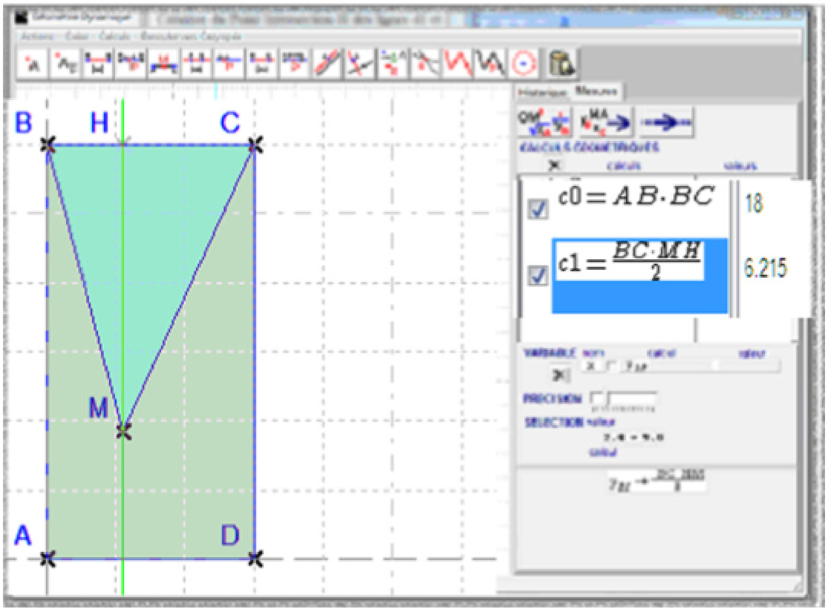
se movia, permitindo-lhes construir inferências sobre a invariância na relação entre as variáveis. Já no estudo de Weber e Thompson (2014), os estudantes utilizaram uma calculadora gráfica para traçar gráficos como forma de testar suas hipóteses prévias sobre o comportamento de funções.

Se por um lado as tecnologias computacionais podem dar suporte à exploração da covariação; por outro, é possível que os contextos e as condições da sua utilização, aliadas às características do meio computacional e ao *design* do artefato em si, estejam relacionadas a dificuldades e limitações na exploração da covariação. Por exemplo, em certas situações, o cenário rico em possibilidades e o dinamismo permitido pelo computador podem se converter em mais complexidade para o raciocínio.

No estudo de Zengin (2018), professores em formação inicial, explorando um ambiente dinâmico, interpretaram o comportamento de variáveis e retas atribuindo movimentos a um mesmo objeto, como na expressão "a secante se torna tangente", uma concepção equivocada que pode emergir com mais facilidade em um meio dinâmico. Já nos estudos de Lagrange (2014) e Lagrange e Psycharis (2014) foram reportadas dificuldades dos estudantes em identificar e relacionar variáveis em situações nas quais a covariação entre elas não estava explícita.

Os estudantes também tiveram dificuldades em conectar seus significados de função e covariação com a semântica de um *software* no estudo de Lagrange e Psycharis (2014). Nessa lógica, foi confuso para os estudantes quando um comprimento no eixo y (na construção geométrica da Figura 11) foi identificado como variável independente, uma vez que na abordagem de funções a variável independente é comumente representada no eixo x.

Figura 11 – Modelagem de uma função a partir de um contexto geométrico



Fonte: Lagrange e Psycharis (2014, p.274)

O mesmo estudo também mostrou que os estudantes tiveram dificuldades em conectar o conhecimento induzido na exploração de um *software* com o conhecimento matemático padrão, em um caso no qual a representação da covariação não se deu por notações matemáticas. Os estudos de Lagrange (2014) e Lagrange e Psycharis (2014) foram os únicos que abordaram, de forma mais profunda, como as restrições das tecnologias usadas influenciaram na atividade dos estudantes, identificando, para além das contribuições, as dificuldades e limitações impostas à conceitualização. Aqui, tomamos o termo restrições como alusivo às características de um artefato (ou atribuídas a um artefato) que condicionam ou pré-estruturam a atividade mediada por este artefato.

Algumas das dificuldades e limitações que podem surgir com o uso das tecnologias computacionais na aprendizagem são específicas e podem estar relacionadas a fenômenos originados por características específicas do meio computacional, decisões de *design* dos artefatos, ou mesmo das situações concebidas com o uso desses artefatos. Dessa forma, é necessária uma atenção específica a esses fenômenos e aos seus efeitos na aprendizagem, tais indagações são base para as discussões que propomos neste estudo e que serão discutidas nas seções seguintes.

2.1.5 Necessidades de investigação no contexto do raciocínio covariacional

A temática de pesquisa sobre a aprendizagem de funções na perspectiva covariacional é relativamente recente e tem muitas questões a serem exploradas. Thompson e Carlson (2017) listaram uma série de tópicos que necessitam de investigações: questões envolvendo o desenvolvimento do raciocínio covariacional; as concepções dos estudantes de aspectos subjacentes ao raciocínio covariacional; conexões entre a covariação e outras formas de conceitualizar função e relações com o currículo; políticas curriculares e o conhecimento e a prática dos professores no contexto da covariação.

Dentre esses tópicos, os autores não incluíram o papel que o uso de tecnologias computacionais pode exercer no raciocínio covariacional. Além disso, a maioria das pesquisas que abordaram a covariação (com o uso de tecnologias) não analisou detalhadamente o papel que o uso dessas tecnologias exerceu nos resultados obtidos. Esses fatos parecem revelar a noção de um papel secundário da tecnologia na conceitualização.

Por exemplo, Johnson e McClintock (2018) e Moore (2014) abordaram aspectos da variação variável no gráfico[24] e Ellis *et al.* (2016) abordaram a quantificação da variação exponencial, mas esses estudos não tiveram como foco uma análise mais profunda de como as possibilidades, as restrições e os usos das tecnologias utilizadas estavam relacionadas com a mobilização, ou não, do raciocínio covariacional para interpretar esses aspectos. Assim, abordaremos as questões envolvendo o suporte computacional para raciocinar covariacionalmente em representações integradas de função, com ênfase no gráfico, explorando aspectos relatados como problemáticos pela literatura, a saber: taxa de variação, variação variável e interpretação de aspectos do gráfico sob uma perspectiva covariacional.

Entendemos que a investigação da aprendizagem em matemática – apoiada no uso de tecnologias computacionais – requer um olhar mais depurado para os aspectos e fenômenos específicos desse contexto (que serão abordados na próxima subseção e no final da subseção posterior), por isso, delimitamos o nosso problema e as nossas questões a partir do uso de tecnologias como suporte ao raciocínio covariacional. Retornaremos a essas questões na subseção 2.4, na qual – após discutirmos os demais construtos teóricos da pesquisa – a

[24] O problema de interpretar a variação variável (como taxa de variação) a partir do gráfico também foi relatado no estudo de Carlson *et al.* (2002), porém o estudo não envolveu o uso de tecnologias computacionais.

problemática é revisitada para, de um ponto de vista mais embasado, situarmos e delimitarmos os aspectos centrais do estudo.

2.2 TECNOLOGIAS COMPUTACIONAIS E COVARIAÇÃO: ASPECTOS DA TRANSPOSIÇÃO INFORMÁTICA

Nesta seção, abordaremos a ideia de transposição informática (BALACHEFF, 1993), apontaremos alguns aspectos desse processo na implementação da ideia de covariação no meio computacional e relacionaremos aspectos dessa transposição no caso do *software* Geogebra.

2.2.1 Transposição informática

A transposição informática é um conceito definido por Balacheff (1993) em referência ao conceito de transposição didática de Chevallard (1991), no qual os ‘saberes de referência’ passam por transformações e adaptações às restrições de ensino e aprendizagem impostos pelos vários níveis nos quais se organizam os sistemas didáticos, com o fim de tornarem-se ‘saberes a ensinar’. Ao referir-se aos processos envolvidos na modelagem e implementação de ambientes informatizados de aprendizagem, Balacheff propõe que as restrições de ensino e aprendizagem combinam-se com as restrições relacionadas à natureza própria do meio computacional, gerando, assim, novas transformações nos saberes. Em seu trabalho *Didactique et intelligence artificielle*, Balacheff (1994) define a transposição informática da seguinte forma:

> Falarei de transposição informática (...) para designar este trabalho sobre o conhecimento que permite uma representação simbólica e a implementação desta representação por um dispositivo informático, quer se trate então de "mostrar" o conhecimento ou de "manipulá-lo". (BALACHEFF, 1994, p.14, tradução nossa).[25]

[25] Je parlerai de transposition informatique (...) pour désigner ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif informatique, qu'ils'agisse ensuite de "montrer" la connaissance ou de la "manipuler". (BALACHEFF, 1994, p.14).

Para efeito de análise de como se dá a transposição informática, Balacheff (1993) divide o dispositivo informático, composto por *hardware* e *software*, em três espaços: (i) o universo interno, onde os componentes eletrônicos permitem a operação do dispositivo, tal universo é representado pelas linguagens de programação, (ii) a interface, onde se dá a comunicação entre o usuário e o dispositivo informático e (iii) o universo externo, onde está o usuário e, eventualmente, outros dispositivos integrados. Assim, o processo de transposição informática envolve a relação de eventos nesses três universos e na articulação entre eles.

Balacheff ressalta, particularmente, os fenômenos envolvidos na transposição do saber para o universo interno e para os fenômenos da interface. Os primeiros dizem respeito às formas de representar o saber com as suas propriedades e especificidades, por meio de uma linguagem e estrutura computacional; já na interface, a visualização e a manipulação direta de objetos são possibilidades que podem levar a uma ideia de um acesso direto aos objetos abstratos.

Balacheff (1993) afirma que as combinações entre o universo interno, a interface e as características dos sistemas de representação podem produzir fenômenos de visualização na interface com características não intrínsecas aos objetos matemáticos representados. No caso da representação gráfica das funções, uma das origens desses efeitos foi a combinação entre processos pelos quais o gráfico é gerado, como a representação aproximada de números reais e a discretização (BALACHEFF, 1993, p. 368). Além disso, a possibilidade da manipulação direta de objetos na interface faz emergir fenômenos que revelam uma tensão constante entre o comportamento desses objetos e o comportamento dos modelos que eles representam.

Aqui, cabe uma inserção do significado atribuído (e também adotado neste trabalho) à visualização no contexto matemático, como envolvendo não apenas o mero "ver' os objetos na tela ou no papel, mas um processo mental de interpretação e compreensão matemática dos modelos visuais que está intimamente relacionado com o pensamento matemático (DREYFUS, 1990, 2002).

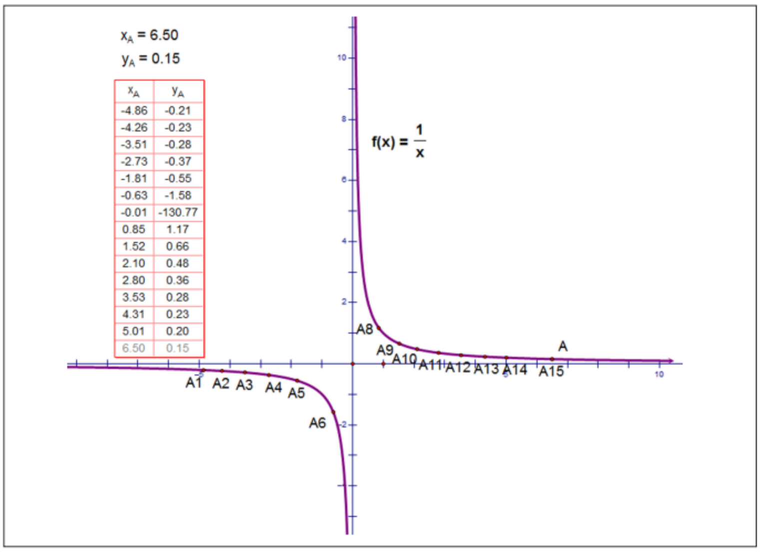
Fenômenos de transposição informática influenciam na atividade com instrumentos. Trouche (2005) distingue três tipos de restrições que contribuem para uma pré-estruturação da atividade do sujeito: (i) restrições internas, no sentido físico-eletrônicas, sobre as quais o usuário não pode modificar; (ii) restrições de comando relacionadas à existência e à forma, relacionados à sintaxe dos comandos; (iii) restrições organizacionais, relacionadas à forma como as informações e os comandos são estruturados na interface. Segundo Trouche (2005), uma análise com base nessas restrições permite entender alguns fenômenos didáticos e formas de gênese instrumental (RABARDEL, 1995) na aprendizagem mediada por instrumentos.

Observamos alguns exemplos de fenômenos e efeitos da transposição informática em alguns estudos em Educação Matemática. Na análise de Berger (2010), sobre como um sistema computadorizado para álgebra (CAS) pode ajudar ou limitar a atividade em situações de matemática, um dos efeitos limitantes foi relacionado à sintaxe do *software* em uma ferramenta para aproximar a raiz de um polinômio, por meio da linha de comando "*FindRoot*". A mobilização dessa ferramenta gerou dificuldades nos estudantes, dado que não tinha um sentido matemático claro para eles. Dificuldades com a relação entre a sintaxe (ou a semântica) dos *softwares* e o significado matemático atribuído também são relatadas por Drijvers *et al.* (2012) e Lagrange e Psycharis (2014).

Trouche e Drijvers (2010) mostraram que o uso de calculadoras gráficas promoveu mudanças no conhecimento matemático dos sujeitos, com significados de função privilegiando a representação gráfica e a emergência de efeitos limitadores por configurações inadequadas da janela e efeitos de visualização. No mesmo sentido, Roorda *et al.* (2016) concluíram que o uso desses artefatos pode estruturar uma aprendizagem de função baseada apenas em representações gráficas e numéricas, em detrimento de representações simbólicas (algébricas). Já nas pesquisas de García-Cuéllar e Martínez-Miraval (2018) e Orts, Boigues e Llinares (2018) restrições envolvendo a visualização de objetos na interface do *software* Geogebra foram relacionadas a como sujeitos raciocinaram sobre aproximações entre curvas.

Giraldo, Carvalho e Tall (2002) descreveram fenômenos relacionados ao que chamam de uma aparente contradição entre a representação computacional e a formulação teórica associadas a um objeto matemático: o conflito teórico-computacional. Segundo os autores, a natureza finita dos algoritmos computacionais limita a representação computacional e gera, em alguns casos, incoerências na representação de objetos como gráficos de funções, levando a equívocos. Ndlovu, Wessels e Villiers (2011) analisaram possíveis conflitos teóricos computacionais em duas tarefas concebidas com o *software Geometer's Sketchpad* para abordar a derivada e conceitos relacionados. Em uma delas, um conflito potencial é a ideia de uma ligação entre $-\infty$ e $+\infty$ ao 'deslizar-se' a variável dependente na função $f(x) = 1/x$ (Figura 12),;na outra, a ideia de que a reta secante se converte na reta tangente, conforme os pontos que as definem se aproximam (este conflito de fato gerou equívocos em estudantes no estudo de Zengin (2018))

Figura 12 – Conflito teórico computacional na função f(x)= 1/x



Fonte: Ndlovu, Wessels e Villiers (2011, p.9)

Também pode ser incluída na perspectiva da transposição informática uma discussão sobre as características inerentes ao meio computacional que têm o potencial de enriquecer a experiência e a produção de significados dos estudantes. Kaput (1992) sistematizou algumas dessas possibilidades e suas aplicações para abordar objetos matemáticos. Em funções, por exemplo, as possibilidades de representar variáveis dinamicamente e conectar sistemas de representação para promover ações dinâmicas e simultâneas entre esses sistemas são algumas das possibilidades das tecnologias computacionais caracterizadas pelo dinamismo, o que contribui para representar aspectos como a covariação e a continuidade.

Todos os aspectos abordados aqui podem, em algum nível, influenciar em como os estudantes exploram os objetos matemáticos e produzem significados. Balacheff (1993, p.6) concorda com esse poder de influência ao afirmar que, no contexto da aprendizagem, a interação do sujeito com o computador pode colocar a máquina como uma referência em relação ao conhecimento que é construído pelo sujeito.

Dessa forma, ao considerarmos o uso de tecnologias computacionais no ensino da matemática, indagamos sobre como poderíamos caracterizar aspectos relevantes da representação de objetos matemáticos no meio computacional e os possíveis efeitos associados a esses aspectos, em termos de ensino e aprendizagem. Em resposta, podemos sintetizar os aspectos discutidos nesta subseção como um caminho possível (porém sem esgotar as questões pertinentes) para analisar aspectos da transposição informática:

- Os aspectos da construção da tecnologia e da sua programação (universo interno, que não é o foco deste estudo);
- A sintaxe e a semântica envolvidas na representação computacional dos objetos matemáticos e na operação sobre eles na *interface*;
- As diferentes representações matemáticas dos conceitos explorados, suas características, os aspectos dos conceitos enfatizados e restringidos por essas representações, além dos objetos e ferramentas por meio dos quais se permite operar sobre elas na *interface*;
- As escolhas de *design* no processo de concepção da tecnologia;
- As possibilidades de ação, as restrições e os possíveis efeitos associados à exploração da tecnologia no contexto de situações dadas.

Nas subseções de análises *a priori*, serão realizadas análises das situações propostas no estudo que levam em conta algumas dessas questões e buscam relacionar potencialidades, limitações, escolhas de *design* e os possíveis efeitos no raciocínio covariacional dos sujeitos do estudo, ao explorarem as situações de covariação.

2.2.2 Transposição Informática de funções na perspectiva da covariação

Considerando o significado de covariação no desenvolvimento do conceito de função na história e no raciocínio covariacional nas teorizações de Thompson e Carlson (2017) e Confrey e Smith (1994), é esperado questionar-se sobre os aspectos envolvidos na representação dessa perspectiva por um meio computacional, de forma a dar suporte às conceitualizações dos estudantes de função com ênfase na covariação.

No contexto matemático das funções reais de variáveis reais, o significado de covariação envolve, como nas fases iniciais da história de função, a coordenação e a quantificação da forma como a variação em uma variável afeta a variação em outra variável. Isso envolve, para uma função *f*, coordenar a variação em *f(x)* conforme varia-se x e a quantificação dessa covariação por meio dos valores de Δx, $\Delta f(x)$ e da taxa de variação $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, que permite, tanto uma caracterização do comportamento variacional da função (LIMA, 2005), como uma interpretação covariacional do seu gráfico, na qual aspectos como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão são vistos, não mais de forma estática e pictórica, mas sim em função de comportamentos característicos da taxa de variação nesses pontos.

Esses aspectos bem como a centralidade da ideia da variação relativa e da taxa de variação trazem à cena a transição da taxa de variação média para a taxa de variação instantânea e, de forma mais complexa, para os conceitos do Cálculo (limites, derivada, continuidade, etc), fazendo emergir as ideias de continuidade e infinitesimal.

Dessa forma, em termos da transposição informática, está em jogo representar e operar com o objeto "variável" (variáveis reais) e a relação "variação", de forma interconectada, indo além da correspondência entre valores, na qual apenas se faz corresponder a um elemento da função a da sua imagem. De forma mais complexa, esse processo também envolve a representação e a operação sobre variáveis no contexto do contínuo e do infinitesimal, ao abordar os conceitos envolvidos no cálculo.

As linguagens de programação computacionais permitem a representação e operação das variáveis matemáticas e da variação. Segundo Kaput (1992), o meio dinâmico computacional é a casa natural das variáveis, o que torna a representação da variação como algo natural nesse meio. Em muitos *softwares*, essa representação dinâmica das variáveis tem sido implementada com base em objetos da geometria dinâmica. *Softwares* como *Cabri*, *Geogebra* e *The Geometer Sketchpad* são alguns exemplos.

A representação dinâmica da continuidade é um problema central para a transposição informática de função e da covariação, pois o computador opera por meio de algoritmos finitos (GIRALDO; CARVALHO; TALL, 2002). Ao deslizar um ponto que representa uma variável no eixo *x,* não trata-se de cobrir a reta real, porém de representar essa variação de forma a reduzir as diferenças entre os valores x_n e x_{n+1} de forma que seja imaginada a continuidade pela imagem de um deslize suave.

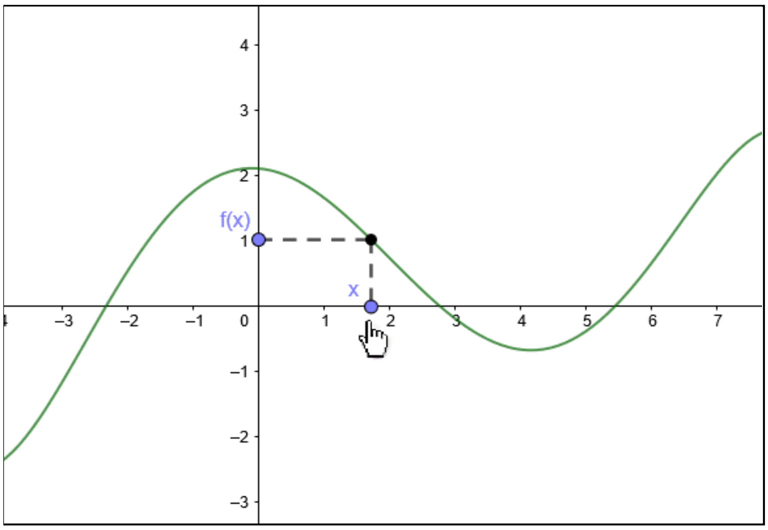
Da mesma forma, a construção da ideia do infinitesimal também recai na mesma problemática da finitude computacional. A abordagem dessa ideia se dá por meio da construção de inferências a partir de recursos computacionais que permitem representar aproximações sucessivas das variáveis no gráfico ou uma sequência de valores representados numericamente por várias casas decimais/algarismos significativos, nos quais fique sugerida a imagem de uma aproximação "tão perto quanto se queira".

Uma questão mais específica é como a representação de variáveis e da covariação entre elas é permitida, sobretudo considerando as especificidades dos diferentes sistemas de representação matemática. Cada registro de representação tem características que tornam mais explícitos aspectos específicos do conceito de função (GOLDENBERG, 1988; KAPUT, 1992). Além disso, quando esses registros são transpostos para o meio computacional, novas possibilidades são geradas em relação àquelas possíveis com papel e lápis. Dinamismo, interatividade e capacidade de armazenamento e processamento contribuem para o surgimento dessas novas possibilidades, como aponta Kaput (1992).

A operação sobre variáveis em gráficos, que nos ambientes com suporte limitado à covariação se dava apenas em termos da entrada de valores em *x* e saída de valores em f(x) ou meramente da exibição de valores do par (x,y), é permitida por meio da representação de variáveis no próprio gráfico, que incorporam o dinamismo como uma característica central para dar suporte à conceitualização de continuidade. Para isso é fundamental o papel da evolução na geometria dinâmica para representar a variação.

Para essa representação, no caso do sistema cartesiano ortogonal, constrói-se um ponto no eixo vertical (variável dependente) cuja variação esteja 'amarrada' a um ponto criado no eixo horizontal (variável independente), ambos associados entre si por uma regra de correspondência (modelo algébrico). A manipulação dinâmica de *x*, por meio do arraste do ponto associado, reflete simultaneamente na variação de y, permitindo o suporte à construção das relações entre a variação em *y* e a variação em *x* no gráfico da função (Figura 13).

Figura 13 – Manipulação de um ponto associado à variável



Fonte: Ilustrado pelo autor com o Geogebra

Já a representação tabular tem um grande valor, do ponto de vista da covariação, pois além de facilitar a abordagem numérica e discreta da função, permite estabelecer relações de: (i) correspondência de valores, entre x_n e $f(x_n)$; (ii) quantificação da variação, entre $f(x_n)$ e $f(x_{n+1})$; (iii) quantificação da covariação, na variação entre um $f(x_n)$ e um $f(x_{n+1})$ dada a variação entre x_n e um x_{n+1} (Figura 14), expresso pela taxa de variação.

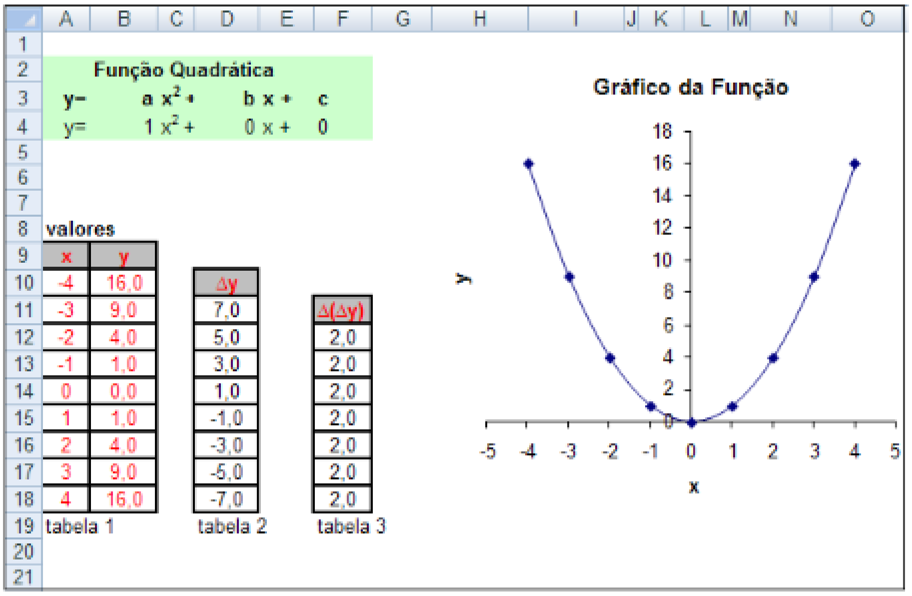
Figura 14 – Covariação na tabela

x	**f(x)**
x_1	$f(x_1)$
...	...
x_n	$f(x_n)$
x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
...	...

Fonte: Elaborado pelo autor

Em função, tabelas geralmente são construídas considerando incrementos uniformes em *x* (Δx constante), assim a coordenação da variação em f(x) com relação a *x* pode facilitar a percepção de um padrão de variação na função, como é possível observar no exemplo (Figura 15) com a função quadrática por Silva e Gitirana (2013).

Figura 15 – Uso da tabela na caracterização da função quadrática



Fonte: Silva e Gitirana (2013, p.8)

As ações possíveis na tabela implementada no meio computacional envolvem, não apenas a exibição de valores, mas a definição de entradas numéricas e literais nas colunas e linhas da tabela, permitindo definir relações entre os valores: como quantificar a variação com a diferença entre valores sucessivos de uma variável distribuídos em uma coluna. Além disso, a entrada de valores na tabela pode ser feita a partir de dados obtidos de forma simultânea por outras representações como o gráfico ou campos de entrada de texto/numéricos.

Modelos algébricos podem ser articulados a controles deslizantes que representam os coeficientes do modelo, permitindo abordar a covariação complexa entre os coeficientes a_1, a_2,..., a_n, as variáveis da função e o valor da variação entre elas.

Diversos *softwares* atualmente permitem a integração entre essas representações, de forma que as ações em cada uma delas são representadas de forma simultânea na outra (KAPUT, 1992). Essa característica, associada ao dinamismo, permite novas possibilidades de exploração da covariação de forma integrada, aproveitando o potencial de cada representação. Como exemplo, podem ser citados: (i) o potencial da articulação gráfico-tabela para explorar relações quantitativas da variação da função no gráfico; (ii) o potencial da articulação modelo algébrico-gráfico-tabela para explorar a influência dos coeficientes do modelo na variação da função.

Outras formas de representação que permitem o suporte à covariação são as animações com base em simulações, a integração de objetos da geometria dinâmica, as caixas de textos dinâmicos que exibem valores das variáveis, os controles deslizantes, etc.

Para além das possibilidades permitidas pela transposição da covariação no meio computacional, esse processo também envolve a emergência de restrições, além do, já descrito, problema da representação da continuidade e do infinitesimal que podem se converter em limitações e dificuldades na abordagem covariacional de função.

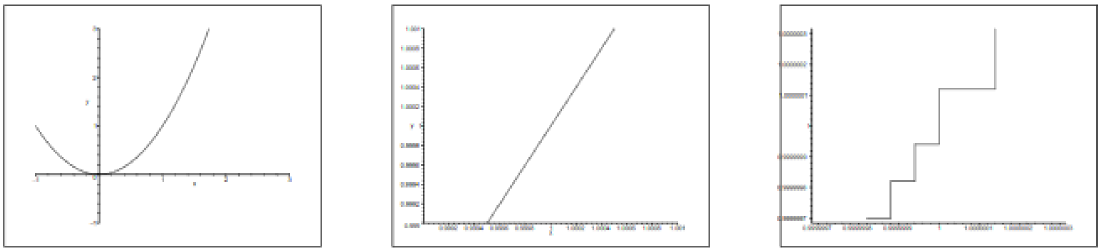
Com relação à representação das variáveis em *softwares* baseados na geometria dinâmica, a infraestrutura desta representação faz com que os objetos e relações funcionais sejam construídos a partir dos objetos da geometria dinâmica, o que abre espaços para equívocos relacionados à associação entre objetos de naturezas distintas e das suas propriedades. Um exemplo é o problema de associar o valor da variação Δy entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$, cujo sinal depende dos valores respectivos, com a distância entre os pontos associados a $f(x_1)$ e $f(x_2)$, que assume apenas valores positivos.

Um outro fenômeno importante pode surgir com a possibilidade de manipulação das variáveis por meio de pontos deslizantes na tela. Ao deslizar o ponto associado à variável, é possível construir uma concepção de variável como sendo um objeto que se move no eixo, porém, sem relação com a concepção de um objeto representativo de um conjunto de valores. De forma semelhante, a representação de retas e segmentos secantes e tangentes ao gráfico, comum em simulações dinâmicas da taxa de variação instantânea (derivada), pode levar a conclusões como: “a secante torna-se tangente” (ZENGIN, 2018; NDLOVU; WESSELS; VILLIERS, 2011).

Outros efeitos estão relacionados à natureza finita dos algoritmos computacionais (GIRALDO; CARVALHO; TALL, 2002) e podem gerar inconsistências na interface entre a representação e o conhecimento matemático: do ponto de vista de Balacheff (1993) fenômenos de visualização; do ponto de vista de Giraldo, Carvalho e Tall (2002) conflitos teórico-computacionais. Como por exemplo, no cálculo da variação entre valores suficientemente próximos, a limitação do número de dígitos na tela frequentemente exibe indevidamente o valor zero como resultado. A limitação que origina este efeito também tem efeitos na abordagem do infinitesimal, cuja representação da aproximação indefinida entre valores é essencial.

Já o uso do *zoom* no gráfico pode, em casos específicos, revelar a limitação da representação gráfica da curva, com a percepção de quebras da continuidade do gráfico (Figura 16).

Figura 16 – Conflito teórico computacional em gráficos de funções



Fonte: Giraldo, Carvalho e Tall (2002, p.4)

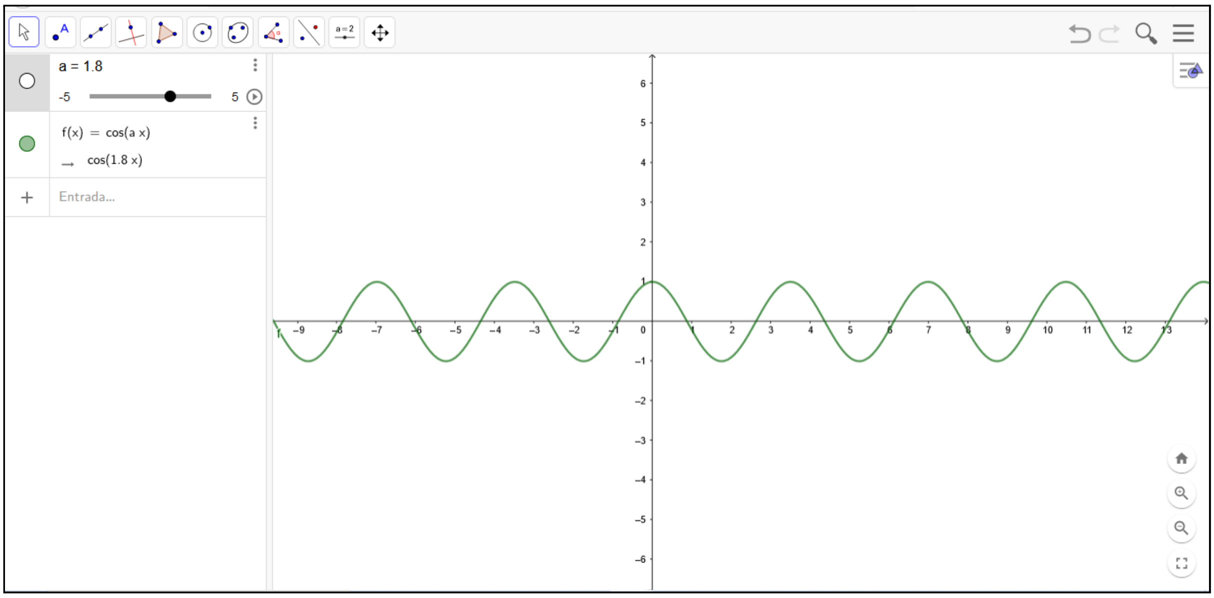
Alguns desses fenômenos e outros mais específicos serão objeto de uma análise da transposição informática no *software* Geogebra, a seguir.

2.2.3 Aspectos da transposição informática de funções e covariação no software Geogebra

O Geogebra (GEOGEBRA GROUP, 2015) é um *software* de 'matemática dinâmica' que pode ser usado para explorar conceitos em diversas áreas da Matemática, a saber: a geometria, a álgebra, a probabilidade, a estatística e outras, para o ensino e aprendizagem não só da matemática, mas das diversas ciências, tecnologias e engenharias.

O Geogebra Clássico é uma versão que integra a maioria dos recursos disponíveis no *software*, além de interconectar dinamicamente objetos simbólicos matemáticos em múltiplas janelas: gráfico, planilha, janela de álgebra, etc. Isto significa que, ao manipular um objeto simbólico em uma das janelas, o objeto associado a ele em outra janela também responde à ação, como, por exemplo, a articulação entre controles deslizantes associados ao coeficiente de uma função e o gráfico dessa função (Figura 17).

Figura 17 – Articulação entre controles deslizantes e o gráfico da função



Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

É possível definir funções no *software* escrevendo o modelo algébrico (com uma sintaxe específica) em função da variável *x* no campo de entrada ou na janela de álgebra. Uma vez definida, a função pode ser representada em um gráfico de coordenadas cartesianas, em uma planilha com configuração tabular, ou em um objeto, como um ponto no gráfico ou qualquer outro objeto ao qual possa ser atribuído o papel de variável.

Além de traçar gráficos pela definição do modelo algébrico, o Geogebra permite esboçar gráficos de funções usando as ferramentas caneta, função à mão livre, gerando um rastro de um ponto ou, no caso dos gráficos discretos, gerando uma lista de pontos a partir da planilha. Ferramentas como *zoom*, escala e malha podem ser mobilizadas para auxiliar a exploração do gráfico. Já outras ferramentas como otimização, raízes, inclinação e inspetor de funções permitem suporte à análise do gráfico, para a identificação de pontos especiais ou assistência à análise da variação, sendo relativamente mais recentes.

Apesar do nosso interesse em analisar aspectos da transposição informática da covariação no Geogebra, não é o nosso objetivo um aprofundamento em aspectos do universo interno relacionados à programação computacional, visto que esses aspectos fogem à nossa área de concentração. Nossa ênfase principal é observar como esses objetos matemáticos são representados ao nível de interface e como se dão as restrições e as possibilidades de ação sobre eles no Geogebra. Dessa forma, destacamos algumas características constitutivas do *software* que podem gerar efeitos importantes na conceitualização de objetos matemáticos.

No Geogebra, uma característica essencial para abordar a covariação no gráfico é a possibilidade de representar variáveis por meio de objetos (como pontos) e atribuir dinamismo a esses objetos. No caso dos pontos, é possível criar um ponto diretamente sobre um eixo que o programa definirá como no seguinte exemplo: A = Ponto(Eixo X). Além da representação no próprio eixo, a variável também pode ser atrelada a um controle deslizante ou a um objeto de uma construção que permita a variação.

A partir do modelo algébrico que representa a função, pode-se definir um ponto no eixo *y*, como representação da variável dependente em relação à variável em *x*: B = (0, f(x(A))) e, assim, tem-se a representação de duas variáveis em covariação por meio da função f. Conforme varia-se a variável em *x*, a variável em *y* varia simultaneamente. Um terceiro ponto, C = (x(A), f(x(A))) pode representar o par (x, f(x)).

Como já destacado anteriormente, a infraestrutura da geometria dinâmica pode contribuir, por um lado, para representar e manipular variáveis dinamicamente em funções, mas, por outro lado, pode envolver restrições pela associação com as especificidades matemáticas dos objetos da geometria, o que deve ser gerenciado a fim de evitar construções conceituais equivocadas.

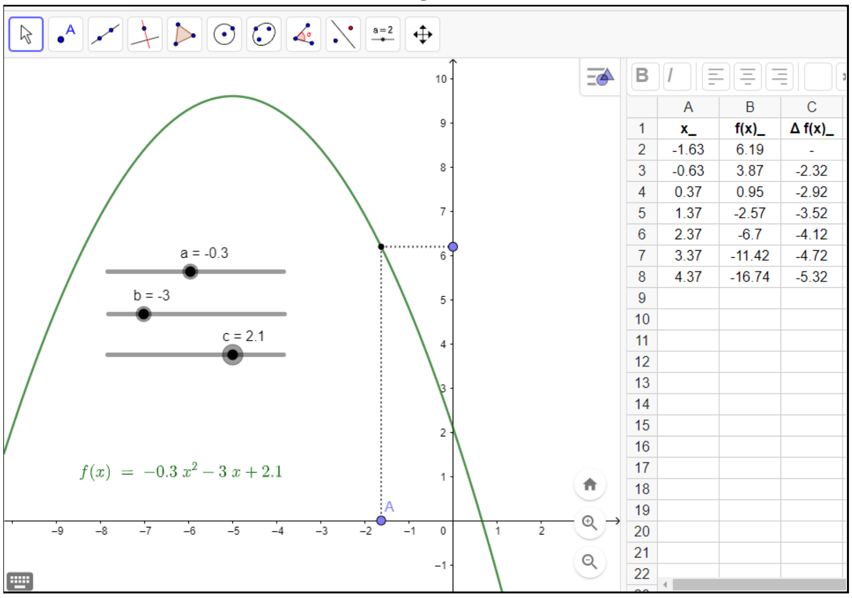
Outra característica destacada no Geogebra é a conexão dinâmica e simultânea entre as representações que permite, por exemplo, variar o valor de uma variável em um controle deslizante e observar a variação do valor da variável simultaneamente na planilha ou em uma caixa de texto dinâmico. Aliado a essa característica – por meio da flexibilidade do *layout* da tela – o Geogebra permite exibir duas ou mais janelas simultaneamente, o que possibilita manipular variáveis em uma janela (representação A) e observar a sua variação na outra janela (representação B). Essa possibilidade permite coordenar a covariação em duas representações distintas, cada uma explicitando um aspecto específico.

Conceber a covariação no gráfico requer uma interpretação em termos da variação no eixo *y* conforme *x* varia. Essa análise pode se beneficiar do uso da planilha, pois a representação tabular, como vimos na subseção anterior, permite relacionar e quantificar a variação em *y* em termos da variação em *x*. No Geogebra, a conexão entre o gráfico e a planilha permite que pares de valores (*x,y*) em gráficos de funções sejam facilmente exportados para a planilha, formando uma tabela; por outro lado, uma tabela de valores de *x* e *y* seja exportada para o gráfico como uma sequência de pontos.

A tabela, assim como o gráfico, pode ganhar um caráter dinâmico ao conceber um ponto P no gráfico para representar a variável *x* e inserir-se na planilha a sua coordenada em *x* e a correspondente a f(x) na planilha (por exemplo, na célula A1 define-se x(P) e na célula B1 define-se f(A1)). Ao variar *x* no gráfico, os valores da planilha variam simultaneamente.

A variação em *y* pode ser quantificada por meio de uma coluna adicional que calcule as diferenças sucessivas entre os valores de f(x), considerando a variação em *x* constante. Da mesma forma, é possível dinamizar a tabela de valores de uma função ao dinamizar, também, o modelo algébrico da função utilizando controles deslizantes. A Figura 18, a seguir, reúne esses exemplos.

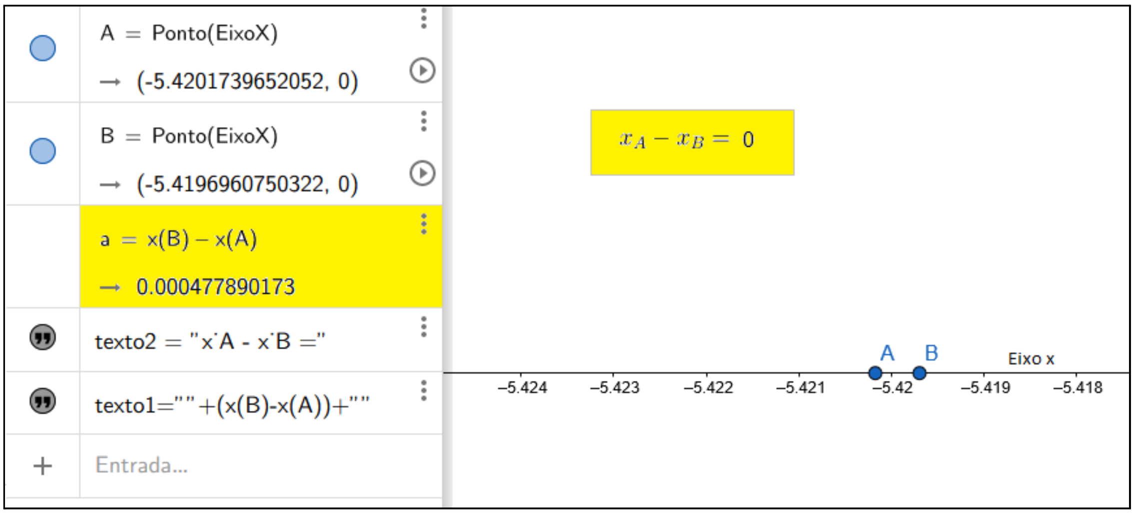
Figura 18 – Conexão dinâmica e simultânea entre o gráfico, a tabela e o modelo algébrico no Geogebra



Fonte: Criado pelo autor com o Geogebra

Por outro lado, a limitação da quantidade de dígitos na tela, comum nas tecnologias computacionais, é uma restrição importante. Na Figura 19, a aproximação decimal leva à exibição da diferença x_A- x_B como igual a zero, embora na janela de álgebra o valor seja diferente e no eixo *x* os pontos A e B aparecerem em coordenadas distintas, configura-se assim uma restrição do tipo conflito teórico-computacional (GIRALDO; CARVALHO; TALL, 2002). Essa limitação é particularmente problemática quando a variação em um mesmo eixo se dá por valores relativamente próximos (em relação à capacidade do *software*), como na exploração dos conceitos de limites e derivadas.

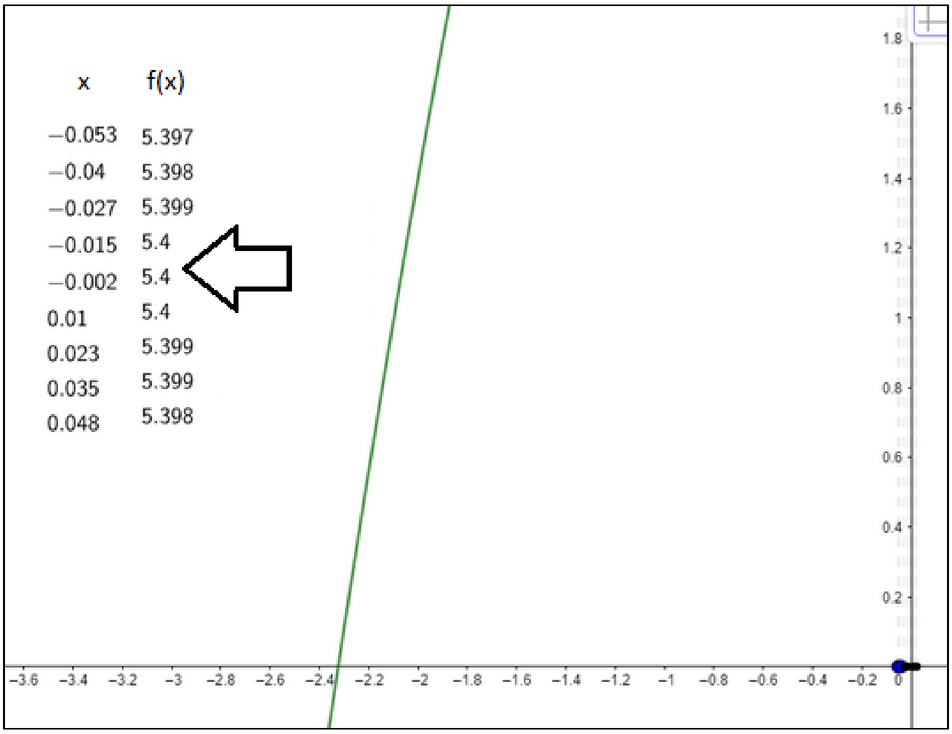
Figura 19 – Inconsistências no valor da variação pela limitação de dígitos no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor com o software Geogebra.

Na Figura 20, em outro exemplo relacionado à aproximação decimal, uma função quadrática exibe três valores iguais de f(x) para valores distintos de *x*, mais um conflito teórico-computacional (GIRALDO; CARVALHO; TALL,2002).

Figura 20 – Conflito teórico-computacional na representação da função quadrática



Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

No contexto das relações entre os processos de *design* e a transposição informática, ao considerar-se um primeiro nível de análise, a transposição informática tem por protagonista o especialista que traduz os aspectos do conceito matemático em termos de lógica de programação e construção do *software*.

Este especialista, como se verá na perspectiva da Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), tem um papel de forte influência na estruturação da atividade do estudante que utilizará o *software* para aprender.

Porém, quando um *software* qualquer permite a concepção de materiais didáticos no seu próprio ambiente – este é o caso do *software* Geogebra, parece emergir a possibilidade de um segundo nível de transposição informática relacionada ao *design* do material didático pelo ator que o concebe, neste caso o professor ou o pesquisador, que pode conceber novos objetos, dar novos significados e *affordances*[26] aos objetos (variáveis sendo representadas por pontos dinâmicos, por exemplo), incorporar objetos externos ao software, como imagens, áudios ou vídeos, entre outras possibilidades.

Essa possibilidade do *software* Geogebra de permitir um *design* de materiais didáticos, e mesmo de aplicativos no próprio ambiente do *software,* levanta a questão da possibilidade de mais de um ator envolvido na programação do artefato (material didático, aplicativo, entre outros): os engenheiros ou programadores oficiais do *software* e os programadores em um nível secundário (o professor que concebe materiais didáticos, o pesquisador ou mesmo um usuário qualquer) que desenham novas implementações e modificam o artefato.

Assim, um material ou aplicativo desenhado no Geogebra pode ter mais de um nível de programação: a do *designer* primário do *software*, a dos intermediários e, finalmente, a do *designer* do material/aplicativo. O artefato que será utilizado pelo estudante sofreu a influência de uma comunidade de *designers* e professores e carrega em si as influências das suas concepções dos objetos matemáticos.

Para a análise dos resultados desta pesquisa, nos interessamos, particularmente, pela descrição da programação dos materiais que serão usados pelos estudantes no experimento com o Geogebra, feita nas análises *a priori.*

---

[26] Na teorização de Gibson (1966, 1979), as affordances de algo (objeto, ambiente) se referem às propriedades desse algo e a como elas são oferecidas ao indivíduo, para a sua ação.

A criação de objetos e ferramentas por meio da programação ou pelo uso de funções pré-definidas no Geogebra é possível inclusive para a exploração pelos estudantes, o que permite que eles mobilizem o seu conhecimento matemático para criar esses objetos. Por outro lado, essa possibilidade traz consigo restrições originadas nas relações entre a sintaxe da programação no Geogebra e os significados matemáticos dos estudantes, uma tensão apontada nos estudos de Lagrange (2014) e Lagrange e Psycharis (2014). Os estudantes precisam relacionar a sintaxe e a semântica do software com as características dos objetos matemáticos representados.

Uma análise de transposição informática pode ser muito abrangente, dados os diversos aspectos envolvidos na representação matemática no meio computacional. Embora discutimos, nesta seção, alguns aspectos dessa transposição no Geogebra, uma análise mais específica será feita na análise *a priori* das situações do experimento da pesquisa que foram baseadas em materiais concebidos no Geogebra.

Com relação às possíveis nomenclaturas que são adotadas neste estudo nas referências ao Geogebra, às ferramentas do Geogebra e aos materiais concebidos com base no Geogebra e para evitar confusões, delimitamos a que objetos nos referimos quando utilizamos os seguintes termos:

- O artefato (objeto da gênese instrumental na pesquisa) : o *software* Geogebra *Classic*;
- Ferramenta (do Geogebra): o conjunto de artefatos integrados ao Geogebra, associados a uma função específica no *software*. Exemplos: controle deslizante, planilha, sistema de coordenadas, segmentos dinâmicos, etc.
- Material (do Geogebra): termo utilizado pelos desenvolvedores (Portal Geogebra) para se referir às construções (aplicativos) concebidos com o Geogebra.

Em alguns casos, a referência a um dos termos (um material, por exemplo) não necessariamente implicará em que o objeto referido não possa caracterizar outro termo (uma ferramenta, por exemplo). Essa delimitação de nomenclatura tem mais foco na leitura do texto de forma clara.

2.3 A ABORDAGEM INSTRUMENTAL

Nesta seção abordaremos a teorização de Rabardel (1995) sobre a Abordagem Instrumental a partir dos seus conceitos e princípios fundamentais, a noção de gênese instrumental e a sua relação com o conceito de esquemas (VERGNAUD, 2009), finalizando com os efeitos do uso de instrumentos na estruturação da atividade dos sujeitos.

2.3.1 Princípios da Abordagem Instrumental

Como ponto de partida para descrever a Abordagem Instrumental, Rabardel (1995) apresenta uma visão do homem e da sua atividade no que ele descreve como uma perspectiva tecnocêntrica do *design* e da atividade humana com artefatos, caracterizada por colocar a técnica no centro da análise, em detrimento do homem. Segundo o autor, essa visão evoluiu com o tempo. Inicialmente, no *design* de sistemas automáticos, a ideia da necessidade de exclusão do humano na concepção e operacionalização desses sistemas era dominante. Posteriormente – em uma nova visão – o homem é incluído como um mal necessário, o que se configura uma perspectiva ainda pessimista da presença humana e que tinha como objetivo limitar os erros advindos dessa presença.

A Abordagem Instrumental emerge a partir da insuficiência de uma visão meramente tecnocêntrica ou antropocêntrica na análise da atividade humana com instrumentos e de uma proposta de articulação entre essas duas visões. Rabardel (1995) sintetiza diferentes abordagens psicológicas sobre técnicas e artefatos e, ainda, uma evolução da Psicologia para atender às necessidades de avançar teoricamente sobre as relações humanas com artefatos e técnicas; tanto do ponto de vista do design, quanto do uso de artefatos.

Nessa perspectiva renovada, os artefatos são vistos, não como meros objetos, mas sim como ferramentas mediadoras do uso que transformam e são transformados pela atividade. Eles moldam o pensamento e estruturam a atividade, gerando, assim, novos problemas e se mostram como ferramentas para a superação desses problemas.

Para o desenvolvimento teórico da Abordagem Instrumental, Rabardel parte de uma definição psicológica da noção de instrumento como uma entidade mista formada por um artefato e um esquema, Nessa designação, o artefato é definido[27] como um objeto suscetível à utilização, desenvolvido para se inscrever em atividades com alguma finalidade. Assim, a relação instrumental é constituída por três pólos: o sujeito, o instrumento e o objeto (para o qual é dirigida a atividade com o instrumento).

Esse modelo propõe ir além da interação entre sujeito e objeto (S-O d) e inclui as relações entre: sujeito e instrumento (SI); instrumento e objeto (IO); sujeito e objeto mediada pelo instrumento (S-O m). Para Rabardel, essa caracterização triádica da atividade com instrumentos está presente, explícita ou implicitamente, em muitas abordagens psicológicas citadas por ele e também na própria teorização de Vygotsky.

O instrumento media relações entre o sujeito e o objeto em duas orientações:

> - no sentido do objeto em relação ao sujeito uma mediação que chamaremos de mediação epistêmica, onde o instrumento é um meio que permite o conhecimento do objeto;
> - no sentido do sujeito em direção ao objeto uma mediação pragmática na qual o instrumento é um meio de uma ação transformadora (num sentido amplo incluindo controle e regulação) dirigida para o objeto. (RABARDEL, 1995, p.72, tradução nossa)[28]

Rabardel (1995) apresenta uma primeira noção de ‘esquemas de utilização’ como sendo elementos manifestados de forma relativamente estável na ação e na atividade do sujeito nos usos de um artefato. Posteriormente, o autor analisa como a ideia de esquema evoluiu com base em diferentes autores; porém, tendo como foco principal a noção piagetiana e nos processos de assimilação e acomodação envolvidos no desenvolvimento dos esquemas.

2.3.2 A noção de esquema de Vergnaud na Abordagem Instrumental

Com base na construção de Piaget, e fornecendo uma teorização que leva em conta a especificidade dos saberes, Vergnaud (2009) – na sua Teoria dos Campos Conceituais –

---

[27] C’est donc le terme d’artefact que nous utiliserons désormais dans une optique de désignation “neutre” ne spécifiant pas un type de rapport particulier à l’objet. Cependant nous lui donnerons un contenu plus précis que celui de “chose ayant subi une transformation d’origine humaine”. En effet, ce qui nous intéresse, c’est la chose susceptible d’un usage, élaborée pour s’inscrire dans des activités finalisées. (RABARDEL, 1995, p.49)

[28] - dans le sens de l’objet vers le sujet une médiation que nous qualifierons de médiation épistémique où l’instrument est un moyen qui permet la connaissance de l’objet ; - dans le sens du sujet vers l’objet une médiation pragmatique où l’instrument est moyen d’une action transformatrice (en un sens large incluant le contrôle et la régulation) dirigée vers l’objet. (RABARDEL, 1995, p.72)

caracteriza o esquema como um elemento fundamental na forma operacional do conhecimento: “um esquema é a organização invariante da atividade para uma classe de situações” (VERGNAUD, 2009, p. 88, tradução nossa).[29]

A ideia de situação está relacionada ao sentido psicológico desse termo e, como Vergnaud (2009) afirma, as situações e os esquemas estão intimamente relacionados:

> A relação dialética entre situações e esquemas é tão intrincada que às vezes se usa uma expressão relativa a situações para se referir a um esquema, por exemplo, salto em altura ou resolução de equações com duas incógnitas, bem como uma expressão relativa a esquemas para se referir a uma situação, por exemplo situação de regra de três (a regra de três é um esquema, não uma situação).[30] (p. 88, tradução nossa)

Segundo Vergnaud, apesar do seu caráter invariante explicitado na definição, os esquemas também devem envolver a possibilidade de adaptação a novas situações, caracterizando, assim, o desenvolvimento do conhecimento. O autor fornece uma estrutura analítica, que inclui aspectos intencionais, gerativos, epistêmicos e computacionais dos esquemas:

> -O aspecto intencional dos esquemas envolve um objetivo ou vários objetivos que podem ser desenvolvidos em sub-objetivos e antecipações.
> - O aspecto gerativo dos esquemas envolve regras para gerar atividade, ou seja, as sequências de ações, coleta de informações, e controles.
> - O aspecto epistêmico dos esquemas envolve invariantes operacionais, a saber conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Sua principal função é pegar e selecionar as informações relevantes e inferir os objetivos e regras.
> - O aspecto computacional envolve possibilidades de inferência. Eles são essenciais para entender que o pensamento é composto de uma intensa atividade de computação, mesmo em situações aparentemente simples; ainda mais em novas situações. Precisamos gerar objetivos, sub-objetivos e regras, e também propriedades e relações que não são observáveis. (VERGNAUD, 2009, p. 88, tradução nossa)[31]

---

[29] …a scheme is the invariant organization of activity for a certain class of situations… (VERGNAUD, 2009, p. 88)

[30] The dialectical relationship between situations and schemes is so intricate that one sometimes uses an expression concerning situations to refer to a scheme, for instance high jumping, or solving equations with two unknowns, as well as an expression concerning schemes to refer to a situation, for instance rule of three situations (the rule of three is a scheme, not a situation). (VERGNAUD, 2009, p.88)

[31] - The intentional aspect of schemes involves a goal or several goals that can be developed in subgoals and anticipations. - The generative aspect of schemes involves rules to generate activity, namely the sequences of actions, information gathering, and controls. - The epistemic aspect of schemes involves operational invariants, namely concepts-in-action and theorems-in-action. Their main function is to pick up and select the relevant information and infer from it goals and rules. - The computational aspect involves possibilities of inference.

Para Vergnaud, os aspectos gerativo e epistêmico dos esquemas são centrais nesta definição. Os invariantes operacionais constituem uma importante parte dos esquemas e abrigam: (i) os teoremas-em-ação, proposições relacionadas ao conhecimento do saber manifestadas na ação dos sujeitos, (ii) os conceitos-em-ação, que se referem ao saber e são essenciais para a construção de teoremas-em-ação. Para Rabardel (1995), essa conceitualização de esquemas interessa à abordagem instrumental, uma vez que permite "definir as características das situações realmente levadas em conta pelo sujeito, sejam elas situações familiares, para as quais já estão constituídos invariantes operacionais, ou situações em que sua elaboração está em andamento" (RABARDEL, 1995, p.88, tradução nossa)[32].

2.3.3 A noção de instrumento

Com base no desenvolvimento da noção de esquema, Rabardel retorna à noção de esquema de utilização para aprofundá-la e tomá-la como um elemento central para a construção de uma definição psicológica de instrumento. Segundo o autor, os esquemas de utilização (Sh.U.) estão relacionados a duas dimensões da atividade que distinguem dois níveis de esquemas: (i) a dimensão cujas ações são relacionadas à gestão das características e propriedades peculiares do artefato, associam-se aos esquemas de uso (Sh. Us.); (ii) a dimensão cujas ações são orientadas para o objeto da atividade, por meio do uso de artefatos que associam-se aos esquemas de ação instrumentada (Sh. A. I).

É importante destacar que a distinção entre esquemas proposta por Rabardel (1995) não se baseia propriamente nos esquemas em si, mas no *status* que esses esquemas assumem na atividade. Assim, o *status* do esquema (Sh.U. ou Sh.A.I.) pode mudar a depender da situação em jogo.

Um terceiro nível de esquema, dentro dos esquemas de utilização, é, justamente, o esquema de atividade coletiva instrumentada (Sh.A.C.I) que está relacionado à atividade

---

They are essential to understand that thinking is made up of an intense activity of computation, even in apparently simple situations; even more in new situations. We need to generate goals, subgoals and rules, also properties and relationships that are not observable. (VERGNAUD, 2009, p.88)

[32] L'intérêt de l'analyse en termes d'invariants opératoires réside, dans notre perspective instrumentale, en ce qu'elle permet de cerner les caractéristiques des situations réellement prises en compte par le sujet, qu'il s'agisse de situations familières pour lesquelles les invariants opératoires sont déjà constitués, ou de situations où leur élaboration est en cours. (RABARDEL, 1995, p.88).

coletiva de sujeitos compartilhando o mesmo instrumento ou classe de instrumentos, ou ainda, com a integração de atividades individuais com um objetivo coletivo em comum.

Uma questão importante levantada por Rabardel, nessa perspectiva, é que os esquemas têm uma dimensão particular que os relaciona de forma única a um sujeito específico; porém, também possuem uma dimensão social, decorrente da sua elaboração dentro de um processo e um contexto social influenciado por outros usuários e projetistas, por exemplo.

Algumas relações se mostram importantes até aqui para Rabardel. A primeira é a relação entre esquema de utilização, artefato e objeto: os esquemas são os organizadores da utilização do artefato como meio para agir sobre o objeto. A segunda é a relação entre esquema e situação, pois os esquemas são mobilizados em função de contextos específicos de cada situação.

Com base nessa construção, o autor formula a noção psicológica de instrumento:

> Pensamos que devemos definir o instrumento como uma entidade mista, que é ao mesmo tempo sujeito e objeto (no sentido filosófico do termo): o instrumento é uma entidade composta, que inclui um componente de artefato (um artefato, uma parte do artefato ou um conjunto de artefatos) e um componente de esquema (o(s) esquema(s) de utilização, frequentemente vinculado(s) a esquemas de ação mais gerais). Um instrumento é, portanto, composto por dois elementos:
> - por um lado, um artefato, material ou simbólico, produzido pelo sujeito ou por outros;
> - por outro lado, um ou mais esquemas de utilização associados, resultantes de uma autoconstrução, autonomia ou apropriação de ShSU já formados externamente a ele. (RABARDEL, 1995, p.95, tradução nossa)[33]

Nessa conjuntura, artefato e esquema, ao mesmo tempo que estão associados na relação instrumental, são relativamente independentes: um mesmo esquema pode ser aplicado a múltiplos artefatos em uma mesma classe; um mesmo artefato pode ser aplicável a diferentes esquemas de uso, resultando em diferentes entidades instrumentais. Além disso, para Rabardel, o instrumento pode ter caráter mais efêmero quando relaciona-se apenas com

[33] Nous pensons qu'il faut définir l'instrument comme une entité mixte, qui tient à la fois du sujet et de l'objet (au sens philosophique du terme) : l'instrument est une entité composite qui comprend une composante artefact (un artefact, une fraction d'artefact ou un ensemble d'artefacts) et une composante schème (le ou les schèmes d'utilisation, eux -mêmes souvent liés à des schèmes d'action plus généraux). Un instrument est donc formé de deux composantes :
- d'une part, un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres ;
- d'autre part, un ou des schèmes d'utilisa tion associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou d'une appropriation de ShSU déjà formés extérieurement à lui. (RABARDEL, 1995, p.95)

aspectos particulares da situação com as quais o sujeito confronta-se, ou pode ter caráter mais permanente e ser preservado ao longo do tempo.

2.3.4 A gênese instrumental

A intencionalidade do sujeito na elaboração e reestruturação dos seus instrumentos, para além de um fenômeno de desvio de função do artefato, deve ser vista, segundo Rabardel (1995), como um processo de gênese instrumental.

Rabardel define a gênese instrumental como um conjunto de processos que são, ao mesmo tempo, direcionados ao sujeito (instrumentação) e ao artefato (instrumentalização):

> Os **processos de instrumentalização** dizem respeito ao surgimento e evolução dos componentes artefactuais do instrumento: seleção, agrupamento, produção e instituição de funções, desvios e catacreses, atribuição de propriedade, transformação do artefato (estrutura, funcionamento, etc.) que prolongam as criações e realizações de artefatos cujos limites são, portanto, difíceis de determinar;
> Os **processos de instrumentação** estão relacionados ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por meio da acomodação, coordenação, combinação, inclusão e assimilações recíprocas, a assimilação de novos artefatos para esquemas já constituídos, etc. (RABARDEL, 1995, p.111, tradução nossa)[34]

Os processos de instrumentação e instrumentalização estão relacionados ao sujeito; o que os distingue, segundo Rabardel, é a orientação de cada um desses processos.

Rabardel define a instrumentalização como “um processo de enriquecimento das propriedades do artefato pelo sujeito” (RABARDEL, 1995, p.114) que pode ou não envolver uma transformação material do componente do artefato. Mesmo quando não há essa transformação, a instrumentalização pode ocorrer em termos de um processo de enriquecimento das propriedades do artefato pelo sujeito que lhe atribui funções. Rabardel

---

[34] Les processus d'instrumentalisation concernent l’émergence et l’évolution des composantes artefact de l’instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l’artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d’artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer;
• Les processus d’instrumentation sont relatifs à l’émergence et à l’évolution des schèmes d'utilisation et d’action instrumentée: leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l’assimilation d’artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc. (RABARDEL, 1995, p.111)

distingue dois níveis de atribuição de funções: local, relacionada a uma ação singular e suas consequências, uma instrumentalização momentânea; permanente, quando a função adquirida é conservada.

A instrumentação é constituída de processos que envolvem:

> A gênese dos esquemas, a assimilação de novos artefatos aos esquemas (dando assim um novo sentido aos artefatos), a acomodação de esquemas (contribuindo para suas mudanças de significado), são constitutivos dessa segunda dimensão da gênese instrumental: os processos de instrumentação. (RABARDEL, 1995, p.117, tradução nossa)[35]

Rabardel enfatiza que a gênese instrumental provoca uma atividade representativa essencial para estruturar, controlar e regular as ações com o instrumento. Essa atividade, e por consequência a natureza dessas representações, é direcionada à ação do sujeito com o instrumento. O autor também aponta que a gênese da representação do artefato, como instrumento, requer uma descoberta progressiva das propriedades e características do artefato. No entanto, o teórico defende que as representações não dizem respeito apenas ao artefato, mas aos “três pólos da tríade (sujeito, instrumento, objeto), as interações entre eles, os elementos do contexto relevantes para a ação e à própria ação” (RABARDEL, 1995, p. 126, tradução nossa).

2.3.5 Gênese instrumental e o *design* de artefatos

A perspectiva instrumental ressignifica a relação entre a concepção e o uso de artefatos ao estabelecer um ciclo iterativo entre esses processos. Rabardel defende um ponto de vista fundamental sobre essa relação: por mais que os projetistas e criadores antecipem usos no processo de *design*, a complexidade e a diversidade de possibilidades são tão amplas que os usos potenciais emergem apenas no uso efetivo, pelos usuários e/ou na sua gênese instrumental.

Além da própria essência da abordagem instrumental como uma propulsora dessa nova perspectiva, as possibilidades das tecnologias contemporâneas também têm, segundo

---

[35] La genèse des schèmes, l’assimilation de nouveaux artefacts aux schèmes (donnant ainsi une nouvelle signification aux artefacts), l’accommodation des schèmes (contribuant à leurs changements de signification), sont constitutifs de cette seconde dimension de la genèse instrumentale : les processus d’instrumentation.

Rabardel, contribuído para promover processos de instrumentalização dos sujeitos com os artefatos. Tal perspectiva permite que esses sujeitos ganhem um papel ativo na concepção de novas funcionalidades e nas transformações do artefato. O autor usa a distinção entre funções constitutivas (aquelas que são inscritas na concepção inicial do artefato pelos criadores) e as funções constituídas (aquelas atribuídas pelos sujeitos no processo de instrumentalização).

Rabardel também vê esse papel de alimentador do *design* nos processos de instrumentação. Para ele, os modos de uso previstos pelos criadores são singularizados de acordo com as especificidades das situações e dos indivíduos, assim, a evolução dos esquemas decorrente do uso desses indivíduos prefiguram novos modos de uso a serem implementados no artefato.

A relação entre a concepção e o uso revela uma tensão entre as restrições e as possibilidades do artefato pré-configuradas no seu *design* que organizam a atividade, com as ações do sujeito ao instrumentalizar o artefato e adaptá-lo ao seu próprio uso, implicando, assim, em reestruturações da atividade e transformações do próprio artefato. O que leva o autor a discutir os efeitos estruturantes do uso de artefatos na atividade e o problema da transparência.

2.3.6 Efeitos do uso de instrumentos na atividade e o problema da transparência

Rabardel (1995) analisa como o uso de instrumentos estrutura a atividade dos sujeitos por meio de dois aspectos: as restrições próprias dos artefatos e o campo de possibilidades de recursos para a ação permitido por esses artefatos. Além disso, o autor analisa formas e condições nas quais essa estruturação se dá.

O autor aponta que as restrições próprias dos artefatos, isto é, suas características específicas, estruturam e transformam tarefas, influenciam nas estratégias e restringem a organização da ação dos usuários, embora esses efeitos sejam limitados. Por outro lado, os recursos disponibilizados no artefato para a ação dos sujeitos podem contribuir para a expansão das possibilidades de ações. As duas dimensões dos efeitos estruturantes dos artefatos na atividade são nomeadas por Rabardel de “atividade requerida” e de “abertura do campo de possibilidades”:

> A reorganização, recomposição da atividade vinculada ao instrumento inscreve-se em duas direções opostas, mas complementares: por um lado, deve-se aos diversos tipos de restrições que condicionam a ação dos sujeitos, por outro, está pelo menos fundamentalmente ligada às possibilidades de ação que são oferecidas aos sujeitos. São essas duas dimensões dos efeitos estruturantes dos artefatos sobre a atividade que denominamos "atividade requerida" e "abertura do campo de possibilidades". (RABARDEL, 1995, p. 139, tradução nossa)[36]

A atividade requerida é caracterizada pelo autor como a consideração e o processamento, pelo sujeito, das restrições que são impostas na atividade pelo artefato. É necessária a identificação, a compreensão e a gestão dessas restrições, às quais Rabardel nomeia "restrições de modalidade de existência". O autor descreve, ainda, uma segunda classe de restrições que é relacionada à natureza dos objetos da atividade e às possíveis transformações sobre esses objetos: as "restrições de finalização". Por fim, um terceiro tipo de restrição é caracterizada como: "restrições de estruturação da ação", elas consistem em pré-estruturações, mais ou menos, explícitas das ações possíveis dos sujeitos e dos modos de operação implementados nos artefatos pelos *designers*.

As formas como os sujeitos interagem com os artefatos também permitem distinguir diferentes modos de estruturação da atividade. Segundo Rabardel, ela pode ser: (i) passiva, quando a ação do sujeito é estruturada em termos de uma forma de constituição própria do artefato (passiva simples) ou se encaixa em uma organização procedimental do processo, à qual o sujeito deve seguir (passiva organizada); (ii) ativa, quando o artefato busca intencionalmente influenciar a atividade do sujeito e modificar o seu funcionamento.

Porém, o autor chama a atenção para o fato de que a atividade é "relativamente requerida", visto que os efeitos estruturantes não são limitados apenas aos artefatos em si, mas estão inseridos em um processo instrumental. Esse processo, por sua vez, é coordenado com esquemas de utilização em um contexto mais abrangente que envolve elementos para além do artefato e do próprio sujeito:

> É, portanto, compreensível que a ideia de atividade requerida deva ser qualificada: o artefato não pode determinar estritamente a atividade, por um lado, porque é apenas um dos elementos de pré-estruturação ao lado de, e

[36] La réorganisation, recomposition de l'activité liée à l'instrument s'inscrit dans deux directions opposées mais complémentaires : d'une part elle tient aux différents types de contraintes qui conditionnent l'action des sujets, d'autre part, elle tient, au moins aussi fondamentalement aux possibilités d'action qui s'offrent aux sujets . Ce sont ces deux dimensions des effets structurants des artefacts sur l'activité que nous avons nommées "activité requise" et "ouverture du champ des possibles" (RABARDEL, 1995, p. 139).

> coordenado com esquemas de utilização; por outro lado, porque muitas outras fontes de estruturação da atividade existem para além dos instrumentos, a começar pelas tarefas e pelos métodos operacionais prescritos; enfim, porque a estruturação da atividade é um processo contínuo pelo qual o sujeito se inscreve na singularidade das situações (das quais participa) e a administra. (RABARDEL, 1995, p. 143, tradução nossa) [37]

> (...) é a tradução dos compromissos estabelecidos pelo sujeito entre as restrições impostas a ele de fontes múltiplas: o artefato, a tarefa, o ambiente, suas próprias habilidades e capacidades, etc., dada a sua finalização e seu compromisso com a situação. Isso leva a pensar a atividade requerida como um conceito relativo, uma tensão entre dois pólos: as restrições e os recursos vinculados à associação do artefato e, mais geralmente, do instrumento com a ação e o próprio sujeito psicológico, ator singular e intencional. (RABARDEL, 1995, p. 145, tradução nossa)[38]

Outra característica destacada por Rabardel, ao caracterizar a atividade relativamente requerida, é que a atividade com artefatos demanda uma análise própria para cada sujeito específico.

Um conceito relevante para a análise da atividade com instrumentos é a concepção da transparência; ou seja, da visibilidade do artefato pelo sujeito na atividade. O autor argumenta que na relação instrumental, quando o sujeito mobiliza o instrumento, as propriedades e os elementos que têm relevância para a ação são mais relevantes que aquelas que constituem perceptualmente o artefato em si.

Nessa lógica de argumentação, são descritas duas metáforas relacionadas à ideia de transparência: caixa preta, baseada no princípio da invisibilidade do sistema técnico que constitui o artefato e caixa de vidro, por outro lado, baseada na visibilidade do artefato. Segundo Rabardel, na metáfora da caixa preta, o artefato media a relação do sujeito com o objeto da atividade sem causar-lhe qualquer obstáculo, isto é, sua tecnologia é invisível e o sujeito não precisa ter conhecimento consciente dela quando o artefato é um meio para agir

---

[37] On conçoit dès lors que l'idée d'activité requise doive être nuancée : l'artefact ne saurait déterminer strictement l'activité, d'une part, parce qu'il n'est que l'un des éléments de préstructuration à côté d es, et coordonné aux schèmes d'utilisation ; d'autre part, parce que bien d'autres sources de structuration de l'activité existent au -delà des instruments, à commencer par les tâches et les modes opératoires prescrits ; enfin, parce que la structuration de l'activité est un processus continu par lequel le sujet s'inscrit dans la singularité des situations (dont il participe) et la gère. (RABARDEL, 1995, p. 143)

[38] L'activité relativement requise est la traduction des compromis établis par le sujet entre les contraintes qui s'imposent à lui en provenance de sources multiples : l'artefact, la tâche, l'environnement, ses propres compétences et capacités etc., compte tenu de sa finalisation et de son engagement dans la situation. Ceci conduit à penser l'activité requise comme un concept relatif, une tension entre deux pôles: les contraintes et ressources liées à l'association de l'artefact et plus généralement de l'instrument à l'action et le sujet psychologique lui-même, acteur singulier et intentionnel. (RABARDEL, 1995, p. 145)

sobre o objeto da atividade. Já a metáfora da caixa de vidro parte da ideia de que o artefato precisa ser visível para que o sujeito possa considerá-lo na sua atividade, nesse sentido, a falta de clareza sobre o funcionamento, os métodos e as características importantes do sistema levaria a construção de representações possivelmente equivocadas, por parte do sujeito, sobre o artefato, resultando assim em problemas na atividade.

A partir da metáfora da caixa de vidro, Rabardel (1995) propõe a conceitualização da transparência operativa como uma transparência em função das necessidades do sujeito no contexto de uma atividade específica e dos seus objetivos:

> A transparência de um artefato deve, portanto, estar relacionada às necessidades de informação do usuário, que variam de acordo com seus objetivos, habilidades, estratégias que implementa para alcançá-los, etc. A transparência deve ser referida ao usuário e à sua atividade. É por isso que propomos o conceito de **transparência operativa** para designar as propriedades características do instrumento, relevantes para a ação do usuário, bem como a forma como o instrumento as torna acessíveis, compreensíveis e até perceptíveis para o usuário. A transparência operativa é um conceito relacional que expressa a variabilidade das necessidades de "informação" do sujeito de acordo com a variabilidade das situações, estados e objetivos de ação. Pode assumir várias formas: inteligibilidade de transformações entre ações de controle e efeitos, destaque dos próprios métodos de operação do instrumento, auto-explicação, etc. (RABARDEL, 1995, p. 151, tradução nossa)[39]

Para Rabardel, a transparência operativa pode ser analisada de vários pontos de vista relacionados a uma situação com o uso de artefatos: da ótica da estrutura e do funcionamento do próprio artefato; do ponto de vista das características e propriedades do objeto da atividade à medida que são destacados na ação com o artefato; da perspectiva das interações entre o artefato e o objeto.

Do ponto de vista relacionado à ação, a transparência operativa pode ser analisada mediante dimensões como a da própria estrutura e funcionamento do artefato, da ação

---

[39] La transparence d'un artefact doit donc être mise en relation avec les besoins en informations de l'utilisateur qui sont variables en fonction de ses buts, de ses compétences, des stratégies qu' il met en œuvre pour les atteindre etc. La transparence doit être référée à l'utilisateur et à son activité. C'est pourquoi nous proposons le concept de transparence opérative pour désigner les propriétés caractéristiques de l'instrument, pertinentes pour l'action de l'utilisateur, ainsi que la manière dont l'instrument les rend accessibles, compréhensibles, voire perceptibles pour l'utilisateur. La transparence opérative est un concept relationnel qui exprime la variabilité des besoins du sujet en "infor mation" en fonction de la variabilité des situations d'action, de ses états et buts. Elle peut prendre des formes diverses : intelligibilité des transformations entre actions de commande et effets, mise en évidence des modalités de fonctionnement propres de l'instrument, auto-explication… (RABARDEL, 1995, p. 151)

instrumentada do sujeito com o artefato, dos comportamentos do artefato relacionados aos seus próprios objetivos e dos aspectos implementados nos artefatos que condicionam a atividade do sujeito. Já, à luz de uma perspectiva temporal, o autor argumenta que a transparência operativa está relacionada: ao presente, quando deve o artefato permitir a representação de ações e de regulações em tempo real; ao passado, quando deve permitir uma interpretação das situações atuais em função da sua gênese no tempo; e ao futuro, ao permitir a antecipação dos efeitos das ações sobre e por meio do artefato.

2.3.7 A Abordagem Instrumental no ensino e aprendizagem da Matemática

Embora Rabardel tenha desenvolvido a Abordagem Instrumental como uma teoria da Ergonomia Cognitiva, as suas construções foram aplicadas para desenvolver conhecimentos nos domínios adjacentes do conhecimento, tal como a Educação Matemática, onde o uso de instrumentos pode ser situado em diferentes perspectivas, dentre as quais destacamos o uso de instrumentos para aprender e para ensinar matemática. Considerando que este estudo está situado na perspectiva do uso de um instrumento como suporte à aprendizagem, abordamos nesta seção alguns aspectos e fenômenos importantes para justificar e caracterizar uma aproximação da Abordagem Instrumental à Educação Matemática, o que contribui, também, para situar e justificar as questões deste estudo.

Caracterizar uma abordagem instrumental da aprendizagem da matemática envolve revisitar os aspectos teóricos desenvolvidos por Rabardel (1995) situando-os em um contexto no qual instrumentos são usados por um sujeito aprendente com o objetivo primeiro de construir conceitualizações sobre um objeto do conhecimento. Essa visão conceitual faz emergir particularidades, aspectos e fenômenos intrínsecos ao contexto educativo (considerando, inclusive, os demais atores envolvidos nesse contexto) que precisam ser discutidos para além dos aspectos da abordagem mais geral de Rabardel (1995).

Artigue (1996b, 2002) discutiu essa aproximação com base em estudos sobre o uso de tecnologias computacionais para a aprendizagem da matemática. Para a autora, a Abordagem Instrumental à Didática da Matemática veio da necessidade de quadros teóricos para investigar a integração de tecnologias computacionais de forma a superar a separação entre o trabalho técnico e o conceitual que havia à época. Algumas das questões que emergiram desse contexto foram apontadas por Artigue[40] (1996) no estudo sobre o uso do *software* DERIVE:

> DERIVE é um elemento essencial no ambiente de ensino e aprendizagem, um elemento do 'milieu didático', e estamos tentando entender que efeito esse elemento tem sobre a matemática que está sendo ensinada, as formas como os alunos se relacionam com a matemática e as formas de gestão do ambiente de ensino. Estamos tentando avaliar em que medida as consequências antecipadas do uso de DERIVE realmente acontecem e identificar quais são as propriedades de DERIVE que são eficazes nisso, e quais dificultam o resultado desejado, bem como tentar identificar tarefas adequadas. (ARTIGUE, 1996b, p. 235, tradução nossa)

Trouche e Guin[41] (1996), também apresentaram questionamentos na mesma direção:

> É utópico pensar que um progresso técnico nos permitiria resolver problemas decorrentes da integração das ferramentas do cálculo no curso matemático. Por exemplo, a nova geração de calculadoras (como TI 92) possui um Sistema de Álgebra Computacional e oferece a possibilidade de fazer cálculos exatos, de buscar limites de funções (o teclado tem uma tecla ∞) Certamente, os alunos não se enganarão sobre o cálculo de limites. Mas irão entender o que é uma função com tal comportamento em direção ao infinito? Que concepções ficarão mais fortes? Que novos obstáculos serão criados? O problema acaba de mudar ... Como evoluirá o comportamento dos alunos diante desses novos materiais? (TROUCHE; GUIN, 1996, p.329, tradução nossa)

---

[40] Here, DERIVE is an essential element in the teaching and learning environment, an element of the 'didactic milieu', and we are trying to understand what effect this element has on the mathematics being taught, the ways the students relate to the mathematics, and the ways of managing the teaching environment. We are attempting to assess to what extent the anticipated consequences of using DERIVE actually happen, and to identify which are the properties of DERIVE that are effective in this, and which hinder the desired outcome, as well as trying to identify suitable tasks.

[41] It is utopian to think that a technical progress would allow us to solve problems brought about the integration of calculus tools in the mathematical course. For example, the new generation of calculators (as TI 92) has a Computer Algebra System and offers the possibility to make exact calculus, to seek limits of functions (the keyboard has a key ∞...). Certainly, students will not be mistaken on limit calculus. But will they have understood what is a function with such a behaviour towards the infinity? What conceptions will go stronger? What new obstacles will be created? The problem is just shifted... How will evolve students' behaviour in front of these new materials? We carry on this study with an experiment in a classroom where students have TI 92 at one's disposal.

Levar em conta questões dessa natureza, envolve, de certa forma, romper ideias como a da neutralidade dos artefatos (TROUCHE, 2005) ou da contribuição irrestrita das tecnologias como instrumentos para a aprendizagem, como afirma Artigue[42] (1996b):

> É essencial, se realmente desejamos ver uma integração efetiva dos computadores na educação, estarmos convencidos do benefício potencial dessa integração. Mas a convicção sem entendimento não ajudará na superação dos obstáculos. (p. 236, tradução nossa)

Para discutir questões dessa natureza, uma abordagem instrumental sobre a didática da matemática deve levar em conta, entre outros aspectos:

- A gênese instrumental, como um processo complexo, de longo prazo e que revela uma diversidade de relações instrumentais por diferentes sujeitos em contextos didáticos (ARTIGUE, 2002, 1996b; TROUCHE; GUIN, 1996; TROUCHE, 1997);
- As relações entre o trabalho técnico, a conceitualização e o papel das questões de instrumentação (ARTIGUE, 2002);
- O papel das restrições institucionais, do professor e das tarefas;
- As questões envolvidas e decorrentes do processo de transposição informática (BALACHEFF, 1993): as possibilidades e restrições geradas pelo artefato, as questões de sintaxe e semântica necessárias para a sua instrumentação, as novas possibilidades de representações promovidas pelas tecnologias, bem como o seu potencial para o trabalho instrumentado com o desenvolvimento de novas técnicas instrumentadas que pré-estruturam a atividade (ARTIGUE, 2002);
- As questões do gerenciamento das técnicas instrumentadas, para as quais Artigue (2002) apontou a emergência do fenômeno da dupla referência, que diz respeito aos problemas que surgem da conexão dessas técnicas com as técnicas em papel e lápis e a dificuldade dos professores em dar um *status* adequado à diversidade de técnicas instrumentadas e gerenciá-las de um ponto de vista institucional (DEFOUAD, 2000 apud ARTIGUE, 2002);
- A caracterização e os efeitos de fenômenos específicos da atividade instrumentada com tecnologias, como: (i) o fenômeno de pseudo-objetos, descrito por Artigue como

[42] It is essential, if we really wish to see an effective integration of computers into education, to be convinced of the potential benefit of this integration. But conviction without insight will be no help in overcoming obstacles. (ARTIGUE, 1996b, p.236)

uma exploração técnica vazia de conceitualização, na qual os objetos são nomeados e rotulados, mas os estudantes estão operando em um nível conceitual inferior ao desejado; (ii) o fenômeno da pesca, no qual a diversidade de possibilidades de ação facilmente disponíveis nas tecnologias levam a uma multiplicação de tentativas de resolução de uma tarefa, sem que os estudantes interpretem o *feedback* das suas ações ou pensem sobre o problema; (iii) os fenômenos de dupla-referência, que surgem da conexão das novas técnicas instrumentadas possibilitadas pelas tecnologias computacionais com as técnicas em papel e lápis; (iii) os fenômenos de caixa-preta caracterizados pela dificuldade que os estudantes têm de acessar ou recriar os passos de uma resolução operada pelo artefato, dada a natureza "escondida" do seu sistema operacional. (ARTIGUE, 1996b). A esses fenômenos podemos acrescentar, os fenômenos de aprendizagem decorrentes de conflitos teórico-computacionais (GIRALDO; CARVALHO; TALL, 2002) que caracterizam aspectos da transposição informática com potencial influência na conceitualização.

Para Artigue[43] (2002), investigar a gênese instrumental e a conceitualização matemática, com o uso de tecnologias computacionais como instrumentos, é também abordar as relações entre os efeitos de aprendizagem e os aspectos da transposição informática que geram potencialidades e restrições em diferentes níveis ao uso instrumentado:

> (...) É necessário identificar as restrições induzidas pelo instrumento; e, especialmente para o tipo de instrumento com que nos interessa aqui, existem dois tipos de restrições: "restrições de comando" e "restrições organizacionais". Estas resultam de restrições "internas" e de "interface" (Balacheff, 1994). É preciso também, é claro, identificar as novas potencialidades do trabalho instrumentado." (ARTIGUE, 2002, p. 250, tradução nossa)

A abordagem instrumental à Educação Matemática também recebeu uma importante contribuição no contexto do planejamento e da implementação de situações de ensino com o uso de tecnologias. Trouche (2005) desenvolveu o modelo de Orquestração Instrumental para orientar o professor e o pesquisador na gestão da complexidade dos fenômenos da interação

---

43 …it is necessary to identify the constraints induced by the instrument; and, especially for the type of instrument with which we are concerned here, two kinds of constraints: "command constraints" and "organisational constraints".These result from "internal" and "interface" constraints (Balacheff, 1994). It is also necessary, of course, to identify the new potentials offered by instrumented work. (ARTIGUE, 2002, p.250)

entre sujeitos e tecnologias e, também, para guiar os estudantes nas suas gêneses instrumentais. As orquestrações instrumentais, dado o seu caráter voltado ao ensino, são abordadas neste trabalho, não do ponto de vista teórico, mas do ponto de vista metodológico, como estruturador do experimento de ensino em uma das etapas do nosso estudo.

Diante de todas as questões que caracterizam uma abordagem instrumental da aprendizagem da matemática, propomos levar esses aspectos em conta em diferentes níveis de aproximação neste estudo. Contudo, daremos ênfase às relações entre os efeitos do uso das tecnologias computacionais na conceitualização e a transposição informática do conhecimento matemático nessas tecnologias mediante o estudo da gênese instrumental dos sujeitos.

2.4. REVISITAÇÃO DA PROBLEMÁTICA E ASPECTOS ENFATIZADOS NO ESTUDO

Para revisitar a problemática e situar as ênfases deste estudo, resgatamos os resultados da revisão da literatura acerca do raciocínio covariacional e os aspectos teóricos discutidos nas subseções anteriores, nos quais destacou-se, sobretudo, o papel que o uso de tecnologias computacionais pode exercer na conceitualização matemática sob a perspectiva de uma abordagem instrumental.

Nessa lógica argumentativa, estamos em concordância com a Abordagem Instrumental e alinhados com a visão do uso de tecnologias como fator pré-estruturador da atividade de conceitualização matemática dos estudantes. Dessa forma, entendemos que as características específicas e as condições de uso dessas tecnologias podem ter efeitos importantes (contribuições, restrições, dificuldades) na aprendizagem e, no caso específico desta pesquisa, em como estudantes mobilizam o seu raciocínio covariacional.

Como mostrado na subseção do raciocínio covariacional, a influência do uso das tecnologias não recebeu o devido destaque na maioria das pesquisas envolvendo covariação, nem nos aspectos levantados por Thompson e Carlson (2017), fator que ressalta a necessidade de pesquisas sobre o tema. Isso revela a noção de um papel secundário atribuído às tecnologias, o qual não apenas evitamos como também partimos de um pressuposto diferente. Isto é, a partir da abordagem instrumental e de toda argumentação construída até aqui – sobre como o uso de tecnologias (como instrumentos para aprender) pode influenciar a construção de conceitos, buscamos entender de que forma o uso de tecnologias pode contribuir, ou não, para o raciocínio covariacional.

Até aqui, nos referimos ao termo ‘uso’ de tecnologias; contudo, mediante a perspectiva teórica que nos inserimos, explicitamos o sentido desse termo inserindo-o, agora, no contexto da abordagem instrumental como sendo ‘uso instrumentado’ para resolver/explorar uma situação matemática em um contexto de ensino. Nesse sentido, tal uso fica caracterizado dentro da relação instrumental como as interações entre o sujeito (estudante) e o artefato (Geogebra). Dessa maneira, o nosso objetivo é observar o raciocínio covariacional do sujeito que envolve a operação e o gerenciamento das funções básicas do artefato (esquemas de uso) e o uso instrumentado dessas ferramentas para resolver/explorar uma situação matemática (esquemas de ação instrumentada) no contexto de uma situação de ensino. Do ponto de vista analítico, esse uso também pode ser caracterizado pela noção de esquema de Vergnaud, como composto por objetivos, regras, invariantes e possibilidades de inferências voltados para o enfrentamento da situação matemática com o artefato.

Portanto, ao revisitar as questões da pesquisa[44], somos levados a situar, a seguir, como os aspectos enfatizados nessas questões são considerados no curso desta pesquisa.

Para analisar a influência a que nos referimos, partimos de alguns aspectos da covariação apontados como dificuldades para os estudantes, como a mobilização do raciocínio covariacional para interpretar os aspectos do gráfico de relações funcionais e a quantificação da variação variável (JOHNSON; McCLINTOCK, 2018; ELLIS *et al.*, 2016; LAGRANGE, 2014; MOORE, 2014), bem como as relações entre o gráfico da função e a taxa de variação (CARLSON *et al.*, 2002; AYALON; WATSON; LERMAN, 2016; YEMEN-KARPUZCU; ULUSOY; IŞIKSAL-BOSTAN, 2017) e aspectos da covariação em tipos específicos de funções. (ELLIS *et al.*, 2016; MOORE, 2014; HOHENSEE, 2016).

Para isso, seguimos na direção dos resultado acerca da revisão literatura sobre o uso de tecnologias (LAGRANGE, 2014; LAGRANGE; PSYCHARIS, 2014) e nos apoiamos no *design* de materiais no Geogebra baseados, sobretudo, na representação da covariação de forma dinâmica e integrando múltiplas representações simultâneas. O papel dos aspectos da transposição informática é analisado em termos de como as características do *design*, as possibilidades e as restrições do artefato se relacionaram com os efeitos no uso instrumentado e, consequentemente, no raciocínio covariacional dos sujeitos.

[44](i) De que forma o uso de um artefato computacional, para explorar a covariação em relações funcionais, influencia o raciocínio covariacional dos estudantes? e (ii) Como os efeitos do uso do artefato podem ser relacionados aos aspectos da transposição informática da covariação nesse artefato?

São abordados, neste estudo, dois tipos de situações nas quais esses aspectos são colocados em jogo: situações de explorar e descrever a covariação e situações de esboço do gráfico. No primeiro tipo, os sujeitos exploram representações dinâmicas das variáveis em relações funcionais e, em seguida, descrevem essas relações covariacionalmente; no segundo tipo de situação, a relação funcional deve ser representada por meio do esboço do gráfico.

A análise de como esquemas são mobilizados frente a essas situações requer explicitar que, ao nos referimos aos esquemas (na análise dos dados), nos referimos aos "esquemas inferidos", uma vez que não acessamos tais esquemas de forma direta, mas a partir do "rastro" da atividade dos sujeitos no seu uso instrumentado do artefato. Isto é, em como os componentes dos esquemas se manifestam na ação instrumentada. Uma abordagem a partir das regras de ação que fundamentam esses esquemas contribui para inferir os invariantes e as possibilidades de inferência que caracterizam o conhecimento mobilizado pelos sujeitos.

Com relação aos sujeitos do estudo, delimitamos o seu perfil como licenciandos em Matemática. A escolha por esse perfil de sujeito se deu pela combinação de alguns fatores, a saber: (i) o objeto matemático abordado, que envolve aspectos da matemática do Ensino Superior, é de grande importância principalmente nos cursos de Matemática; (ii) a proximidade do pesquisador e da pesquisa com a Licenciatura em Matemática que, consequentemente, leva à praticidade no recrutamento de voluntários e (iii) o caráter formativo do experimento que envolve o uso de tecnologias para a aprendizagem matemática, o que pode contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático e docente.

No que diz respeito à contribuição para o conhecimento dos sujeitos enquanto professores em formação – embora o conhecimento explorado e construído pelos sujeitos insere-se, a princípio, na perspectiva que Shulman (1986) classificou como conhecimento do conteúdo – vários aspectos desta pesquisa destacam a importância de desenvolver conhecimentos voltados ao ensino de matemática. Ou seja, a própria conexão da abordagem covariacional com a perspectiva histórica do conceito de função, a sua abordagem (ou a insuficiência dela) no currículo e no ensino atual e, até mesmo, a questão central da abordagem da covariação com o uso de tecnologias são aspectos importantes que ressaltam a relevância de aprender e de ensinar matemática. Por isso, a fase de experimento da pesquisa contou com momentos de discussões que evidenciam as questões supramencionadas.

Na seção seguinte, descreveremos os aspectos metodológicos do estudo.

3. METODOLOGIA

Descreveremos neste capítulo os aspectos metodológicos da pesquisa em tela. Em termos de definição metodológica, caracterizamos o percurso investigativo como um estudo de casos múltiplos implementado em um contexto de ensino e aprendizagem, o que leva, ao nosso ver, à necessidade de considerar os princípios da investigação em Educação Matemática, sobretudo, na Didática da Matemática. Assim sendo, apresentaremos, a seguir, as seguintes etapas desta pesquisa: um desenho do percurso investigativo; definição dos casos; o contexto no qual se desenvolveu a investigação e, por fim, cada fase investigativa e os seus respectivos métodos e instrumentos.

3.1 UM ESTUDO DE CASOS MÚLTIPLOS EM UM CONTEXTO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

O estudo de caso é uma abordagem de investigação de caráter particularista que, segundo Yin (2015, p.17), “investiga um fenômeno contemporâneo (o “caso”) em profundidade e em seu contexto de mundo real, especialmente, quando os limites entre o fenômeno e o contexto puderem não ser claramente evidentes.” Nesse sentido, destacam-se a particularidade do caso estudado em profundidade e a relação entre o caso e o seu contexto.

Segundo Yin (2015), o estudo de caso pode envolver um caso único ou múltiplos casos, que podem ser sujeitos, grupos, instituições, eventos ou processos, sempre considerados em uma unidade como caso. Além disso, Stake (1995, p.16) faz uma interessante distinção entre estudos de caso nos quais o caso em si é dominante (estudo de caso intrínseco) e nos quais a questão de pesquisa é dominante (estudo de caso instrumental). As questões nesse tipo de estudo envolvem o “como” e o “por que” (YIN, 2015, p.10) e os seus resultados levam ao conhecimento de especificidades, conduzindo frequentemente a novas questões e hipóteses a testar (PONTE, 2006, p.16).

Esta pesquisa se mostra compatível com a abordagem do estudo de caso, pois: (i) aborda um fenômeno (a gênese instrumental) caracterizado como um processo idiossincrático a um indivíduo, o que remete ao aspecto da particularização no estudo de caso; (ii) propõe-se a analisar esse processo em um certo nível de profundidade, de forma que seria pouco acessível por meio de uma abordagem generalizadora; (iii) se interessa por questões típicas de estudos de caso, “como” e/ou “de que forma”, com relação aos efeitos do uso de artefatos computacionais na gênese instrumental; (iv) prevê a emergência de novas questões relacionadas ao uso de artefatos computacionais no raciocínio covariacional.

Yin (2015) defende que o estudo de caso pode ser particularmente aplicado em pesquisas nas quais lidar com o contexto é pertinente ao estudo do fenômeno. Este é o caso nesta pesquisa, visto que lidamos com um contexto de ensino e aprendizagem estritamente relacionado com a trajetória de cada caso, por isso, entendemos que é necessária uma caracterização do contexto de ensino e das influências desse contexto nas trajetórias individuais dos casos.

Essas relações entre os casos e o contexto também são causas da decisão metodológica de combinar ferramentas da abordagem de estudo de caso e da Didática da Matemática, obtendo o suporte de instrumentos específicos para a concepção do cenário (situações de ensino) e o direcionamento da produção e da análise dos dados.

3.1.1 Delimitação dos casos e descrição do contexto

Caracterizamos esta pesquisa como um estudo de casos múltiplos do tipo instrumental, no qual:

- Cada caso é caracterizado como o de um estudante da licenciatura em matemática na sua gênese instrumental com o artefato Geogebra em situações de covariação;
- São abordados casos de três estudantes (casos múltiplos), seguindo uma lógica de “replicação” e não de “amostragem” (YIN, 2015, p. 60) com o objetivo de enriquecer os resultados do estudo;
- A análise dos casos é instrumentalizada para responder às questões da pesquisa, ou seja, como a gênese instrumental de cada estudante evidencia o suporte dado pelo artefato ao raciocínio covariacional e as relações com a transposição informática no artefato (estudo de caso instrumental).

O contexto no qual se desenvolveu o estudo de caso foi o de um experimento de ensino concebido com o objetivo de promover a gênese instrumental dos estudantes e o seu raciocínio covariacional por meio da exploração do *software* Geogebra em situações de covariação. Nessa perspectiva, do ponto de vista da relação instrumental, os sujeitos exploram o artefato Geogebra tendo como objeto o seu raciocínio covariacional. Oito licenciandos em matemática de duas instituições públicas do Ensino Superior participaram voluntariamente de seis sessões de ensino, na forma de um curso de extensão *online*. O autor do estudo foi o mediador principal, sendo auxiliado por três licenciandos em matemática que atuaram como monitores.

O contexto de ensino e aprendizagem do estudo de caso também explica um cenário metodológico no qual o número de sujeitos é maior do que os sujeitos efetivamente tomados nos casos: participaram do curso 8 licenciandos, dos quais, foram tomados três como sujeitos do estudo de caso. O critério de seleção dos três sujeitos do caso foi o da consistência de participação nas atividades e a realização das situações propostas, fator que proporcionou um volume de dados satisfatório para a análise. Uma descrição complementar da estruturação do contexto do estudo de caso é dada na subseção 3.3.

3.1.2 Desenho do percurso metodológico

O percurso metodológico geral da pesquisa, no qual insere-se o estudo de caso, integrou análises teóricas e métodos da investigação em Educação Matemática como forma de atender às especificidades do contexto de ensino-aprendizagem que caracteriza a pesquisa.

Como ponto de partida, foram realizadas as seguintes verificações: (i) análises preliminares relacionadas ao objeto matemático e ao raciocínio covariacional (baseadas em uma revisão sistemática de literatura, com o objetivo de informar o *design* do experimento de ensino, das situações e dos materiais do Geogebra explorados); (ii) uma análise da transposição informática da covariação no Geogebra (descrita na seção 2, que também se articulou às análises preliminares para fundamentar o *design* dos materiais do Geogebra).

A condução do estudo de caso, em si, foi realizada em três etapas: (1) aplicação de questionários de perfil dos sujeitos, para identificar as suas habilidades com o uso de artefatos computacionais para matemática, especialmente, o Geogebra e suas formas de entender função e covariação representadas graficamente, a fim de definir uma referência para a sua gênese instrumental e para o entendimento de covariação; (2) Implementação de um experimento de ensino estruturado por orquestrações instrumentais (TROUCHE, 2005), as quais envolveram as etapas de desenho das situações, planejamento das orquestrações, análise *a priori* das situações com ênfase na transposição informática do material do Geogebra e a implementação das orquestrações; (3) Realização de entrevistas baseadas em tarefas, com o objetivo de fazer emergir os aspectos da gênese instrumental e do raciocínio covariacional que foram desenvolvidos no experimento, tais entrevistas foram abordadas, dessa vez, com a presença do pesquisador junto ao sujeito.

A análise dos dados foi feita mediante análise microgenética (MEIRA, 1994), cuja técnica, aliada à videografia, se adequa à análise em profundidade de processos inerentes a um sujeito em um determinado contexto, o que é coerente com uma pesquisa do tipo estudo de caso. Tal análise se concentrou nos eventos relacionados à mobilização do artefato Geogebra, pelos sujeitos, no processo de gênese instrumental e na mobilização do raciocínio covariacional subjacente. Uma descrição mais detalhada é dada em subseções posteriores.

3.1.3 Fontes de dados do estudo

A multiplicidade das fontes de dados é referida como um critério que qualifica a validade do construto desenvolvido em um estudo de caso (YIN, 2015, p.48). Também integra os princípios apontados por Yin (2015) para a fase de coleta e favorece o desenvolvimento de “linhas convergentes de investigação” (YIN, 2015, p. 124). Os dados desta pesquisa estão relacionados com cada etapa do percurso metodológico:

- Na etapa 1, os dados foram respostas geradas a partir de um questionário *online*;
- Na etapa 2, o experimento de ensino no qual se inicia o acompanhamento da gênese instrumental de cada estudante, os dados foram múltiplos: a videogravação da tela e áudio dos computadores dos sujeitos (envolveram o vídeo da sequência de ações, imagens, descrições em áudio), as respostas escritas e as imagens produzidas nas fichas *online*, as interações orais e escritas na plataforma de videoconferência do experimento de ensino e as anotações do pesquisador. Esses dados levam em consideração tanto o acompanhamento da gênese instrumental como a descrição do contexto no qual ela se desenvolve. Uma descrição mais detalhada da produção de dados do experimento é dada na subseção que trata dessa etapa;
- Na etapa 3, entrevista baseada em tarefas, se consolidou o acompanhamento das gêneses instrumentais, os dados foram as respostas dos estudantes às questões da entrevista e a videogravação de tela dos computadores dos sujeitos (envolveram o

vídeo da sequência de ações, imagens, descrições em áudio), enquanto eles desenvolviam as suas ações e produções no Geogebra.

3.1.4 Aspectos da análise dos dados

Yin (2015) considera que a análise da evidência é um dos aspectos menos desenvolvidos dos estudos de caso, por isso, ele dá orientações gerais para essa fase, bem como propõe técnicas para analisar evidências, as quais buscamos considerar à medida que se adequem ao contexto e aos objetivos da nossa pesquisa.

Para Yin (2015), a análise deve buscar padrões, *insights* e conceitos promissores, que podem emergir enquanto manipula-se os dados e, para isso, ele propõe diferentes estratégias (embora considera que o pesquisador pode desenvolver as suas próprias) que se propõem a organizar e categorizar os dados de forma a sobrelevar os padrões, permitindo, assim, relacionar os dados do estudo de caso com os conceitos de interesse (YIN, 2015, p.146).

Ainda do ponto de vista da análise dos dados, justificamos que a escolha por um estudo de casos múltiplos não tem o objetivo final de comparar os casos entre si, mas sim enriquecer os resultados ao responder às questões de pesquisa a partir da análise de experiências particulares distintas. Yin (2015, p. 60, 168) reconhece o papel de uma análise baseada em múltiplos casos de fortalecer ainda mais as descobertas, dando mais robustez ao estudo.

No contexto do nosso estudo, os dados produzidos nas três etapas são densos e de naturezas distintas, dessa forma, fez-se necessário um tratamento de dados que permitisse obter uma descrição mais rica possível acerca: (i) da gênese instrumental de cada estudante do estudo de caso; (ii) do contexto de ensino no qual se desenvolveu cada caso, incluindo – nessa conjuntura – os demais estudantes do experimento. Uma vez descritos esses contextos, foi necessário estruturar a análise em relação às questões da pesquisa, às análises *a priori* e aos aspectos teóricos do raciocínio covariacional, da Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), da noção de esquema (VERGNAUD, 2009) e da transposição informática (BALACHEFF, 1993).

Com esse fim, enfatizamos particularmente os esquemas identificados e desenvolvidos nas gêneses individuais. Com isso, buscamos identificar e relacionar os componentes desses esquemas na estrutura analítica proposta por Vergnaud (2009) e, a partir dessa estruturação e dos processos da gênese instrumental, analisar a mobilização do raciocínio covariacional dos estudantes além de relacionar os aspectos envolvidos no uso do artefato com a estruturação da atividade (RABARDEL, 1995) imposta pelos efeitos da transposição informática. Abordaremos, a seguir, como a análise microgenética (MEIRA, 1994) foi escolhida e operacionalizada para esse processo.

3.1.4.1 Análise microgenética dos dados

A necessidade de analisar um processo inerente a um sujeito (a gênese instrumental) em uma perspectiva de pesquisa particularística e voltada para a análise do caso em profundidade (YIN, 2015) – aliada à natureza e à densidade dos dados produzidos – nos levou ao entendimento de que a técnica da análise microgenética (MEIRA, 1994) poderia ser um instrumento útil como suporte à análise dos nossos dados.

Para Meira (1994, p. 59), a técnica da análise microgenética e as técnicas de coleta de dados como a videografia podem ser combinadas para uma análise interpretativa consistente dos mecanismos psicológicos subjacentes à atividade humana. O autor situa essa técnica no contexto de uma abordagem interpretativa de investigação e no que ele denomina como microanálise interpretativa.

Essa abordagem é caracterizada por examinar em detalhes "mudanças relativamente sutis nas relações entre agentes e suas ações" (MEIRA, 1994, p. 60) para construir explicações sobre "o significado de atividades diversas, e sobre a estrutura das situações sociais e materiais nas quais tais atividades emergem" (MEIRA, 1994, p. 60). Para isso, a análise microgenética interpretativa propõe uma descrição densa de aspectos interacionais da atividade, por meio da análise de protocolos (transcrições de ações e discursos, por exemplo), com ênfase nos processos cognitivo-interacionais, sem, no entanto, comprometer a compreensão da atividade como um todo.

Tais princípios, particularmente o foco no 'processo em detalhe', analisado no seu contexto e com foco nos significados gerados, nos levaram a acreditar no potencial dessa técnica para analisar as gêneses instrumentais dos sujeitos do estudo de caso e, assim, contribuir para a construção de relações com os aspectos do uso do artefato explorado.

Para Meira (1994, p. 61), uma análise microgenética em um contexto interpretativo baseia-se fortemente "na apresentação de narrativas e explicações detalhadas dos fenômenos investigados" e guia-se por dois princípios: (i) "a análise de processos é sempre mais informativa que a descrição de produtos" e (ii) "a análise deve inspecionar ações detalhadamente, sem perder de vista o significado da atividade em que tais ações se inserem".

O autor fornece algumas diretrizes metodológicas para a organização de dados da videogravação na análise microgenética: (i) assistir os vídeos completos e realizar anotações sobre os eventos que se associam ao problema; (ii) produzir um índice de eventos; (iii) identificar os eventos relacionados ao problema de pesquisa; (iv) transcrever os eventos detalhadamente; (v) assistir os segmentos e, com o suporte das transcrições, gerar interpretações sobre os microprocessos envolvidos e, por fim, (vi) divulgar os dados enfatizando exemplos prototípicos que ilustram a interpretação do autor.

A operacionalização da análise microgenética na pesquisa foi influenciada pelo contexto *online* no qual se deu a produção dos dados. Tal conjuntura se diferencia do contexto presencial por suas possibilidades, como permitir a integração de ferramentas para a produção e o registro dos dados diretamente na plataforma *online* e os momentos de produção de dados de forma assíncrona. O cenário *online* também se diferencia por suas restrições, como a redução do controle e do acesso às atividades dos participantes durante a sessão e as perdas de dados que seriam observáveis presencialmente, a saber: as expressões, os gestos e os momentos de exploração livre do artefato, nos quais os sujeitos não têm compromisso em entregar respostas.

Essa perda de continuidade no processo leva, inevitavelmente, à perda de alguns dados que não foram considerados essenciais; porém, leva também a uma maior concentração nos eventos de interesse da pesquisa, especialmente, na análise dos momentos nos quais os estudantes resolveram as situações propostas. Tal focalização levou à profundidade dos dados, visto que os estudantes estavam engajados na exploração do material do Geogebra para resolver as situações e construírem, os conhecimentos subjacentes.

Embora enfatize-se a análise microgenética dos eventos nos quais os estudantes exploraram as situações com o uso do Geogebra, é necessário lembrar que a fonte de dados do estudo de caso em si é mais ampla: respostas às fichas *online*, as imagens produzidas, as interações entre os sujeitos nos momentos coletivos do experimento e, finalmente, as observações do pesquisador que servem tanto para uma caracterização mais rica do raciocínio covariacional dos sujeitos quanto para a caracterização do contexto no qual se aplica a análise microgenética. Essa multiplicidade de fontes de dados contribui para desenvolver uma "linha convergente de investigação” (YIN, 2015), fortalecendo, com isso, a análise e a validação dos resultados.

O Quadro 2, a seguir, descreve como as etapas da análise microgenética foram aplicadas neste estudo:

Quadro 2 – Etapas da análise microgenética no estudo

Etapa da análise microgenética	Implementação no estudo
1. Assistir aos vídeos completos e realizar anotações sobre os eventos que se associam ao problema.	Foram assistidos os vídeos das sessões de aula e os vídeos individuais da tela de cada sujeito do estudo de caso, nos quais os eles exploraram as situações
2. Produzir um índice de eventos	Os eventos em foco foram aqueles nos quais houve a mobilização do Geogebra, no sentido da sua instrumentação ou instrumentalização para explorar a covariação, tanto nos momentos coletivos (sessões) quanto nos momentos individuais (resolução das situações propostas). Considerando o contexto não presencial e assíncrono, esses momentos se deram sobretudo individualmente, quando os sujeitos exploraram as situações propostas.
3. Identificar os eventos relacionados ao problema de pesquisa	Foram identificados os eventos foco, conforme a descrição da etapa anterior.
4. Transcrever os eventos detalhadamente	Os eventos foram transcritos de forma a caracterizar a atividade e os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos com o maior nível de profundidade possível. De forma geral, foram combinadas transcrições das ações no Geogebra e as falas dos sujeitos durante essas ações. Textos escritos (respostas às fichas, interações entre sujeitos) e imagens (*print* do gráfico, por exemplo) complementam a caracterização do evento foco.
5. Assistir os segmentos e, com o suporte das transcrições, gerar interpretações sobre os microprocessos envolvidos	As interpretações geradas a partir das transcrições (ação no geogebra + fala do sujeito) levam em consideração o raciocínio covariacional mobilizado e as inferências geradas por meio da ação no *software*, bem como as ferramentas do *software* mobilizadas para essas inferências.
6. Divulgar os dados enfatizando exemplos prototípicos que ilustram a interpretação do autor.	Descrição dos resultados em termos dos aspectos da gênese instrumental e mobilização do raciocínio covariacional.

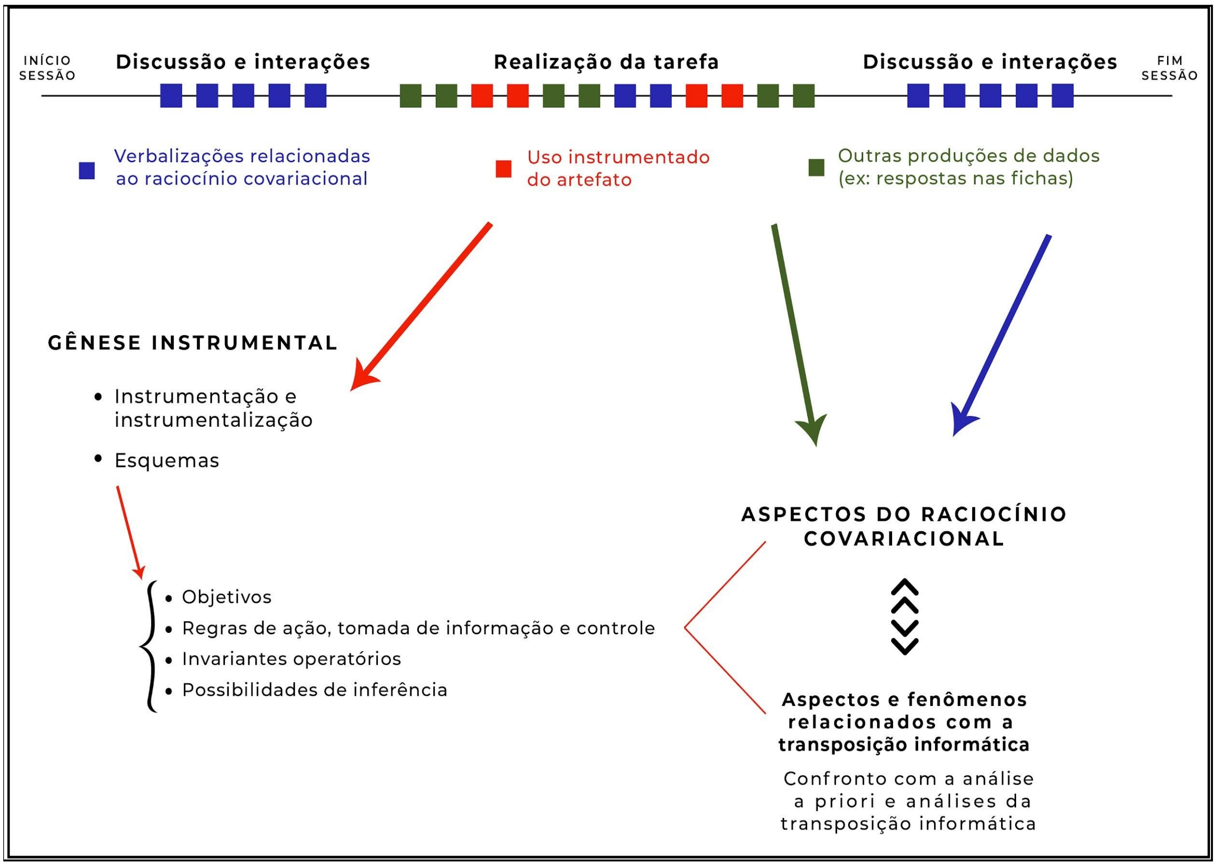
Fonte: Elaborado pelo autor

As análises *a priori* de cada situação estão intimamente relacionadas com a análise dos dados, haja vista que elas serviram como um quadro de referência para definir e articular os aspectos matemáticos específicos de cada situação aos aspectos do raciocínio covariacional a serem mobilizados/desenvolvidos em cada situação e aos aspectos da transposição informática envolvidos no material do Geogebra.

As transcrições das ações no *software* e das falas dos sujeitos (enquanto lidaram com a situação) foram utilizadas como via de acesso para inferir os componentes dos seus esquemas e, assim, identificar a mobilização do raciocínio covariacional subjacente a cada situação (por meio dos invariantes operatórios mobilizados e das possibilidades de inferência). Além disso, foi possível entender como esses esquemas revelam relações com as possibilidades e restrições que caracterizam a transposição informática envolvida no artefato.

A Figura 21, abaixo, ilustra esses aspectos por intermédio de um diagrama da análise microgenética dos dados:

Figura 21 – Diagrama da análise microgenética dos dados do estudo



Fonte: Elaborado pelo autor

As seções seguintes abordam de forma mais detalhada o planejamento das três etapas nas quais se deu o desenvolvimento dos casos.

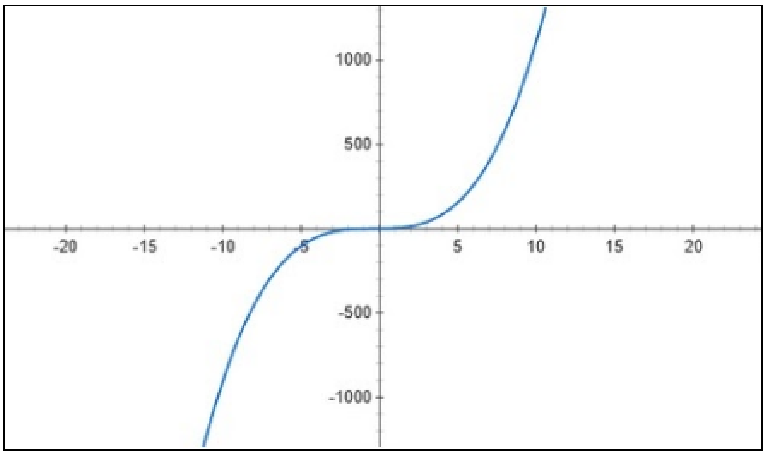
3.2 PLANEJAMENTO DA ETAPA 1: QUESTIONÁRIO DE PERFIL DOS SUJEITOS

Foi aplicado um questionário *online* com todos os participantes do curso com o objetivo de traçar um perfil inicial de um deles e, sobretudo, dos sujeitos para o estudo de caso. Inicialmente, os sujeitos do estudo de caso ainda não haviam sido selecionados, haja vista que essa seleção se deu apenas na etapa 2 do experimento de ensino. O questionário teve por objetivo traçar um perfil inicial dos sujeitos em relação às suas habilidades com o uso de artefatos computacionais para matemática, especialmente o Geogebra, e em relação às suas formas de entender função e covariação representadas graficamente.

Os estudantes forneceram informações pessoais como o nome e o *e-mail* e responderam às seguintes questões:

- Você utiliza algum *software* para explorar o conteúdo de função? Qual(is)?
- De forma geral, como você avalia o seu domínio sobre o uso desse(s) *software*(s)? (Caso você utilize softwares)
- Qual a sua familiaridade com o *software* Geogebra?
- De forma geral, para quais atividades e conteúdos matemáticos você utiliza o Geogebra?
- Há quanto tempo você utiliza o Geogebra? (Caso já utilize o software)
- Como você avalia o seu grau de domínio sobre o Geogebra?
- Como você avalia o seu grau de domínio sobre o Geogebra para explorar funções?
- Como você avalia o seu domínio no conteúdo de função?
- O que é uma função?
- Como você descreveria o comportamento das variáveis de uma função representada pelo gráfico abaixo? (Figura 22)

Figura 22: Gráfico apresentado no questionário



Fonte: Criado pelo autor utilizando o traçador gráfico do Google

Os resultados da aplicação do questionário estão descritos na seção de análise dos dados. As respostas serviram para fornecer uma ideia inicial sobre os variados níveis de gênese instrumental com o Geogebra e, também, se suas formas de entender a função incluíam uma visão de covariação na interpretação do gráfico. Esses resultados também foram levados em consideração no planejamento do experimento de ensino.

3.3 PLANEJAMENTO DA ETAPA 2: CONCEPÇÃO DO EXPERIMENTO DE ENSINO

Um experimento de ensino foi concebido como um cenário de ensino e aprendizagem para a exploração de situações de covariação com o uso do Geogebra, a fim de promover a gênese instrumental dos estudantes e o seu raciocínio covariacional. Essas situações foram concebidas no contexto de um curso intitulado “Uso do Geogebra para explorar funções por uma perspectiva covariacional”, mediado pelo autor desta pesquisa e auxiliado por três licenciandos em matemática que atuaram como monitores.

O curso foi realizado semanalmente durante 2 meses, de forma *online*, como um curso de extensão para licenciandos em matemática de duas Universidades brasileiras. A modalidade *online* do curso foi planejada em resposta à pandemia do COVID-19 que obrigou a reestruturação do experimento, antes previsto para ser realizado na forma presencial. Como extensão universitária, o curso teve como objetivo oferecer a licenciandos em matemática uma formação continuada para o uso do *software* Geogebra em situações de covariação.

Para fomentar as gêneses dos estudantes, o experimento foi planejado com base no Modelo de Orquestração Instrumental, no qual situações, configurações didáticas e modos de uso dos artefatos são pensados especificamente para promover a atividade instrumentada. Descreveremos, a seguir, o uso do modelo no planejamento das orquestrações.

3.3.1 Uso do Modelo de Orquestração Instrumental

O contexto no qual se deu o estudo de caso emergiu da necessidade do acompanhamento da gênese instrumental dos sujeitos em situações de covariação, fator que levou à necessidade da concepção de situações de ensino e de uso do artefato para a resolução dessas situações pelos sujeitos. Utilizamos o Modelo de Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2005) como uma ferramenta para estruturar e planejar as situações de ensino, pois esse modelo dá ênfase à integração e ao uso dos artefatos na aprendizagem, sobretudo, no que se refere às gêneses instrumentais de sujeitos com esses artefatos.

O Modelo de Orquestração Instrumental estuda e orienta a concepção e operacionalização de situações de ensino com um olhar para a integração e para o uso de artefatos. Em uma orquestração instrumental, o professor realiza o arranjo dos artefatos e dos sujeitos no espaço da sala e define as formas como esse arranjo será conduzido didaticamente a fim de alcançar os objetivos de aprendizagem:

> Uma orquestração é o arranjo *sistemático* e *intencional*, por um agente, dos elementos (artefatos e humanos) de um ambiente, para implementar uma determinada situação e, mais geralmente, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. (TROUCHE, 2005, p.126, tradução nossa)[45]

É destacado o papel e a natureza da orquestração instrumental como fomentadora das gêneses instrumentais dos estudantes. Para isso, Trouche (2005) destaca o planejamento de orquestrações como uma ferramenta para pensar as possíveis contribuições e restrições dos artefatos na situação de ensino, de forma a fomentar as gêneses.

---

[45] Une orchestration instrumentale est exactement l’agencement systématique par un agent intentionnel des éléments (artefacts et humains) d’un environnement en vue de mettre en œuvre une situation donnée et, plus généralement, de guider les apprenants dans les genèses instrumentales et dans l’évolution et l’équilibrage de leurs systèmes d’instruments. (TROUCHE, 2005, p.126)

Os conceitos de configuração didática e modo de execução são centrais no modelo; o primeiro refere-se ao *layout* dos artefatos disponíveis no ambiente e o segundo à forma como a configuração didática será operacionalizada por meio das escolhas didáticas do professor. Planejar uma situação matemática com o uso de tecnologias informáticas como artefatos requer, junto ao planejamento das etapas da situação, considerar a orquestração instrumental que se aplica aos objetivos de aprendizagens pretendidos, o que supõe, segundo o autor, pensar várias configurações e vários modos de operação.

A configuração didática e os modos de execução foram pensados em função de diversos aspectos:

(i) Do papel da OI em fomentar as gêneses instrumentais dos estudantes com o Geogebra, que gerou a necessidade de dividir o experimento em duas etapas: a primeira (2 sessões) voltada para a introdução às ferramentas para abordar função e covariação no Geogebra, com o objetivo de possibilitar o desenvolvimento dos esquemas de uso dos estudantes; a segunda (4 sessões), voltada para o uso instrumentado do Geogebra para explorar a covariação em 4 situações (três delas foram consideradas na análise). O planejamento envolveu quatro possíveis configurações em função de cada momento descrito acima: 1) o mediador expõe para todos na sala virtual, 2) um estudante expõe para todos na sala virtual, 3) estudantes trabalham em duplas em sala virtual particular, 4) estudantes trabalham individualmente, fora da sala virtual. Cada configuração parece se aplicar melhor a cada etapa específica (instrumentação e atividade instrumentada), como a configuração na qual o mediador expõe para todos possivelmente contribui com a apresentação e os usos iniciais do artefato.

(ii) Do raciocínio covariacional que gerou a necessidade de encadear situações de forma a permitir aos estudantes avançarem dos níveis menos sofisticados aos níveis mais avançados de raciocínio covariacional. A concepção das situações teve um papel importante nesse encadeamento.

(iii) Do caráter investigativo do experimento que gerou a necessidade da integração de artefatos de registro dos dados na configuração didática, com o papel de captar as interações dos sujeitos com o Geogebra, com os demais participantes e com o mediador. Foram utilizadas ferramentas de videogravação da tela do computador, gravação de áudio, fichas *online* das situações, registro do *chat* e anotações do mediador. Nas interações entre cada sujeito e o Geogebra, os estudantes foram solicitados a utilizar a técnica de pensar em voz alta (KUJALA; MANTYLA, 2000), a fim de que as suas ações no Geogebra fossem devidamente fundamentadas pelos seus argumentos, possibilitando o acesso aos possíveis componentes dos seus esquemas.

(iv) Da reestruturação do espaço de ensino devido a fatores externos à pesquisa, como a pandemia da Covid-19 que impossibilitou a implementação do experimento no modo presencial e, com isso, nos fez repensar o espaço e os recursos adaptando o experimento a um modelo de orquestrações *online* (GITIRANA; LUCENA, 2021). A implementação se deu com o suporte de uma plataforma de videoconferência (*Google Meet*) e da integração de diversos artefatos tecnológicos em configurações didáticas e modos de exploração pensados exclusivamente para a infraestrutura *online*. Esta reconfiguração implicou em repensar os tipos de interações possíveis na sala, entre sujeitos e artefatos e dos sujeitos entre si (mediador, estudantes e monitores). Além disso, emergiu a necessidade de que os recursos destinados ao suporte dessas interações fossem adequadamente instrumentalizados pelos participantes.

Para o planejamento das orquestrações, as seguintes ações foram realizadas: concepção das situações; planejamento das configurações didáticas e os modos de exploração, incluindo os artefatos previstos; o papel e as possibilidades de ação e interação de cada um dos atores (mediador, monitores e estudantes) e análises *a priori*. Também foram realizadas, a cada semana, reuniões de planejamento com os monitores a fim de discutir o planejamento das sessões seguintes.

A descrição das orquestrações também serviu à caracterização do contexto de ensino no qual se desenvolveram as gêneses instrumentais dos estudantes, bem como ao acompanhamento da trajetória da classe.

3.3.2 Planejamento das orquestrações instrumentais

O experimento foi dividido em seis sessões de ensino, nas quais para as duas primeiras sessões foram enfatizadas situações que permitissem aos estudantes desenvolverem seus esquemas de uso, ou seja, o aprendizado das ferramentas e características básicas do Geogebra para explorar funções e covariação. Nas quatro sessões seguintes, foram exploradas situações com foco na consolidação dos esquemas de uso e na mobilização de esquemas de ação instrumentada em situações de covariação. O Quadro 3 descreve as situações envolvidas em cada sessão de ensino:

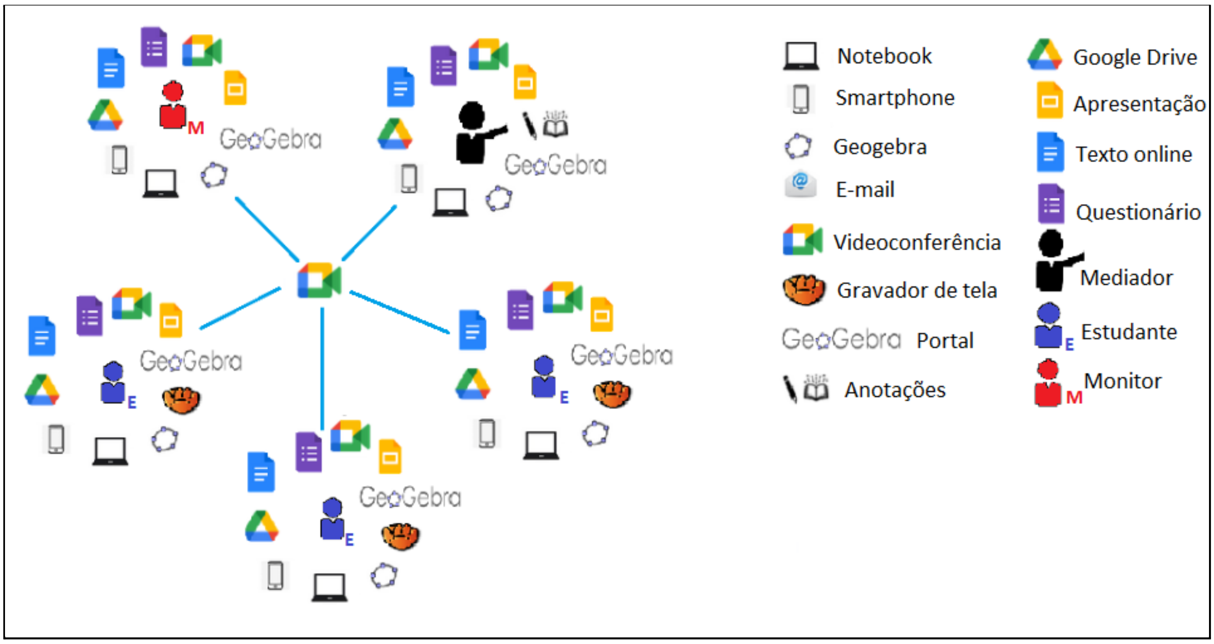
Quadro 3 – Planejamento das sessões de ensino e situações

Sessão	Momentos	Situações
1	-Exposição sobre ferramentas do Geogebra pelo mediador; -Construção de simulação pelos estudantes.	- Construir uma simulação de uma função articulando o modelo algébrico, o gráfico e a tabela (planilha)
2	-Exposição das ferramentas e construções pelo mediador no Geogebra; -Construção de simulação pelos estudantes.	- Construir uma simulação de uma função polinomial e representar variáveis no gráfico, articulando modelo algébrico, gráfico e tabela (planilha); - Descrever a variação em y em função da variação em x.
3	-Exposição das ferramentas e construções pelo mediador no Geogebra; - Realização da situação 1A pelos estudantes.	**Situação 1A*: interpretar e representar a covariação no gráfico (segmentos dinâmicos)** - Descrever a variação em y em função da variação em x representada por segmentos dinâmicos no gráfico; - Representar a covariação entre x e y graficamente.
4	- Descrição das ferramentas e construções pelo mediador no Geogebra; - Realização da situação 1B pelos estudantes.	**Situação 1B*: Interpretar e representar a covariação no gráfico (eixos paralelos)** - Descrever a variação em y em função da variação em x representada por eixos paralelos; - Representar a covariação entre x e y graficamente. * Os dados da situação 1B foram desconsiderados para a análise, devido a problemas operacionais.
5	-Descrição das ferramentas e construções pelo mediador no Geogebra; - Realização da situação 2 pelos estudantes.	**Situação 2: Interpretar e representar a variação variável** - Construção de simulação; - Descrever a variação em Δy em função da variação em x representada no gráfico; - Representar a covariação entre x e y graficamente.
6	-Descrição das ferramentas e construções pelo mediador no Geogebra; - Realização da situação 3 pelos estudantes.	**Situação 3: Caracterizar a covariação nas funções polinomiais** -Descrever a variação em Δy em função da variação em x representada no gráfico; - Construção de uma simulação; - Exploração da covariação nas funções polinomiais; - Caracterização da covariação nas funções polinomiais.

Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 23, abaixo, ilustra uma configuração didática geral do experimento de ensino com os sujeitos e os recursos disponíveis; já o Quadro 4 descreve os papéis atribuídos a cada artefato. Em cada sessão, diferentes momentos e objetivos reconfiguraram o *layout* da classe ou geraram a mudança no modo de exploração de uma configuração específica. Orquestrações realizadas no ambiente *online* também geram novas possibilidades, como a realização das situações de forma síncrona ou assíncrona e a gravação dos eventos da aula. Desse modo, um estudante que tenha faltado uma sessão podia assistí-la posteriormente e realizar as situações propostas, deixando a sua resposta registrada.

Figura 23 – Configuração didática geral



Fonte: Ilustrado pelo autor

Quadro 4 – Artefatos, papéis e atores

Artefato	Ator	Papel do artefato
Notebook	Mediador, monitores, estudantes	Dispositivo sede de todos os artefatos, acesso principal à videoconferência e ao software Geogebra.
Smartphone	Mediador, monitores, estudantes	Dispositivo auxiliar, acesso à videoconferência, e-mail, *G-Drive* e documentos.
Geogebra	Mediador, monitores, estudantes	Artefato central da orquestração, no qual as situações matemáticas foram exploradas.
E-mail	Mediador, monitores, estudantes	Comunicações relativas ao curso, *link* de acesso à videoconferência, envio de documentos (termo de ciência livre e esclarecido).
Videoconferência (*Google Meet*)	Mediador, monitores, estudantes	Ambiente para: comunicação em vídeo entre os atores no modo síncrono, registro dos dados em vídeo, áudio e chat, além do compartilhamento da tela.
Gravador de tela (*Atube Catcher*)	Estudantes	Dispositivo de registro dos dados no modo assíncrono nos momentos em que os estudantes trabalharam individualmente nos seus computadores.
Portal Geogebra	Mediador e estudantes	Ambiente *online* para o armazenamento e realização das situações, nos casos em que fosse inviável a realização no computador pessoal.
Anotações	Mediador	Registro de observações pontuais do mediador.
Nuvem (*GDrive*)	Mediador monitores, estudantes	Armazenamento de todo o material do curso, situações, arquivos, planejamento, documentos, etc.
Apresentação (*Google*)	Mediador	Artefato para apresentar o curso na primeira sessão.
Texto online (*Google*)	Mediador, monitores e estudantes	Planilha de texto *online* usada para registrar as situações e permitir acessos e edição simultâneos de todos os sujeitos.
Questionário (*Google*)	Estudantes	Formulário *online* utilizado para a avaliação ao final do curso.

Fonte: Elaborado pelo autor

Descrevemos três configurações principais e os modos de execução associados, utilizados nas sessões de ensino:

- OI_1: o mediador expõe para a classe, compartilhando a tela do Geogebra do seu computador na videoconferência. Os estudantes assistem a tela do mediador, porém, também é possível que eles manipulem o Geogebra no seu próprio computador enquanto assistem, caso usem dois dispositivos (por exemplo, um *smartphone* e um computador) ou dividam a tela do computador em duas partes. Dúvidas e comentários podem ser feitos por meio do *chat* ou pelo áudio da videoconferência. Os monitores são responsáveis por auxiliar o mediador gerenciando o *chat*, resolvendo dúvidas, problemas isolados e registrando a frequência dos estudantes.

- OI_2: os estudantes exploram o Geogebra individualmente no seu próprio computador. A videoconferência é mantida em segundo plano, o mediador e os monitores não veem o trabalho dos estudantes, apenas gerenciam as dúvidas por meio do *chat* ou do áudio da videoconferência.
- OI_3: o mediador convida voluntários para apresentarem os seus resultados, suas estratégias de construção e interpretações. Cada estudante escolhido compartilha a sua tela com a sala.

Nas sessões 1 e 2, predominou a configuração da OI_1, devido à necessidade de que os estudantes desenvolvessem os seus esquemas de uso iniciais para explorar a covariação em funções, visto que a maioria deles não tinha conhecimento dessa perspectiva. Nas seções 3, 4, 5 e 6, a maior parte do tempo foi destinada às situações realizadas pelos estudantes, predominando a OI_2. A OI_3 foi utilizada de forma pontual em algumas sessões, porém, nem todos os estudantes pareciam à vontade para expor as suas construções, logo, ela só foi utilizada quando voluntários se sentiam confiantes em compartilharem a sua tela.

Uma quarta configuração foi planejada, porém, não executada devido a questões de viabilidade, trata-se da configuração na qual os estudantes iriam trabalhar em duplas, isolados da classe. Essa configuração seria interessante para a produção dos dados pela interação que emergiria entre os sujeitos; contudo, era mais complexa em termos de infraestrutura, devido à necessidade de abrir uma sala de videoconferência à parte para os estudantes compartilharem suas telas entre si, além de um outro recurso para que os estudantes pudessem acessar a mesma tela do Geogebra simultaneamente. Para isso, foi cogitado o uso do *Virtual Math Teams* (VMT), um ambiente que permite a atividade colaborativa e simultânea, todavia, a complexidade de gerenciar a atividade dos estudantes em uma sala à parte, a sua falta de experiência com o VMT e o tempo reduzido tornaram arriscada a implementação da configuração em duplas.

Na subseção seguinte detalhamos a concepção das situações, articulando-as com os objetivos de aprendizagem em termos da mobilização do raciocínio covariacional. Em seguida, retomamos a estruturação da orquestração para realizar uma análise *a priori* por meio da qual antecipamos possíveis usos e comportamentos dos estudantes com o Geogebra, articulando-os com aspectos da transposição informática envolvida em cada situação e as possíveis contribuições ou limitações no raciocínio covariacional dos estudantes.

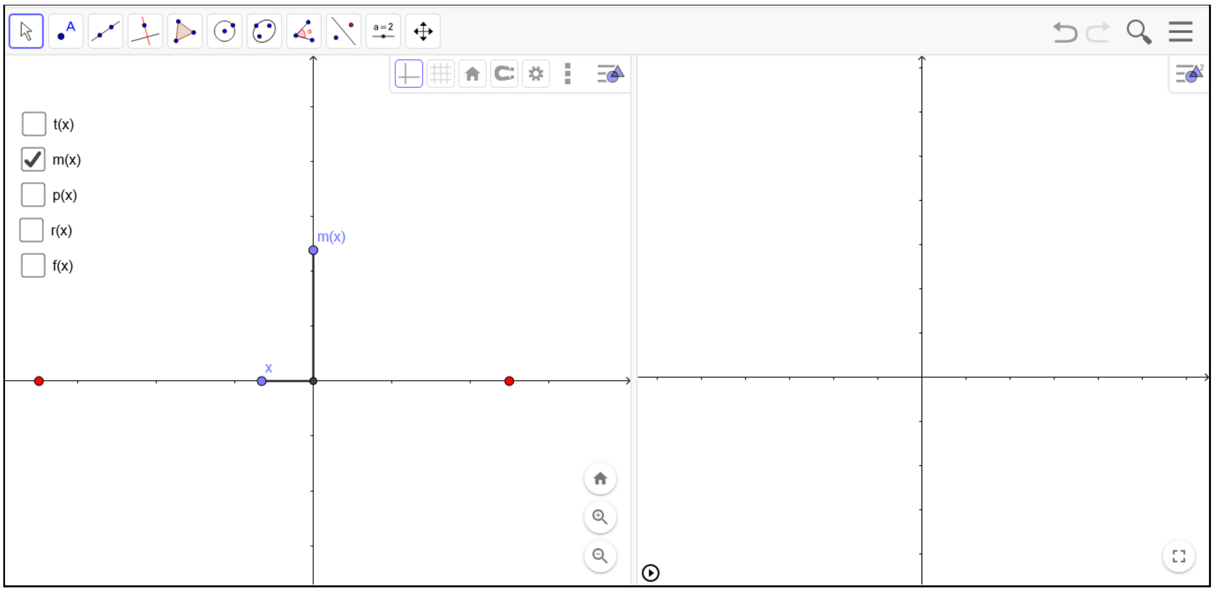
3.3.3 Descrição das situações

As situações aplicadas nas sessões 3, 4, 5 e 6 foram centrais para este estudo e receberam o foco na análise dos dados, embora outras também tenham feito parte do experimento de ensino como um todo. O objetivo principal, com essas situações, foi fomentar o raciocínio covariacional dos estudantes, por meio do suporte dos materiais do Geogebra. Definiu-se por uma abordagem da covariação sem ênfase em quantidades do contexto da vida real, por isso, nos referimos apenas a "variáveis".

Buscou-se relacionar as situações entre si sempre que possível, orientando-se por uma estrutura em espiral, de forma a integrar aspectos de uma em outra, para favorecer a mobilização dos esquemas dos estudantes. Partiu-se de situações mais simples da exploração da variação em y com a variação em x, para situações mais complexas, da quantificação da variação, da variação variável e das taxas de variação média e instantânea. Também foi dada ênfase na interpretação de aspectos como crescimento e decrescimento, concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão, descritos covariacionalmente.

Na situação 1A, uma adaptação baseada em Thompson *et al.* (2017), segmentos dinâmicos variáveis foram sobrepostos ao gráfico de coordenadas (Figura 24), representando a variação em x e em y. Funções foram atribuídas à covariação entre x e y, porém, o modelo algébrico foi omitido. Nessa perspectiva, era esperado que os estudantes descrevessem como o valor de y variava enquanto eles variavam x; em seguida, deveriam esboçar um gráfico para representar a covariação entre as variáveis.

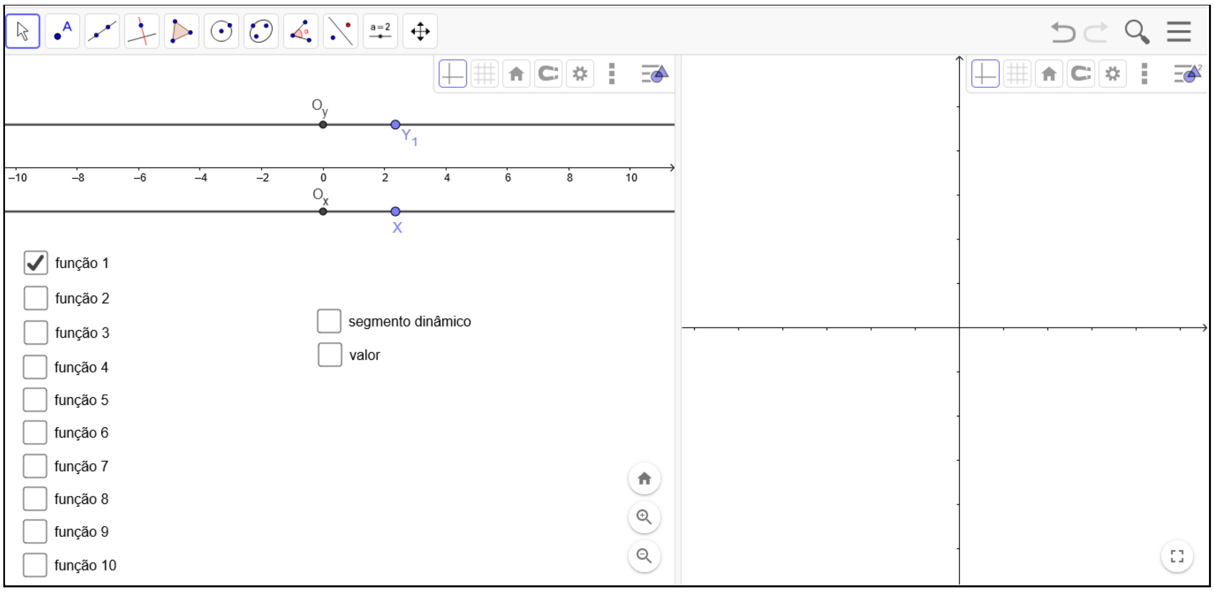
Figura 24 – Material da situação 1A



Fonte: Elaborada pelo autor com o Geogebra.

Na situação 1B foi implementada no Geogebra uma adaptação do Dynagraph (GOLDENBERG; LEWIS; O'KEEFE, 1992). O sistema de coordenadas ortogonal foi substituído por eixos paralelos (Figura 25), nos quais foram representadas as variáveis *x* e *y*, associadas a uma função pré-definida, porém, foi omitido o modelo algébrico. Os estudantes foram solicitados a descreverem como o valor de *y* variava enquanto eles variavam *x*; em seguida, deveriam esboçar um gráfico para representar a covariação entre as variáveis. Os dados da situação 1B foram considerados insuficientes, especialmente devido a problemas técnicos ocorridos na sessão 5, por isso, tal situação foi descartada para a análise dos dados.

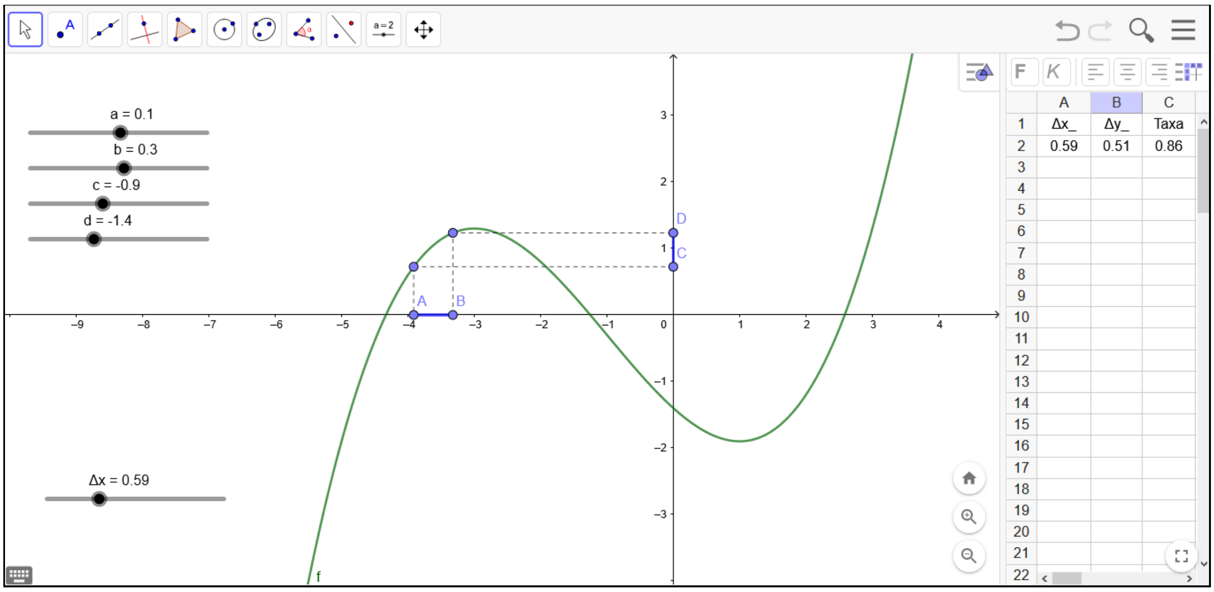
Figura 25 – Material da situação 1B



Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

Na situação 2, os estudantes foram solicitados a construírem pontos para representar variáveis no eixo coordenado e associá-las ao gráfico de uma função polinomial de grau 3 (Figura 26). Em seguida, foi pedido para os estudantes descreverem como a variação Δy variava em função de *x* (com Δx fixo) e, posteriormente, articularem essa interpretação com aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão. Por fim, os estudantes foram solicitados a escolherem um valor suficientemente pequeno para Δx e inferirem relações entre Δy/Δx e o comportamento da taxa instantânea em função de *x*, finalizando a situação com a construção do gráfico da taxa instantânea em função de *x*.

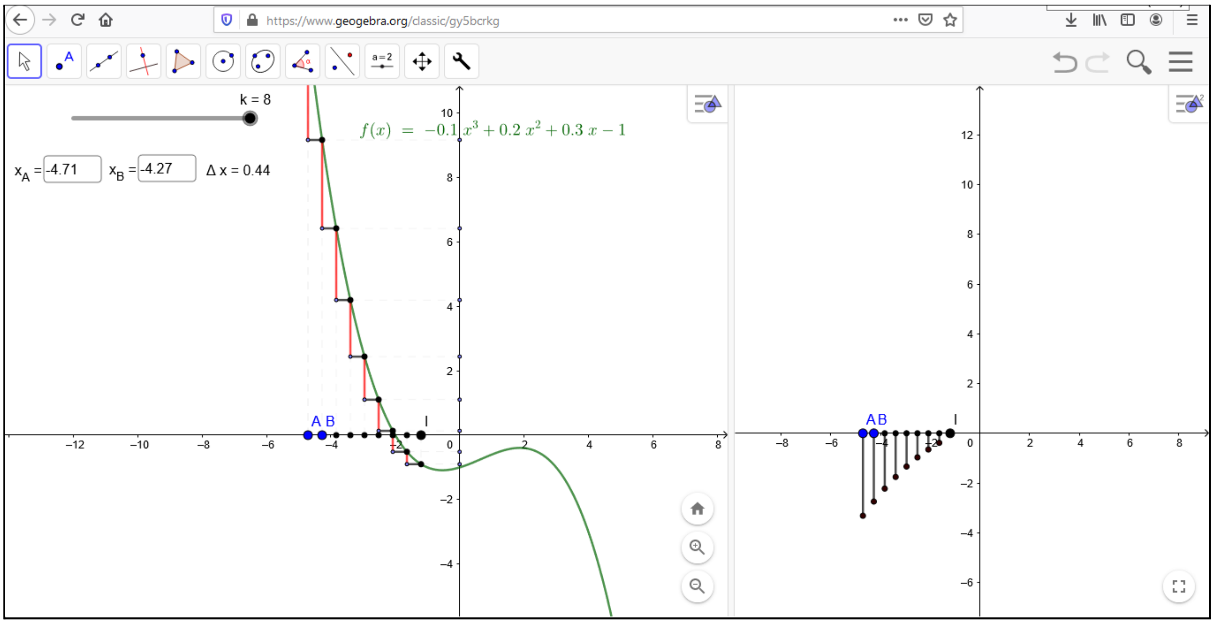
Figura 26 – Material da situação 2



Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra.

Na situação 3, uma janela exibiu o gráfico de uma função na qual foi implementada uma ferramenta nomeada “variações sucessivas” para representar a variação Δy em cada intervalo do domínio (Figura 27). Na outra janela, um outro gráfico conectado ao primeiro representou apenas os valores de Δy associados a segmentos dinâmicos. Os estudantes foram solicitados a relacionarem o gráfico da função com o das variações sucessivas, justificando as suas respostas em termos da covariação entre *x* e *y*. Em seguida, os estudantes foram solicitados a utilizarem a ferramenta “variações sucessivas” articulada a uma planilha dinâmica para construírem relações entre o modelo algébrico e a covariação nas funções pedidas.

Figura 27 – Material da situação 3



Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

Descreveremos, a seguir, a *análise a priori* de cada situação, articulando os objetivos aos aspectos da transposição informática da covariação no Geogebra e da transposição informática relativa ao material explorado na situação.

3.3.4 Análises *a priori*

A análise *a priori* é um processo integrado ao desenvolvimento de engenharias didáticas (ARTIGUE, 1996a) e, posteriormente, integrado como uma etapa de planejamento de orquestrações instrumentais (TROUCHE, 2005). O objetivo dessa análise é de antecipar eventos e comportamentos possíveis relacionados às variáveis didáticas envolvidas na situação e, por isso, leva em conta os possíveis comportamentos, estratégias (no nosso caso, esquemas), construções e dificuldades dos estudantes ao enfrentar as situações propostas.

No contexto da orquestração instrumental planejada em função dos nossos objetivos, integramos à análise *a priori* uma análise da transposição informática do material do Geogebra desenvolvido para a situação, a fim de antecipar possíveis relações entre os comportamentos, esquemas, construções e dificuldades dos estudantes com aspectos da transposição informática envolvidos no material que, salienta-se, é feita enfatizando-se aspectos da interface e da construção do material do Geogebra (não a programação do Geogebra em si, do universo interno).

De forma mais geral, utilizamos a análise *a priori* como um instrumento para antecipar e articular:

- Aspectos da natureza matemática das situações;
- Aspectos da orquestração instrumental da situação;
- Aspectos relacionados à transposição informática que incluem: características da programação e da interface do material do Geogebra, escolhas do *design*, possibilidades de suporte, dificuldades, equívocos, limitações e restrições relacionados ao artefato;
- Aspectos, processos e dificuldades de aprendizagem relacionados ao raciocínio covariacional.

Os resultados desta análise servem como uma referência para a análise dos dados uma vez que articulam os possíveis esquemas dos estudantes aos Quadros da Transposição Informática e do Raciocínio Covariacional. Assim, as possíveis relações entre o raciocínio covariacional e a influência da estruturação da atividade dos sujeitos pela transposição informática foram antecipadas. Do ponto de vista do planejamento da orquestração da situação, a análise *a priori* se mostrou um importante instrumento para prever as possíveis ações dos estudantes, permitindo ajustes e adaptações no desenho do material no Geogebra e nos modos de exploração previstos. Além disso, a análise permitiu preparar o pesquisador, como mediador, para possíveis fenômenos relacionados ao uso do artefato.

Salienta-se a importância da análise *a priori* como uma etapa que articula, de maneira mais detalhada, a situação matemática explorada com os aspectos do raciocínio covariacional que servem como critério para avaliar o desenvolvimento dos estudantes ao explorarem essas situações. Isto é, uma situação específica pode requerer a mobilização de aspectos diferentes de outra situação. Por consequência, essa articulação também tem um papel fundamental para a análise dos dados.

Outro aspecto importante é que a antecipação dos possíveis significados atribuídos pelos estudantes aos objetos (criados para o contexto da situação) reforçou a ideia de uma transposição informática complementar àquela do *design* do artefato; todavia, ligada ao *design* do próprio material, sendo realizada pelo professor ou pelo *designer* do material didático.

3.3.4.1 Análise *a priori* da situação 1A

A situação 1A envolveu dois itens cujos objetivos de aprendizagem foram: relacionar, descrever e representar a variação conjunta entre as variáveis nas funções pré-definidas a partir de uma simulação com segmentos variáveis. Os estudantes realizaram a situação de forma individual durante a sessão 3. A ficha da situação foi acessada por um documento de texto *online* do *Google Docs* armazenado no *Google Drive*, com acesso e edição compartilhados entre os participantes. Cada estudante foi orientado a criar um documento de texto *online* para registrar as suas próprias respostas. O tempo de execução previsto para a execução da situação foi de 40 minutos.

A situação 1A inicia-se com uma orientação prévia aos estudantes:

Abra o arquivo Atividade1A.ggb Na janela de visualização 1, ao selecionar uma função, o gráfico de coordenadas exibe segmentos que representam valores de *x* e da imagem de *x* para a função escolhida (por exemplo, f(x)). Ao variar a variável *x*, os valores da variável dependente variam simultaneamente. É possível variar *x* manualmente ou automaticamente, ao clicar no botão "play" no canto inferior esquerdo da tela do Geogebra.

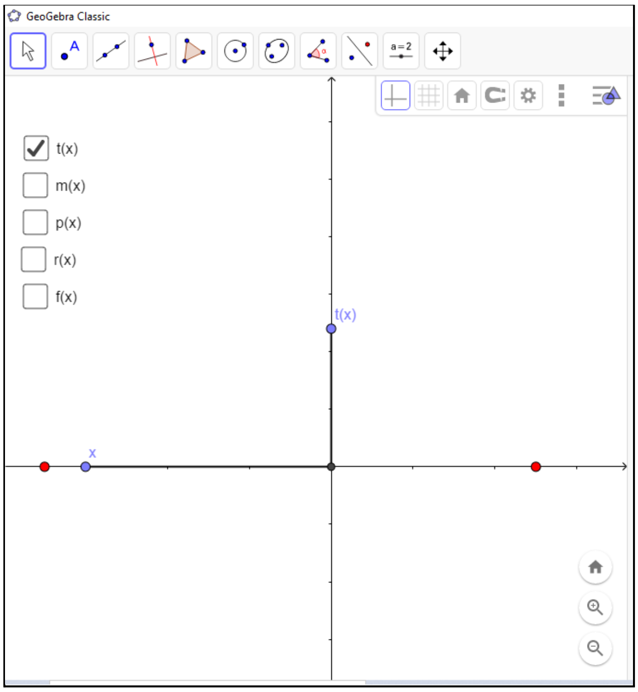
Em seguida, enuncia-se o item 1:

Descreva como varia a variável dependente em função da variação da variável x em cada função. a) t(x) b) m(x) c) p(x) d) r(x) e) f(x)

A tela inicial do material da situação 1A exibe uma janela com cinco caixas de seleção, cada uma associada a uma função pré-definida, porém, sem a exibição do modelo algébrico. No gráfico de coordenadas são exibidos: (i) dois pontos vermelhos, associados aos extremos do intervalo de variação em *x*; (ii) um ponto azul no eixo *x*, associado ao valor da variável x e um segmento formado por esse ponto e a origem; (iii) um ponto azul no eixo *y*, associado ao valor da variável da função selecionada e um segmento formado por esse ponto e a origem.

Ao variar o ponto em *x*, o ponto correspondente em *y* varia simultaneamente. Os segmentos dinâmicos em *x* e em *y* variam simultaneamente em relação à variação das respectivas variáveis. A variação pode ser feita manual ou automaticamente, acionando o comando "animar". Os estudantes foram solicitados a descreverem como a variável em *y* varia em função da variação em *x* em cada função (Figura 28).

Figura 28 – Tela inicial do item 1 do material da situação 1A no Geogebra



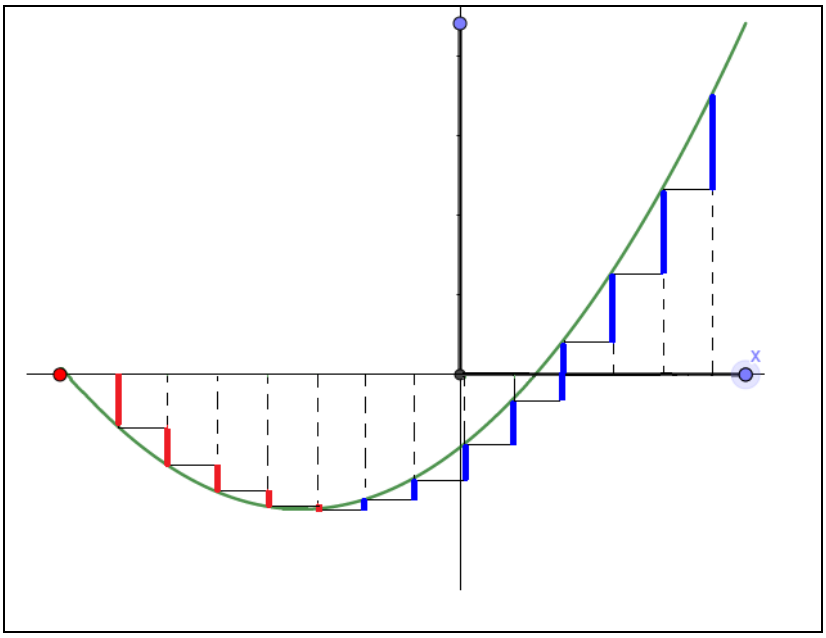
Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

Todas as funções abordadas são polinomiais. Dado o objetivo da situação, as funções polinomiais podem incluir aspectos do gráfico como: o crescimento e o decrescimento variável, pontos de máximo e mínimo, pontos de inflexão e concavidades, o que gera a oportunidade de abordar esses aspectos por uma interpretação covariacional.

A covariação em t(x), m(x), p(x), r(x) e f(x) envolve os seguintes aspectos:

- A função t(x) = -0,8x trata-se de uma função linear, na qual o valor de t (x) decresce com o crescimento de *x*. Acréscimos constantes em *x* levam a decréscimos constantes em t(x);
- A função m(x) = $-0,1(x+7)^2 + 8$ trata-se de uma função quadrática, decrescente na restrição ao intervalo [-7,5]. Acréscimos constantes em *x* levam a decréscimos cada vez maiores em m (x). Esses decréscimos têm variação constante em função de *x*.
- A função p(x) = $0,2018\ x^2 + 1,1206\ x - 1,8267$, também quadrática, no intervalo [-7,5] é inicialmente decrescente, atinge um mínimo e depois é crescente. Acréscimos constantes em *x* levam inicialmente a decréscimos cada vez menores em p(x), até que, para um valor dado de *x* (mínimo local), o decréscimo em p(x) é zero e, a partir desse valor, acréscimos constantes em *x* levam a acréscimos cada vez maiores em p(x). Os acréscimos em p(x) são crescentes em função de *x* e têm variação constante (gráfico côncavo para cima) (Figura 29).

Figura 29 – Ilustração da covariação em p(x) por acréscimos sucessivos constantes em x



Fonte: Elaborado pelo autor

- A função r(x) = $-0,0044\ x^4 + 0,0138\ x^3 + 0,3\ x^2 - 1,5173\ x - 2,4652$ é uma função de um polinômio de grau 4. Na sua restrição ao intervalo [-7,5], conforme x aumenta, r(x) aumenta por acréscimos cada vez menores, até que para um dado valor de x (máximo local) o acréscimo em r(x) se anula e, a partir desse valor, conforme x aumenta, r(x) diminui por decréscimos cada vez maiores, até um dado valor de x (ponto de inflexão), para o qual os decréscimos em r(x) passam a ser cada vez menores. Então, em um dado valor de x, o decréscimo é igual a zero e, a partir desse valor, conforme x aumenta, r(x) aumenta por acréscimos cada vez maiores.

- A função $f(x) = 0{,}001\ x^5 + 0{,}0116\ x^4 - 0{,}005\ x^3 - 0{,}2204\ x^2 + 0{,}3871\ x + 1{,}349$ tem por modelo algébrico um polinômio de grau 5. Na sua restrição ao intervalo [-7,5], conforme x aumenta, f(x) diminui por decréscimos cada vez maiores, até um dado valor de x (ponto de inflexão 1), para o qual os decréscimos em f(x) param de aumentar e passam a ser cada vez menores. Em um dado valor de x (mínimo local), o valor do acréscimo em f(x) se anula e, a partir desse valor, conforme x aumenta, f(x) aumenta por acréscimos cada vez maiores até um dado valor de x (ponto de inflexão 2) para o qual os acréscimos em f(x) param de aumentar e passam a ser cada vez menores. A partir desse valor, f(x) ainda possui mais um ponto de máximo, uma terceira inflexão e um segundo ponto de mínimo, nos quais as relações entre as variáveis são descritas em termos de acréscimos ou decréscimos em f(x) em função de x.

Foi esperado que as estratégias desenvolvidas pelos estudantes fossem influenciadas pelas características constitutivas do Geogebra e do material concebido para a situação. A variação dos segmentos variáveis implementados no eixo coordenado permite o foco em como as variáveis variam entre si, porém, os refinamentos de como ocorre a covariação entre y e x e os aspectos quantitativos dessa covariação podem não ser facilmente percebidos apenas pela variação dos segmentos; essa interpretação requer o suporte de outras ferramentas.

Outro aspecto da transposição informática é a relação entre a representação gráfica da função e os segmentos dinâmicos variáveis: na representação gráfica, pontos críticos, concavidades e pontos de inflexão têm características visuais específicas, porém, quando se realiza a transposição informática desses aspectos nos segmentos dinâmicos, os aspectos visuais são suprimidos junto com o gráfico. Assim, pontos de máximo local estão associados com os valores de *x* para os quais o valor do ponto representado em *y* para de aumentar e passa a diminuir (de forma oposta nos pontos de mínimo local); concavidade para cima está associada a um Δy crescente, para acréscimos constantes em *x* (de forma oposta na concavidade para baixo); pontos de inflexão estão associados com os valores de *x* para os quais Δy passa de crescente para decrescente, e vice-versa. Essas relações são importantes passíveis de descrição pois trazem implicações importantes dos efeitos de transposição informática nas formas pelas quais o uso do artefato estrutura o conhecimento construído.

A escolha pela implementação de segmentos associados a variáveis é justificada pelo potencial deste recurso para que o estudante coordene a covariação entre os valores das variáveis (o aumento ou diminuição do seu comprimento é diretamente associado ao aumento ou diminuição do valor da variável, já o sinal da variável é dado pela posição do ponto em relação à origem), em detrimento à opção de implementar apenas pontos variáveis.

O Quadro 5, abaixo, descreve a estrutura da implementação do material no Geogebra:

Quadro 5 – Implementação do material da situação 1A no Geogebra

- Definição dos pontos A(-7,0) e B (5,0), extremos do intervalo em x para delimitar o domínio de análise, e do ponto C (0,0)
- Definição das funções:
  - $t(x) = -0{,}8x$
  - $m(x) = -0{,}1(x+7)^2 + 8$
  - $p(x) = 0{,}2018\,x^2+1{,}1206\,x - 1{,}8267$
  - $r(x) = -0{,}0044\,x^4 + 0{,}0138\,x^3 + 0{,}3\,x^2 - 1{,}5173\,x - 2{,}4652$
  - $f(x) = 0{,}001\,x^5 + 0{,}0116\,x^4 - 0{,}005\,x^3 - 0{,}2204\,x^2 + 0{,}3871\,x + 1{,}349$
- Restrição das funções t(x), m(x), p(x), r(x) e f(x) ao intervalo $[x_A,x_B] = [-7,5]$
- Definição do ponto D (rotulado como x na tela) no eixo x (restrito ao intervalo [-7,5]), que representa a variável x; definição do segmento DC, associado ao valor da variável x. O ponto D (variável x) tem a propriedade de variar sobre o eixo x no intervalo dado, consequentemente, o segmento DC também varia nesse intervalo.
- Definição dos pontos no eixo y associados às funções t(x), m(x), p(x), r(x) e f(x). Esses pontos no eixo y são definidos em função da variável x, representada pelo ponto D, para 'amarrar' a variação no eixo y à variação em x. Como exemplo, o ponto E, associado à função f(x), é definido pelas coordenadas (0, f(x(D))).
- Definição dos segmentos associados à variável no eixo y e às funções definidas.
- Configuração de caixas de seleção para exibir/esconder objetos (estas caixas foram utilizadas para exibir os pontos em y e os segmentos associados a cada função apenas quando selecionados, a fim de evitar a sobreposição de objetos)
- Inibição da exibição de objetos da construção para efeitos de restrição do material ou de minimização da poluição visual. (gráficos das funções, modelo algébrico das funções, rótulos dos objetos, etc.)

Fonte: Elaborado pelo autor

As ferramentas ou possibilidades de ação do Geogebra que supomos que poderiam ser mobilizadas no item 1 da situação por se relacionarem às ações previstas para a sua realização foram:

- *Variação manual (manipulação direta) ou automática*: os estudantes podem variar a variável *x* manualmente ou podem ativar a animação automática de *x*. A variação automática pode fornecer uma visão mais compacta e uniforme da covariação no intervalo, além de permitir associar a variação da variação em *y* com a variação da velocidade do ponto em *y*, conforme o ponto em *x* varia a uma velocidade uniforme. Já a variação manual coloca nas mãos do estudante a coordenação e a 'velocidade' do deslize, permitindo direcionar a sua atenção ao intervalo do seu interesse, além de permitir uma abordagem discreta da covariação, ao posicionar o ponto associado a *x* em valores específicos e observar o valor correspondente em *y* ou construir uma tabela que associe os valores em *x* e em *y*.
- *Malha, marcações e numerações no eixo*: as marcações e numerações nos eixos podem dar suporte à análise dos aspectos quantitativos da covariação, como saber o quanto f(x) varia com a variação em *x*. Quantificar a covariação vai além de perceber se uma variável está aumentando ou diminuindo em relação à outra (THOMPSON; CARLSON, 2017). A malha pode dar suporte à análise conjunta, por permitir uma forma de segmentação (embora não numérica) do eixo em partes iguais.
- *Valor dinâmico da variável:* este recurso permite que, enquanto a variável varia, o valor assumido por ela seja exibido simultaneamente na tela, dando suporte à construção de uma imagem quantitativa da covariação representada nos segmentos dinâmicos.
- *Planilha:* a planilha tem a característica de relacionar, de forma articulada, variações em uma variável com variações em outra variável, favorecendo potencialmente uma análise da covariação. No item 1 da situação, a planilha pode ser mobilizada para gerar uma tabela que relaciona variações sucessivas em *x* com variações correspondentes em *y*. O uso da planilha pode ser interpretado como a necessidade de os estudantes segmentarem a covariação, dada a sua dificuldade em interpretá-la na forma contínua.

Partimos da hipótese de que, por um lado, nos certificamos que os estudantes têm consciência das possibilidades de ação disponíveis para a resolução da situação; por outro, disponibilizamos na tela apenas os recursos mais básicos, de forma que a mobilização desses recursos fosse uma ação dos próprios estudantes.

As restrições e limitações associadas ao uso do artefato na situação também foram consideradas. Essas restrições são condições associadas às características constitutivas e às escolhas de *design* do artefato que implicam na limitação ou na estruturação da atividade dos estudantes em função dos objetivos da situação. Essas restrições não são necessariamente negativas ou fontes de dificuldades, contudo, são levadas em consideração para entender como os estudantes usam o artefato para realizar a situação. São algumas delas:

- *Condição inicial da tela sem numeração no eixo, exibição de valores e malha* (escolha didática do *design* do material da situação): a justificativa dessa escolha foi a hipótese de que os recursos são mobilizados pelos estudantes de acordo com as necessidades que emergem durante suas ações, o que indica como os seus esquemas estão se orientando e se desenvolvendo na situação.
- *Restrição de não acessar o gráfico e o modelo algébrico das funções* (escolha didática do *design* do material da situação): foi inibida qualquer referência à forma do gráfico e ao modelo algébrico das funções que pudessem antecipar propriedades das funções não relacionadas aos objetivos e que pudessem desviar os estudantes de uma análise covariacional.
- *Restrição de não usar as ferramentas P(x,y) e rastro do ponto* (escolha didática do *design* do material da situação): A partir do uso da ferramenta "ponto", pode ser criado um ponto P definido por coordenadas x e y dadas no gráfico. Ao ser criado e animado, o ponto pode antecipar a forma do gráfico com o uso do recurso "rastro do ponto". O uso desses recursos pode desviar o estudante da construção conceitual do gráfico como representação da covariação entre a variação em x e y. Logo, planejou-se que o uso dessas ferramentas não seria incentivado/sugerido para a exploração inicial da situação.
- *Segmentos para representar variáveis* (restrição relacionada à transposição informática específica do material da situação): a escolha por segmentos para

representar variáveis tem o seu potencial de contribuição uma vez que facilita o processo de observar a variação em uma variável, ao associar o valor da variável ao comprimento do segmento. No entanto, a metáfora do comprimento revela um efeito de transposição informática relacionado à possibilidade de a variável assumir valores negativos, mas o valor do comprimento, não. Nesse ponto, o estudante precisa compreender que, na parte negativa dos eixos *x* e *y*, mesmo que visualmente o comprimento do segmento esteja aumentando, o valor da variável precisa ser interpretado com o sinal negativo. Nesse sentido, foi esperado que a apropriação dos estudantes do sistema de coordenadas fosse suficiente para evitar equívocos e dificuldades nesse sentido.

Também foram previstas possíveis dificuldades baseadas na literatura sobre a aprendizagem de funções por uma perspectiva covariacional, de maneira articulada ao uso do artefato:

- *Não coordenar a variação em x com a variação em y:* os estudantes podem se limitar a descrever a variação no eixo *y*, sem menção a variação no eixo *x*, ou de forma desarticulada. Esta dificuldade é reportada pela literatura em diferentes tipos de representação, mesmo com suporte computacional dinâmico (ELLIS *et al.*, 2016; ARANDA; CALLEJO, 2017; NAGLE *et al.*, 2017).
- *Não coordenar as variações na variação em y com a variação em x:* nos casos em que a variação em *y* não é constante para variações constantes em *x*, essa variação pode não ser percebida pelos estudantes. As descrições podem se limitar a "f(x) aumenta conforme x aumenta". A forma como os estudantes escolhem manipular a variável *x* (manualmente ou automaticamente) pode influenciar na sua percepção desse aspecto, pois a uniformidade na variação de *x* e a consequente percepção de que há uma variação na variação em *y* é muito mais clara no modo automático, já que, no modo manual, a "velocidade" com a qual *x* varia está nas mãos do estudante e dificilmente se consegue uma variação uniforme em *x* dessa maneira. Foi esperado que a mobilização de ferramentas como a malha, as marcações e as numerações no eixo, o valor dinâmico da variável e a planilha desse suporte para os estudantes distinguirem

a variação na variação, pois essas ferramentas podem articular variações em *y* com variações uniformes em *x*.

- *Não raciocinar com base em aspectos quantitativos da variação:* os estudantes podem se limitar a descrever a variação relativa como “f(x) aumenta quando *x* aumenta”, sem se referir a aspectos quantitativos como “o quanto f(x) aumenta ou diminui em relação a *x*”. A quantificação da variação é mais uma das dificuldades relatadas sobre o raciocínio covariacional (LAGRANGE, 2014; ELLIS *et al.*, 2016; MOORE, 2014). Na situação específica, tal dificuldade pode emergir principalmente pela forma dinâmica e, inicialmente, sem unitização (malha, numerações, etc) como os segmentos variam, porém, a mobilização de ferramentas específicas como as citadas podem dar um suporte para superar esta dificuldade.
- *Não relacionar pontos críticos, pontos de inflexão e concavidades, com a covariação em x e y*: embora os estudantes identifiquem pontos e intervalos nos quais as variáveis mudam de comportamento, eles podem não interpretar o que essas mudanças significam covariacionalmente. Além disso, foi destacado anteriormente como a transposição informática da representação gráfica para uma representação dinâmica de segmentos variáveis faz emergir novos significados para a covariação associados à nova representação. A percepção e a interpretação desses aspectos estão relacionadas à compreensão da variação na variação no contexto dos segmentos variáveis. É possível, ainda, que o modo automático de variação em *x* permita uma melhor percepção da variação na variação em relação à variação manual, devido à uniformidade na variação em *x* possibilitada nesse modo.
- *Não interpretar a covariação no eixo coordenado*: as dificuldades dos estudantes podem estar relacionadas à instrumentação do próprio eixo coordenado, pois, além de a representação de segmentos dinâmicos não ser a experiência comum dos estudantes com o sistema de coordenadas, as variáveis representadas variam em direções e sentidos diferentes no eixo. É preciso coordenar uma variação na vertical com uma variação na horizontal. Assim, esse tipo de dificuldade está relacionada tanto com a representação no sistema

de coordenadas, como com a forma como as variáveis, representadas por objetos dinâmicos, variam nesse sistema.

- *Interpretar o valor da variável como sendo o comprimento do segmento:* a associação da variação da variável com a variação do comprimento do segmento está relacionada à transposição informática no design do material da situação. No entanto, pode emergir o equívoco de interpretar o valor da variável como o próprio valor do comprimento do segmento que não assume valores negativos. Para fugir desse equívoco, os estudantes precisam levar em consideração que, quando o segmento está na parte negativa do eixo, o valor da variável deve ser negativo.
- *Assumir que a variação em y é constante em todas as funções*: este equívoco está relacionado à dificuldade em coordenar a variação na variação em *y*

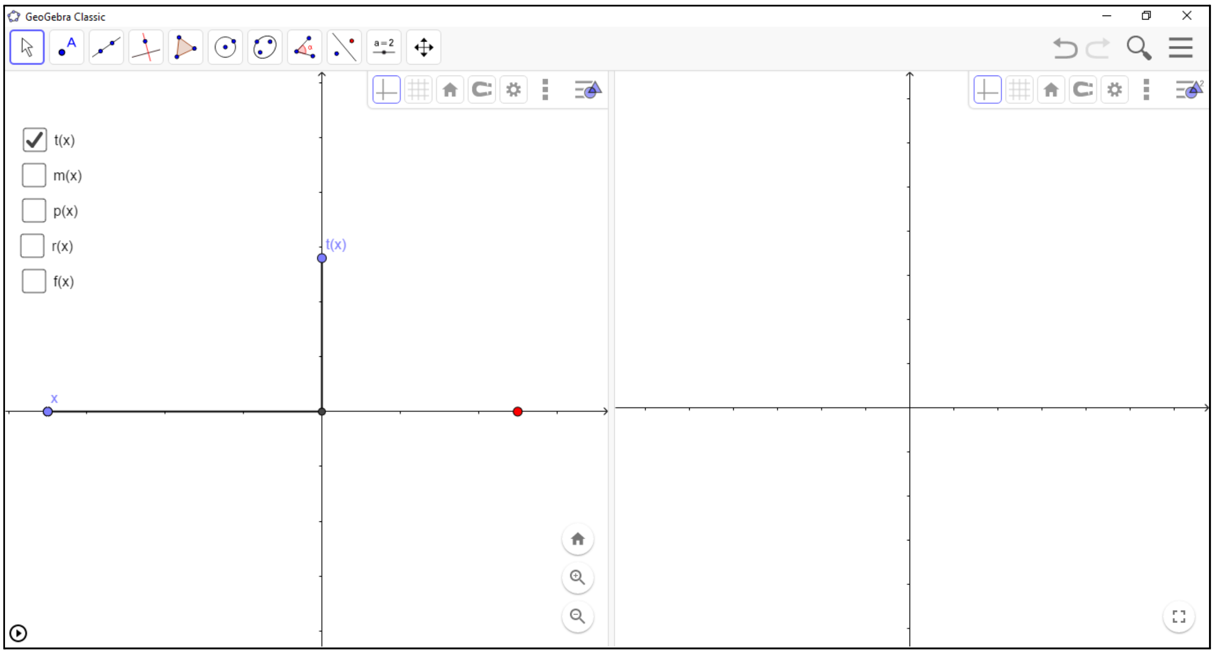
O item 2 da situação 1A teve por objetivo representar a variação conjunta entre as variáveis, por meio de um gráfico. O enunciado deste item é apresentado a seguir:

Na janela de visualização 2, esboce um gráfico que na sua opinião mais se aproxima do gráfico de cada função selecionada. *(Após esboçar o gráfico, clique na tela da janela de visualização 2 -> Menu -> Exportar imagem -> copiar para a área de transferência, em seguida cole (CTRL+V) o gráfico na ficha de resposta da atividade)*

a) t(x)
b) m(x)
c) p(x)
d) r(x)
e) f(x)

Como é possível verificar no item acima, foi pedido que o estudante esboçasse um gráfico para representar cada função descrita no item 1 da situação, o que requer conceber o gráfico como representação da covariação entre as variáveis representadas pelos segmentos dinâmicos (Figura 30).

Figura 30 – Tela inicial no material do item 2 da situação 1A no Geogebra



Fonte: Elaborada pelo autor com o Geogebra

As possibilidades de ação e ferramentas relacionadas ao esboço do gráfico foram:

- *caneta:* permite desenhar formas livres em geral. Este recurso se aproxima mais do "papel e lápis" por seu deslize contínuo na tela, o que possibilita que o estudante desenhe o gráfico de acordo com a sua concepção da variação conjunta entre as variáveis. Dessa forma, pode ser útil para que o estudante em conceitualização inicial expresse suas primeiras ideias sobre a covariação e, para o estudante em conceitualização avançada, expresse como ele concebe a covariação contínua e as relações com a forma do gráfico, como pontos de inflexão, concavidades, máximos e mínimos, etc.
- *função à mão livre:* a diferença deste recurso para a caneta é que, após os estudantes desenharem uma forma, o Geogebra transformará o desenho em um gráfico de uma função ou em um objeto geométrico, pelo critério de aproximação com o desenho realizado.
- *definir pontos do gráfico no sistema de coordenadas:* por meio do recurso definir ponto, os estudantes podem criar um subconjunto de pares ordenados que eles imaginam que possam estar contidos no gráfico da função. A partir desses pontos, eles podem desenhar um esboço do gráfico com a caneta. O uso desse recurso pode estar relacionado a uma construção da covariação discreta e

segmentada, o que pode apontar que os estudantes ainda não têm uma imagem da covariação contínua suave.

- *gráfico a partir de uma lista de pontos da planilha:* mediante uma lista de valores de x e y gerados na planilha, os estudantes também podem criar um subconjunto de pares ordenados e usar o recurso "criar lista de pontos" para representar os pares ordenados no gráfico. A partir desses pontos, o gráfico pode ser esboçado. Este recurso também pode revelar uma estratégia de construir o gráfico ponto a ponto, de forma discreta e segmentada, com o suporte adicional da planilha para interpretar a covariação por incrementos sucessivos em x e a variação correspondente em y.
- *rastro de um ponto:* permite gerar um rastro do ponto conforme haja o deslize na tela e, pode-se coordenar os valores em x e em y conforme se desliza o ponto. A função 'rastro' é semelhante à função 'caneta' e permite uma exploração da covariação contínua suave, porém, uma vez gerado o rastro do ponto, ele desaparece após um movimento qualquer do usuário na tela.

As possíveis limitações e restrições associadas ao item 2 da situação 1A foram:

- *Esboçar o gráfico com base na variação conjunta das variáveis associadas aos segmentos dinâmicos, ou seja, converter de uma representação para outra**:*** Geralmente, o esboço de gráficos é feito a partir de um conjunto de pares ordenados da função, contudo, nesta situação, os estudantes precisam desenhar a curva enquanto coordenam a variação simultânea entre os valores em x e em y. Três caminhos podem se configurar como estratégias a partir desta estruturação: (i) desenhar o gráfico por um deslize contínuo enquanto se observa a variação conjunta em x e y (pode ocorrer caso o estudante opte pela variação contínua de x, ou caso ele encene a covariação mentalmente enquanto desenha o gráfico); (ii) desenhar o gráfico a partir de um conjunto de pares ordenados (pode ocorrer caso o estudante opte por gerar uma lista de valores de x e y associados, com suporte da planilha ou diretamente no gráfico); (iii) antecipar o formato do gráfico ao relacionar o comportamento da variação das variáveis a algum tipo de função.

- *As restrições iniciais descritas no item 1 desta situação permaneceram como estruturantes neste item 2*: condição inicial da tela sem numeração no eixo, exibição de valores ou malha, não acessar o gráfico nem o modelo algébrico das funções, variáveis representadas por segmentos variáveis, etc. A exceção foi quanto às ferramentas "rastro de um ponto" e "coordenadas de um ponto", que foram possibilidades de ação disponíveis para este item.
- Também houve *restrições relacionadas ao tipo de recurso* mobilizado e a forma como esses recursos são usados, como por exemplo:
    - *Caneta:* apesar da flexibilidade permitida pela caneta, o desenho feito usando esse recurso não é tratado matematicamente pelo *software* e, consequentemente, não é conectado com outras representações. Além disso, é preciso uma boa coordenação motora para utilizá-lo, podendo facilmente deformar o desenho pretendido. Uma vez feito, também não é possível corrigir o desenho.
    - Com relação ao uso das ferramentas caneta, função à mão livre e rastro, um requisito comum ao seu uso é que os estudantes tenham uma imagem prévia da forma do gráfico ou do intervalo que vão representar, ou que construam essa imagem simultaneamente enquanto observam a variação dos segmentos dinâmicos. Já ao utilizar os recursos da planilha e da definição de pontos no gráfico, a forma do gráfico pode emergir para o estudante a partir dos pontos definidos no gráfico.
    - As ferramentas que permitem desenhar o gráfico por meio de um deslize contínuo (caneta, função à mão livre, rastro) são limitadas quanto aos aspectos da quantificação e da variação da variação, podendo fazer emergir dificuldades nesses aspectos, caso não sejam mobilizados com o suporte de outras ferramentas. Já os recursos que permitem representar a covariação de forma discreta e segmentada (definir pontos, planilha) focam em aspectos quantitativos e discretos da variação, porém, são limitados para representar o gráfico de forma contínua e demandam que o estudante infira a continuidade do gráfico e o que ocorre "entre pontos" ou "entre as linhas da planilha". Por exemplo, dependendo do valor de Δx, pode não se dar conta de

intervalos onde há variação na variação, que modifique a forma do gráfico, como nos pontos de inflexão.

As dificuldades e equívocos previstos no item 2 da situação 1A incluíram:

- *As dificuldades listadas no item 1 desta situação* que podem refletir diretamente na construção do gráfico. Por exemplo, a dificuldade em coordenar a variação em y com a variação em x pode dificultar a concepção de um objeto multiplicativo das variáveis (SALDANHA; THOMPSON, 1998) e a criação do gráfico como representando a variação desse objeto. Já as dificuldades em coordenar a variação variável e em quantificar a covariação podem ser entraves para expressar esses aspectos graficamente por meio de alterações na forma do gráfico (concavidades, pontos de inflexão etc.)
- *As dificuldades dos estudantes com o sistema de representação do gráfico* podem estar na origem das dificuldades em esboçar o gráfico das funções a partir dos segmentos dinâmicos. A literatura mostra dificuldades dos estudantes em representar e interpretar funções graficamente (MOORE, 2014; YEMEN-KARPUZCU; ULUSOY; IŞIKSAL-BOSTAN, 2017). Além disso, no contexto da covariação, a visão estática e pictórica do gráfico não contribui para a concepção do gráfico como uma representação da covariação entre variáveis (pensamento da forma emergente).

3.3.4.2 Análise *a priori* da situação 2

A situação 2 foi constituída de três itens cujos objetivos de aprendizagem foram os seguintes:

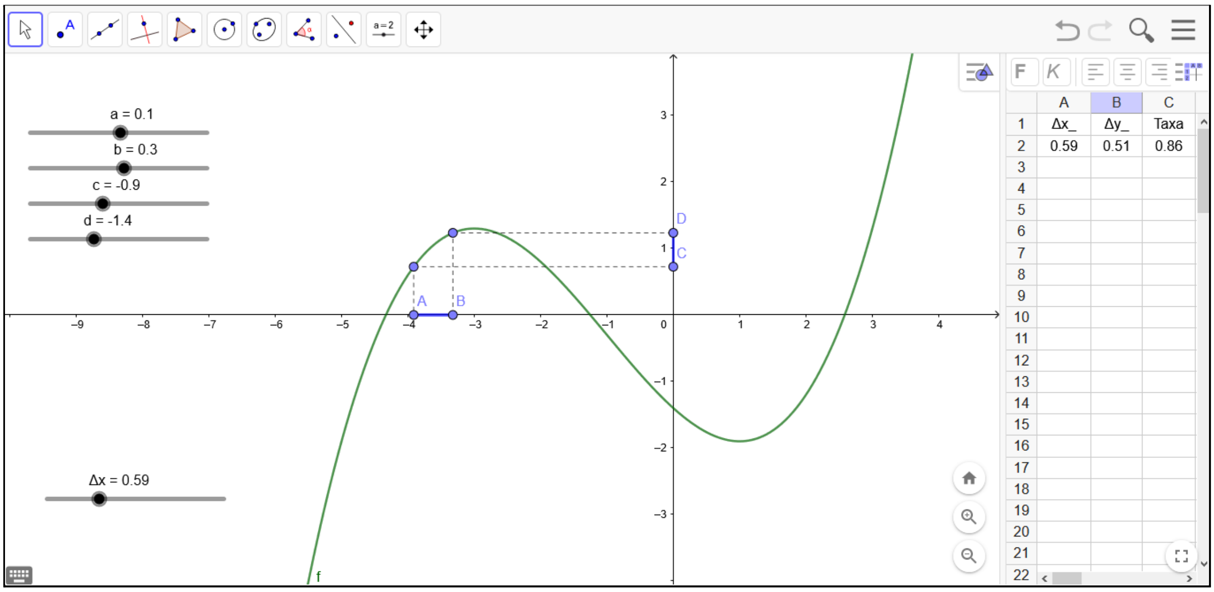
- Descrever, para uma função dada, a variação de Δy (variação variável) em função de x e Δx, e relacioná-la com aspectos do gráfico da função;
- Inferir relações entre a variação da taxa de variação instantânea e aspectos do gráfico da função;
- Representar graficamente a taxa de variação instantânea, relacionando o gráfico da taxa com o gráfico da função.

Os estudantes exploraram a situação de forma individual, durante a sessão 5. A ficha escrita foi acessada por um documento de texto *online* do *Google Docs* armazenado no *Google Drive*, com acesso e edição compartilhados entre os participantes. Cada estudante foi orientado a criar um documento de texto *online* para registrar as suas próprias respostas. O tempo de execução previsto para essa atividade foi de 40 minutos.

Os discentes foram encorajados a produzir o material da situação no Geogebra como forma de desenvolverem a sua instrumentação no *software* e a habilidade de construir materiais. Dessa forma, os alunos foram solicitados a construir pontos para representar as variáveis no gráfico de uma função polinomial de grau 3 e um controle deslizante para variar o valor de Δx.

A partir do material construído (Figura 31), os estudantes foram solicitados a descrever como a variação Δy variava em função de *x* (inicialmente com um Δx fixo) relacionando essa variação com aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão. Essa relação também deveria ser inferida com uma simulação da taxa de variação instantânea, fazendo o valor de Δx pequeno o suficiente. No último item, os estudantes deveriam esboçar o gráfico da taxa instantânea em função de *x*.

Figura 31 – Tela do material do Geogebra na situação 2



Fonte: Elaborado pelo autor

A situação inicia-se com uma orientação aos estudantes que inclui passos para a construção do material a ser explorado:

- *Construa um modelo de função polinomial de grau 3: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Construa controles deslizantes e atribua valores aos coeficientes a, b, c e d.*
- *Construa dois pontos no eixo x, tais que suas coordenadas no eixo x sejam $x_B = x_A + \Delta x$, com Δx um valor positivo. Construa um controle deslizante para Δx.*
- *Construa dois pontos no eixo y, tais que suas coordenadas no eixo y sejam $y_A = f(x_A)$ e $y_B = f(x_B)$.*
- *Você pode exibir os valores de $\Delta x = x(B)-x(A)$ e $\Delta y= f(x(B))-f(x(A))$ na planilha.*
- *Caso tenha dificuldades na construção destes passos, acesse o arquivo por este link: https://www.geogebra.org/classic/yvegkx54*

Em seguida, inicia-se o item 1:

Defina um valor para Δx e varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente. Responda:

a) Descreva como a variação Δy (variação no eixo y) varia em função dos valores assumidos por x_A e x_B. Teste outros valores de Δx e descreva o comportamento de Δy.

b) Como a variação Δy se comporta quando a concavidade do gráfico é voltada para cima? E quando é voltada para baixo? E nos pontos de máximo, mínimo e inflexão?

A partir de um modelo de função polinomial de grau 3, os estudantes são levados a explorar o aspecto da variação variável em *y* em função de *x*, ou seja, como Δy varia em função de *x*, considerando inicialmente Δx fixo. Nessa perspectiva, o que está em jogo é interpretar a taxa de variação da função. Inicialmente, a taxa de variação média, para um valor dado de Δx e, posteriormente, uma simulação para construir inferências sobre a taxa de variação instantânea, fazendo Δx suficientemente pequeno.

Para interpretar como a taxa de variação se relaciona com a variação da função, o desenho do material enfatizou a articulação entre os aspectos do gráfico da função, como intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades e pontos de máximo, mínimo e inflexão e o valor numérico da variação de Δy, para um Δx dado. Foi escolhido um modelo de função polinomial do grau 3, especialmente, porque esse tipo de função inclui todos os aspectos do gráfico descritos.

Do ponto de vista do raciocínio covariacional, está em jogo a coordenação de uma covariação complexa entre x, *Δx* e *Δy*, pois a variação em *y* depende não só de *x*, mas também do valor de *Δx*. A situação também requer um raciocínio em termos de como esse comportamento relativo de *Δy* pode ser articulado à forma do gráfico da função, das diferentes concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão.

O Quadro 6 descreve a estrutura da implementação do material no Geogebra. Os estudantes foram encorajados a implementar o material de forma autônoma, porém, foi disponibilizado o *link* do material para aqueles que não tivessem sucesso, já que o objetivo em si era explorar matematicamente o material.

Quadro 6 – Implementação do material da situação 2 no Geogebra

- Construção de um modelo geral de função polinomial de grau 3
  - Criação dos controles deslizantes a, b, c e d;
  - Definição da função $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.
- Construção de pontos e segmentos para representar variáveis e a variação *Δx e Δy* entre elas
  - Definição do ponto A como um ponto livre no eixo x;
  - Criação do controle deslizante *Δx,* configurado para variar entre 0,0001 e 2;
  - Definição do ponto B no eixo x como B=(x(A)+*Δx*, 0). O ponto B varia em função de A e de *Δx*;
  - Definição dos ponto C e D no eixo y, C=(0,f(x(A))) e D=(0,f(x(B)));
  - Definição dos segmentos DC e BA, para representar as variações *Δy* e *Δx*, respectivamente
  - Definição dos pontos E e F no gráfico de *f*, F = (x(A), f(x(A))) e E=(x(B), f(x(B)))
  - Definição dos segmentos i, j, k, l para conectar os pontos no gráfico da função aos pontos correspondentes no eixo x e y. Aplicado o estilo tracejado nos mesmos segmentos.
  - Configurada a inibição da exibição de rótulos não essenciais (nomes de pontos e segmentos auxiliares), para evitar a poluição visual da construção. (Pontos E e F; segmentos i, j, k ,l, BA e DC)
  - Configuração da cor dos segmentos: azul, se *Δy* > 0; rosa, se *Δy <0.*
  - Definição e exibição dos valores *Δx, Δy e Δy/Δx* na planilha (A relação *Δy/Δx* foi explorada a partir do item 2)

Fonte: Elaborado pelo autor

O desenho do material levou em consideração o foco da situação: explorar a variação de *Δy* para interpretar a taxa de variação média e a taxa de variação instantânea no gráfico. Assim, algumas implementações foram considerados essenciais para o suporte a essa exploração: (i) representar dois pontos (A e B) associados aos valores (x_1 e x_2) da variável em *x* e dois pontos (C e D) associados aos valores (y_1 e y_2) da variável em *y*; (ii) permitir a variação conjunta dos valores x_1 e x_2, pré-fixando um valor para *Δx* por meio de um controle deslizante e definindo o valor de x_2 como sendo igual a $x_1 + \Delta x$; (iii) associar a variação de y_1 e y_2 aos valores correspondentes em *x*, permitindo a exibição de Δy variando dinamicamente ao variar as variáveis em *x* e a exibição do valor de Δy e $\Delta y/\Delta x$ na planilha.

A forma de implementar os pontos no gráfico foi particularmente importante pelo seu papel em estruturar a forma de explorar a variação de x_1, x_2 e, consequentemente, Δy. A escolha poderia ser feita, ao menos, de duas formas: (i) ponto A (valor x_1) livre no eixo *x* e ponto B (valor x_2) definido em função de $x_1 + \Delta x$; (ii) ponto A e ponto B livres no eixo x, valor de Δx definido pela diferença $x_2 - x_1$. A escolha da primeira opção possibilita variar x_1 e x_2 simultaneamente e determinar previamente a diferença Δx entre eles por meio de um controle deslizante; por outro lado, a segunda forma dificultaria a variação simultânea de x_1 e x_2 (os pontos A e B seriam independentes entre si) e não permitiria pré-fixar o valor de Δx, a não ser pela variação dos valores de x_1 e x_2.

Além disso, visando o item 2 – no qual se pede que o valor de Δx seja variado a um valor muito pequeno – a manipulação de Δx por um controle deslizante (que permite pré-configurar um valor mínimo e máximo alcançado pelo controle) se mostra mais prática para alcançar valores pequenos de Δx, em vez de criar pontos livres e obter um Δx pequeno pela aproximação sucessiva desses pontos (neste caso, a sequência de ações seria mais complexa, demandaria mais tempo e afetaria a exibição do gráfico, pelos sucessivos usos do *zoom* para observar a aproximação entre os pontos). Esta questão é um exemplo de como as escolhas de *design* podem afetar completamente a forma de explorar o material.

Definidas as questões de implementação do material, as possibilidades de ação e as ferramentas para tomada de informação relacionadas ao item 1 são as seguintes:

- *Variação manual (manipulação direta) ou automática de x*: para observar como Δy varia em função de *x* e de um valor dado de Δx, é necessário variar o valor de *x*, por meio do ponto A, e observar a variação em Δy. Essa variação pode se dar manual ou automaticamente. Como descrito no caso da situação 1B, com a velocidade do deslize nas mãos do sujeito, é possível direcionar o foco da variação no intervalo escolhido, além de facilitar uma abordagem discreta da covariação, por facilitar a formação de uma lista de valores. Já o modo automático, apesar do automatismo, tem a mesma restrição da situação 1B: como os pontos que representam as variáveis são construídos sobre o eixo *x*, pontos são animados com uma velocidade variável, o que pode dificultar quantificar variações em *y* em função de variações em *x*.

- *Malha, marcações nos eixos, segmentos dinâmicos e valor da variável na planilha*: essas ferramentas de tomada de informação podem ser mobilizadas para visualizar e quantificar o valor da variação Δy. Cada uma com características específicas – como descritas nas análises das situações 1A e 1B – permite abordagens para discretizar e segmentar a variação (planilha, marcações, malha), além de admitir abordagens para uma imagem contínua da variação (segmentos dinâmicos).
- *Zoom ampliar ou reduzir*: a ferramenta *zoom*, pode ser mobilizada para minimizar a restrição dos limites de exibição do gráfico na tela e possibilitar uma análise para valores 'muito grandes' ou 'muito pequenos' em x e em y.
- *Controles deslizantes*: os controles deslizantes foram criados para (i) definir a função polinomial de grau 3 por meio dos seus coeficientes, o que permite explorar o comportamento da variação de Δy para diferentes funções do mesmo tipo e (ii) definir e variar o valor de Δx, o que permite observar o comportamento da variação de Δy para diferentes valores de Δx e analisar o padrão dessa variação, relacionando-a com aspectos do gráfico da função.

De modo geral, as principais restrições do material da situação relacionadas ao item 1 envolvem:

- *A complexidade em interpretar o que está variando na construção* (restrição relacionada à transposição informática específica do material da situação): relaciona-se a como o material foi implementado para permitir uma articulação entre aspectos do gráfico e a variação de Δy. Nesse sentido, conforme já foi argumentado, ao mesmo tempo que o material permite visualizar essas relações de forma dinâmica e contínua, também envolve a complexidade de conceber e coordenar a influência da variação de x e Δx na variação de Δy.
- *Pontos para representar variáveis e segmentos para representar variações* (restrição relacionada à transposição informática específica do material da situação): enquanto nas situações 1A e 1B os segmentos dinâmicos estavam associados mais diretamente ao valor das variáveis; na situação 2, os segmentos estão associados diretamente ao valor de Δx e Δy. Com relação à possibilidade de que em variações negativas o aumento do comprimento do segmento seja interpretado como uma variação positiva, tal possibilidade permanece para a variação em Δy, porém, não para a variação em Δx,

pois, pela forma como os pontos associados a x_1 e x_2 e o controle deslizante Δx foram construídos (conforme o Quadro 6), não é possível um segmento associado a um valor negativo em x.

Um aspecto importante da transposição informática no material da situação 2 é que há uma mudança com relação às situações anteriores na ênfase do que está sendo variado. Nas duas primeiras (1A e 1B), o foco é na variação em y em função da variação em x. Na situação 2, o foco é na variação de Δy em função de x e Δx. Nas duas primeiras, a exploração da variação de Δy estava envolvida, implicitamente, nas funções com taxa de variação variável e podia ser quantificada com o suporte de ferramentas como a planilha. Já na situação 2 a variação Δy é abordada de forma explícita no material, sendo este o foco principal da análise.

Os estudantes devem ter a clareza de que estão variando simultaneamente duas variáveis x_1 e x_2 em x e os valores correspondentes de y_1 e y_2 em y e que não estão analisando a variação de y em função de x; mas sim a variação na diferença Δy entre os dois valores de y (a variação em y fica implícita aqui) em função da variação dos valores correspondentes em x e de uma diferença de valor fixo Δx entre eles, o que leva – para efeitos do objetivo da situação – a considerar uma covariação entre x_1, Δx (que determina x_2) e Δy.

O item dá destaque a dois aspectos do raciocínio covariacional no contexto da representação no gráfico: (i) o raciocínio contínuo suave ao coordenar a variação de Δy em função de x e Δx; (ii) a exploração das relações entre a variação de Δy e os aspectos da forma do gráfico (concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão) de forma a desenvolver uma interpretação covariacional do gráfico da função.

O uso instrumentado do Geogebra para desenvolver esses aspectos pode envolver regras de ação e tomada de informação que envolvam a mobilização em conjunto da manipulação de x no gráfico e a coordenação da variação de Δy, por meio do segmento dinâmico e/ou numericamente na planilha. Invariantes operatórios relacionados a esse desenvolvimento podem envolver exemplos do tipo "se em um intervalo dado, conforme x aumenta, Δy é decrescente, a concavidade do gráfico é voltada para baixo". Dificuldades associadas à complexidade em interpretar o que está variando podem envolver, principalmente, confundir a variação de Δy com a variação da própria variável y; um possível equívoco pode ser interpretar a variação Δy como crescente ao observar o comprimento do segmento dinâmico aumentando em intervalos nos quais Δy é negativa.

O item 2 inicia-se com uma orientação:

- Na janela de álgebra, construa uma função para calcular a taxa de variação: *Δy/Δx = (f(x(B)) - f(x(A))) / (x(B) - x(A)).* Basta colar esta expressão na janela de álgebra: *(f(x(B)) - f(x(A))) / (x(B) - x(A))*. Vai ficar assim:

$$m = \frac{f(x(B)) - f(x(A))}{x(B) - x(A)}$$

- Outra opção é calcular a taxa de variação diretamente na planilha, fazendo o quociente entre o valor de Δy= f(x(B))-f(x(A)) e Δx = x(B)-x(A).
- Caso tenha dificuldades na construção destes passos, o link do início da tarefa já exibe o valor da taxa de variação.

Em seguida, é dado o enunciado do item 2:

Escolha Δx pequeno o suficiente (por exemplo Δx = 0.0001), varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente e responda:

a) Observe a variação do valor de Δy/Δx. Como a taxa de variação varia em função de x para a função dada?
b) Como a variação de Δy/Δx se relaciona com aspectos do gráfico da função? (concavidades, pontos de máximo e mínimo, pontos de inflexão)
c) Que relação há entre Δy/Δx e a derivada da função?

O item 2 relaciona a taxa de variação instantânea com o gráfico e os seus aspectos, além de conectá-la com o significado que é atribuído à ideia da derivada. A passagem do item 1 para o item 2 se dá pela definição de um valor de *Δx* pequeno o suficiente para simular, visualmente no gráfico e na planilha, a taxa de variação instantânea, definida pelo limite da expressão *Δy/Δx,* na qual *Δx* tende a zero.

No item 1, as ferramentas de suporte à coordenação da variação de *Δy* foram os segmentos dinâmicos e os valores numéricos na planilha. Já no item 2, o suporte é dado apenas pelo valor de *Δy/Δx* na planilha, já que a exibição dos segmentos dinâmicos em *x* e em *y* é limitada pelo comprimento relativamente pequeno do segmento.

É importante destacar aqui uma limitação do ambiente informático para representar conceitos como limites e derivadas que envolvem a noção de valores tão grandes ou pequenos quanto “se queira”. Como já destacado, essa limitação está relacionada à natureza finita dos algoritmos computacionais. Assim, representar esses conceitos envolve simulá-los no sentido de aproximá-los, tanto quanto possível, por meio das ferramentas e dos objetos disponíveis.

No caso específico da taxa instantânea representada no material, essa simulação envolve: (i) no gráfico, representar dinamicamente a aproximação de um ponto x_2 a um ponto x_1 no eixo x, enquanto observa-se a aproximação de um ponto $y_2=f(x_2)$ a um ponto $y_1=f(x_1)$ no eixo y; (ii) na representação numérica (neste caso, na planilha), representar dinamicamente a variação dos valores de Δx, Δy e do quociente $\Delta y/\Delta x$, com este quociente se aproximando de um valor, conforme o valor de y_2 se aproxima do valor de y_1.

Nessa construção podemos relacionar uma restrição da transposição informática na interface a um conflito teórico-computacional. A restrição está relacionada à aproximação decimal que pode ser configurada no Geogebra de zero a quinze casas decimais e de três a treze algarismos significativos. Esse aspecto ganha foco na variação de Δx no controle deslizante – no qual visualiza-se o seu valor numérico – e na exibição dos valores de Δx, Δy e $\Delta y/\Delta x$ na planilha. O controle deslizante Δx é configurado no material para variar entre 0,0001 e 2, conforme o Quadro 6; logo, se a aproximação decimal estiver configurada para apenas duas casas decimais, o controle vai exibir o valor $\Delta x=0$ ao aproximar os valores de x_1 e x_2 o suficiente, ainda que sejam valores distintos.

Esse conflito também se repete na exibição dos valores de Δy, Δx e $\Delta y/\Delta x$ na planilha, em situações nas quais os valores de Δx e Δy são diferentes de zero, todavia, são exibidos como zero, por uma quantidade insuficiente de casas decimais que truncam as casas além do limite definido. Ainda em decorrência disso, é possível obter exibições do tipo $\Delta y=0$, $\Delta x=0$ e $\Delta y/\Delta x=m$, com m real, o que configura mais um conflito teórico computacional, haja vista que a expressão "0/0" não tem valor definido.

As possibilidades de ação e de tomada de informação que envolvem variar x e observar o valor de $\Delta y/\Delta x$ na planilha, enquanto se observa a forma do gráfico, podem dar suporte ao raciocínio contínuo suave para interpretar a taxa de variação instantânea a partir do gráfico da função. Já o uso da planilha para criar uma lista que relaciona valores de x e de $\Delta y/\Delta x$ pode contribuir para quantificar a forma como $\Delta y/\Delta x$ varia em função de x. Os esquemas envolvidos podem levar a inferências do tipo "a taxa de variação instantânea é igual a zero nos pontos de máximo e mínimo" e "a taxa de variação instantânea é decrescente no intervalo onde a concavidade é voltada para baixo".

Uma dificuldade pode estar relacionada à complexidade em interpretar o que está variando na construção. No caso da simulação da taxa instantânea, ao fazer o valor de Δx muito pequeno, os pontos associados às variáveis em x e em y ficam aparentemente sobrepostos, o que dá a impressão de se estar variando apenas uma variável em x e a sua correspondente em y; isso pode levar a interpretar a variação de $\Delta y/\Delta x$ como sendo a variação em y. O raciocínio contínuo suave deve levar em consideração, antes de visualizar a variação entre $\Delta y/\Delta x$ e x, visualizar o valor de Δx se aproximando mais e mais de zero e o movimento correspondente em Δy.

Outra dificuldade pode ser quantificar a forma como a taxa de variação instantânea $\Delta y/\Delta x$ varia em função de acréscimos uniformes em x. No caso explorado na situação 2, a variação da taxa possui formas de crescimento e decrescimento distintas em diferentes intervalos do gráfico e a quantificação dessa variação pode não ser simples de ser concebida apenas observando-se o seu valor variando em função de x.

Um equívoco pode relacionar-se à configuração inadequada da quantidade de casas decimais e algarismos significativos e é capaz de levar a considerar os valores de Δx e Δy como sendo iguais a zero nos casos em que essas diferenças são muito pequenas, o que pode, como consequência, induzir a conflitos para interpretar o valor da taxa instantânea $\Delta y/\Delta x$.

O item 3 da situação tem o seguinte enunciado:

A partir do gráfico da função, esboce um gráfico que representa a taxa de variação em função de x. Justifique a forma do gráfico da taxa de variação relacionando-o com o gráfico da função.

Esboçar o gráfico da taxa de variação envolve mobilizar as relações construídas nos itens anteriores, principalmente sobre a interpretação da taxa instantânea no gráfico. Também envolve interpretar a taxa de variação como uma função, na qual no eixo vertical tem-se o limite de $\Delta y/\Delta x$ (para Δx tendendo a zero) e no eixo horizontal a variável x, o que requer uma imagem de covariação contínua suave da variação Δy em função de x (inferida ao fazer Δx suficientemente pequeno).

Assim, o item 3 envolve a mobilização de componentes de esquemas e ferramentas para o esboço do gráfico, como descrito nas análises *a priori* das situações anteriores: caneta, função à mão livre, definir pontos do gráfico no sistema de coordenadas, construir o gráfico a partir de uma lista de pontos da planilha e rastro de um ponto.

As restrições do *software* e do material, descritas nos itens 1 e 2, permanecem como potencialmente estruturantes para o esboço do gráfico no item 3, sobretudo por estruturarem a forma como se exibe e se explora a covariação entre x e a taxa instantânea. Uma restrição adicional é que, enquanto a coordenação do valor de x pode ser feita no gráfico ou na planilha, o valor de $\Delta y/\Delta x$ é exibido apenas na planilha, variando simultaneamente à variação da variável no eixo x.

Três caminhos podem se configurar como estratégias e contribuir para estruturar as regras de ação: (i) desenhar o gráfico por um deslize contínuo enquanto se observa a covariação entre a variável em x no gráfico e o valor da taxa instantânea na planilha (pode ocorrer caso o estudante opte pela variação contínua do ponto no eixo x, ou caso ele encene a covariação mentalmente enquanto desenha o gráfico); (ii) desenhar o gráfico a partir de um conjunto de pares ordenados (pode ocorrer caso o estudante opte por gerar uma lista de valores de x e $\Delta y/\Delta x$ para dar suporte à construção do gráfico; os valores em x podem ser obtidos no eixo x ou via comando na planilha, já os valores de $\Delta y/\Delta x$ podem ser visualizados apenas na planilha); (iii) antecipar o formato do gráfico ao associar a relação entre a variação de x e $\Delta y/\Delta x$ a alguma forma de gráfico conhecida.

Qualquer que seja a estratégia para traçar o gráfico, uma restrição é que as ferramentas para a obtenção dos valores de x e $\Delta y/\Delta x$ são o gráfico e a planilha, nessa ordem.

Considerando essa restrição, o uso da primeira estratégia requer coordenar o valor de $\Delta y/\Delta x$ na planilha enquanto varia-se a variável em x, além disso, quantificar a variação de $\Delta y/\Delta x$ de forma a traduzir a variação da taxa instantânea em termos da forma do gráfico, dos intervalos de crescimento e decrescimento, da concavidade e, por fim, dos pontos de máximo/mínimo. Essa coordenação – do quanto $\Delta y/\Delta x$ varia em função de x – requer a mobilização de um raciocínio contínuo suave e a transferência dessa quantificação para o gráfico pode ser a principal dificuldade ao mobilizar esquemas associados à primeira estratégia.

A segunda estratégia pode, por um lado, estar relacionada a níveis menos refinados de raciocínio covariacional, devido à necessidade de discretizar ou segmentar a variação para construir o gráfico a partir dos pares ordenados de x e $\Delta y/\Delta x$; mas, por outro lado, pode ser um importante suporte para quantificar a variação de *Δy/Δx* em função de incrementos uniformes em *x*, transferindo-a para a forma do gráfico.

Já a mobilização de esquemas relacionados à terceira estratégia sugerem a não mobilização de um raciocínio covariacional para esboçar o gráfico, ou um raciocínio covariacional limitado, ofuscado pela mobilização de uma regra de associação entre as características da simulação e o formato de um gráfico conhecido.

Um outro fenômeno possível é o equívoco de esboçar o gráfico da taxa de variação instantânea com o mesmo formato do gráfico da função, por confundir a variação da taxa instantânea com a variação da própria variável em *y*. Esse equívoco pode estar relacionado ao aspecto visual do gráfico na simulação da taxa instantânea: como *Δx* é muito pequeno, as variáveis em *x* e em *y* parecem estar sobrepostas, o que dá a impressão de apenas uma variável em cada eixo. Ao variar a variável em *x*, o estudante pode imaginar que a variação em *y* é o valor de *Δy/Δx* e transferir essa variação para o gráfico da taxa instantânea.

3.3.4.3 Análise *a priori* da situação 3

A situação 3 foi constituída de três itens, cujos objetivos de aprendizagem foram:

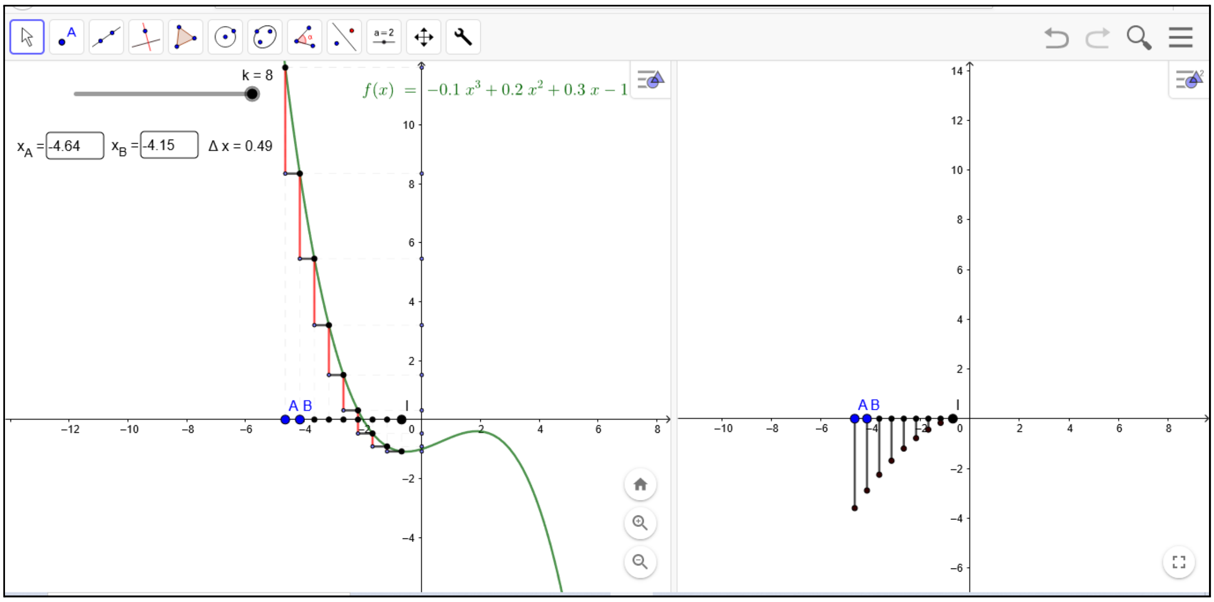
- Interpretar o gráfico de funções sob a perspectiva da variação em *y* com acréscimos uniformes em *x*;
- Inferir padrões de variação nas funções polinomiais afim, quadrática e de grau 3.

Os estudantes realizaram a situação de forma individual, durante a sessão 6. A ficha da situação foi acessada por um documento de texto *online* do *Google Docs* armazenado no *Google Drive*, com acesso e edição compartilhados entre os participantes. Cada estudante foi orientado a criar um documento de texto *online* para registrar as suas próprias respostas. O tempo de execução previsto para a execução da situação foi de 40 minutos.

A partir de uma articulação entre o modelo algébrico, dois gráficos (da função e da variação da função) e a planilha, a situação solicitou aos estudantes que descrevam relações entre o gráfico da função e o gráfico da variação (construído a partir de variações sucessivas em *y*) e que explorem o modelo algébrico de diferentes tipos de funções para inferir padrões de variação nessas funções.

O material da situação tem a característica de articular as diferentes representações, inclusive articulações na mesma representação, como o uso de gráficos em paralelos para exibir diferentes aspectos. Na tela inicial do material (Figura 32), a janela de visualização 1 inclui o modelo algébrico editável de uma função polinomial de grau 3 e o seu gráfico, sobre o qual é sobreposta e integrada uma ferramenta de variações sucessivas que representa variações da função em intervalos de *x* e *y* por segmentos dinâmicos. Os extremos do intervalo podem ser definidos por campos de entrada (denominados x_A e x_B) e o número de intervalos sucessivos pode ser definido por meio do controle deslizante *k*.

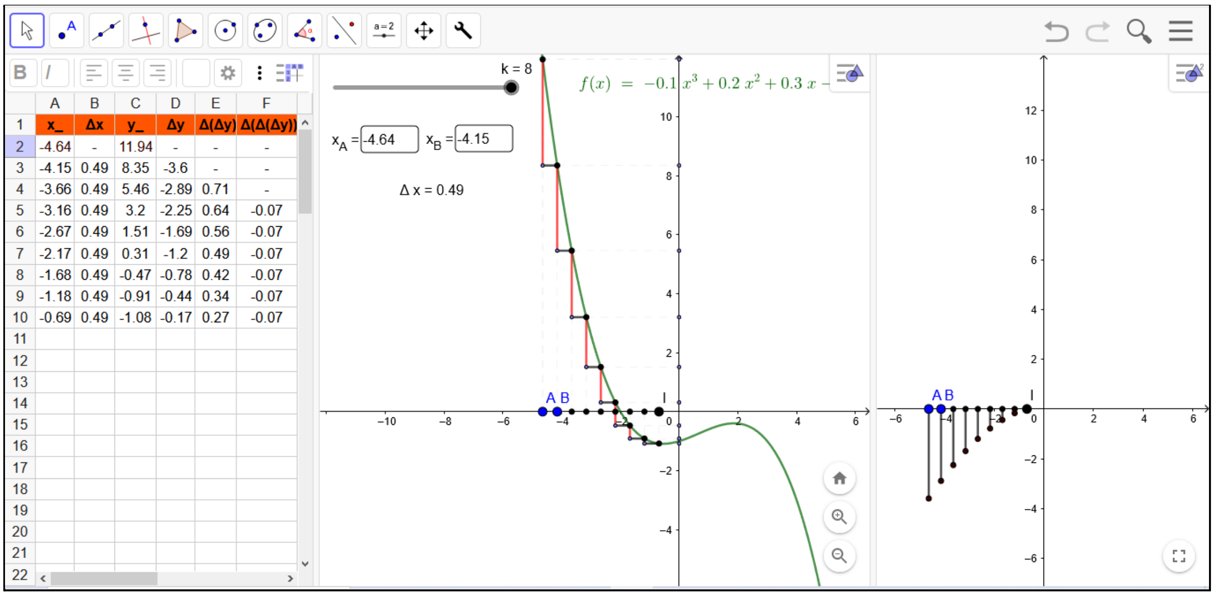
Figura 32 – Tela 1 do material do Geogebra na situação 3



Elaborado pelo autor com o Geogebra

A janela de visualização 2 exibe segmentos dinâmicos associados aos valores da variação em *y* para cada valor em *x* da função. Já a planilha (Figura 33) articula valores de *x, Δx, y, Δy* e as variações de segunda ordem *Δ(Δy)* e terceira ordem *Δ(Δ(Δy))*. Todas as representações são integradas entre si e, consequentemente, as ações no gráfico ou no modelo algébrico refletem simultaneamente nas demais representações.

Figura 33 – Tela 2 do material do Geogebra na situação 3



Elaborado pelo autor com o Geogebra

A situação inicia-se com a orientação de acesso e a descrição do material:

> *Abra o arquivo https://www.geogebra.org/classic/gy5bcrkg*
> *Na janela de visualização 1 é exibido o gráfico de uma função polinomial de grau 3. ax^3+bx^2+cx+d*
> *Na janela de visualização 2 é exibido um gráfico formado pelas variações sucessivas (variações em y, dado Δx fixo) em um intervalo [a,i]*
> *A planilha mostra uma tabela com valores de x, Δx, y, Δy , Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy)).*

Em seguida, inicia-se o item 1:

> *1- Explore a simulação e observe as relações entre o gráfico da função (janela de visualização 1) e o gráfico das variações sucessivas Δy (janela de visualização 2). Quais as relações entre o sinal da variação (positiva ou negativa), a variação da variação (variação crescente ou decrescente) e o gráfico da função? Justifique sua resposta em termos da variação em x e y.*

No item 1, foi solicitado que os estudantes explorem o material para construírem relações entre o gráfico da função e o gráfico das variações sucessivas (janela de visualização 2), construído a partir das ferramentas de variações sucessivas integradas ao gráfico da função.

Foi escolhido um modelo de função polinomial de grau até 3 pela representatividade do gráfico das funções polinomiais e pelas relações entre as variações entre funções de polinômios de graus distintos, o que faz dessa classe de função um modelo interessante para explorar a covariação.

A exploração do material envolve, principalmente, explorar essa ferramenta, variando os valores de x_A e x_B simultaneamente ou isoladamente, observando a variação no gráfico das variações sucessivas. Está em jogo relacionar aspectos da variação da função – como o sinal e a variação da variação – aos aspectos do gráfico, tais como: intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades e pontos de máximo, mínimo e inflexão, como suporte para desenvolver uma visão covariacional do gráfico e imagens de covariação contínuas suaves. Os refinamentos sucessivos na variação em Δx podem ter um papel importante na passagem de uma imagem contínua segmentada para uma imagem suave da covariação no gráfico.

O Quadro 7, abaixo, descreve a estrutura da implementação do material no Geogebra:

Quadro 7 – Implementação do material da situação 3 no Geogebra

- **Definição da função *f(x)* = -0.1 x³ + 0.2x² + 0.3x - 1;**
  - Configurada a exibição do modelo algébrico editável de *f* na tela.

- **Construção da ferramenta de variações sucessivas**
  - Definição dos valores c e d;
  - Criação de duas caixas de campo de entrada na tela, uma vinculada ao valor *c* e a outra vinculada ao valor *d*, rótulos definidos como x_A e x_B. O valor inserido nas entradas define o primeiro intervalo, que é o intervalo de referência. (Uma caixa de texto é criada para exibir o valor de $\Delta x = x_B - x_A$.)

    x_A = -4.64 x_B = -4.15 Δ x = 0.49

  - Definição dos pontos que definem os intervalos sucessivos em *x*:
    - Definição dos pontos A e B; A=(c, 0), B=(d, 0);
    - Definição dos pontos C = (2x(B) - x(A), 0). Obs.: x(B) refere-se à coordenada *x* do ponto B, na linguagem do *software*;
    - Definição do ponto D = (2x(C) - x(B), 0);
    - Definição do ponto E = (2x(D) - x(C), 0);
    - Definição do ponto F = (2x(E) - x(D), 0);
    - Definição do ponto G = (2x(F) - x(E), 0);
    - Definição do ponto H = (2x(G) - x(F), 0);
    - Definição do ponto I = (2x(H) - x(G), 0);

  - Definição dos pontos que definem os intervalos sucessivos em *y*:
    - A_1:(0,f(x(A))), B_1: (0,f(x(B))), …, I_1=(0,f(x(I)))

Fonte: Elaborado pelo autor

Continuação do Quadro 7: – Implementação do material da situação 3 no Geogebra

- Representação das variações sucessivas por segmentos dinâmicos:
  - Definição dos pontos no gráfico:
    - A_2: (x(A),y(A_1)), B_2: (x(B),y(B_1)), … , I_2: (x(I),y(I_1));
  - Definição de segmentos dinâmicos para representar a variação em *x* e em *y*
    - Na vertical, o segmento associado ao intervalo [x_A,x_B], por exemplo, tem o valor do comprimento calculado pela variação f(x(B))-f(x(A)); na horizontal, o segmento associado ao mesmo intervalo tem o valor do comprimento x(B)-x(A). Os segmentos foram construídos de forma que, se a variação é positiva, os segmentos são exibidos sobre a curva do gráfico e na cor verde; se a variação é negativa, os pontos da extremidade dos segmentos se invertem e os segmentos são exibidos sob a curva do gráfico e na cor vermelha. (centro da Figura 33)
  - Criação do controle deslizante *k,* configurado para variar por valores inteiros de 1 a 8. (controla a quantidade de intervalos sucessivos e segmentos de variação exibidos na tela)

- **Construção do gráfico de variações sucessivas na janela de visualização 2**
  - Configuração dos pontos que definem os intervalos sucessivos na janela de visualização 1, de forma que sejam visíveis também na janela de visualização 2;
  - Definição dos segmentos dinâmicos verticais para representar a variação em y.
    - Exemplo: O segmento associado ao intervalo [x_A,x_B] é definido por AA_3, onde A=(c,0) e A_3=(x(A), f(x(B) - f(x(A)))
- **Construção da planilha**
  - Coluna A (variável em x): x(A), x(B), x(C), …, x(I)
  - Coluna B (Δx): A3-A2, A4-A3, …, A10-A9, a partir da 3ª linha. (A2, A3,..., A10 são referências às linhas da coluna A e as diferenças são operações entre as células descritas)
  - Coluna C (variável em y): f(A2), f(A3), f(A4), …, f(A10)
  - Coluna D (Δy): C3-C2, C4-C3, …, C10-C9, a partir da 3ª linha. (C2, C3,..., C10 são referências às linhas da coluna C)
  - Coluna E (Δ(Δy)): D4-D3, D5-D4, …, D10-D9, a partir da 4ª linha.
  - Coluna F (Δ(Δ(Δy))): E5-E4, E6-E5, …, E10-E9, a partir da 5ª linha.

Fonte: Elaborado pelo autor

O material da situação 3 destacou-se pela articulação entre representações de forma dinâmica e simultânea. Destacou-se a centralidade da ferramenta de variações sucessivas, por meio da qual as principais ações para explorar a situação foram geradas e que articulou-se com as demais representações, como o gráfico, o modelo algébrico e a planilha. O *layout* paralelo das janelas de visualização 1 e 2 também tem um papel importante para coordenar e quantificar a covariação, pois, enquanto observa-se o gráfico da função na primeira janela, o gráfico da variação da função na segunda janela pode ser observado.

A ideia por trás da ferramenta de variações sucessivas é usar segmentos dinâmicos sobrepostos ao gráfico para facilitar a visualização da variação em *y,* conforme *x* varia por acréscimos constantes, associando a variação nos valores das variáveis à variação no comprimento do segmento. Os segmentos na horizontal (em referência aos acréscimos constantes em *x*) são conectados aos segmentos na vertical (em referência à variação em *y*) e o seu comprimento é dado pelas diferenças sucessivas entre os valores de x_{n+1} e x_n em *x* e entre $f(x_{n+1})$ e $f(x_n)$ em *y*. Conforme o sinal da variação em *y* seja positivo ou negativo, o segmento associado é representado sobre ou sob a curva, com a inversão dos seus pontos extremos e com cores distintas.

Do ponto de vista do raciocínio covariacional, o desenho da ferramenta de variações sucessivas propõe uma visão segmentada da covariação para permitir quantificar a variação em *y* em relação a *x*. O raciocínio contínuo segmentado pode servir, por meio do uso da ferramenta, como uma transição para o raciocínio contínuo suave, visto que a característica dinâmica do material permite representar a continuidade pelo deslize contínuo das variáveis e refinar a variação em Δx, de forma que se construa uma imagem da passagem do segmentado para o suave.

A ferramenta foi construída de forma a permitir a representação da variação em até oito intervalos sucessivos (define-se a quantidade de intervalos pelo controle deslizante *k*) e foi arquitetada a partir de um intervalo de referência $[x_{A,}\ x_B]$ gerado por dois pontos livres no eixo *x*, em função dos quais os demais intervalos em *x* e os correspondentes em *y* são gerados, bem como os segmentos que representam a variação em cada intervalo. A ferramenta é sobreposta ao gráfico da função na janela de visualização 1.

Em contraste com o material da situação 2, os pontos A e B, associados aos valores x_A e x_B da variável independente, foram criados como pontos livres no eixo *x*. Uma das restrições dessa decisão de *design* foi a limitação para manipular ambos os pontos e variar os valores x_A e x_B simultaneamente; no entanto, é possível obter essa simultaneidade ao clicar no primeiro ponto, depois acionar a tecla CTRL e, em seguida, clicar no segundo ponto. Ambos serão selecionados simultaneamente e, variando-se um, o outro também varia, bem como todos os valores do intervalo.

Na janela de visualização 2, o gráfico exibe segmentos dinâmicos formados a partir dos valores da variação da função em *y*, para cada intervalo em *x*. Os segmentos são definidos a partir do ponto correspondente no eixo *x* (por exemplo, o ponto (x(A),0)) e do ponto correspondente à variação da função entre os extremos do intervalo (por exemplo, o ponto (x(A), f(x(B))-f(x(A)))), de forma que o comprimento do segmento é o módulo da variação da função no intervalo correspondente e o seu sentido no eixo *y* é definido pelo sinal da variação.

A ferramenta de variações sucessivas permite alguns tipos de ações: definir o número de intervalos por meio do controle deslizante *k*; definir os extremos do primeiro intervalo [x_A, x_B] por meio de campos de entrada numérica ou variando os pontos A e B, associados aos valores x_A e x_B respectivamente; variar o valor de x_A e x_B isoladamente ou em conjunto, permitindo variar todos os valores (x_A, x_B, …, x_I) simultaneamente.

A planilha relaciona uma lista de valores em *x* com valores correspondentes em *y,* além de calcular as variações sucessivas em *x* e as variações em *y* até a terceira ordem. Os valores variam simultaneamente conforme a variação das variáveis e dos intervalos sucessivos no gráfico. Por decisão de *design*, a planilha foi configurada para exibir os valores representados no gráfico, de forma a dar suporte à exploração da ferramenta de variações sucessivas. Nesse sentido, e especificamente no material desta situação, a planilha cumpre mais um papel de exibir valores do que de receber entradas de valores pelo usuário.

Já a janela de visualização 2, que exibe o gráfico das variações em *y*, permite apenas a manipulação dos valores de x_A e x_B, por meio dos pontos associados a esses valores, entretanto a manipulação desses valores é primariamente feita a partir da janela de visualização 1, ao explorar a ferramenta de variações sucessivas.

Assim, embora as janelas da planilha e a janela 2 conservem as características de permitir ações dos usuários, do ponto de vista dos objetivos do item da situação, as possibilidades de ação concentram-se na janela de visualização 1, sobretudo, por meio da ferramenta de variações sucessivas. De forma geral, as ações possíveis e ferramentas envolvidas tanto para a ação quanto para o suporte à tomada de informação são:

- *Variação manual dos valores de x_A e x_B na ferramenta de variações sucessivas:* a exploração da ferramenta de variações sucessivas tem como principal ação a variação dos valores x_A e x_B da variável no eixo *x* que mobiliza simultaneamente – e em conjunto todos os valores dos intervalos – os valores correspondentes e as variações em *y*. Os valores x_A e x_B são variados por meio da manipulação individual ou em conjunto dos pontos A e B, no qual cada forma resulta em uma resposta distinta das variações sucessivas (nos gráficos das janelas 1 e 2): (i) a variação individual de um dos valores (x_A ou x_B) resulta na aproximação ou no afastamento dos valores dos intervalos sucessivos em *x*.

Aproximações levam a refinamentos das variações médias da função, de um x_m a um x_{m+1}, já com afastamentos em *x*, as variações sucessivas cobrem uma parte maior no gráfico, porém, de forma menos refinada, em termos da quantificação da variação. Enquanto os afastamentos podem estar relacionados a uma imagem de variação segmentada de uma perspectiva mais global do gráfico, as aproximações sugerem refinamentos com o objetivo de construir imagens de transição da variação segmentada para a variação suave; (ii) a variação simultânea dos pontos A e B e dos valores associados, x_A e x_B, permite fixar a diferença Δx e observar a variação suave dos pontos que definem os intervalos sucessivos e dos segmentos que representam as variações em *y*, de forma que o gráfico da função é “varrido” pelos intervalos sucessivos, permitindo a construção de uma imagem global e contínua da variação da função.

- *Caixas de entrada de valores e de função*: a caixa de entrada de valores permite inserir valores de x_A e x_B para definir o intervalo de referência de forma direta; já a caixa de redefinição da função permite editar o modelo algébrico, redefinindo a função e consequentemente o gráfico exibido. Tem um papel importante para explorar diferentes tipos de função e construir relações entre o modelo algébrico e a covariação.
- *Controle deslizante*: o controle deslizante *k* tem o papel de definir o número de intervalos, que vai de 1 a 8.
- *Segmentos dinâmicos no gráfico da função e no gráfico de variações sucessivas:* os segmentos dinâmicos são centrais na construção da ferramenta de variações sucessivas (janela de visualização 1) e do gráfico de variações sucessivas (janela de visualização 2). São ferramentas de tomada de informação que contribuem para quantificar a variação em *x* e em *y*, dado o aspecto visual relacionado ao contexto geométrico do comprimento. A variação dinâmica do comprimento pode dar suporte à construção de uma imagem contínua suave da covariação.
- *planilha*: a planilha foi pré-configurada para esta situação como uma representação prioritariamente de exibição de valores e variação entre valores das variáveis. Apesar de, no Geogebra, a planilha ter a característica de

permitir entradas e definição de relações pelo usuário, a escolha de *design* do material atribuiu à planilha um papel de exibição de valores, de forma dinâmica e conectada à variação dos intervalos sucessivos no gráfico. Dessa forma, o papel da planilha no material da situação 3 foi o de servir como suporte complementar à ferramenta de variações sucessivas para quantificar a variação, pois ela permite relacionar os valores em *x*, definidos pelos intervalos sucessivos, aos valores em *y* e as suas variações até a terceira ordem. Dessa forma, conforme os valores em *x* são variados, os valores em *y* e as variações Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$ variam simultaneamente, permitindo construir inferências sobre a quantificação da variação da função.

- *zoom ampliar/reduzir*: o *zoom* pode ser aplicado tanto na janela de visualização 1 quanto na 2. O *zoom* ampliar configura uma exibição do gráfico que permite manipular pontos muito próximos, observar variações relativamente pequenas ou em intervalos de mudança sutil na variação (como nos pontos de inflexão), embora limita a exibição do gráfico como um todo; já o *zoom* reduzir permite uma visão mais abrangente do gráfico, porém limita a manipulação das variáveis e da sua variação.

As principais restrições do material da situação relacionadas ao item 1 envolvem:

- *A complexidade em interpretar a covariação na construção* (restrição relacionada à transposição informática específica do material da situação): ao mesmo tempo que o material permite visualizar relações entre o gráfico e a covariação entre *x* e f(x) de forma dinâmica e articulando diferentes representações, também envolve a complexidade em entender o significado das variações sucessivas, entre x_A, x_B, …., x_I, dos valores correspondentes em *y* e das variações sucessivas representadas nos segmentos dinâmicos.
- *A complexidade em coordenar a variação em diferentes representações simultaneamente* (restrição relacionada à transposição informática específica do material da situação): a articulação das ações em diferentes representações de forma simultânea é uma característica do Geogebra e, particularmente, do material que conecta ações no modelo algébrico em dois gráficos e em uma planilha. Embora essa

integração seja uma importante contribuição, também implica na complexidade em coordenar diferentes processos ocorrendo simultaneamente em diferentes representações, como variar x_A e x_B em conjunto, observar a variação de *Δy* no gráfico das variações sucessivas e a variação nos valores de *Δy* na planilha.

- *Ferramenta de variações sucessivas e gráfico de variações sucessivas - variação representada de diferentes formas* (restrição relacionada à transposição informática específica do material da situação): essas duas ferramentas permitem representar as variações em *Δy* por meio dos segmentos dinâmicos; no entanto, a forma pela qual se apresentam no gráfico é diferente. Enquanto a primeira sobrepõe os segmentos ao gráfico da função e enfatiza articulações das variações em *Δy* com a forma do gráfico, a segunda sobrepõe os segmentos ao eixo *x* e enfatiza a variação de *Δy* em si, o que permite uma melhor visualização da forma e do sinal com que *Δy* varia.
- *Pontos para representar variáveis e segmentos para representar variações* (restrição relacionada à transposição informática específica do material da situação): essa condição, presente em outras situações, tem maior importância neste material porque os segmentos dinâmicos são parte chave da ferramenta de variações sucessivas e a sua interpretação é fundamental. As relações entre comprimento do segmento e valor da variação, bem como os possíveis equívocos que podem ser gerados em relação ao sinal e à variação na variação merecem ainda mais atenção na situação 3.

No item 1, foi esperado que os estudantes explorassem a ferramenta de variações sucessivas e articulassem o gráfico da função (janela de visualização 1) com o gráfico das variações sucessivas (janela de visualização 2) para relacionar aspectos como crescimento/decrescimento, concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão, com aspectos da variação da função, como o sinal e a variação em *Δy*.

Para inferir essas relações, o estudante precisa visualizar como as variações sucessivas se comportam em cada intervalo. A manipulação simultânea dos pontos A e B que move todos os intervalos é importante para o movimento de "varrer" o gráfico; já a manipulação isolada dos pontos A ou B pode servir para aproximar os valores dos intervalos e observar como se comporta a variação na mudança de concavidade, por exemplo.

Contudo, o suporte da ferramenta é condicionado a que os estudantes entendam o significado de variar os intervalos sucessivos simultaneamente e o que a variação dos segmentos dinâmicos significa. Quando os valores em x dos intervalos são variados em conjunto, cada valor varia de forma contínua e a variação suave dos segmentos dinâmicos sugere uma imagem de continuidade que ajuda a formar uma imagem global da variação em Δy.

As regras de ação e tomada de informação podem envolver principalmente variar A e B (isoladamente ou conjuntamente) e observar as variações em Δy, representadas pelos segmentos dinâmicos. As possibilidades de inferência podem envolver, por exemplo, inferir que a concavidade para baixo relaciona-se com variações decrescentes em y para Δx constante (taxa de variação decrescente) e que nos pontos de máximo e mínimo há a troca do sinal da variação.

Há uma constante articulação entre uma imagem segmentada da variação, fomentada pela partição da variação em intervalos, e uma imagem suave da variação fomentada pela variação dinâmica dos valores em x e dos segmentos que representam Δy. A articulação entre os movimentos de varrer o gráfico (variando os intervalos sucessivos conjuntamente) e refinar a variação (variando valores isolados de x_A ou x_B) podem estar relacionados ao suporte à transição de um raciocínio contínuo segmentado (e até de raciocínios menos refinados de covariação) para um raciocínio contínuo suave. Enquanto os primeiros podem contribuir para construir uma imagem global da variação em Δy, os segundos podem dar suporte à construção de imagens de refinamento da variação, tornando Δx cada vez menor.

Do ponto de vista das possíveis dificuldades, alguns aspectos como a variação negativa ou a variação na variação podem continuar sendo desafiadoras para os estudantes. É possível que eles lidem com equívocos gerados pela metáfora do comprimento para representar a variação negativa, como explicitado nas análises de situações anteriores.

2- Construa um modelo geral para funções polinomiais de grau até 3. Em seguida, responda aos seguintes itens, justificando as suas respostas em termos da variação conjunta entre x e y:* **Use os controles deslizantes u_1, u_2, u_3 e u_4 para os coeficientes da função.*

a) Varie os coeficientes da função e observe as variações no gráfico das variações sucessivas. De que forma o gráfico das variações se comporta?

b) Na planilha, que relações você percebe entre a variação dos coeficientes das funções polinomiais de grau 3 e as variações nas colunas Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$?

c) Teste os itens (a) e (b) para o caso das funções quadrática e afim. Que relações entre as funções e a sua variação você percebe nesses casos?

No item 2, os estudantes são solicitados a construir modelos gerais de funções polinomiais de grau até 3, isto é, escrever a função na sua forma literal (por exemplo, $f(x) = ax^2+bx+c$, no caso da função quadrática), atribuindo controles deslizantes para os coeficientes, para explorar o modelo e inferir padrões na covariação em cada modelo, com base no gráfico de variações sucessivas e na articulação com a planilha.

Busca-se que os estudantes, a partir das inferências construídas no item 1, estendam suas inferências para as funções de um polinômio de grau 3, construindo uma imagem de variação para este modelo e, depois, construam inferências para mais dois modelos, as funções quadrática e afim. Está em jogo, além de visualizar os aspectos da covariação na forma do gráfico, perceber a invariância em Δy para incrementos uniformes em x em cada caso: na variação de terceira ordem $\Delta(\Delta(\Delta y))$, no caso da função polinomial de grau 3; na variação de segunda ordem $\Delta(\Delta y)$, no segundo caso e na variação de primeira ordem Δy, no caso da função afim.

A análise da covariação em torno de modelos gerais é complexa, pois envolve não apenas coordenar a covariação entre as variáveis em x e y, mas também coordenar a covariação entre cada coeficiente a_1 a_2 .... a_n e as variáveis da função, em como a variação em cada coeficiente impacta na forma como as variáveis em x e y variam entre si. Por exemplo, no caso da função afim $ax+b$, a alteração no coeficiente b não altera a variação de Δy, contudo, o coeficiente a altera o valor de Δy de forma proporcional ao próprio a e a Δx. A ênfase na articulação entre os coeficientes e a variação da função lança foco na articulação entre as representações do modelo algébrico (acessado via controles deslizantes e caixa de exibição e edição da função), os gráficos da função e das variações sucessivas e, principalmente, a planilha.

Para além de mobilizar um raciocínio contínuo suave na leitura do gráfico dessas funções, está em jogo caracterizar a covariação em cada caso, por meio da quantificação da variação; ou seja, associar a invariância em Δy à ordem do polinômio que representa cada função: uma característica peculiar às funções polinomiais.

A ênfase na exploração do modelo algébrico e da planilha, torna essas representações importantes para estruturar as regras de ação e tomada de informação, junto com os gráficos nas janelas de visualização 1 e 2. Essas regras podem envolver variar o valor de cada coeficiente, variar os valores da variável em x e observar o comportamento das variações em

Δy nos gráficos e na planilha. Essa estruturação sugere uma possível dificuldade em construir uma imagem da influência de cada coeficiente em *Δy* por todo o gráfico, pois quando o estudante varia o coeficiente e observa a variação em *Δy,* essa variação é para valores fixos em *x* e não para todo o domínio da função na tela.

Dessa forma, para construir inferências sobre a função por todo o seu domínio, é necessário coordenar em conjunto as variações dos coeficientes, as variações em *x* e as variações em *Δy.* Uma vez que a covariação entre (i) os coeficientes e *Δy* e (ii) *x* e *Δy* só podem ser operadas cada uma por vez (pois *Δy* varia em função dos coeficientes e de x), são necessárias, também, regras de ação e tomada de informação que permitam aos estudantes coordenarem essa covariação complexa. Por outra perspectiva, uma interpretação covariacional do gráfico – explorada no item 1 desta situação e em situações anteriores – também pode contribuir para que os estudantes, ao variar os coeficientes e observarem a variação de *Δy*, antecipem como *Δy* vai se comportar no resto do gráfico, mesmo sem variar os valores de *x*, já que construíram essa imagem anteriormente.

A alteração de cada coeficiente altera necessariamente o gráfico da função, mas, a depender do caso, pode tornar invariantes as variações no gráfico de variações sucessivas (janela de visualização 2) e a variação de *Δy* na planilha. Nesses casos, as possibilidades de inferência podem envolver relacionar essas invariâncias a cada coeficiente e, finalmente, a cada tipo específico de função. Já nos casos em que a variação dos coeficientes altera o valor de *Δy*, são alterados o gráfico de variações sucessivas e os valores de *Δy* na planilha (a depender do tipo de função, também são alterados os valores de *Δ(Δy)*), sendo destacado o papel da quantificação da variação na planilha para a construção de inferências da invariância em cada modelo.

3- Explore uma classe de função real que não seja polinomial. Descreva a variação nesta classe de funções usando a simulação das variações sucessivas e a planilha.

O terceiro item propõe a mesma exploração e análise do item 2, porém envolve uma quebra nas inferências construídas sobre a quantificação da variação nas funções polinomiais: a caracterização em termos de invariância em *Δy* (em alguma n-ésima ordem) para acréscimos uniformes em *x*, associada à ordem do polinômio que define a função, não é válida para as demais funções reais. Perceber essa quebra fortalece a inferência construída sobre a caracterização variacional das funções polinomiais e, ao mesmo tempo, propõe aos estudantes o desafio de construir inferências para novos tipos de função.

As possíveis novas inferências podem ser limitadas pelo fato de que algumas funções têm caracterização mais complexa. A construção da planilha fornece suporte limitado nessa caracterização, pois é configurada para uma variação aditiva, quantificada pela diferença entre $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ (na função exponencial, por exemplo, há uma variação multiplicativa, quantificada pelo quociente $f(x_{n+1})/f(x_n)$). Esse fato coloca em ênfase como o *design* do material é construído e sofre influência da epistemologia dos objetos matemáticos para os quais a sua exploração dará suporte.

Considerando a importância da planilha para quantificar e inferir padrões de variação e que a sua mobilização como uma ferramenta de tomada de informação tem uma contribuição limitada para funções não polinomiais (restringe-se principalmente a quantificar a variação em y com acréscimos constantes em *x*), a ênfase nessa situação foi voltada para as relações entre o gráfico das funções e o gráfico das variações sucessivas, de forma a distinguir características peculiares a cada tipo de função. Regras de ação e tomada de informação previamente mobilizadas no item 1 da situação (como variar x_A e x_B conjuntamente ou isoladamente, em movimentos de varrer o gráfico ou refinar a variação) podem emergir para construir imagens de variação suave da variação das funções.

As características que emergem em uma representação específica não são, na maioria das vezes, suficientes para caracterizar o tipo de função, por isso a exploração de cada função nesta situação teve apenas o objetivo de fomentar possibilidades de inferências dos estudantes sobre o comportamento da covariação em cada tipo de função.

3.3.5 Registro dos dados produzidos no experimento de ensino

O registro dos dados produzidos no experimento teve como foco principal as gêneses instrumentais dos sujeitos do estudo de caso, com ênfase particular nos seus esquemas, mas também na descrição do contexto de ensino no qual as gêneses se desenvolveram, por isso as descrições das orquestrações e interações nas sessões. Esse registro também foi restrito pelo formato não presencial do experimento, devido ao contexto da pandemia de Covid-19.

Do ponto de vista das gêneses instrumentais, a videogravação da tela e do áudio se mostrou imprescindível para a captura das ações no Geogebra e dos argumentos que justificaram essas ações. Essas duas fontes de dados (tela e áudio) são de extrema importância para termos “pistas” sobre os esquemas que fundamentam as ações. O registro escrito dos estudantes nas fichas *online* das situações (texto *online* no *Google Docs*), as suas interações no *chat* da videoconferência e as anotações do pesquisador também foram utilizados como fontes de dados auxiliares para caracterizar os seus esquemas e conhecimentos mobilizados.

Do ponto de vista da descrição do contexto da sala, a gravação da tela e do áudio, além do *chat* da videoconferência foram as principais fontes de dados. Também foram registradas as respostas nas fichas das situações (texto *online* no *Google Docs*) e as anotações do pesquisador, como fonte de dados para caracterizar o contexto de ensino no qual se desenvolveram as gêneses instrumentais dos estudantes. É importante enfatizar que os estudantes que não foram incluídos no estudo de caso também compõem o contexto de ensino do estudo de caso, por isso, suas produções foram registradas sob esse ponto de vista.

Uma vez que o recurso de gravação próprio da plataforma de videoconferência só grava a tela que está sendo compartilhada, foi utilizado um gravador de tela e áudio (*Atube Catcher*) instalado previamente nos computadores dos sujeitos, para capturar a tela e o áudio enquanto eles exploravam as situações. Para que tivéssemos acesso aos seus argumentos e estratégias, foi solicitado que eles utilizassem a técnica de “pensar em voz alta” (KUJALA; MANTYLA, 2000) enquanto exploravam o Geogebra.

O registro e o tratamento dos dados produzidos foram submetidos ao comitê de ética da instituição de ensino à qual os sujeitos estavam vinculados e todos foram orientados quanto à voluntariedade, benefícios e riscos inerentes à participação na pesquisa, tendo autorizado o uso dos dados por meio de termo de ciência livre e esclarecido (TCLE).

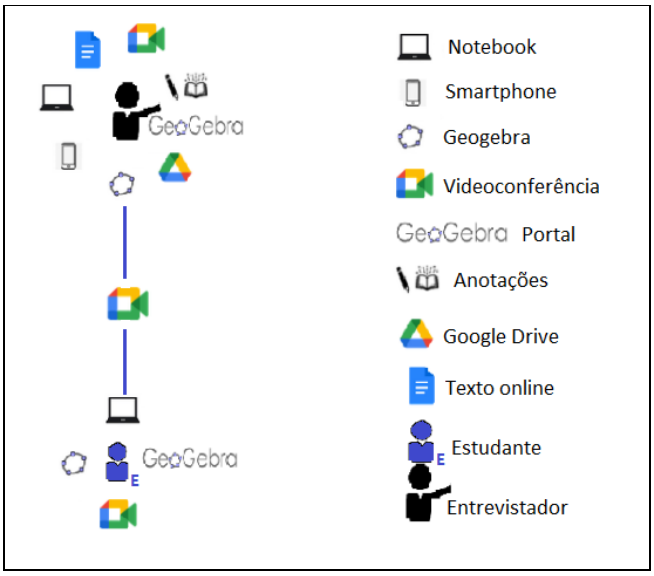
3.4 PLANEJAMENTO DA ETAPA 3: ENTREVISTAS BASEADAS EM TAREFAS

Após o experimento, foram aplicadas entrevistas com os três estudantes do estudo de caso. A entrevista foi concebida com base no modelo de entrevista fundamentada em tarefas (CLEMENT, 2000; GOLDIN, 2000), escolhido especialmente pelo nosso interesse contínuo em observar e caracterizar a atividade instrumentada dos estudantes e a emergência dos seus esquemas quando eles usam o artefato para explorar as situações matemáticas.

A concepção da entrevista foi guiada pelo objetivo de fazer emergir os possíveis esquemas e elementos conceituais desenvolvidos durante o experimento e, para isso, situações e ferramentas do Geogebra envolvidas em cada sessão foram revisitadas.

A entrevista foi realizada de forma individual, por meio de uma videoconferência privada entre o autor da pesquisa e cada estudante, com duração média de 30 minutos. Foram registradas as interações entre o pesquisador e o estudante e as ações do estudante na tela do Geogebra, utilizando uma ferramenta de gravação de tela e áudio disponível na própria videoconferência (*Google Meet*). O estudante e o pesquisador tiveram acesso ao Geogebra instalado nos seus computadores pessoais ou no portal online e, quando necessário, era possível o compartilhamento da tela entre ambos (Figura 34). Como instrumentos de apoio, o pesquisador utilizou o armazenamento em nuvem do *Google Drive* e um documento *online* (*Google Docs*) para armazenar e acessar as questões, anotações em papel e um *smartphone* como um dispositivo reserva conectado à videoconferência.

Figura 34 – Configuração e recursos utilizados na entrevista



Fonte: Elaborado pelo autor

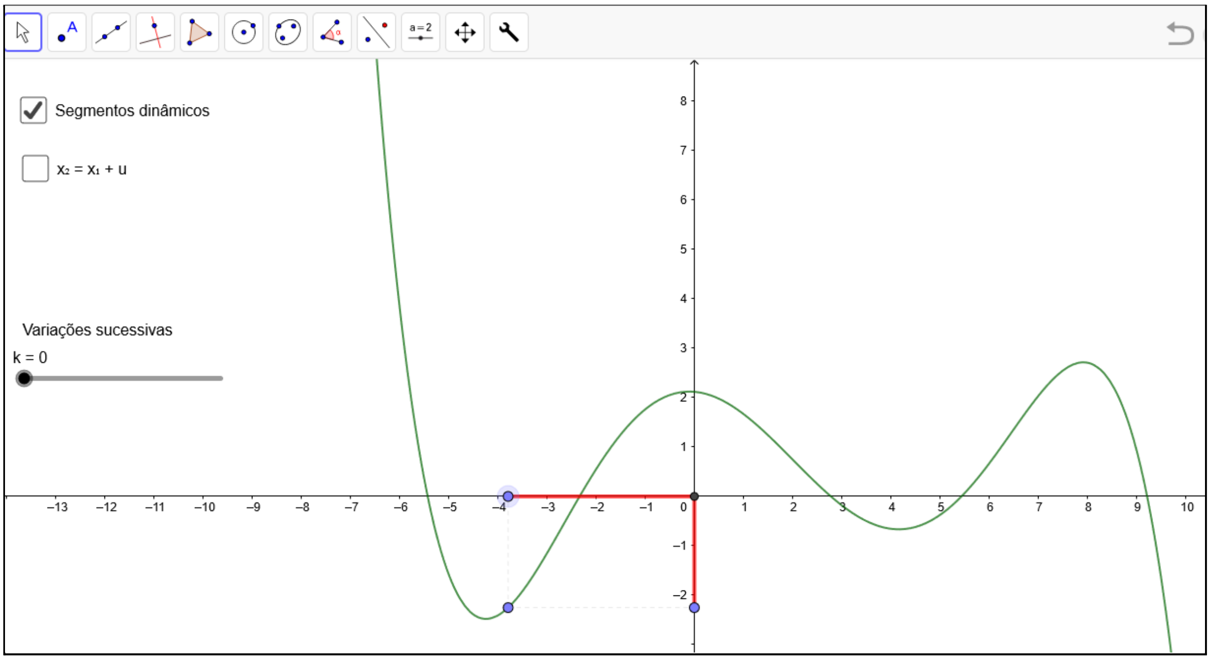
Foram concebidas quatro questões para a entrevista, além de um material no Geogebra para explorar as duas últimas questões.

A primeira questão não envolveu o uso do Geogebra. Apenas foi exibido ao estudante o mesmo gráfico utilizado no questionário pré-experimento, acompanhado da seguinte pergunta: *Este gráfico foi apresentado no questionário inicial. Após a vivência do curso, você alteraria/complementaria a descrição que você deu no início para o comportamento das variáveis, ou não? Se sim, de que forma?* O objetivo da primeira questão foi fazer com que estudantes revisitassem as suas descrições dadas no questionário inicial e, com base no seu raciocínio covariacional ao longo do experimento, pudessem mobilizar os seus esquemas para reinterpretar o gráfico como expressando a covariação entre as variáveis.

Na segunda indagação, os estudantes foram questionados se consideravam que alguma ferramenta explorada no curso contribuiu para o seu raciocínio covariacional, ou seja, para visualizar o gráfico no sentido de como as variáveis variam entre si. O objetivo dessa questão foi o de obter informações sobre que ferramentas eles enfatizaram na sua gênese instrumental.

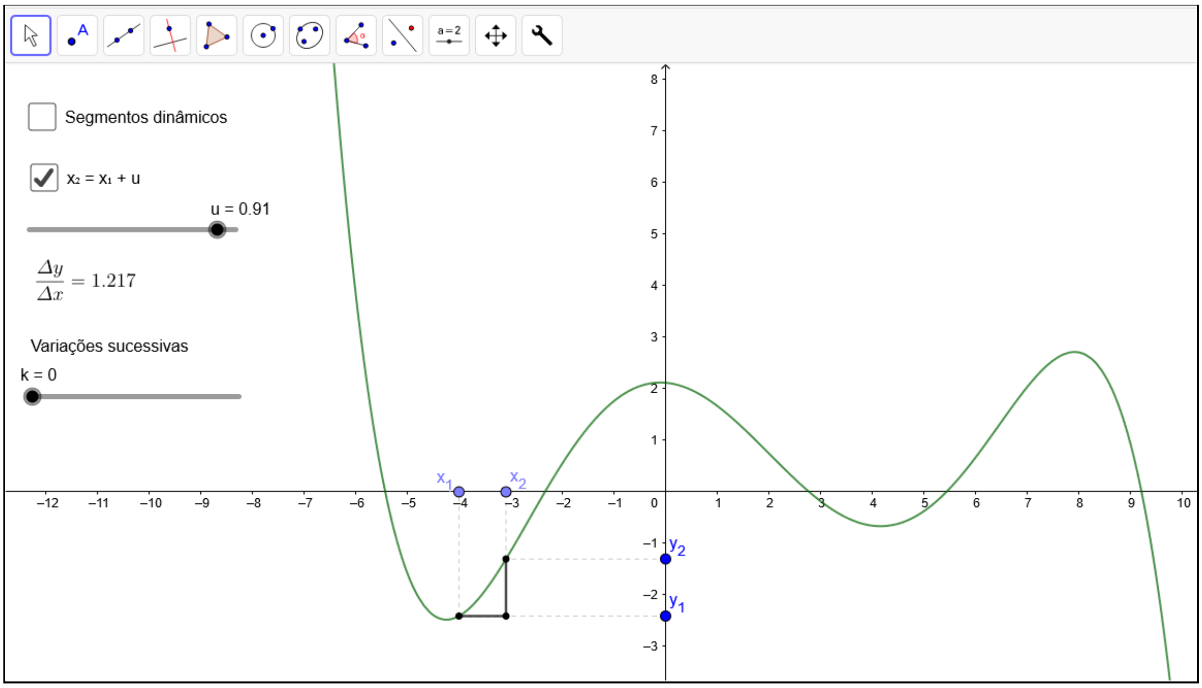
Na terceira questão, foi apresentado um material no Geogebra (Figuras 35, 36 e 37) com o gráfico de uma função e três ferramentas que haviam sido utilizadas no experimento: segmentos dinâmicos (situação 1A); variação dinâmica entre Δx e Δy (situação 2); variações sucessivas articuladas à planilha dinâmica (situação 3). O entrevistador forneceu as seguintes orientações ao entrevistado: *Divida o gráfico da função f em intervalos nos quais a função muda a forma como varia (crescente, decrescente, crescente com acréscimos cada vez maiores, decrescente com acréscimos cada vez menores, etc), em seguida, descreva como as variáveis variam em cada intervalo.*

Figura 35 – Mobilização da ferramenta segmentos dinâmicos, na segunda questão da entrevista



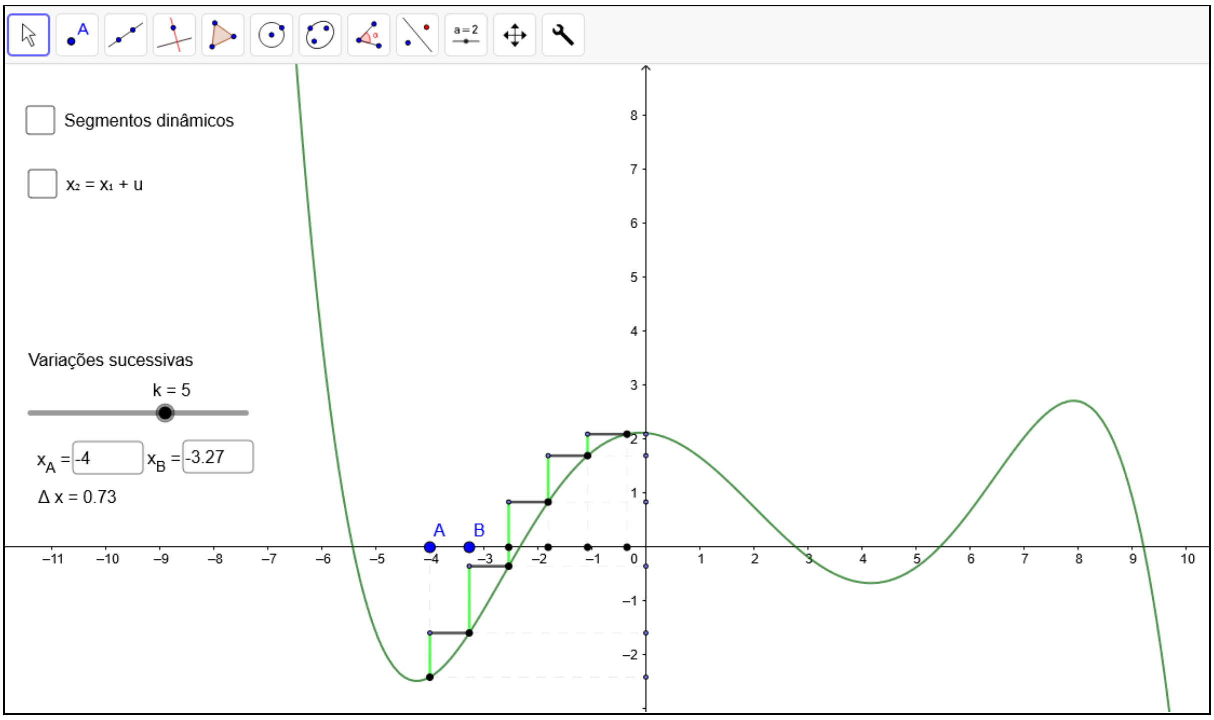
Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

Figura 36 – Mobilização da ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy , na segunda questão da entrevista



Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

Figura 37 – Mobilização da ferramenta de variações sucessivas, na segunda questão da entrevista



Fonte: Elaborado pelo autor com o Geogebra

O objetivo da segunda questão foi possibilitar que o entrevistado mobilizasse os seus esquemas em desenvolvimento e o raciocínio covariacional subjacente, ao instrumentalizar o artefato para explorar a covariação entre as variáveis no gráfico da função. O gráfico incluiu os aspectos explorados durante o experimento (intervalos de crescimento e decrescimento, diferentes concavidades, pontos de máximo e de mínimo, pontos de inflexão e variação variável) do ponto de vista da variação conjunta entre as variáveis.

Foram integradas em um mesmo material todas as ferramentas utilizadas durante o experimento, tanto as desenhadas especificamente para as situação (segmentos dinâmicos, variação dinâmica entre Δx e Δy e variações sucessivas, etc) quanto as inerentes ao próprio Geogebra (planilha, sistema de coordenadas, controles deslizantes, caneta, rastro, etc). Essa integração em um mesmo material teve por objetivo disponibilizar ao entrevistado todas as possibilidades de uso abordadas no experimento; assim a gênese instrumental de cada indivíduo com o Geogebra, aliada aos aspectos da situação, poderiam direcioná-los a mobilizar ferramentas específicas do artefato.

Na terceira questão, utilizando o mesmo material disponibilizado na questão 2, foi dada a seguinte orientação: *Esboce um gráfico da taxa de variação instantânea de f.* Essa questão teve como objetivo a articulação do gráfico da função com o gráfico da sua taxa de variação, obtendo o gráfico da segunda como uma representação da covariação na primeira. A mobilização de um raciocínio covariacional baseado em imagens suaves de variação é fundamental nesta situação de pesquisa, com base nas construções teóricas de Castillo-Garsow (2012) e Thompson e Carlson (2017). A ferramenta de variação dinâmica entre Δx e Δy articulada à planilha pode aplicar-se particularmente a essa situação.

Os resultados da aplicação da entrevista foram descritos e analisados com base nos quadros teóricos de referência na seção de análise dos dados.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção, são analisados e discutidos os dados produzidos nas três etapas do estudo. Inicialmente, os resultados do questionário, em seguida as produções nas sessões do experimento de ensino e, por último, as entrevistas baseadas em tarefas. Ao final da seção, é feita uma discussão que sintetiza os resultados em termos das trajetórias das gêneses instrumentais, do raciocínio covariacional e do papel exercido pelos aspectos e fenômenos da transposição informática.

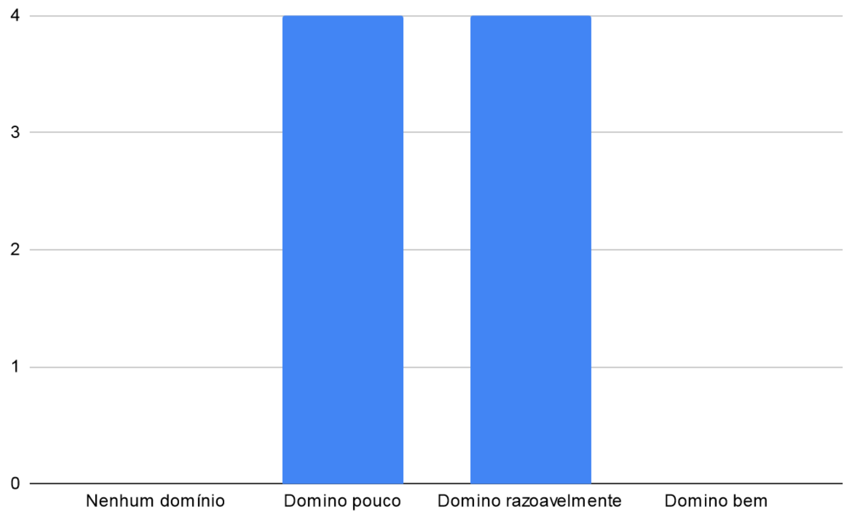
4.1 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO DE PERFIL DOS SUJEITOS: GÊNESES PRÉVIAS COM O GEOGEBRA, ENTENDIMENTOS DE FUNÇÃO E INTERPRETAÇÃO DO GRÁFICO

Os resultados da aplicação do questionário com oito sujeitos que participaram do experimento enfatizam a sua familiaridade com o Geogebra e as suas visões sobre funções e o comportamento de variáveis no gráfico. Também são descritos, de forma mais detalhada, os resultados relativos aos três componentes do estudo de caso, o que teve por objetivo permitir inferências sobre suas gêneses instrumentais com o geogebra em situações de covariação na interpretação do gráfico. Foram atribuídos nomes fictícios a todos os sujeitos.

4.1.1 Familiaridade com o Geogebra e possíveis visões sobre funções e variação

A fim de identificar experiências anteriores com o uso de tecnologias, os estudantes foram questionados sobre a utilização de algum *software* para explorar o conteúdo de função. Os oito participantes responderam usar o Geogebra para explorar funções; uma delas informou usar um *software* adicional: o Photomath. Ao serem questionados sobre o seu domínio desses *softwares*, as respostas revelaram que os estudantes consideravam-se em níveis básicos e intermediários de domínio: a metade dos estudantes respondeu dominar pouco e a outra metade respondeu dominar razoavelmente (Gráfico 1).

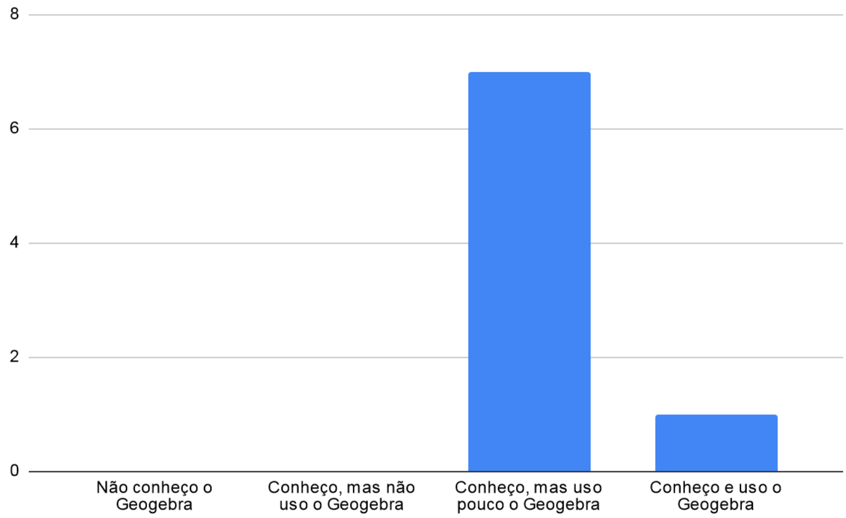
Gráfico 1 – Grau de domínio de softwares para explorar funções



Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida, os estudantes foram questionados quanto à sua familiaridade com o *software* Geogebra. A maior parte deles afirmou conhecer, mas usar pouco o *software* (Gráfico 2).

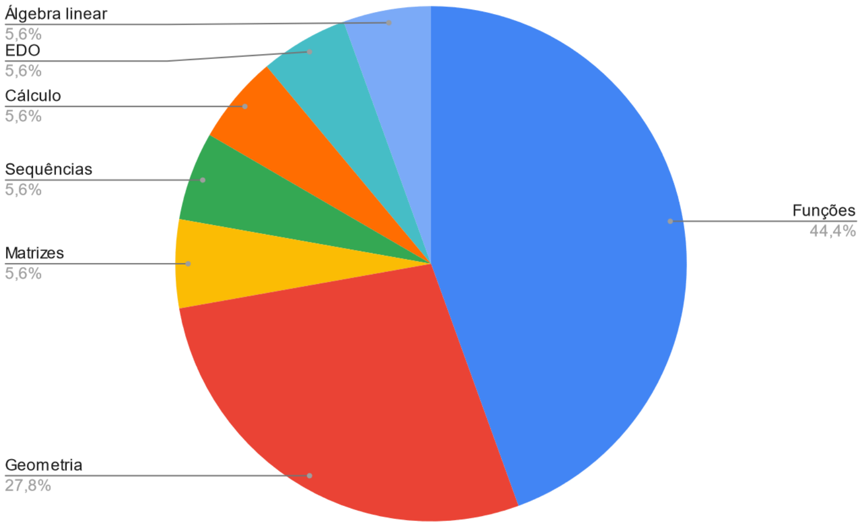
Gráfico 2 – Grau de familiaridade com o Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Quando questionados sobre para quais atividades e conteúdos matemáticos utilizam o Geogebra, as respostas concentraram-se nas áreas de funções e geometria, embora tenham sido citadas outras áreas da matemática. Em funções, houve maior referência à atividade de ‘visualizar’ gráficos, no sentido de acessar visualmente. Em geometria, sobressaiu-se a atividade de construção geométrica, com referências pontuais a sólidos geométricos e ângulos (Gráfico 3).

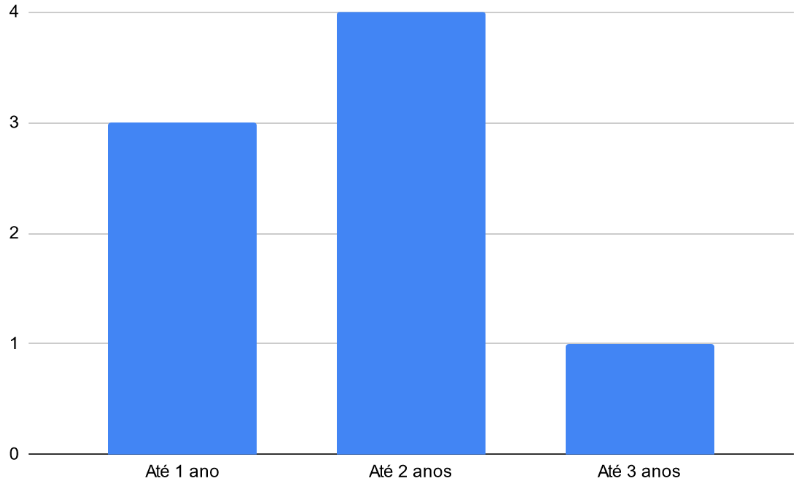
Gráfico 3 – Atividades com o uso do Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

A maioria dos estudantes revelou um tempo de até 2 anos de uso do Geogebra. O Gráfico 4, abaixo, aponta as frequências:

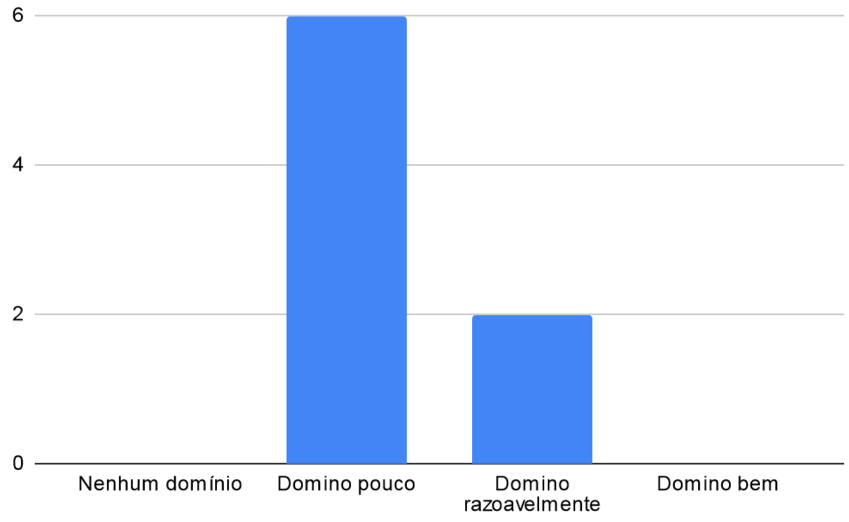
Gráfico 4 – Tempo de uso do Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Quanto ao grau de domínio no Geogebra, as respostas revelaram que a maioria se avaliou com pouco domínio do Geogebra (Gráfico 5).

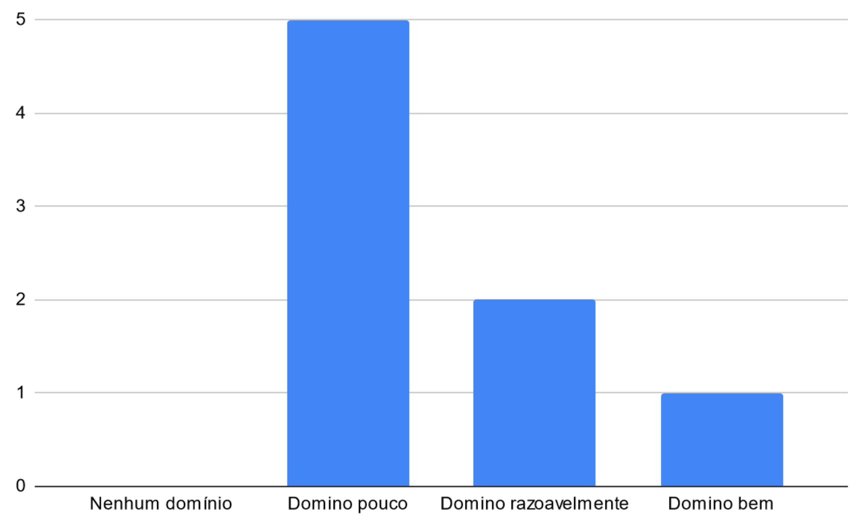
Gráfico 5 – Grau de domínio do Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Ao questionar o domínio do Geogebra para explorar funções, houve uma leve melhora em relação à maneira como os estudantes se avaliaram, embora a maioria ainda informou dominar pouco o *software* (Gráfico 6). Essa diferença pode estar relacionada ao fato de que ‘função’ é um dos principais objetos explorados pelos estudantes no Geogebra.

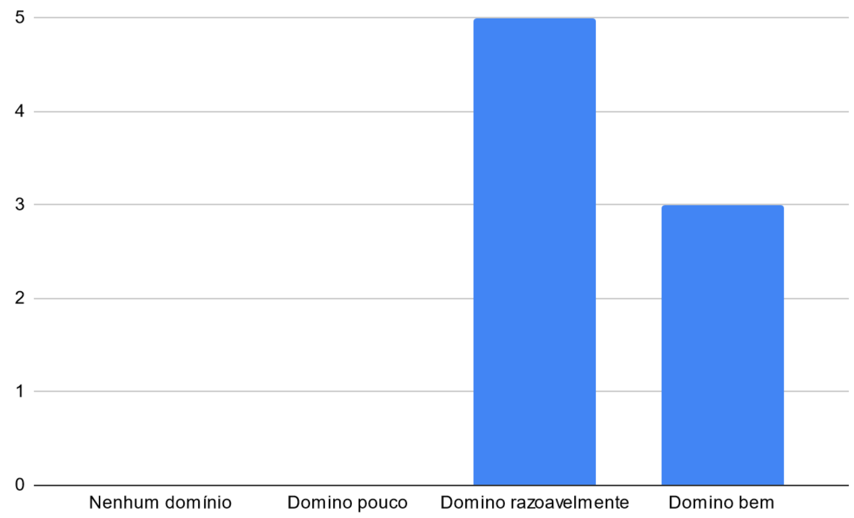
Gráfico 6 – Grau de domínio do Geogebra para explorar funções



Fonte: Elaborado pelo autor

Quando questionados sobre o seu domínio do conteúdo de funções, a maioria dos estudantes avaliou ‘dominar razoavelmente’, enquanto os demais avaliaram ‘dominar bem’ o conteúdo (Gráfico 7).

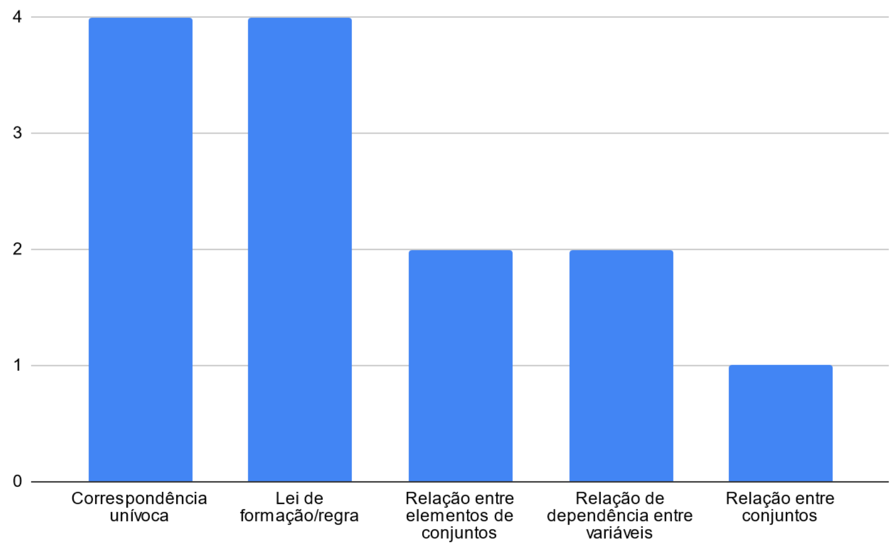
Gráfico 7 – Grau de domínio do conteúdo de funções



Fonte: Elaborado pelo autor

As duas últimas questões concentraram-se no conhecimento matemático dos estudantes sobre funções e o seu gráfico. Ao serem questionados sobre o que é uma função, os estudantes deram respostas que envolvem diferentes aspectos de função (Gráfico 8).

Gráfico 8 – Aspectos evocados na definição de função dos estudantes



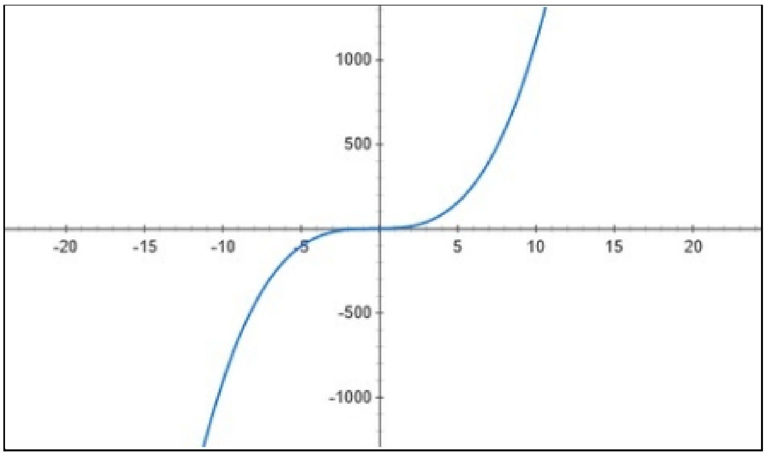
Fonte: Elaborado pelo autor

A maioria das respostas enfatizou o aspecto da correspondência unívoca entre elementos de conjuntos, segundo a qual cada elemento de um conjunto (domínio) corresponde a um único elemento do outro conjunto (contradomínio). Um exemplo é dado na resposta da estudante Laura: "*Sendo A e B dois conjuntos não vazios, chamamos de função de A em B toda correspondência que associa cada elemento de A a um único elemento de B*". Outro aspecto predominante nas definições de função dos estudantes foi o de "lei de formação ou regra matemática", como observado na resposta de Eliza: "*É uma relação entre grandezas, na qual há uma lei de formação. Uma grandeza depende da outra.*".

Dois aspectos presentes, porém menos frequentes foram o de função como "relação de dependência entre grandezas/variáveis", exemplificado também no caso da definição acima, dada por Eliza, e o de "relação/associação entre elementos de conjuntos", sendo esta sem referência explícita à correspondência unívoca. As respostas dos estudantes parecem sugerir que as suas ideias de função são baseadas principalmente na abordagem de correspondência entre valores (CONFREY; SMITH, 1994) e na perspectiva formal da teoria dos conjuntos. A perspectiva variacional/covariacional de função parece não ter sido a principal influência nas conceitualizações dos estudantes (a relação de dependência entre variáveis foi evocada por apenas 2 dos 8 estudantes).

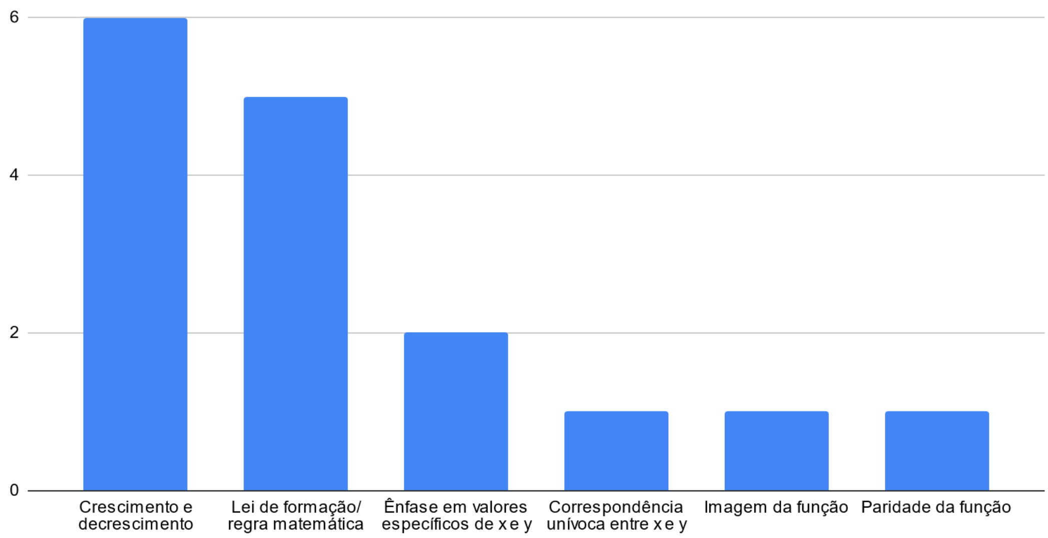
Na última questão – que requereu explicitamente uma descrição da variação das variáveis com base no gráfico exibido na Figura 38 – as respostas dos estudantes destacaram aspectos que enfatizaram: (a) crescimento ou decrescimento de uma variável com a mudança na outra variável; (b) lei de formação/regra matemática de correspondência e (c) valores específicos das variáveis. Outros aspectos menos frequentes envolveram a correspondência unívoca entre as variáveis, a imagem e a paridade da função (Gráfico 9):

Figura 38 – Gráfico apresentado no questionário



Fonte: Criado pelo autor utilizando o traçador gráfico do Google.

Gráfico 9 – Aspectos evocados na descrição do comportamento das variáveis



Fonte: Elaborado pelo autor

O aspecto do crescimento/decrescimento relativo entre as variáveis, esteve presente na maioria das respostas, mas as respostas não levaram em conta a variação variável, como no caso da estudante Ana: "*A medida que a minha variável x cresce, o meu y também cresce…*".

Dentre todas as respostas que mobilizaram esse aspecto, apenas a do estudante Marcus parece ter explicitado uma consciência de um crescimento não-constante de *y* em função de *x*, mas que, ainda assim, com uma expressão informal (pelo uso do termo "grande aumento") e referindo-se equivocadamente às variáveis como os conjuntos que definem a função: "*Quando o conjunto domínio da função cresce, a sua imagem tem um grande aumento diretamente proporcional."*

Já a evocação do aspecto da lei de formação/regra de correspondência pode ser dividido em duas formas: com ou sem referência às variáveis. Na primeira, os estudantes descreveram o modelo algébrico como a regra de associação entre as variáveis, como no caso da resposta de Eric: *"... a variável dependente é o cubo da variável independente."*; já na segunda forma, o modelo algébrico foi associado à função, porém sem qualquer referência ao comportamento das variáveis, como na descrição de Arthur: *"Trata-se de uma função polinomial de grau 3, a constante é 0, o coeficiente de a é > 0".*

Algumas respostas envolveram a descrição do comportamento das variáveis por meio de valores assumidos por cada uma delas, como no caso de Ana: "... *A medida que a minha variável x cresce, o meu y também cresce.. Quando x=-10 e x=10 o meu y tem o "mesmo" valor, mas um é negativo e o outro é positivo, respectivamente.".* Outros aspectos evocados incluíram a correspondência unívoca entre as variáveis, a descrição da imagem da função e a paridade da função.

As respostas dos estudantes ao questionário apontam que, de forma geral, os discentes têm um domínio que varia do básico ao intermediário do Geogebra que é usado, sobretudo, para atividades com funções, como a visualização de gráficos. Com relação às visões de função dos estudantes, os principais aspectos evocados (correspondência unívoca e lei de formação) sugerem que essas visões se baseiam em uma perspectiva formal da teoria dos conjuntos e na abordagem de correspondência entre valores, com uma limitada referência a aspectos da covariação, como relações de dependência entre variáveis. Essa limitação também foi explícita na última questão, quando mais da metade dos estudantes deram descrições do comportamento das variáveis com referências à lei de formação da função e, mesmo quando suas descrições envolveram uma análise de como uma variável varia em função da outra, essa análise não explicitou (por 7 dos 8 estudantes) uma consciência da variação variável.

Esses resultados contribuem para analisar a trajetória da classe no experimento de ensino, no sentido de classe como parte do contexto geral do estudo e a trajetória individual de cada um dos três estudantes que compõem o estudo de caso. A análise do perfil fornece uma caracterização inicial de cada estudante e das suas relações com o artefato Geogebra e com os objetos ‘funções’ e ‘covariação’. Segue-se a descrição dos perfis individuais dos casos.

4.1.2 Sujeitos do estudo de caso: Eric, Alice e Louise

Os sujeitos do estudo de caso, três estudantes da Licenciatura em Matemática de duas instituições de ensino superior, foram selecionados entre os 8 participantes do curso de extensão que envolveu o estudo. Eles estavam entre o quinto e o último período do curso de Licenciatura em Matemática e, com isso, tinham experiência prévia com conceitos do Cálculo. Foram atribuídos a eles os seguintes nomes fictícios: Eric, Alice e Louise.

A escolha por esses estudantes para compor os casos se deu pela consistência no que tange à participação nas atividades e à realização das situações propostas no experimento, o que proporcionou um volume de dados satisfatório para a análise. Nesta subseção são detalhadas as respostas dadas por Eric, Alice e Louise ao questionário, respectivamente.

Eric afirmou utilizar apenas o Geogebra como *software* para explorar o conteúdo de função e, quando questionado sobre o nível de familiaridade com o *software*, apontou o maior nível disponível (conheço e uso o Geogebra). Com um período de utilização de aproximadamente 2 anos, Eric utiliza o *software* para explorar uma diversidade de conteúdos matemáticos, que vão além de funções e geometria: “*Basicamente: geometria, funções, matrizes, sistemas lineares e sequências (já o utilizei para estudar cálculo, EDO, álgebra linear, etc).*” (Eric, entrevista). Ele avaliou tanto o seu grau de domínio do Geogebra, quanto o seu grau de domínio para explorar funções como um domínio razoável (nível 3 de 4).

Ao ser questionado sobre o seu domínio do conteúdo de funções, Eric avaliou dominar razoavelmente o objeto (nível 3 de 4). Sua definição de função mobilizou os aspectos da relação de dependência e da correspondência unívoca entre elementos de conjuntos:

> *Uma relação entre duas ou mais variáveis (na qual uma delas é a variável dependente e as demais são variáveis independentes) onde para cada conjunto de variáveis independentes corresponde um e apenas um valor para a variável dependente. (Aquela tentativa de definir função kkkkk)* (sic). (Eric, questionário)

Quando solicitado a descrever o comportamento das variáveis da função representada no gráfico dado, Eric descreveu o crescimento de uma variável em função da outra, embora a sua descrição não tenha explicitado a variação variável. Além disso, ele destacou o modelo matemático que quantifica a variação, embora provavelmente essa imagem tenha sido obtida a partir da familiaridade da forma do gráfico com a função cúbica:

> *À medida que a variável independente cresce, a variável dependente cresce também (a função é estritamente crescente). A variável dependente apenas se anula quando a variável independente se anula (o gráfico da função passa pela origem). Aparentemente, o gráfico obedece a relação de que para cada um dos seus pontos, a variável dependente é o cubo da variável independente.* (Eric, questionário)

Louise, a segunda participante, afirmou utilizar o Geogebra como *software* para explorar o conteúdo de função. Quando questionada sobre o nível de familiaridade com o *software*, informou conhecer, mas usar pouco o Geogebra (nível 3 de 4), embora utilize o *software* por um período de em torno de 3 anos. Ela utiliza o *software* para explorar funções, geometria e, segundo ela, desenho geométrico. Louise avaliou o seu grau de domínio do Geogebra como um domínio razoável (nível 3 de 4), porém avaliou o seu grau de domínio no *software* para explorar funções como: "domino pouco" (nível 2 de 4).

Ao ser questionada sobre o seu domínio do conteúdo de funções, Louise informou dominar razoavelmente o objeto (nível 3 de 4). A estudante caracterizou a sua definição de função associando os aspectos da correspondência unívoca entre elementos de conjuntos e da lei de formação: "*Função é uma relação que 'leva' cada elemento de um conjunto a apenas um elemento de outro conjunto através de uma lei de formação*" (Louise, questionário).

Quando solicitada a descrever o comportamento das variáveis a partir do gráfico dado, Louise descreveu esse comportamento em termos do crescimento e decrescimento da função com relação a x (particularmente do sinal de x), embora a sua resposta revela o equívoco de definir a relação como decrescente para valores negativos de x: "*Para X positivo a função é crescente, para X negativo a função é decrescente.*" (Louise, questionário). Esse equívoco pode ser originado em um possível esquema para a leitura do gráfico, ao iniciar a leitura dos valores a partir do zero em valores negativos de x.

Já Alice, a terceira participante, afirmou utilizar o Geogebra como *software* para explorar o conteúdo de função e, quando questionada sobre o nível de familiaridade com o software, informou conhecer, mas usar pouco o Geogebra (nível 3 de 4), apenas para visualizar o gráfico de funções. Alice informou usar o Geogebra por um período entre 1 e 2 anos e avaliou o seu grau de domínio do *software* como "domino pouco" (nível 2 de 4), porém avaliou o seu grau de domínio no *software* para explorar funções, como "domino razoavelmente" (nível 3 de 4).

Ao ser questionada sobre o seu domínio do conteúdo de funções, Alice informou dominar bem o objeto (nível 4 de 4). A estudante caracterizou a sua definição de função associando os aspectos da lei de formação e da correspondência unívoca entre elementos de conjuntos: "*Função é uma regra matemática, que relaciona elementos de um conjunto (domínio) a apenas um elemento de outro conjunto (contradomínio)*" (Alice, entrevista). Quando solicitada a descrever o comportamento das variáveis a partir do gráfico, Alice descreveu esse comportamento evocando vários aspectos, ora explicitando a relação das variáveis entre si – como no caso do crescimento e da correspondência unívoca entre elas – ora enfatizando aspectos globais da função, como o suposto modelo algébrico, a imagem e a paridade da função:

> *É uma função de grau 3, onde, para cada X existe apenas um Y correspondente, de forma que o conjunto imagem é todo R. A medida que X cresce Y cresce, a medida que X diminui (decresce) Y diminui. Números opostos do domínio tem imagens opostas, desse modo, caracteriza-se com função ímpar.* (Alice, questionário)

Assim como Eric, Alice evocou o aspecto covariacional ao descrever o crescimento de y à medida que x cresce, porém sem levar em conta a variação variável.

Em síntese, as respostas de Eric, Louise e Alice revelaram domínios básicos do *software* por Louise e Alice para explorar funções, enquanto Eric apontou um domínio intermediário. Suas experiências com o Geogebra variam entre 2 e 3 anos, o que mostra que há uma gênese em andamento com o *software* para explorar funções.

Para os três estudantes, percebeu-se uma forte influência da perspectiva formal e de correspondência, tanto nas definições de função dos estudantes, quanto nas suas descrições de como as variáveis variam no gráfico, principalmente pela evocação da lei de formação da função, mesmo que esse aspecto não seja importante para a descrição requerida. Entre os três estudantes, as respostas de Eric pareceram ter uma influência mais presente de uma visão covariacional, por sua referência à relação de dependência entre variáveis na sua definição de função. Ainda assim, as referências dos três limitaram-se a descrições em termos do crescimento/decrescimento de uma variável em relação à outra.

As análises dos perfis de Eric, Louise e Alice contribuem para entender as trajetórias das suas respectivas gêneses instrumentais, já em andamento em relação à exploração de funções com o Geogebra, mas incipiente nas situações de covariação. Além disso, observou-se como suas visões sobre função e o comportamento de variáveis no gráfico podem evoluir para uma mobilização cada vez mais efetiva de um raciocínio covariacional com o suporte do Geogebra. Ademais, essas trajetórias serão analisadas e interpretadas sempre dentro de um contexto mais geral da classe.

4.2 SÍNTESE E ANÁLISE DA SESSÃO 1

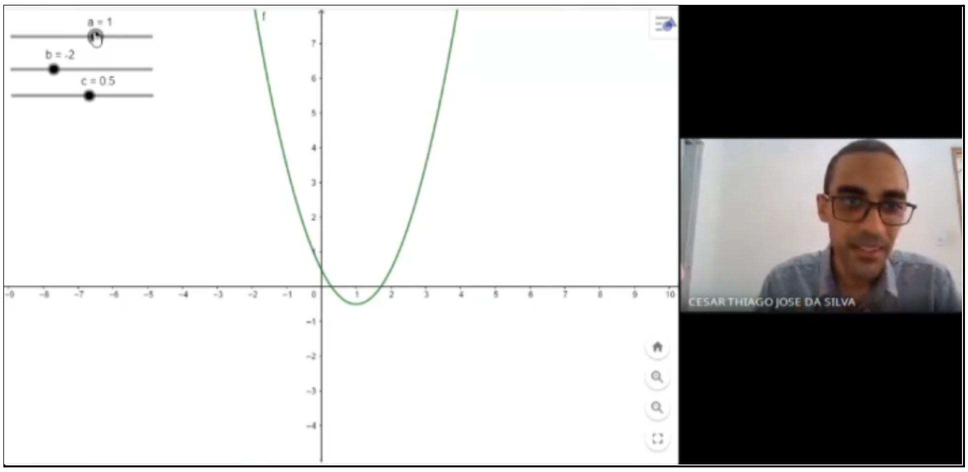
A síntese e análise da sessão segue a seguinte estrutura: (i) síntese da sessão e (ii) análise dos casos. Na sessão 1 foi apresentado o curso de extensão "Uso do Geogebra para explorar funções por uma perspectiva covariacional" e o experimento de pesquisa integrado ao curso. Os oito participantes do experimento compareceram a essa sessão que teve duração de 02h49min e foi estruturada nos seguintes momentos:

- Apresentação do curso e do experimento integrado, do mediador e dos monitores;
- Apresentação e motivação dos participantes para realizar o curso;
- Introdução à abordagem covariacional de função;
- Introdução ao Geogebra: visão geral e ferramentas para representar e explorar funções;
- Orquestração de uma situação: representar uma função polinomial de grau 3;
- Fechamento da sessão.

Após as apresentações iniciais do curso e da equipe organizadora, os participantes foram convidados a apresentarem-se e falarem sobre suas motivações para fazer o curso. As respostas indicaram que as motivações, em geral, foram aprender ou aprofundar o uso do Geogebra e utilizá-lo como ferramenta de ensino. Após esse primeiro momento, foi introduzida a abordagem covariacional de funções, em uma orquestração configurada com o mediador como expositor, o apoio dos monitores no acompanhamento do *chat* e no gerenciamento da frequência e o acompanhamento dos estudantes na plataforma da videoconferência.

A ideia de covariação como uma abordagem de função foi apresentada mediante discussão acerca do seu papel no currículo, na formação e na prática dos futuros professores. Em seguida, foi apresentada uma visão geral do Geogebra: suas ferramentas e aplicações, passando, em seguida, às ferramentas e representações específicas para funções. Nesse momento, alterou-se o modo de exploração da plataforma de videoconferência, no qual a tela do mediador foi dividida entre a apresentação e a tela do Geogebra, para dar conta de explorar o *software* de forma que os estudantes acompanhassem o desenvolvimento das técnicas (Figura 39).

Figura 39 – Modo de exploração da plataforma da videoconferência na sessão 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Focou-se na descrição das representações para explorar funções: o gráfico, o modelo algébrico, a planilha e no funcionamento das ferramentas básicas para representar e explorar funções, além da sintaxe e das técnicas necessárias para criar e operar sobre objetos nessas representações. Essas técnicas estão, de certa forma, relacionadas entre si e podem ser divididas em: técnicas de construção, técnicas de configuração e técnicas de exploração.

As técnicas de construção são relacionadas à sequência de ações e comandos necessários para construir ou evocar objetos no Geogebra, por exemplo, as diferentes formas de esboçar o gráfico de uma função. As técnicas de configuração relacionam-se às ações e comandos necessários para configurar a forma como os objetos são representados na interface, como definir as escalas e o intervalo de exibição do gráfico. Já as técnicas de exploração são relacionadas às ações e aos comandos necessários para explorar a matemática envolvida nas relações entre objetos no Geogebra, como alterar os valores dos coeficientes da função nos controles deslizantes e observar a forma como os valores de *x* e f(x) mudam em uma lista da planilha.

As técnicas de construção exploradas relacionaram-se, de forma geral, às diferentes formas de traçar e esboçar o gráfico, criar controles deslizantes, definir fórmulas e evocar objetos na planilha. As principais técnicas de configuração da interface desenvolvidas concentraram-se no gráfico, a saber: exibição da malha e das graduações nos eixos e configuração das escalas, do zoom e dos intervalos de exibição do gráfico. As técnicas de exploração desenvolvidas concentraram-se na exploração da articulação entre modelos gerais de funções (como $f(x)=ax^2+bx+c$) e as representações gráfica e tabular, na planilha, por meio da manipulação de controles deslizantes e a visualização do gráfico e da variação dos valores na planilha.

O desenvolvimento das técnicas envolveu aspectos da sintaxe do Geogebra, sobretudo a sintaxe do modelo algébrico das funções (por exemplo, como definir expoentes em *x*) e a sintaxe da definição das fórmulas da planilha (por exemplo, como referenciar as variáveis da função na planilha e como definir fórmulas para relacionar valores de linhas e colunas dados).

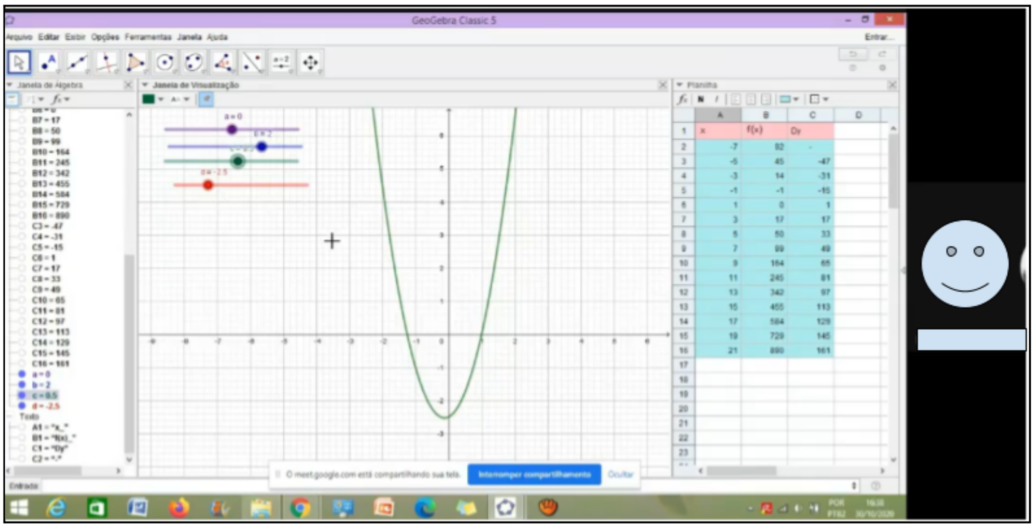
Em seguida, foi orquestrada uma situação de construção de um modelo geral de uma função polinomial de grau 3, representado no seu modelo algébrico, gráfico e em uma planilha com uma lista de valores de *x*, f(x) e Δf(x). Essa situação teve por objetivo exercitar as técnicas e sintaxe básicas para o desenvolvimento de esquemas de uso para explorar funções.

A configuração didática da situação consistiu em um arranjo no qual os estudantes exploram o Geogebra individualmente nos seus computadores, enquanto a videoconferência ficou em segundo plano, porém com o mediador e os monitores presentes, para tratar as dúvidas via *chat* ou na própria videoconferência. Foram dados 20 minutos para os estudantes construírem o material.

Após o tempo dado, o mediador retomou a sessão para a discussão das construções realizadas pelos estudantes. Para esse momento, voluntários foram convidados a apresentar as suas construções e a configuração didática foi rearranjada, de forma que cada voluntário compartilhou a sua tela e os demais acompanharam a explicação da construção do colega

(Figura 40). Também foi introduzida a ferramenta do documento de texto *online* para que os estudantes respondessem sobre dificuldades de construção.

Figura 40 – Compartilhamento da produção de uma estudante na sessão 1

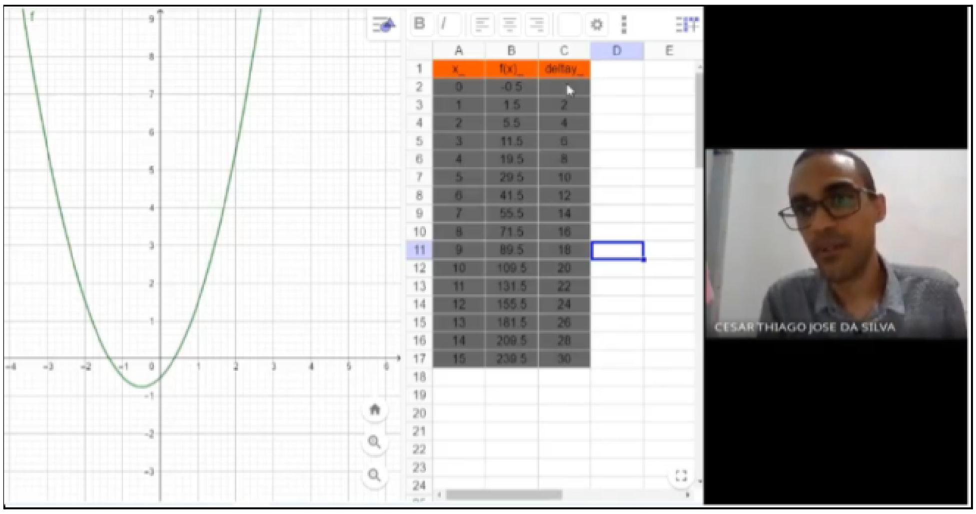


Fonte: Elaborado pelo autor

Alice e Louise compartilharam as suas construções e explicaram as técnicas que usaram. Apesar de usarem versões diferentes do Geogebra, as técnicas mobilizadas pelas duas estudantes foram semelhantes, embora Alice não tenha incluído a coluna das variações de Δf(x) na sua construção.

Alice e Louise não demonstraram dificuldades para construírem e explorarem os seus modelos, mas outros estudantes, como Marcus e Arthur, demonstraram algumas adversidades, principalmente, na construção das listas de valores na planilha dinâmica. Essas listas envolviam a definição de: (i) na primeira coluna, uma sequência em *x* a partir de um valor inicial e de uma diferença Δx fixa entre os demais valores, definidos pela inserção da fórmula na célula e pelo comando clicar e arrastar para baixo (que repete a fórmula da célula selecionada nas células subsequentes); (ii) na segunda coluna, uma sequência em f(x), cujos valores são definidos em função dos valores da primeira coluna, utilizando o comando clicar e arrastar para baixo, a partir da primeira linha; (iii) na terceira coluna, uma sequência das diferenças sucessivas de f(x), definidos pela em função dos valores correspondentes na segunda coluna e do comando clicar e arrastar para baixo, a partir da primeira linha. (Figura 41)

Figura 41 – Construção da planilha dinâmica na sessão 1



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível que a natureza das dificuldades de Marcus e Arthur esteja relacionada com as sintaxe e técnicas próprias da planilha, como descritas acima, para a qual esses estudantes parecem não ter desenvolvido ainda os seus esquemas de uso relacionados à ação sobre a planilha; isto é, seus esquemas ainda estavam limitados ao aspecto visual dos valores na planilha.

4.3 SÍNTESE E ANÁLISE DA SESSÃO 2

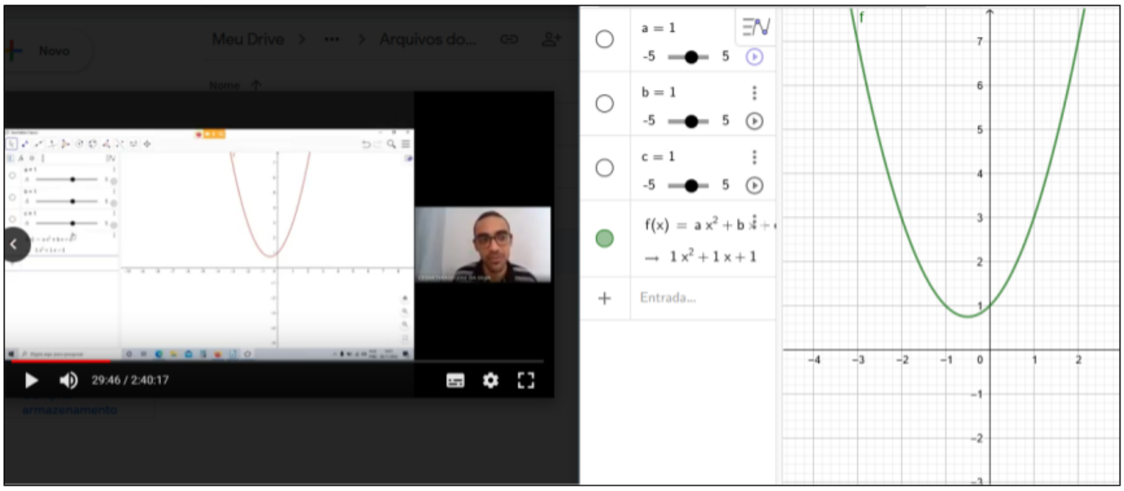
Na sessão 2 foi apresentada uma visão covariacional de função com o uso das ferramentas do Geogebra. Os oito participantes do experimento compareceram a esta sessão que teve duração de 02h40 min e foi estruturada nos seguintes momentos:

- Informes, dúvidas e questões institucionais do curso e do experimento;
- Retomada da discussão sobre a abordagem covariacional de função;
- Possibilidades do Geogebra para representar e explorar a covariação;
- Orquestração de uma situação envolvendo a covariação em funções polinomiais;
- Fechamento da sessão.

Para os três primeiros momentos da sessão, seguiu-se uma configuração na qual o mediador teve um papel predominante de expositor das ferramentas e das técnicas necessárias para explorar a covariação no Geogebra, os monitores tiveram um papel de apoio, monitorando o *chat*, solucionando dúvidas individuais e trazendo-as à classe, quando necessário. Os estudantes acompanharam a exposição nos seus computadores pela tela de videoconferência e puderam fazer perguntas ou comentários via *chat* ou pela própria videoconferência.

Um dado importante obtido pelo mediador foi o modo pelo qual os estudantes estavam configurando as suas telas para assistir a apresentação do mediador e usar o Geogebra simultaneamente. Três configurações diferentes foram reportadas: (i) assiste a videoconferência no *smartphone* e explora o Geogebra no computador simultaneamente à demonstração do mediador; (ii) assiste às demonstrações na videoconferência e explora o Geogebra no mesmo computador, de forma intercalada; (iii) utiliza um recurso do sistema operacional do computador para dividir a tela e exibir, em uma parte da tela, a videoconferência e, na outra parte a tela, o Geogebra, permitindo assistir e explorar simultaneamente (Figura 42). As diferentes configurações podem ter influenciado a experiência dos estudantes em praticar as técnicas básicas do uso do Geogebra.

Figura 42 – Exemplo de configuração em tela dupla por alguns estudantes na sessão 2



Fonte: Elaborado pelo autor

A discussão da abordagem covariacional de função foi retomada com a ênfase no foco na variação das variáveis e nas possibilidades das tecnologias computacionais para abordar a covariação em relação ao ambiente papel e lápis, sobretudo, as potencialidades do Geogebra para representar e explorar a covariação. Em seguida, procedeu-se à exploração do Geogebra, que abordou o aprendizado de técnicas, regras de sintaxe e comandos necessários para o domínio das ferramentas básicas do Geogebra, com foco na covariação. Essa ênfase foi necessária para que os estudantes desenvolvessem os seus esquemas de usos iniciais para covariação com o Geogebra. Ao mesmo tempo, o desenvolvimento de técnicas no Geogebra permitiu a emergência de várias questões conceituais sobre função, de forma imbricada às questões técnicas.

Com relação às técnicas de uso do Geogebra (e os esquemas de uso associados) desenvolvidas na sessão, um exemplo foi a técnica desenvolvida para construir a representação de variáveis de uma função *f* nos eixos *x* e *y*, de forma que a variação delas esteja conectada, envolve definir um ponto A livre no eixo *x* e um ponto B no eixo *y* definido como B=(0, f(x(A))). Como exemplo de técnica de configuração, foi desenvolvida a forma de definir a quantidade de casas decimais ou algarismos significativos dos valores numéricos exibidos na planilha. Já como exemplo de técnica de exploração, foi desenvolvida uma técnica para explorar a propriedade crescente da função *f* em um intervalo que envolveu deslizar o ponto A (variável em *x*) da esquerda para a direita (crescimento contínuo em *x*) e observar a variação correspondente no ponto B (variável em *y*), no sentido ascendente do eixo *y*, ou seja, indicando um valor crescente da variável.

Outras técnicas de construção importantes desenvolvidas na sessão foram: construção e configuração do gráfico de uma função; construção e configuração de controles deslizantes; construção do modelo algébrico com controles deslizantes; construção de pontos como variáveis conectadas nos eixos; criação e configuração de uma tabela dinâmica a partir de uma lista de valores de *x* conectados a valores de f(x).

As técnicas de exploração relacionaram-se diretamente com a exploração matemática da covariação, pois, por meio dessas técnicas, os estudantes podem construir relações entre as variáveis. Exemplos destacados foram: (i) exploração dos controles deslizantes para observar a influência dos coeficientes do modelo algébrico no gráfico; (ii) exploração da propriedade de crescimento/decrescimento em *y* por meio da manipulação da variável em *x*; (iii) exploração da quantificação da variação por meio do suporte da planilha à exploração do gráfico.

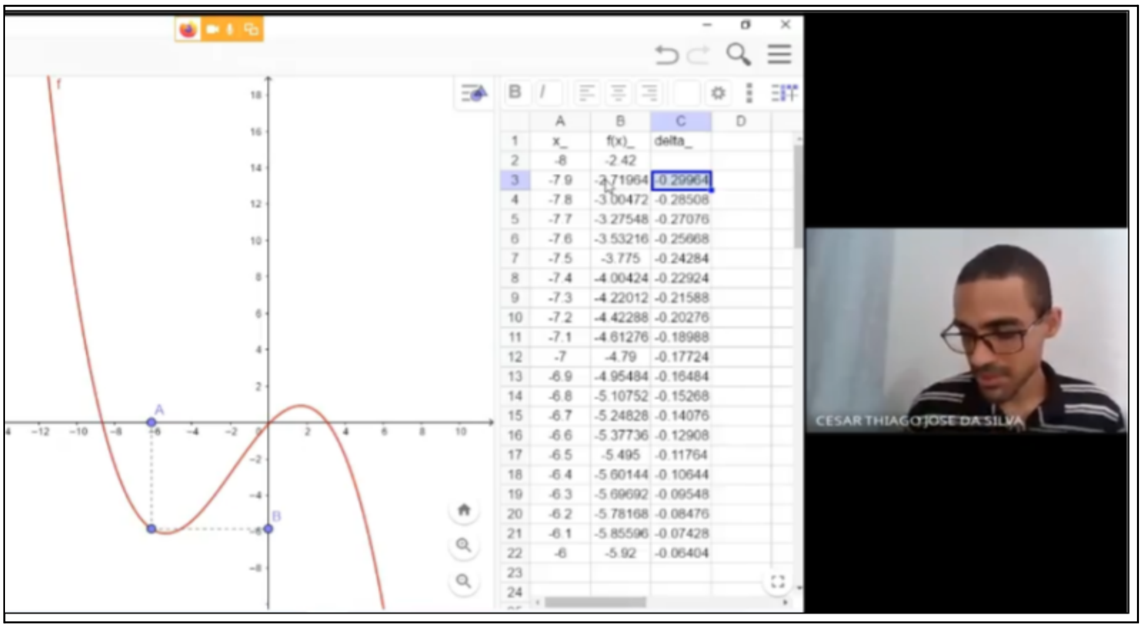
Esse processo de desenvolvimento de técnicas (e os esquemas de uso associados) do Geogebra envolveu a emergência de questões relativas à sintaxe e aos comandos internos do Geogebra, necessários nas técnicas de construção. Algumas dessas questões surgiram de forma prevista (por exemplo: (i) sintaxe do modelo algébrico; (ii) sintaxe do modelo f(x(P)) para representar a variável associada à função *f* e à coordenada em x do ponto P; (iii) sintaxe do modelo f(A_n) para expressar, na planilha, o valor da imagem de *f* do valor da coluna A e linha n; etc.) e outras surgiram de forma imprevista, devido a eventos *ad hoc* e dúvidas dos estudantes, como a descoberta colaborativa do comando "CTRL+d" na planilha que, ao ser acionado, exibe a regra lógica com a qual cada célula foi programada pelo usuário. Essa descoberta ocorreu depois que alguns estudantes, após acionarem "CTRL+d" acidentalmente, não conseguirem mais exibir os valores numéricos na planilha, mas apenas as expressões literais correspondentes, como f(A1), f(A2), …, f(An).

Um aspecto importante desenvolvido na sessão foi a possibilidade de representar variáveis como pontos, conferindo a possibilidade de dinamismo às variáveis no próprio gráfico, embora colocando em jogo e articulando as concepções geométricas dos estudantes de variáveis e pontos. Esse aspecto tem uma grande importância do ponto de vista da construção dos significados de variável e variação pelos estudantes; além disso, o desenvolvimento de técnicas de construção, configuração e exploração – tanto no gráfico como na planilha – tiveram como base os pontos como objetos básicos de representação das variáveis, daí o seu valor semântico.

As questões trazidas pelos estudantes pelo *chat* ou pela videoconferência dão uma ideia do desenvolvimento dos seus esquemas de uso e dos aspectos pré-existentes da sua gênese instrumental no Geogebra. A maior parte dessas questões diz respeito ao "como fazer", ou seja, às técnicas de construção que se relacionam ao desenvolvimento dos esquemas de uso. Exemplos dessas questões foram: "*Como configurar valores nos controles deslizantes?*" (Eric), "*Como definir pontos sobre os eixos?*" (Laura), "*Como definir uma coluna que calcula os valores da função e a variação dos valores da função na planilha?*" (Arthur) e "*Como fazer para tornar a planilha dinâmica?*" (Ana). Também foi presente uma tentativa de associar uma análise do gráfico com foco na covariação entre variáveis com uma análise com foco na reta tangente e nos coeficientes angulares, como na fala de Eric: "*Construindo as retas tangentes ao gráfico se percebe esta mesma coisa, né? (...) O coeficiente angular destas retas seria esses deltas aí*?".

Uma análise da performance didática a partir da revisitação dos dados da sessão revelou uma restrição da planilha em uma configuração específica: a análise da covariação a partir de uma lista de *x*, f(x) e Δf(x) que envolva valores com três ou mais algarismos significativos; a visualização da planilha nessa configuração (embora considerando o potencial dos algarismos significativos para analisar valores muito próximos entre si) pareceu limitar a análise da variação, devido à poluição visual causada pela grande quantidade de algarismos e pela necessidade de coordenar uma ordem entre os valores após a vírgula, a fim de estabelecer o crescimento ou decrescimento da sequência (Figura 43).

Figura 43 – Restrição da configuração da quantidade de algarismos significativos na planilha



Fonte: Elaborado pelo autor

Foi perceptível como os estudantes silenciaram ao serem questionados sobre como os valores variam. A restrição dessa configuração específica da planilha (uma restrição de configuração da interface) é de uma natureza que vai além do meio computacional, pois também pode ocorrer no papel, mas pode ser potencializada ao incluir-se o dinamismo da variação dos valores, permitido pelo computador.

Na parte final da sessão, foi orquestrada uma situação que envolveu a construção de um material para explorar e descrever a covariação entre as variáveis, de forma a estabelecer relações com os aspectos do gráfico de funções polinomiais. A seguir, descreve-se a síntese e uma análise dos resultados desse momento.

Situação: explorar e descrever a covariação no gráfico de funções polinomiais

A situação foi proposta após terem sido introduzidos o significado matemático de covariação e as ferramentas básicas do Geogebra, com o objetivo de interpretar a covariação com o suporte de representações como: pontos como variáveis dinâmicas no gráfico, gráfico, tabela. Quatro questões foram apresentadas com o objetivo de relacionar aspectos do gráfico: crescimento, decrescimento, pontos de máximo e mínimo, concavidade e pontos de inflexão, com a forma como variáveis variam entre si (Quadro 8).

Quadro 8 – Situação explorada na sessão 2

Construa um modelo para uma função polinomial de grau até 3. Teste algumas funções crescentes e decrescentes (ou em intervalos crescentes e decrescentes) e responda. a) Como interpretar o crescimento ou o decrescimento em termos da variação conjunta em x e y? b) Como interpretar o que ocorre nos pontos de máximo ou de mínimo em termos da variação conjunta em x e y? c) Como interpretar o que ocorre em diferentes concavidades em termos da variação conjunta em x e y? d) Como interpretar o que ocorre nos pontos de inflexão em termos da variação conjunta em x e y?

Fonte: Elaborado pelo autor

Na sessão, essas relações foram exploradas apenas superficialmente, sem uma construção formal. Não houve a intenção de obter interpretações covariacionais desenvolvidas nesta situação, mas confrontar os conhecimentos prévios dos estudantes com uma interpretação covariacional da variação das variáveis e a exploração das ferramentas do Geogebra.

Os estudantes tiveram 30 minutos para explorar essa situação, porém o tempo foi extrapolado devido às necessidades de intervenções do mediador para sanar dúvidas e demonstrar funcionalidades do Geogebra. A configuração didática envolveu a exploração individual do Geogebra pelos participantes nos seus computadores pessoais, tendo o suporte *online* do mediador e dos monitores na videoconferência e no *chat*. Foi orientada a criação de um documento de texto *online* no qual os estudantes deveriam escrever as suas respostas.

Referências à taxa de variação para descrever a covariação no gráfico: raciocínio covariacional avançado ou associação com conceitos previamente construídos?

As descrições de Eric e Alice tiveram em comum a mobilização do conceito de taxa de variação para interpretar os aspectos do gráfico covariacionalmente: "*Onde a função* *cresce a taxa de variação é positiva, em caso contrário a taxa de variação é negativa*" (Alice); "*Nos intervalos em que a concavidade é voltada para baixo, a taxa de variação é decrescente e nos intervalos em que a concavidade é voltada para cima, a taxa de variação é crescente*"(Eric). Apesar de corretas matematicamente, caso essas análises tenham sido feitas meramente associando-se a taxa de variação à derivada – que é relacionada com a forma do gráfico nos cursos de Cálculo – pode significar que o raciocínio dos estudantes não envolveu, nesse caso, uma imagem da covariação entre as variáveis, pela dificuldade em visualizar essa covariação ou pelo fato de a associação direta com a derivada ser, a princípio, mais imediata.

Raciocínio covariacional limitado: poucas descrições em termos de como x e y variam entre si

A experiência aparentemente limitada dos estudantes com a covariação e as prováveis influências da abordagem de correspondência nas suas concepções prévias podem estar relacionadas às poucas descrições dadas em termos da covariação entre as variáveis. Em alguns casos, os estudantes deram descrições mistas que, por vezes, envolveram aspectos da covariação, mas que também incluíam conceitos e significados baseados em:

- Regras procedimentais:

"*Os pontos de inflexão ocorrem quando fazemos a segunda derivada e o sinal é trocado, ou seja, a curva muda se ela era positiva, transforma-se em negativa, se for negativa transforma-se em positiva.*" (Eliza)

- Visão pictórica do gráfico:

> *Uma função quadrática é decrescente ela tem um ponto de máximo, quando ela é crescente tem um ponto de mínimo. Temos pontos de máximos e mínimos que são globais(da função toda) e tem os que são em intervalos. Podemos entender como ponto de máximo o ponto mais alto da função e o de mínimo o ponto mais baixo.* (Eliza)

- Significados como coeficiente angular ou velocidade: "*Podemos verificar se é crescente ou decrescente pelo coeficiente angular...*" (Laura); "*A velocidade do* *crescimento ou decrescimento está inversamente proporcional em relação a proximidade dos pontos de máximo ou mínimo.*" (Arthur)

Inferências com base em aspectos visualizados em casos isolados

Apesar de a situação requerer descrições inferidas a partir da análise de vários casos, muitas descrições foram baseadas no comportamento das variáveis e da variação para casos isolados, cujos comportamentos envolveram aspectos que não podem ser generalizados como, por exemplo, na afirmação de Laura sobre pontos de inflexão: *"Nos pontos de inflexão se x cresce y também cresce"* (Laura). Certamente a função explorada por Laura envolveu um ponto de inflexão em um intervalo crescente da função, porém esse comportamento crescente não pode ser generalizado para pontos de inflexão em geral. Esse equívoco pode ser caracterizado como um fenômeno no qual a estudante atribui ao conceito um aspecto que ela visualiza para um caso isolado, ou seja, o conceito é cristalizado no aspecto visualizado, sem uma construção do seu real significado matemático. Esse fenômeno pode estar associado ao que Artigue (1996b) descreveu como um fenômeno no qual os estudantes operam em um nível conceitual inferior ao esperado (pseudo-objetos).

Fenômenos e relações com a exploração do artefato e a transposição informática

Os dados da sessão 2 são apenas respostas escritas, sem acesso às interações sujeito-artefato e aos raciocínios que levaram a essas respostas, porém algumas pistas dessas relações podem ser encontradas nas respostas dos estudantes:

- Atribuição de aspectos físicos às variáveis: Em uma das respostas, um estudante atribuiu o significado de velocidade à variação das variáveis: "*A velocidade do crescimento ou decrescimento está inversamente proporcional em relação à proximidade dos pontos de máximo ou mínimo*" (Arthur). Este fenômeno pode estar relacionado com a representação das variáveis como pontos dinâmicos no gráfico que podem ganhar um significado de objeto móvel.
- Atribuição do aspecto visualizado ao conceito: este fenômeno tem forte relação com a forma como o estudante conceitualiza o objeto matemático a partir do que ele

visualiza, ou seja, a partir do que é exibido na tela. Quando essa conceitualização é frágil, o estudante atribui ao objeto matemático o comportamento dos objetos que ele visualiza para casos particulares, como no caso de Laura que atribuiu, com base no caso que ela explorou, a propriedade crescente de funções em pontos de inflexão (fenômeno associado ao descrito por Artigue (1996b) como pseudo-objetos).

4.3.1 Análise das interpretações dadas por Eric, Alice e Louise

Embora as descrições de Eric e Alice não tenham incluído uma referência explícita às variáveis em x e y, nem ao uso das ferramentas do Geogebra, elas mobilizaram o conceito de taxa de variação para interpretar o gráfico covariacionalmente. Não é possível afirmar se essas descrições foram baseadas em uma consciência de como a variação relativa entre x e y é expressa pela taxa de variação, ou em uma associação entre a taxa de variação e a derivada que os levou a interpretar o gráfico com base no comportamento já conhecido da derivada (pela sua formação prévia em Cálculo). No item sobre ponto de inflexão, Alice cometeu um equívoco ao referir-se ao sinal, em vez de o sentido de crescimento/decrescimento da taxa: "*Nos pontos de inflexão ocorre a mudança de sinal da taxa de variação*" (Alice, sessão 2).

As descrições de Louise relacionaram os aspectos do gráfico aos valores das variáveis e da sua variação, alternando-se entre uma interpretação covariacional dos aspectos do gráfico e a mera relação entre o sinal das variáveis e o sinal da sua variação em cada intervalo. As descrições de Louise foram fortemente ligadas ao caso particular que ela analisou, em detrimento de como as variáveis se comportam, de forma geral, em pontos críticos, concavidades e pontos de inflexão. Não está claro o quanto as conclusões que ela tomou para cada caso influenciam as suas concepções sobre a relação entre esses aspectos e a covariação para casos gerais.

Além disso, as descrições de Louise foram marcadas pelo uso de termos que tornaram as suas exposições equivocadas matematicamente, como: (i) "*Enquanto o x cresce y tende a decrescer e a variação consequentemente também tende a decrescer*" (Louise, sessão 2), (o termo "consequentemente" sugere o equívoco de que função decrescente implica que a variação também é decrescente); (ii) "*No ponto de máximo obtivemos uma variação negativa para y, enquanto que no ponto de mínimo a variação é positiva*" (Louise, sessão 2), sugere o equívoco de uma variação não-nula nesses pontos; (iii) "*Quando x é positivo a concavidade* *da função é voltada para baixo e a variação conjunta tende a decrescer. Logo, quando x é negativo a concavidade é voltada para cima e sua variação é positiva*" (Louise, sessão 2) (o conectivo "logo" sugere o equívoco de que a mudança de concavidade e, consequentemente, do sentido de crescimento da variação, é simétrica em relação a x=0); (iv) "*Nos pontos de inflexão se X crescer o Y também crescerá, logo isso implicará em uma variação também crescente.*" (Louise, sessão 2), o conectivo "logo" sugere o equívoco de que uma função crescente implica na variação da função crescente.

Os equívocos nas descrições de Louise parecem ter sido predominantemente influenciados pela sua visualização do comportamento dos objetos (variáveis, elementos do gráfico) na tela e pelas relações (variação) entre esses objetos em um caso particular. Tais visualizações interagiram com suas concepções prévias sobre a variação da função.

Em síntese, a sessão 2 foi marcada pela interação entre questões técnicas (como fazer no Geogebra) e conceituais (significado matemático) que são características do treinamento inicial para o domínio das técnicas básicas (esquemas de uso) de *softwares* de matemática.

Também houve a confrontação entre os conhecimentos e os esquemas prévios do Geogebra dos estudantes (com foco em traçar o gráfico a partir do modelo algébrico, apenas) e os da nova perspectiva baseada na covariação (com foco em novas representações, ferramentas e na criação de novos objetos e significados). Além disso, também foram confrontados os conhecimentos prévios de função dos estudantes, baseados na correspondência entre valores, nos procedimentos de cálculo e no formalismo da teoria dos conjuntos, com uma abordagem de função baseada na covariação.

Eric e Alice não se referiram explicitamente às variáveis, nem deram descrições em função das ferramentas do Geogebra, mas mobilizaram (talvez por uma associação indireta com a derivada) a ideia de taxa de variação para descrever o gráfico da função. Já as descrições de Louise foram marcadas pela influência de como ela visualizou e interpretou a variação em casos particulares nas suas inferências para casos gerais, o que fez emergir equívocos no seu raciocínio covariacional.

4.4 SÍNTESE E ANÁLISE DA SESSÃO 3

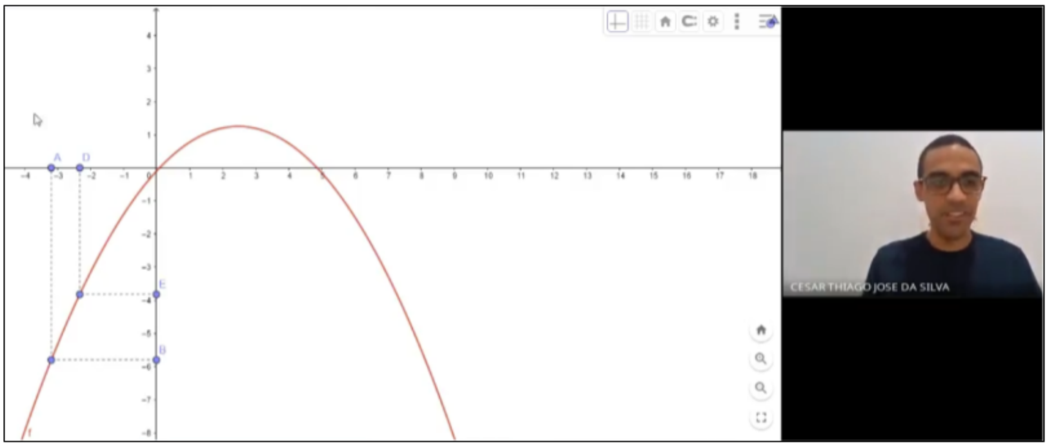
Na sessão 3 foi dado continuidade à exploração do Geogebra para uma visão covariacional de função. Os oito participantes do experimento compareceram a essa sessão que teve duração de 02h27min e foi estruturada nos seguintes momentos:

- Informes institucionais, questões e orientações quanto ao uso de instrumentos de registro dos dados (ferramenta de gravação de vídeo e tela) e à técnica de pensar em voz alta;
- Possibilidades do Geogebra para representar e explorar a covariação: continuação;
- Orquestração da situação 1A;
- Fechamento da sessão;

A sessão 3 pode ser dividida em dois momentos principais: (i) a exploração e apresentação das possibilidades do Geogebra para covariação e (ii) a orquestração da situação 1A, desenhada para a análise dos dados da pesquisa. No primeiro momento, o mediador teve um papel predominante de expositor das ferramentas e técnicas necessárias para explorar a covariação no Geogebra; os monitores tiveram um papel de apoio, monitorando o *chat* e trazendo as dúvidas individuais à classe; os estudante acompanharam a exposição nos seus computadores pela tela de videoconferência e puderam fazer perguntas ou comentários via *chat* ou pela própria videoconferência. No segundo momento, a configuração didática envolveu a exploração individual do Geogebra pelos participantes nos seus computadores pessoais, tendo o suporte *online* do mediador e dos monitores na videoconferência e no chat.

A sessão 3 deu continuidade à exploração de ferramentas do Geogebra para covariação. Foram trabalhadas técnicas de construção e exploração da covariação com a representação de dois valores de variáveis em cada eixo: x_1, x_2, y_1 e y_2 (Figura 44).

Figura 44 – Covariação representada por dois valores de variáveis em cada eixo



Fonte: Elaborado pelo autor

Essa representação enfatiza a diferença $\Delta y = y_2 - y_1$ conforme se varia a diferença $\Delta x = x_2 - x_1$, por meio dos pontos correspondentes no eixo *x*. Duas técnicas de exploração dessa construção foram abordadas: (i) variar a diferença Δx com os pontos associados a x_1 e x_2 livres no eixo (os pontos são variados de forma independente entre si, geralmente mantendo-se um dos valores fixos e variando-se o outro) e (ii) variar simultaneamente os valores x_1 e x_2 mantendo-se a diferença Δx fixa (os dois pontos são variados de forma simultânea ao selecioná-los e acionar o comando CTRL)

Posteriormente, trabalhou-se a exploração das variáveis *x* e f(x) de uma função com pontos nos eixos, ocultando-se o gráfico da função, para desenvolver a ideia da covariação minimizando-se a ênfase no aspecto pictórico do gráfico. Essa ideia foi fundamental para a exploração pelos estudantes da situação 1A, proposta nesta sessão 3. Para explorar a covariação representada nesse contexto, foram trabalhadas técnicas que envolvem variar *x* e coordenar a variação em *y* visualmente no gráfico e com o suporte de ferramentas como as marcações no eixo, a malha e a planilha.

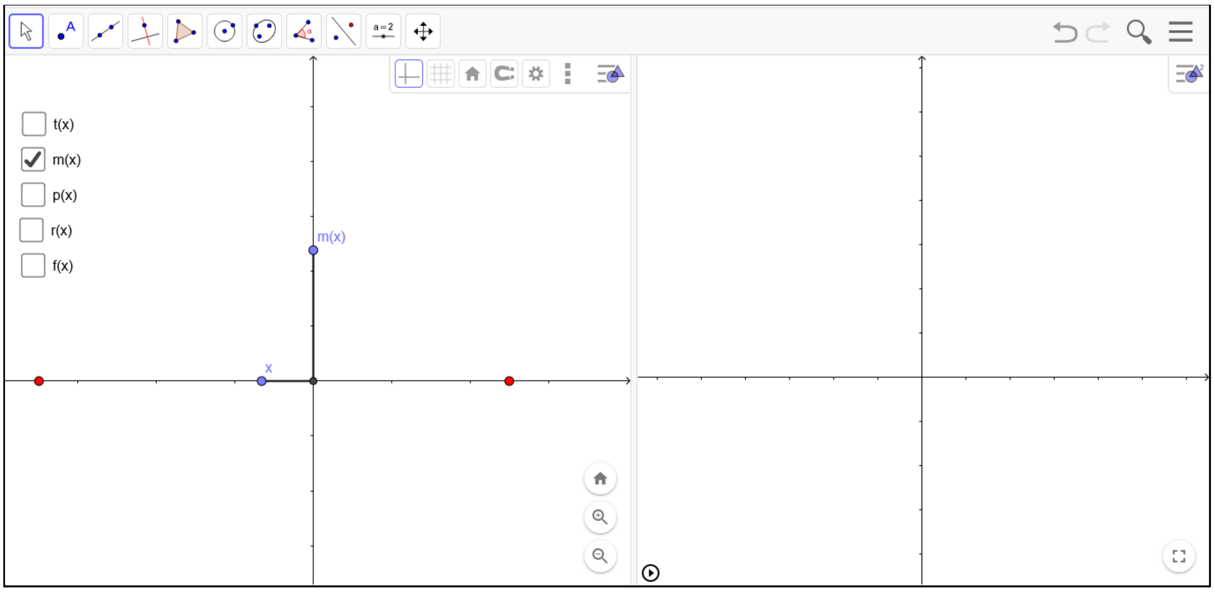
Ainda a partir da representação das variáveis nos eixos, foram exploradas técnicas de construção, exploração e configuração para produzir um esboço do gráfico da função. Foram exploradas e confrontadas técnicas influenciadas no ambiente papel e lápis e aquelas possibilitadas pelas características do meio computacional, utilizando ferramentas como a caneta do Geogebra, o rastro do ponto, a planilha, a definição de pontos no gráfico, etc.

Na segunda parte da sessão, foi orquestrada a situação 1A, cuja síntese e análise são descritas a seguir.

Situação 1A: explorar, descrever e representar a covariação a partir de uma representação por segmentos dinâmicos

Os objetivos, o planejamento e a análise *a priori* da situação 1A foram descritos na subseção de análise *a priori* da mesma. Os estudantes foram solicitados a explorar, descrever e representar a covariação graficamente, a partir da representação dinâmica das variáveis por segmentos dinâmicos nos eixos x e y (Figura 45).

Figura 45 – Material da situação 1A



Fonte: Elaborada pelo autor

Foi planejado um tempo de 40 minutos para a situação que foi extrapolado para mais de 60 minutos, devido às necessidades apresentadas: orientar quanto à gravação e o registro dos dados, sanar dúvidas, demonstrar funcionalidades do Geogebra e resolver problemas técnicos nos computadores dos estudantes. A configuração didática envolveu a exploração individual do Geogebra pelos participantes nos seus computadores pessoais, tendo o suporte *online* do mediador e dos monitores na videoconferência e no *chat*. Foi orientada a criação de um documento de texto *online* no qual os estudantes deveriam escrever as suas respostas às questões da situação.

Aspectos do raciocínio covariacional nas respostas dos estudantes

- *Referências à covariação entre as variáveis:* Em comparação com as descrições dadas na situação da sessão 2, observou-se que, de forma geral, as respostas dos estudantes envolveram mais descrições em termos das relações entre as variáveis. O *design* do material que colocou em ênfase a representação dinâmica das variáveis, em vez de uma imagem estática do gráfico, em conjunto com a ênfase dada na covariação durante a sessão podem ter contribuído para a mudança no foco dado pelos estudantes.
- *Coordenação e quantificação da covariação:* As respostas dos estudantes não descreveram completamente a forma como a covariação é quantificada na maioria dos itens; limitaram a descrições em termos de crescimento ou decrescimento. No primeiro item (função t(x)), que envolve uma função afim, algumas descrições (3 em 7) fizeram referências a termos sugestivos dessa quantificação, como a 'proporcionalidade' na resposta de Ana (Quadro 9). Nos demais quatro itens (com funções taxa de variação variável), as respostas dos estudantes descreveram a covariação meramente pelo crescimento ou decrescimento em y em função de x, ou em menor número, tentativas de referir-se à variação mobilizando o significado de velocidade. Algumas dessas respostas são exibidas no Quadro 9. Um dado importante é que, quanto mais alterações na forma como a função varia (diferentes concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão), menos os estudantes se arriscaram a fornecer descrições relacionadas à quantificação da forma como se deu a variação.

Quadro 9 – Descrição da covariação dos estudantes na situação 1A

Item	Descrição da covariação apenas em termos de crescimento ou decrescimento	Descrição em termos da quantificação formal/informal da covariação
t(x)	*"Conforme o x aumenta o t(x) diminui, assim é uma função decrescente no intervalo dado." (Eliza)* *"Trata-se de uma reta decrescente, pois de acordo o x cresce o t(x) decresce." (Arthur)*	*"À medida que o x cresce, o t(x) decresce e de* ***maneira proporcional."*** *(Ana)* *"A medida que a variável x cresce a variável dependente decresce de* ***maneira linear,*** *durante todo o intervalo." (Alice)*
m(x)	*"Função decrescente pois quando x cresce m(x) decresce." (Laura)*	*"A variável dependente decresce durante todo o intervalo considerado. Entretanto,* ***o decrescimento não aparenta ser linear****." (Eric)* *"A variável dependente m(x) começa positiva* ***com uma variação lenta****, ao passo que a variável x começa a crescer,* ***m(x) aumenta sua variação****." (Louise)* *"Da mesma forma do anterior, entretanto,* ***m(x) diminui de forma mais rápida.****" (Eliza)*
p(x)	*"Conforme x aumenta, o p(x) também aumenta, o que caracteriza que r(x) é crescente nesse intervalo." (Eliza)* *"A variável dependente tem um intervalo de decrescimento e outro de crescimento à medida que x cresce, no intervalo determinado." (Alice)*	*"A variável dependente decresce até um intervalo em que* ***o decrescimento é menos acentuado*** *e, a partir daí, ela começa a crescer." (Eric)*
r(x)	*"Quando o x varia de -7 a -6 o r(x) crescer até chegar num máximo e começar a decrescer até chegar num mínimo e tornar a crescer." (Arthur)* *"x cresce e r(x) também cresce, porém entre (-6,-5), r(x) começa a descrever e assim fica até um determinado ponto no intervalo (2,3), onde r(x) volta a crescer."(Ana)*	*X*
f(x)	*"A medida que x cresce, a variável dependente, decresce, depois cresce, novamente decresce bem pouco e volta a crescer, durante o intervalo dado." (Alice)* *"x cresce e f(x) decresce, até que no intervalo (-5,-4), f(x) começa a crescer; isso acontece até um determinado ponto no intervalo (1,2), onde f(x) acaba tendo um crescimento, e volta a decrescer entre no intervalo (2,3)" (Ana)*	*X*

Fonte: Elaborado pelo autor

- *Relação com aspectos do gráfico:* As referências aos aspectos do gráfico foram feitas de formas pontuais (sobretudo por Ana e Arthur), apenas aos pontos de máximo e mínimo: "*x cresce e p(x) decresce,* <u>*em determinado ponto*</u> *no intervalo (-3,-2), p(x) começa a crescer à medida que x continua crescendo*" (Ana, referindo-se à função p(x), no item c); "*De acordo com que o x cresce o p(x) diminui* <u>*até chegar num mínimo*</u> *e começar a aumentar*" (Arthur, referindo-se à função p(x), no item c); Não houve referência aos pontos de inflexão e às diferentes concavidades. É possível que a maior facilidade em perceber pontos de máximo/mínimo se deu pela forma como esses pontos se manifestam na representação dos segmentos dinâmicos, como pontos nos quais o sentido do deslocamento do ponto muda. Já a visualização de concavidades e pontos de inflexão, além de não ser explícita, depende da concepção da variação variável. A dificuldade mais determinante parece ter sido a de coordenar a variação variável, porém outras dificuldades limitaram as respostas dos estudantes, como a de coordenar a covariação nos casos que envolviam, além da variação variável, intervalos com diferentes concavidades e pontos críticos, como nas funções r(x) e f(x). Como exemplo, a descrição de Laura foi bastante limitada para o caso f(x): "*Quanto maior o valor de x maior será o f(x)*"; já Eliza, não conseguiu descrever a forma como as variáveis variaram: *"Nesse caso, há muitas variações"*.

Com relação aos fenômenos e aspectos relacionados à transposição informática, destacaram-se:

- O *design* do material, por meio do qual as variáveis foram representadas por segmentos dinâmicos contribuiu para que os estudantes dessem ênfase à variação das variáveis, em vez de enfatizar regras procedimentais e uma visão pictórica do gráfico. Por outro lado, apenas a visualização das variáveis como segmentos dinâmicos parece não ter sido suficiente para que os estudantes quantificassem a forma como as variáveis variaram entre si.
- Atribuição de aspectos físicos às variáveis: no item a, Louise atribuiu o significado de velocidade à variação das variáveis: "*A variável dependente varia de forma mais lenta que a variável x*"; no item b, Eliza também mobilizou esse significado "*Da mesma forma do anterior, entretanto, m(x) diminui de forma mais rápida*". Este fenômeno também foi visto na sessão anterior e pode estar relacionado com a representação das variáveis enquanto pontos e segmentos dinâmicos no gráfico que podem ganhar um

significado de objeto móvel. No item b, o equívoco de Louise foi considerar uma variação negativa decrescente como crescente: "*A variável dependente m(x) começa positiva com uma variação lenta, ao passo que a variável x começa a crescer, m(x) aumenta sua variação*". O contexto no qual o equívoco de Louise emergiu pode ter sido o da associação da variação em *y* com os atributos físicos da velocidade e da aceleração do ponto que representa a variável, cujos valores são positivos; ou ainda, o da associação da variação em *y* com o comprimento do segmento, cujo valor é sempre positivo.

- A representação por meio de segmentos variáveis pode ter limitado a visualização de pontos de inflexão. Nenhum dos estudantes fez referência ao comportamento típico nesse ponto, provavelmente porque não conseguiram conceber a variação na variação representada nos segmentos e sem o suporte de outras ferramentas para coordenar a variação em *y* com acréscimos constantes em *x*.
- A limitação da coordenação motora no uso da ferramenta caneta para traçar o gráfico foi responsável por reduzir o nível de precisão desejado pelos estudantes no esboço do gráfico, como se verá adiante, na análise da atividade de Eric, Alice e Louise.

A seguir, são analisadas as respectivas gêneses e os aspectos do raciocínio covariacional de Eric, Alice e Louise, por meio da análise microgenética das suas produções, articulando os resultados às relações com os fenômenos e aspectos associados à transposição informática.

4.4.1 Análise da atividade de Eric na situação 1A

Eric enfrentou os dois itens da situação de forma conjunta, combinando a exploração e descrição da covariação com o esboço do gráfico em cada item. Ao explorar e descrever a covariação na função t(x), sua regra de ação foi variar a variável *x*, do início ao fim do intervalo e observar a variação em *y*. A regra de tomada de informação envolveu observar o ponto que representa a variável em *y*, a fim de responder se a mesma cresce ou decresce conforme *x* aumenta; o controle da variação foi feito manualmente. Além disso, as regras envolveram a repetição do procedimento, possivelmente em busca de consolidar as inferências, bem como gerar novas inferências:

> 3. Eric: (Varia *x* manualmente, de um extremo do intervalo ao outro e observa a variação no eixo *y*)*"Então a gente consegue concluir que essa função t(x) nesse intervalo ela é decrescente aqui ó... Á medida que o x vai aumentando, o valor de t vai diminuindo"*

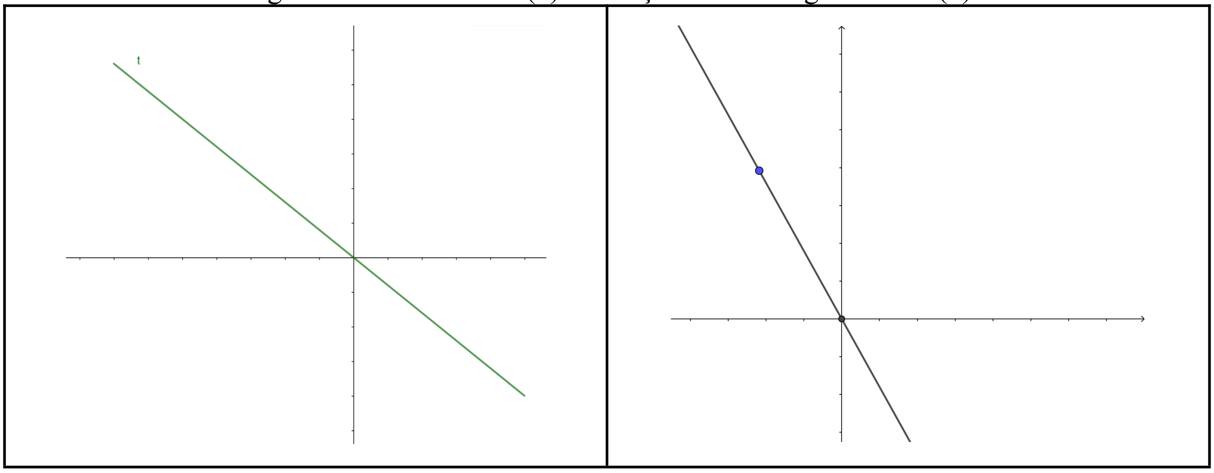
Após Eric concluir o comportamento decrescente da covariação entre *x* e t(x), o direcionamento das suas inferências se voltou para o tipo de função que modela a relação. As novas regras de ação e tomada de informação envolveram variar *x* por acréscimos constantes e observar a variação correspondente em *y*, supostamente fundamentadas pelos teoremas-em-ação: "uma função que leva acréscimos iguais em *x* a acréscimos iguais em *y*, é afim".

> 4. Eric: (Varia *x* novamente, mas dessa vez, tenta aumentar *x* por acréscimos constantes, para isso, utiliza as marcações no eixo *x* como referência) "*Só que, se a gente fizer uma análise aqui, não muito formal, uma análise mais informal, esse decrescimento ele aparenta ser linear. Esse valor de t, ele parece que tá decrescendo linearmente. Então, acredito que uma boa representação para essa função seria uma reta.*"

Como o esboço do gráfico foi feito a partir de uma representação na qual, a princípio, foram ocultados o modelo algébrico e os valores numéricos assumidos pelas variáveis, as primeiras regras de ação no esquema de Eric envolveram a obtenção das coordenadas do gráfico e, uma vez que ele não acionou qualquer ferramenta do Geogebra para obter valores numéricos dessas coordenadas, ele fez uma estimativa dos valores, a partir da posição dos segmentos variáveis e das marcações nos eixos. As regras de tomada de informação também incluíram a correspondência entre as escalas nas janelas 1 e 2 para o desenho do gráfico, bem como a busca por pontos especiais, como o valor de *x* para o qual t(x)=0 e o valor de t(x) para o qual x=0.

O esboço do gráfico por Eric fundamentou-se primeiramente no teorema-em-ação que o levou a inferir que a função t(x) é afim e, depois, na propriedade da geometria que associa dois pontos distintos a uma única reta. Por fim, envolveu a regra específica de definir três pontos e acionar a ferramenta "reta" para traçar o gráfico passando por esses pontos (Figura 46).

Figura 46 – Gráfico de t(x) e esboço de Eric do gráfico de t(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

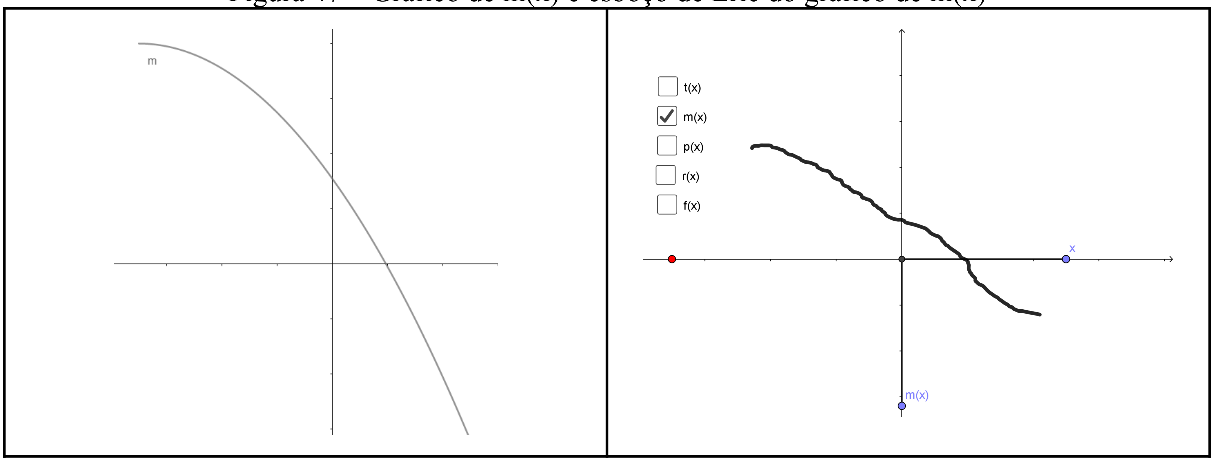
As demais funções abordadas se distinguiram da função t(x) por terem a taxa de variação variável, o que exigiu uma adaptação dos esquemas dos estudantes. Para explorar e descrever a covariação em m(x), Eric mobilizou as regras de ação, tomada de informação e controle geradas para o item anterior, com ênfase na regra: variar *x* por acréscimos constantes e observar a variação correspondente em *y*. Ao explorar a variação em *x* de forma segmentada, Eric visualizou diferenças entre as variações em *y* a cada intervalo em *x*:

> 10. Eric: (Varia *x* do início até a primeira marcação no eixo *x*. Repete o procedimento algumas vezes e observa a variação no eixo *y*.)*"E aí… Variar o x… Ó, decresceu, mas decresceu bem pouquinho, ó! Variou muito pouco…"*
> 11. Eric: (Varia o x da primeira à segunda marcação no eixo x e observa a variação no eixo y) "*Aqui o decrescimento já foi mais acentuado.*"
> 12. Eric: "*Então já uma primeira observação: nesse primeiro intervalozinho menor, o decrescimento não foi tão acentuado. Depois ele foi um pouco mais… O decrescimento vai se tornando mais acentuado, à medida que o valor de x aumenta... Entretanto a função, ela é sempre decrescente, nesse intervalo, é sempre decrescente.* "

Para esboçar o gráfico da função m(x), Eric mobilizou novamente algumas regras de ação e tomada de informação usadas para t(x), mas nem todas foram aplicáveis a esse caso, o que levou a uma adaptação do seu esquema. Ele: (i) estimou valores de pares ordenados (x, m(x)) a partir da posição dos segmentos variáveis e das marcações nos eixos, para as quais ele estimou valores em *y* e suas diferenças sucessivas e (ii) ajustou as escalas dos gráficos nas janelas de visualização 1 e 2.

O invariante operatório da igualdade (e, de forma mais geral, a proporcionalidade) entre as variações em *x* e *y* foi testado e descartado, o que levou Eric a mobilizar uma nova regra de ação, associada a uma nova ferramenta, para traçar o gráfico: (iii) acionar a ferramenta caneta para traçar uma curva que aproxime a trajetória dos pontos definidos no gráfico (Figura 47).

Figura 47 – Gráfico de m(x) e esboço de Eric do gráfico de m(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Além do caráter decrescente inferido na exploração de *x* e m(x), outro invariante operatório foi destacado como característica central no esboço do gráfico: uma curvatura que refletisse a não-linearidade no decrescimento de m(x) com relação ao crescimento de *x*, o que aponta uma quantificação da variação em progresso.

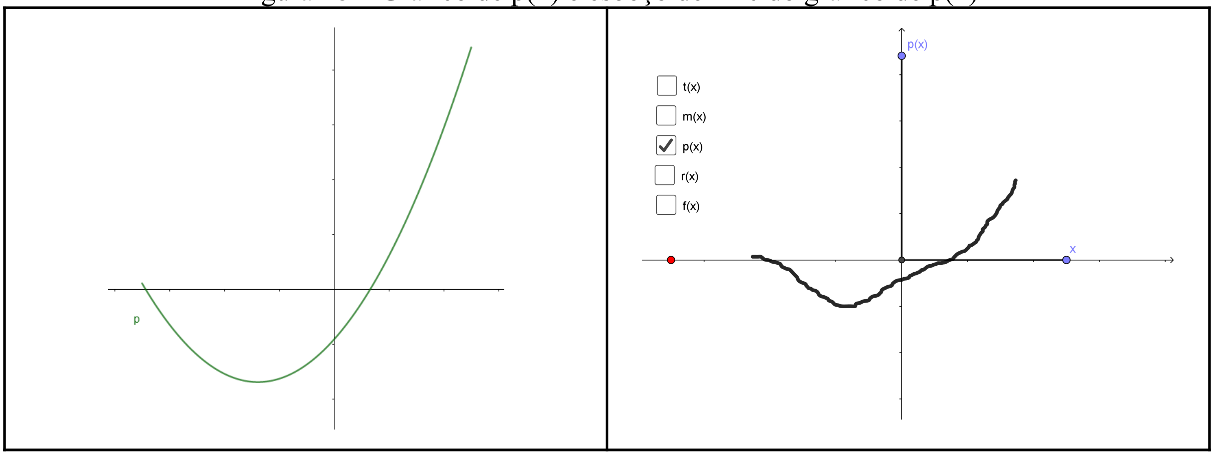
> 15. Eric: "*Ficou até parecendo uma reta, mas a intenção é ele ficar mais curvo. Eu vou inclusive voltar, pra pegar um pouco mais essa intenção (...)*"
> 17. Eric: "*A função m é meio isso aqui, realmente, que apareceu aqui… Ele dá uma curva.. Não ficou legal, mas a ideia é essa, é um decrescimento que ele não é linear e ele é menos acentuado em algumas regiões e mais acentuada em outras (...)*"

Os componentes do esquema de Eric para o caso de m(x) se repetiram para o caso seguinte de p(x). Ele continuou mobilizando as marcações nos eixos para coordenar variações em *y* em função de acréscimos constantes em *x*, mesmo sem valores numéricos visíveis. Ao explorar p(x), Eric descreveu intervalos de decrescimento e crescimento, incluindo em suas descrições expressões informais, como "*decrescimento menos acentuado*" e "*(...) Explode.*

Cresce mais rapidamente", que apontam para uma quantificação em progresso da forma como as variáveis variam, porém, sem referência ao ponto de mínimo de p(x).

O esboço do gráfico mobilizou o mesmo esquema da função anterior m(x), centralizado na estimativa dos pontos do gráfico, no uso da ferramenta caneta e nos invariantes operatórios que transferem as diferenças sucessivas inferidas e estimadas em p(x) às posições dos pontos no gráfico (Figura 48).

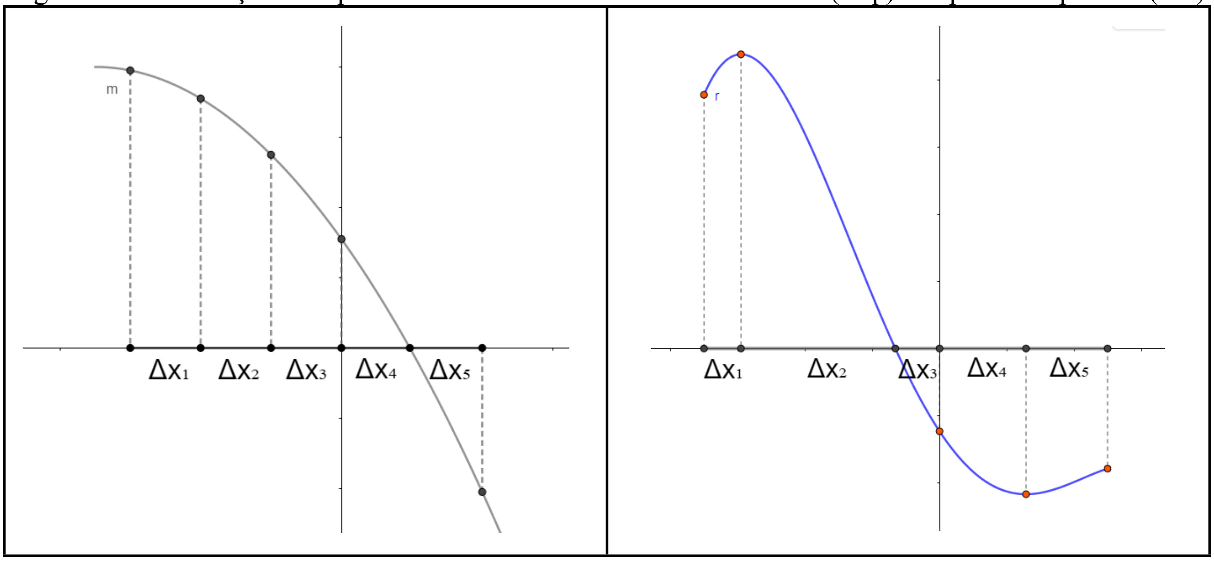
Figura 48 – Gráfico de p(x) e esboço de Eric do gráfico de p(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

A exploração de Eric da função r(x) marcou a desestabilização do seu esquema mobilizado no item anterior. Isso se deu pela existência de um ponto de máximo no início do intervalo. A regra de variar o *x* por acréscimos constantes e observar a variação em *y*, mediadas pelas marcações nos eixos, foi modificada para incluir como novas referências os pontos de máximo e mínimo, nos quais o ponto em *y* muda de sentido, e outros pontos especiais, como (0, r(x)) e (x, 0) (Figura 49).

Figura 49 – Mudança no esquema de Eric: dos acréscimos constantes (esq.) aos pontos especiais (dir.)



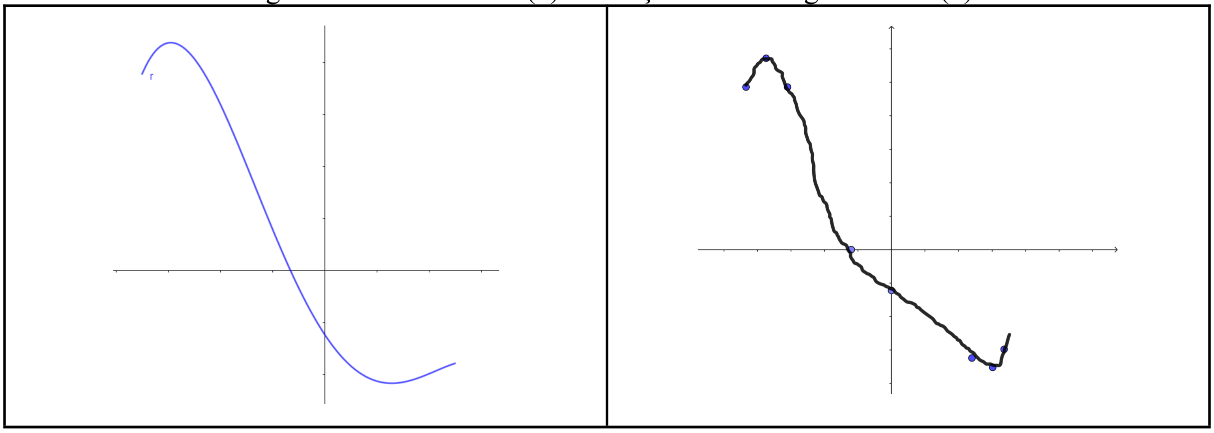
Fonte: Elaborado pelo autor

O esquema para o esboço do gráfico também foi influenciado por essa mudança, no sentido de que perdeu-se o invariante das diferenças sucessivas em *y*, já que agora os pares ordenados não foram mais estimados com base em acréscimos constantes em *x*:

> 26. Eric: (Varia *x* do início até a primeira marcação no eixo *x*, observa a variação em *y*) *"Então… Tá lá no topo. Subiu..."*
> 27. Eric: (Varia *x* da primeira marcação no eixo *x* até antes da segunda marcação no eixo *x*. Repete o procedimento) *"...Desceu... ele subiu, desceu, voltou pra o mesmo lugar… Tem um picozinho."*
> 28. Eric: (Varia o *x* do ponto anterior até o valor de x=0, depois até o valor de *x* para o qual r(x)=0, depois até o valor de *x* para o qual r(x) atinge um mínimo e finalmente até o valor final de *x* no intervalo) *"Aí desce, desce, desce, desce… Quando y é zero x é negativo, quando x é zero y é negativo, desce, desce… E depois começa a subir de novo."*
> (...)
> 30. Eric: *"Essa região aqui é confusa, deixa eu ver..* (refere-se à aproximação ao segundo ponto de mínimo) *Decresce, decresce… Dá uma subidinha.. É… Também tem um momento aqui que vai voltar a crescer."*
> 31. Eric: *"Então deixa eu fazer aqui o esboço com a caneta. Como seria aqui… Um crescimento, um decrescimento, decresce… passou aqui.. (...) e volta a crescer."*

Nota-se que, na fala de Eric transcrita acima, suas descrições sobre como as variáveis variam incluíram apenas o crescimento ou decrescimento em *y* em função de *x*, não incluindo mais referências à variação variável, como nos itens anteriores. Além disso, ele mostrou uma dificuldade pontual para descrever a covariação no segundo ponto de mínimo. A perda da referência das marcações nos eixos, que haviam permitido a Eric quantificar a variação em *y* para acréscimos constantes em *x*, parecem ter limitado o seu raciocínio covariacional na função r(x).

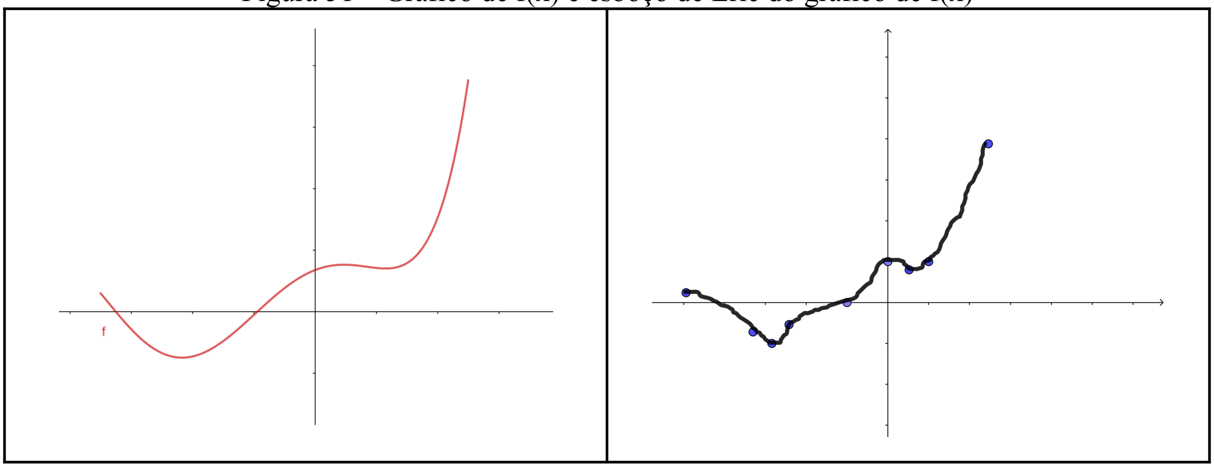
Figura 50 – Gráfico de r(x) e esboço de Eric do gráfico de r(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Na exploração da função f(x) e no esboço do seu gráfico, os esquemas recém-gerados de Eric foram mobilizados novamente, com a variação em *x* e a definição de pontos no gráfico centrada nos pontos especiais (máximo, mínimo, (0, r(x)) e (x, 0)). Como resultado, as suas descrições permaneceram em termos do crescimento ou decrescimento de f(x) em função de *x*, com foco nos pontos especiais e sem referências à variação variável de f(x). O esboço do gráfico (Figura 51) parece guardar semelhanças com o gráfico formal da função, porém os dados apontam que a forma do gráfico de Eric não implica em um raciocínio explícito sobre a quantificação da variação variável, podendo ser meramente uma associação com a técnica tradicional de esboçar gráficos no papel.

Figura 51 – Gráfico de f(x) e esboço de Eric do gráfico de f(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Em síntese, a atividade de Eric na situação 1A foi orientada por esquemas que, a cada item, geraram novas regras, invariantes e inferências. Nesse processo destacou-se a emergência de regras que envolvem a coordenação da variação em *y* com acréscimos constantes em *x*, por meio do uso instrumentado das marcações nos eixos. Por intermédio dessas regras e do invariante operatório relacionado a elas, Eric parece ter inferido o tipo de função que modela o primeiro item e uma quantificação em curso da variação nos dois itens seguintes, para os quais ele deu descrições informais da variação variável.

A existência, nos dois últimos itens, de alguns pontos de máximo e mínimo nas funções levou Eric a enfatizar esses pontos como referências para descrever e esboçar o gráfico da relação entre as variáveis, em vez de enfatizar a variação em *y* com acréscimos constantes em *x*. O papel das marcações nos eixos foi, então, ofuscado nos esquemas de Eric, o que coincidiu com limitações nas suas explicações que envolveram apenas descrever o crescimento ou decrescimento de uma variável com a variação na outra, nesses dois últimos itens.

Mesmo quando as descrições de Eric envolveram aspectos da quantificação da variação (particularmente da variação variável), as referências foram feitas informalmente, como "*decrescimento menos acentuado*" e "*(...) Explode. Cresce mais rapidamente*", sem uma referência formal e refinada de como essa variação se deu. A mobilização de valores numéricos de *x* e *y* dispostos em uma lista poderia ter sido útil para refinar a descrição dessa variação.

O confronto dos resultados com os aspectos relacionados à transposição informática e os aspectos antecipados na análise *a priori* mostrou que:

- Como previsto, a representação da covariação por segmentos variáveis permitiu o foco na variação das variáveis e a inferência de relações de crescimento/decrescimento, porém, no caso de Eric, a quantificação de como essa covariação ocorre foi alcançada (parcialmente) quando houve a mobilização das marcações nos eixos para coordenar a variação em *y* com acréscimos constantes em *x*.
- Apenas intervalos de crescimento/decrescimento e pontos de máximo/mínimo foram visualizados por Eric. Ele não fez referência a como diferentes concavidades ou pontos de inflexão estariam relacionados com a forma como as variáveis variam por meio dos segmentos, o que pode ter relação com a percepção da variação variável e também com a representação por segmentos dinâmicos que suprimiu a forma do gráfico.

- Ferramentas de representação numérica – como a exibição dos valores das variáveis e a planilha, apesar do seu potencial para quantificar a variação – não foram mobilizadas por Eric. Apenas foram mobilizadas as ferramentas que estavam explícitas no material, como as variáveis e as marcações nos eixos. Eric também não enfatizou valores numéricos no esboço do gráfico.
- Os esquemas de Eric para esboçar gráficos enfatizaram a estimativa de pares ordenados no gráfico e o uso da caneta para obter a curva que melhor aproxima a trajetória dos pontos, regras de ação que guardam semelhanças com as técnicas usuais de esboçar gráficos com papel e lápis. A coordenação motora da caneta limitou a qualidade visual dos gráficos de Eric.

4.4.2 Análise da atividade de Alice na situação 1A

Alice enfrentou as duas situações de forma conjunta, combinando a exploração e descrição da covariação com o esboço do gráfico em cada item. Ao explorar e descrever a covariação na função t(x), sua regra de ação foi variar a variável *x*, do início ao fim do intervalo, observando o ponto que representa a variável em *y*, a fim de responder se a mesma cresce ou decresce conforme *x* aumenta; o controle da variação foi feito manualmente. As regras de Alice também envolveram a repetição do procedimento, possivelmente em busca de consolidar as suas inferências e gerar novas inferências:

> 3. Alice: (Varia *x* manual e lentamente, de um extremo ao outro do intervalo e observa a variação em *y*.)*"...Aí dá pra ver que.. em todo esse intervalo… é... a medida que a variável x... ela cresce, a variável dependente, que é t(x), 'ele' decresce."*

No entanto, ao escrever a sua resposta na ficha *online*, a sua descrição da covariação ganhou um componente importante, a linearidade: "*A medida que a variável x cresce a variável dependente decresce de maneira linear, durante todo o intervalo*". O esquema de Alice para traçar o gráfico sugere que ela pode ter imaginado o traço do gráfico enquanto *x* e t(x) variaram e associou o formato do traço (uma reta) ao modelo linear:

> 7 Alice: (Varia *x* manualmente, de um extremo do intervalo ao outro e observa a variação em *y*.)

> 8. Alice: *"...Eu chutaria que seria uma função afim... uma reta decrescente..."*

O esquema de Alice para traçar o gráfico envolveu o uso da ferramenta rastro do ponto P(x,t(x)). Na análise *a priori*, o uso dessa ferramenta havia sido previsto e, como ela faz o trabalho que o aluno deveria fazer, foi planejado que esse uso fosse desencorajado. Porém, por um descuido do mediador em orientar os estudantes, ocorreu que Alice incluiu essa ferramenta na sua resolução, embora ela mesma, ao final da situação, reconheceu que talvez não deveria ter usado o rastro do ponto P(x, t(x)).

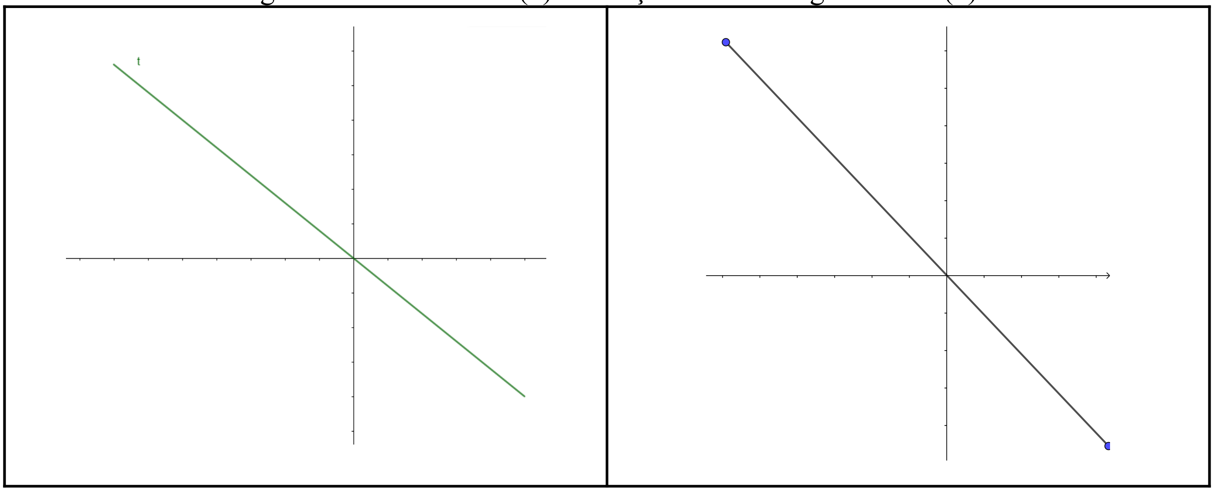
Dessa forma, o esquema de Alice para obter o gráfico teve por regras de ação: definir o ponto P, dado pelo par ordenado (x, t(x)) e obter o gráfico como o conjunto dos pontos (*x*, t(x)) definidos ao variar-se o ponto que representa a variável em *x* e o correspondente em *y*.

> 9. Alice: (Mobiliza a ferramenta P(x,y); define um ponto P qualquer na tela)
> 10. Alice: (Clica no ponto referente à variável *x* (consulta o nome do ponto)): *"O nome do x é D."*
> 11. Alice: (Define P(x, t(x)) = (x(D),t(x(D))).
> 12. Alice: (Mobiliza a ferramenta rastro)
> 13. Alice: (Desliza o ponto referente à variável *x*, do início do intervalo ao final e observa o rastro formado pelo ponto P(x, t(x)).
> 14. Alice: *"É, isso, uma função afim."*

Esse esquema, embora tenha automatizado o desenho do gráfico para Alice, envolveu a mobilização do conceito-em-ação do gráfico como um conjunto de pontos que relaciona a variação em *x* com a variação em *y*, além de permitir gerar o gráfico na perspectiva de um objeto multiplicativo formado pelas variáveis.

A conclusão de Alice de que a relação entre x e t(x) é modelada por uma função afim parece ter sido baseada na associação com a forma do gráfico, pois ela determinou o modelo após observar o gráfico formado pelo rastro do ponto: *"É, isso, uma função afim"*. Mesmo quando, antes de ver o gráfico, suspeitou que a relação fosse afim, Alice parece ter imaginado uma reta se formando conforme ela variava as variáveis. Essa é uma hipótese razoável, já que o seu esquema para esboçar o gráfico mobilizou o rastro do ponto P(x, t(x)).

Figura 52 – Gráfico de t(x) e esboço de Alice do gráfico de t(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Alice adicionou uma etapa para finalizar o esboço do gráfico, embora o rastro do ponto tenha antecipado esse esboço. Na janela de visualização 2, ela simplesmente copiou o desenho obtido pelo rastro na janela de visualização 1, usando a caneta para fazer o desenho. Um outro aspecto revelado no esquema de Alice foi como ela pareceu ter desenvolvido um domínio da sintaxe do Geogebra para definir pontos em função de variáveis.

No caso da função m(x), Alice empregou a mesma regra de ação que usou no caso de t(x), porém, o controle da variação em *x* passou a ser automático, além de ter sido empregado o *zoom* dinâmico para adequar a exibição do intervalo de variação na tela.

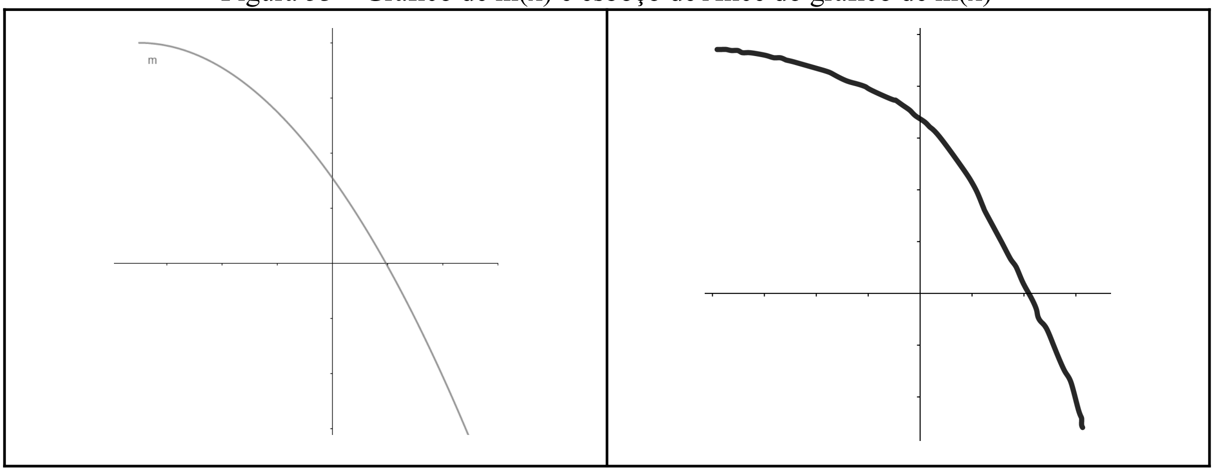
> 20. Alice: (Varia o *x* automaticamente, enquanto aciona o zoom-afastamento, para que todos os valores positivos em *y* se enquadrem na tela - varia o *x* mais uma vez)
> 21. Alice: (O *x* varia automaticamente - por mais 4 vezes, enquanto a estudante observa e descreve o comportamento em m(x) - Na quarta vez, ela sugere uma não-linearidade do modelo.): *"Aqui acontece… a mesma coisa da outra, a medida que o x ele cresce a variável dependente ela decresce. Só que eu acho que o gráfico dessa vez não vai ser uma reta, porque em alguns pontos ó… o m(x), a velocidade dele, que ele vai decrescendo é menor do que em outros pontos, então eu acho que é outro tipo de função, que não tem a taxa de variação linear, como é na função afim. "*
> 22. Alice: "*Eu só coloquei a mesma resposta porque é o que acontece. À medida que o x cresce a variável dependente que é o m(x) (deixa eu ver se ta certo) isso, ela decresce, só que, ela tem uma mudança na taxa de variação em alguns intervalos…"*
> 23. Alice: (O *x* varia automaticamente, enquanto a estudante observa) *"E o gráfico...Não sei… Eu sei que não é uma reta, mas também não sei o que é."*

Alice mobilizou o conceito-em-ação de taxa de variação, associado ao significado da velocidade de deslocamento do ponto em *y*, para explicar a distinção entre o comportamento de m(x) e t(x), ambas decrescentes no intervalo. A percepção do atributo físico da velocidade do ponto que Alice usou para descrever a taxa de variação variável em m(x) pode ter se beneficiado da uniformidade da variação automática do ponto em *x* que, por sua vez, contribui para visualizar o deslocamento relativo em *y* de forma mais clara. Na ficha *online*, Alice descreveu a covariação da seguinte forma: "*A medida que a variável x cresce a variável dependente decresce com alterações na taxa de variação, durante todo o intervalo*".

Para traçar o gráfico, o esquema de Alice permaneceu estável: obter o gráfico como o conjunto de pontos P(x, m(x)), por meio do rastro de P, ao variar *x*. A única mudança foi na forma de controle de *x*, desta vez automático. Ao observar o rastro dinâmico do ponto formando o gráfico da função, Alice mobilizou o conceito-em-ação de taxa de variação para referir-se à variação variável e fez referências à representação geométrica do gráfico. Não está claro se a referência à taxa de variação negativa indica que Alice de fato concebeu variações decrescentes em *y* com acréscimos constantes em *x*, ou se ela quis se referir meramente à propriedade decrescente de m(x).

> 26. Alice: (Permanece observando a variação automática de *x* e a curva formada pelo rastro do ponto (x, m(x)).) *"É como se fosse uma parábola né... a metade de uma parábola, ou uma parábola na verdade que tenha a taxa de variação negativa..."*

Figura 53 – Gráfico de m(x) e esboço de Alice do gráfico de m(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Para explorar a função p(x), o esquema de Alice permaneceu caracterizado pela regra de variar *x* do início ao fim do intervalo e observar o comportamento da variável em *y*, porém a regra de controle da variável retornou ao modo manual. Inicialmente, as inferências geradas pela exploração de Alice limitaram-se a descrever a relação entre as variáveis em termos de crescimento e decrescimento, sem quantificar a forma como a variação se deu. A resposta na ficha foi: "*A variável dependente tem um intervalo de decrescimento e outro de crescimento à medida que x cresce, no intervalo determinado.*"

> 34. Alice: *"Essa p.. À medida que x aumenta, eu tenho um intervalo de decrescimento e logo após começa a crescer... é.. é isso."*

Conforme Alice continuou repetindo a ação de variar *x* e observar a variação em *y*, ela refinou a sua descrição, incluindo uma interpretação da variação variável com o significado de taxa de variação e velocidade:

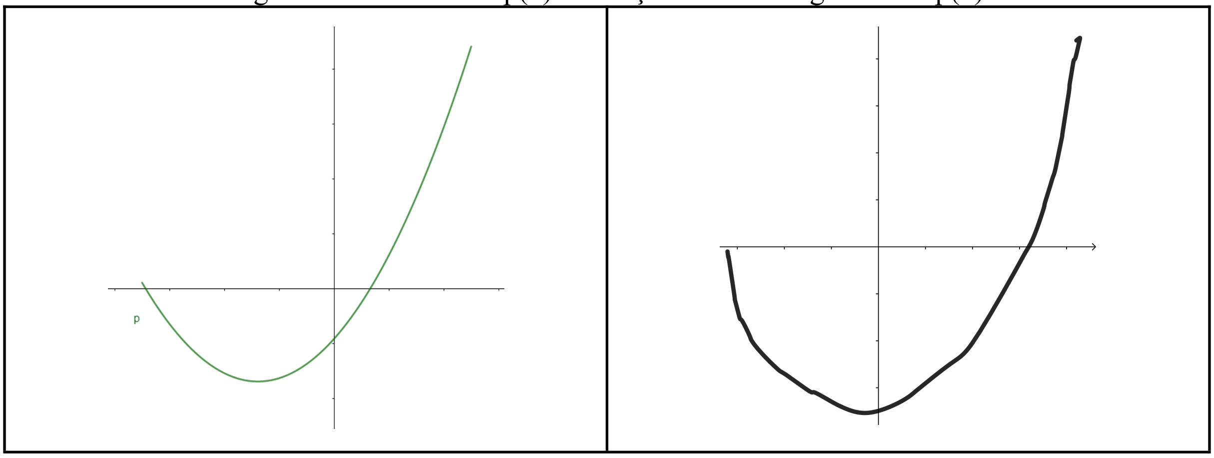
> 35. Alice: (Varia x manualmente e observa o comportamento em p(x).) *"o gráfico... Aqui ele decresce, decresce e volta a crescer..."*
> 36. Alice: *"Aqui eu chutaria que seria uma parábola… Deixa eu ver..."*
> 37. Alice: (Varia x até o primeiro quarto do intervalo)
> 38. Alice: (Retorna ao início do intervalo e varia o x lentamente) *"Com a concavidade voltada pra cima, que aqui...."*
> 39. Alice: (Retorna ao início do intervalo e varia o x novamente por todo o intervalo)*"Aqui ele vai bem devagarzinho, aí é como se a taxa de variação aqui fosse bem pequena, enquanto aqui ele começa a crescer mais rápido, é como se a taxa de variação aumentasse mais, então eu chutaria aqui uma parábola com a concavidade voltada pra cima...´".*

A associação, por Alice, entre a taxa de variação, a forma da representação gráfica e o significado de velocidade não parecem ter sido baseadas em uma quantificação de como as variações em *y* variam em função de acréscimos constantes em *x*. Quando ela descreveu inicialmente a variação em *y* em função de *x*, suas referências não envolveram a variação variável e, quando ela mobilizou o conceito-em-ação de variação variável, ela se referiu à variável em *y* como se fosse um objeto móvel: *"...Aqui ele vai bem devagarzinho (...) enquanto aqui ele começa a crescer mais rápido…"* (Alice, situação 1A).

Ao esboçar o gráfico, o esquema de Alice permaneceu estável: "obter o gráfico como o conjunto de pontos P(x, p(x)), por meio do rastro de P, ao variar *x*.", além disso, o controle da variável permaneceu no modo automático. Ao observar o gráfico (Figura 54) sendo formado pelo rastro da variação de P(x, p(x)), Alice pareceu ter confirmado as suas suspeitas sobre o gráfico de p(x) e estabeleceu suas inferências sobre a taxa de variação e a velocidade do ponto em *y*. A fala de Alice aponta que ela buscou uma articulação entre a forma do gráfico (tipo da função), a taxa de variação e a velocidade do ponto.

> 42. Alice: "*É, acertei... é uma função quadrática...*"
> 43. Alice: (O *x* varia automaticamente, enquanto a estudante observa o comportamento de p(x) no intervalo próximo ao ponto de mínimo.) *"Então no caso é isso mesmo... Aqui quando ele ta bem devagarzinho é que a taxa de variação é menor..."*
> 44. Alice: (O *x* varia automaticamente, enquanto a estudante observa o comportamento de p(x) no intervalo após o ponto de mínimo.) *"... e aqui ele vai crescer bem mais rápido é porque a taxa de variação tá aumentando...*"

Figura 54 – Gráfico de p(x) e esboço de Alice do gráfico de p(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Para explorar a função r(x), o esquema de Alice permaneceu estável. Ela variou *x* manualmente do início ao fim do intervalo, observando a variação em *y*. Porém, a sua descrição da covariação foi dada em termos apenas do crescimento e decrescimento, novamente, sem quantificar a variação variável: "*Cresce, decresce e cresce... Ela cresce, decresce e no fim ela tá crescendo... né?*" (Alice, situação 1A). A sua resposta na ficha *online* foi: "*A variável dependente, a medida que x cresce, tem um pequeno intervalo de crescimento, em seguida, decresce, e próximo ao fim do intervalo definido, tem um pequeno crescimento*" (Alice, situação 1A).

Antes de traçar o gráfico, Alice tentou antecipar mentalmente a sua forma e associá-la a um tipo de função que se aproximasse do gráfico imaginado. É possível que, mentalmente, ela tenha imaginado o traço dinâmico do ponto P(x, r(x)) como forma de tentar antecipar o gráfico. Embora Alice pareça não ter tido sucesso em obter uma imagem satisfatória mentalmente, a sua antecipação pode ter contribuído para um desenvolvimento em progresso da imagem do gráfico a partir de um objeto multiplicativo da covariação em *x* e *y.*

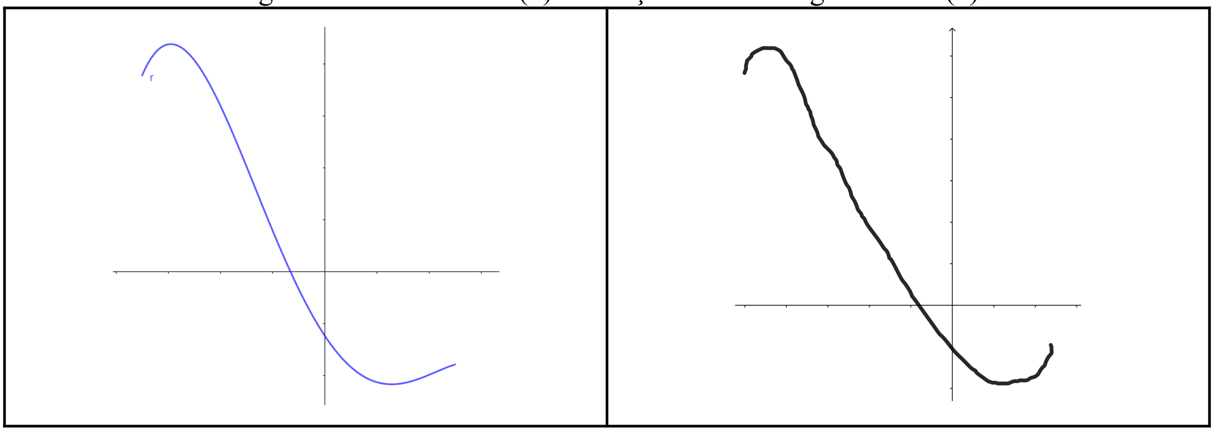
> 56. Alice: *"Quanto ao gráfico dessa, eu não faço ideia!"*
> 57. Alice: Varia o *x* manualmente e observa a variação de r(x) em todo o intervalo. *"Cresce, decresce e cresce…"* (Tenta antecipar a forma do gráfico)
> 58. Alice: *"Não sei, se aqui fosse menos um pouco, eu diria que seria alguma trigonométrica, mas não sei..."*

Ela mobilizou o esquema de esboço do gráfico por meio rastro do ponto P(x, r(x)), com x variando automaticamente. Ao obter a imagem do gráfico, Alice permaneceu tentando associá-lo a um tipo de função:

> 61. Alice: "*É não sei... Talvez seja uma trigonométrica , mas... só por esse intervalo.. Ou não... porque que tá variando muito aqui, no positivo de r, pra ser uma trigonométrica... É, não sei...."*

Chamou a atenção, nesse exemplo, o fato de que Alice continuou articulando a forma do gráfico a um tipo de função, porém, a referência à variação variável que foi feita nos outros casos com um significado de velocidade desapareceu no caso de r(x) que envolve um ponto de máximo, um de mínimo e um de inflexão, com alterações de concavidades. Alice pareceu não ter visualizado a variação variável nesse caso. Embora o seu gráfico (Figura 55), traçado com um certo automatismo, revele o aspecto da taxa variável.

Figura 55 – Gráfico de r(x) e esboço de Alice do gráfico de r(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Por fim, para explorar o caso de f(x), Alice manteve o seu esquema de exploração da covariação. A sua descrição também foi dada apenas em termos do crescimento e decrescimento em *y*, sem quantificar a variação variável: "*A f(x)...f(x), x cresce, ela decresce... volta a crescer... e... só cresce.*" (Alice, situação 1A). A sua resposta na ficha online foi: *"A medida que x cresce, a variável dependente, decresce, depois cresce, novamente decresce bem pouco e volta a crescer, durante o intervalo dado.*" (Alice, situação 1A)

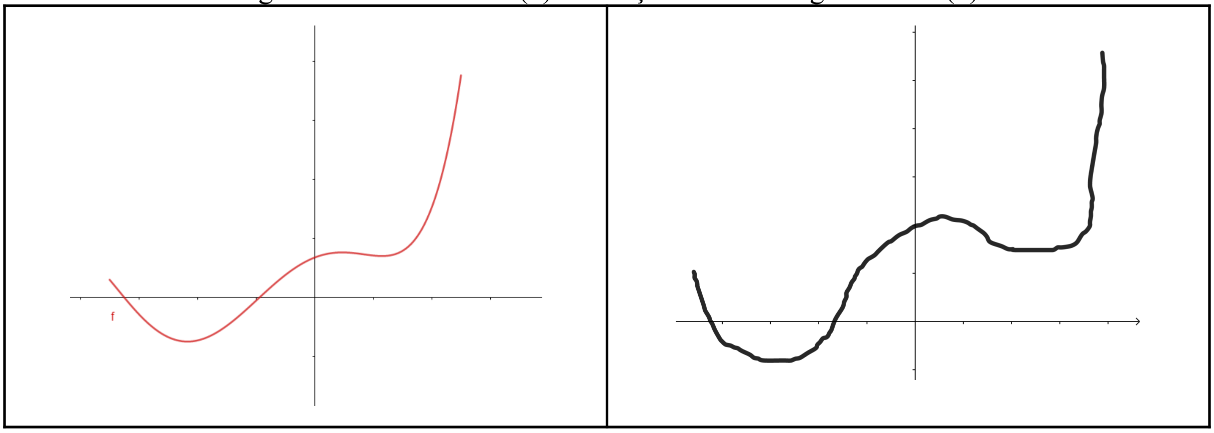
> 66. Alice: (Varia o *x* manualmente uma única vez. Observa a variação de f(x)) *"A f(x)...f(x), x cresce, ela decresce... volta a crescer... e... só cresce."*
> 68. Alice: (Volta a variar o *x* manualmente e observa a variação de f(x). Repete o procedimento algumas vezes.) *"Essa decresce, cresce… Xi... parece que aqui ela…. Ela… Ela decresce, aqui ela cresce… Aqui acho que ela volta um pouco, decresce um pouco pra depois voltar a crescer novamente."* (Identifica um intervalo curto no qual a variável f(x) decresce conforme x aumenta, antes este intervalo havia passado despercebido).

Novamente, antes de traçar o gráfico, Alice tentou antecipar mentalmente a sua forma, mas parece não ter obtido uma visualização mental satisfatória.

> 70. Alice: (Volta a variar o *x* manualmente e observa a variação de f(x).) *"O gráfico eu também não sei qual… Acho que é algo assim… Que ele cresce, decresce e cresce… Não sei."* (o ruído de um rabisco em uma superfície sugere que a estudante tenta antecipar a forma do gráfico com um movimento gestual).

Em seguida, Alice mobilizou o seu esquema para gerar o gráfico por meio do rastro do ponto P(x, f(x)). Ao observar o gráfico (Figura 56), ela pareceu concordar com alguns aspectos que ela antecipou mentalmente, embora essa antecipação tenha envolvido apenas relações de crescimento e decrescimento, sem referências à variação variável ou a pontos de máximo, mínimo, inflexão ou alteração de concavidades: "*É, é isso mesmo. Aqui ele decresce, cresce e aqui… Aqui tem um...decresce bem pouco e volta a crescer*" (Alice, situação 1A).

Figura 56 – Gráfico de f(x) e esboço de Alice do gráfico de f(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Em síntese, a atividade de Alice na situação 1A foi orientada por esquemas que envolveram variar a variável em *x* e observar a variação correspondente em *y*, na primeira sub-situação; já na segunda sub-situação, por um esquema de geração automática do rastro dinâmico do ponto P(x, y), definido pelas variáveis em *x* e *y*. A regra de controle da variável envolveu, de forma alternada, a variação manual e a automática: a manual foi mobilizada, sobretudo, na situação de explorar e descrever a covariação, quando Alice supostamente desejou ter o controle de como *x* variava; já a variação automática foi mobilizada na situação de esboço do gráfico, quando Alice desejou gerar o rastro dinâmico do ponto P(x,y) automaticamente.

De forma geral, as inferências de Alice envolveram apenas o crescimento e o decrescimento da variável em *y* com relação a *x*, com pouca referência à forma como essa variação é quantificada. O conceito-em-ação da taxa de variação emergiu como significado físico de velocidade do ponto em *y* e em uma tentativa de associar o gráfico a um tipo de função definido. Além disso, as referências de Alice à taxa de variação pareciam relacionadas mais à variação em *y* (como velocidade), de forma isolada, do que à relação quantitativa entre a variação em *y* e em *x*.

Quando Alice fez referência à ideia de linearidade no primeiro item, essa referência parece ter sido feita após ela antecipar a forma do gráfico como uma reta e associá-la à função afim. Essa referência não parece ter sido feita a partir da quantificação da proporcionalidade em *y* em função de *x*. No segundo e terceiro itens, Alice distinguiu o decrescimento variável, porém associado ao significado de velocidade. Nos demais itens, r(x) e f(x), Alice descreveu a covariação sobretudo em termos de crescimento e decrescimento, associado ao significado de velocidade e sem referência à quantificação da variação variável.

O esquema de Alice para traçar o gráfico, baseado no rastro de P(x,y), apesar de automatizar o esboço pelo Geogebra, pode ter contribuído para que ela desenvolva uma imagem dinâmica da obtenção do gráfico como um objeto multiplicativo da variação das variáveis. A tentativa gerada nos dois últimos itens, de antecipar o gráfico da função ao imaginar o rastro dinâmico de P(x,y), aponta esse desenvolvimento em progresso.

Com relação aos aspectos do gráfico, Alice não articulou a variação dos segmentos dinâmicos aos pontos de máximo, mínimo, inflexão ou concavidades, ainda que esses elementos emergiram na forma do gráfico gerado. Além disso, nos itens que envolveram a presença de mais pontos críticos e mudanças de concavidades (os dois últimos), Alice deu descrições apenas em termos de crescimento e decrescimento das variáveis, sem quantificar a forma pela qual essas variáveis variaram. Ela não fez referência à taxa de variação ou à velocidade variável nesses casos e, em um deles, cometeu o equívoco de conceber um gráfico que alternou concavidades como sendo representado por uma função trigonométrica.

O confronto dos resultados com as antecipações da análise *a priori* e os aspecto relacionados à transposição informática mostrou que:

- A mobilização de regras de controle da variação (manual/automático) para diferentes objetivos sugerem que, como antecipado na análise *a priori*, as diferentes formas de uso foram relacionadas a diferentes contribuições do Geogebra para explorar a variação. As referências de Alice sugerem que a exploração da variação automática, no item 2, contribuiu para coordenar melhor a variação variável, mesmo que concebida apenas no contexto físico da velocidade.
- A representação da covariação por segmentos variáveis permitiu o foco na variação das variáveis e inferir relações de crescimento/decrescimento, porém, no caso de Alice, com raras referências à quantificação de como ocorre a variação variável, sobretudo feitas com o significado de velocidade. Essa limitação coincidiu com a não mobilização, por Alice, de ferramentas que permitem coordenar a variação em y com acréscimos constantes em x, como a malha, as marcações nos eixos e a planilha. Já a mobilização do significado de velocidade para dar sentido à variação pode estar relacionada à representação das variáveis por pontos como objetos manipuláveis e dinâmicos.

- Alice não fez referência a como diferentes concavidades – pontos de máximo, mínimo ou pontos de inflexão – estariam relacionados à forma como as variáveis variaram, o que pode ter relação com a limitação em visualizar a variação variável, bem como com a representação por segmentos, cujo gráfico da função não foi exibido. Outra limitação, relacionada à quantidade de pontos críticos no gráfico e à extensão do intervalo entre esses pontos, é que Alice não fez referência à variação variável nos últimos dois itens que concentram mais pontos desse tipo. Uma hipótese é que o pequeno intervalo de exibição entre esses pontos, associado ao não uso de ferramentas que permitem quantificar a variação na variação e à forma como Alice mobilizou o seu esquema para interpretar a covariação (com um significado de velocidade), dificultou que ela quantificasse a variação entre esses intervalos.
- A condição inicial na qual o material foi desenhado – sem exibição da numeração no eixos, valores das variáveis ou malha – parece ter influenciado a mobilização das ferramentas do Geogebra por Alice, pois ela mobilizou apenas as variáveis no gráfico para explorar a covariação. Alice também não enfatizou valores numéricos no esboço do gráfico. As escolhas de *design* do material e os *affordances* gerados também parecem influenciar a atividade dos estudantes.
- Embora a mobilização, por Alice, da ferramenta rastro de P(x,y) tenha restringido as ações planejadas para o esboço do gráfico, a exibição da geração automática do gráfico por meio do rastro dinâmico pode ter contribuído para Alice desenvolver uma concepção do gráfico como sendo gerado pelo objeto multiplicativo da covariação entre as variáveis.

4.4.3 Análise da atividade de Louise na situação 1A

Louise enfrentou as duas situações separadamente, primeiro explorou e descreveu a covariação em todos os itens; depois, retomou cada item para esboçar o gráfico em cada um. Ao explorar e descrever a covariação na função t(x), a regra de ação de Louise foi variar *x* do início ao fim do intervalo e observar a variação em *y*; o controle da variação foi feito no modo automático.

> 2. Louise: (Varia *x* no modo automático, de um extremo do intervalo ao outro. Observa a variação de t(x) - A variação automática é repetida algumas vezes enquanto a estudante descreve o comportamento das variáveis) *"A gente percebe que enquanto x se aproxima da origem, t(x) também se aproxima da origem, então quer dizer que, quando x é zero, essa função também é zero. E, quando x é positivo, t(x) é negativo. E quando x é negativo, t(x) é positivo. Também percebemos que o x cresce mais rapidamente do que o valor da função, nesse ponto x."*

A resposta de Louise na ficha *online* foi: *"Quando x é positivo, t(x) é negativo e vice-versa. A variável dependente varia de forma mais lenta que a variável x."*. Tanto a fala de Louise quanto a sua resposta na ficha *online* reforçam uma descrição com foco no sinal das variáveis, o que já havia sido apontado na sessão anterior e na resposta dela ao questionário inicial. Embora houvesse referência à variação das variáveis, Louise descreveu essa variação com um vínculo frágil e meramente comparativo entre x e t(x), quando mobilizou o significado de velocidade para descrever t(x) como mais lenta que *x*.

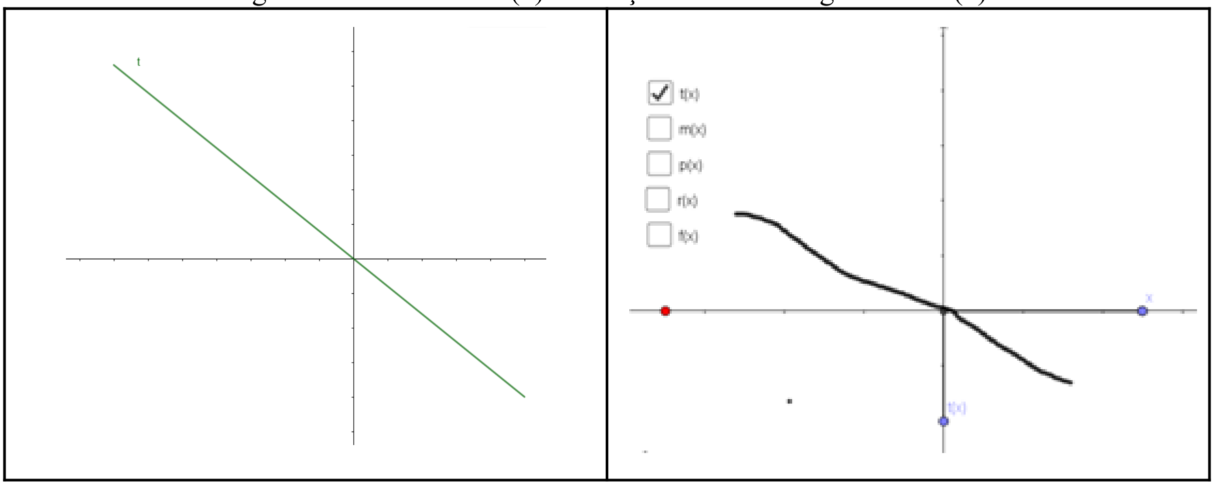
A descrição de Louise não envolveu relações de crescimento/decrescimento nem uma quantificação formal da covariação, em termos da proporcionalidade. Os invariantes operatórios e as inferências geradas pelos esquemas de Louise foram voltadas para uma descrição em termos do sinal das variáveis.

Ao retomar o item 1 para esboçar o gráfico de t(x), o esquema de Louise envolveu a regra de observar a variação dos segmentos variáveis e, mobilizando a ferramenta caneta, desenhar o gráfico da função por meio de um deslize contínuo. Ela desenhou o gráfico com a caneta após observar algumas vezes a variação nos segmentos dinâmicos, o que sugere que o seu desenho foi baseado em uma imagem do gráfico gerada mentalmente, ao imaginar um ponto formado pelas coordenadas de x e t(x) variando de forma dinâmica.

Sob essa perspectiva, o esquema de Louise pareceu promover uma visão do gráfico como formado por um objeto multiplicativo da variação das variáveis, embora sem envolver invariantes e inferências relacionadas à quantificação da variação, nesse caso a proporcionalidade (Figura 57).

> 17. Louise: (Observa a variação de *x* no modo automático, de um extremo do intervalo ao outro. Observa a variação de t(x) - A variação automática é repetida algumas vezes): *"Vamos ver, pra desenhar o…"* (Não finaliza a frase)
> 18. Louise: (Com a ferramenta caneta, desenha o gráfico em um deslize contínuo) *"Vai ser mais ou menos assim, passando na origem."*
> 19. Louise: (Permanece observando a variação de x no modo automático, de um extremo do intervalo ao outro. Observa a variação de t(x) - A variação automática é repetida algumas vezes)
> 20. Louise: *"Será que é uma reta? Bem, eu acho que seja assim."*

Figura 57 – Gráfico de t(x) e esboço de Louise do gráfico de t(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

No caso da função m(x), as regras de ação e controle para explorar e descrever a covariação permaneceram as mesmas do item anterior t(x):

> 4. Louise: (Varia *x* no modo automático, de um extremo do intervalo ao outro. Observa a variação de m(x) - A variação automática é repetida algumas vezes enquanto a estudante descreve o comportamento das variáveis): *"Nesse caso aqui, a m(x) começa devagar, só que, aos poucos ela vai aumentando o seu decaimento, ó.. Ela começa positiva e a medida que x vai crescendo, ela começa a diminuir, a decrescer, mais rapidamente. Então quando x é negativo, ela é positiva, quando o x vai crescendo positivamente, ela tende a ser negativa."*

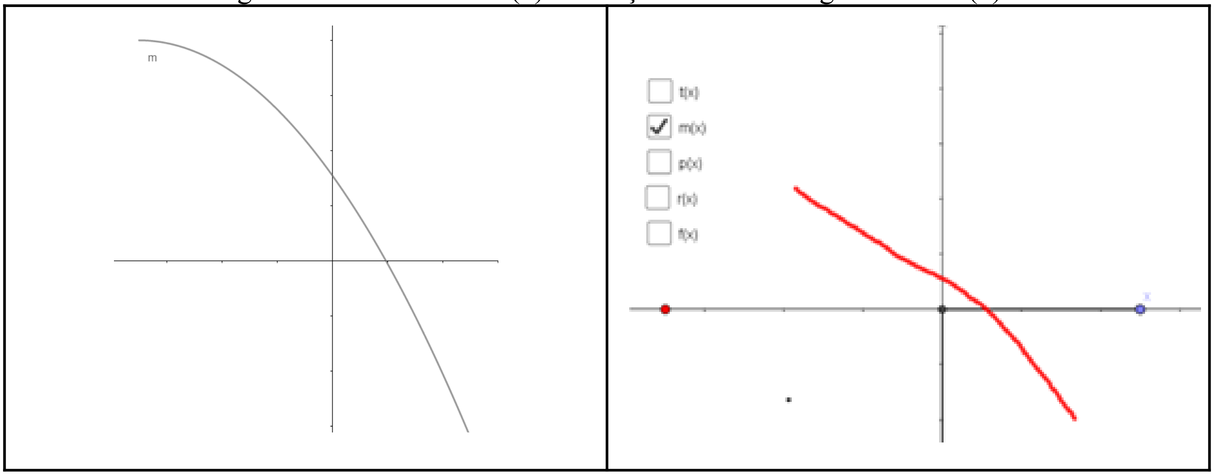
A descrição de Louise da relação entre *x* e m(x) na ficha *online* foi: "*A variável dependente m(x) começa positiva com uma variação lenta, ao passo que a variável x começa a crescer, m(x) aumenta sua variação*". Louise mobilizou o significado da variação como velocidade para descrever a variação no decrescimento de m(x) em função do crescimento de *x*, o que sugere uma quantificação da variação variável em progresso, ainda que com um significado físico de velocidade e mesclando-se a descrições em termos do sinal das variáveis ("quando *x* é negativo, ela é positiva").

Louise ainda cometeu um equívoco ao descrever, na ficha online, a variação em m(x) como crescente em função de *x*, embora na sua fala durante a exploração do Geogebra ela tenha afirmado corretamente que essa variação é decrescente. O equívoco de Louise pode ter relação com a representação de uma variação decrescente por um segmento de comprimento crescente (restrição gerada na transposição informática do *design* do material); ou ainda, pela representação dessa variação decrescente por um objeto (ponto) com velocidade crescente (acelerando).

Para esboçar o gráfico de m(x), Louise mobilizou, mais uma vez, um esquema que envolveu o deslize contínuo da caneta enquanto visualizou/imaginou a covariação. Repetidamente, o seu esquema envolveu a ideia de objeto multiplicativo; no entanto, o decrescimento variável que ela mobilizou (com um significado físico de velocidade) ao explorar e descrever m(x) não foi transferido para o seu esquema de esboço do gráfico, ou seja, Louise pareceu esboçar o gráfico (Figura 58) apenas levando em conta uma estimativa das coordenadas *x* e m(x), sem quantificar a forma como as variáveis variaram entre si.

> 22. Louise: (Varia *x* no modo automático, de um extremo do intervalo ao outro. E observa a variação de m(x).)
> 23. Louise: (Com a ferramenta caneta, desenha o gráfico em um deslize contínuo.) *"Aqui ela começa bem alta.... Ela começa bem alta...."*
> 24. Louise: *"Ainda ta aqui… Aí depois ela passa por aqui… Depois passa por aqui…É"* (Parece encenar mentalmente o desenho do gráfico, a partir das coordenadas dos pares ordenados (x, m(x)), enquanto o *x* varia automaticamente)
> 25. Louise: (Apaga o gráfico) *"Vou fazer de novo"*.
> 26. Louise: (Com a ferramenta caneta, desenha o gráfico em um deslize contínuo.) *"Ela começa… Aqui assim. Creio que seja assim… m(x)."*
> 27. Louise: (Altera a cor do gráfico para vermelho.)

Figura 58 – Gráfico de m(x) e esboço de Louise do gráfico de m(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

No caso de p(x), o esquema de Louise permaneceu estável: variar *x* do início ao fim do intervalo e observar a variação em *y*; o controle da variação foi feito no modo automático e a animação foi repetida algumas vezes.

> 6. Louise: (Varia *x* no modo automático, de um extremo do intervalo ao outro. E observa a variação de p(x) - A variação automática é repetida algumas vezes enquanto a estudante descreve o comportamento das variáveis) *"A gente observa que p(x) é uma função que quando x é positivo, ela assume valores proporcionalmente grandes, e quando x é negativo ela tem valores mais pequenos para a sua função. O que isso quer dizer? Isso pode ser que, seja uma função…"* (hesita, não complementa a frase).

A descrição de Louise da relação entre x e p(x) na ficha *online* foi:

> *Quando a variável x é positiva, p(x) varia positivamente rápido, enquanto que quando x é negativo, p(x) assume valores negativos. Ou seja, a medida que x cresce positivo a variável dependente p(x) também varia positivamente.* (Louise, situação 1A)

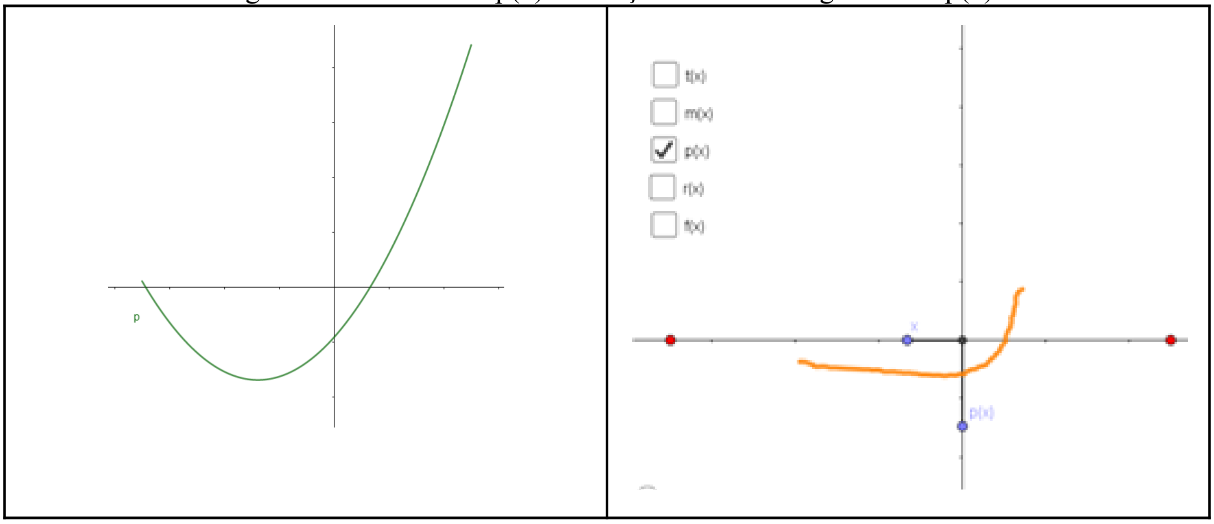
As descrições apontam uma mescla entre conceitos-em-ação como sinal das variáveis, crescimento/decrescimento e variação com o significado de velocidade. A hesitação e os termos confusos na fala de Louise sugerem uma dificuldade diante da variação variável da função, para a qual Louise alternou de descrições comparativas nos intervalos positivo e negativo, para descrições em termos da variação com o significado de velocidade, porém sem abordar de forma mais explícita e formal a variação variável. Louise também não fez referência ao ponto de mínimo em p(x).

Para esboçar o gráfico de p(x), Louise mobilizou o mesmo esquema de esboço com a caneta, porém diante da forma como p(x) varia, ela alternou o controle da variação para manual e segmentou o intervalo em três terços, para facilitar o seu processo de visualização do ponto formado pelas coordenadas *x* e p(x). Ela também incluiu uma nova regra de ação para incluir a variação de *x* no sentido contrário ao convencional (da direita para a esquerda), alternando entre o sentido convencional e o não-convencional. Esses aspectos, associados ao fato de que Louise não fez referência à quantificação da variação para esboçar o gráfico, sugerem que o seu esquema de esboço do gráfico teve por objetivo apenas o mapeamento da trajetória do ponto formado por *x* e p(x).

> 29. Louise: (Varia o *x* manualmente até o primeiro terço do intervalo e observa p(x), depois retorna ao início)
> 30. Louise: (Varia novamente o *x* manualmente, de forma mais lenta, do início ao final do intervalo. Observa a variação de p(x).) *"Ela vai por aqui (...) Depois faz assim… Sobe."* (Parece encenar mentalmente o desenho do gráfico, a partir das coordenadas dos pares ordenados (x, p(x)), enquanto varia o *x* manualmente)
> 31. Louise: (Varia novamente o *x* manualmente,agora no sentido contrário, iniciando no final do intervalo e parando após avançar em um terço do intervalo.) *"Ela vem caindo..."*
> 32. Louise: (Aciona a ferramenta caneta. Inicia o desenho do gráfico no sentido contrário, a partir do final do intervalo e parando após avançar em um terço do intervalo.) *"Ela vem caindo..."*
> 33. Louise: (Posiciona o *x* no valor onde parou o desenho do gráfico.) *"Chega aqui… Ela tem que passar por aqui"*
> 34. Louise: (Continua a variar o valor de *x* e o valor correspondente em p(x), de forma lenta, até o segundo terço do intervalo, no sentido do final para o começo do intervalo. Observa a variação das variáveis.) *"Chega aqui, ó..."*
> 35. Louise:*"Ela é assim… Assim… Passa por aqui… É assim."* (Parece encenar mentalmente o desenho do gráfico)
> 36. Louise: (Aciona a ferramenta caneta, reinicia o desenho do gráfico no sentido contrário, a partir do final do intervalo e parando após avançar até o segundo terço do intervalo.) *"Acho que ela é assim.. Vai passar aqui… E vem."*
> 37. Louise: *"Deixa eu apagar isso… Deixa eu ver..."*
> 38. Louise: (Continua a variar o valor de *x* e o valor correspondente em p(x), de forma lenta, de onde parou até o início do intervalo. Observa a variação das variáveis.)
> 39. Louise: (Varia novamente x e p(x), agora no sentido do início ao fim do intervalo, depois retorna ao valor de x no qual havia parado o desenho do gráfico.) *"Assim… Vai passar por aqui, ó…"* (Parece encenar mentalmente o desenho do gráfico, a partir das coordenadas dos pares ordenados (x, p(x)), enquanto varia o *x* manualmente)
> 40. Louise: *"Vamo lá, tá quase parecido."*

> 41. Louise: (Aciona a ferramenta caneta, reinicia o desenho do gráfico no sentido contrário, a partir do final do intervalo e parando no valor inicial do intervalo.) *"Ela é assim… Vem por aqui… Acho que seja isso, da p(x). Vou colocar ela de outra cor"*.

Figura 59 – Gráfico de p(x) e esboço de Louise do gráfico de p(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

No caso da função r(x), o esquema de exploração de Louise permaneceu estável:

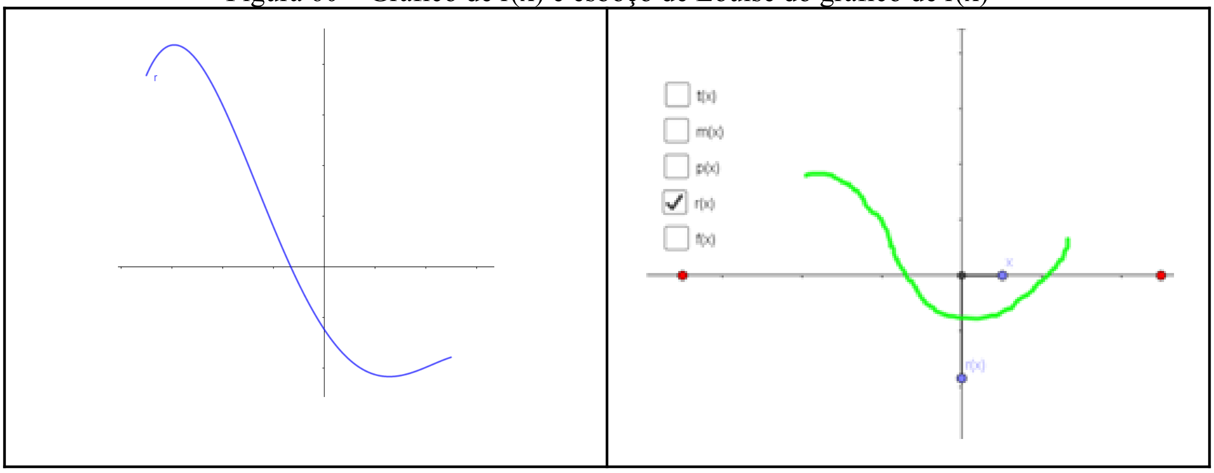
> 9. Louise: (Permanece variando *x* no modo automático e observando a variação em r(x) - A variação automática é repetida algumas vezes enquanto a estudante descreve o comportamento das variáveis.) *"Bom… r(x)... Quando o x é negativo, ela é positiva e tende a decair o seu crescimento rápido, porém, quando o x …. é positivo… ela tende a…. ser negativa. E.. desaparece rapidamente o seu valor… x cresce mais lentamente…x cresce lentamente e o r(x)... começa a crescer"* (Hesita bastante na sua fala).

A descrição de Louise da relação entre *x* e r(x) na ficha *online* foi: "*Quando a variável x é negativa, a variável dependente r(x) é positiva. Ou seja, enquanto x varia positivamente, r(x) varia negativamente. A variação de r(x) é maior que a variação de x"*. É perceptível que as referências de Louise à forma como as variáveis variam foram ofuscadas por descrições em termos do sinal das variáveis. As relações entre a variação de *x* e r(x) foram novamente descritas com um vínculo comparativo e frágil: "*A variação de r(x) é maior que a variação de x*". Ela também não fez referência aos pontos de máximo, mínimo ou inflexão.

O esquema de Louise para esboçar o gráfico de r(x) também permaneceu estável em relação à função anterior, porém sem segmentar a variação no eixo *x*. Ela traçou o gráfico por um deslize contínuo após imaginar uma imagem do gráfico a partir das coordenadas de *x* e r(x) estimadas pela variação dos segmentos dinâmicos. Novamente, o controle de *x* para o esboço do gráfico foi manual, realizado em ambos os sentidos e a animação foi repetida algumas vezes. A estabilidade do esquema aponta, como em p(x), para uma perspectiva da geração do gráfico a partir de um objeto multiplicativo de *x* e r(x). Além disso, Louise fez referências à variação de r(x) com o significado de velocidade, porém a forma do gráfico que ela desenhou parece ter sido baseada, sobretudo, no mapeamento da trajetória do ponto formado por *x* e r(x).

> 43. Louise: Varia o *x* manualmente, do início ao final do intervalo. Depois varia o *x* no sentido oposto. Observa a variação de r(x). Repete o procedimento algumas vezes. *"r(x) ela decai muito mais rápido, agora pra crescer, ela demora mais um pouquinho, quando tá negativo. Aqui vem assim...Esse vem assim, aí passa por aqui…. Passa por aqui (...) Entendi. Essa parece ser uma... Parábola? Talvez".*
> 44. Louise: (Aciona a ferramenta caneta, desenha o gráfico em um deslize contínuo, no sentido do início ao fim do intervalo.)
> 45. Louise: (Altera a cor do gráfico -Todos os gráficos são sobrepostos na janela de visualização 1, por isso, altera a cor para distinguí-los) *"Meu deus, que desenhos tronchos."*

Figura 60 – Gráfico de r(x) e esboço de Louise do gráfico de r(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

O esquema de Louise para explorar a covariação em f(x) permaneceu estável:

> 12. Louise: (Permanece variando *x* no modo automático e observando a variação em f(x) - A variação automática é repetida algumas vezes enquanto a estudante descreve o comportamento das variáveis.) *"Quando o x… Começa a crescer, o f(x) tem um estouro e sobe para mais infinito… E quando é… Quando o x vem negativo, o f(x) ele também é negativo, só que ele começa a crescer a partir do valor 1 ou o 2 que tá de x…"*

13. Louise: (Observa o *x* variando no intervalo que contém o segundo ponto de mínimo.) *"Ela para… E tem um crescimento muito rápido, logo volta pra o zero, enquanto o x fica variando normalmente."*

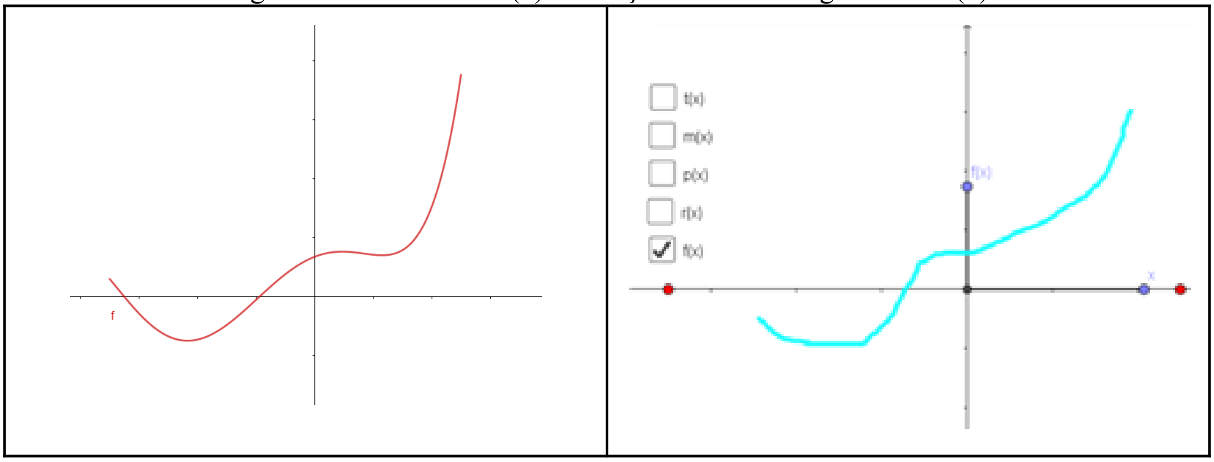
Louise descreveu a relação entre as variáveis *x* e f(x) na ficha *online* da seguinte forma: "*Tanto a variável dependente quanto a independente possuem variação positiva. Quando o x passa do valor 1 positivo, f(x) tende a crescer exponencialmente.*" Ela combinou descrições não-formais em termos de como f(x) varia em relação a *x* (usando significados como 'estouro' e 'velocidade') com descrições em termos do sinal das variáveis. Louise cometeu dois equívocos nessas descrições: usar as expressões 'sobe para mais infinito' e 'tende a crescer exponencialmente' para referir-se a um intervalo de crescimento relativo acentuado em f(x), embora esse intervalo fosse limitado em *y* e a função f(x) não seja exponencial. Mais uma vez, Louise não fez referência aos pontos de máximo, mínimo ou inflexão nas suas descrições.

Para esboçar o gráfico de f(x), Louise inicialmente observou as variáveis variando no modo automático, mas diante da dificuldade em imaginar a imagem do gráfico formada pelas coordenadas x e f(x), ela mudou para o controle manual e variou *x* nos dois sentidos do eixo, enquanto encenava mentalmente a trajetória do ponto (x, f(x)): "*Tá… Ela tá aqui né? Aqui… Aqui… Aqui… Passa por aqui por f(x), depois passa por aqui…*" (Louise, situação 1A). A fala de Louise ao esboçar o gráfico em conjunto com as suas ações, descritas a seguir, revelam a ausência de referência à quantificação da forma como *x* e f(x) variaram e reforçam um esquema voltado para o mapeamento da trajetória do ponto formado por *x* e p(x).

47. Louise: (Varia *x* no modo automático, de um extremo do intervalo ao outro. E observa a variação de f(x) - A variação automática é repetida algumas vezes enquanto a estudante descreve o comportamento das variáveis) *"... Que eu acho que seja mais difícil, porque eu não entendi direito essa posição dela, ela ... Enquanto x cresce ela vai aumentando até que chega uma hora que ela sai do contexto e depois é um pouquinho negativa."*
48. Louise: (Para a variação automática de *x* ao final do intervalo e varia o *x* manualmente, no sentido contrário, do final ao início do intervalo) *"Tá… Ela tá aqui né? Aqui… Aqui… Aqui… Passa por aqui por f(x), depois passa por aqui… E vem…"* (Parece encenar mentalmente o desenho do gráfico, a partir das coordenadas dos pares ordenados (x, f(x), enquanto varia o x manualmente).
49. Louise: (Aciona a ferramenta caneta, inicia o desenho do gráfico no sentido contrário, a partir do final do intervalo até o início do intervalo) *"Acho que ela seja assim… Ela começa assim e vem, depois passa por aqui*

que é quando o x zera , aí o f(x) ta aqui , aí depois o f(x) zera, só que o x ta aqui e depois vem".

Figura 61 – Gráfico de f(x) e esboço de Louise do gráfico de f(x)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Em síntese, o uso do Geogebra por Louise caracterizou-se mais pela tomada de informação, com pouca mobilização das ferramentas do *software*. No primeiro item, os seus esquemas envolveram, de forma estável, a regra de variar a variável em x e observar a variação correspondente em y, no modo automático e com algumas repetições no procedimento. As inferências de Louise envolveram, sobretudo, o crescimento e o decrescimento da variável em y com relação a x e uma descrição em termos do sinal das variáveis, presente em todos os itens. A referência à variação variável foi limitada ao significado físico da velocidade dos pontos que representam as variáveis e em algumas vezes de um ponto de vista meramente comparativo entre a variação em x e em y, com um vínculo frágil entre as variáveis.

Além da dificuldade com a variação variável, alguns equívocos de Louise se destacaram: (i) descrever uma variação decrescente como crescente; (ii) descrever um crescimento relativo acentuado como um crescimento exponencial ou que *'sobe ao infinito'*. O primeiro equívoco pode estar relacionado à transposição informática da variação nos segmentos dinâmicos, já o segundo, pode estar relacionado às concepções de Louise sobre o crescimento exponencial e o infinito.

O esquema de Louise para traçar o gráfico, baseado no delize contínuo da caneta enquanto imaginando a imagem gerada pelo rastro do ponto formado pelas coordenadas em x e y, pode ter contribuído para ela desenvolver uma imagem dinâmica do gráfico como um objeto multiplicativo da variação das variáveis, porém, as suas falas enquanto traçava o gráfico sugeriram um esquema mais voltado para um mapeamento da trajetória do ponto P(x,y), sem referência à quantificação da forma como as variáveis variam.

No processo de variar o *x* e observar a variação em *y* para gerar uma imagem do objeto multiplicativo (x,y) na memória, Louise iniciou com um modo de controle automático da variação, mas alternou para o modo manual, quando, aparentemente, quis obter o controle da variação em alguns intervalos.

Louise não articulou a variação dos segmentos dinâmicos aos pontos de máximo, mínimo, inflexão ou concavidades. Ela também não fez referência a esses elementos, embora estivessem presentes nos seus esboços. Mesmo nos itens nos quais havia mais pontos críticos, as referências de Louise foram em termos do sinal das variáveis, da variação com um significado de velocidade e do crescimento/decrescimento, sem quantificar de forma explícita a forma como as variáveis variaram entre si.

O confronto dos resultados com as antecipações da análise *a priori* e com aspectos relacionados à transposição informática mostrou que:

- A restrição relacionada à transposição informática da variação negativa decrescente – por meio de segmentos de comprimentos crescentes (embora no eixo negativo) – parece ter influenciado na geração do equívoco no raciocínio de Louise: de considerar uma variação decrescente como crescente. Esse equívoco também pode ter sido gerado pela associação com a velocidade variável, ao atribuir à variação decrescente em *y*, uma velocidade crescente porque o ponto acelera no eixo *y*.
- A mobilização de regras de controle da variação (manual/automático) para diferentes objetivos sugerem que, como antecipado na análise *a priori*, as diferentes formas de uso foram relacionadas a diferentes contribuições do Geogebra para explorar a variação. Louise mobilizou o modo automático para gerar uma imagem da trajetória do ponto P(x,y) enquanto as variáveis em *x* e *y* variavam; no entanto, alternou para o modo manual quando supostamente quis obter um controle de *x* para obter uma imagem mais refinada em alguns intervalos.
- A representação da covariação por segmentos variáveis permitiu a Louise inferir relações de crescimento/decrescimento, porém, ela só fez referências à

quantificação de como ocorre a variação variável com um significado de velocidade do ponto. Essa limitação coincidiu com a não mobilização, por Louise, de ferramentas que permitem coordenar a variação em *y* com acréscimos constantes em *x*, como a malha, as marcações nos eixos e a planilha.

- Louise não fez referência a como diferentes concavidades, pontos de máximo, mínimo ou pontos de inflexão se relacionam com a forma como as variáveis variaram, o que pode ter relação com uma limitação em visualizar a variação variável, bem como com a representação por segmentos, cujo gráfico da função é ocultado.
- A condição inicial na qual o material foi desenhado, sem exibição da numeração no eixos, valores das variáveis ou malha pode ter influenciado a mobilização das ferramentas do Geogebra por Louise, pois ela apenas mobilizou as variáveis no gráfico para explorar a covariação. Louise também não enfatizou valores numéricos no esboço do gráfico. As escolhas de *design* do material e os *affordances* gerados também parecem influenciar a atividade dos estudantes.
- A coordenação da caneta não foi efetiva para desenhar detalhes dos gráficos, Louise se queixou da qualidade dos seus desenhos.

4.4.4 Aspectos gerais da atividade de Eric, Alice e Louise no contexto da sessão 3 e da situação 1A

Os resultados de Eric, Alice e Louise seguiram, de forma geral, coerentes com os resultados da classe como um todo, embora as suas gêneses particulares e os seus conhecimentos de função levaram-nos a mobilizar o seu raciocínio covariacional de formas distintas. Tanto no contexto da classe quanto nos casos individuais, os estudantes deram descrições em termos apenas do crescimento e decrescimento de uma variável em relação à outra, mesmo quando a relação envolvia uma variação variável. Quando as suas descrições faziam referência à variação variável, elas foram feitas, na maioria das vezes, mobilizando o significado de velocidade variável, nem sempre relacionando a variação em *y* com a variação em *x*.

As gêneses instrumentais particulares de Eric, Alice e Louise revelaram diferentes usos e instrumentalizações do Geogebra: no caso de Eric, a instrumentalização das marcações nos eixos *x* e *y* permitiu que ele coordenasse a variação variável nas funções m(x) e p(x); já Alice e Louise instrumentalizaram o rastro do ponto P(x,y) para gerar o gráfico na perspectiva de um objeto multiplicativo da covariação entre as variáveis, porém, sem explicitar a quantificação da variação.

Os aspectos da transposição informática envolvidos no *design* do material também tiveram relação com a forma como os estudantes desenvolveram a sua atividade. A representação das variáveis por segmentos dinâmicos nos eixos contribuiu para a ênfase em como a variação em uma variável influencia em outra, em vez dos aspectos pictóricos e procedimentais observados na situação da sessão 2. Por outro lado, aspectos do gráfico como pontos de máximo, mínimo e inflexão foram dificilmente visualizados pelos estudantes por essa representação, assim como a variação variável que foi descrita, na maioria das vezes, como o significado de velocidade do ponto. Um equívoco relacionado à associação do comprimento do segmento dinâmico ao valor da variação emergiu na atividade de Louise, ao lidar com uma variação negativa decrescente.

A decisão de *design* de apresentar a tela inicial do material apenas com as ferramentas básicas e sem indicar numerações nos eixos, valores das variáveis ou malha pode ter influenciado em como os estudantes usaram o Geogebra. Eles mobilizaram, em geral, apenas as ferramentas que estavam postas na tela, embora outras ferramentas pudessem ter contribuído para quantificar a variação variável. Isso pode ser um indício do quanto as *affordances* e escolhas de *design* que envolvem a transposição informática influenciam na atividade e na gênese instrumental dos estudantes.

4.5 SÍNTESE E ANÁLISE DA SESSÃO 4

Dos oito participantes do experimento, sete compareceram à sessão 4 que teve duração de 02h38 min. A estudante Louise, uma das integrantes do estudo de caso, não pôde comparecer a esta sessão.

No primeiro momento da sessão, a situação 1A foi revisitada e discutida com base nas produções dos estudantes e nas possibilidades de uso do Geogebra para a sua resolução. O mediador teve um papel predominante de expositor, apresentando a tela dividida entre a sua câmera e o Geogebra; os monitores tiveram um papel de apoio, monitorando o *chat* e trazendo as dúvidas individuais à classe; os estudante acompanharam a exposição nos seus computadores pela tela de videoconferência e puderam fazer perguntas ou comentários via *chat* ou pela própria videoconferência.

Como ponto de partida, um dos resultados da situação 1A – a descrição da covariação meramente em termos do comportamento crescente ou decrescente – foi revisitado para discutir com os estudantes como as ferramentas do Geogebra poderiam ser úteis para aprofundar a visão da covariação, de forma a quantificar a variação variável.

Nesse contexto, foi abordado o caso da função m(x) que é decrescente com taxa de variação negativa e decrescente. A planilha foi mobilizada para mostrar como uma coluna definida com base nas diferenças sucessivas de m(x) poderia dar suporte na quantificação da variação variável.

Essa estratégia necessitaria, claro, da mobilização de representações numéricas dos valores das variáveis x e m(x). Foram revisitadas, assim, técnicas de construção e exploração da planilha como suporte à análise da covariação representada nos segmentos dinâmicos.

Uma discussão importante realizada pelo mediador foi a da formalização dos significados atribuídos pelos estudantes à variação e à taxa de variação, sobretudo, o significado físico de velocidade que foi mobilizado algumas vezes nas respostas de alguns estudantes para fazer uma referência informal ao conceito de variação variável.

A formalização foi no sentido de trazer o significado do contexto físico de velocidade para a conceitualização formal matemática de taxa de variação, ou seja com um significado de uma quantificação da relação entre a variação da variável em y e a variação da variável em x.

Foi feita uma breve abordagem, a partir do caso da função m(x), do problema de transposição informática e da restrição a ele associada da coordenação e, também, da visualização de uma taxa de variação negativa e decrescente representada por segmentos dinâmicos (visualmente o comprimento dos segmentos no eixo y são cada vez maiores e a velocidade do ponto em y também).

Dessa forma, foi discutido com os estudantes o argumento de que, embora o módulo do valor da variação no eixo y seja crescente, é preciso considerar o valor negativo da taxa de variação.

Além disso, ao ser realizada uma análise da performance didática da orquestração implementada, refletiu-se que, dada a importância do aspecto da taxa negativa, o planejamento da orquestração poderia ter aplicado maior ênfase à exploração e à discussão dos problemas relacionados a este conceito.

Também foram abordadas, a partir do caso f(x), as relações entre aspectos do gráfico, como pontos de máximo e mínimo, quando representados por segmentos variáveis. Como mostraram os resultados da sessão 3, essa articulação foi pouco ou nada realizada pelos estudantes.

No segundo momento, foi orquestrada a situação 1B, porém, por questões de ordens técnicas envolvendo os computadores dos estudantes e as adaptações necessárias para o registros dos dados, foi realizada uma tentativa de rearranjo da configuração didática da orquestração que envolveu a mudança da configuração em duplas para a configuração individual e a redução da quantidade de itens da situação a serem respondidos, dada a limitação do tempo.

Assim, com as restrições do tempo de cada estudante, a quantidade de itens respondidos e o volume de dados gerados foi insuficiente para uma análise evolutiva satisfatória dos estudantes, inclusive dos sujeitos do estudo de caso.

Por isso, a sessão 4 foi descrita apenas para efeitos de análise da evolução do contexto de ensino, porém sem a análise das produções individuais dos estudantes. Considerando tais eventos imprevistos, a sessão 4 ficou mais caracterizada pela revisitação e discussão da situação 1A.

Entretanto, um dado importante foi gerado durante as dúvidas da situação 1B. Tal dado diz respeito a como a transposição informática envolvida nas escolhas de design influenciam na gênese dos estudantes.

No desenho do material da situação 1A, os nomes das funções e das variáveis foram escritos e exibidos na tela como letras: t(x), m(x), p(x), r(x) e f(x). Já na situação 1B, a grande quantidade de itens levou a uma escolha por índices numéricos na programação do material no Geogebra (f1(x), f2(x), f3(x), …, f12(x)) e índices numéricos nos pontos exibidos no eixo y (y1, y2, y3, …, y12).

Essa escolha gerou uma dificuldade para Alice (e provavelmente para outros estudantes) na sua construção e exploração da planilha na atividade 1B, pois ela mobilizou um esquema de construção das variáveis nas colunas da planilha baseado na situação 1A. Ela fez o seguinte questionamento no *chat*:

> 1. Alice: *Como colocar o y na planilha? Por exemplo, na atividade 1A tinha os nomes das funções, aí eu conseguia colocar f(A1) por exemplo e arrastar … No caso, onde eu encontro o nome da função?*
> 2. Mediador: *Cada função tá nomeada da seguinte forma:y2 é f2, y7 é f7...Aí você coloca na planilha: f_2(A1), por exemplo.*
> 3. Alice: *Entendi, estava colocando com o y, e não deu certo. Agora foi.*

Esse exemplo foi importante para ilustrar como as escolhas mais simples envolvidas no *design* dos materiais podem gerar alguma restrição à atividade dos estudantes, ainda mais quando eles estão iniciando as suas gêneses instrumentais com alguma ferramenta, como foi no caso da planilha para explorar a covariação.

A sessão também foi marcada por inconsistências e restrições no Geogebra de pouca expressão para o problema de pesquisa, mas citados como fenômenos presentes no uso de tecnologias computacionais: a exibição na janela de visualização 1 de um gráfico construído na janela de visualização 2; a não exibição na tela de duas caixas de marcação de funções da situação 1B. Essas restrições foram sanadas de forma coletiva, com o envolvimento dos estudantes e dos monitores.

4.6 SÍNTESE E ANÁLISE DA SESSÃO 5

Na sessão 5 foi dado continuidade à exploração do Geogebra para explorar a taxa de variação por meio da coordenação da variação em *y* com a variação em *x*. Dos oito participantes do experimento, apenas cinco compareceram à sessão que teve duração de 02h52min. A estudante Alice, uma das integrantes do estudo de caso, não conseguiu participar desta sessão descrita.

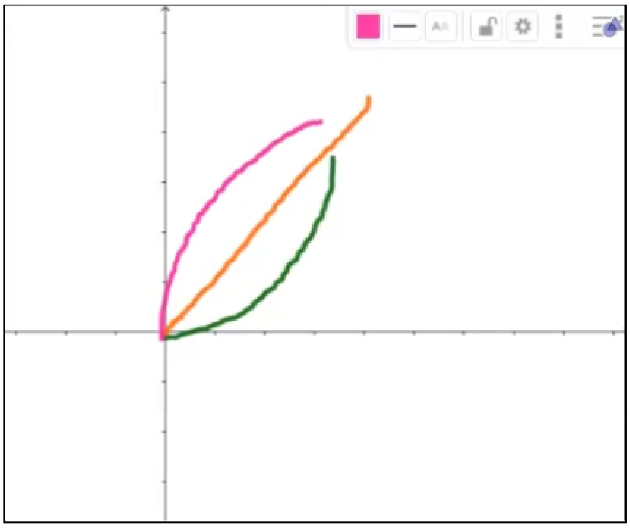
A sessão 5 foi estruturada nos seguintes momentos:

- Informes institucionais, questões e orientações quanto ao uso de instrumentos de registro dos dados;
- Revisitação da situação 1B;
- Possibilidades do Geogebra para representar e explorar a taxa de variação no gráfico;
- Orquestração da situação 2;
- Fechamento da sessão.

No primeiro momento da sessão, a situação 1B foi revisitada e discutida com base nas possibilidades de uso do Geogebra para a sua resolução. O mediador teve um papel predominante de expositor, apresentando a tela dividida entre a sua câmera e o Geogebra; os monitores tiveram um papel de apoio, monitorando o *chat* e trazendo as dúvidas individuais à classe; os estudantes acompanharam a exposição nos seus computadores pela tela de videoconferência e puderam fazer perguntas ou comentários via *chat* ou pela própria videoconferência.

A partir das funções abordadas na situação 1B, foi introduzida a ideia de taxa de variação em termos da variação em *y* com acréscimos constantes em *x*. O significado de velocidade, mobilizado pelos estudantes nas sessões anteriores para descrever a forma como as variáveis variam, foi revisitado no sentido de formalizá-lo como taxa de variação. Um exemplo com três tipos de gráficos de funções crescentes – cada uma caracterizada por um comportamento distinto da taxa de variação – foi utilizado para abordar o aspecto da variação variável (e a insuficiência de descrever a covariação como apenas crescente ou decrescente), bem como as possibilidade de ferramentas e de esquemas para explorar esse aspecto (Figura 62)

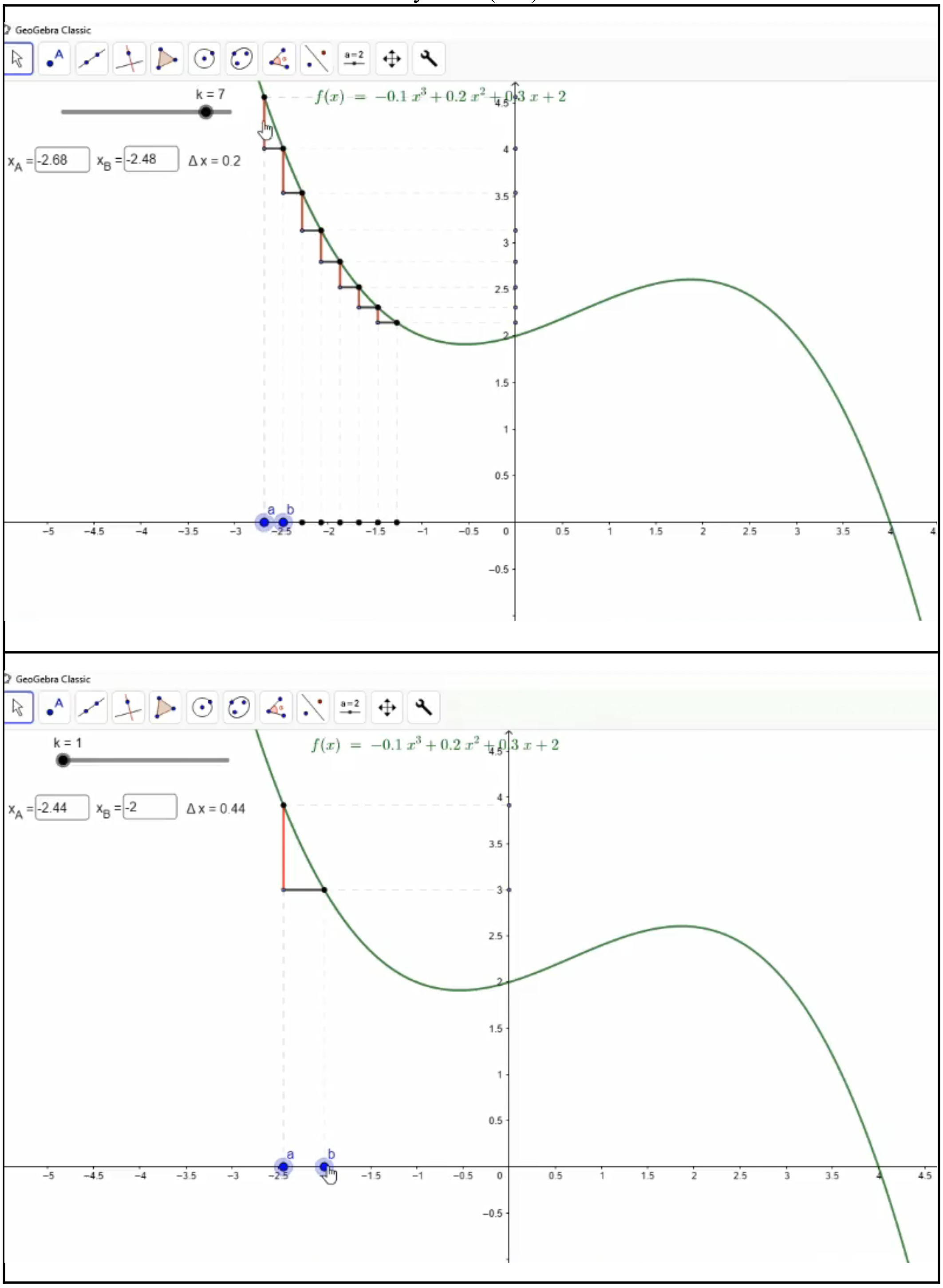
Figura 62 – Três formas distintas de crescimento



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir desse exemplo, foram abordadas duas ferramentas (ou dois esquemas de exploração) para coordenar a variação em *y* em função da variação em *x*, a variação variável e a relação com aspectos do gráfico: (i) variações sucessivas (ferramenta a ser explorada na situação 3, sessão 6); (ii) variação dinâmica entre Δy e Δx (ferramenta a ser explorada na situação 2, nesta sessão 5). A Figura 63 exibe ambas as ferramentas:

Figura 63 – Duas formas de explorar Δy e Δx - Variações sucessivas (sup.) e variação dinâmica entre Δy e Δx (inf.)



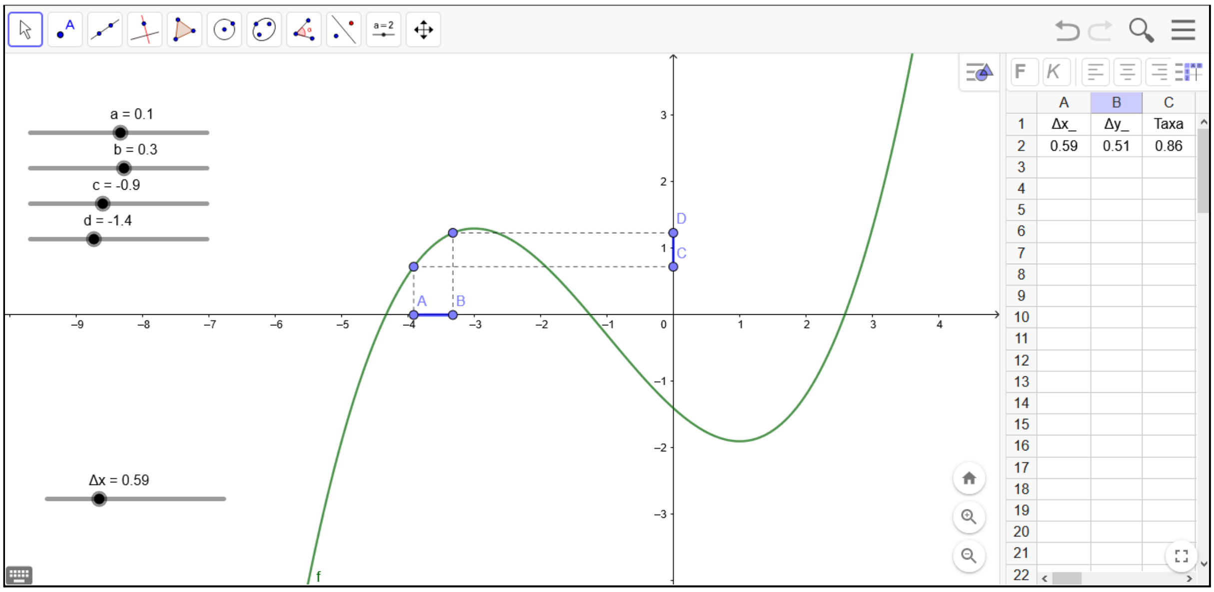
Fonte: Elaborado pelo autor

Foram explorados esquemas de construção, exploração e configuração para coordenar a variação em *y* em função da variação em *x*, no gráfico, no modelo algébrico e na planilha. Além disso, os aspectos do gráfico, como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão foram revisitados a partir do uso dessas ferramentas. No momento seguinte da sessão, foi orquestrada a situação 2, cuja síntese e análise são descritas a seguir.

Situação 2: explorar, descrever e representar a covariação articulando a taxa de variação com aspectos do gráfico

Os objetivos, o planejamento e a análise *a priori* da situação 2 foram descritos na subseção de análise *a priori* da mesma. Os estudantes foram solicitados a explorar, descrever e representar a covariação graficamente, no contexto da articulação entre a taxa de variação média e instantânea e a sua articulação com aspectos do gráfico da função (Figura 64).

Figura 64 – Material da situação 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Foi planejado um tempo de 40 minutos para a situação, porém a sua orquestração durou 1h20min, pois foi necessário um tempo maior que o previsto para orientar os estudantes quanto à construção do material. Além disso, alguns estudantes concluíram a resolução após o fim da sessão, de forma assíncrona. Dos estudantes do caso, além de Alice, que não estava presente na sessão, Eric precisou sair da sessão antes da orquestração da situação 2. Alice, Louise e Eric resolveram a situação de forma assíncrona, após a sessão 5, embora Louise estivesse presente na sessão. A configuração didática envolveu a exploração individual do Geogebra pelos participantes nos seus computadores pessoais, tendo o suporte *online* do mediador e dos monitores na videoconferência e no *chat*. Foi orientada a criação de um documento de texto *online* no qual os estudantes deveriam escrever as suas respostas às questões da situação.

Descrições em termos do crescimento e decrescimento de Δy e dificuldades em coordenar a covariação complexa entre x, Δx e Δy

Os estudantes deram descrições apenas em termos do crescimento ou decrescimento de Δy, sem explicitar a variação variável de Δy. Além disso, dificilmente essas descrições fizeram referência a todas as variáveis envolvidas na covariação complexa entre x, Δx e Δy. Sobretudo, prevaleceram descrições que relacionaram a variação entre x e Δy, sem referência à influência da variação de Δx.

Influência da representação da variação negativa por segmentos dinâmicos

As descrições de Eliza e Arthur sobre o comportamento de Δy revelaram equívocos relacionados à transposição informática da variação negativa por segmentos, cujos comprimentos são associados ao valor da variação. Eliza e Arthur associaram a variação Δy como sendo o comprimento do segmento que representa a variação, o que os levou a cometer o equívoco de que Δy pode ser decrescente em um intervalo no qual a concavidade do gráfico é voltada para cima. Eliza fez a seguinte afirmação sobre Δy: "*quando a concavidade é para cima, ele decresce, chega num ponto mínimo e depois cresce*"; já Arthur descreveu Δy da seguinte forma: "*Com a concavidade voltada pra cima, a taxa decresce até chegar num minimo e torna a crescer*". A associação com o comprimento do segmento é clara porque na representação numérica da planilha o comportamento da variação é sempre crescente ou decrescente, a depender da concavidade do gráfico.

Essa associação ainda pode ter relação com um segundo equívoco de Eliza e Arthur: considerar pontos de máximo e mínimo como sendo pontos nos quais a variação Δy (ou a taxa de variação, no caso de Arthur) muda de crescente para decrescente, ou de decrescente para crescente. Isso pode ter sido causado pela forma como os estudantes visualizaram o comprimento do segmento alternando entre decrescente/crescente nesses pontos, embora ao ser considerado o sinal da variação *Δy*, alterna-se o sinal da variação e não o seu sentido de crescimento.

Mobilização dos conhecimentos da Geometria e do Cálculo para descrever a variação de Δy

Frequentemente, os estudantes mobilizaram significados como inclinação da reta tangente e o coeficiente angular para se referirem à variação em *Δy*, mesmo esses conceitos não se aplicando ao contexto explorado.

Relações entre a covariação e aspectos do gráfico: concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão

Foi perceptível uma maior referência às relações entre a covariação e os aspectos do gráfico. Eric e Alice descreveram corretamente as relações entre a variação *Δy* e os aspectos do gráfico, embora não tenham feito referência à variação de *Δx*. A descrição de Eric foi a seguinte:

> *Quando a concavidade está voltada para cima, a variação Δy é crescente, quando a concavidade está voltada para baixo, a variação Δy é decrescente, nos pontos de máximo e de mínimo, Δy=0 e nos pontos de inflexão Δy deixa de crescer e passa a decrescer ou vice-versa.* (Eric, situação 2)

Já Alice fez a seguinte afirmação:

> *Quando a concavidade é voltada para cima o Δy é crescente. Voltada para baixo o Δy é decrescente. Nos pontos de máximo e mínimo acontece a mudança de sinal na variação de y. O ponto de inflexão altera a concavidade, na função observada Δy é crescente e passa a ser decrescente a partir do ponto de inflexão.* (Alice, situação 2)

Na função que Louise analisou, ela descreveu a variação *Δy* como meramente crescente no ponto de mínimo e decrescente no ponto de máximo, além de afirmar que a função não tinha pontos de inflexão. Já Eliza e Arthur consideraram pontos de máximo e mínimo como sendo pontos nos quais a variação *Δy* (ou a taxa de variação, no caso de Arthur) muda de crescente para decrescente, ou de decrescente para crescente.

Esboço do gráfico

A maior parte dos gráficos parece ter sido esboçada por meio de esquemas baseados na abordagem de correspondência e desenvolvidos no ambiente lápis e papel, com definição de coordenadas (são visíveis alguns pontos nos desenhos) e desenho de uma curva que representa a trajetória dos pontos. Isso pode significar que esse esquema se sobrepôs a possíveis esquemas que levassem em conta o deslize contínuo das variáveis como um objeto multiplicativo da covariação. Essa questão foi abordada de forma mais adequada na análise microgenética dos casos.

4.6.1 Análise da atividade de Eric na situação 2

Na orquestração da sessão 5, foram dadas duas possibilidades aos estudantes: (i) construir o material da situação 2, seguindo as orientações da ficha *online* ou (ii) utilizar o material pronto, disponibilizado por meio de um *link*, para aqueles que tivessem tido dificuldades na construção, ou que quisessem explorar o material avançando sobre a fase de construção, que não era o foco do estudo. Eric escolheu utilizar o material pronto .

Para explorar o primeiro item[1], as regras de ação e tomada de informação do esquema de Eric envolveram obter os valores de Δx e Δy na planilha, variar x_A e x_B no gráfico e coordenar a variação do valor de Δy diretamente na planilha. As regras de controle envolveram a variação manual das variáveis e a segmentação da variação, tomando por referência pontos especiais do gráfico, como pontos de mínimo, máximo e zeros da função, aparentemente como uma influência do seu esquema na situação 1A, que também foi mobilizado tomando esses pontos como referência.

A disponibilidade da representação numérica (valores de Δx, Δy e $\Delta y/\Delta x$ na planilha, além do valor de Δx no controle deslizante) levou a uma rápida integração dessa representação ao esquema de Eric. Além de incluir como primeira regra de tomada de informação a obtenção dos valores de Δx e Δy, o seu esquema articulou a variação em *x* no

[1] *"Descreva como a variação Δy (variação no eixo y) varia em função dos valores assumidos por x_A e x_B . Teste outros valores de Δx e descreva o comportamento de Δy."* (Situação 2, questão 1, item a)

gráfico com o valor numérico de Δy disponível na planilha que varia simultaneamente conforme x_A e x_B variam no gráfico. A representação numérica foi tão influente que Eric não fez referência à variação em Δy representada pelo segmento dinâmico no gráfico.

Eric demonstrou, desde o início, ter uma imagem clara de que ele estava variando dois valores em *x* simultaneamente, com a diferença entre eles fixa, e coordenando a variação em dois valores correspondentes em *y.* Isso mostra que ele instrumentalizou o Geogebra para dar suporte à análise da covariação complexa entre x, Δx e Δy. Entretanto, Eric não foi além de dois casos ao testar diferentes valores de Δx.

Como na seguinte fala, o esquema de Eric não envolveu inferências que o levassem a quantificar como a variação de Δy ocorre. Ele apenas descreveu Δy em termos de crescente ou decrescente, o que aponta uma visão limitada da variação de Δy em função da variação de x e Δx: "*A variação no eixo y decresce na região em que a concavidade está voltada para baixo e cresce na região em que a concavidade está voltada para cima, na direção positiva do eixo x*" (Eric, situação 2).

A dificuldade para visualizar a variação variável de Δy pode ter sido influenciada pelo esquema de coordenar a covariação entre *x* e Δy, tomando apenas a variação dos valores de Δy, sem o suporte de ferramentas para coordenar a variação em Δy com acréscimos constantes em *x.* Nem mesmo as marcações nos eixos, mobilizadas parcialmente na situação 1A, foram mobilizadas por Eric. Além disso, as regras envolvidas no esquema de Eric para variar x_A e x_B tinham como referências pontos especiais do gráfico, como zeros da função, pontos de máximo, mínimo e inflexão, o que limitou a coordenação da variação em Δy com acréscimos constantes em *x*.

Eric também teve dificuldade em raciocinar em termos de uma variação negativa em Δy, porém essa dificuldade não estava associada à representação de Δy por meio dos segmentos dinâmicos, como previa a análise *a priori*, mas à própria representação numérica da variação negativa. Ao observar o valor de Δy decrescendo de forma dinâmica na planilha, Eric viu-se em um entrave ao descrever Δy decrescendo enquanto observava valores de módulo cada vez maior. Apenas após confrontar e resolver o aparente entrave, do ponto de vista numérico, ele conseguiu coordenar a variação negativa decrescente.

> 4. Eric: (Varia novamente x_A e x_B simultaneamente do valor de *x* do primeiro zero da função até o valor de *x* do ponto de máximo. Observa a variação em Δy na planilha.) *Então, o Δx é constante, 0,37, e o Δy ta diminuindo. Pronto*

aqui, pra cá o Δy diminui, em consequência a taxa tá diminuindo, diminuindo, diminuindo… Até Δy zero, a taxa é zero.
5. Eric: *Então à medida que o Δy diminui, aqui nesse intervalo, a taxa de variação também diminui, até chegar em zero…*
6. Eric: (Varia x_A e x_B a partir do *x* do ponto de máximo, em seguida retorna até um pouco antes do *x* do ponto de máximo. Observa a variação em Δy na planilha.) *Depois o Δy é negativo, ele…* (hesita, parece diante de uma aparente contradição ao coordenar a variação decrescente em Δy para valores negativos).
7. Eric: (Varia x_A e x_B simultaneamente de um intervalo próximo do *x* do primeiro zero da função até um pouco depois do *x* do ponto de máximo. Observa a variação em Δy na planilha) *Aqui* (no intervalo em que Δy é decrescente, porém positivo) *o Δy … ta diminuindo… Diminui, diminui até chegar em zero. Aqui* (após o ponto de máximo) *ele continua diminuindo...* (Parece tentar entender a variação negativa).
8. Eric: *Porque são valores negativos, então se a gente tem -0,25 e -0,33, os valores diminuíram.* (justifica numericamente o aparente conflito na interpretação da variação negativa decrescente).

O recorte acima também mostra que as inferências de Eric apontam a mobilização do conceito-em-ação da taxa de variação média, por meio da mobilização do teorema-em-ação que relaciona a taxa de variação crescente a uma variação em Δy crescente com Δx fixo.

No item 1.b, Eric descreveu aspectos do gráfico em termos da variação relativa entre Δy e x, embora ele não tenha quantificado a forma como Δy variou, foi suficiente interpretar os aspectos do gráfico em termos de Δy crescente ou decrescente.

16. Eric: *Quando a concavidade está voltada para cima, a variação Δy é crescente, quando a concavidade está voltada para baixo, a variação Δy é decrescente, nos pontos de máximo e de mínimo, Δy=0 e nos pontos de inflexão Δy deixa de crescer e passa a decrescer ou vice-versa.*

A primeira descrição de Eric continha um equívoco relacionado ao ponto de inflexão. Ele havia escrito que nos pontos de máximo, mínimo e inflexão, *Δy=0.* Esse teorema-em-ação só foi descartado após ele hesitar e retomar a exploração do Geogebra para confrontá-lo e, finalmente, inferir que *Δy* apenas alterna o sentido da variação nos pontos de inflexão.

17. Eric: *… Nos pontos de inflexão também zera? Deixa eu voltar lá pra ver.* (Retoma a tela do Geogebra)
18. Eric: (Varia simultaneamente x_A e x_B, de um pouco antes do *x* do ponto de inflexão até um pouco depois do *x* do ponto de inflexão. Observa a variação em Δy na planilha. Repete o procedimento duas vezes.) *Na verdade aqui ó… Decresce, decresce, -0,82… -0,83… -0,82… Então… É nos pontos*

de máximo e de mínimo Δy=0 e nos pontos de inflexão Δy é... Deixa de crescer e passa a decrescer, ou vice-versa .

Ainda antes, na exploração dos aspectos do gráfico, Eric já havia inferido o conceito-em-ação de ponto de inflexão como um ponto de alternância do sentido da variação, como se vê a seguir. A fonte do seu equívoco, ao redigir sua resposta na ficha, foi considerar que nesse ponto de alternância, *Δy* é igual a zero.

9. Eric: (Varia x_A e x_B simultaneamente de um intervalo pouco depois do *x* do ponto de máximo até um pouco depois do *x* do ponto de mínimo. Observa a variação em Δy na planilha.) *Então Δy tá diminuindo, diminuindo... Depois ele começa a aumentar... Aumenta, aumenta, aumenta...*
10. Eric: (Retorna x_A ao início do intervalo de exibição do gráfico (x=-4) e varia x_A e x_B até um pouco depois do *x* do ponto de inflexão. Observa a variação em Δy na planilha.) *Então deixa eu ver o que aconteceu aqui... Δy está diminuindo, diminui, diminui, diminui... Até que chega um ponto que ele começa a aumentar.*
11. Eric: (Retorna x_A e x_B a um pouco antes do *x* do ponto de inflexão e varia os valores até um pouco depois do *x* do ponto de inflexão. Observa a variação em Δy na planilha. Repete o procedimento duas vezes.) *E aí tá nessa região aqui de mudança de concavidade. Começa a aumentar, aumentar... Então, onde tá aqui esse ponto, na mudança da concavidade, o Δy que estava diminuindo, ele passa a aumentar, ele começa a crescer.*

No segundo item[2], Eric estendeu as suas inferências para a taxa de variação instantânea, ao visualizar a variação da taxa para um valor pequeno de Δx (pequeno o suficiente para simular uma aproximação cada vez maior entre x_A e x_B e o comportamento correspondente na relação Δy/Δx). Ele também mostrou uma consciência de que a representação apenas simula a aproximação à derivada, o que aponta que a sua instrumentalização do Geogebra cumpriu um papel de suporte representacional para a geração de inferências.

39. Eric: "*A taxa de variação é decrescente quando a concavidade está voltada para baixo e crescente quando a concavidade está voltada para cima. Nos pontos de máximo e de mínimo a taxa de variação se anula e nos pontos de inflexão a taxa de variação deixa de ser decrescente para se tornar crescente e vice-versa.*"

[2] Escolha Δx pequeno o suficiente (por exemplo Δx = 0.0001), varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente e responda: a- Observe a variação do valor de Δy/Δx. Como a taxa de variação varia em função de x para a função dada? ; b - Como a variação de Δy/Δx se relaciona com aspectos do gráfico da função? (concavidades, pontos de máximo e mínimo, pontos de inflexão); c- Que relação há entre Δy/Δx e a derivada da função?

> 40. Eric: (...)*"Como fizemos Δx muito próximo de zero, ocorrendo, em consequência disso, o mesmo para Δy, então a razão Δy/Δx se aproxima cada vez mais da derivada da função no ponto x dado. Quanto ao sinal de Δy/Δx e da derivada da função, é o mesmo.*"

Uma restrição ao nível da interface gerou um entrave na exploração da taxa de variação por Eric. Embora o enunciado do item 2 tenha solicitado escolher "*Δx pequeno o suficiente (por exemplo, no Geogebra poderia ser Δx = 0.0001)*", que era o valor mínimo definido no controle deslizante, o Geogebra estava configurado para exibir apenas duas casas decimais na tela; assim, ao deslizar o controle deslizante referente a *Δx* e ao chegar em 0,0001, o valor exibido era Δx = 0, o que levou a um conflito teórico-computacional na tela, pois exibia-se Δx = 0, Δy = 0 e a taxa de variação tinha um valor real definido e diferente de zero. Após várias tentativas de exibir o valor Δx = 0,0001, (Eric suspeitava que o problema era de configuração de exibição da quantidade de casas decimais, mas não conseguiu alterar a configuração), a consciência do conflito teórico-computacional fez com que Eric entendesse que esse era um problema apenas a nível de interface e que, de fato, Δx e Δy eram diferentes de zero, porque a taxa estava definida.

> 29. Eric: *Agora eu acho que eu tô me matando com isso, mas é besteira, porque a taxa tá aqui, né? (...) É esquece os últimos sete, oito, vinte minutos que eu tô falando.*
> 30. Eric: (Varia x_A e x_B e observa o valor da taxa de variação na planilha) *Ele interpreta aqui o delta x e delta y como sendo zero, mas ele tá entendendo que não, é realmente 0.0001 porque se não, ele não calcularia a taxa. E a taxa tá realmente variando.*

No terceiro item[3], Eric foi solicitado a esboçar o gráfico da taxa de variação em função de *x*. As primeiras regras do esquema de Eric para desenhar o gráfico envolveram variar x_A e x_B no gráfico e coordenar a variação do valor de Δy/Δx na planilha, de forma a antecipar mentalmente uma imagem contínua e global da variação de Δy/Δx, em termos de crescimento/decrescimento, porém sem dar conta da variação variável.

Eric também mobilizou regras de ação e tomada de informação que envolveram definir pontos específicos no gráfico, que pudessem complementar e servir como referência à imagem do gráfico, antecipada mentalmente. Dentre esses pontos havia dois nos quais Δy/Δx

[3] A partir do gráfico da função, esboce um gráfico que representa a taxa de variação em função de *x*. Justifique a forma do gráfico da taxa de variação relacionando-o com o gráfico da função.

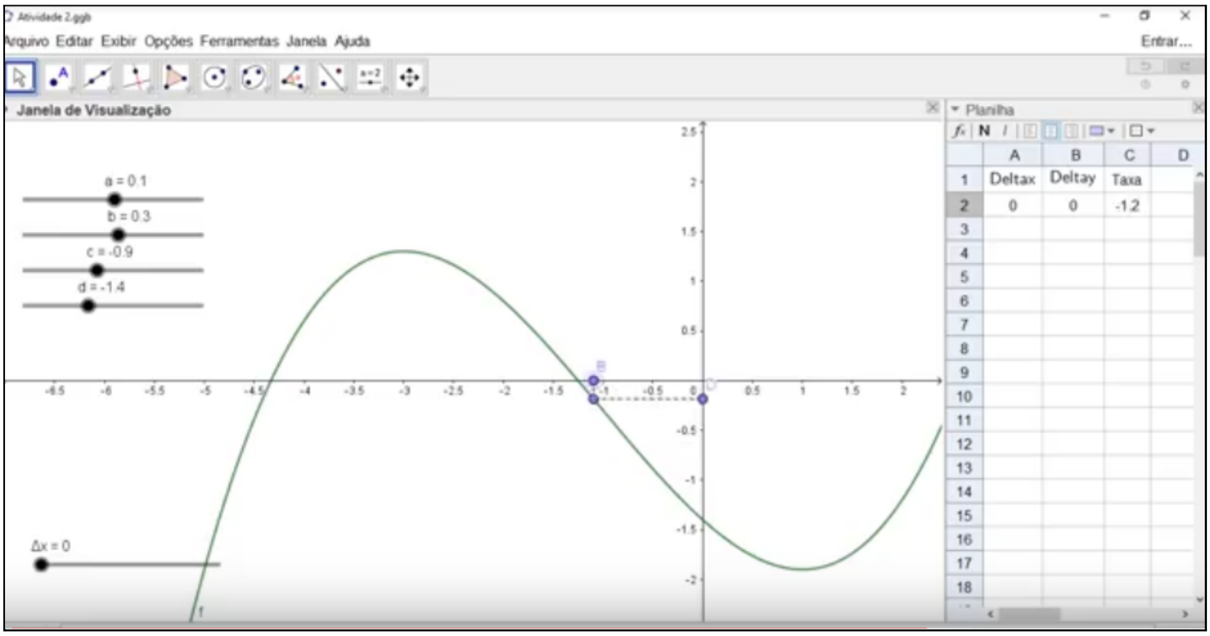
é igual a zero (associado aos pontos de máximo e mínimo da função f) e um ponto no qual $\Delta y/\Delta x$ passa de decrescente para crescente (associado ao ponto de inflexão de f).

Enquanto a primeira regra de ação promove um raciocínio covariacional contínuo, embora limitado pela não-quantificação da variação variável, a segunda regra, baseada apenas na definição de pontos especiais do gráfico, está associada aos esquemas tradicionais de correspondência do esboço do gráfico no papel/lápis. Como mostra o final da sequência de ações a seguir, Eric ainda buscou definir mais pontos no gráfico por meio da planilha, o que mostra que ele considerou insuficiente os invariantes relacionados apenas ao crescimento e decrescimento das variáveis para esboçar o gráfico.

> 43. Eric: (Retorna x_A ao início do intervalo de exibição do gráfico (x=-4), varia x_A e x_B até próximo do *x* do ponto de máximo observa o valor da taxa de variação na planilha.) *Então eu tenho essa taxa de variação decrescendo… Seria o meu y nesse caso né... Até atingir zero...*
> 44. Eric: (Varia x_A e x_B a partir do *x* do ponto de máximo e busca o ponto de inflexão, e para isso, observa o valor da taxa de variação na planilha, buscando o valor para o qual a taxa passa de decrescente para crescente) *…Continua decrescendo… Decresce, decresce, decresce, até um y... dezoito... dois…* (refere-se aos valores das casas decimais dos valores assumidos pela taxa) *Vamo lá… Decresce, decresce, decresce… Um ponto dois, basicamente no um ponto dois ele começa a crescer de novo, um ponto dois negativo né?*
> 45. Eric: (Define o ponto (0, -1,2) no gráfico) *Vamo lá, deixa eu colocar um ponto dois negativo… x=0 e y=-1,2.* (Ao definir o ponto de mínimo, comete o equívoco de considerar o valor de x_{min} como zero).
> 46. Eric: (Parece encenar mentalmente a forma do gráfico da taxa) *Ele decresce, chega aqui e começa a crescer. Ele decresce, chega no -1,2 e começa a crescer de novo.*
> 47. Eric: (Posiciona x_A e x_B próximo ao x do ponto de máximo. Depois varia x_A e x_B até próximo do valor de *x* do ponto de mínimo. Observa o valor da taxa de variação na planilha) *Ele vai ser zero, mais ou menos quando o x é -3 né? Quando o x é -3 a taxa de variação tá mais ou menos no zero… E ela zera de novo no x mais ou menos aqui no 1, quando x é aproximadamente um ela zera de novo. Deixa eu ver…*
> 48. Eric: (Parece encenar mentalmente a forma do gráfico da taxa) *A taxa de variação decresce...*
> 49. Eric: *Deixa eu ver se eu consigo usar a planilha para alguma coisa.*

Embora a fala inicial de Eric mostrou que ele concebeu o gráfico da taxa de variação como uma função de *x* e $\Delta y/\Delta x$, ele cometeu um equívoco ao determinar o ponto de mínimo da taxa de variação. Eric estimou a coordenada y_{MIN} de forma válida, ao definir o valor para o qual $\Delta y/\Delta x$ passou de decrescente para crescente na planilha (y_{MIN}= -1,2 , segundo a estimativa de Eric), porém, considerou $x_{MIN}=0$. Uma hipótese para esse equívoco, além do fato de que está em jogo a covariação envolvendo mais de duas variáveis (covariação complexa), é que, como o rótulo "y" pode representar no Geogebra tanto a coordenada *y* da função original quanto a coordenada *y* da função taxa de variação a ser esboçada, Eric teria associado indevidamente o valor de $\Delta x=0$ exibido na planilha, como sendo o valor de x_{MIN} (Figura 65).

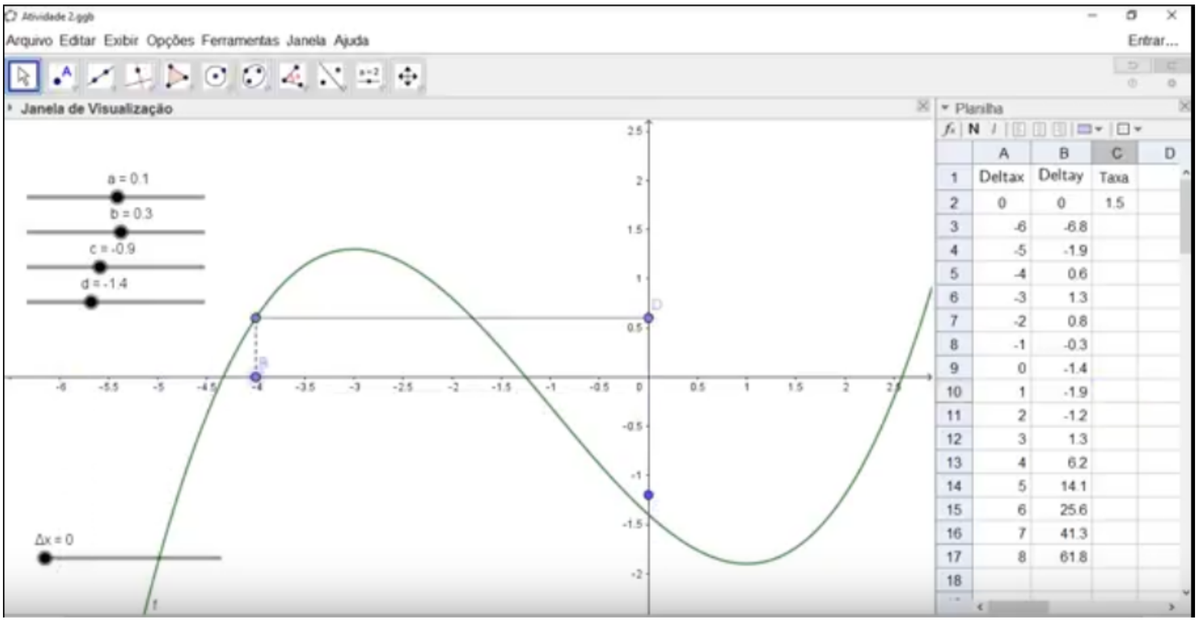
Figura 65 – Equívoco de Eric associado a uma restrição de natureza semântica no Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Eric também mobilizou a planilha na tentativa de obter mais pontos do gráfico, como referências para o seu esboço do gráfico. Porém ele cometeu outro equívoco: dessa vez, no seu esquema de construção da tabela ao definir uma lista de valores de *x* e f(x), em vez de uma lista de valores de *x* e dos valores inferidos para $\Delta y/\Delta x$ (Figura 66). Ele percebeu o seu erro ao comparar os valores da lista com os valores das coordenadas de *x* e $\Delta y/\Delta x$ no gráfico e na planilha.

Figura 66 – Equívoco de Eric na construção de uma tabela de x e dos valores inferidos de Δy/Δx

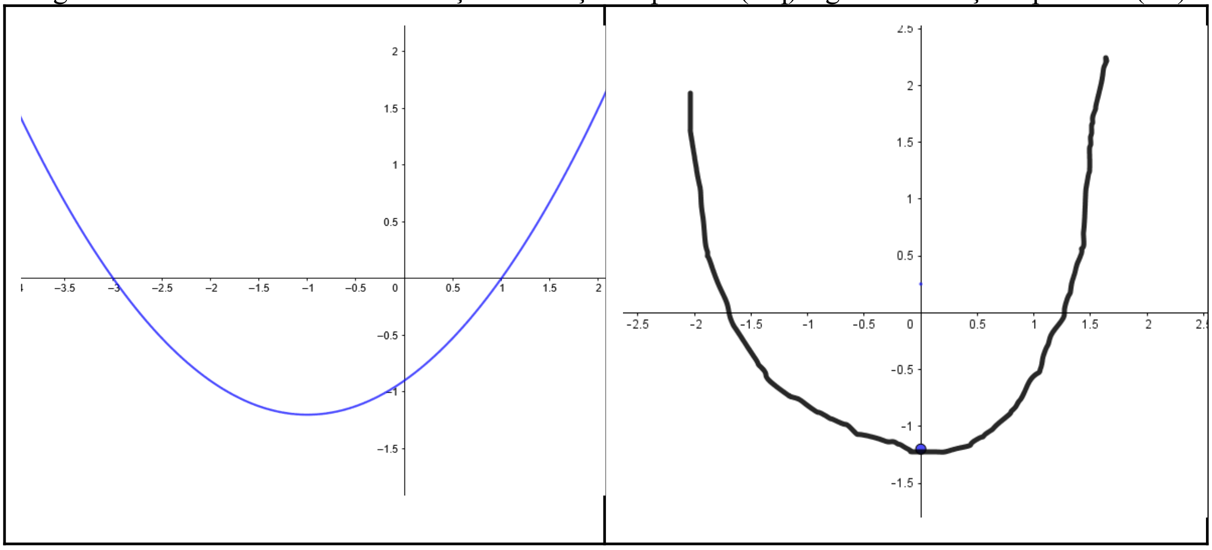


Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

A sequência das ações mostra como Eric descartou a ação de obter mais pontos do gráfico na planilha e esboçou o seu gráfico por um traço contínuo da ferramenta caneta (Figura 67), tomando como referência: (i) a relação de crescimento e decrescimento das variáveis antecipada mentalmente; (ii) os pontos especiais definidos no gráfico; (iii) uma associação com uma forma de gráfico definida, a parábola, por meio da qual o gráfico ganhou um aspecto suave e côncavo para cima, embora Eric não tenha mobilizado invariantes relacionados à variação variável na articulação entre *x* e Δy/Δx no gráfico e na planilha.

> 53. Eric: *Ah, é porque eu tô confuso, misturando a taxa de variação com a própria função f. É verdade. Isso aqui não serve de nada. Pelo menos pra isso que eu quero olhar agora, não.*
> 54. Eric: *Mas é isso, eu tô tentando ser um pouco mais exato, mas eu vou ter um gráfico que vai basicamente decrescer… Não sei bem como...*
> 55. Eric: (Aciona a caneta. Desenha um gráfico com uma forma que lembra uma parábola.) *Ele vai decrescer até aqui e depois vai crescer de novo.*
> 56. Eric: (Varia x_A e x_B do início do intervalo até o final, com uma pequena pausa no x do ponto de mínimo. Observa o valor da taxa de variação na planilha e a forma do gráfico da taxa desenhado.) "*Um perfil de parábola… Aqui ó, decresce, decresce, decresce… Aí quando chega em -1,2… Quando a taxa atinge um mínimo de -1,2 começa a crescer.* "
> 57. Eric: "*Então vou fechar nesse gráfico. É intuitivo, dizer que é uma parábola. E aí eu vou deixar aí. (...) Então é isso.*"

Figura 67 – Gráfico da taxa de variação da função explorada(esq) e gráfico esboçado por Eric (dir)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Em síntese, a atividade de Eric foi caracterizada por esquemas que enfatizaram a coordenação da covariação por meio da variação de x_A e x_B no gráfico e a coordenação dos valores de Δy e de Δy/Δx na planilha. As suas inferências envolveram, sobretudo, as relações de crescimento/decrescimento de Δy em função de *x*, sem formalizar a variação variável de Δy. É possível que a dificuldade em visualizar a variação de Δy esteja relacionada à limitação do esquema de Eric para coordenar a variação de Δy com acréscimos constantes em *x*; o seu esquema, além de enfatizar apenas o valor numérico de Δy variando em uma única célula da planilha, também tomou como referência a variação em *x* pontos especiais do gráfico, como na situação 1A.

Eric relacionou de forma satisfatória os aspectos do gráfico, como concavidades, pontos de máximo/mínimo e pontos de inflexão, com a covariação entre *x* e Δy e também entre Δy/Δx e *x*, no contexto da aproximação à taxa instantânea. Duas dificuldades marcaram a exploração de Eric nos dois primeiros itens: (i) a interpretação da variação negativa decrescente, sob uma perspectiva numérica, na qual Eric mostrou uma aparente dificuldade em coordenar uma variação decrescente representada por valores negativos; (ii) um equívoco, posteriormente corrigido por ele mesmo, ao considerar que no ponto de inflexão Δy = 0.

Eric também inferiu como os aspectos do gráfico se relacionam com a variação de Δy quando Δx é muito pequeno, o que deu suporte para ele inferir essas relações para a taxa de variação instantânea. Nesse contexto, ele mostrou uma consciência do papel do Geogebra como um suporte representacional para inferir o que ocorre com a derivada.

Uma restrição ao nível da interface gerou um entrave na atividade de Eric: o conflito teórico computacional relacionado à configuração do número de casas decimais/algarismos significativos na tela exibiu valores inconsistentes do ponto de vista matemático: $\Delta x=0$, $\Delta y=0$ e $\Delta y/\Delta x = m$ (m real). A consciência da restrição, como sendo gerada meramente por uma configuração de exibição, permitiu a Eric superar a aparente contradição matemática.

No esboço do gráfico, o seu esquema foi caracterizado pelas regras de: (i) visualizar intervalos de crescimento/decrescimento, ao variar x_A e x_B e coordenar o valor numérico de $\Delta y/\Delta x$ na planilha; (ii) definir pontos especiais do gráfico de $\Delta y/\Delta x$, como zeros e mínimo, associando-os aos pontos de máximo/mínimo e inflexão, respectivamente, da função original *f*; (iii) deslize contínuo com a caneta, associando a forma do gráfico a um gráfico de uma função conhecida.

Apesar de Eric, no segundo item, ter inferido uma imagem contínua do crescimento/decrescimento de $\Delta y/\Delta x$ com relação a *x*, o fato de ele não ter mobilizado regras e inferências relacionadas à variação variável da taxa levou a que o seu desenho do gráfico não tenha sido baseado na coordenação da variação variável de $\Delta y/\Delta x$. Embora ele tenha associado as concavidades do gráfico da função original *f* com uma variação crescente ou decrescente de $\Delta y/\Delta x$, a visão de $\Delta y/\Delta x$ como meramente crescente ou decrescente, no terceiro item, não foi suficiente para Eric associar esse comportamento a um gráfico côncavo para cima ou para baixo, porque ele não quantificou a forma como $\Delta y/\Delta x$ crescia ou decrescia (uma função crescente pode ter variação constante ou variável).

Dessa forma, o aspecto contínuo suave e côncavo para cima do gráfico de Eric foi obtido a partir de uma combinação entre as suas regras e inferências mobilizadas: a definição dos intervalos de crescimento e decrescimento; a definição de pontos especiais do gráfico e, por fim, por uma associação com a forma de um gráfico conhecido: a parábola.

A situação de esboçar o gráfico fez emergir dois equívocos de Eric, ambos possivelmente influenciados pelo fato de que estava em jogo uma covariação complexa e pelo aspecto semântico de *y* como representando, ora a função *f*, ora a função $\Delta y/\Delta x$: (i) o equívoco ao determinar o valor do x_{MIN} da função taxa de variação como sendo zero; (ii) o equívoco ao definir uma tabela de valores de *x* e $\Delta y/\Delta x$, como sendo construídas, na verdade, com valores de *x* e *y*, com *y* representando a coordenada da função *f*.

Quanto aos demais aspectos relacionados à transposição informática que influenciaram ou não a atividade e o raciocínio covariacional de Eric, destacam-se:

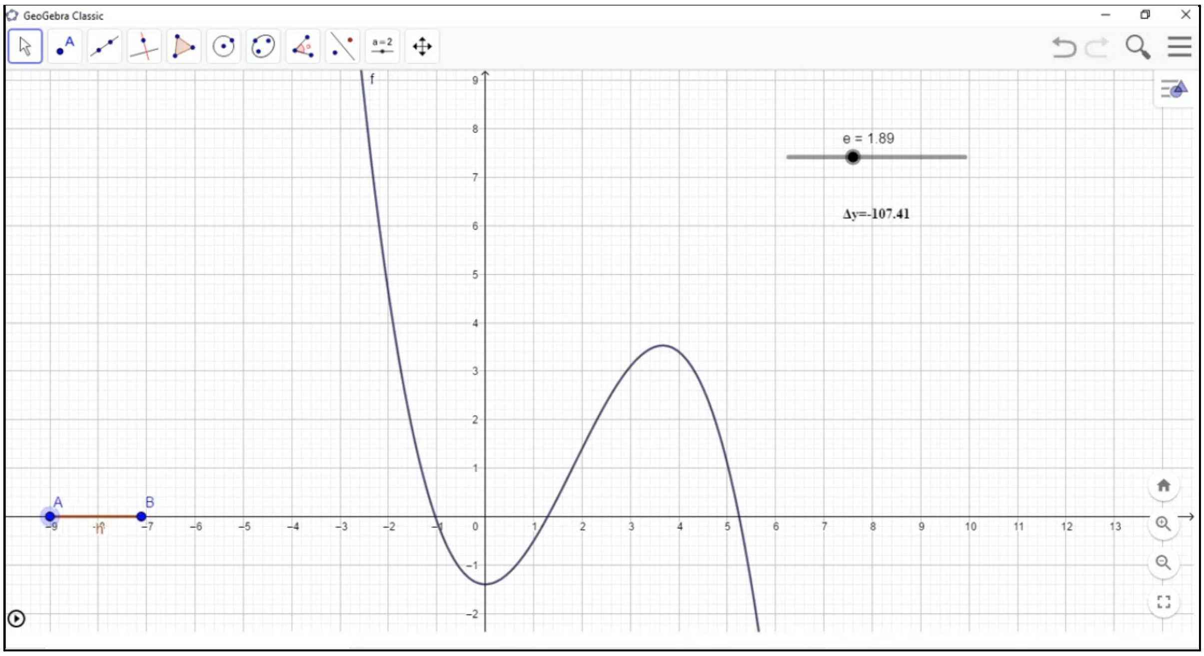
- A disponibilidade da representação numérica da variação de Δy e $\Delta y/\Delta x$ levou Eric a direcionar as suas ações nessa representação, em detrimento do segmento dinâmico que representa Δy no gráfico;
- O foco de Eric, em uma articulação entre os valores de *x* no gráfico e a representação numérica da planilha (em vez de uma ênfase unicamente nos pontos como variáveis), pode estar relacionado à ausência da referência ao significado da variação como velocidade;
- A dificuldade com a variação decrescente negativa foi vivenciada (e superada) por Eric no contexto da representação numérica, embora essa dificuldade tenha sido prevista na análise *a priori* apenas no contexto da representação por segmentos dinâmicos;
- O foco apenas na observação da variação do valor de Δy e $\Delta y/\Delta x$ conforme *x* varia e a não-mobilização por Eric, de ferramentas de suporte a coordenação da variação em Δy e $\Delta y/\Delta x$ com acréscimos constantes em *x*, como as marcações nos eixos, a malha, ou uma lista de valores de *x* e *y* e da sua variação, pode ter impactado na sua limitada visualização da variação variável, sobretudo, para esboçar o gráfico da taxa de variação;
- Na abordagem da taxa de variação para valores muito pequenos de Δx, a restrição da configuração do número de casas decimais e algarismos significativos na interface provocou um conflito teórico-computacional com impacto na atividade de Eric, que superou o entrave apenas após interpretar o conflito como um problema de exibição de valores na interface apenas, sem impacto nos valores matemáticos operados pelo Geogebra;
- O aspecto semântico da variável *y,* concebida por Eric na definição de coordenadas ou na construção de tabelas, foi confuso pra ele, pois – no contexto da covariação complexa – y esteve associado tanto à função *f*, em um momento, quanto à função taxa de variação, em outro momento;
- A mobilização, por parte de Eric, de diferentes ferramentas e regras de ação para esboçar o gráfico mostrou que sua gênese instrumental em andamento envolveu a integração entre esquemas convencionais de correspondência baseados no ambiente papel e lápis, como definir pontos no gráfico e esquemas baseados na imagem da

covariação, como a antecipação dos intervalos de crescimento/decrescimento como referência para o posterior traçado do gráfico com a caneta.

4.6.2 Análise da atividade de Alice na situação 2

Conforme facultado aos estudantes, Alice escolheu construir o seu próprio material para explorar a situação 2, seguindo as instruções dadas na ficha *online.* O gráfico da função e o material construído por Alice são exibidos na Figura 68.

Figura 68 – Material construído por Alice para a situação 2



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

No primeiro item[4], as regras de ação e tomada de informação do esquema de Alice envolveram escolher o valor de Δx no controle deslizante, variar x_A e x_B no gráfico e coordenar a variação do valor de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy. As regras de controle envolveram a variação manual das variáveis e a segmentação da variação tomando por referência pontos de mínimo, máximo e inflexão; entretanto, de forma mediada pelo valor de Δy na caixa de texto.

[4] Defina um valor para Δx e varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente. Responda: a - Descreva como a variação Δy (variação no eixo y) varia em função dos valores assumidos por x_A e x_B. Teste outros valores de Δx e descreva o comportamento de Δy; b - Como a variação Δy se comporta quando a concavidade do gráfico é voltada para cima? E quando é voltada para baixo? E nos pontos de máximo, mínimo e inflexão?

A disponibilidade da representação numérica na caixa de texto que exibiu o valor numérico de Δy e, posteriormente, na planilha (valores de Δx, Δy e Δy/Δx), assim como no caso de Eric, levou a uma ênfase do esquema de Alice nesse tipo de representação, em detrimento à representação da variação por meio do segmento dinâmico. Assim como Eric, Alice também não fez referência à variação em Δy representada pelo segmento dinâmico no gráfico.

As inferências geradas por Alice, a partir desse esquema, envolveram descrições em termos do crescimento ou decrescimento de Δy em função de *x*, com pouca referência a como Δx influenciou nessa relação e sem dar conta da quantificação da forma como Δy variou:

> 4. Alice: (Varia x_A e x_B simultaneamente, a partir do início do intervalo exibido na tela, e observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy) *Então… Variando esses pontos para o sentido positivo do eixo x a gente consegue observar ali onde mostra o Δy que, essa variação ela é negativa, porém ela é crescente… Ela vai se aproximando lá da origem e vai crescendo, crescendo, crescendo... Continua crescendo, e vai se aproximando do zero...*
> 5. Alice: (Varia x_A e x_B próximo aos valores para os quais Δy=0 (mínimo da função). Repete o procedimento algumas vezes, nos dois sentidos. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy) *Se aproxima do zero se aproxima do zero... por aqui mais ou menos tem uma mudança de sinal, essa variação é negativa, e passa a ser positiva porém crescente ainda. Mesmo negativa ela é crescente e continua sendo crescente.*
> 6. Alice: (Varia x_A e x_B de próximo do x_{MIN} até próximo ao $x_{INFLEXÃO}$. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy) *Continua crescendo… Até mais ou menos por aqui…* (Refere-se ao ponto de inflexão).
> 7. Alice: (Varia x_A e x_B de próximo do $x_{INFLEXÃO}$ até próximo do x_{MAX}. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy) *Ela é crescente e novamente volta a decrescer... Volta a decrescer, continua com sinal positivo e...*
> 8. Alice: (Varia x_A e x_B de próximo do x_{MAX} até o final do intervalo exibido na tela. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy) *… A partir de um ponto mais ou menos por aqui (refere-se ao ponto de máximo), esse decrescimento tinha sinal positivo e agora passa a ter um sinal negativo e continua decrescendo. Então é isso.*
> 9. Alice: *Aí eu coloquei aqui* (na ficha online)*, que considerando a variação dos pontos no eixo x pra o sentido positivo do eixo o y tem uma variação crescente até um determinado ponto e em seguida a sua variação passa a ser decrescente.*

O fato de Alice explorar a variação de Δy sem o suporte de ferramentas que permitissem coordenar a variação de Δy, pode ter dificultado que ela quantificasse de forma suficiente a variação variável de Δy. Por outro lado, Alice não teve problemas quando explorou a variação negativa de Δy. Aparentemente, os seus esquemas de exploração envolveram possíveis conceitos e teoremas em ação consolidados nesse sentido: "*Mesmo negativa ela é crescente e continua sendo crescente.*" (Alice, situação 2).

No item 1.b, aspectos do gráfico, como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão foram satisfatoriamente interpretados por Alice em termos de como Δy variou em função de *x*. Embora ela não tenha quantificado a forma como Δy variou, sua observação foi suficiente para interpretar os aspectos do gráfico dando conta apenas de Δy como crescente ou decrescente:

> 12. Alice: (Varia x_A e x_B do início até o final do intervalo exibido na tela, com uma pequena pausa próximo ao $x_{INFLEXÃO}$. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy. Repete o procedimento algumas vezes) *Então aqui, vamos olhar as concavidades, tem concavidade voltada para cima aqui, concavidade voltada para baixo aqui. E como a gente já tinha visto, onde a concavidade é voltada para cima, a gente tem uma variação crescente em Δy. Ela é crescente... E, quando a concavidade é voltada pra baixo, ela passa a ser decrescente. Essa mudança acontece mais ou menos por aqui, que é onde tem um ponto de inflexão, então esse ponto de inflexão é o responsável por mudar a concavidade, alterar concavidade, né? se a gente tem uma concavidade voltada para cima, ela passa a ser voltada para baixo.. e ocorre essa mudança. A variação em Δy vem sendo crescente até esse ponto de inflexão, onde há a mudança da concavidade e a partir daqui ela passa... a variação passa a ser decrescente.*
> 13. Alice: (Varia x_A e x_B próximo aos valores do x_{MIN}. Repete o procedimento algumas vezes, nos dois sentidos. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy) *Deixa eu ver mais o quê... os pontos de máximo e mínimo… No ponto de... nesse ponto de mínimo, ele... Se aproxima, né? Se aproxima de zero no ponto de mínimo, e por aqui acontece a mudança de sinal. Ele vem crescendo, só que com o sinal negativo e mais ou menos por aqui tem essa mudança de sinal. Continua crescendo só que o sinal se altera e passa a ser positivo. Então eu diria que esse ponto de mínimo é o responsável por alterar o sinal dessa variação ...*
> 14. Alice: (Varia x_A e x_B de próximo do x_{MIN} até um pouco depois do x_{MAX}. Observa a variação de Δy na caixa de texto que exibe o valor de Δy. Repete o procedimento algumas vezes, nos dois sentidos) *E a mesma coisa para o ponto de máximo... Aqui eu venho crescendo né, até o ponto de inflexão, a partir do ponto de inflexão essa variação em Δy passa a ser decrescente e... Só que, ela tem um sinal positivo até esse ponto de... Até chegar mais ou menos nesse ponto de máximo e mudar o sinal... Então, eu acredito que é isso.*
> 15. Alice: *Coloquei aqui: Quando a concavidade é voltada para cima o Δy é crescente. Voltada para baixo o Δy é decrescente. Nos pontos de máximo e mínimo acontece a mudança de sinal na variação de y. O ponto de inflexão*

> *altera a concavidade, na função observada Δy é crescente e passa a ser decrescente a partir do ponto de inflexão.*

No segundo item[5], Alice demonstrou um progresso na sua gênese da planilha, com a mobilização de esquemas para a construção e a exploração da ferramenta e o domínio da sintaxe específica da planilha:

> 17. Alice: (Abre a planilha)
> 18. Alice: (Cria os rótulos para Δx, Δy e para a taxa de variação.)
> 19. Alice: (Define na planilha: Δy = f(x(B))-f(x(A)), na célula B2; Δx = x(B)-x(A), na célula A2; Δy/Δx = B2/A2, na célula A3)

Quando Alice reduziu o valor de Δx para simular a representação da taxa instantânea, observar os valores de Δx e Δy exibidos como zero na tela não foi um problema para ela: "*Coloquei um valor bem pequeno e aqui ele... O geogebra, ele considera como fosse o 0 (...) Fica como se fosse zero...*" (Alice, situação 2). A sua fala indica que ela tinha consciência de que os valores apenas estavam sendo exibidos como zero na tela, mas, na verdade, eram valores diferentes de zero, por isso, o conflito teórico-computacional entre os valores de Δx, Δy e Δy/Δx não foi problemático para ela.

Após escolher o valor de Δx pequeno o suficiente, Alice mobilizou as mesmas regras de ação do item 1 para estender as suas inferências sobre a variação em Δy para a taxa de variação instantânea, porém, assim como no item anterior, as suas inferências foram limitadas a descrever a taxa de variação como crescente ou decrescente, sem quantificar a forma como esse crescimento/decrescimento se deu.

> 25. Alice: (Varia x_A e x_B do início até o final do intervalo exibido na tela, com pequenas pausas próximo ao x_{MIN} e ao $x_{INFLEXÃO}$. Observa a variação de Δy/Δx na planilha) *E ... deixa eu ver... Então a taxa de variação é negativa, porém crescente, ela cresce... Cresce... Se aproxima de zero, também chega a zero, continua crescendo, cresce... Até aqui ó, ponto de inflexão, né? E volta a decrescer. Isso! Então ela cresce até determinado ponto e depois decresce.*
> 26. Alice: (Enuncia a resposta do item 2.a) *A taxa de variação é crescente até um determinado ponto, logo após passa a ser decrescente.*

[5] Escolha Δx pequeno o suficiente (por exemplo Δx = 0.0001), varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente e responda: a- Observe a variação do valor de Δy/Δx. Como a taxa de variação varia em função de x para a função dada? ; b - Como a variação de Δy/Δx se relaciona com aspectos do gráfico da função? (concavidades, pontos de máximo e mínimo, pontos de inflexão); c- Que relação há entre Δy/Δx e a derivada da função?

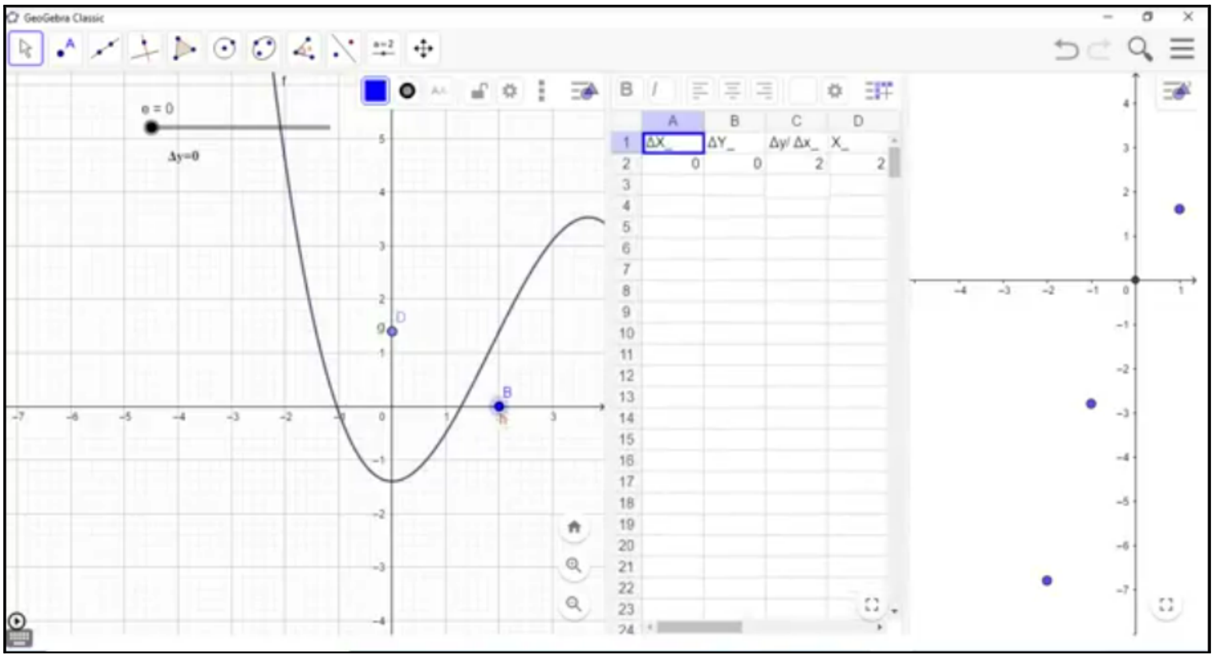
Alice também descreveu satisfatoriamente os aspectos do gráfico em termos de uma taxa crescente ou decrescente:

> 28. Alice: (Varia x_A e x_B do início até o final do intervalo exibido na tela, com pequenas pausas próximo ao x_{MIN}, $x_{INFLEXÃO}$ e x_{MAX}. Observa a variação de $\Delta y/\Delta x$ na planilha) *É... concavidade, quando a concavidade é voltada pra cima, a gente tem aquela mesma situação da questão anterior, concavidade voltada pra cima, ele é crescente, crescente… É crescente com a concavidade voltada pra cima, certo? No ponto de mínimo, não tem variação, a variação é nula, continua crescendo até o ponto de inflexão, no ponto de inflexão tem essa mudança… Muda a concavidade, então muda a taxa de variação, pra cima é crescente, quando muda a concavidade ela passa a ser decrescente. E aqui no ponto de máximo… Deixa eu ver… não tô conseguindo* (não consegue posicionar x_A e x_B de forma a obter $\Delta y/\Delta x=0$ na planilha)*, mas provavelmente ele chega a zero também, é ele chega a zero e depois vai mudar de sinal, continua decrescendo, é isso.*

No terceiro item[6], as regras do esquema de Alice, para esboçar o gráfico de $\Delta y/\Delta x$, envolveram: (i) gerar uma lista de valores de *x* e $\Delta y/\Delta x$ na planilha a partir da variação de x_A e x_B no gráfico e da obtenção do valor de $\Delta y/\Delta x$; (ii) definir os pontos da lista no gráfico; (iii) desenhar a curva que representa o gráfico de $\Delta y/\Delta x$ com a caneta, descrevendo a trajetória dos pontos definidos. A lista de valores de de *x* e $\Delta y/\Delta x$, criada por Alice, envolveu a regra de tomar valores de *x* (no caso x_B) com acréscimos constantes: -2, -1, 0, 1, 2, uma regra convencional da construção de tabelas de funções que pode promover, de forma limitada, uma visão covariacional (Figura 69).

[6] A partir do gráfico da função, esboce um gráfico que representa a taxa de variação em função de *x*. Justifique a forma do gráfico da taxa de variação relacionando-o com o gráfico da função.

Figura 69 – Processo de construção do gráfico por Alice na situação 2

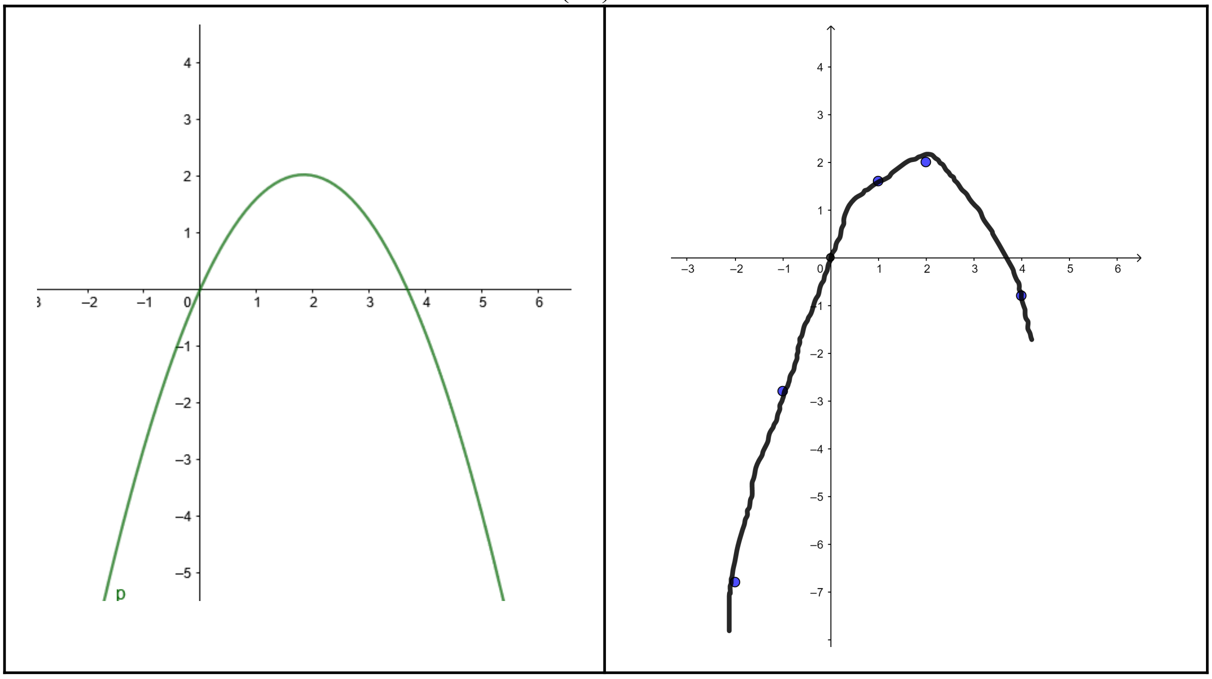


Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

No esboço do gráfico (Figura 70), não houve referência aos aspectos da covariação entre *x* e Δy/Δx nos componentes do esquema de Alice ou na sua fala, nem mesmo o crescimento/decrescimento da taxa em função de *x*. O seu esquema para esboçar o gráfico foi semelhante ao esquema convencional desenvolvido no ambiente de papel e lápis. As suas inferências refletiram essa ausência, pois a sua fala final – embora tenha relacionado coerentemente o gráfico de Δy/Δx com a derivada da função – limitou-se a uma perspectiva formal e procedimental do cálculo da derivada da função e a uma associação com uma forma de gráfico conhecida, a parábola:

> 45. Alice: (Traça novamente o gráfico por um deslize contínuo passando pelos pontos definidos no gráfico) *Começar por aqui... Aí... Uma... É algo parecido com uma parábola, meu desenho não tá muito não, mas... Acho que seria isso...*
> 46. Alice: *E eu não tinha pensado, faz sentido ser uma parábola, já dava pra a gente perceber sem ter feito isso, já que, como isso aqui tá próximo de zero* (refere-se a *Δx*) *e a gente tá desenhando x em função da taxa de variação, essa taxa de variação é o que? A derivada! E quando a gente deriva uma função de grau 3, a gente tem uma função de grau 2. Não tinha pensado nisso ainda. Deixa eu pegar aqui a imagem pra colocar lá na resposta. E agora? Acho que aqui... Não sei se a ideia era essa, mas...*

Figura 70 – Gráfico da taxa de variação da função explorada por Alice (esq) e gráfico esboçado por ela (dir)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Em síntese, a atividade de Alice foi caracterizada por esquemas que enfatizaram a coordenação da covariação por meio da variação de x_A e x_B no gráfico e a coordenação dos valores de Δy e de Δy/Δx na caixa de texto e na planilha. Embora ela tenha explicitado poucas vezes todas as variáveis envolvidas na covariação complexa entre *x*, Δx e Δy, essas referências mostraram que ela tinha consciência sobre o que estava variando.

As suas inferências, assim como as de Eric, envolveram relações de crescimento/decrescimento de Δy em função de *x*, porém sem quantificar explicitamente à variação variável de Δy. Isso reforça a ideia de que a dificuldade em visualizar como Δy varia está relacionada à limitação em coordenar a variação de Δy com acréscimos constantes em *x*, pois o seu esquema apenas enfatiza a coordenação do valor numérico de Δy variando em uma única célula da planilha ou na caixa de texto. Alice também tomou como referência a variação em *x* pontos especiais do gráfico: pontos de mínimo, máximo e inflexão (ela não incluiu os zeros da função como referência).

Alice relacionou, de forma satisfatória, os aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo/mínimo e pontos de inflexão com a covariação entre x e Δy. Ela não mostrou dificuldades em inferir essas relações a partir do seu esquema de exploração do gráfico. Alice também inferiu como os aspectos do gráfico se relacionam com a variação de

Δy quando Δx é muito pequeno, o que deu suporte para inferir essas relações para a taxa de variação instantânea.

No esboço do gráfico, o esquema de Alice foi caracterizado pelas seguintes regras: (i) gerar uma lista de valores de *x* e $\Delta y/\Delta x$; (ii) definir os pontos da lista no gráfico; (iii) desenhar a curva que representa o gráfico de $\Delta y/\Delta x$ por um deslize contínuo da caneta, aproximando a trajetória dos pontos e associando a curva à forma de um gráfico conhecido (parábola). Um esquema semelhante ao esquema convencional de correspondência desenvolvido no ambiente de papel e lápis, por meio do qual Alice não fez referências explícitas à forma como $\Delta y/\Delta x$ variou em função de x.

Uma consideração importante é que, nas situações de exploração e descrição da covariação entre *x* e $\Delta y/\Delta x$ nos itens 1 e 2, Alice relacionou os diferentes aspectos do gráfico (concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão) com o crescimento ou decrescimento de Δy e $\Delta y/\Delta x$ (variação crescente, decrescente, nula, etc), porém na situação de esboçar o gráfico, Alice não integrou essas inferências à forma do seu gráfico. Duas possibilidades são razoáveis para explicar esse fato: (i) o esquema convencional de esboço do gráfico ainda era mais seguro para Alice; (ii) a ausência, nos dois primeiros itens, de inferências relacionadas à variação variável de Δy e $\Delta y/\Delta x$, dificultou a tradução desse aspecto na forma do gráfico.

Quanto aos demais aspectos relacionados à transposição informática que influenciaram ou não a atividade e o raciocínio covariacional de Alice, destacam-se:

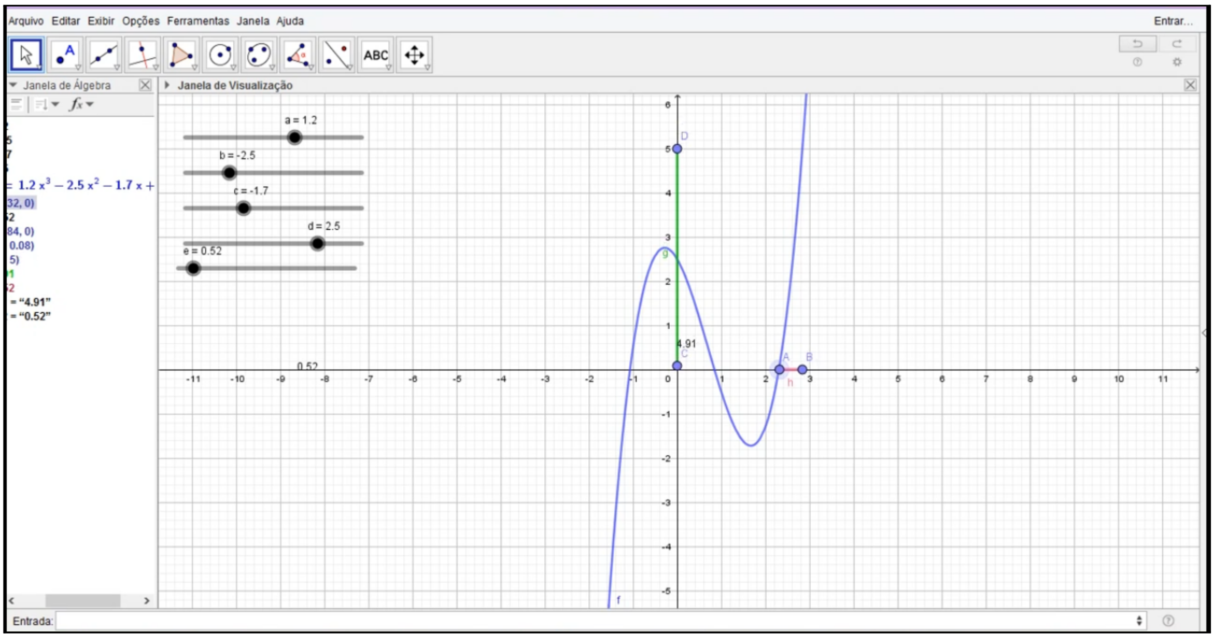
- A disponibilidade da representação numérica da variação de Δy e $\Delta y/\Delta x$ levou Alice, assim como Eric, a focar unicamente nessa representação, em detrimento do segmento dinâmico que representou Δy no gráfico;
- O foco de Alice em uma articulação entre os valores de *x* no gráfico e a representação numérica da planilha (em vez de uma ênfase unicamente nos pontos como variáveis), pode estar relacionado à ausência de referência ao significado da variação como velocidade;
- O foco apenas na variação do valor de Δy e $\Delta y/\Delta x$ conforme *x* varia e a não-mobilização por Alice de ferramentas de suporte a coordenação da variação em Δy e $\Delta y/\Delta x$ com acréscimos constantes em *x* (como as marcações nos eixos, a malha, ou uma lista de valores de *x* e *y* e da sua variação) pode ter impactado na sua limitada visualização da variação variável, sobretudo, para esboçar o gráfico da taxa de variação;

- A mobilização, por Alice, de ferramentas e regras de ação convencionais do ambiente papel e lápis mostrou que sua gênese instrumental em situações de esboço do gráfico ainda era limitada covariacionalmente;

4.6.3 Análise da atividade de Louise na situação 2

Conforme facultado na orquestração da sessão 5, Louise escolheu construir o seu próprio material para explorar a situação 2, seguindo as instruções dadas na ficha *online.* O gráfico da função e o material construído por Louise são exibidos na Figura 71.

Figura 71 – Material construído por Louise na situação 2



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

No primeiro item[7], as regras de ação, controle e tomada de informação do esquema de Louise envolveram escolher o valor de Δx no controle deslizante, variar x_A e x_B no gráfico em ambos os sentidos do eixo *x* e coordenar a variação do valor de Δy por meio do segmento dinâmico e pela caixa de texto que exibe o valor de Δy. As regras de controle envolveram a

[7] Defina um valor para Δx e varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente. Responda: a - Descreva como a variação Δy (variação no eixo y) varia em função dos valores assumidos por x_A e x_B . Teste outros valores de Δx e descreva o comportamento de Δy; b - Como a variação Δy se comporta quando a concavidade do gráfico é voltada para cima? E quando é voltada para baixo? E nos pontos de máximo, mínimo e inflexão?

variação manual das variáveis e a segmentação da variação tomando por referência os zeros da função.

As inferências de Louise, a partir da mobilização desse esquema, envolveram descrições em termos do crescimento ou decrescimento e, peculiarmente a Louise, do sinal de Δy em função de *x* que, em algumas vezes, foi mais enfatizado que as relações de crescimento/decrescimento. Louise fez referência a como o valor de Δx influenciou na variação de Δy, entretanto, sem quantificar a variação variável de Δy (assim como Eric e Alice, Louise não mobilizou ferramentas que permitissem coordenar a variação de Δy com acréscimos constantes em *x*):

> 4. Louise: (Varia simultaneamente x_A e x_B, nos dois sentidos do eixo *x*, a partir do último zero da função. Observa a variação do comprimento do segmento associado a Δy e o seu valor na caixa de texto) *A gente vê ó, quando o A se aproxima daqui onde a função tem uma raiz, né? O Δy é positivo e crescente ó ... A gente vê, ele vai crescendo. Até a gente não ver mais.* (Refere-se ao intervalo no qual do segmento associado a Δy sai da área de exibição da tela)
> 5. Louise: (Varia simultaneamente x_A e x_B, nos dois sentidos do eixo *x*, entre os zeros da função nos quais a concavidade é voltada para cima. Observa a variação do comprimento do segmento associado a Δy e o seu valor na caixa de texto) *Se a gente ficar aqui ó… onde a concavidade é pra baixo… Essa é a parte onde é… o Δy é negativo, que o D troca com o C.*
> 6. Louise: (Varia simultaneamente x_A e x_B, da direita para a esquerda - sentido não convencional, entre o último zero da função e o início do intervalo exibido na tela. Observa a variação do comprimento do segmento associado a Δy e o seu valor na caixa de texto) *Quando chega aqui no 1 ó… Nessa outra raiz, aí ele começa a crescer, até ele chegar ali no ponto, né? De… inflexão… Que é quando ele troca de sinal, aí ele começa a ir pro lado negativo do y, só que é uma taxa de variação crescente. A gente pode ver, 5 e 31, 5 e 62, 5 e 78, mesmo estando do lado negativo do y é uma taxa de variação crescente.*

A regra de ação e controle de Louise – que envolveu variar x_A e x_B em ambos os sentidos do eixo *x* (sentido convencional e não-convencional) – merece um destaque, pois está associada a um equívoco cometido por ela. É provável que o teorema-em-ação, mobilizado por Louise ao coordenar a variação em Δy com a variação de x_A e x_B, envolveu observar se Δy é crescente/decrescente, porém sem considerar a variação em *x*; assim, Louise cometeu o equívoco de considerar Δy como crescente em um intervalo no qual a concavidade era voltada para baixo, porque ela variou x_A e x_B no sentido não-convencional, da direita para a esquerda: "*Sempre tá crescendo. Deixa eu ver aqui… Ele tá crescendo… crescendo… crescendo.*" (Louise, situação 2).

A resposta de Louise ao item 1 na ficha *online* corrobora com os aspectos elencados na análise da sua exploração, embora alguns termos pareçam confusos. Suas descrições enfatizaram mais o sinal da variação Δy do que a forma como ela varia:

> Para Δx=0.1 quando Xa e Xb variam positivamente o Δy em certo ponto é negativo e depois começa a crescer rapidamente. Já quando o Xa e Xb variam negativamente o Δy é negativo em toda sua extensão (isso quer dizer que ele está no lado negativo do y, porém a variação é positiva. Quando aumentamos o Δx a variação Δy continua no mesmo sentido, porém com valores maiores, visto que os pontos de x estão atrelados aos de y. (LOUISE, situação 2)

No item 1.b, quando Louise foi solicitada a relacionar a variação de Δy com aspectos do gráfico como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão, as regras que integraram o seu esquema tomaram como referência os zeros da função, em vez dos valores de *x* envolvidos nos aspectos do gráfico, como x_{MAX}, x_{MIN} e $x_{INFLEXÃO}$; isso foi particularmente problemático quando ela analisou a variação de Δy em função das concavidades, pois, os zeros da função não coincidiam com a mudança de concavidades. Um equívoco gerado foi considerar que a variação em Δy com a concavidade voltada para cima, tinha um intervalo crescente e um decrescente:

> 13. Louise: (Varia simultaneamente x_A e x_B, entre os zeros da função para os quais a concavidade é voltada para baixo. Observa a variação de Δy valor na caixa de texto) *Quando a concavidade é voltada para baixo a gente tem uma taxa de variação pra Δy que a gente começa 2,32 menos 2,9 decrescente.. E depois ela começa a crescer novamente, porém…* (pausa a gravação)
> 14. Louise: (Varia simultaneamente x_A e x_B, entre os zeros da função para os quais a concavidade é voltada para baixo. Observa a variação de Δy na caixa de texto e por meio do segmento dinâmico) *É, como eu falei né? Ela começa decrescendo e depois ela vai crescendo Δy a gente pode ver por esses dois segmentos…*

Ao analisar a variação de Δy para os pontos de máximo e mínimo, Louise, na verdade, descreveu o que ocorre na vizinhança desses pontos; suas inferências não envolveram o conceito de máximo e mínimo como pontos nos quais Δy=0:

> 15. Louise: (Aproxima x_A do x_{MAX} e varia x_A e x_B nos dois sentidos do eixo

> x, próximo ao x_{MAX}. Observa a variação de Δy na caixa de texto e na planilha.) *É, agora é pra gente olhar os pontos de máximo, os pontos de mínimo e de inflexão. Aqui no ponto de máximo, que é aqui, pra essa função com esses valores que eu coloquei… (interferência externa) No ponto de máximo aqui… Se aproximando do ponto de máximo, essa função é decrescente, e no ponto de mínimo, ela é crescente. Ponto de máximo decrescente e ponto de mínimo...*

As inferências de Louise foram particularmente problemáticas para o comportamento de Δy no ponto de inflexão. Após explorar o gráfico, ela definiu esse ponto como sendo o ponto onde a função principal deixa de ser crescente e passa a ser decrescente, por isso, ela considerou que a função não tinha pontos de inflexão, porque tal comportamento, segundo ela, já estaria representado nos pontos de máximo.

> 16. Louise: (Varia simultaneamente x_A e x_B, entre os zeros da função. Observa a variação de Δy na caixa de texto e por meio do segmento dinâmico) *Creio que aqui não tenha pontos de inflexão… Eu falei que tinha, eu acho, no começo, mas agora acho que não, porque o ponto de inflexão é quando a função deixa de ser crescente e passa a ser decrescente, isso acontece justamente nos pontos de máximo e de mínimo.* (desliga a gravação).

O equívoco de Louise com relação ao ponto de inflexão pode ter duas influências: (i) uma concepção equivocada matematicamente de ponto de inflexão; (ii) a complexidade em interpretar o que estava variando; o comportamento que Louise atribuiu à função no ponto de inflexão, na verdade tem relação com o comportamento da variação Δy no ponto de inflexão (Δy alterna de decrescente para crescente, e vice-versa), assim, ter confundido a função com a variação Δy também pode ter sido a origem do equívoco dela.

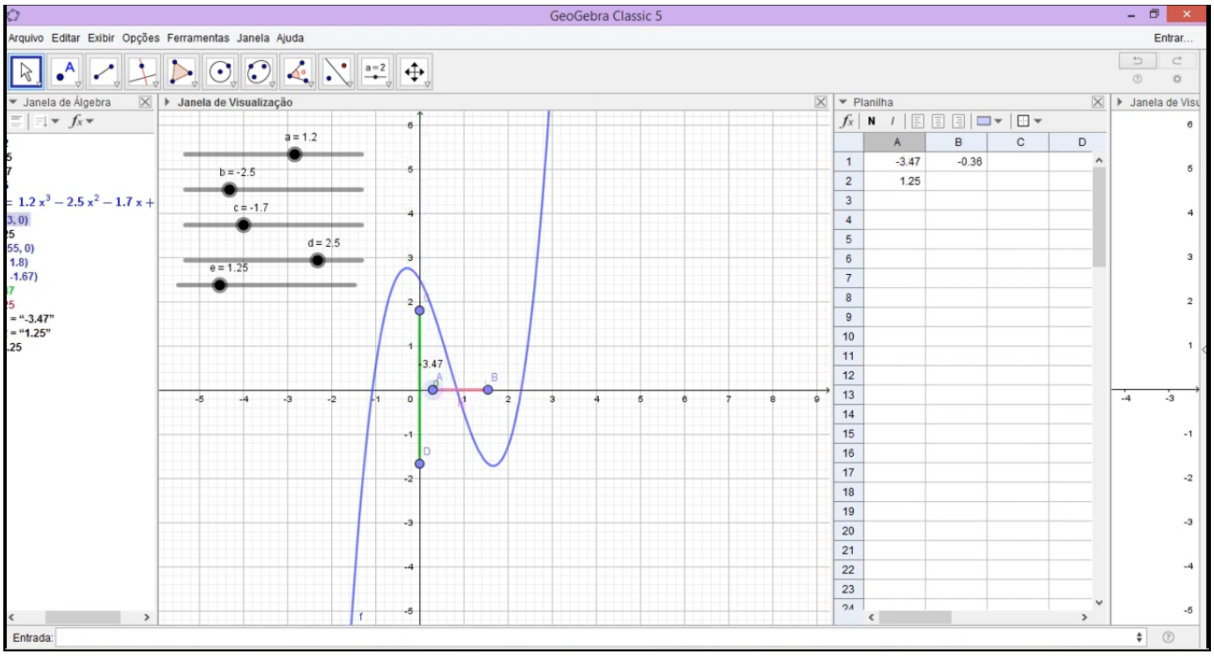
Louise não gravou a sua resolução do item a da segunda questão[8]. O vídeo da sua resolução avança diretamente para o item 2.b. Além disso, ela respondeu ao item b como se ainda estivesse explorando o item 1, com o mesmo valor de Δx, portanto, as suas respostas não puderam ser consideradas como relacionadas à taxa de variação instantânea, o objeto das inferências esperadas no item 2.

---

[8] Escolha Δx pequeno o suficiente (por exemplo $\Delta x = 0.0001$), varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente e responda: a- Observe a variação do valor de $\Delta y/\Delta x$. Como a taxa de variação varia em função de x para a função dada?; b - Como a variação de $\Delta y/\Delta x$ se relaciona com aspectos do gráfico da função? (concavidades, pontos de máximo e mínimo, pontos de inflexão); c- Que relação há entre $\Delta y/\Delta x$ e a derivada da função?

A passagem do item 1 para o item 2 também marcou uma mobilização mais efetiva da planilha, em vez de apenas os valores na caixa de texto e os segmentos dinâmicos, principalmente para coordenar simultaneamente os valores de Δx, Δy e Δy/Δx. Entretanto, Louise cometeu um equívoco ao definir a fórmula da taxa de variação na planilha. Ela definiu na célula A1 o valor de Δx e na célula A2 o valor de Δy, porém na célula B1, definiu *Δy/Δx* como A2/A1, o que levou ela a fazer inferências sobre a taxa de variação baseadas em valores incorretos (Figura 72).

Figura 72 – Equívoco de Louise na definição da fórmula da taxa de variação na planilha



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

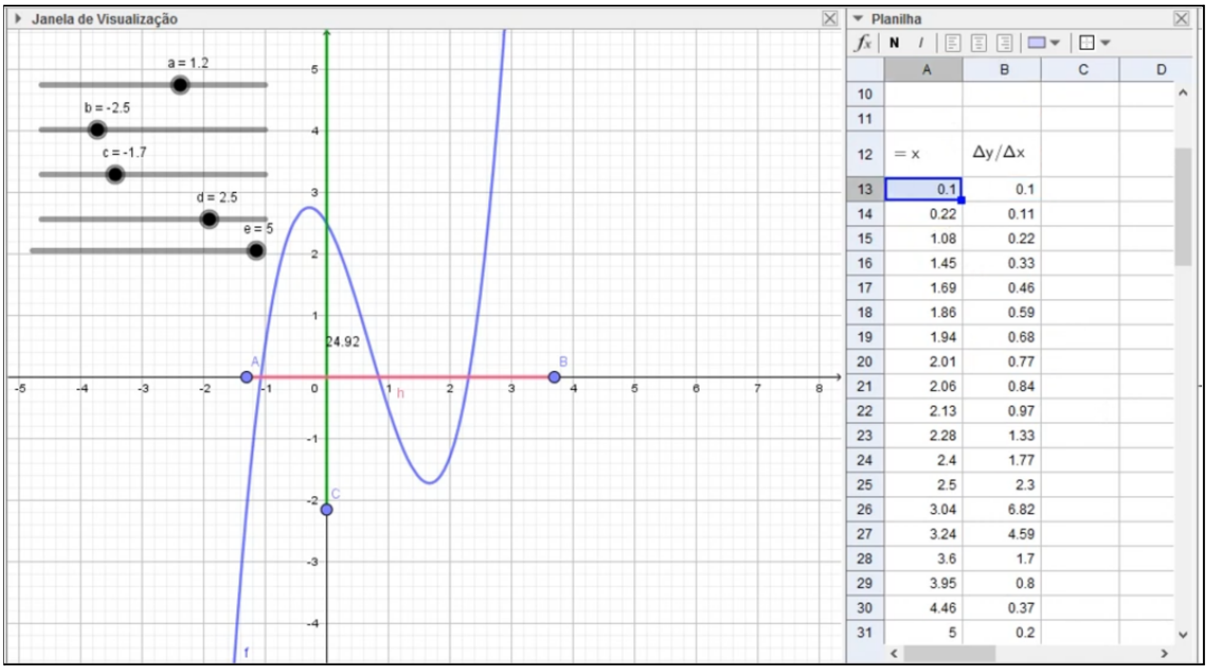
No terceiro item[9], ao ser solicitada a esboçar o gráfico da taxa de variação em função de x, Alice mobilizou regras que envolveram: (i) na planilha, definir uma tabela de valores de x e Δy/Δx; (ii) definir uma poligonal no gráfico com os pontos definidos na planilha; (iii) com base na poligonal definida, desenhar o gráfico de Δy/Δx como um traço contínuo com a caneta. Esse esquema revela uma semelhança com os esquemas convencionais de correspondência mobilizados no ambiente papel e lápis, nos quais os gráficos são esboçados como descrevendo a trajetória de pontos definidos por meio de uma tabela.

Louise não mobilizou aspectos da covariação ao mobilizar essas regras. Contudo, o mais importante é que ela cometeu um equívoco determinante na construção da tabela que

[9] A partir do gráfico da função, esboce um gráfico que representa a taxa de variação em função de x. Justifique a forma do gráfico da taxa de variação relacionando-o com o gráfico da função.

utilizou para definir os pontos que serviriam de referência para o seu esboço. Louise construiu uma tabela de valores de Δx e Δy/Δx (em vez de x e Δy/Δx), ao variar o valor de Δx por meio do controle deslizante 'e' e obter o valor correspondente de Δy/Δx, com x_A fixo (Figura 73).

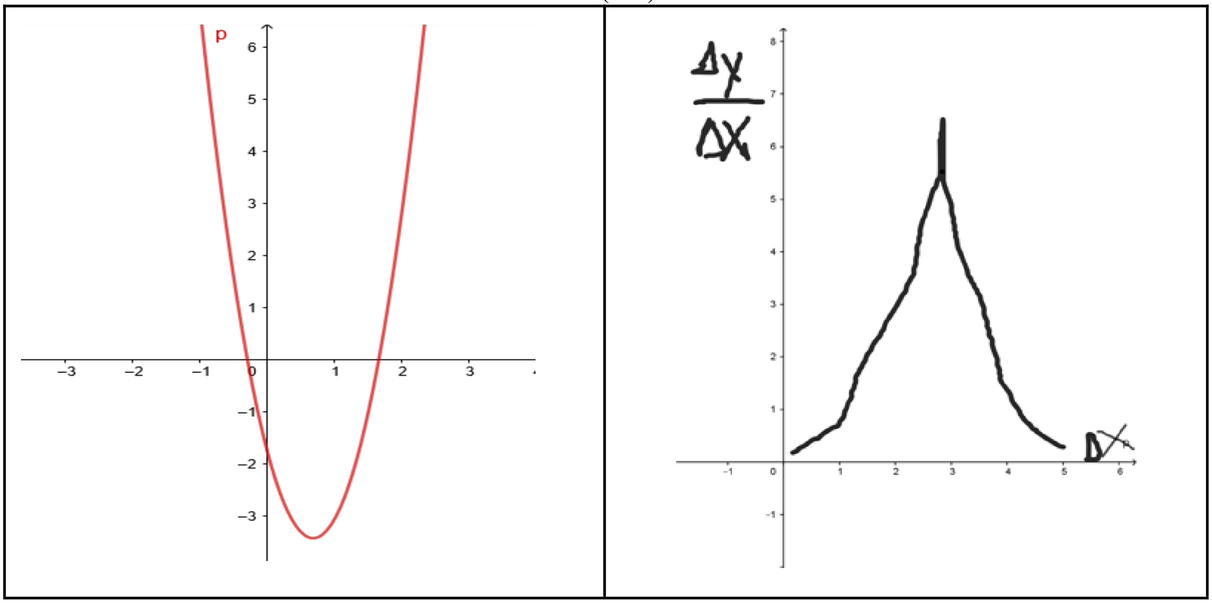
Figura 73 – Equívoco de Louise na construção da tabela de x e Δy/Δx



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

A tabela gerada não representou valores que permitissem inferir o gráfico da taxa de variação em função de *x*, o que é percebido na distinção entre o esboço do gráfico da taxa esperado e o esboço de Louise (Figura 74). É possível que dois aspectos tenham influenciado no equívoco de Louise ao relacionar as variáveis na tabela: (i) ela não construiu uma aproximação à ideia da taxa instantânea ao fazer o valor de Δx pequeno o suficiente; (ii) dada a complexidade da covariação envolvida na construção, Louise pareceu não ter clareza sobre o que estava sendo variado por ela, ao variar o valor de Δx, como no trecho: "*Aqui no nosso geogebra o x que varia é esse 'e' aqui né? Que é a variação do x. Creio eu né?*" (Louise, situação 2).

Figura 74 – Gráfico da taxa de variação da função explorada por Louise (esq.) e gráfico esboçado por ela (dir.)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

Em síntese a atividade de Louise na situação 2 foi caracterizada por esquemas que enfatizaram a coordenação da covariação por meio da variação de x_A e x_B no gráfico e a coordenação dos valores de Δy e de Δy/Δx por meio de diferentes ferramentas: a caixa de texto, os segmentos dinâmicos e a planilha, com uma predominância da mobilização das representações numéricas. Embora ela tenha explicitado nos primeiros itens a consciência das variáveis envolvidas na covariação complexa entre *x*, Δx e Δy, quando a situação envolveu a construção da ideia de taxa de variação instantânea, Louise pareceu não ter clareza sobre o que de fato estava variando.

As inferências de Louise envolveram uma ênfase maior no sinal da variação e depois nas relações de crescimento/decrescimento de Δy em função de *x*. Ela não fez referências à variação variável de Δy. Assim como no caso de Eric e Alice, a dificuldade de Louise em visualizar como Δy variou também pode estar relacionada à limitação em coordenar a variação de Δy com acréscimos constantes em *x*, gerada, principalmente, por um esquema que apenas enfatiza a coordenação do valor numérico de Δy e do segmento dinâmico, sem o suporte de ferramentas para quantificar a variação em *y* com acréscimos constantes em *x*.

Louise tomou como referência na variação em *x* os zeros da função, o que limitou ainda mais a sua coordenação. Além do mais, as regras de ação e controle que envolveram variar as variáveis em *x* nos dois sentidos do eixo, levaram Louise a cometer o equívoco de considerar Δy como crescente em um intervalo no qual a variação era decrescente.

Louise também teve dificuldades em relacionar os aspectos do gráfico com a covariação entre Δy e *x*: ela cometeu o equívoco de considerar a possibilidade de que um intervalo com concavidade voltada para cima possa ter uma variação Δy crescente e decrescente; essa conclusão foi influenciada pelas referências da variação em *x* nos zeros da função. Louise também deu descrições pouco precisas da variação de Δy nos pontos de máximo e mínimo e cometeu o equívoco de considerar que o gráfico da função não tinha ponto de inflexão.

O esboço do gráfico de Louise foi comprometido pelo seu equívoco em construir uma tabela que relaciona Δy/Δx com Δx, em vez de *x*. Além disso, o seu esquema para a construção do gráfico não mobilizou de forma explícita aspectos da covariação entre *x* e Δy/Δx e envolveu semelhanças com os esquemas que são geralmente mobilizados no ambiente papel e lápis e por uma visão de correspondência.

Quanto aos demais aspectos relacionados à transposição informática que influenciaram ou não a atividade e o raciocínio covariacional de Louise, destacaram-se:

- Ao contrário de Eric e Alice, Louise diversificou mais as ferramentas que ela usou para observar a variação de Δy e Δy/Δx: caixa de texto com o valor numérico, planilha e segmento dinâmico; embora houve uma mobilização maior das ferramentas de representação numérica;
- Louise, ao contrário de Eric e Alice, mobilizou os segmentos dinâmicos para coordenar a variação Δy, em vez de apenas focar na representação numérica. Isso pode estar relacionado ao fato de que Louise ainda deu descrições da variação em termos do significado físico de velocidade: "*A gente percebe que agora deu uma... o x tá crescendo mais devagar e a variação tá crescendo mais rápido...*" (Louise, situação 2);
- O foco apenas na coordenação da variação dos valores de Δy e Δy/Δx conforme *x* varia, sem ferramentas de suporte à coordenação da variação em Δy e Δy/Δx com acréscimos constantes em *x* (como as marcações nos eixos, a malha, ou uma lista de valores de *x* e *y* e da sua variação) pode ter impactado na sua limitada visualização da variação variável;
- As dificuldades e equívocos gerados na atividade de Louise, estavam de algum modo relacionados com a interpretação dela da covariação complexa entre x, Δx, Δy e Δy/Δx e dos aspectos semânticos envolvidos na representação pelo material do

Geogebra. Perceber o que de fato estava variando no gráfico e na planilha parece não ter sido uma tarefa simples para ela, em alguns momentos;

- A mobilização, por Louise, de ferramentas e regras de ação convencionais de correspondência do ambiente papel e lápis mostrou que sua gênese instrumental em situações de esboço manual do gráfico ainda era limitada covariacionalmente.

4.6.4 Aspectos gerais da atividade de Eric, Alice e Louise no contexto da sessão 5 e da situação 2

Assim como nos resultados da situação 1A, os estudantes, de forma geral, permaneceram descrevendo a covariação em termos apenas do crescimento e decrescimento de uma variável com relação à outra, mesmo quando a relação envolvia uma variação variável. Isso coincidiu com a não mobilização de ferramentas que dão suporte à coordenação da variação em y com acréscimos constantes em x, como as marcações nos eixos ou a planilha. Além disso, ao variar as variáveis em x, as regras de ação nos esquemas dos estudantes tomaram como referência pontos especiais do gráfico, como zeros, pontos de mínimo, máximo e inflexão, o que inviabiliza uma coordenação de x por acréscimos constantes.

Uma diferença com relação à situação 1A é que foram raras as referências à variação com o significado de velocidade, isso pode ter ocorrido devido à revisitação (nesta seção 5) e formalização desse significado como taxa de variação, mas, principalmente, à mudança de ênfase que os estudantes fizeram, dos pontos que representam as variáveis, para as representações numéricas para coordenar e quantificar a variação das variáveis.

Enquanto Eric e Alice relacionaram de forma satisfatória os aspectos do gráfico (concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão) com a taxa de variação, Louise teve dificuldades para construir essas relações e suas descrições foram marcadas por equívocos. Os equívocos destacados na situação 2 foram: (i) a dificuldade com a variação decrescente, manifestada por Eric na representação numérica da planilha; (ii) o equívoco de Louise, ao relacionar a concavidade voltada para cima com uma variação crescente e decrescente ao mesmo tempo em Δy; (iii) o equívoco de Louise, ao considerar Δy crescente após variar a variável x no sentido não convencional; (iv) o equívoco de Louise, ao considerar a inexistência do ponto de inflexão no gráfico (função polinomial de grau 3).

De forma geral, quanto aos gráficos esboçados: Eric traçou um gráfico que contemplou o crescimento e o decrescimento da taxa de variação e a sua relação com os pontos especiais, mas não envolveu uma visão refinada da variação variável da taxa; já os gráficos de Alice e Louise não parecem ter sido gerados com base na covariação entre a taxa de variação e o valor de *x*; os seus esquemas enfatizaram a definição de pontos do gráfico e o traçado do gráfico como a curva que melhor aproxima a trajetória desses pontos, sem referências a como as variáveis variaram entre si, nem como a forma do gráfico se relaciona com a taxa de variação em função de *x*. Isso mostra que, na situação 1A, a mobilização, por Alice e Louise, da ferramenta rastro do ponto P(x,y) – que tem um apelo covariacional – estava ligado apenas à situação específica e não foi totalmente integrada aos seus esquemas.

Com relação aos aspectos relacionados à transposição informática envolvidos nos resultados, destacaram-se os seguintes: (i) a ênfase dos estudantes nas representações numéricas em detrimento da representação por segmentos dinâmicos para coordenar a variação e a relação entre essa ênfase e a ausência de descrições da variação em termos de velocidade; (ii) a limitação para visualizar e coordenar a variação variável sem o suporte de ferramentas que permitam coordenar a variação em *y* com acréscimos constantes em *x*; (iii) um conflito teórico-computacional na abordagem da taxa instantânea que, pela restrição da quantidade de casas decimais/algarismos significativos, exibiu os valores de Δy e Δx como zero; (iv) a complexidade em interpretar, na interface, o que estava variando gerou dificuldades, principalmente para Louise; já para Eric, essa complexidade se manifestou em um aspecto semântico da variável *y* no Geogebra que ora estava associado à função em si, ora à taxa de variação; (v) as novas possibilidades de traçar o gráfico por uma visão covariacional providas pelas ferramentas do Geogebra que, no caso de Eric, se integraram e complementaram o seu esquema baseado no ambiente papel e lápis; já no caso de Alice e Louise, predominaram esquemas baseados no ambiente papel e lápis e na visão de correspondência.

4.7 SÍNTESE E ANÁLISE DA SESSÃO 6

A sessão 6 encerrou o curso de extensão e a fase do experimento de ensino. Nessa sessão foram exploradas a transição da taxa de variação média para a ideia da derivada, o gráfico da taxa de variação e foi orquestrada a situação 3 que enfatizou: (i) o suporte da ferramenta de variações sucessivas para explorar a covariação no gráfico; (ii) a construção de inferências sobre padrões de variação em funções polinomiais. Dos oito participantes do experimento, sete compareceram a sessão que teve duração de 02h56min. Todos os estudantes do estudo de caso participaram da sessão.

A sessão 6 foi estruturada nos seguintes momentos:

- Informes institucionais, questões e orientações quanto ao uso de instrumentos de registro dos dados;
- Exploração da transição da taxa de variação média para a derivada e o seu gráfico a partir da revisitação da situação 2;
- Exploração da ferramenta de variações sucessivas como suporte à leitura covariacional do gráfico;
- Orquestração da situação 3;
- Fechamento da sessão e do experimento.

A sessão foi configurada de forma que o mediador teve um papel predominante de expositor com tela dividida, porém com momentos de discussão nos quais os estudantes puderam compartilhar as suas produções com a turma; os monitores tiveram um papel de apoio, monitorando o *chat* e trazendo as dúvidas individuais à classe, bem como participando da discussão; os estudantes acompanharam a exposição nos seus computadores pela tela de videoconferência e foram convidados a compartilhar as suas produções com a classe e fazer perguntas ou comentários via *chat* ou pela própria videoconferência.

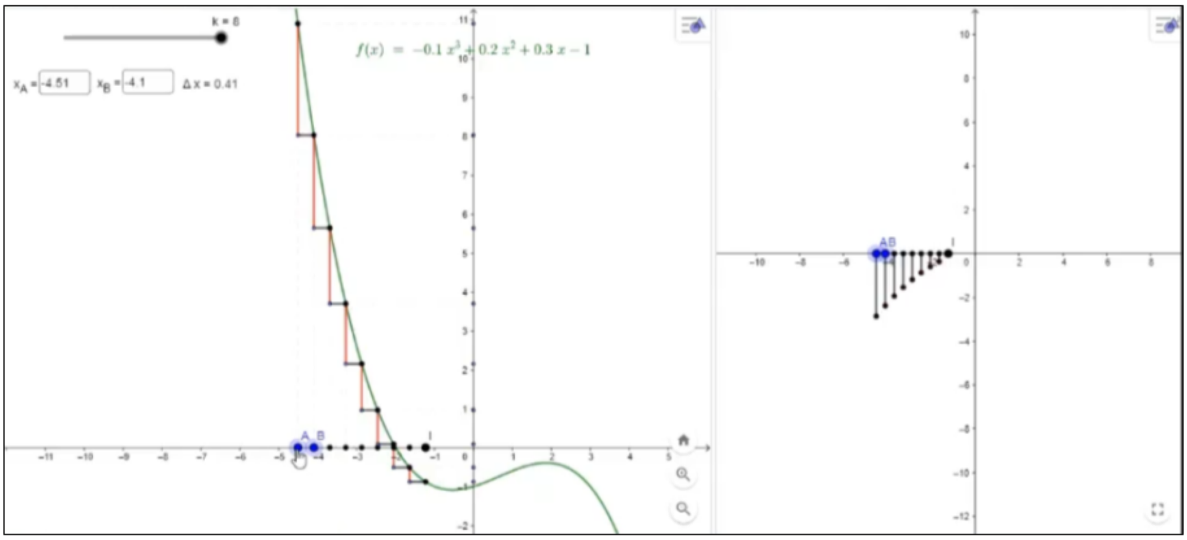
No primeiro momento da sessão, a situação 2 foi revisitada para explorar, do ponto de vista da covariação, aspectos da transição entre a taxa média e a derivada e da construção do gráfico da taxa de variação.

Foram explorados aspectos da transposição informática e do significado de fazer o Δx tender a zero na taxa de variação e como essa representação pode dar suporte à ideia da derivada. Os esquemas de exploração dessa simulação, como a variação de x_A e x_B com pontos livres ou dependentes entre si, aliado ao uso do *zoom* e da configuração do número de casas decimais/algarismos significativos na planilha, foram revisitados e discutidos. Além do desenvolvimento de esquemas de uso e ação instrumentada, a revisitação teve o papel de discutir o papel dessa simulação como um suporte representacional para aproximar uma ideia da derivada, enfatizando as restrições da transposição informática dessa aproximação.

A construção do gráfico da taxa de variação a partir da revisitação da situação 2 também foi explorada. Inicialmente, foi abordada a ideia da taxa de variação como uma função e, em seguida, foram explorados diferentes esquemas de construção do gráfico da taxa a partir do gráfico da função, mobilizando-se ferramentas como a lista de pontos na planilha, a caneta, o rastro do ponto e o próprio comando 'derivada', buscando a construção da imagem do gráfico da taxa mediante uma leitura covariacional do gráfico da função original.

Em seguida, foi introduzida mais uma ferramenta para o suporte à leitura e a exploração covariacional do gráfico da função: a ferramenta de variações sucessivas (Figura 75). Foram abordados os princípios da construção da ferramenta e da sua integração nas diferentes representações: gráfico da função, na janela 1; gráfico de variações sucessivas, na janela 2, planilha e modelo algébrico. Além disso, foram desenvolvidos esquemas de exploração da ferramenta, considerando as ações possíveis nas suas diferentes representações.

Figura 75 – Ferramenta de variações sucessivas



Fonte: Elaborado pelo autor

Na etapa seguinte, foi orquestrada a situação 3 que enfatizou o uso instrumentado da ferramenta de variações sucessivas, integrada em diferentes representações, para interpretar o gráfico de funções covariacionalmente e dar suporte às inferências sobre padrões de variação nas funções polinomiais afim, quadrática e de grau 3. Os objetivos, o planejamento e a análise *a priori* da situação 3 foram descritos na subseção análise *a priori* da mesma. Os estudantes foram solicitados a explorar e descrever aspectos da covariação no gráfico e da caracterização covariacional de algumas funções polinomiais.

Foi planejado um tempo de 40 minutos para a situação, porém a sua orquestração durou 1h13min. Por decisão *ad hoc*, considerando o tempo disponível para a realização da situação pelos estudantes, o item 3 da situação foi excluído. Alguns estudantes concluíram a resolução após o fim da sessão, de forma assíncrona.

A configuração didática envolveu a exploração individual do Geogebra pelos participantes nos seus computadores pessoais, tendo o suporte *online* do mediador e dos monitores na videoconferência e no *chat*. Foi orientada a criação de um documento de texto *online* no qual os estudantes deveriam escrever as suas respostas às questões da situação.

Ao final do tempo destinado à situação 3, a sessão foi retomada para o encerramento do curso. Foram feitos agradecimentos aos participantes e aos monitores, bem como discutida a importância do uso de tecnologias como o Geogebra para aprender e ensinar matemática, na perspectiva dos participantes como futuros professores.

A seguir, são analisadas as produções de Eric, Alice e Louise na exploração da situação 3.

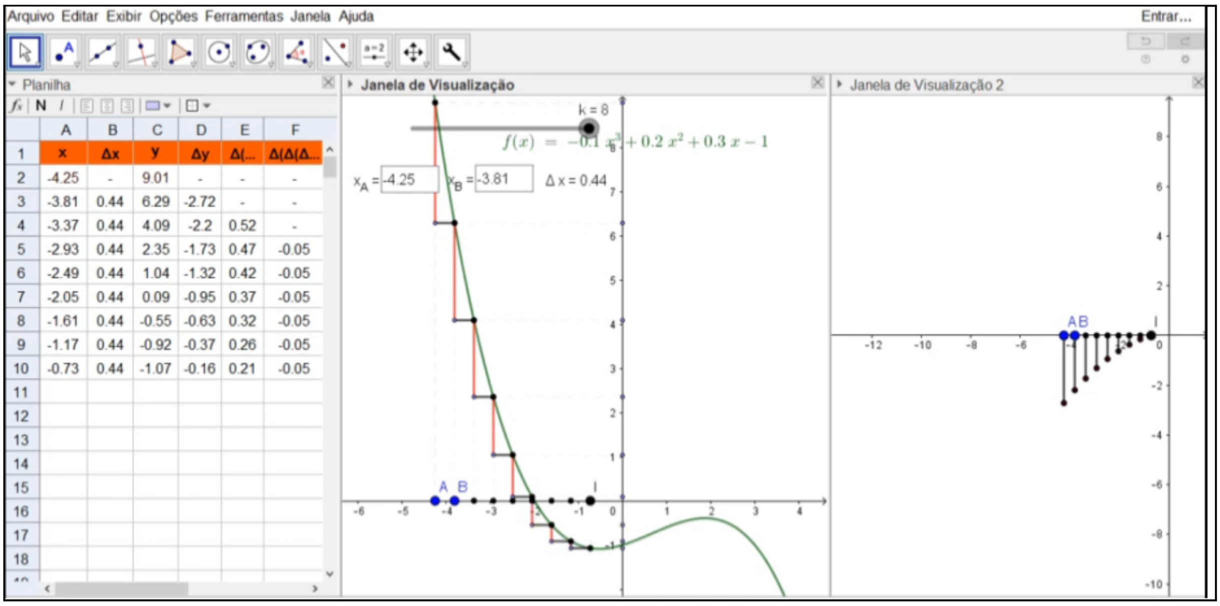
4.7.1 Análise da atividade de Eric na situação 3

No primeiro item[10], as regras do esquema de Eric para explorar as relações entre o gráfico da função e as variações em Δy envolveram obter uma imagem das variações sucessivas de *y* com relação a *x* por meio da variação do controle deslizante em *k*. Essa possibilidade envolve uma imagem mais estática das variações sucessivas, em detrimento a variar os valores de x_A e x_B dinamicamente no eixo *x*. Conforme Eric variou o valor do controle *k*, ele visualizou gradualmente os valores da variação em *y* (Figura 76) e essa ação

[10] Explore a simulação e observe as relações entre o gráfico da função (*janela de visualização 1*) e o gráfico das variações sucessivas Δy (*janela de visualização 2*). Quais as relações entre o sinal da variação (positiva ou negativa), a variação da variação (variação crescente ou decrescente) e o gráfico da função? Justifique sua resposta em termos da variação em x e y.

levou-o a inferências sobre como a variação de *y* se relaciona com a forma decrescente do gráfico:

Figura 76 – Exploração da situação 3 por Eric



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da produção dos estudantes

> 2. Eric: (Define o valor k=1 no controle deslizante *k*, em seguida, aumenta gradualmente o valor de *k*, enquanto observa as variações sucessivas nas janelas de visualização 1 e 2) *Eu vou colocar aqui o menor valor pra k, k=1, então eu tenho essa variação, então à medida que eu vou aumentando o valor de k, ou seja, eu vou mostrando outras variações de y... O que é que eu consigo perceber? Que o Δy ele é sempre negativo, já que esses segmentos estão aqui abaixo do eixo x* (refere-se aos segmentos do gráfico de variações sucessivas, na janela de visualização 2), *então o Δy tá sendo sempre negativo aqui nesse intervalo, só que ele é cada vez maior né?Já que ele é negativo e tá se aproximando de zero, então ele tá crescendo. Então o Δy é negativo, mas ele está crescendo.*
> 3. Eric: *Então a gente já fecha com isso, o Δy é negativo, isso é bem nítido, só que, o sinal da variação da variação, que é se essa variação é crescente ou decrescente, é outra história. Eu já notei aqui que a variação é crescente, porque ela é negativa e tá aqui se aproximando de zero. Então quer dizer que a variação da variação, a tendência é ela ter um sinal positivo.*
> (...)
> 6. Eric: *Então o Δy ser negativo, implica pra mim que a função nesse intervalo que a gente tá analisando, ela é decrescente, por isso que a gente tem que o Δy, ele é negativo, então ela é decrescente.*

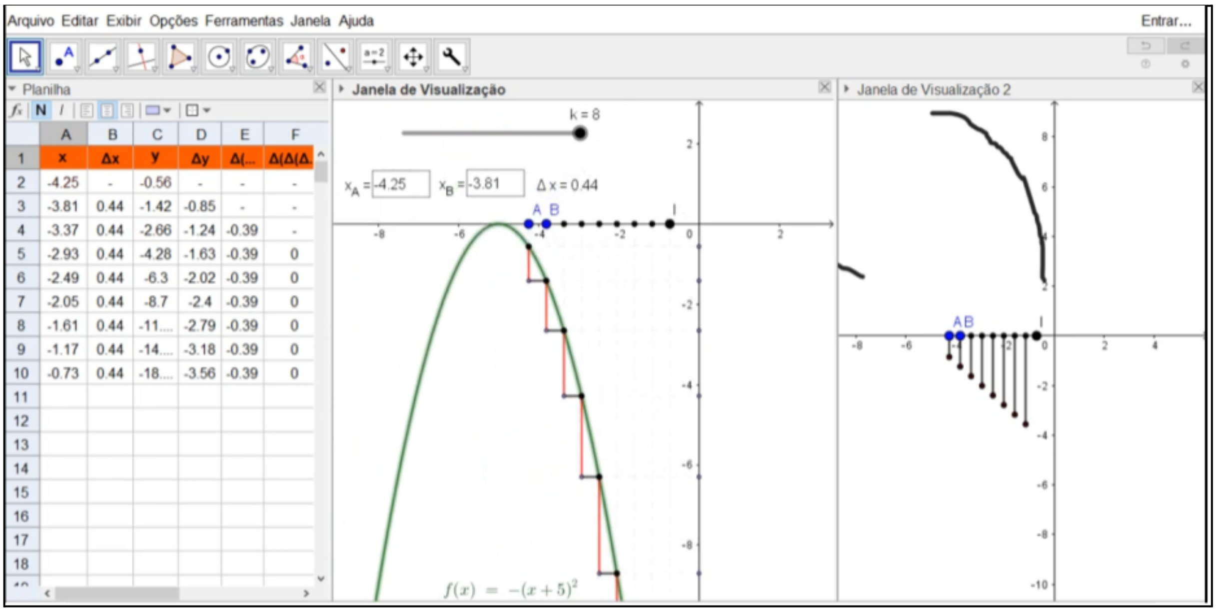
Eric relacionou, de forma satisfatória, a variação negativa em *y* com a forma do gráfico e com a representação por segmentos dinâmicos. Ele fez inferências sobre como essa variação pode ser negativa e, ao mesmo tempo, ser crescente ou decrescente, um aspecto que havia sido problemático para ele na situação 2, anterior à representação numérica.

A ação de Eric também foi marcada, desde o começo, pela mobilização das diferentes representações nas janelas 1 e 2 e na planilha. Ele mobilizou: (i) o gráfico da janela 1 para relacionar a variação Δy com o gráfico da função; (ii) o gráfico das variações em y da janela 2 para visualizar uma imagem progressiva da variação de Δy, por meio dos segmentos dinâmicos; (iii) a planilha para coordenar e quantificar a variação de Δy.

> 4. Eric: (Visualiza na planilha a coluna *Δy* e em seguida a coluna *Δ(Δy).*) *É interessante quando a gente vem para a planilha tudo isso fica bem claro, veja: nesse intervalo, Δy é sempre negativo, e a variação da variação, que é esse Δ(Δy), é positivo. E aí esse Δ(Δy), ou seja, a variação da variação é positiva, só que ela é decrescente. Ela vai reduzindo.*

Posteriormente, para construir relações entre $\Delta(\Delta y)$ e o gráfico, as ações de Eric tiveram como objetivo distinguir como $\Delta(\Delta y)$ se comportava em uma função decrescente com a concavidade para cima e, por outro lado, com a concavidade para baixo. Para isso, ele inicialmente mobilizou a caneta para desenhar essas duas formas de gráfico. Em seguida, ele alterou a função da janela de visualização 1 para obter um gráfico cujo intervalo analisado fosse decrescente com a concavidade para baixo, ao contrário do gráfico original. Após obter o novo gráfico (Figura 77), Eric analisou na planilha como $\Delta(\Delta y)$ se comportava para este caso e expressou suas inferências sobre esse comportamento:

Figura 77 – Exploração por Eric da variação decrescente com gráfico côncavo para baixo na situação 3



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da produção dos estudantes

> 13. Eric: (Observa o gráfico e as variações sucessivas nas janelas 1 e 2, em seguida, direciona as referência para os valores na planilha. As janelas 1, 2 e planilha são exibidas em simultâneo) *É que eu tô com um intervalo em que a função é decrescente, só que ela é decrescente com a concavidade pra baixo, que é o que eu queria testar aqui, diferentemente do que eu tinha antes. E aí ó, o Δy ele continua negativo, só que ele é negativo e vai se tornando cada vez mais negativo, ou seja, além do Δy ser negativo, o Δ(Δy) ou seja, a variação da variação também é negativa.*
> 14. Eric: *Então eu acho que, de maneira empírica né… Eu não vou explorar muito de garantir que isso seja verdade, acho que empiricamente eu já consigo ter essa ideia de que nos dois casos em que a função é decrescente, o Δy é negativo, só que a variação da variação vai falar sobre a concavidade. Então se a variação da variação for negativa, a concavidade é, no caso como esse, pra baixo e se a variação for positiva a concavidade é pra cima.* (Reconhece o papel apenas empírico da sua exploração da representação computacional).
> 15. Eric: *Deixa eu preencher explicando isso aqui (...)* (Digita na ficha online): *Se Δy for positivo, a função é crescente e se Δy for negativo, a função é decrescente no intervalo considerado. Se Δy for negativo, temos duas situações: Δ(Δy) for positivo, a concavidade é voltada para cima. Δ(Δy) for negativo, a concavidade é voltada para baixo.*

Nessa primeira parte da situação 3, Eric explorou e construiu inferências sobre dois aspectos problemáticos para todos os estudantes durante o percurso do experimento: a variação negativa e a variação variável. Nesse sentido, destacaram-se o papel das ferramentas de variações sucessivas, integradas nas janelas de visualização 1 e 2 e a articulação com a planilha.

Para explorar o segundo item[11], o esquema de Eric envolveu as regras de: definir o valor de subintervalos em *x* (k=8), variar um coeficiente dado e observar as variações em *y* nas seguintes representações: (i) no gráfico de variações sucessivas, no item 2a e (ii) na planilha, no item 2b. Eric não alterou os valores de *x* (x_A e x_B) e consequentemente o intervalo das variações sucessivas, logo, a sua exploração foi feita considerando apenas um intervalo específico.

Embora o segundo item buscasse o desenvolvimento de uma visão global da influência dos coeficientes da função na variação em *y*, as inferências de Eric direcionaram-se para uma visão local, ao se restringirem apenas a um intervalo de *x* e enfatizaram uma relação entre cada coeficiente e as variações em *y,* de forma desconectada do modelo algébrico como um todo. A coordenação da covariação complexa entre o modelo algébrico (coeficientes) e as variações em *y* – que envolve a covariação entre coeficientes valores de *x* e valores de *y* (e suas variações) – gerou uma dificuldade importante para Eric e limitou as suas inferências.

Em muitos momentos, Eric se viu confuso e com dificuldade em coordenar a covariação complexa e entender quais variáveis deveriam estar envolvidas na sua exploração. Essa complexidade o levou, em alguns momentos, a limitar as suas descrições em termos do sinal dos valores das variáveis (um invariante que até aqui era peculiar apenas aos esquemas de Louise):

> 19. Eric: (Exibe a janela de visualização 2 e organiza os controles deslizantes na tela) *Eu tenho que olhar o que? Varie o gráfico das função e observe a variação no gráfico das variações, de que forma o gráfico das variações se comporta? Deixa eu exibir de novo, a janela de visualização 2…. Agora… Como é essa análise aqui? Eu vou variar quais parâmetros? Acho que é uma exploração bem aleatória aqui.*
> 20. Eric: (Varia o valor do coeficiente u_1 gradualmente por meio do controle deslizante, primeiro por valores negativos, depois no zero, por último por valores positivos. Observa as variações sucessivas de Δy na janela de

[11] Construa um modelo geral para funções polinomiais de grau até 3*. Em seguida, responda aos seguintes itens, justificando as suas respostas em termos da variação conjunta entre x e y:

a) Varie os coeficientes da função e observe as variações no gráfico das variações sucessivas. De que forma o gráfico das variações se comporta?
b) Na planilha, que relações você percebe entre a variação dos coeficientes das funções polinomiais de grau 3 e as variações nas colunas Δy, Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy))?
c) Teste os itens (a) e (b) para o caso das funções quadrática e afim. Que relações entre as funções e a sua variação você percebe nesses casos?

visualização 2) *Varie os coeficientes da função e observe as variações no gráfico… Então por exemplo, vou olhar, variar os sinais… Então o u_1 que é o coeficiente dominante, ele é negativo, então quando o u_1 é negativo, tá sempre o Δy sendo negativo também, quando o u_1 é negativo, o Δy é negativo; quando o u_1 é zero, deve ta dependendo do u_2 e quando o u_1 é positivo o Δy é positivo. Quando ele é negativo e ele aumenta, o que acontece é que o Δy vai ficando maior, aqui ó, eu vou aumentando o u_1 e ele vai ficando maior. Então o Δy é positivo… É crescente, quer dizer. Então, a medida que u_1 aumenta, o Δy tá aumentando também.*
(...)
37. Eric: *Então eu vou fechar assim* (enuncia a resposta para o item 2, escrita na ficha *online*): "*Para u_1, quando negativo, Δy é negativo, quando positivo, Δy é positivo. À medida que u_1 cresce, se u_1 negativo, Δy é crescente, se u_1 positivo, Δy é decrescente. Para u_2, à medida que u_2 cresce, Δy decresce. Para u_3, à medida que u_3 cresce, Δy cresce também. Para u_4, sua variação não interfere em Δy.*"

Nos itens 2b e 2c, Eric mobilizou a planilha como ferramenta de tomada de informação para coordenar a variação em *y*, sendo que, no caso específico, essa variação deveria ser coordenada em 3 ordens: Δy, Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy)). Estava em jogo inferir não apenas de que forma cada coeficiente influenciava nas variações em y, mas também a relação entre cada coeficiente e a invariância na n-ésima ordem de variação.

O esquema de Eric permaneceu semelhante ao mobilizado no item anterior: variar um coeficiente dado e observar as variações em Δy, Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy)) nas colunas respectivas na planilha. Embora a sequência de valores na planilha tenha provido à Eric uma visão de como cada ordem de variação variava conforme ele alterava os valores dos coeficientes, as inferências dele continuaram limitadas às relações isoladas e locais, sem relação com o modelo algébrico como um todo e com as restritas a um intervalo específico, consequentemente, infrutíferas para explicar a influência dos coeficientes na variação da função, sobretudo, na relação entre um coeficiente específico e a invariância na variação da n-ésima ordem em *y*:

45. Eric: (Varia o valor do coeficiente u_1 gradualmente por meio do controle deslizante, primeiro por valores negativos, depois no zero, por último por valores positivos. Observa a variação de Δy e *Δ(Δy)* na planilha.. Repete o procedimento algumas vezes) *Agora vamos para o Δ(Δy): catorze, doze, dez,... Decrescente, decrescente, constante, crescente. (...) Tem que completar aqui, que a medida que u_1 cresce, o Δ(Δy) acontece o seguinte… A partir de agora eu não vou mais escrever lá* (refere-se à ficha *online)*, tá muito complicado pra ficar organizando, eu vou só falar, eu vou tentar a partir de agora organizar essa questão falando… *Então Δ(Δy) à medida que*

u_1 cresce , ele é negativo, a variação da variação é decrescente, ela é positiva e decrescente. A variação da variação.
46. Eric: *Então a variação da variação é positiva e decrescente. Quando u_1 é zero, a variação da variação é positiva e constante, e quando u_1 é negativo, a variação da variação é negativa e é crescente.*
47. Eric: (Varia o valor do coeficiente u_2 gradualmente por meio do controle deslizante, primeiro por valores negativos, depois no zero, por último por valores positivos. Observa a variação de Δy e *$\Delta(\Delta y)$* na planilha... Repete o procedimento algumas vezes) *Agora o u_2 ... Então à medida que o u_2 cresce e é negativo a variação da variação oscila entre positivo e negativo, tem momentos que aparecem valores negativos, ó... menos zero dezenove, mas ela é decrescente, a variação da variação é decrescente. Decrescente, decrescente, continua decrescente quando o u_2 é zero e continua decrescente quando o u_2 é positivo. Então à medida que u_2 cresce, a variação da variação ela é sempre decrescente.*
48. Eric: *Eu posso ta errando tudo aqui (...) posso ta errando tudo mesmo, mas é como eu to entendendo o que era pra ser nesse problema.*
49. Eric: (Varia o valor do coeficiente u_3 gradualmente por meio do controle deslizante, primeiro por valores negativos, depois no zero, por último por valores positivos. Observa a variação de Δy e *$\Delta(\Delta y)$* na planilha. Repete o procedimento para o coeficiente u_4.) *E aí o u_3, à medida que ele cresce, ele não interfere na variação da variação, e muito provavelmente o u_4 também não. A variação de u_4 não interfere na variação da variação.*
50. Eric: (Varia o valor do coeficiente u_1 gradualmente por meio do controle deslizante, primeiro por valores negativos, depois no zero, por último por valores positivos. Observa a variação de *$\Delta(\Delta(\Delta y))$* na planilha. Repete o procedimento para os coeficientes u_2, u_3 e u_4.) *E agora, nessa última coluna, a variação da variação da variação… É constante sempre, à medida que u_1 aumenta, ela decresce, só que é sempre constante, quando é zero é zero… Negativo, aumentando, então o $\Delta(\Delta(\Delta y))$ ele é sempre constante pra o mesmo coeficiente u_1, mas à medida que o u_1 aumenta, o $\Delta(\Delta(\Delta y))$ aumenta também. O u_2 não altera em nada, o $\Delta(\Delta(\Delta y))$ e muito provavelmente o u_3 e o u_4 como era de se esperar também não vai variar.*

Um fenômeno importante na exploração de Eric, no segundo item da situação 3, foi a mera descrição do comportamento dos objetos e os comportamentos observados por ele na tela, sem alcançar o significado conceitual esperado nesses itens (fenômeno associado ao descrito por Artigue (1996b) como pseudo-objetos). Como Eric mesmo se referiu, algumas vezes ele teve dificuldades em entender como analisar as relações entre os coeficientes e a variação em *y*, daí que a coordenação da covariação complexa, representada por diversas representações em um ambiente dinâmico, parece ter sido uma limitação importante para a construção das suas inferências e significados.

No item 2c, Eric também fez inferências sobre relações entre os coeficientes das funções quadrática e afim, porém sem aprofundar o significado dessas relações para cada tipo de função como um todo:

> 52. Eric: (Define u_1=0. Varia o valor do coeficiente u_2 gradualmente por meio do controle deslizante, primeiro por valores negativos, depois no zero, por último por valores positivos. Observa a variação de *(Δ(Δy)* e *Δ(Δ(Δy))* na planilha.) *Letra c... (enuncia o item 2c) Eu já fiz alguns casos, que era quando a gente testa aqui com o u_1 zero, então virou uma função quadrática, e aí a variação da variação fica constante e a variação da variação da variação fica zero...*
> 53. Eric: (Define u_1=0 e u_2=0 Varia o valor do coeficiente u_3 gradualmente por meio do controle deslizante, primeiro por valores negativos, depois no zero, por último por valores positivos. Observa a variação de *(Δ(Δy)* e *Δ(Δ(Δy))* na planilha. Repete o procedimento para u_4.) *Aí se aqui eu deixar zero* (refere-se ao u_2)*, vira uma função afim, o próprio Δy já é constante e o Δ(Δy) e o Δ(Δ(Δy)) é sempre zero. E o u_4 aqui, quando varia a gente faz a mesma coisa pra esse problema.*

Em síntese, a atividade de Eric na situação 3 revelou dois momentos com resultados distintos: um primeiro momento (item 1), no qual ele articulou o uso das ferramentas de variações sucessivas nas janelas 1 e 2 com a planilha para gerar inferências relacionadas a como a forma do gráfico se relaciona com a covariação entre as variáveis, com ênfase em dois aspectos centrais, a variação variável e a variação negativa; e um segundo momento (item 2), no qual a coordenação da covariação complexa entre os coeficientes da função e as variações de n-ordens em *y* levaram Eric a enfrentar dificuldades para coordenar e inferir relações entre o modelo algébrico da função e a variação em *y*, limitando as suas descrições a relações isoladas e locais entre cada coeficiente e cada variação em *y*.

Do ponto de vista das relações dos resultados com a transposição informática do material, ficaram explícitos os seguintes tópicos: (i) a contribuição da articulação dinâmica e simultânea entre as representações das variações sucessivas, o gráfico e a planilha, para que Eric consolidasse imagens da variação variável e da variação negativa, possivelmente, pela característica dessas ferramentas (variações sucessivas e planilha) de dar suporte à quantificação da variação em *y* com acréscimos constantes em *x* (representado pelas transições entre linhas sucessivas na planilha e pelos intervalos de variação sucessivos no gráfico); (ii) a dificuldade em coordenar a covariação entre mais de duas variáveis, mesmo com todo o suporte e a integração representacional dinâmica desenhadas; nesse caso, é possível que a coordenação da covariação complexa demande o desenvolvimento de esquemas de exploração mais específicos.

4.7.2 Análise da atividade de Alice na situação 3

No primeiro item[12], as regras do esquema de Alice para explorar as relações entre o gráfico da função e as variações em Δy, envolveram variar os valores de x_A e x_B simultaneamente e observar as variações sucessivas em *y*. Ela coordenou as variações na janela de visualização 1, onde a ferramenta de variações sucessivas estava integrada ao gráfico, o que reforça a ênfase de Alice na articulação entre a variação em *y* e a forma do gráfico da função.

Para relacionar o gráfico com a variação negativa em *y*, Alice enfatizou uma coordenação dinâmica das variações em *y*, ao contrário de Eric que enfatizou uma imagem estática das variações em *y* com acréscimos constantes em *x*. Ela mobilizou como suporte a variação relativa e a cor do segmento que representa Δy. Suas inferências relacionaram a mudança do sinal de Δy com os pontos de máximo e mínimo no gráfico:

> 2. Alice: (Varia x_A e x_B simultaneamente e observa as variações sucessivas em *y* na janela de visualização 1. Enfatiza a relação entre o sinal de Δy e a cor do segmento que representa-o) *Quando a gente tem esse traço na cor vermelha então é porque o sinal da nossa variação é negativo. Quando a gente tem a barrinha verde, é porque é positivo. Então o que é que interfere nesse sinal? Ele vem negativo, né? Com o módulo, esse valor em módulo, ele vem cada vez mais diminuindo e se aproximando de zero. E ele chega a ser zero por aqui, onde tem um ponto de mínimo, e depois desse ponto de mínimo o tracinho passa a ser verde, então tem a mudança de sinal e ele vai sendo verde, sendo verde, e depois vai começa a ficar vermelho de novo, então volta a ter sinal negativo. E isso acontece nos pontos de mínimo e máximo. Ele vem negativo, passa pelo ponto de mínimo fica positivo, vai positivo até o ponto de máximo e volta a ficar negativo.*

Alice fez inferências que relacionaram a variação variável com os aspectos da concavidade e os pontos de inflexão. A posição da concavidade foi relacionada com uma variação crescente ou decrescente em Δy, enquanto o ponto de inflexão foi concebido por

---

[12] Explore a simulação e observe as relações entre o gráfico da função (*janela de visualização 1*) e o gráfico das variações sucessivas Δy (*janela de visualização 2*). Quais as relações entre o sinal da variação (positiva ou negativa), a variação da variação (variação crescente ou decrescente) e o gráfico da função? Justifique sua resposta em termos da variação em x e y.

Alice, não só como um ponto de mudança de concavidade, mas também como um ponto no qual a variação muda de crescente para decrescente, e vice-versa:

> 3. Alice: (Varia x_A e x_B simultaneamente no intervalo no qual a concavidade do gráfico é voltada para cima e observa as variações sucessivas em *y* na janela de visualização 1) *A variação da variável… Variável crescente ou decrescente, a variação da variável, ela tá relacionada com a concavidade da parábola. Por mais que a gente tenha essa variação negativa, aparentemente ela tá diminuindo… Diminuindo , diminuindo,... Se a gente olhar pra... o tamanho, digamos assim, desse traço. Mas se é negativa, então quanto mais próximo de zero, é maior. Então essa é crescente, quando a concavidade é voltada pra cima, a gente tem uma variação crescente, ali no ponto de mínimo acontece a mudança de sinal, mas continua sendo crescente… Continua sendo crescente...*
> 4. Alice: (Aciona o *zoom*, configura a exibição do gráfico de forma a destacar o intervalo que contém o ponto de inflexão. Varia x_A e x_B simultaneamente, no intervalo que contém o ponto de inflexão. Observa as variações sucessivas em y na janela de visualização 1) *Deixa eu dar um zoom aqui… Então a gente teve a mudança de sinal e ele vai crescendo, crescendo… O tamanho do tracinho verde vai aumentando, aumentando, até que chega um ponto, mais ou menos por aqui , que ele começa a ficar menor de novo, então começa a decrescer...E isso vai acontecer justamente no ponto de inflexão, que é onde tem a mudança de concavidade. Se a concavidade ela tá voltada pra cima, no ponto de inflexão, a partir do ponto de inflexão... ela passa a ser voltada pra baixo. Então, novamente começa a decrescer.*
> 5. Alice: (Varia x_A e x_B simultaneamente do início ao final do intervalo exibido na tela e observa as variações sucessivas em *y* na janela de visualização 1) *Então essa relação de, da variação ser crescente ou decrescente, depende da concavidade da parábola. Se a concavidade é voltada pra cima a gente tem uma variação positiva, positiva não, crescente! E se ela é voltada pra baixo ela tem uma variação decrescente. E o ponto de inflexão é o responsável pela mudança de concavidade e consequentemente por essa mudança de crescente para decrescente, e vice-versa.*

Nesse trecho, é possível perceber que, assim como Eric, Alice também enfrentou de forma satisfatória o problema de transposição informática do significado de uma variação negativa representada pelo comprimento de um segmento. Um aspecto que chamou a atenção por fundamentar as suas inferências (assim como as de Eric) sobre a variação negativa crescente, ao mesmo tempo que, permitindo lidar com a aparente contradição de uma variação crescente representada por segmentos de comprimento cada vez menor; ela consolidou essa imagem com base na ideia de que, além de estarem associados a valores negativos, os 'comprimentos' estavam se aproximando cada vez mais de zero e, por isso, tais valores deveriam ser considerados crescentes.

A resposta de Alice ao item 1 foi a seguinte:

> "*Com a variação em x fixa, o sinal da variação em y está ligado aos pontos de máximo e mínimo, nesses pontos a variação para y se anula e ao passar dele, ocorre a mudança de sinal. A variação da variável se relaciona com a concavidade, onde a concavidade é voltada para cima a variação é sempre crescente, até o ponto de inflexão onde ocorre a mudança de concavidade, com a concavidade voltada para baixo e variação decrescente.*" (Alice, item 1, situação 3).

A exploração de Alice no item 1 foi baseada principalmente na coordenação dinâmica da variação em *y* conforme x_A e x_B, cuja diferença é fixa, foram variados por ela simultaneamente. Alice não fez referência ao gráfico de variações sucessivas da janela de visualização 2. O seu esquema envolveu regras de tomada de informação centradas na articulação entre a ferramenta de variações sucessivas e o gráfico da função, na janela de visualização 1, além da variação dinâmica de x_A, x_B e Δy.

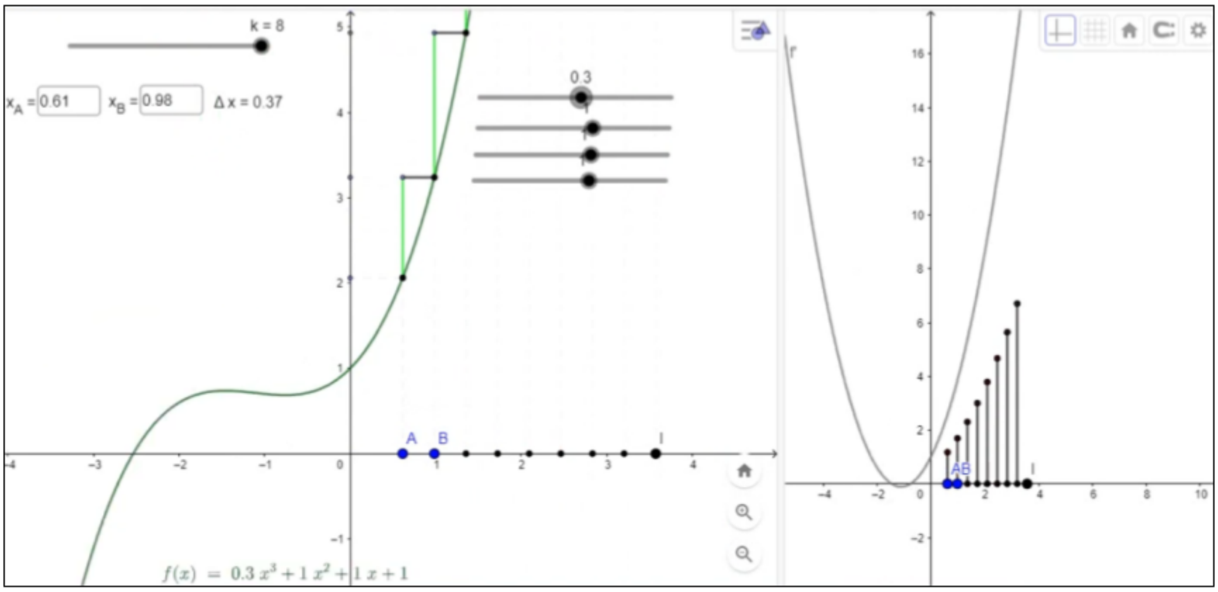
Para explorar o segundo item[13], o esquema de Alice envolveu as regras de: variar um coeficiente dado da função e observar as variações em *y* no gráfico de variações sucessivas no item 2a e, na planilha, no item 2b. Assim como no caso de Eric, Alice enfatizou a variação dos coeficientes um a um, porém desconsiderou a variação em *x*, para gerar suas inferências sobre como os coeficientes que influenciam na variação da função.

Além disso, na exploração do item 2a, Alice enfatizou mais como cada coeficiente alterava a forma do gráfico de variações sucessivas que a variação dos valores em si, por isso, ela mobilizou a ideia de que o conjunto de pontos do gráfico das variações sucessivas forma o gráfico da derivada da função explorada e traçou o gráfico (Figura 78) por meio do comando *f'* (*f* linha) na janela de álgebra:

[13] Construa um modelo geral para funções polinomiais de grau até 3*. Em seguida, responda aos seguintes itens, justificando as suas respostas em termos da variação conjunta entre x e y:

a) Varie os coeficientes da função e observe as variações no gráfico das variações sucessivas. De que forma o gráfico das variações se comporta?
b) Na planilha, que relações você percebe entre a variação dos coeficientes das funções polinomiais de grau 3 e as variações nas colunas Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$?
c) Teste os itens (a) e (b) para o caso das funções quadrática e afim. Que relações entre as funções e a sua variação você percebe nesses casos?

Figura 78 – Gráfico da derivada por Alice (à direita)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da produção dos estudantes

> 10. Alice: (Ajusta a posição dos controles deslizantes na tela. Varia o coeficiente u_1 suavemente. Observa o gráfico das variações sucessivas na janela de visualização 2. Repete o procedimento algumas vezes.) *Deixa eu colocar esses controles deslizantes aqui… Esse aqui é o coeficiente que acompanha o x , x ao cubo, e observando aqui…. Ele altera muita coisa. A gente já sabe que esse gráfico daqui vai ser o gráfico da derivada, ele é uma parábola, então por essa observação aqui a gente consegue ver que a parábola aqui ela vai ter a concavidade voltada pra cima, acho que altera algumas características na parábola.Vai diminuindo, muda a concavidade, acho que isso daqui ele altera umas… Muitas características aqui, acho que por esse termo, ser um termo de maior grau, ele altera muitas coisas na função, tipo, concavidade, se ele for zero vai ser uma função do segundo grau, então muda também…*
>
> 11. Alice: (Exibe a janela de álgebra. No campo de entrada, define a derivada da função *f* por meio do comando f'. Configura a exibição do gráfico de f' para a janela de visualização 2) *Deixa eu ver aqui… Deixa ver se eu consigo colocar o esboço da derivada aqui, pra ver se clareia mais um pouco. Abrir a janela de álgebra…. Colocar aqui o f de linha… Apareceu aqui, deixa eu colocar ele para aparecer na outra janela… Apareceu.*

Apesar de Alice ter enfatizado, inicialmente, a forma do gráfico das variações sucessivas, essa abordagem, aliada ao gráfico da derivada que ela traçou, permitiu que ela explorasse a transição entre o gráfico das variações médias e o gráfico da variação no ponto: a derivada. Essa abordagem teve início com um entrave: Alice esperava que o gráfico de variações sucessivas coincidisse com o gráfico da derivada. Quando viu a diferença entre os gráficos (na parte direita da Figura 78), ela tentou resolver o problema reduzindo o valor de

Δx, o que revela a mobilização do conceito-em-ação de limite no seu esquema, porém a redução foi sem sucesso para fazer coincidir os gráficos. Finalmente, Alice concluiu que a diferença decorre de que cada gráfico representa uma variação distinta, a média e a derivada:

> 12. Alice: (Varia o coeficiente u_1 e observa a variação do gráfico de f'(x) e o gráfico das variações sucessivas na janela de visualização 2)
> 13. Alice: (Exibe a janela de álgebra. No campo de entrada, verifica o modelo algébrico de f'com relação ao modelo de *f.* Varia o valor de u_1 e verifica a correspondência entre f e f') *Ixi… Será que eu coloquei certo? Deixa eu ver aqui… Tá certo… Eu achei que o gráfico ia passar em cima desses pontos…*
> 14. Alice: (Diminui o valor de *Δx* aproximando cada vez mais os valores de x_A e x_B. Em seguida, varia o coeficiente u_1 e observa a variação do gráfico de f'(x) e o gráfico das variações sucessivas na janela de visualização 2.) *Ah... eu acho que é por conta desse espaço que tá aqui.* (Refere-se à diferença entre os valores de x, ou seja, *Δx*)... Não? Não… Enfim, não sei.
> 15. Alice: (Varia o coeficiente u_1 e observa a variação do gráfico de f'(x) e o gráfico das variações sucessivas na janela de visualização 2.) *Ah sim! É porque esses tracinhos que mostra aqui é a variação em y, então não é exatamente a derivada. Dá pra a gente ter uma ideia de como é, mas não vai ser exatamente a derivada. Acho que por isso que esse gráfico que eu esbocei da derivada, ele não vai passar certinho em cima desses pontos.*

Quando Alice retornou ao problema de como cada coeficiente influência na variação da função, ela continuou gerando inferências locais, para um intervalo de *x*, embora a sua perspectiva considerou a influência de cada coeficiente no modelo algébrico como um todo, mais conectada. Ela dividiu as suas descrições dessas influências entre: (i) uma referência informal a como cada coeficiente afeta a variação em *y* "*... esse ele tem uma alteração mais brusca... esses dois eles alteram de forma mais suave*" (Alice, situação 3) e, por outro lado, (ii) referências a como cada coeficiente influenciou na forma do gráfico da derivada que ela integrou à janela de variações sucessivas, como alteração das concavidades e do deslocamento do gráfico.

As inferências de Alice foram um pouco além das de Eric, porque ela fez referências a diferentes 'intensidades' de variação, conectou cada variação individual ao modelo da função como um todo e relacionou o gráfico da função com o gráfico das variações sucessivas por meio do conceito da derivada, embora, a dificuldade em coordenar a covariação complexa também tenha impactado a sua atividade. A resposta de Alice ao item 2a foi:

> *A variação no coeficiente "a" altera de forma mais "brusca" o gráfico das variações, pelo fato desse coeficiente alterar muito coisa, como por exemplo, concavidade, se igual zero, passa a ser outra função e como as características mudam as variações sofrem alterações bem visíveis. Os coeficientes b e c alteram as variações de forma mais suave, fazendo algumas mudanças sobre o crescimento e decrescimento da função. O coeficiente independente d, não faz nenhuma alteração no gráfico das variações sucessivas. 'Porém em todos os casos o gráfico das variações sucessivas tem forma de parábola e se aproxima do gráfico da derivada da função.* (Alice, item 2a, situação 3)

No item 2b, as regras do esquema de Alice envolveram variar cada coeficiente por meio dos controles deslizantes e coordenar as variações em Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$ na planilha, observando como cada coeficiente influenciou na variação em cada coluna. Nas suas inferências, Alice enfatizou a invariância em cada ordem de variação em relação a cada coeficiente, relacionou-as às derivadas de ordens sucessivas, porém afirmou não saber explicar a relação entre um coeficiente específico e a invariância em uma ordem específica de variação:

> 25. Alice: (Varia cada coeficiente por vez, u_1, u_2, u_3 e u_4, e observa a variação em cada coluna Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$ na planilha) *Que relações você percebe entre a variação dos coeficientes das funções polinomiais de grau 3 e as variações nessas colunas? Eu sei que essa coluna* (refere-se a Δy)*, ela é a variação de y, dessa função daqui. Essa daqui* (refere-se a $\Delta(\Delta y)$)*, é a variação dessa função daqui, no caso a variação dessas variações. E aqui é a variação da variação dessa variação* (refere-se a $\Delta(\Delta(\Delta y))$). *É como se aqui fosse, uma aproximação da derivada, uma aproximação da segunda derivada e uma aproximação da terceira derivada. Mas eu não sei dizer o porquê que esse coeficiente, que acompanha o termo de maior grau* (refere-se a u_1)*, que ele faz alterações nessas três colunas, porque esse* (refere-se a u_2) *só faz em duas, esse aqui* (refere-se a u_3) *só faz em duas, porque esse* (refere-se a u_1) *só em uma... Isso não ficou assim bem claro pra mim, ficou meio confuso nisso.*

Mais uma vez, Alice recorreu ao gráfico da derivada (na janela de visualização 2) e, a partir de então, passou a coordenar três representações simultaneamente: o modelo algébrico, a planilha e o gráfico da derivada. Ela passou a observar como cada coeficiente influenciava as variações da n-ésima ordem e, ao mesmo tempo, o gráfico da derivada. Dessa forma, a ideia de derivada voltou a ser mobilizada para tentar explicar a invariância na n-ésima ordem da variação em *y*, porém ela finalizou o item sem entender ainda essa relação. A sua resposta do item 2b na ficha *online* foi:

> *Não consegui enxergar de maneira clara quais as relações dos coeficientes nas variações. Percebi, que o coeficiente "a" altera a variação das três colunas Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$, o coeficiente "b" altera Δy, $\Delta(\Delta y)$. O coeficiente "c" altera apenas o Δy e o coeficiente "d" mantém constante todas as colunas.* (Alice, item 2b, situação 3).

Apenas quando explorou o item 2c, Alice afirmou ter compreendido a relação entre os coeficientes e a variação/invariância no valor das variações. Além do conceito de derivada, mobilizado no item anterior, ela mobilizou os conhecimentos sobre as funções quadráticas e afins e as suas respectivas derivadas, para gerar as suas inferências. Nesse sentido, foi fundamental, para Alice, relacionar a invariância nas colunas da planilha com a forma do gráfico da derivada (reta) na janela de visualização 2:

> 33. Alice: (Varia o coeficiente u_2 e observa as variações nos valores de cada coluna Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$ da planilha e o gráfico de variações sucessivas, onde permanece exibido o gráfico de f') *Acho que com essa função, essas variações já ficam um pouco mais claras pra mim… Considerando o Δy como sendo a aproximação da derivada né? Sendo esses aqui e esse gráfico aqui que mostra a derivada dessa função daqui, aí eu já consigo perceber porque que essa outra coluna, ela é sempre o mesmo valor, porque a variação dela vai ser constante e considerando ela como uma aproximação da derivada a derivada de uma função afim é uma constante também, e essa terceira coluna, é zero porque se a gente fosse fazer a derivada dessa função aqui, a derivada da função afim, a gente ia ter zero.*
> 34. Alice: (Define os valores de $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$. Varia o coeficiente u_3 e observa as variações no gráfico de variações sucessivas, onde permanece exibido o gráfico de f'. Em seguida, repete o procedimento para o coeficiente u_4) *Deixa eu ver agora pra a função afim. É só zerar aqui… Pronto, então, pra a função afim, variando o coeficiente que acompanha o x… É… Só muda se vai ser… É sempre constante, o gráfico das variações consecutivas… Não, das variações conjuntas… É sempre constante, só vai mudar o sinal. Esse aqui que é o termo independente continua sem fazer alteração nenhuma.*
> 35. Alice: (Define os valores de $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$. Varia o coeficiente u_3 e observa as variações nos valores de cada coluna Δy, $\Delta(\Delta y)$ e $\Delta(\Delta(\Delta y))$ da planilha e o gráfico de variações sucessivas, onde permanece exibido o gráfico de f'. Em seguida, repete o procedimento para o coeficiente u_4) *E em relação à tabela, a gente só tem uma variação ali no Δy. E sempre constante, por ser uma reta. E tem o Δy variando, constante… E, essa outra coluna sendo zero, porque seria , mais ou menos, essa variação ela seria a aproximação da derivada , da derivada dessa função daqui.*

A resposta de Alice ao item 2c na ficha *online* foi:

> *Para a função quadrática, o gráfico das variações conjuntas se comporta sempre como uma função afim, tendo em vista que representa uma aproximação da derivada. A variação dos coeficientes da função alteram algumas características, como crescimento, decrescimento. Na função afim, temos o gráfico das variações conjuntas sempre constante.* (Alice, item 2c, situação 3)

Uma análise da exploração de Alice do item 2c mostra uma diferença entre a atividade dela e a de Eric. Enquanto as dificuldades de Eric em coordenar e gerar inferências na covariação complexa o levaram a permanecer em um nível apenas descritivo dos objetos e comportamentos na tela, Alice conseguiu avançar a um nível mais profundo, conceitualmente, gerando questionamentos e inferências sobre a relação entre o modelo algébrico e a variação da função, mobilizando como suporte o conceito de derivada.

Em síntese, a atividade de Alice, na situação 3, revelou os seguintes aspectos em destaque: (i) a articulação entre a ferramenta de variações sucessivas e o gráfico da função para gerar inferências sobre os aspectos do gráfico e a variação em y, principalmente entre a variação negativa e a variação variável; (ii) o papel do gráfico da derivada, mobilizado por Alice, como suporte para relacionar a variação dos coeficientes da função, as variações em y e a derivada da função, embora essas relações tenham sido limitadas a um intervalo específico em x; (iii) a limitação em coordenar e formalizar relações (como a invariância) entre os coeficientes da função e as variações de n-ésima ordem, no qual pode estar envolvido, mais uma vez, o papel mais criterioso da covariação complexa.

Do ponto de vista das relações dos resultados com aspectos relacionados à transposição informática do material, foram destacados os seguintes: (i) a contribuição da articulação dinâmica e simultânea entre a variação em x e a ferramenta das variações sucessivas, para que Alice coordenasse a variação variável e a variação negativa, possivelmente pela característica dessa ferramenta de dar suporte à quantificação da variação em y com acréscimos constantes em x; (ii) uma limitação em coordenar a covariação entre mais de duas variáveis, mesmo com todo o suporte e a integração representacional dinâmica; nesse caso, é possível que a coordenação da covariação complexa demande o desenvolvimento de esquemas de exploração mais específicos, pois o esquema de exploração de Alice – embora fosse distinto do de Eric – também não deu conta de explorar a covariação complexa na sua totalidade.

4.7.3 Análise da atividade de Louise na situação 3

No primeiro item[14], as regras do esquema de Louise, para explorar as relações entre o gráfico da função e as variações em Δy, envolveram variar os valores de x_A e x_B simultaneamente e observar as variações sucessivas em *y*. Ao contrário de Alice, Louise coordenou as variações em Δy no gráfico de variações sucessivas na janela de visualização 2, o que reforça a sua ênfase em explorar como as variações em Δy variaram com relação a *x*.

Louise mobilizou o conceito de derivada desde o início da exploração. Ela sempre descreveu o comportamento da variação da função em termos da sua derivada e enfatizando a forma do gráfico das variações sucessivas. É provável que, no seu caso, a exibição simultânea do gráfico da função, da variação e a variação dinâmica dos valores de Δy descrevendo uma trajetória que remete a uma parábola na janela de visualização 2, tenha levado a essa articulação por Louise.

> 3. Louise: (Varia x_A e x_B simultaneamente e observa as variações sucessivas em y na janela de visualização 2. Repete o procedimento algumas vezes. Enfatiza a forma do gráfico formado pelos valores das variações sucessivas) *Variar o A e o B… Ó, a gente percebe aqui ó . Como eu tava esquecida né… A derivada sempre, de uma função polinomial, sempre cai o grau. Deveria ter percebido isso pra fazer a questão da aula anterior… Que o gráfico seria uma parábola. Eu tô vendo isso agora .. A gente quando... Quando movimenta aqui a gente vê, que o gráfico da variação é uma parábola com a concavidade voltada pra baixo, tá vendo? Que passa um pouquinho acima do zero.*

Para relacionar o gráfico com a variação negativa em *y*, Louise enfatizou uma coordenação dinâmica das variações em *y*, ao contrário de Eric que enfatizou uma imagem estática das variações em *y* com acréscimos constantes em *x*. As inferências geradas pelo esquema de Louise relacionaram o sinal dos valores tomados em *x* com o sinal da variação de Δy, porém não relacionaram a mudança de sinal com os pontos de máximo e mínimo do gráfico da função. Louise também cometeu o equívoco relacionado à representação da variação negativa crescente/decrescente por um segmento variável. É possível perceber, no trecho a seguir, que ela se viu diante de um entrave para decidir qual dos dois significados

[14] Explore a simulação e observe as relações entre o gráfico da função (*janela de visualização 1*) e o gráfico das variações sucessivas Δy (*janela de visualização 2*). Quais as relações entre o sinal da variação (positiva ou negativa), a variação da variação (variação crescente ou decrescente) e o gráfico da função? Justifique sua resposta em termos da variação em x e y.

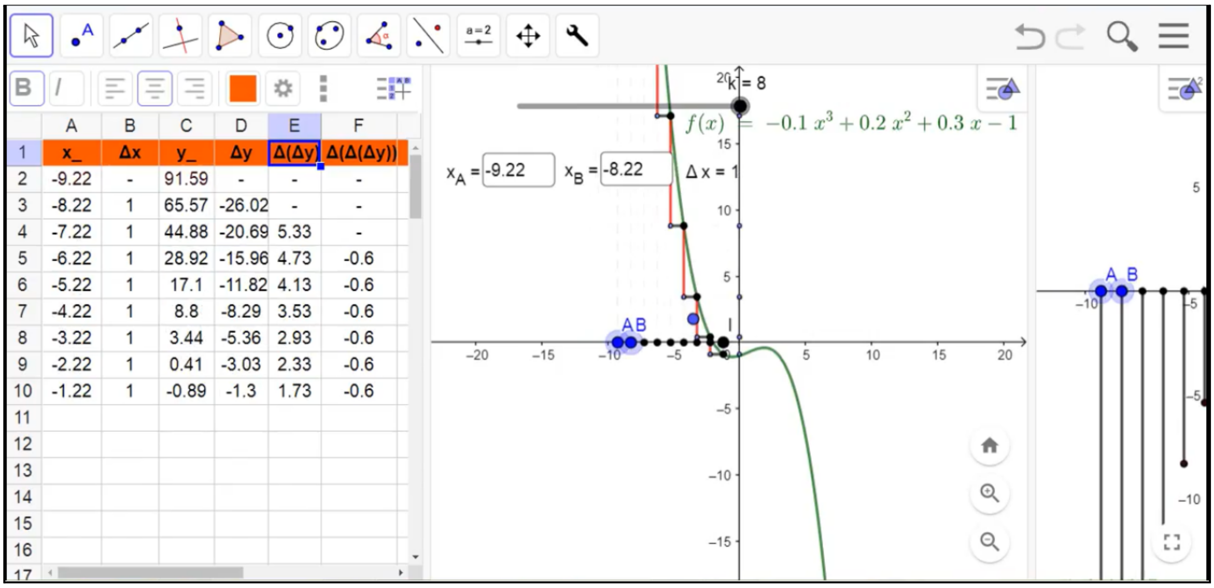
visualizados correspondia ao significado matemático correto e, finalmente, conseguiu chegar a uma conclusão válida, por meio do teorema-em-ação também mobilizado por Eric e Alice, de que os valores negativos da variação estavam se aproximando cada vez mais de zero e, por isso, deveriam ser considerados crescentes:

> 5. Louise: (Varia x_A e x_B simultaneamente por valores negativos de x. Observa as variações sucessivas em *y* na janela de visualização 2) *A gente colocou a variação de x do lado negativo, a gente vê que a variação em y, ela é negativa e... crescente, ó... A gente vê que ela começa com um valor mais negativo, né? Aí passa acima do zero e começa a decair, ou seja, vira negativa de novo, só que crescente… É… Crescente ou decrescente? Porque ela tá aumentando… Mas aqui também tá aumentando negativamente, então ela também é decrescente…. Porque o que tá aumentando é o y. A medida que o x cresce positivamente, a variação ela… decresce, negativamente. Então ó, ela começa negativa né… E vai decrescendo… Não... Crescendo… É que se ela tá mais negativa e depois vai ficando perto de zero, ela tá crescente. Então ela cresce e depois decresce. Quando a concavidade da função de terceiro grau é voltada pra baixo, a variação, ela é decrescente e quando a concavidade é voltada pra cima, a função, a variação é crescente.*

Do trecho acima, percebe-se que Louise relacionou parcialmente a variação variável com o gráfico em *y*. Ela relacionou a concavidade para cima com uma variação crescente e uma concavidade para baixo com uma variação decrescente, porém não fez referência ao ponto de inflexão. Além disso, quando mobilizou a planilha para coordenar a variação em *Δy*, Louise cometeu o equívoco de considerar *Δy* como decrescente em todo o domínio, inclusive no intervalo cuja concavidade do gráfico era voltada para cima. É possível que a origem desse equívoco tenha sido o fato de desconsiderar a variação dos valores na coluna *Δy* da planilha e se basear na coluna *Δ(Δy)* cujos valores são decrescentes (Figura 79), algo que pode ter sido confuso para Louise:

> 7. Louise: (Varia x_A e x_B simultaneamente e observa as variações sucessivas em y no gráfico da função, na janela de visualização 1 e o valor da coluna *Δ(Δy)* na planilha. Inicialmente varia os valores de *x* no intervalo para o qual a concavidade é voltada para cima, posteriormente, estende a variação também para valores positivos de *x*) *Quando a variação é negativa e é crescente, ó… A variação é negativa, a gente pode ver aqui no Δy é… crescente. Então o gráfico, quando a concavidade tá voltada pra cima, a variação da variação ela é decrescente. Ela é decrescente, ó… Já estamos no negativo e ela continua decrescente. Ela é decrescente em toda a função. A segunda derivada dessa função, ela é decrescente em todo o gráfico dessa função.*

Figura 79 – Equívoco da variação de Δy por Louise



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da produção dos estudantes

A resposta de Louise para o item 1 na ficha *online* foi confusa e não correspondeu às suas conclusões na exploração da situação. Ela não relacionou o sinal da variação com os aspectos do gráfico e persistiu no equívoco da variação decrescente em todo o domínio:

> "*A variação é positiva quando a função é crescente e negativa quando a função é decrescente. A variação da variação é decrescente em toda a função, porém é negativa para x<=0,56 e positiva partir disso, enquanto que a primeira variação é crescente até o ponto x=0,83, depois disso ela começar a decrescer.*" (Louise, item 1, situação 3)

Para explorar o segundo item[15], o esquema de Louise envolveu as regras de: variar um coeficiente dado da função e observar as variações em *y* no gráfico de variações sucessivas no item 2a e, na planilha, no item 2b. Ao contrário de Eric e Alice, Louise considerou a variação em *x* ao analisar a influência dos coeficientes na variação da função, embora, tenha feito isso

[15] Construa um modelo geral para funções polinomiais de grau até 3*. Em seguida, responda aos seguintes itens, justificando as suas respostas em termos da variação conjunta entre x e y:

a) Varie os coeficientes da função e observe as variações no gráfico das variações sucessivas. De que forma o gráfico das variações se comporta?
b) Na planilha, que relações você percebe entre a variação dos coeficientes das funções polinomiais de grau 3 e as variações nas colunas Δy, Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy))?
c) Teste os itens (a) e (b) para o caso das funções quadrática e afim. Que relações entre as funções e a sua variação você percebe nesses casos?

parcialmente e, assim como os demais, tenha tido dificuldades para coordenar a covariação complexa entre u_1, u_2, u_3, u_4, x, Δx e as variações de n-ésima ordens em *y*.

Na exploração de Louise, destacou-se uma forte referência à forma do gráfico das variações sucessivas (janela de visualização 2) para descrever a variação da função. Essa referência foi acompanhada pela mobilização do conceito de derivada, pois era conhecido de Louise que o gráfico da derivada da função polinomial de grau 3 é representado por uma parábola e ambas as janelas (função e variação da função) estavam dispostas simultaneamente. Também foi característico na atividade de Louise, mais do que na de Eric e Alice, a mobilização de representações não requisitadas no item explorado; por exemplo, ela mobilizou a planilha como suporte em um item que envolvia a ênfase no gráfico de variações sucessivas e vice-versa.

No item 2a, Louise descreveu as relações entre os coeficientes e a variação com inferências, em geral, em termos da relação entre o sinal de *x* e a variação em *y* e em como os coeficientes alteravam a forma do gráfico das variações sucessivas, o qual ela associou à derivada da função. Além disso, as descrições incluíram termos informais para a forma do gráfico (por exemplo, 'comprido' ou 'largo') e para a variação (por exemplo, 'tamanhos diferentes').

> 12. Louise: (Varia o coeficiente u_1 até o extremo negativo do controle deslizante e observa as variações sucessivas em *y* na janela de visualização 2. Enfatiza a forma do gráfico formado pelos valores das variações sucessivas. Aplica o zoom afastar para enquadrar na tela o gráfico das variações sucessivas na janela de visualização 2) *(...) Quando eu coloquei o a* (refere-se ao coeficiente u_1) *... totalmente negativo, menos cinco né? Eu consegui os valores da variação em y todos negativos. A variação, eu consegui toda negativa. Aqui a gente vê que também é uma função quadrática, só que tipo… O formato dela é bem… Bem comprida, não é larga… Não sei se tô falando direito, mas…*
> 13. Louise: (Varia o coeficiente u_2 e observa as variações sucessivas em *y* na janela de visualização 2. Aciona a planilha e observa a variação dos valores de Δy. Em seguida repete o procedimento para o coeficiente u_3 e para o u_2) *Vou mudar agora esse… Ó… Esse aqui tá mudando… Deixa eu olhar aquela tabela do meio aqui… Ó, a variação, sempre positiva (...)*
> 14. Louise: (Varia o coeficiente u_1 e observa as variações sucessivas em *y* na janela de visualização 2. Em seguida repete o procedimento para os demais coeficientes. Enfatiza a forma do gráfico formado pelos valores das variações sucessivas) *Aí ele quer saber como é que esse gráfico se comporta, ó... Se eu mexer aqui não vai adiantar de nada. Ele sempre vai continuar uma função do segundo grau, só que com … com tamanhos, não sei se posso falar assim, tamanhos diferentes. (...) É uma função do segundo grau, ele*

> *sempre vai ser assim, só que algumas vezes ele vai tá…É… Ela vai tá toda negativa no lado do y ou, no lado positivo, que nem aqui ó… Então é assim.*

A resposta de Louise para o item 2a na ficha *online* reforçou as suas inferências em relação à forma do gráfico da função e de uma relação com a derivada da função:

> *Ele se comporta sempre em formato de parábola, independente de mudarmos os coeficientes. A única coisa que muda é seu formato, se ela é mais larga, estreita, achatada, etc, bem como hora ela é crescente e depois decrescente, ou vice-versa.* (Louise, item 2a, situação 3).

No item 2b, Louise mobilizou a planilha como ferramenta de tomada de informação para coordenar a variação em Δy, $\Delta(\Delta$y) e $\Delta(\Delta(\Delta$y)), conforme variou cada coeficiente. As suas inferências foram em termos da relação entre o sinal dos coeficientes e da variação; isto é, do crescimento ou decrescimento do valor de cada variação e incluíram uma certa referência à invariância, porém de forma limitada ao intervalo explorado e sem relação com o modelo algébrico como um todo. Louise permaneceu articulando suas inferências com a derivada da função, como se vê no trecho seguinte:

> 16. Louise: (Varia o coeficiente u_1 e observa a variação do valor de *Δy*, *Δ(Δy)* e *Δ(Δ(Δy))* na planilha) *Quando eu modifico o primeiro coeficiente ó… A primeira variação de y ela é meio que inconstante… A gente tem menos dez, depois tem três, cinco, aí menos quatro, vinte e quatro, menos cinquenta e seis, menos cem , menos cento e cinquenta e cinco. Ele começa negativo ne? Depois cresce, depois decresce novamente. Na segunda variação ele começa positivo, a variação, decresce, e vai decrescendo sempre. A terceira variação é um número constante. Isso porque é como se fosse, que é a terceira derivada né? Primeira derivada é a função do segundo grau, segunda derivada é a função afim, terceira derivada é a função constante, por isso que não se mexe.*

Quando Louise explorou a influência dos coeficientes na variação das funções afim e quadrática no item 2c, as suas inferências foram voltadas para a articulação entre a invariância na n-ésima ordem e a derivada da função. Nesse sentido, foi fundamental para Louise (assim como para Alice) relacionar a invariância nas colunas da planilha com a forma do gráfico da derivada na janela de visualização 2:

> 24. Louise: (Varia u_2 por valores negativos. Observa a variação em *Δy , Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy))* na planilha com o suporte do gráfico de variações sucessivas. Em seguida, repete o procedimento para u_3 e u_4) *Vamos lá, se eu colocar esse*

> *aqui negativo ó, a gente vê que a primeira variação ela é decrescente e a segunda é constante. A terceira não existe porque vai ser a derivada de uma constante, a derivada de uma constante é zero. Se eu movimentar esse aqui, continua a mesma coisa, tá vendo? Decrescente. E esse aqui não interfere em nada. Se eu colocar aqui positivo, o do x ao quadrado, ela vai ser crescente, ta vendo?(...) Então, se for negativo, se o primeiro coeficiente da função quadrática for negativo, a segunda variação vai ser decrescente. A gente também pode tirar por aqui pelo gráfico também (...)*
> 25. Louise: (Define u_1=0 e u_2=0. Varia x_A e x_B simultaneamente e observa as variações em *Δy , Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy))*) *Agora a gente vai zerar aqui pra virar uma função afim. Pronto. Na função afim, a gente só vai ter variação do…. De nenhum né? Porque, tipo, só varia o y aqui, porque a sua primeira derivada já vai ser uma constante. Então acho que seja isso.*

A resposta de Louise para o item 2c na ficha *online* também manteve o foco nas relações com a derivada das funções:

> *Para a função quadrática temos que sua variação será sempre uma reta crescente se a parábola for com concavidade voltada para cima e decrescente caso contrário. Para a função afim temos que sua variação será sempre uma constante, independente de qual seja.* (Louise, item 2c, situação 3).

Em síntese, a atividade de Louise revelou os seguintes aspectos: (i) as inferências – sobre as relações entre o gráfico da função e a variação da função e entre o modelo algébrico e a variação da função – foram voltadas para a articulação entre a variação e a derivada da função; (ii) a persistência de descrições da covariação em termos do sinal das variáveis, embora parcialmente, incluíram referências à variação variável, porém insuficientes para quantificar a covariação, dificuldades em visualizar relações entre aspectos do gráfico como pontos de máximo, mínimo e inflexão e a variação da função e uma dificuldade (posteriormente superada) em interpretar o significado da variação negativa crescente/decrescente representada por segmentos variáveis; (iii) a limitação em coordenar e formalizar relações entre os coeficientes da função e as variações de n-ésima ordem, que, na sua maioria, não levaram em consideração a variação em *x* e na qual pode estar envolvido o papel da covariação complexa como uma dificuldade.

Do ponto de vista das relações dos resultados com a transposição informática do material, foram destacados os seguintes pontos: (i) a influência da restrição da representação da variação negativa por segmentos variáveis na geração de equívocos e dificuldades no raciocínio covariacional; (ii) a contribuição da articulação dinâmica e simultânea entre a variação das variáveis em x e a ferramenta das variações sucessivas, para que Louise relacionasse parcialmente a variação variável com o gráfico e superasse o seu entrave com a variação negativa; (iii) uma limitação em coordenar a covariação entre mais de duas variáveis, mesmo com todo o suporte e a integração representacional dinâmica desenhadas; nesse caso, é possível que a coordenação da covariação complexa demande o desenvolvimento de esquemas de exploração mais específicos pois, assim como Eric e Alice, o esquema de Louise também não deu conta de explorar a covariação complexa na sua totalidade.

4.7.4 Aspectos gerais da atividade de Eric, Alice e Louise no contexto da sessão 6 e da situação 3

De forma geral, os resultados da exploração da situação 3 destacaram dois aspectos na atividade de Eric, Alice e Louise: em primeiro lugar, o papel da ferramenta de variações sucessivas integrada ao gráfico como suporte para os estudantes explorarem o gráfico covariacionalmente, articulando aspectos do gráfico com a variação da função, sobretudo, a exploração de dois aspectos críticos que causaram dificuldades nas sessões anteriores, a variação variável e a variação negativa; em segundo lugar, a dificuldade na coordenação da covariação complexa entre os coeficientes da função, os valores da variável em x, Δx e as n-ésimas variações em y, o que limitou as inferências dos estudantes sobre os padrões de variação em funções polinomiais.

Entre as dificuldades encontradas, destacaram-se: (i) no primeiro item, a dificuldade de Louise em visualizar relações entre aspectos do gráfico e a variação da função e em interpretar o significado da variação negativa, embora ela, assim como Eric e Alice, tenha conseguido superar o entrave causado pela representação da variação negativa por meio do teorema-em-ação que considera que, se valores negativos se aproximam cada vez mais de zero, esses valores são crescentes; (ii) no segundo item, a dificuldade de todos os estudantes – mas principalmente de Eric, para coordenar a covariação complexa e inferir relações entre o modelo algébrico da função e a variação em y, limitando as suas descrições às relações isoladas e locais entre cada coeficiente e a variação na n-ésima ordem de y.

Do ponto de vista da transposição informática envolvida no material do Geogebra, destacou-se a contribuição da ferramenta de variações sucessivas e a sua integração com as diferentes representações e ferramentas do Geogebra: gráfico, controles deslizantes, modelo algébrico e planilha; também houve uma importante limitação da articulação entre o modelo algébrico e a planilha, quando mobilizada no contexto da covariação complexa. Por fim, destacou-se, mais uma vez, o papel da restrição envolvida na representação da variação negativa por segmentos variáveis na emergência de entraves e equívocos.

A contribuição da ferramenta de variações sucessivas pode estar intimamente relacionada à transposição informática envolvida no seu *design*: a construção permitiu visualizar a variação em y com acréscimos constantes em x, por meio de segmentos dinâmicos, o que contribuiu para a transição das referências da variação em x nos pontos especiais do gráfico (como valores de x dos pontos de máximo, mínimo e zeros) para a variação em x coordenada por acréscimos constantes, tornando mais efetiva a coordenação da variação variável.

Além disso, essa ferramenta integrou diferentes representações simultaneamente, o que forneceu um importante suporte pela complementaridade de cada representação e de cada ferramenta integrada: quando os estudantes quiseram relacionar a variação em y com o gráfico, recorreram a janela de visualização 1, quando quiseram coordenar as variações sucessivas em y (crescente ou decrescente) ou relacionar essa variação com a derivada da função, recorreram ao gráfico de variações sucessivas; o papel da planilha foi limitado pelo contexto no qual foi instrumentalizada a covariação complexa, porém, ainda assim, deu suporte na exploração do padrão variacional das funções, sobretudo afim e quadrática, a partir da quantificação da invariância na variação da n-ésima ordem.

Já a dificuldade dos estudantes em coordenar a covariação complexa superou a disponibilidade de um conjunto de ferramentas integradas dinamicamente em múltiplas representações. O fato de os estudantes coordenarem a covariação complexa a partir de esquemas voltados para a covariação simples entre duas variáveis, sugere a necessidade do desenvolvimento de esquemas específicos para a coordenação da covariação envolvendo mais de duas variáveis.

A evolução das gêneses de Eric, Alice e Louise revelou, na situação 3, a evolução em aspectos do raciocínio covariacional como a variação variável e a variação negativa, bem como a leitura covariacional do gráfico, por meio da instrumentalização da ferramenta de variações sucessivas e, por outro lado, a necessidade de esquemas específicos para a coordenação da covariação em situações de covariação complexa.

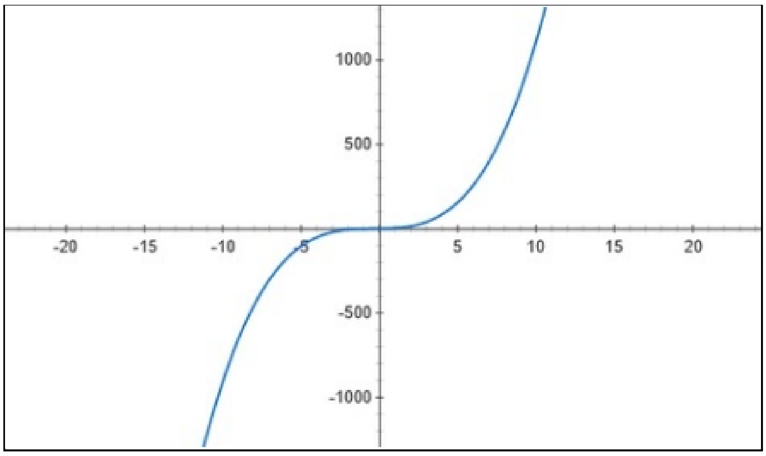
4.8 ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

Nesta seção são analisadas as entrevistas baseadas em tarefas aplicadas com os sujeitos.

4.8.1 Análise da entrevista com Eric

No início da entrevista, Eric foi reapresentado ao gráfico que ele descreveu no questionário inicial do curso, antes de iniciarem as sessões. O gráfico havia sido apresentado aos estudantes com a seguinte questão: "*Como você descreveria o comportamento das variáveis de uma função representada no gráfico abaixo?*" (Figura 80). Em seguida, ele foi questionado se, após a vivência do curso, alteraria ou complementaria a sua resposta com relação ao comportamento das variáveis e, se sim, de que forma faria.

Figura 80 – Gráfico do questionário apresentado na entrevista de Eric



Fonte: Criado pelo autor utilizando o traçador gráfico do Google.

A resposta anterior de Eric havia sido:

> *À medida que a variável independente cresce, a variável dependente cresce também (a função é estritamente crescente). A variável dependente apenas se anula quando a variável independente se anula (o gráfico da função passa pela origem). Aparentemente, o gráfico obedece a relação de que para cada um dos seus pontos, a variável dependente é o cubo da variável independente.* (Eric, questionário)

Após ler a sua resposta, ele propôs alterar a descrição:

> 6. Eric: *Eu daria mais detalhes... Eu basicamente disse que a função ela é crescente (...) Eu poderia dizer com mais detalhes de como estaria ocorrendo esse crescimento, ou seja, ali nesse primeiro trecho que é que os valores de x (são) menores que zero, eu mencionar um pouco sobre a concavidade, essa concavidade aí quando o x é menor que zero é uma concavidade voltada pra baixo. A taxa de variação é 'crescen'... a taxa de variação é positiva nesse intervalo porque a função é crescente, mas eu poderia fazer outras observações, como: 'a taxa de variação é positiva, mas ela é decrescente'. Eu posso ta errado e ter esquecido, mas acho que é isso. Eu posso ta errado. Mas acho que é isso. A taxa de variação aí, à medida que o x se aproxima de zero pela esquerda, ou seja, por valores negativos, a taxa de variação que é positiva ela tá diminuindo né? Ela é decrescente...*
> 7. Pesquisador: *Certo, no caso, a taxa de variação é decrescente?*
> 8. Eric: *Isso, e aí, para valores de x maiores que zero, a taxa de variação continua positiva, só que agora ela é... Na verdade ela é 'crescen'... É, agora ela é crescente. Isso. Foi uma observação que eu não fiz no começo porque eu não tinha essa compreensão e, eu comecei a prestar atenção nisso depois do curso. Então além da função ser crescente, eu posso afirmar que a taxa de variação é positiva, com exceção do x = 0, né? Quando o x = 0, não, mas ali nos outros pontos a taxa de variação é positiva e pra os valores de x negativos, ela é decrescente e pra os valores de x positivos ela é crescente. Eu faria essa observação a mais , também, hoje.*

A alteração proposta por Eric incluiu uma interpretação mais rica do gráfico, no sentido de uma imagem não apenas da variação em *y* com a variação em *x*, mas também da forma como essa variação é quantificada, por meio da consciência da taxa de variação. Eric descreveu o primeiro intervalo (do início do intervalo até o zero) com uma taxa de variação positiva e decrescente; após o zero, ele descreveu a taxa de variação como positiva e crescente. A princípio, Eric poderia ter chegado à conclusão de uma taxa crescente ou decrescente apenas por meio da concavidade do gráfico, porém, a resposta dele à questão seguinte mostrou que ele visualizou uma imagem dinâmica da variação de Δy e Δx para interpretar a covariação no gráfico.

Eric foi questionado sobre quais ferramentas usadas no curso ele considerou que contribuíram para o seu raciocínio covariacional, ou seja, para visualizar o gráfico no sentido de como as variáveis variam. Eric destacou o papel da ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx:

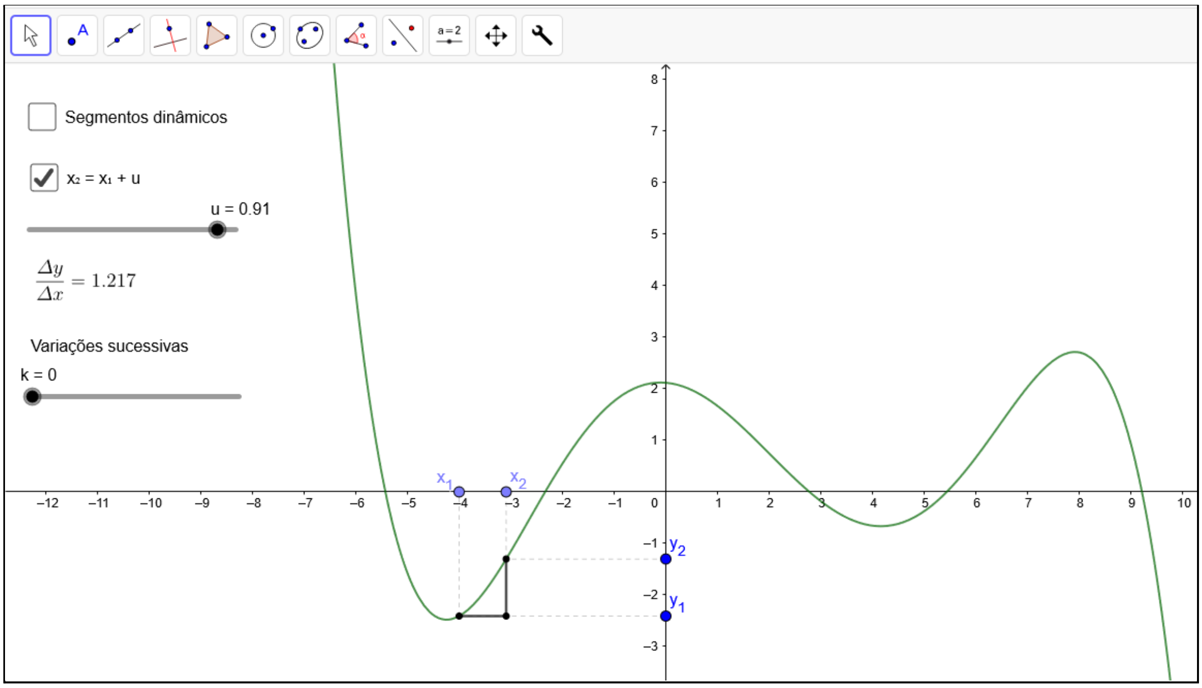
> 10. Eric: *Então, todas tiveram um grande impacto pra esse tipo de raciocínio, mas sem dúvida quando eu olho para o gráfico eu to vendo*

> *aqueles segmentos de reta que variavam, aqueles que quando você construía aqueles segmentos que mostravam o delta y e o delta x e a medida que iam avançando a gente conseguia ver o delta y, geralmente tava la de uma cor diferente, e aí ele aumentava, ele diminuía, então é aquilo que eu enxergo quando tento fazer essa análise, então acho que era a construção daqueles segmentos que você definia pra o delta y e pra o delta x, geometricamente.*

A fala de Eric deixou explícito o seu uso instrumentado da ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx para interpretar o gráfico e a contribuição dessa ferramenta para o seu raciocínio covariacional.

Em seguida, Eric recebeu o link de um material no Geogebra e foi solicitado a explorar duas situações semelhantes às situações exploradas nas sessões do curso. O material integrou na tela todas as ferramentas usadas para explorar a covariação durante o curso, além disso exibiu o gráfico de uma função polinomial de grau 5 (Figura 81). Foram dispostas três ferramentas no canto superior esquerdo da tela: segmentos dinâmicos, variação dinâmica entre Δy e Δx e variações sucessivas.

Figura 81 – Material explorado por Eric na entrevista



Fonte: Elaborado pelo autor

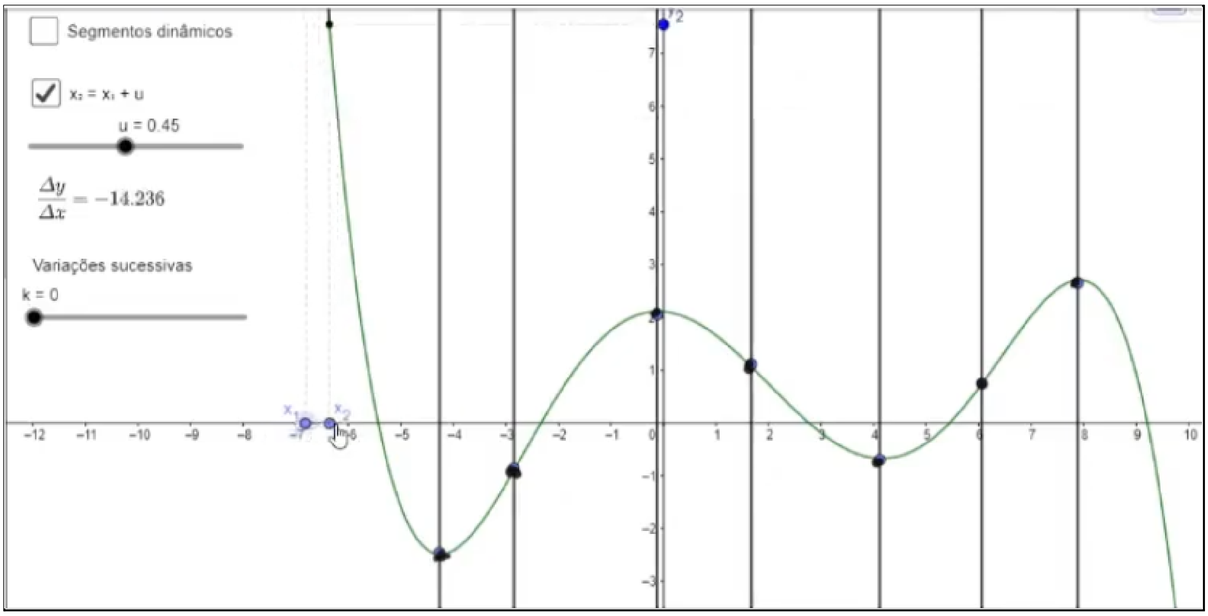
Na primeira situação, Eric foi solicitado a dividir o gráfico em intervalos nos quais ele considerou que a função mudou a forma como ela varia, considerando crescimento, decrescimento e variação variável. Em seguida, ele deveria descrever, em cada intervalo, como as variáveis variaram entre si.

Eric decidiu usar a ferramenta que ele escolheu como a que mais contribuiu para o seu raciocínio covariacional: a ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx, consequentemente, ele mobilizou o conceito em ação de taxa de variação para interpretar as mudanças na variação em *x* e *y*. As regras de ação do seu esquema envolveram ajustar o valor de Δx por meio do controle deslizante, variar x_A e x_B simultaneamente e observar a variação da taxa de variação média exibida na tela.

> 35. Eric: (Aciona a ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx. Reduz o valor de Δx e define $\Delta x=0,45$ por meio do controle deslizante *u*. Varia os valores de x_1 e x_2 simultaneamente do início do intervalo até um pouco depois do valor de *x* do primeiro ponto de mínimo. Observa a variação do valor da taxa de variação na caixa de texto) *Pronto, eu vou começar pelo recurso que eu disse que acho mais interessante… Esse segundo aqui. E aí, eu vou dar uma reduzida aqui no delta x. E aí esse primeiro intervalo ele é nitidamente decrescente, isso é tranquilo, e a taxa de variação ela vai se tornando cada vez menor, até chegar a um ponto aqui em baixo em que esse comportamento muda, ele torna-se crescente, então vou começar marcando esse ponto. Agora tá aí, eu não consigo visualizar a caneta.*
> 36. Pesquisador: *Você tem que subir um pouquinho na barra de rolagem, no lado direito.*
> 37. Eric: *Aqui...*
> 38. Eric: (Com a caneta, marca um ponto no gráfico próximo ao primeiro ponto de mínimo) *Eu vou marcar primeiro um ponto por aqui.*

Para dar suporte à sua análise, após marcar cada ponto de mudança com a caneta, Eric definiu pontos em cada marcação e traçou retas perpendiculares ao eixo *x* passando por esses pontos. Mobilizando o mesmo esquema e enfatizando a representação numérica do valor da taxa de variação, Eric descreveu o comportamento da taxa de variação nos diferentes pontos do gráfico nos quais considerou que havia a mudança na forma como as variáveis mudam: pontos de mínimo, pontos de máximo e pontos de inflexão (Figura 82).

Figura 82 – Definição de intervalos de mudança no comportamento da variação por Eric



Fonte: Elaborado pelo autor

As descrições de Eric relacionaram todos os aspectos do gráfico com a forma como a taxa de variação se comporta em cada um desses aspectos, embora ele tenha escolhido um valor para Δx relativamente grande, suas inferência parecem considerar a taxa de variação no ponto. Eric já havia construído essas inferências em situações anteriores.

Para Eric, o uso da representação numérica para coordenar a variação da taxa se sobrepôs aos segmentos dinâmicos, porque nessa representação ele podia obter, com mais clareza, os valores para os quais havia uma mudança na forma como a função variava. De fato, no caso de um ponto de inflexão, por exemplo, a representação numérica tornava mais claro o 'momento' da mudança do sentido de crescimento da taxa de variação, do que na representação por um segmento variável, na qual muitas vezes se tinha um tamanho muito pequeno na tela para permitir uma visão clara da variação do seu comprimento. O trecho a seguir mostra a descrição de Eric da covariação em um dos pontos de inflexão:

> 42. Eric: (Varia os valores de x_1 e x_2 simultaneamente do valor de *x* do primeiro ponto de mínimo até um pouco depois do valor de *x* do ponto de inflexão. Observa a variação do valor da taxa de variação na caixa de texto. Com a caneta, marca um ponto no gráfico próximo ao primeiro ponto de inflexão) *Pronto, aí aqui é crescente e a taxa de variação ela tá aumentando. Deixa eu voltar ali pra prestar atenção, a taxa de variação tá aumentando. Agora eu to olhando aqui, eu to olhando pelo numerozinho* (refere-se ao valor da taxa de variação na caixa de texto)*... Um vírgula três dois nove... Aí ela tá aumentando, aumentando... seis , sete , quatro, aí depois ela começa a diminuir, ó... Tem um momento que ela tá aumentando,*

> *sete três oito, sete quatro cinco… sete três quatro, então tem um ponto aqui em que a taxa de variação começa a diminuir, mais ou menos por aqui. Deixa eu pegar a caneta de novo. A taxa de variação continua sendo positiva, só que ela começa a decrescer. Eu vou marcar mais ou menos por aqui.*

Eric enfrentou novamente uma situação de variação negativa variável, nesse caso, crescente. Ele mobilizou o teorema-em-ação desenvolvido em situações anteriores, de que se uma função varia por valores negativos enquanto se aproxima de zero, essa variação é crescente. Ele não demonstrou dificuldades em prosseguir com a análise:

> 45. Eric: (Varia os valores de x_1 e x_2 simultaneamente do valor de *x* do segundo ponto de inflexão até um pouco depois do valor de *x* do segundo ponto de mínimo. Observa a variação do valor da taxa de variação na caixa de texto. Com a caneta, marca um ponto no gráfico próximo ao segundo ponto de mínimo.) *A ideia desse intervalo aqui é que tá negativo, a taxa de variação, só que tá crescendo, crescendo, crescendo até chegar em zero. E depois continua aumentando. Positivo e aumentando. Então aqui em baixo eu marco outro ponto...*

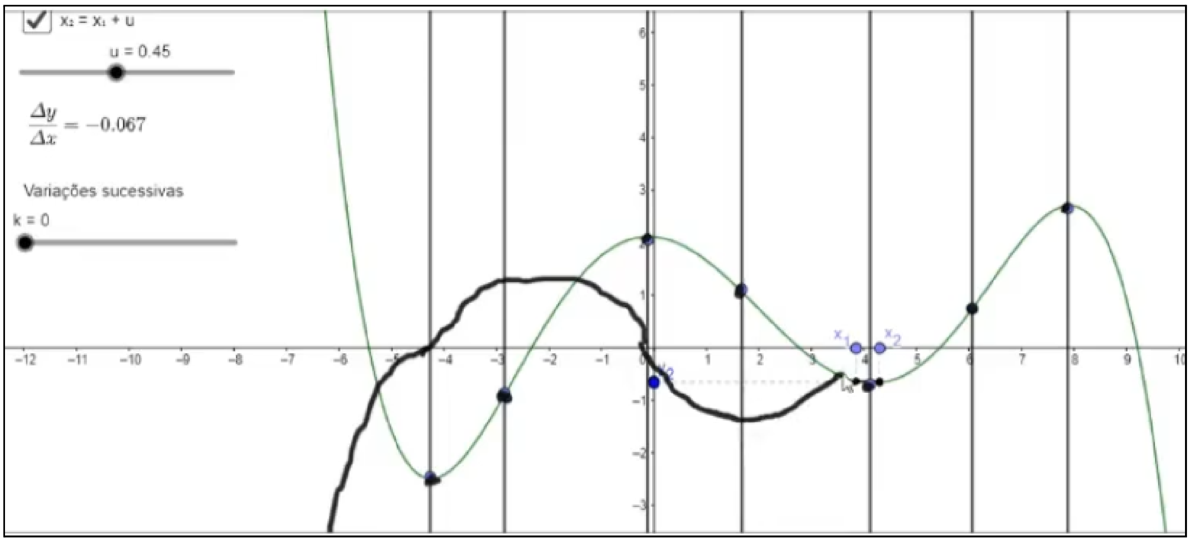
Eric não pareceu ter quantificado completamente a variação variável da taxa de variação, uma vez que ele descreveu-a como crescente ou decrescente, porém suas descrições não apontam que ele tenha visualizado uma taxa de variação que crescia cada vez mais ou menos conforme ele variava o valor de *x* (esse era o caso da função abordada). A forma do gráfico da taxa de variação que Eric desenhou na situação seguinte expressa a variação variável da taxa, porém a ausência de referência à variação variável nas suas descrições sugerem que a forma do gráfico tenha sido traçada por ele ter pré-concebida a imagem do gráfico da taxa como uma curva suave e côncava.

O uso, por Eric, da ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx sugere um raciocínio covariacional contínuo suave em construção, pois nessa ferramenta o foco está na construção de uma variação contínua da taxa de variação, conforme Δy e Δx variam continuamente e simultaneamente, em vez da construção de uma variação segmentada por acréscimos constantes em delta *x*. No entanto, o raciocínio contínuo suave é em construção porque: (i) Eric segmentou a variação em intervalos para construir o esboço do gráfico; (ii) Eric não quantificou a variação variável da taxa de variação, apenas descreveu-a como crescente ou decrescente.

Na segunda situação proposta na entrevista, Eric foi solicitado a esboçar um gráfico da taxa de variação em função de *x*, usando as ferramentas da sua escolha. Ele resolveu aproveitar a divisão do gráfico por intervalos que fez na situação anterior. O seu esquema envolveu as seguintes etapas: (i) variar x_A e x_B simultaneamente; (ii) coordenar a variação do valor de Δy/Δx na caixa de texto, de forma a antecipar mentalmente uma imagem contínua da variação de Δy/Δx no intervalo, em termos de crescimento/decrescimento e, por fim, (iii) traçar uma curva suave em cada intervalo. O trecho seguinte mostra uma etapa do esboço do gráfico por Eric (Figura 83):

> 73. Eric: (Varia os valores de x_1 e x_2 simultaneamente, do valor de *x* do primeiro ponto de máximo até um pouco depois do valor de *x* do segundo ponto de mínimo, passando pelo segundo ponto de inflexão. Observa a variação do valor da taxa de variação na caixa de texto) *E aí esse é o terceiro intervalo. Aí chegou aqui, aí ela fica negativa e decrescente, até que chega a um ponto que ela para de decrescer.. continua negativa, mas começa a crescer, até chegar em zero. Daqui ela é negativa decrescente, chega num ponto mínimo, para de decrescer e começa a crescer até atingir o zero.*
> 74. Eric: (Com a caneta, traça uma curva côncava para cima entre o valor de *x* do primeiro ponto de máximo da função (segundo zero da taxa) e o valor de *x* do segundo ponto de mínimo da função (segundo zero da taxa), passando pelo ponto de inflexão da função (primeiro mínimo da taxa)) *Então, caneta… Aqui decresce, aí no fim desse intervalo aqui tem um valor mínimo e cresce, até no fim desse intervalo atingir o zero.*

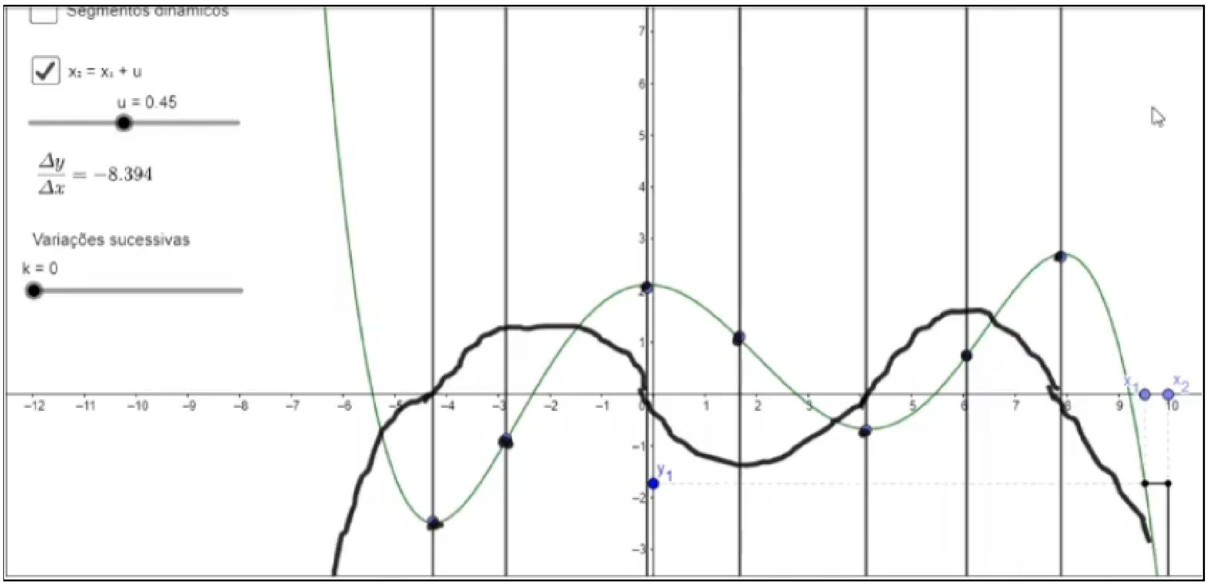
Figura 83 – Etapa do traçado do gráfico por Eric na entrevista



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

O esquema mobilizado por Eric foi muito semelhante ao que ele mobilizou para construir o gráfico da taxa de variação no item 3 da situação 2, vivenciada na sessão 5; a diferença é que, na situação proposta na entrevista, ele teve o suporte das segmentações construídas no gráfico e pôde construir imagens segmentadas, em vez de uma imagem global da variação da taxa. Além disso, pode ser destacado o fato de que Eric também não recorreu à planilha ou à criação de uma lista de pontos de *x* e de Δy/Δx para construir o gráfico, o que sugere que ele se baseou em uma imagem contínua da covariação em cada intervalo, em vez de mobilizar esquemas ligados ao ambiente papel e lápis. O gráfico final esboçado por Eric é exibido na Figura 84.

Figura 84 – Gráfico esboçado por Eric na entrevista



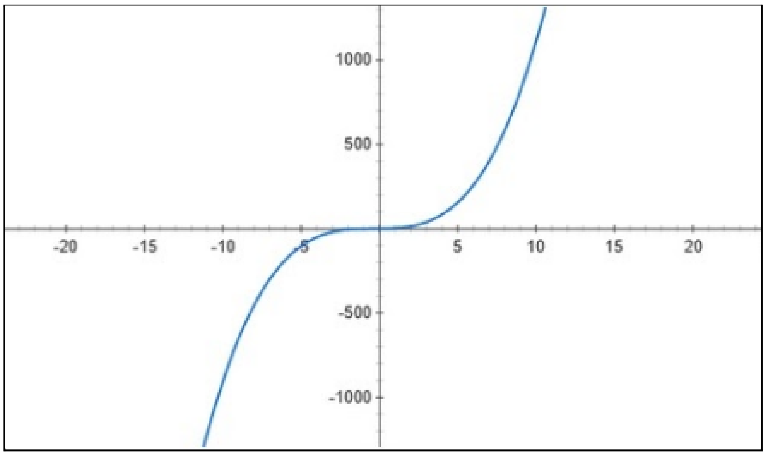
Fonte: Elaborado pelo autor a partir da produção dos estudantes

Mais uma vez, é necessário destacar que – com relação à forma do gráfico da taxa de variação que Eric desenhou – a ausência de referência à variação variável nas suas descrições sugerem que a forma do gráfico foi construída por ele ter uma imagem pré-concebida do gráfico da taxa como uma curva contínua e côncava. As descrições de Eric ao traçar o gráfico da taxa limitaram-se a referências ao crescimento ou decrescimento da taxa conforme se variava os valores em *x*. Ou seja, o esquema de exploração de Eric, na primeira situação, permitiu que ele interpretasse a variação variável a partir do gráfico, mas o seu esquema de esboço do gráfico não o levou a visualizar a variação variável e fundamentar o esboço nessa variação.

4.8.2 Análise da entrevista com Alice

No início da entrevista, Alice foi reapresentada ao gráfico do questionário inicial do curso, com a seguinte questão: "*Como você descreveria o comportamento das variáveis de uma função representada no gráfico abaixo?*"(Figura 85). Ela foi questionada se, após a vivência do curso, alteraria ou complementaria a sua resposta com relação ao comportamento das variáveis e, se sim, de que forma faria essa alteração/complemento.

Figura 85 – Gráfico do questionário apresentado na entrevista com Alice



Fonte: Criado pelo autor utilizando o traçador gráfico do Google.

A resposta anterior de Alice havia sido:

> *É uma função de grau 3, onde, para cada X existe apenas um Y correspondente, de forma que o conjunto imagem é todo R. A medida que X cresce Y cresce, a medida que X diminui (decresce) Y diminui. Números opostos do domínio tem imagens opostas, desse modo, caracteriza-se com função ímpar.* (Alice, questionário)

Após ler a sua resposta dada anteriormente, Alice propôs complementar a sua descrição para incluir uma visão da sua variação variável:

> 13. Alice: *(...) Eu complementaria falando em relação à 'variável da variação', aquilo que a gente viu em covariação (...) que fala sobre o sinal da variação, sobre a variação da variação… Sobre o sinal da variação não é tão claro pra mim ver só o gráfico, não ver valores. Então eu falaria em relação à variação da variação, que é aquilo de crescente, decrescente… Vindo da esquerda do gráfico, nessa parte onde…. Na parte negativa do x eu diria que aí a gente tem uma variação decrescente até esse ponto de inflexão*

> *que é mais ou menos na origem, e a partir daí a gente tem uma variação crescente.*
> 14. Pesquisador: *Certo, quando você fala 'a variação' você se refere à variação da variação ou à função em si?*
> 15. Alice: *À variação da variação.*

Por um lado, Alice mostrou que desenvolveu uma visão do gráfico que envolve uma consciência da variação variável; por outro, ela revelou a sua dependência da representação numérica, sobretudo na planilha, como suporte à sua interpretação covariacional do gráfico.

Quando Alice foi questionada sobre quais ferramentas usadas no curso ela considerou que contribuíram para o seu raciocínio covariacional, para visualizar o gráfico no sentido de como as variáveis mudam, ela destacou o papel da representação numérica tabular por meio da planilha:

> 26. Alice: *Eu acho que, pra mim, o que mais me ajudou foi os dados que eu colocava na planilha, porque ver só o gráfico eu não conseguia interpretar bem, mas quando ia pra os valores que estavam lá na planilha, as ideias ficavam mais claras.*

A resposta de Alice mostra como ela instrumentalizou a planilha como suporte para explorar o gráfico covariacionalmente. Também ficou nítida a relação com a dificuldade em visualizar o sinal da variação apenas a partir do gráfico na primeira pergunta. O esquema de Alice para explorar a covariação foi baseado, sobretudo, no uso da representação numérica e tabular da planilha, especialmente para exibir os valores das variáveis.

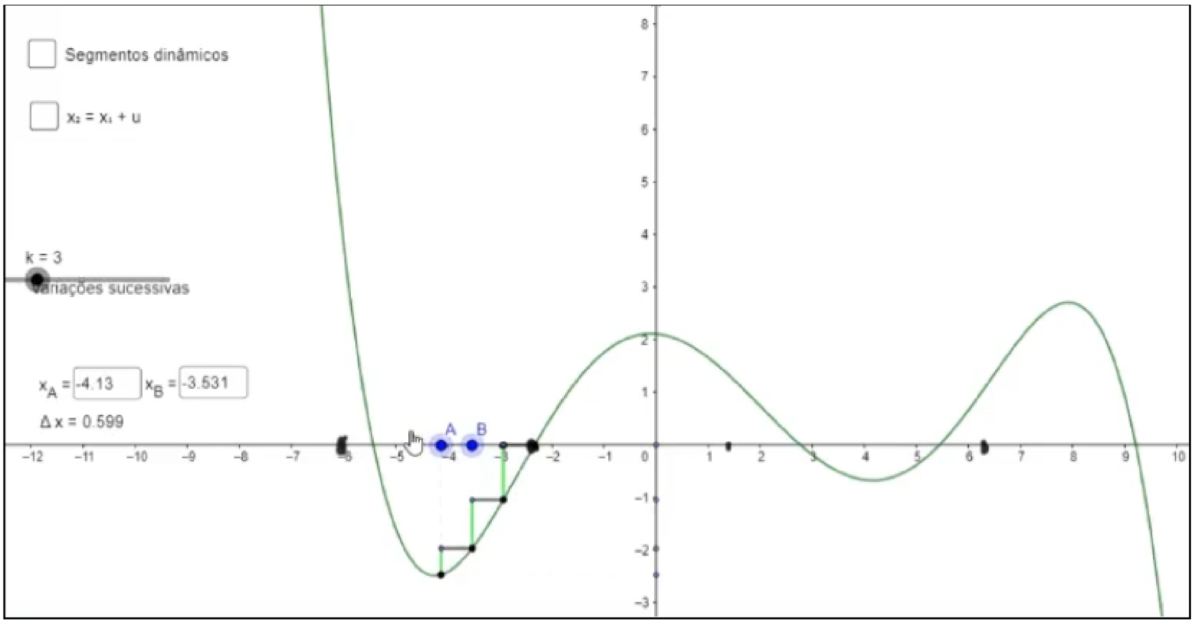
Em seguida, Alice foi solicitada a explorar as duas situações que também foram exploradas por Eric, envolvendo a covariação no gráfico de uma função polinomial de grau 5 e o esboço do gráfico da taxa de variação desta função. Na primeira situação, Alice foi solicitada a dividir o gráfico em intervalos nos quais ela considerou que a função alterou a forma como varia considerando os pontos subsequentes: crescimento, decrescimento e variação variável. Em seguida, ela deveria descrever, em cada intervalo, como as variáveis variaram entre si.

Alice mobilizou a ferramenta de variações sucessivas para dar suporte à sua exploração e posteriormente marcou com a caneta os pontos que ela considerou que houve mudança na forma como a função variou:

> 42. Alice: (Aciona a ferramenta de variações sucessivas, varia os valores dos intervalos sucessivos em x e observa as variações em y) *Certo...*
> 43. Alice: (Aciona a ferramenta caneta. Marca valores no eixo x próximos às coordenadas em x referentes aos seguintes pontos: primeiro zero, primeiro ponto de inflexão, segundo ponto de inflexão e terceiro ponto de inflexão)
> 47. Alice: *Pronto, eu vou utilizar só essa ferramenta das variáveis sucessivas pra fazer a análise desse intervalo que eu marquei aqui do menos seis até esse aqui entre o menos três e o menos dois, em relação a ser crescente ou decrescente, como essa questão de ser crescente ou decrescente é a concavidade que determina, então se aqui a gente tem a concavidade voltada pra cima, a variação ela é crescente. Os tracinhos vermelhos significam que o sinal é negativo, só que ele vem crescendo cada vez menos, considerando esses tracinhos por exemplo, em módulo, ele vem crescendo cada vez menos até um ponto aqui que seria o ponto de mínimo, onde a partir desse ponto ele continua a ter essa variação crescente, só que a partir do ponto de mínimo há a mudança de sinal. Antes do ponto de mínimo, negativo; após o ponto de mínimo, positivo; porém sempre crescente, até mais ou menos esse ponto aqui que seria o ponto de inflexão, que é onde acontece a mudança de concavidade e, a partir daí, a gente continua com o sinal positivo. Mas como a concavidade ela é voltada para baixo, a variação ela passa a ser decrescente. E lá no ponto de máximo, vai ter a mudança de sinal de novo, o tracinho novamente começa a ficar vermelho, até mais ou menos esse ponto, que eu marquei aqui, que no caso seria mais um ponto de inflexão, mudou a concavidade, agora ele vinha decrescendo, a variação passa a ser novamente crescente. Novamente outro ponto de mínimo e com isso mais uma alteração no sinal, porém continua crescendo, até o próximo ponto de inflexão, mais ou menos por aqui, onde a concavidade é voltada pra baixo, então, a variação vai ser decrescente; outro ponto de máximo, onde tem a mudança de sinal e vai decrescer...*

Embora Alice tenha marcado pontos referentes apenas aos zeros e aos pontos de inflexão (Figura 86), a referência, na sua fala, aos pontos de máximo e mínimo mostra que ela também visualizou a mudança nesses pontos. As suas descrições relacionaram os diferentes aspectos do gráfico com a variação variável, embora ela não aprofundou como essa variação foi quantificada ao longo do gráfico. O trecho transcrito também aponta que Alice mostrou, mais uma vez, uma interpretação consolidada da variação negativa.

Figura 86 – Definição de pontos de mudança no comportamento da variação por Alice



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da produção dos estudantes

Quando Alice relacionou a concavidade à variação variável, ela foi questionada se essa relação foi feita mantendo-se uma imagem de como as variáveis estavam variando ou apenas por uma associação com a concavidade. Ela afirmou ter recorrido à concavidade como referência para interpretar a variação variável e, também, às cores dos segmentos dinâmicos, como referência para interpretar o sinal da variação (por escolha de *design,* quando Δy era positivo, o segmento era representado pela cor verde e, quando negativo, pela cor vermelha).

> 53. Alice: *No início do curso, nas primeiras sessões, era bem difícil fazer essa análise, mas aí com o passar do tempo você vai entendendo e eu acho que vai ficando na memória essa questão da concavidade, mas também o motivo de eu ter usado essa ferramenta das variações sucessivas é a questão das cores também, como a gente tinha visto no curso, quando tá vermelho, o sinal é negativo… Mas se é negativo, significa que cada vez que esse tracinho ele tiver diminuindo, então tá crescendo, se ele tiver verde, se ele tiver crescendo, então ele tá crescendo. Acho que são essas duas coisas que me ajudaram nessa análise.*

Entretanto, não ficou claro se, apesar de fazer essas associações, Alice mantinha ou não uma imagem das variáveis variando entre si enquanto analisava a covariação no gráfico. Embora durante o curso ela tenha construído relações entre a forma do gráfico e a taxa de variação, é possível que – após um certo tempo – ela tenha criado uma regra no seu esquema para associar a concavidade e o comportamento da taxa e, com isso, a imagem das variáveis variando tenha perdido ênfase, embora ela estivesse implícita.

Alice também foi questionada se entendia o que envolve, em termos de variáveis, o sinal da variação, representado pelas cores verde ou vermelha, ou seja, o que distingue um sinal positivo da variação do sinal negativo. A princípio, ela teve dificuldade em explicitar essa distinção e chegou a explicitar a sua dependência da planilha para realizar essa análise, embora não tenha mobilizado essa representação. Finalmente, ao ativar a exibição dos rótulos e dos pontos associados aos valores da variável em *y*, ela conseguiu relacionar a mudança do sinal com a inversão entre os pontos y_1 e y_2 no eixo *y* e, mais precisamente, com as propriedades crescente e decrescente da função:

> 54. Pesquisador: (…) *E essa variação, no caso, quando ela tá vermelho, quando ela tá verde, foi uma coisa que eu coloquei pra ajudar no software, mas o sentido dessas cores (...) o sentido matemático disso você consegue visualizar também essa distinção entre o verde e o vermelho?* (...)
> 55. Alice: *Eu não tenho me voltado muito pra essa questão justamente por isso, por ter compreendido essa análise, então eu me voltava só pra ela, não tinha pensado nesse outro lado. Ou então, quando não tinha essas ferramentas eu abria a planilha e colocava na planilha, aí eu conseguia concluir pelos valores, mas eu nunca tinha pensado nessa relação que você tá falando.*
> 64. Pesquisador: *Uma sugestão seria clicar no f(A) e f(B) e fazer com que os rótulos deles apareçam, talvez possa ajudar você a perceber. Eles estão no eixo y. Pontos bem pequenininhos.*
> 65. Alice: (Exibe os rótulos dos pontos associados aos valores x_A e x_B) *Ah, certo.*
> 66. Pesquisador: *Agora vamos olhar aí, qual a mudança que ocorre quando a função é crescente e decrescente, em relação a f(A) e f(B)*
> 67. Alice: (Seleciona e varia x_A e x_B simultaneamente em um intervalo decrescente da função, em seguida passa a um intervalo crescente. Observa a variação do segmento dinâmico em *y*. Repete o procedimento várias vezes) *O f(A), quando é decrescente, o f(A) é maior que o f(B) (...) Quando, na parte crescente, quando a barrinha tá verde, isso inverte, o f(B) passa a ser maior que o f(A).*

Embora seja provável que Alice apenas precisou relembrar o que ela já havia construído acerca do comportamento das variáveis em intervalos crescentes e decrescentes, esse episódio mostrou como é possível que os estudantes criem regras de associação como ‘atalhos’ que podem limitar a ênfase nos conceitos e propriedades matemáticas subjacentes, nesse caso, os invariantes operatórios que fundamentam a ação. A escolha da ferramenta de variações sucessivas para explorar a situação e a referência à dependência da planilha sugerem um raciocínio covariacional mais dependente de representações numéricas e segmentadas da covariação; essa segmentação é natural na planilha e é possível na abordagem gráfica com a representação da variação em *y* com acréscimos constantes em *x*, por meio da ferramenta de variações sucessivas.

Na segunda situação proposta na entrevista, Alice foi solicitada a esboçar um gráfico da taxa de variação em função de *x*. Dessa vez, ela mobilizou a ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx e reduziu o valor de Δx por meio do controle deslizante u até o valor mínimo, aproximando o suficiente os valores de x_1 e x_2. O seu esquema envolveu: (i) variar x_A e x_B simultaneamente por valores específicos de x: -6, -4, -2, 0, 3 e 6; (ii) obter o valor de Δy/Δx correspondente a cada valor em *x* na caixa de texto; (iii) definir os pontos (x, Δy/Δx) no gráfico da janela de visualização 2; (iv) traçar uma curva suave passando pelos pontos definidos. O trecho seguinte mostra algumas etapas do esboço do gráfico por Alice:

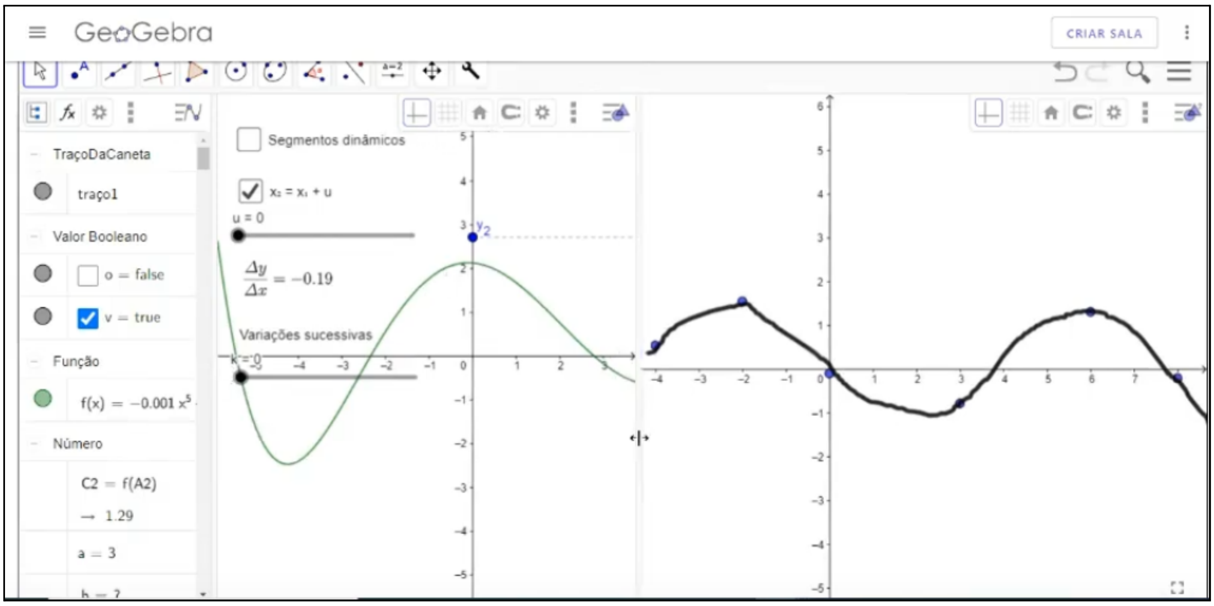
> 85. Alice: (Posiciona os pontos associados a x_1 e x_2 próximo ao valor x=6 no eixo x, observa o valor de Δy/Δx=1,322 na caixa de texto. Define o ponto P (6, 1,322) na janela de visualização 2)
> 86. Alice: (Posiciona os pontos associados a x_1 e x_2 próximo ao valor x=8 no eixo x, observa o valor de Δy/Δx=-0,19 na caixa de texto. Define o ponto P (8, -0,19) na janela de visualização 2)
> 98. Alice: (Aciona a ferramenta caneta e traça uma curva contínua passando pelos pontos definidos no gráfico)

O esquema mobilizado por Alice foi muito semelhante ao que ela mobilizou para construir o gráfico da taxa de variação no item 3 da situação 2, vivenciada na sessão 5; a diferença é que, na situação proposta na entrevista, ela não mobilizou a planilha como suporte à geração dos pares ordenados (x, Δy/Δx). Assim como na sessão 5, os componentes do esquema de Alice não sugerem a mobilização de aspectos da covariação entre x e Δy/Δx, nem mesmo o crescimento/decrescimento da taxa em função de *x*. O seu esquema para esboçar o gráfico permaneceu semelhante ao esquema convencional de correspondência desenvolvido no ambiente de papel e lápis. Além disso, ao ser questionada quanto a ter traçado uma curva contínua a partir de apenas alguns pontos, Alice confirmou o que já havia sido inferido da sua atividade na sessão 5, ela construiu uma curva contínua por associação com o gráfico da derivada da função explorada, sem invariantes explícitos relacionados à covariação:

> 111. Pesquisador: *...Olhando pra a sua estratégia você colocou alguns pontos, acho que cinco pontos pra tomar como referência e depois traçou uma linha contínua pra descrever o gráfico. Ai me vem a pergunta. Como você se convence que entre esses pontos o gráfico da taxa de variação se comporta dessa forma contínua, da forma como você desenhou?*
> 112. Alice: *Entre os pontos, já que não tem pontos próximos, é isso?*
> 113. Pesquisador: *Isso (...) Seria , pela experiência? Você imagina que é dessa forma ou tem algum raciocínio por trás disso aí?*
> 114. Alice: *Isso, porque esse gráfico seria uma aproximação da derivada. Então se eu vejo que nesse gráfico daqui, não sei que função seria essa, mas ela tem concavidades (...) Aí por exemplo, digamos que essa função fosse do sexto grau, então a derivada dela que no caso esse gráfico por aproximação, seria uma derivada do quinto grau, então ele teria concavidades também, já que esse daqui tem. Então meu raciocínio seria mais ou menos esse.*

O gráfico final esboçado por Alice é exibido na Figura 87.

Figura 87 – Gráfico esboçado por Alice na entrevista

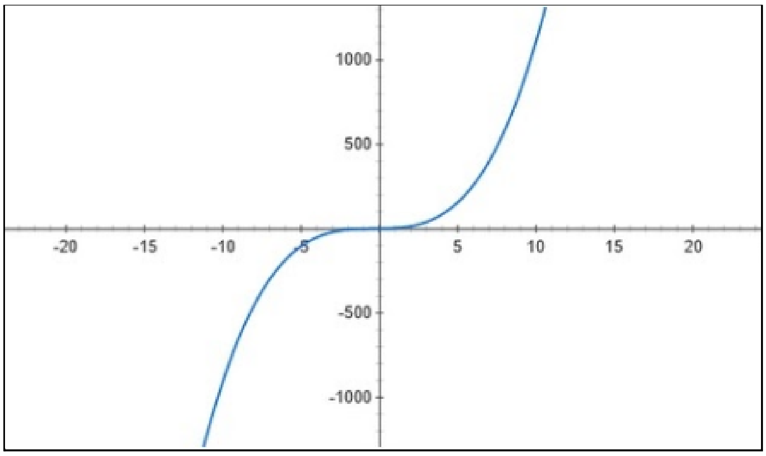


Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

4.8.3 Análise da entrevista com Louise

No início da entrevista, Louise foi reapresentada ao gráfico do questionário inicial do curso, com a seguinte questão: “*Como você descreveria o comportamento das variáveis de uma função representada no gráfico abaixo?*”(Figura 88). Ela foi questionada se, após a vivência do curso, alteraria ou complementaria a sua resposta com relação ao comportamento das variáveis, e, caso optasse pela alteração, de que forma faria essa alteração/complemento.

Figura 88 – Gráfico do questionário apresentado na entrevista com Louise



Fonte: Criado pelo autor utilizando o traçador gráfico do Google

A resposta anterior de Louise havia sido: “*para x positivo a função é crescente, para x negativo a função é decrescente*” (Louise, questionário). Após ler a sua resposta, ela propôs ‘acrescentar’ à sua descrição a noção de taxa de variação, embora ela pareceu estar referindo-se ao crescimento ou decrescimento da função em si e não ao da taxa de variação:

> 14. Louise: *A gente pode acrescentar aqui , algo sobre a taxa de variação, né? Que foi uma coisa que a gente estudou muito… Eu creio que aqui a taxa de variação é sempre crescente… Mesmo que… É , acho que é crescente… Que na parte que tá negativo ela vai ser negativa só que acho que vai ser crescente; e na parte que tá positiva, também vai ser uma taxa de variação positiva, porque ela tá aumentando né?*
> 15. Louise: *Eu não sei se pra x negativo a função é decrescente. Deixa eu pensar... Porque às vezes a gente aprende tanta coisa que esquece de lembrar as coisinhas básicas , né?*
> 16. Pesquisador: *Você acha que pra x negativo, você tem dúvida agora se a função é crescente ou decrescente. No caso pra x negativo, né?*
> 17. Louise: *Sim.*

> 18. Pesquisador: *Se você pensar em termos da variação de x e de y. Se você pensar assim: se x aumenta o que acontece com o y? Será que isso ajudaria?*
> 19. Louise: *Então… Quando o x aumenta, o y também tá aumentando. Nos dois casos, mesmo que negativamente , né? Então, por isso eu acho que ela é toda crescente. E eu também fiquei pensando que decrescente é assim* (faz um gesto com as mãos, que lembra o traçado de uma reta decrescente) *o gráfico. Fiquei imaginando o gráfico da reta x, y=x.*
> 20. Pesquisador: *Certo, entendi. Então a função é sempre crescente, né?*
> 21. Louise: É.
> 22. Pesquisador: *Em relação à variação de y e à variação de x... Essa função varia sempre da mesma forma? Ou seja, conforme x aumenta, y aumenta sempre pelo mesmo valor ou tem alguns trechos do gráfico que ela varia mais, varia menos, aumenta mais o y, aumenta menos o y, ou ela aumenta de forma constante?*
> 23. Louise: ... *Ela tá meio que simétrica né? Ela ta simétrica (inaudível) só que eu acho que como ela tem um crescimento elevado, tipo tem locais que o y vai crescer muito independente do x, eu acho. Aí eu acho que não é constante (...)*

Na primeira resposta, Louise havia considerado, de forma equivocada, a função decrescente para *x* negativo. Ao revisitar a sua resposta, ela retificou-a, embora tenha usado o termo taxa de variação para – ao que parece – referir-se ao valor da função em si. A insegurança de Louise em considerar a função crescente ou decrescente para *x* negativo pode indicar um conflito entre o seu possível primeiro esquema de interpretação do gráfico no intervalo negativo de *x* (leitura do gráfico partindo da origem, x=0) e o esquema desenvolvido durante as sessões (leitura do gráfico no sentido crescente de x).

Louise também mobilizou uma imagem de uma reta 'decrescente' a qual comparou com o gráfico da função para concluir que o gráfico é decrescente, o que mostra que sua visão em termos da covariação entre *x* e *y* ainda não está consolidada; a interpretação da variação variável de Louise também foi frágil e informal: *"eu acho que como ela tem um crescimento elevado, tipo tem locais que o y vai crescer muito independente do x"* (Louise, entrevista).

Quando ela foi questionada sobre quais ferramentas usadas no curso ela considerou que contribuíram para o seu raciocínio covariacional – para visualizar o gráfico no sentido de como as variáveis variam – ela não especificou uma ferramenta, mas incluiu as contribuições da planilha e da ferramenta de variações sucessivas, enfatizando, principalmente, o papel da segunda ferramenta para inferir o sinal da variação que foi uma característica peculiar das suas inferências:

139. Louise: *Eu não sei se a tabela, a planilha, era bem parte do curso, eu não lembro… Mas eu gostei bastante, eu nem sabia que existia isso, também essas funções novas que tem no Geogebra, eu não sabia, por exemplo esse negócio do caminho poligonal e também eu gostei bastante das variações sucessivas, com ele da pra a gente entender quando a variação é positiva, quando a variação é negativa, o tamanho dela...*

Em seguida, Louise foi solicitada a explorar as duas situações envolvendo a covariação no gráfico de uma função polinomial de grau 5 e o esboço do gráfico da taxa de variação desta função. Na primeira situação, Louise foi solicitada a dividir o gráfico em intervalos nos quais ela considerou que a função alterou a forma como varia, considerando crescimento, decrescimento e variação variável. Em seguida, ela deveria descrever, em cada intervalo, como as variáveis variaram entre si.

Louise surpreendeu ao não mobilizar qualquer das ferramentas disponíveis para explorar a covariação no gráfico; as suas descrições foram dadas apenas a partir da sua observação do gráfico e envolveram relações de crescimento/decrescimento e do sinal de uma variável com relação à outra variável. Louise visualizou apenas os pontos de máximo e mínimo como pontos de mudança na variação. Ela não fez referência ao comportamento da variação nos pontos de inflexão e a sua descrição da variação variável foi informal, em termos do contexto físico da velocidade (‘decrescimento rápido’):

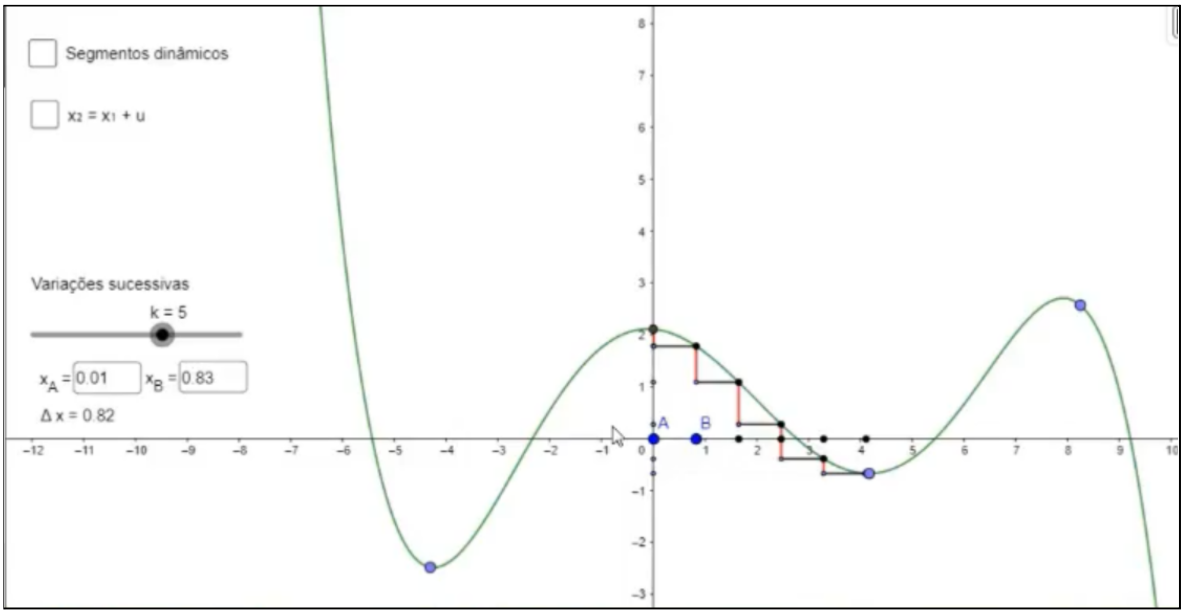
36. Louise: *Aqui, vou começar aqui pelo meio. Pode ir falando né?*
38. Louise: (Define um ponto no gráfico próximo ao primeiro ponto de mínimo) *Se a gente começar daqui ela tá lá em cima né, com valores positivos, e a medida que o x vai crescendo, deixando de ser negativo, ela vai decrescendo, então ela vai decrescer até aqui* (refere-se ao primeiro ponto de mínimo)
39. Louise: (Define um ponto no gráfico próximo ao primeiro ponto de máximo) *Aí, daqui, perto do menos quatro até o .. até o dois… Ela é crescente.*
40. Louise: (Define um ponto no gráfico próximo ao segundo ponto de mínimo) *Aí a medida que o x cresce, o y ta diminuindo de novo…*
42. Louise: (Define um ponto no gráfico próximo ao segundo ponto de máximo) *E aqui a mesma coisa, aqui ela cresce até ela decrescer de forma bem rápida igual ao começo… (inaudível)*
51. Pesquisador: *Eu queria saber se, por exemplo, de menos seis até próximo de menos 4 , se o y está decrescendo da mesma forma… Por exemplo se eu aumentar de menos seis pra menos cinco e depois de menos cinco pra menos quatro, eu queria saber se o y decresceu do mesmo valor ou não.. E aí também se eu pegar em intervalos cada vez menores.*
52. Louise: *Não, dá pra a gente perceber, do menos seis pra o menos cinco ele decresceu de forma mais rápida, ó.. então com certeza em valores*

> *maiores, e do menos cinco pra o menos quatro ele decresceu de forma mais lenta, então foram valores menores.*

Ao ser sugerido que Louise utilizasse alguma ferramenta para explorar a covariação, ela usou cada uma das três ferramentas dispostas na tela, porém suas abordagens foram mais em termos de determinar valores em *y* e da sua variação sem quantificar a variação, o que não a ajudou a interpretar a variação variável. Louise também voltou a mostrar dificuldades com a variação negativa representada por meio de um segmento. O trecho seguinte mostra que, apesar de ela concordar que o valor de *y* decresce com acréscimos em *x*, ela se mostrou em conflito com a representação da variação negativa por meio de um segmento com comprimento crescente (Figura 89):

> 90. Louise: (Mobiliza a ferramenta de variações sucessivas. Posiciona os valores em *x* no intervalo entre o primeiro máximo e o segundo mínimo da função) *Só que ele vai ser… Eu falei que era decrescente ne? Mas aqui o y tá crescente a medida que…*
> 91. Pesquisador: *Esse delta y tá crescendo? Se você aumenta o x o que acontece com o y nesse intervalo aí?*
> 92. Louise: *Ele diminui, só que se a gente for olhar pra a variação… a variação aumenta, daqui pra cá. Mas o y diminui quando o x cresce.*

Figura 89 – Dificuldade de Louise com a variação negativa entre x=0 e x=2, representada por segmentos de comprimento crescente



Fonte: Elaborado pelo autor a partir das produções dos estudantes

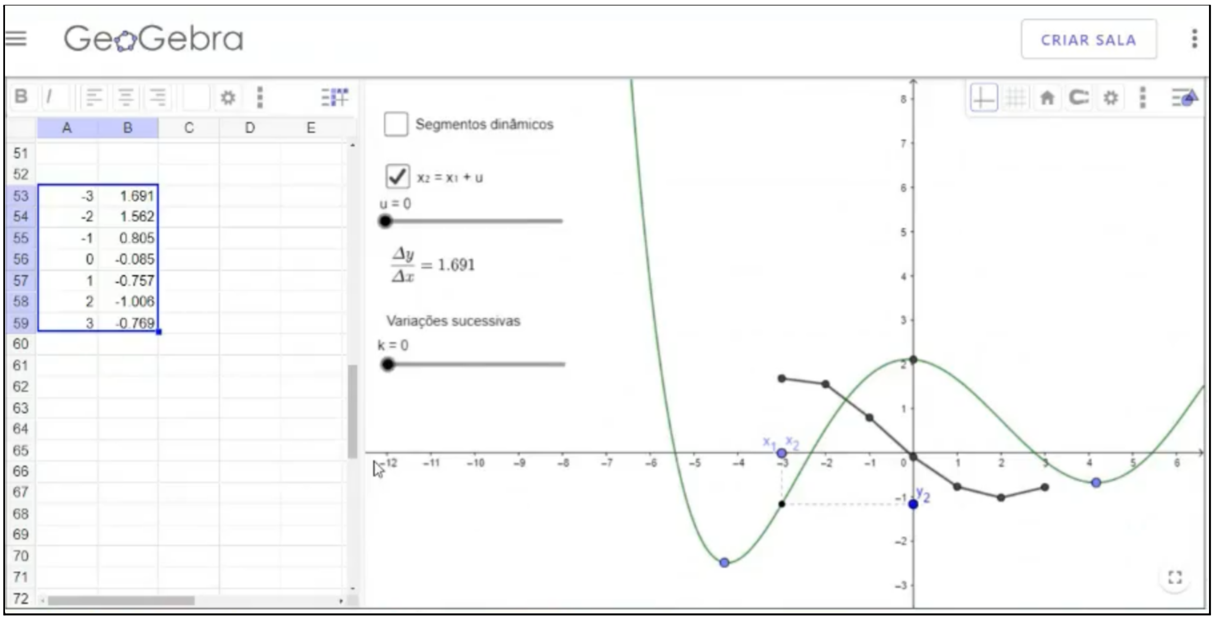
Na segunda situação proposta na entrevista, Louise foi solicitada a esboçar um gráfico da taxa de variação em função de *x*. Ela mobilizou a ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx e reduziu o valor de Δx por meio do controle deslizante *u* até o valor mínimo, aproximando o suficiente os valores de x_1 e x_2. O seu esquema envolveu as seguintes regras: (i) variar x_A e x_B simultaneamente por valores específicos de x: 0,1,2,3,-1,-2 (depois Louise alterou a sequência para ordenar os valores em x: -3,-2,-1,0,1,2,3); (ii) obter o valor de correspondente a cada valor em *x* na caixa de texto; (iii) na planilha, gerar uma tabela de valores de x e Δy/Δx e (iv) definir uma poligonal passando pelos pontos definidos na planilha. O trecho seguinte mostra algumas etapas do esboço do gráfico por Louise:

> 109. Louise: (*Varia delta x por meio do controle deslizante u, fazendo o próximo de 0; varia x_1 e x_2 simultaneamente e observa o valor da taxa de variação*) *Eu posso fazer, tipo... aqui eu tenho, por exemplo esse aqui que tá em zero né...aí por exemplo aqui vai ser o meu zero, o x vai ser zero, então a minha variação vai ser -0,085. Né isso?*
> 121. Louise: (varia *x* até *x*=0, observa o valor de Δy/Δx na tela e digita o par x=0, Δy/Δx=-0,085 na planilha) *Aí quando é zero, é menos zero ponto oito cinco*
> 122. Louise: (varia *x* até *x*=1, observa o valor de Δy/Δx na tela e digita o par x=1, Δy/Δx=-0,757 na planilha) *Aí eu coloquei aqui no um (inaudível)*
> 123. Louise: (varia *x* até x=2, observa o valor de Δy/Δx na tela e digita o par x=1, Δy/Δx=-1,006 na planilha) *Agora aqui no dois, menos um ponto zero zero seis*
> 124. Louise: (varia *x* até *x*=3, observa o valor de Δy/Δx na tela e digita o par x=1, Δy/Δx=-0,769 na planilha) *Eu acho que seja três, se não for, tá perto. Menos zero ponto sete meia nove.*
> 125. Louise: (varia *x* até *x*=-1, observa o valor de Δy/Δx na tela e digita o par x=1, Δy/Δx=0,805 na planilha.) *Menos um… Zero ponto oito zero cinco… Engraçado que no lado do x positivo, a variação é negativa e no lado negativo é positiva.*
> 129. Louise: (varia *x* até *x*=-2, observa o valor de Δy/Δx na tela e digita o par x=1, Δy/Δx=1,562 na planilha.)
> 130. Louise: (varia *x* até *x*=-3, observa o valor de Δy/Δx na tela e digita o par x=1, Δy/Δx=1,691 na planilha.)
> 131. Louise: (Seleciona a tabela com valores de *x* e Δy/Δx e aciona o comando 'caminho poligonal'. O caminho poligonal gerado é distorcido, devido à sequência de valores de *x* definido na coluna da tabela: 0,1,2,3,-1,-2.) *Aí agora eu vou fazer esses pontos. E vou… Vou usar um caminho poligonal… Misericórdia… Acho que eu fiz errado.. Olha o gráfico como ficou, da variação, esse gráfico tá errado, né?*
> 132. Pesquisador: *Ah certo… Porque, veja, você precisa colocar o x na sequência né? Você colocou 0,1,2,3, depois voltou pra -1… Faz o seguinte, coloca esse -1,--2,-3 lá no começo, antes do zero…Recorta essa parte aí e joga pra baixo. Do zero a três, você recorta e joga em baixo. Certo, aí faz a*

poligonal com essa sequência. É melhor apagar esse que já tá lá pra não atrapalhar. (...)
134. Louise: (Altera a sequência dos valores de *x* na tabela para -3,-2,-1,0,1,2,3 e define a poligonal dos valores de *x* e Δy/Δx)
135. Louise: *Agora! Tá mais…* (finaliza)

O esquema mobilizado por Louise foi semelhante ao que ela mobilizou para construir o gráfico da taxa de variação no item 3 da situação 2, vivenciada na sessão 5; a diferença é que, na situação proposta na entrevista, ela não mobilizou a caneta para desenhar uma curva suave com base na poligonal gerada pelos pares ordenados (x, Δy/Δx). Assim como na sessão 5, os componentes do esquema de Louise não sugeriram a mobilização de aspectos da covariação entre *x* e Δy/Δx, nem mesmo o crescimento/decrescimento da taxa em função de *x*. O seu esquema para esboçar o gráfico permaneceu semelhante ao esquema convencional desenvolvido no ambiente de papel e lápis. O gráfico final esboçado por Louise (em forma de poligonal, na cor preta) é exibido na Figura 90:

Figura 90 – Gráfico esboçado por Louise na entrevista



Fonte: Elaborado pelo autor a partir da produção dos estudantes

4.9 TRAJETÓRIA DA GÊNESE INSTRUMENTAL, O RACIOCÍNIO COVARIACIONAL E A TRANSPOSIÇÃO INFORMÁTICA

Nesta seção discutimos a trajetória da gênese instrumental de cada sujeito, como o raciocínio covariacional foi mobilizado nesse processo e o papel exercido por aspectos e fenômenos da transposição informática.

4.9.1 A gênese instrumental e o raciocínio covariacional de Eric

Eric revelou, no início do estudo, uma gênese instrumental em andamento para explorar funções com o Geogebra e a sua trajetória mostrou como ele integrou, parcialmente, aspectos da covariação aos seus esquemas para explorar, descrever e representar a covariação no gráfico. Foi destacada na trajetória de Eric a gênese de ferramentas como as marcações nos eixos, a ferramenta de variações sucessivas e a ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx que permitiram a ele quantificar a covariação e uma construção em andamento de imagens suaves de variação para interpretar o gráfico.

Quando Eric foi confrontado, na entrevista, com o gráfico que havia sido apresentado no questionário inicial do estudo, ele complementou a sua descrição da covariação mobilizando o conceito de taxa de variação para interpretar o gráfico covariacionalmente. Para essa interpretação, Eric revelou visualizar uma imagem dinâmica da variação de Δy e Δx ao longo do eixo **x**, suportada pelo uso instrumentado da ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx que pareceu exercer um papel fundamental para que Eric mobilizasse o seu raciocínio covariacional.

Ao enfrentar as situações propostas no experimento de ensino, a trajetória de Eric foi marcada pela transição de descrições da covariação em termos do crescimento ou decrescimento de uma variável em relação à outra variável, para uma imagem da variação variável; principalmente com a instrumentalização articulada da ferramenta de variação dinâmica da variação entre Δy e Δx e da ferramenta de variações sucessivas.

As limitações iniciais para interpretar a variação variável coincidiram com a pouca mobilização de ferramentas de suporte à quantificação da variação em y com acréscimos constantes em x, como as marcações nos eixos e as diferenças sucessivas dos valores na planilha, bem como com a segmentação da variação em x tomando como referência pontos especiais como zeros, máximos e mínimos, em vez de acréscimos constantes em x.

A dificuldade em interpretar a variação negativa decrescente também foi vivenciada por Eric, porém, ao contrário de Alice e Louise, no caso dele, essa dificuldade emergiu (e foi superada) na representação numérica da planilha. Eric construiu, de forma gradativa, uma interpretação covariacional dos aspectos do gráfico (concavidades, pontos de máximo, mínimo, inflexão).

Foi por meio do caso de Eric que foi mostrada, logo no início do experimento de ensino, a contribuição de ferramentas que dessem suporte à coordenação da variação em y com acréscimos sucessivos em x para quantificar a covariação. Eric inferiu a proporcionalidade em uma relação ao instrumentalizar as marcações nos eixos para coordenar a covariação entre as variáveis. Posteriormente, essa contribuição ficou ainda mais explícita a partir do uso instrumentado da ferramenta de variações sucessivas articulada dinamicamente à planilha na superação das dificuldades em interpretar a variação variável.

Nas situações de esboço do gráfico, Eric revelou uma gênese instrumental em andamento para esboçar o gráfico mobilizando esquemas voltados para a covariação contínua suave. Ele integrou, parcialmente, regras como visualizar de forma antecipada intervalos de crescimento e decrescimento em y em função de x. Por outro lado, Eric também mostrou limitações para mobilizar invariantes covariacionais inferidos nas situações de exploração e descrição da covariação nas ocorrências de esboçar o gráfico covariacionalmente. Esses novos componentes – que poderiam fundamentar esquemas voltados para a covariação – estavam em concorrência com esquemas mais consolidados, baseados na abordagem de correspondência, em um pensamento da forma estática e no ambiente papel e lápis que não envolviam aspectos da covariação. Esse fenômeno foi descrito por Artigue (1996b, 2002) como dupla-referência. Dessa forma, os esquemas de Eric para esboçar o gráfico mobilizaram, de forma parcial, aspectos da covariação. Sua gênese instrumental está em desenvolvimento.

As dificuldades reveladas por Eric, bem como pelos demais sujeitos do estudo, na exploração da covariação complexa entre o modelo algébrico e o valor da variação mostraram a sensibilidade dos esquemas às situações. Os esquemas desenvolvidos por

Eric até então não deram conta de inferir relações no contexto da covariação complexa. Era necessário o desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada específicos para esta situação.

Os aspectos e fenômenos relacionados à transposição informática que tiveram maior influência na atividade de Eric foram: (i) a contribuição das marcações nos eixos para sua a quantificação da covariação, proporcionalidade (situação 1A); (ii) dificuldade com a variação negativa decrescente vivenciada na representação numérica, ao contrário de Alice e Louise que enfrentaram essa dificuldade na representação dos segmentos dinâmicos (situação 2); (iii) dificuldades com a coordenação da covariação complexa associadas à necessidade de esquemas específicos para essa coordenação no ambiente dinâmico computacional (situação 3); (iv) a contribuição da articulação dinâmica e simultânea entre representações da planilha e ferramenta de variações sucessivas, na superação da dificuldade em interpretar a variação variável (situação 3); (v) o fenômeno da dupla referência, entre os esquemas para esboçar o gráfico baseados na abordagem convencional da correspondência no ambiente papel e lápis e os esquemas emergentes da abordagem covariacional no meio computacional dinâmico, foi relacionada à limitação no raciocínio covariacional para esboçar o gráfico (situações 1A, 2 e entrevista).

4.9.2 A gênese instrumental e o raciocínio covariacional de Alice

Alice revelou, ao início do estudo, uma gênese instrumental inicial com o Geogebra para explorar funções e a sua trajetória mostrou uma instrumentalização das ferramentas do Geogebra, principalmente a representação numérica da planilha e a ferramenta de variações sucessivas para interpretar a covariação, caracterizando-se por uma ênfase em uma interpretação segmentada da covariação.

Quando Alice foi confrontada na entrevista com o gráfico que havia sido apresentado no questionário inicial do estudo, ela complementou a sua descrição do gráfico mobilizando a variação variável de y com relação a x, o que mostrou a consolidação da sua interpretação covariacional do gráfico. Por outro lado, Alice teve dificuldades para interpretar o sinal da variação sem o suporte da representação numérica da planilha, o que revelou uma dependência desse tipo de registro para o seu raciocínio covariacional. Nesse sentido, a planilha não foi instrumentalizada por ela para quantificar a variação, mas para exibir o sinal dos valores da função.

Nas situações de explorar e descrever a covariação, as descrições de Alice passaram de descrições em termos do crescimento ou decrescimento de uma variável com relação à outra, a descrições que deram conta da variação variável em y com relação a x. Assim como para Eric, as limitações iniciais de Alice para interpretar a variação variável coincidiram com a mobilização insuficiente de ferramentas de suporte à quantificação da variação em y com acréscimos constantes em x, como as marcações nos eixos e as diferenças sucessivas na planilha, bem como com a segmentação da variação em x tomando como referência pontos especiais do gráfico, em vez de acréscimos constantes em x.

Essa transição, bem como a superação do entrave com a variação negativa, foi alcançada por Alice após a sua exploração da ferramenta de variações sucessivas na última sessão, permitindo-lhe coordenar a variação em y com acréscimos constantes em x. Alice também construiu, de forma gradual, relações entre os aspectos do gráfico (concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão) e a taxa de variação em y com relação a x.

Nas situações de esboçar o gráfico, os esquemas de Alice basearam-se em dois tipos de esquemas (dupla referência, conforme Artigue (1996b, 2002)): (i) o primeiro foi mobilizado pontualmente, apenas na situação 1A, e foi baseado na ferramenta rastro automático do ponto P(x, y), construído por Alice. Apesar da geração automática do gráfico, esse esquema pode ter contribuído para a concepção de Alice do gráfico como objeto multiplicativo da covariação entre x e y; (ii) o segundo tipo foi mobilizado no decorrer do experimento e baseou-se nos esquemas convencionais de correspondência entre valores, desenvolvidos no ambiente 'papel e lápis', que revelam um pensamento de forma estática. Esse esquema envolveu a definição de pontos como referência para a construção do gráfico e o traçado da curva que descreve a trajetória dos pontos, associando-a a um gráfico conhecido que ela imaginou representar a função; dessa forma, não mobilizou regras ou invariantes baseados na covariação, nem mesmo relações de crescimento/decrescimento, o que foi um contraste com a sua interpretação da variação variável na última sessão e na entrevista. O esquema convencional de correspondência parece ter sido mais operacional e influente para Alice, o que mostrou uma gênese instrumental ainda frágil para esse tipo de situação.

As dificuldades de Alice na exploração da covariação complexa entre o modelo algébrico e o valor da variação confirmam, assim como para Eric, a necessidade do desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada específicos para esta situação.

Os aspectos da transposição informática que tiveram maior influência na atividade de Alice foram: (i) a influência da representação de variáveis como pontos dinâmicos, na emergência de descrições da variação como significado físico de velocidade (situação 1A); (ii) a mobilização da ferramenta rastro de P(x,y) para esboçar o gráfico, embora não tenha sido planejada ao nível da orquestração, pode ter contribuído para uma visão da geração do gráfico como objeto multiplicativo da covariação entre *x* e *y* (situação 1A); (iii) a influência da representação da variação negativa decrescente por segmentos de comprimento crescente, na emergência de dificuldades pela associação entre os significados de variação e comprimento (situação 2); (iv) a dependência das representações numéricas para raciocinar covariacionalmente (entrevista); (v) a contribuição da ferramenta de variações sucessivas, articulada de forma dinâmica e simultânea ao gráfico, na superação da dificuldade em interpretar a variação variável e a variação negativa (situação 3, entrevista); (vi) dificuldades com a coordenação da covariação complexa associadas à necessidade de esquemas específicos para essa coordenação no ambiente dinâmico computacional (situação 3); (vii) o fenômeno da dupla referência entre os esquemas para esboçar o gráfico baseado na abordagem convencional da correspondência no ambiente papel e lápis e os esquemas emergentes da abordagem covariacional no meio computacional dinâmico foram relacionados à limitação no raciocínio covariacional para esboçar o gráfico.

4.9.3 A gênese instrumental e o raciocínio covariacional de Louise

Embora ao início do estudo Louise tivesse mostrado uma gênese instrumental inicial para funções no Geogebra, a sua trajetória em situações de covariação foi marcada por uma instrumentalização do Geogebra mais voltada para a visualização e a tomada de informação, com uma mobilização menor das ferramentas do *software* em relação a Eric e Alice, o que ficou ainda mais explícito na entrevista final. A trajetória de Louise também foi marcada por entraves na sua gênese instrumental originados a partir de equívocos conceituais nos seus conhecimentos prévios de função.

Quando Louise foi confrontada na entrevista com o gráfico que havia sido apresentado no questionário inicial do estudo, sua revisitação do gráfico marcou a aparente superação de uma regra equivocada no seu esquema de leitura do gráfico (leitura do gráfico partindo da origem e progredindo nos dois sentidos do eixo *x*) para a leitura do gráfico no sentido crescente de *x*. Ainda assim, o seu raciocínio covariacional parece não ter sido mobilizado consistentemente, pois ela precisou mobilizar a imagem de uma reta decrescente para concluir que o gráfico da função é decrescente e descreveu a variação variável de forma frágil e informal.

Durante o experimento de ensino, as descrições de Louise da covariação no gráfico foram sobretudo em termos do crescimento ou decrescimento de uma variável com relação à outra e de uma descrição do sinal das variáveis, de modo peculiar, mas que não contribuiu para o seu raciocínio covariacional. A sua interpretação da variação variável se deu sobretudo com um significado físico de velocidade variável, com pouca correlação entre as variáveis. Assim como para Eric e Alice, as limitações iniciais de Louise para interpretar a variação variável coincidiram com a mobilização insuficiente de ferramentas de suporte à quantificação da variação em *y* com acréscimos constantes em *x*, bem como a sua descrição meramente comparativa e em termos dos sinais das variáveis.

Louise pareceu ter superado, em parte, as suas dificuldades em interpretar a variação variável e a variação negativa a partir da instrumentalização da ferramenta de variações sucessivas na sessão 6; porém, na entrevista, essas dificuldades retornaram, o que mostrou que as suas inferências ainda não haviam sido consolidadas. Ela teve dificuldades em descrever os aspectos do gráfico covariacionalmente e essas dificuldades se mostraram relacionadas tanto à interpretação covariacional em si, quanto a equívocos conceituais pré-existentes dos aspectos do gráfico (como pontos de máximo, mínimo e inflexão).

As dificuldades de Louise na exploração da covariação complexa entre o modelo algébrico e o valor da variação confirmam, assim como para Eric e Alice, a necessidade do desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada específicos para esse tipo de situação.

Nas situações de esboçar o gráfico, Louise baseou-se em dois esquemas distintos: (i) o primeiro tipo (situação 1A) foi caracterizado pelo desenho de uma curva suave com a caneta enquanto ela imaginava a imagem gerada pelo rastro do par (x,y), o que pode ter contribuído para a sua concepção do gráfico como gerado por um objeto multiplicativo da covariação entre *x* e *y*, porém as descrições dadas apontaram que o seu esquema foi mais voltado para um mapeamento da trajetória do ponto, sem quantificar a forma como as variáveis variaram; (ii) o segundo tipo (situação 2 e entrevista) foi baseado nos esquemas convencionais da abordagem de correspondência entre valores, desenvolvidos no ambiente papel e lápis, com a mera definição dos pares (*x,y*) e de um gráfico que aproxime a trajetória dos pontos definidos, o que aponta um pensamento da forma estática. Dessa forma, os esquemas de Louise para esboçar o gráfico não mobilizaram, de forma suficiente, aspectos da covariação. Sua gênese instrumental ainda é limitada.

Os aspectos da transposição informática que tiveram maior influência na atividade de Louise foram: (i) a influência da representação de variáveis como pontos dinâmicos, na emergência de descrições da variação como significado físico de velocidade (situação 1A); (ii) a influência da representação da variação negativa decrescente por segmentos de comprimento crescente, na emergência de equívocos pela associação entre os significados de variação e comprimento (situação 1A); (iii) a mobilização da ferramenta rastro de P(x,y) para esboçar o gráfico, embora não tenha sido planejada ao nível da orquestração, pode ter contribuído para uma visão da geração do gráfico como objeto multiplicativo da covariação entre *x* e *y* (situação 1A); (iv) dificuldades com a coordenação da covariação complexa associadas à necessidade de esquemas específicos para essa coordenação no ambiente dinâmico computacional (situações 2 e 3); (v) a contribuição da ferramenta de variações sucessivas – articulada de forma dinâmica e simultânea ao gráfico – na superação parcial da dificuldade em interpretar a variação variável e a variação negativa (situação 3); (vi) o fenômeno da dupla referência, entre os esquemas para esboçar o gráfico baseados na abordagem convencional da correspondência no ambiente papel e lápis, e os esquemas emergentes da abordagem covariacional no meio computacional dinâmico foram relacionados à limitação no raciocínio covariacional para esboçar o gráfico;

4.9.4 Fenômenos e aspectos da transposição informática da covariação destacados na atividade de Eric, Alice e Louise

Destacamos uma série de fenômenos e aspectos relacionados à transposição informática de funções na perspectiva covariacional que tiveram influência na atividade dos sujeitos e, consequentemente, nos seus raciocínios covariacionais. Esses aspectos estão relacionados à representação da covariação em funções no meio computacional, às escolhas de *design* e às possibilidades de ação e restrições geradas a partir desse processo.

- As ferramentas que permitiram quantificar a variação por meio da coordenação da variação em y com acréscimos sucessivos em x contribuíram para os estudantes quantificarem a variação e interpretarem a variação variável e a variação negativa. Quando os estudantes mobilizaram pouco, ou raramente, essa classe de ferramentas, eles tiveram dificuldades em interpretar a variação variável, a saber:

    - Marcações nos eixos - Uma ferramenta instrumentalizada por Eric para visualizar uma relação de proporcionalidade entre as variáveis em um dos itens da situação 1A foi as marcações nos eixos. A diferença constante entre cada marcação permitiu a Eric coordenar a variação no eixo y com acréscimos constantes em x, inferindo a proporcionalidade na covariação.
    - Ferramenta de variações sucessivas - A ferramenta de variações sucessivas teve um papel importante para os estudantes superarem o entrave com a variação negativa e a variação variável, além de ter um papel importante para a quantificação da variação pela característica do seu *design*. Essa ferramenta foi articulada de forma dinâmica e simultânea com outras representações (como o modelo algébrico, o gráfico e a planilha) para dar esse suporte. Já a ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx teve um papel importante para o caso de Eric, na construção de uma imagem mais associada à variação contínua suave.
    - A planilha - nas análises *a priori,* foi atribuído um importante papel da planilha para quantificar a variação, mas essa ferramenta não teve um

papel tão central quanto se pensou, provavelmente porque os estudantes não desenvolveram uma gênese instrumental dela no sentido de uma notação de ação (KAPUT, 1992) para quantificar a covariação; em vez disso, o seu uso instrumentado enfatizou a exibição dos valores das variáveis.

- Sobre o papel das representações matemáticas, já é apontado que cada representação expõe melhor um aspecto específico do objeto matemático (GOLDENBERG, 1988; KAPUT, 1992). Além das representações formais, como o gráfico da função, a tabela e o modelo algébrico, a representação por segmentos dinâmicos enfatizou a covariação entre variáveis, porém foi relacionada a menos descrições de como máximos, mínimos ou inflexões são expressos covariacionalmente. As representações que enfatizaram variáveis como pontos dinâmicos também levaram a mais descrições da variação em termos do atributo físico da velocidade. A articulação dinâmica e simultânea entre representações permitiu aos estudantes explorarem os aspectos mais visíveis da covariação em cada representação, articularem os aspectos do gráfico com a quantificação da variação e construírem relações entre o modelo algébrico das funções, o comportamento do gráfico e da variação. Essa construção foi limitada apenas pela necessidade de esquemas de ação instrumentada, específicos para explorar a covariação complexa. Os estudantes também revelaram uma dependência da representação numérica para explorar a covariação. Enquanto Alice revelou essa dependência para interpretar o sinal da variação, Eric, com a disponibilidade da representação numérica na planilha na situação 2, tirou a ênfase dos segmentos dinâmicos e focou nos valores numéricos.

- De forma geral, o papel das restrições de sintaxe e semântica foi destacado no contexto da instrumentação da planilha pelos estudantes:

    - Restrições de sintaxe: Ainda na sessão 1, outros estudantes do experimento de ensino mostraram dificuldades na criação e automatização de listas de valores das variáveis na planilha, o que foi relacionado à sintaxe própria do Geogebra. Além da planilha, o desenvolvimento dos esquemas de uso também envolveu o domínio da sintaxe do Geogebra para atrelar a variação em um ponto à variação em outro ponto, para representá-los como variáveis (transposição de um objeto da geometria para um objeto das funções). As influências das restrições de sintaxe foram apontadas por estudos como Drijvers *et al.* (2012) e Lagrange e Psycharis (2014).

- Restrições de semântica: entre outros casos, um exemplo da restrição de natureza semântica foi no caso do significado atribuído à coordenada *y*, principalmente na planilha na situação 2. Nessa mesma situação, a coordenada *y* – que antes estava associada a uma função dada – representou a taxa de variação da mesma função, o que foi confuso para Eric. As influências das restrições de semântica também foram relacionadas por Lagrange e Psycharis (2014).

- Uma restrição do tipo conflito teórico-computacional emergiu na situação 2, na representação na interface dos valores de Δx, Δy e $\Delta y/\Delta x$. Devido à configuração da aproximação decimal e da quantidade de algarismos significativos visíveis na tela, assim, foram exibidas na interface igualdades do tipo $\Delta x=0$, $\Delta y=0$ e $\Delta y/\Delta x=m$, $m\neq 0$. Esse conflito foi percebido por Alice que, por sua vez, reconheceu o fenômeno como um conflito da interface sem implicação para os valores reais assumidos pelas variáveis, por isso o conflito não foi um entrave para ela. Já para Eric, o conflito configurou-se como um entrave que só foi superado após o entendimento do problema apenas a nível de interface e que, de fato, Δx e Δy eram diferentes de zero, pois, segundo ele, a taxa estava definida. Embora tenhamos descrito os conflitos teórico-computacionais apenas do ponto de vista de como eles influenciaram e foram enfrentados pelos estudantes, concordamos com Giraldo, Carvalho e Tall (2002) e Giraldo (2004) com relação ao potencial pedagógico da exploração desses conflitos para oportunizar a construção de conceitos matemáticos.

- Fenômenos descritos por Artigue (1996b, 2002) da dupla referência e dos ‘pseudo-objetos’ ou da ilusão de que os estudantes estão operando em um nível conceitual superior ao seu nível real quando explorando o artefato (1996b, p.230) emergiram em diferentes momentos da gênese dos estudantes.

- O primeiro fenômeno da dupla referência teve um importante papel nas situações de esboço do gráfico, pela concorrência entre os esquemas convencionais de correspondência desenvolvidos no ambiente papel e lápis e os esquemas que emergiram da articulação entre uma perspectiva covariacional e das possibilidades do meio dinâmico do Geogebra. A tendência dos estudantes em priorizarem os esquemas baseados na correspondência – papel e lápis e em uma visão de forma estática – é coerente com a necessidade de um tempo longo de gênese instrumental para a covariação, pois os esquemas que incluem aspectos da covariação ainda estavam em desenvolvimento, sendo necessário um maior tempo e mobilização em outras situações. A ênfase dos estudantes nos esquemas de correspondência limitou o raciocínio covariacional para esboçar o gráfico, além do fato de que eles não quantificaram a variação variável na geração dos valores dos pares (*x,y*). Esse tipo de fenômeno pode explicar desempenhos relatados como insuficientes em estudantes que exploram a covariação no gráfico por meio de *softwares* dinâmicos. O papel da orquestração instrumental para fomentar e institucionalizar os novos esquemas de covariação em um meio dinâmico computacional é essencial.
- O fenômeno dos diferentes níveis conceituais de operação (pseudo-objetos) emergiu na atividade de alguns estudantes, tanto do contexto geral da classe como dos estudantes do estudo de caso, em maior ou menor grau. Nos referimos a diferentes níveis conceituais, pois algumas vezes os estudantes chegaram a construir alguma conceitualização, porém insuficiente ao que era proposto na situação, com pouco ou nenhum significado de covariação (nesse sentido, o Geogebra pode ter operado como uma caixa-preta (RABARDEL, 1995) para os sujeitos) ou com um desvio para outros significados. Esse fenômeno emergiu a partir da sessão 2 nas descrições dadas pelos estudantes do contexto da classe e do estudo de caso, a partir do que eles exploraram e

visualizaram na tela e continuaram a aparecer de forma isolada na atividade dos estudantes do estudo de caso, sobretudo de Louise.

- O papel das escolhas de *design* do material desenhado no Geogebra, revelou influências sutis na atividade dos estudantes. Por exemplo: (i) a escolha por uma tela mais 'limpa' no material do Geogebra – apenas com a disposição das ferramentas mais básicas para explorar a situação – teve o objetivo de os estudantes mobilizarem as ferramentas mais complexas como resultado do seu processo de gênese (análise *a priori* da situação 1A). No entanto, essa escolha de *design* não se revelou tão efetiva didaticamente, pois no nível inicial da sua gênese, os estudantes tiveram uma tendência a explorar apenas as ferramentas dispostas na tela, como se as demais ferramentas não estivessem disponíveis, ou não fossem indicadas (aqui o conceito de *affordance* parece particularmente aplicável). Isso limitou as possibilidades de ação com *software* percebidas pelos estudantes; (ii) outra escolha de *design* que gerou um fenômeno importante na atividade de Alice na entrevista foi a atribuição de cores diferentes a uma variação de sinal positivo ou negativo, o que levou Alice a mobilizar as cores para distinguir uma variação positiva ou negativa, mas também ter dificuldade para justificar o que estava por trás da mudança nas cores (a inversão entre os valores de y_1 e y_2 no eixo y, refletindo na mudança do sinal da variação). A análise do sinal da variação, por Alice, era baseada nas representações numéricas, com ênfase na planilha; por último, (iii) a escolha de *design* – da disponibilização da representação numérica da taxa de variação por um texto dinâmico no material utilizado na entrevista – levou Eric a enfatizar e estruturar a sua exploração da covariação a partir dessa representação, em detrimento da representação por segmentos dinâmicos.

Por último, destaca-se a ideia de transposição informática de segunda ordem que emergiu para caracterizar a criação de objetos matemáticos e os significados associados fora do processo de *design* do *software* em si pela equipe de desenvolvimento. Nesse caso, esse processo geralmente pode ser feito pelo professor ou pelo *designer* de materiais. Além disso, envolve uma característica do *software* tal que se permita a criação de novos objetos e construções pelos usuários. No contexto deste estudo, a transposição de segunda ordem se aplica à criação de objetos e construções que não foram necessariamente concebidos no Geogebra com o objetivo empregado aqui (como representar variáveis a partir de pontos atrelados ao eixo e representar a variação a partir de segmentos), gerando novos significados e, com eles, novas possibilidades e restrições para a conceitualização.

No caso dos pontos dinâmicos, os resultados mostraram que a sua representação como variáveis na perspectiva covariacional permitiu uma ênfase maior na variação em uma variável com a variação em outra variável. Por outro lado, essa representação também foi associada a descrições da variação como o significado físico da velocidade, como atribuindo ao ponto e, consequentemente, à variável uma imagem de um objeto concreto. Também houve uma suposta associação entre a variação negativa decrescente e o aumento da velocidade do ponto que pode ter originado equívocos relacionados à atribuição de uma variação negativa crescente a uma variação decrescente decrescente.

No caso da representação da variação por segmentos, por um lado essa representação permitiu coordenar e quantificar a variação, bem como serviu de base para a construção de ferramentas que contribuíram para superar entraves com a variação variável; por outro lado, essa representação foi relacionada à emergência de equívocos relacionados à variação negativa decrescente, pois essa variação é representada por um segmento de comprimento cada vez maior, embora representado no sentido negativo do eixo y. O conhecimento das estudantes (neste caso, Alice e Louise) do sistema de coordenadas – que atribui o valor negativo aos valores representados nos quadrantes inferiores – não foi suficiente para elas superarem a imagem dinâmica de um segmento de comprimento variável aumentando continuamente. Esse conflito persistiu para Alice até a sessão 6 e foi superado, por ela, a partir da sua instrumentalização da ferramenta de variações sucessivas. Já para Louise, o conflito foi superado parcialmente na sessão 6, após o uso da mesma ferramenta, porém retornou na entrevista, o que reforça a resistência desse entrave.

A relevância da ideia da transposição informática de segunda ordem é a importância de levar em consideração a influência no raciocínio e conceitualização dos estudantes dos objetos e significados construídos a partir do *design* dos materiais ou artefatos tecnológicos a serem explorados nas situações que não têm por atores a equipe de desenvolvimento do *software*, mas sim, professores, pesquisadores e criadores desses materiais, de forma geral.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, sintetizamos a trajetória e as conclusões do estudo, além de apresentarmos as limitações da pesquisa e apontarmos possíveis perspectivas para futuras investigações, tomando por base os resultados, as limitações e as lacunas deixados por este trabalho.

5.1 CONCLUSÕES

Este estudo originou-se a partir de uma questão de pesquisa na qual articulam-se dois problemas: o problema das condições e efeitos da integração de tecnologias computacionais na aprendizagem da matemática e o problema da mobilização de um raciocínio covariacional na aprendizagem de funções. Nessa perspectiva, o Quadro do Raciocínio Covariacional (THOMPSON; CARLSON, 2017) e as pesquisas nesse contexto mostram que raciocinar covariacionalmente envolve aspectos e processos complexos e, por outro lado, mostraram que estudantes têm dificuldades de várias naturezas para raciocinar em termos de covariação.

Seguindo a tendência do uso de tecnologias computacionais na aprendizagem da matemática, o suporte desses artefatos para apoiar o raciocínio covariacional foi incluído por algumas pesquisas, porém o papel secundário atribuído pela maioria das pesquisas ao uso das tecnologias na conceitualização matemática não permite entender de forma clara como as possibilidades, as restrições e os diferentes usos desses artefatos contribuíram ou não para o raciocínio covariacional dos sujeitos das pesquisas.

Entender as condições e os efeitos do uso de tecnologias como suporte à aprendizagem – levando em conta como os estudantes desenvolvem as suas gêneses instrumentais (RABARDEL, 1995) e como esse processo é influenciado pelas possibilidades e restrições impostas pelas tecnologias – é um dos problemas da Abordagem Instrumental à aprendizagem da matemática (ARTIGUE, 1996b, 2002) que situa-se no domínio da Abordagem Instrumental de Rabardel (1995). Essa perspectiva nos levou a situar a pesquisa em um contexto teórico que nos permitisse levar em conta os seguintes aspectos: (i) os processos envolvidos no raciocínio covariacional, a partir da sistematização teórica de Thompson e Carlson (2017); (ii) os aspectos da gênese instrumental, descritos por Rabardel

(1995), bem como os construtos teóricos que dão suporte à Abordagem Instrumental no contexto desta pesquisa, (iii) a noção de esquema de Vergnaud (2009) e a discussão da Abordagem Instrumental no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática, proposto por Artigue (1996b, 2002).

Como objetivo geral, investigamos os efeitos do uso de um artefato computacional no raciocínio covariacional dos estudantes e a sua relação com a transposição informática do conceito de covariação nesse artefato. A partir da articulação dos quadros teóricos com a literatura no raciocínio covariacional e no uso de tecnologias computacionais, delimitamos as seguintes questões de pesquisa: (i) De que forma o uso de um artefato computacional para explorar a covariação em relações funcionais influencia o raciocínio covariacional dos estudantes?; (ii) Como os efeitos do uso do artefato podem ser relacionados aos aspectos da transposição informática da covariação nesse artefato?

Para responder a essas questões, traçamos um percurso metodológico de caráter qualitativo, no qual se inscreveu um estudo de casos múltiplos (YIN, 2015) com três licenciandos em Matemática que desenvolveram as suas respectivas gêneses instrumentais com o *software* Geogebra em situações de covariação. O estudo foi realizado no contexto de uma formação referente ao uso do Geogebra para abordar funções covariacionalmente, promovida como curso de extensão em uma universidade pública brasileira.

A produção dos dados foi realizada em três etapas: aplicação de um questionário, implementação de um experimento de ensino e aplicação de entrevistas baseadas em tarefas, todos realizados de forma *online* e remota, devido ao quadro pandêmico da COVID-19. Tomamos como dados analíticos as respostas aos questionários e fichas *online*, as videogravações da tela e do áudio dos computadores dos estudantes e as interações via *chat* ou via videoconferência. Para analisar esses dados, nos baseamos na Análise Microgenética (MEIRA, 1994), por meio da qual foram enfatizados os eventos nos quais elementos do raciocínio covariacional dos sujeitos foram explicitados, além de eventos nos quais os sujeitos mobilizaram o Geogebra para explorar as situações propostas.

Os resultados respondem às questões de pesquisa por meio dos seguintes tópicos de destaque:

Das descrições em termos do crescimento e decrescimento à interpretação da variação variável

A trajetória da gênese instrumental e do raciocínio covariacional dos estudantes foi marcada, desde o início, pela dificuldade em interpretar a variação variável, o que foi explicitado por descrições da covariação variável meramente em termos do crescimento ou decrescimento de uma variável com relação à outra variável, isto é, descrições em termos do significado físico de velocidade, descrições em termos do sinal das variáveis (particularmente por Louise) e pelas dificuldades que emergiram para interpretar a variação negativa decrescente. A dificuldade inicial em interpretar a variação variável coincidiu com a rara mobilização de ferramentas para quantificar a variação em y com acréscimos constantes em x, com a segmentação no eixo x tomando por referência pontos especiais do gráfico (zeros, máximo, mínimo) e com a mobilização de relações comparativas e do sinal das variáveis (particularmente por Louise).

A transição para uma interpretação da variação variável foi relacionada tanto à discussão desse aspecto nas orquestrações nas sessões, quanto ao desenvolvimento do uso instrumentado de ferramentas que permitiram: (i) coordenar a variação em y com acréscimos constantes em x (como as marcações nos eixos (no caso específico de Eric, na situação 1A) e a ferramenta de variações sucessivas); (ii) coordenar a variação dinâmica da variação de Δy em função de x e Δx, como a ferramenta de variação dinâmica entre Δy e Δx (sobretudo no caso específico de Eric); (iii) articular tais ferramentas e as representações de função de forma dinâmica e simultânea.

Interpretação covariacional dos aspectos do gráfico

As descrições dos estudantes de aspectos como concavidades, pontos de máximo, mínimo e inflexão covariacionalmente foram limitadas na situação 1A, na qual não houve a exibição do gráfico, porém essa relação foi progressivamente construída, sobretudo por Eric e Alice, conforme eles articularam – nas situações seguintes – a forma do gráfico com as ferramentas para representar e quantificar a covariação no gráfico. Já para Louise, as dificuldades em construir essas relações persistiram e foram relacionadas equívocos conceituais dos aspectos do gráfico (como pontos de máximo, mínimo e inflexão).

Dificuldades em coordenar a covariação complexa

Tais dificuldades envolveram, inicialmente, interpretar o que estava variando, isto é, quais as variáveis estavam em covariação. Além disso, as explorações dos estudantes das relações entre o valor de x, de f(x) e da sua variação levaram em conta apenas um intervalo fixo do domínio ou um valor de x invariável, de forma que a covariação complexa fosse reduzida a uma covariação simples. Concluímos pela necessidade do desenvolvimento de esquemas específicos para coordenar a covariação complexa.

Limitações para traduzir as relações entre os aspectos do gráfico e a variação variável para esboçar gráficos.

Apesar de os estudantes terem, em maior ou menor grau, desenvolvido relações entre aspectos do gráfico (intervalos de crescimento, concavidades, pontos de máximo e mínimo e pontos de inflexão) e a covariação, eles não traduziram essas relações nas situações de esboço do gráfico. Um dos aspectos relacionados a esse fato foi a não quantificação da variação variável na relação entre os valores de x e f(x). Outro aspecto envolvido é que os seus esquemas para esboçar o gráfico foram baseados na perspectiva da correspondência desenvolvida no ambiente papel e lápis, baseados na definição de pontos especiais (zeros, máximo, mínimo) e associação com formas de gráfico conhecido, levando-os a um pensamento de forma estática.

Os esquemas dos estudantes mobilizaram pouco a covariação, o que apontou a necessidade de que as novas possibilidades e restrições dos artefatos computacionais para esboçar o gráfico sejam levadas em conta, bem como os esquemas possíveis de serem desenvolvidos; aliando, assim, essas novas possibilidades a uma perspectiva covariacional do esboço do gráfico.

Aspectos da transposição informática destacados

- *O papel das ferramentas para coordenar a variação em y com acréscimos constantes em x* que contribuíram para os estudantes quantificarem a variação e interpretarem a variação variável;
- *O papel das ferramentas para uma construção da variação suave* que contribuíram, sobretudo, para Eric interpretar a taxa de variação a partir do gráfico da função;
- *O papel da variação dinâmica e da articulação dinâmica e simultânea entre representações*, para os estudantes explorarem os aspectos mais visíveis da covariação em cada representação, articularem os aspectos do gráfico com a quantificação da variação e construírem relações entre o modelo algébrico das funções, o comportamento do gráfico e da variação;
- *O papel de restrições de naturezas diversas e, sobretudo, da restrição gerada pela representação das variáveis por pontos dinâmicos e da variação por segmentos, cujo comprimento não envolve o significado negativo,* tal representação foi associada, no caso dos pontos dinâmicos, a uma ênfase maior na covariação e, por outro lado, a equívocos gerados pela associação entre a variação negativa decrescente e um significado de aumento da velocidade do ponto. No caso da variação representada por segmentos, tal representação permitiu construir ferramentas para coordenar e quantificar a variação e, por outro lado, foi associada à emergência de equívocos relacionados à variação negativa decrescente, por ter sido representada por um segmento de comprimento cada vez maior;
- *O papel dos fenômenos de dupla referência e dos diferentes níveis conceituais de operação (pseudo-objetos),* os primeiros foram enfatizados nas situações de esboço do gráfico, nas quais os esquemas baseados na abordagem de correspondência no papel e lápis foram priorizados pelos estudantes, o que limitou a mobilização da covariação nessas situações; já o segundo tipo de fenômeno foi caracterizado por uma exploração do Geogebra com pouco significado de covariação;
- *Da noção de transposição informática de segunda ordem*, que emergiu a partir do desenho de novos objetos e significados no Geogebra, como os pontos dinâmicos para representar variáveis e segmentos dinâmicos para representar a variação que refletiram em fenômenos no raciocínio covariacional dos estudantes.

Assim, consideramos que o uso de tecnologias computacionais como suporte ao raciocínio covariacional deve levar em conta as seguintes particularidades: as possibilidades e restrições dos artefatos; como essas características permitem o desenvolvimento de esquemas que mobilizem aspectos da covariação; os diferentes usos instrumentados que os sujeitos fazem dessas tecnologias e as suas gêneses instrumentais; os aspectos da situação matemática em jogo e, de forma mais geral, as restrições institucionais e o papel do professor como *designer* de materiais didáticos e situações e na orquestração idessas situações.

Também destacamos o papel de uma abordagem instrumental do raciocínio covariacional dos estudantes a partir da inferência de esquemas, pois essa noção nos permitiu conectar aspectos do raciocínio covariacional revelados nos invariantes operatórios e nas inferências dos estudantes às formas de uso e às características do artefato, reveladas nas regras de ação, tomada de informação e controle.

Por fim, os resultados desta pesquisa contribuem não só para compreender como os estudantes mobilizam o seu raciocínio covariacional com o uso instrumentado de tecnologias, mas também têm implicações para outros contextos: o currículo do ensino de funções; a formação de professores, tanto no contexto da abordagem covariacional de funções como para o uso de tecnologias como suporte a essa abordagem; o planejamento de orquestrações instrumentais e o desenho de recursos didáticos e de tecnologias para o suporte ao raciocínio covariacional. Destacaremos alguns desses aspectos e como eles apontam perspectivas de investigações futuras na subseção final.

5.2 LIMITAÇÕES DO ESTUDO

Descrevemos, a seguir, algumas limitações deste estudo:

1) Tempo de acompanhamento da gênese: a gênese instrumental, como um fenômeno complexo e de longo termo, implica uma limitação natural a qualquer estudo de curto prazo, pois o tempo de acompanhamento da gênese parece sempre menor que o ideal. No nosso caso, tal acompanhamento foi feito dentro de um período de pouco menos de 3 meses, distribuídos entre seis sessões de ensino e uma entrevista. Embora esse período tenha sido suficiente para caracterizar uma evolução dos esquemas dos estudantes e construir relações com fenômenos e

- aspectos da transposição informática, consideramos que os esquemas dos estudantes estavam em desenvolvimento, integrando, aos poucos aspectos da covariação aos seus esquemas. Acreditamos que um período mais longo de acompanhamento poderia ser de maior proveito para entender como os esquemas dos estudantes continuariam integrando a covariação, principalmente nas situações de esboço do gráfico, nas quais os esquemas dos estudantes foram fortemente influenciados pelos esquemas convencionais de correspondência desenvolvidos no ambiente lápis e papel.

2) Acesso aos esquemas: os esquemas são componentes do pensamento de difícil acesso. Realizamos inferências dos esquemas dos estudantes, mas, em muitos casos, os esquemas inferidos foram apenas parcialmente caracterizados, devido aos componentes não explicitados nas ações dos estudantes em algumas situações. A diversidade dos dados (videografia da exploração do *software*, texto no *chat*, respostas escritas dos estudantes nas fichas *online*, respostas verbalizadas na videografia, entrevista) aliada à técnica de pensar em voz alta foram essenciais para a inferência dos esquemas.

3) Contexto não-presencial do experimento: apesar de não ter ocorrido prejuízo aos resultados pela realização do experimento de forma remota devido à Covid-19, reconhecemos que o contexto não-presencial do estudo foi um desafio à estruturação do experimento de ensino e à produção e registro dos dados, já que os dados de maior interesse (os vídeos de resolução das situações pelos estudantes) foram produzidos de forma autônoma por cada sujeito, sem o acompanhamento direto do pesquisador. Como a infraestrutura das orquestrações foi online, foi necessário que os sujeitos estivessem instrumentados não apenas para o uso do Geogebra, mas também para o conjunto de artefatos usados no experimento. Na nossa visão, o contexto online revelou, por um lado, novas possibilidades de produção, armazenamento dos dados, interações entre pesquisador e sujeitos e integração de ferramentas; por outro lado, também foram reveladas restrições importantes como a redução do

controle e do acesso às atividades dos sujeitos, o que quebrou o caráter contínuo e dinâmico típico das interações presenciais.

4) Concepção das situações: apesar do planejamento de articular e encadear as situações de forma que houvesse ao mesmo tempo um aprofundamento progressivo dos aspectos da covariação e um movimento iterativo de retorno a situações específicas (movimento em espiral) em função da gênese instrumental, a concepção das situações poderia delimitar melhor essas situações, para enfatizar mais aspectos específicos e refinar melhor os dados. Consideramos, ainda, que era preciso um foco maior nas situações de esboço do gráfico.

5.3 PERSPECTIVAS DE INVESTIGAÇÕES FUTURAS

A partir das questões que podem emergir dos resultados deste estudo e da sua aplicação para outras questões envolvidas, tanto no Quadro do Raciocínio Covariacional quanto na problemática da integração de tecnologias computacionais para a aprendizagem da matemática, prospectamos as seguintes perspectivas de investigações futuras, sem esgotar as possibilidades:

i) Uso de tecnologias para a perspectiva covariacional no Ensino Médio e no Ensino superior: de que forma a perspectiva covariacional de função pode ser mais integrada à abordagem de funções no Ensino Médio e no Ensino Superior, sobretudo no Cálculo e como as tecnologias computacionais podem apoiar essa integração em cada contexto específico?

ii) Orquestrações instrumentais para fomentar a gênese instrumental em covariação: de que forma o planejamento e a implementação de orquestrações instrumentais podem fomentar as gêneses instrumentais dos estudantes com tecnologias computacionais para dar suporte ao raciocínio covariacional em situações de covariação?

iii) Concepção de situações e materiais didáticos computacionais para suporte ao raciocínio covariacional: quais os princípios e as características devem ser levados em conta para desenvolver situações e recursos didáticos com tecnologias computacionais que deem suporte ao raciocínio covariacional?

iv) Formação inicial e continuada de professores para o uso de tecnologias na perspectiva da covariação: de que forma professores podem ser apoiados no sentido do desenvolvimento de suas gêneses instrumentais para o ensino de funções por uma perspectiva covariacional com o uso de tecnologias computacionais?

v) Transposição informática de segunda ordem: como a abordagem das questões envolvidas na transposição informática de segunda ordem pode contribuir para que professores, pesquisadores e designers de recursos didáticos baseados em tecnologias computacionais abertas aprimorem o processo de concepção, implementação e uso didático desses recursos?

REFERÊNCIAS

ARANDA, C.; CALLEJO, M. L. Construcción de la Función Integral y Razonamiento Covariacional: dos Estudios de Casos. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 777-798, 2017. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/D4W8Crsb6NmK5TJVycQSCbf/?lang=es Acesso em: 14 mai 2019

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996(a). p. 193 -217.

ARTIGUE, M. Using computer algebraic systems to teach mathematics: A didactic perspective. *In*: BARBIN, E.; DOUADY, R (ed.). **Teaching mathematics**: the relationship between knowledge, curriculum and practice. Pont-à-Mousson: TOPIQUES éditions, 1996(b). p. 223-239.

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **The International Journal of Computers for Mathematics Learning,** Springer Verlag, v. 7, n. 3, p. 245-274, 2002. DOI https://doi.org/10.1023/A:1022103903080. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1022103903080. Acesso em: 27 jul. 2020.

AYALON, M.; WATSON, A.; LERMAN, S. Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. **Educational Studies in Mathematics**, Springer-Verlag, v. 90, p. 321–339, 2015, DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-015-9628-9. Disponível em:https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-015-9628-9 Acesso em: 14 mai. 2019

AYALON, M.; WATSON, A.; LERMAN, S. Progression Towards Functions: Students' Performance on Three Tasks About Variables from Grades 7 to 12. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Springer, v. 14, p. 1153–1173, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-014-9611-4. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10763-014-9611-4 Acesso em: 14 mai.2019

BALACHEFF, N. Didactique et intelligence artificielle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 14, p.9-42, 1994.

BALACHEFF, N. **La transposition informatique**, un nouveau problème pour la didactique. *In*: ARTIGUE, M.; GRAS, R.; LABORDE, C.; TAVIGNOT, P.; BALACHEFF, N. (ed.). **Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993. p. 364-370.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/126211/ISBN9788579836015.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 17 jan. 2022.

BERGER, M. A Semiotic View of Mathematical Activity with a Computer Algebra System. **Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 13, n. 2, p. 159-186, 2010. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000200003&lng=es&nrm=iso Acesso em: 27 set. 2019

BOTELHO, L.; REZENDE, W. M. Um Breve Histórico do Conceito de Função. **Caderno Dá Licença**. Niterói, v.6, p. 64-75, 2007. Disponível em: http://dalicenca.uff.br/wp-content/uploads/sites/204/2020/05/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf. Acesso em: 17 jan. 2022.

BOTTAZZINI, U. **The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass**. Traduzido por Warren Van Egmond. New York: Springer-Verlag, 1986.

BOYER, C.B. Proportion, equation, function: Three steps in the development of a concept. **Scripta Mathematica,** New York, v. 12, p. 5-13, 1946.

BYERLEY, C.; THOMPSON, P. Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. **Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, v. 48, p. 168-193 , 2017. DOI:https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003.

CARLSON, M. P. A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *In*: SCHOENFELD, A. H.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (ed.). **Research in collegiate mathematics education, 3, CBMS issues in mathematics education**. Washington DC: Mathematical Association of America, 1998. v. 7, p. 114-162. Disponível em: https://www.ams.org/books/cbmath/007/. Acesso em: 18 jan. 2022.

CARLSON, M. P.; JACOBS, S.; COE, E.; LARSEN, S.; HSU, E. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. **Journal for Research in Mathematics Education***,* Reston, v. 33, n.5, p. 352–378. 2002. DOI: https://doi.org/10.2307/4149958

CASTILLO-GARSOW, C. C. Continuous quantitative reasoning. *In*: MAYES, R.; BONILLIA, R.; HATFIELD, L. L.; BELBASE, S. (ed.), **Quantitative reasoning: Current state of understanding,WISDOMe Monographs**. Laramie: University of Wyoming, 2012. v. 2, p. 55–73.

CAUCHY, A. L. **Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique:** premier partie, analyse algébrique. Paris: Chez Debure frères, 1821.

CHEVALLARD Y. **La transposition didactique:** Du savoir savant au savoir enseigné. 2. ed. aum. Grenoble: La Pensée sauvage, 1991. (Primeira edição em 1985)

CLEMENT, J. Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. *In*: LESH, R.; KELLY, A., **Handbook of research methodologies for science and mathematics education**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. p. 341-385.

CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. **Educational Studies in mathematics**, Springer Verlag, v. 26, n. 23, p. 135-164, 1994. DOI:

https://doi.org/10.1007/BF01273661 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01273661 Acesso em: 07 mai. 2015

CONFREY, J.; SMITH, E. Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. **Journal for Research in Mathematics Education**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 26, n. 1, p. 66–86, 1995. DOI: https://doi.org/10.2307/749228 Disponível em:https://www.jstor.org/stable/749228?origin=crossref Acesso em 20 jan. 2022.

DEFOUAD, B. **Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S**. Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2000.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking. *In*: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (ed.). **Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Cambridge: Cambridge University Press, 1990, p. 113-134. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.008 Disponível em: https://www.cambridge.org/core/books/abs/mathematics-and-cognition/advanced-mathematical-thinking/1EBA6DB6D470EC9FC18F66790CCD55C2 Acesso em: 19 jan. 2022

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. *In*: David Tall (ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. New York / Boston / Dordrecht / London /Moscow: Kluwer Academic Publishers,2002, p.25-41

DRIJVERS, P.; GODINO, J.D.; FONT, V.; TROUCHE, L. One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Verlag, v. 82, p.23-49. 2012. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-012-9416-8 Acesso em: 29 jan. 2021

ELLIS, A. B.; OZGUR, Z.; KULOW, T; DOGAN, M. F.; AMIDON, J. An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. **Mathematical Thinking and Learning**, Taylor & Francis Online, v. 18, n.3, p. 151-181., 2016. DOI: https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/10986065.2016.1183090 Acesso em: 06 jun. 2019

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GARCIA CUELLAR, D. J.; MARTINEZ MIRAVAL, M. A. Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. **trf** [online], Camagüey, v.14, n.2, p.252-261, 2018. Disponível em: https://revistas.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/2266. Acesso em: 27 set 2019

GEOGEBRA GROUP. **GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone**, versão 5.0.146.0, Windows, Mac OS X e Linux. Linz: Áustria, 2015. Disponível em: http://www.geogebra.org/ Acesso em: 31 ago. 2015

GIBSON, J. **The ecological approach to visual perception**. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1979.

GIBSON, J. **The senses considered as perceptual systems.** Boston, MA: Houghton Mifflin, 1966.

GITIRANA, V. Funções: aprendizagem e representações. **Programa de Pós-Graduação em Educação**, Recife, 1999. Não publicado. Disponível em: https://www.academia.edu/39796433/Fun%C3%A7%C3%B5es_aprendizagem_e_representa%C3%A7%C3%B5es?source=swp_share Acesso em: 19 dez. 2021.

GITIRANA, V.; LUCENA, R. Orquestração instrumental on-line: um modelo pensado a partir do ensino remoto. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, v. 23, n. 3, p. 362-398, 2021. DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p362-398 Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/56700 Acesso em: 13 jan. 2022

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada**. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) - Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia-COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M.; TALL, D.O. **Conflitos Teórico-Computacionais e a formação da imagem conceitual de derivada**, 2002. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf. Acesso em: 20 jan. 2021.

GOLDENBERG, E. P. Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. **Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, v. 7, p. 135-173, 1988.

GOLDENBERG, P.; LEWIS, P.; O'KEEFE, J. Dynamic Representation and the Development of a Process Understanding of Function. *In*: DUBINSKY, Ed; HAREL, G. **The Concept of Function:** Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes no. 25. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. p. 235–60.

GOLDIN, G. A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. *In*: KELLY, A.E.; LESH, R.A. **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education**. Routledge: Taylor & Francis Group, 2000. p. 517-545.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v.1.

HABRE, S. Students' challenges with polar functions: covariational reasoning and plotting in the polar coordinate system. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Taylor & Francis online, v. 48, n. 1, p. 48-66, 2017. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1220027. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2016.1220027?journalCode=tmes20 Acesso em: 12 jun 2019

HOHENSEE, C. Student noticing in classroom settings: A process underlying influences on prior ways of reasoning. **The Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, v. 42, p. 69-91, 2016. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.002. Disponível em: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0732312316300062 Acesso em: 26 jul. 2019

JOHNSON, H. L. Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. **Mathematical Thinking and Learning**, Taylor & Francis Online, v. 17, n. 1, p. 64-90, 2015a. DOI: https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986065.2015.981946 Acesso em: 12 jun. 2019

JOHNSON, H. Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. **Educational Studies in Mathematics**, Springer-Verlag, v. 89, n. 1, p. 89-110, 2015b. DOI: 10.1007/s10649-014-9590-y. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/43590240. Acesso em: 26 jul. 2019.

JOHNSON, H.L.; McCLINTOCK, E.; HORNBEIN, P. Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. **ZDM Mathematics Education,** Springer, v. 49, p. 851–864, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-017-0866-4 Acesso em: 19 jul. 2019

JOHNSON, H.L.; McCLINTOCK, E. A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, Springer-Verlag, v. 97, p. 299–316, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-017-9799-7 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-017-9799-7 Acesso em: 12 mai. 2019

JONES, S. R. Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Taylor & Francis online, v. 46, n. 1, p. 105-126, 2015. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941427 Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2014.941427 Acesso em: 06 jun. 2019

JONES, S. R. An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. **The Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, v. 45, p. 95–110, 2017. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.002 Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312316301791?via%3Dihub Acesso em: 26 jul. 2019

KAPUT, J. Technology and Mathematics Educacion. *In*: GROWS, D.A. (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York, NY: Macmillan, 1992. p. 515-556.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, v.20, n.4, p. 282-300, 1989. Disponível em https://www.maa.org/programs/maa-awards/writing-awards/evolution-of-the-function-concept-a-brief-survey. Acesso em: 17 jan. 2022.

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. **ZDM- Mathematics Education**, Springer, v. 46, n. 2, p. 533-548, 2014. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014-0571-5 Acesso em 17 jan. 2022

KUJALA, S., MÄNTYLÄ, M. **Studying Users for Developing Usable and Useful Products**, *In:* 1st Nordic Conference on Computer-Human Interaction, 2000, Stockholm. **Proceedings of 1st Nordic Conference on Computer-Human Interaction.** Stockholm: Interaction Design Foundation, 2000. 11p.

LAGRANGE, J-B. A functional perspective on the teaching of algebra: current challenges and the contribution of technology. **The International Journal For Technology in Mathematics Education**. 2014 Disponível em: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01740456. Acesso em: 12 mai. 2019

LAGRANGE, J.; PSYCHARIS, G. Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions. **Technology, Knowledge and Learning**, Springer, v. 19, p.255–286, 2014. DOI: https://doi.org/10.1007/s10758-013-9211-3. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10758-013-9211-3 Acesso em 26 jul. 2019

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 8 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. v.1.

MALIK, M.A. Historical and pedagogical aspects of the definition of function, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 11, n. 4, p. 489-492, 1980. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739800110404. Acesso em: 17 jan. 2022.

MEIRA, L. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. **Temas psicológicos**, Ribeirão Preto, v. 2, n. 3, p. 59-71, dez. 1994 . Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-389X1994000300007&lng=pt&nrm=iso.. Acesso em: 19 jan. 2021.

MOORE, K. C.. Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. **Journal for Research in Mathematics Education**, NCTM, v. 45, n. 1, p.102-138, 2014. DOI: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0102 Disponível em: http://www.jstor.org/stable/10.5951/jresematheduc.45.1.0102. Acesso em: 15 mai. 2019.

MOORE, K. C.; THOMPSON, P. W. Shape thinking and students' graphing activity. *In*: 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education, 2015, Pittsburgh. **Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education**. Pittsburgh, PA: RUME, 2015, p. 782–789.

MUSGRAVE, S.; CARLSON, M.P. Understanding and advancing graduate teaching assistants' mathematical knowledge for teaching. **The Journal of Mathematical Behavior,** Elsevier, v. 45, p. 137-149, 2017. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.12.011 Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312316302012?via%3Dihub Acesso em: 26 jul. 2019

NAGLE, C.; TRACY, T.; ADAMS, G.; SCUTELLA, D. The notion of motion: covariational reasoning and the limit concept. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Taylor & Francis online, v. 48, n.4, p. 573-586, 2017. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1262469. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2016.1262469?journalCode=tmes20 Acesso em: 12 jun. 2019.

NDLOVU, M.; WESSELS, D.; De VILLIERS, M. An instrumental approach to modelling the derivative in Sketchpad. **Pythagoras**, AOSIS Publishing, v. 32, n. 2, p.1-15, 2011. DOI: http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i2.52 Disponível em: https://pythagoras.org.za/index.php/pythagoras/article/view/52 Acesso em: 27 set. 2019

ORTS, A.; BOIGUES, F.; CISCAR, S. Génesis Instrumental del Concepto de Recta Tangente. **Acta Scientiae**, editora Ulbra, v.20, n.2, p. 78-95, 2018. DOI: http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss2id3833. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3833 Acesso em: 27 set. 2019

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, p. 105-132, 2006. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880 Acesso em: 29 jul. 2020

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies:** approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

ROORDA, G.; VOS, P.; DRIJVERS, P.; GOEDHART, M. Solving Rate of Change Tasks with a Graphing Calculator: a Case Study on Instrumental Genesis. **Digital Experiences in Mathematics Education**, Springer, v. 2, p.228–252, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s40751-016-0022-8 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs40751-016-0022-8 Acesso em: 27 set. 2019

RÜTHING, D. Some Definitions of The Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *In:* Old Intelligencer. **The Mathematical Intelligencer**, v.6, n.4, p.72-77, 1984. DOI:https://doi.org/10.1007/BF03026743 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF03026743. Acesso em: 17 jan. 2022.

SALDANHA, L. A.; THOMPSON, P. W. Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *In*: BERENSON, S. B.; COULOMBE, W. N. (ed.). **Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education North America**. Raleigh: North Carolina State University, 1998. v. 1, p. 298–304. Disponível em: http://bit.ly/1b4sjQE. Acesso em: 07 set. 2018

SILVA, C.T.J.; GITIRANA, V**.** Função Quadrática e Progressões Aritméticas: uma abordagem com o auxílio de softwares. *In*: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba - PR. **Anais [...]** Brasília-DF: SBEM, 2013. v. 1. p. 1-14.

SILVA, C. T. J.; GITIRANA, V. Abordagem covariacional de função: aspectos do ensino, aprendizagem e possibilidades das tecnologias digitais. No prelo.

STAKE, R. E. **The art of case study research**. Thousand Oaks-Califórnia: Sage Publications, Inc, 1995.

THOMPSON, P. W. Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. **Educational Studies in Mathematics**, Springer-Verlag, v. 26, p. 229-274, 1994.

THOMPSON, P. W., CARLSON, M. P.. Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *In*: CAI, J. (ed.), **Compendium for research in mathematics education**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2017. p. 421-456.

THOMPSON, P.W.; HATFIELD, N.; YOON, H.; JOSHUA, S.; BYERLEY, C. Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. **The Journal of Mathematical Behavior**, Elsevier, v. 48, p. 95-111, 2017. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312316300700?via%3Dihub Acesso em: 11 jul. 2019

TROUCHE, L. **A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice:** étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation.Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1997.

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations**. Recherches en didactique des Mathématiques.** v.25, n.1, p. 91-138, 2005. Disponível em: https://revue-rdm.com/2005/construction-et-conduite-des-instruments-dans-les-apprentissages-mathematiques-necessite-des-orchestrations/ Acesso em: 12 jan. 2021

TROUCHE, L., DRIJVERS, P. Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. **ZDM – The International Journal of Mathematics Education**, Springer, v. 42, n. 7, p. 667–681, 2010. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-010-0269-2 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-010-0269-2 Acesso em: 14 nov. 2020

TROUCHE, L.; GUIN, D. Seeing is Reality: How Graphic Calculators May Influence the Conceptualization of Limits. *In*: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME 20), 20., 1996, Valencia. **Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20)** [...]. Valencia, 1996. p. 323-330. v.4.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. **Human Development,** Karger Publisher, Basel - Suiça**,** v. 52, p.83-94, 2009. DOI: https://doi.org/10.1159/000202727. Disponível em: https://www.karger.com/Article/Abstract/202727 Acesso em: 22 jan. 2020

VILLA-OCHOA, J. A. Raciocínio "covariacional": O caso da função quadrática. *In*: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. 2011, Recife. **Anais[...]**. Recife: Comité Interamericano de Educação Matemática, 2011. p.1-12.

WATSON, A.; AYALON, M.; LERMAN, S. Comparison of students' understanding of functions in classes following English and Israeli national curricula. **Educational Studies in Mathematics,** Springer-Verlag, v. 97, p. 255–272, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-017-9798-8. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-017-9798-8 Acesso em: 06 jun. 2019

WEBER, E.; THOMPSON, P.W.. Students' images of two-variable functions and their graphs. **Educational Studies in Mathematics,** Springer-Verlag, v. 87, p. 67–85, 2014. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-014-9548-0 Acesso em: 26 jul. 2019

YEMEN-KARPUZCU, S.; ULUSOY, F.; IŞIKSAL-BOSTAN, M. Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events During Peer Interactions. **International Journal of Science and Mathematics Education,** Springer, v. 15, p. 89–108, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-015-9668-8 Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10763-015-9668-8 Acesso em: 26 jul. 2019

YIN, R. K. **Estudo de Caso: Planejamento e métodos**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

ZENGIN, Y. Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. **Educational Studies in Mathematics,** Springer-Verlag, v. 99, p. 311–333, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-018-9832-5. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-018-9832-5 Acesso em: 16 jul. 2019

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO DE PERFIL

1- E-mail

2- Nome completo

3- Você utiliza algum software para explorar o conteúdo de função? Qual(is)?

4- De forma geral, como você avalia o seu domínio sobre o uso desse(s) software(s)? (Caso você utilize softwares)

O Nenhum domínio O Domino pouco O Domino razoavelmente O Domino bem

5- Qual a sua familiaridade com o software Geogebra?

O Não conheço o Geogebra
O Conheço, mas não uso o Geogebra
O Conheço, mas uso pouco o Geogebra
O Conheço e uso o Geogebra

6- De forma geral, para quais atividades e conteúdos matemáticos você utiliza o Geogebra?

7- Há quanto tempo você utiliza o Geogebra? (Caso já utilize o software)

8- Como você avalia o seu grau de domínio sobre o Geogebra?

O Nenhum domínio O Domino pouco O Domino razoavelmente O Domino bem

9- Como você avalia o seu grau de domínio sobre o Geogebra para explorar funções?

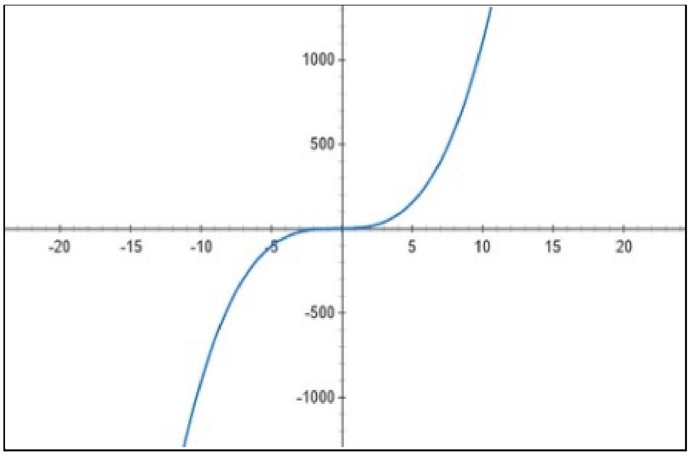
O Nenhum domínio O Domino pouco O Domino razoavelmente O Domino bem

10- Como você avalia o seu domínio no conteúdo de função?

O Nenhum domínio O Domino pouco O Domino razoavelmente O Domino bem

11- O que é uma função?

12 - Como você descreveria o comportamento das variáveis de uma função representada pelo gráfico abaixo?



APÊNDICE B - FICHA DA SITUAÇÃO 1A

- *O tempo planejado para a realização de cada atividade é de 30 a 40 minutos.*
- *Os estudantes serão incentivados a pensar em voz alta, para que possamos ter acesso aos raciocínios que os levaram a seguir cada estratégia.*
- *Pedimos que a tela do computador seja gravada durante a realização da atividade, por meio do software AtubeCatcher (ou outro software de videogravação), além disso, pedimos que se pense em voz alta, explicando cada ação/estratégia com o uso do software na resolução da atividade.*

Siga as orientações seguintes para realizar esta atividade:

Abra o arquivo Atividade1A.ggb
Na janela de visualização 1, ao selecionar uma função, o gráfico de coordenadas exibe segmentos que representam valores de x e da imagem de x para a função escolhida (por exemplo, f(x)). Ao variar a variável x, os valores da variável dependente variam simultaneamente. É possível variar x manualmente ou automaticamente, ao clicar no botão "play" no canto inferior esquerdo da tela do Geogebra.

1- Descreva como varia a variável dependente em função da variação da variável x em cada função.

a) t(x)

b) m(x)

c) p(x)

d) r(x)

e) f(x)

2- Na janela de visualização 2, esboce um gráfico que na sua opinião mais se aproxima do gráfico de cada função selecionada e descreva-o relacionando com as suas descrições no item 1. *(Após esboçar o gráfico, clique na tela da janela de visualização 2 -> Menu -> Exportar imagem -> copiar para a área de transferência, em seguida cole (CTRL+V) o gráfico nesta ficha de atividade)*

a) t(x)

b) m(x)

c) p(x)

d) r(x)

e) f(x)

APÊNDICE C - FICHA DA SITUAÇÃO 2

- Construa um modelo de função polinomial de grau 3: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Construa controles deslizantes e atribua valores aos coeficientes a, b, c e d.
- Construa dois pontos no eixo x, tais que suas coordenadas no eixo x sejam $x_B = x_A + \Delta x$, com Δx um valor positivo. Construa um controle deslizante para Δx.
- Construa dois pontos no eixo y, tais que suas coordenadas no eixo y sejam $y_A = f(x_A)$ e $y_B = f(x_B)$.
- Você pode exibir os valores de $\Delta x = x(B)-x(A)$ e $\Delta y= f(x(B))-f(x(A))$ na planilha.
- Caso tenha dificuldades na construção destes passos, acesse o arquivo por este link: https://www.geogebra.org/classic/yvegkx54

1- Defina um valor para Δx e varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente. Responda:

a) Descreva como a variação Δy (variação no eixo y) varia em função dos valores assumidos por x_A e x_B. Teste outros valores de Δx e descreva o comportamento de Δy.

b) Como a variação Δy se comporta quando a concavidade do gráfico é voltada para cima? E quando é voltada para baixo? E nos pontos de máximo, mínimo e inflexão?

Orientações item 2:

- Na janela de álgebra, construa uma função para calcular a taxa de variação: *Δy/Δx = (f(x(B)) - f(x(A))) / (x(B) - x(A))*. Basta colar esta expressão na janela de álgebra: *(f(x(B)) - f(x(A))) / (x(B) - x(A))*. Vai ficar assim: $m = \frac{f(x(B)) - f(x(A))}{x(B) - x(A)}$
- Outra opção é calcular a taxa de variação diretamente na planilha, fazendo o quociente entre o valor de $\Delta y= f(x(B))-f(x(A))$ e $\Delta x = x(B)-x(A)$.
- Caso tenha dificuldades na construção destes passos, o link do início da atividade já exibe o valor da taxa de variação.

2- Escolha Δx pequeno o suficiente (por exemplo $\Delta x = 0.0001$), varie os pontos x_1 e x_2 simultaneamente e responda:

a) Observe a variação do valor de $\Delta y/\Delta x$. Como a taxa de variação varia em função de x para a função dada?

b) Como a variação de $\Delta y/\Delta x$ se relaciona com aspectos do gráfico da função? (concavidades, pontos de máximo e mínimo, pontos de inflexão)

c) Que relação há entre $\Delta y/\Delta x$ e a derivada da função?

3- A partir do gráfico da função, esboce um gráfico que represente a taxa de variação em função de x. Justifique a forma do gráfico da taxa de variação relacionando-o com o gráfico da função.

APÊNDICE D - FICHA DA SITUAÇÃO 3

Abra o arquivo https://www.geogebra.org/classic/gy5bcrkg
Na janela de visualização 1, é exibido o gráfico de uma função polinomial de grau 3: ax^3+bx^2+cx+d
Na janela de visualização 2, é exibido um gráfico formado pelas variações sucessivas (variações em y, dado Δx fixo) em um intervalo [a,i]
A planilha mostra uma tabela com valores de x, Δx, y, Δy , Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy)).

1- Explore a simulação e observe as relações entre o gráfico da função (*janela de visualização 1*) e o gráfico das variações sucessivas Δy (*janela de visualização 2*). Quais as relações entre o sinal da variação (positiva ou negativa), a variação da variação (variável crescente ou decrescente) e o gráfico da função? Justifique sua resposta em termos da variação em x e y.

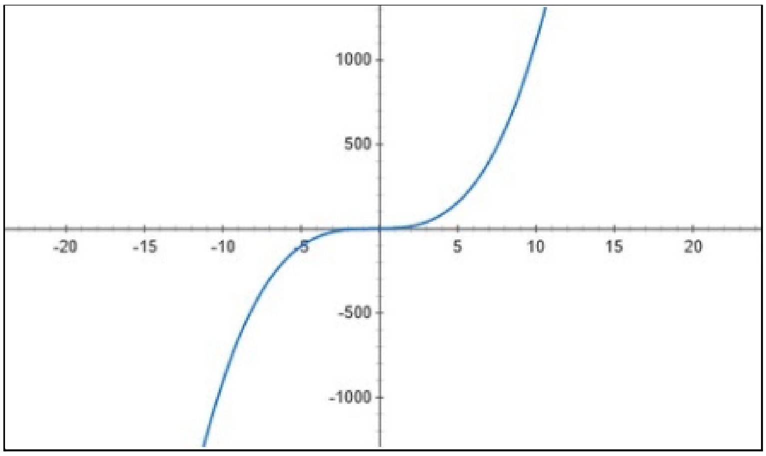
2- Construa um modelo geral para funções polinomiais de grau até 3*. Em seguida, responda aos seguintes itens, justificando as suas respostas em termos da variação conjunta entre x e y:
**Use os controles deslizantes u_1, u_2, u_3 e u_4 para os coeficientes da função.*

a) Varie os coeficientes da função e observe as variações no gráfico das variações sucessivas. De que forma o gráfico das variações se comporta?
b) Na planilha, que relações você percebe entre a variação dos coeficientes das funções polinomiais de grau 3 e as variações nas colunas Δy, Δ(Δy) e Δ(Δ(Δy))?
c) Teste os itens (a) e (b) para o caso das funções quadrática e afim. Que relações entre as funções e a sua variação você percebe nesses casos?

3- Explore uma classe de função real que não seja polinomial. Descreva a variação nesta classe de funções usando a simulação das variações sucessivas e a planilha.

APÊNDICE E - ROTEIRO DA ENTREVISTA

1 - Este gráfico foi apresentado no questionário inicial. Após a vivência do curso, você alteraria/complementaria a descrição que você deu no início para o comportamento das variáveis, ou não? Se sim, de que forma?



2- Você considera que alguma ferramenta explorada no curso contribuiu para o seu raciocínio covariacional, ou seja, para visualizar o gráfico no sentido de como as variáveis variam entre si?

3- (*Orienta-se o sujeito a acessar o link do material: https://www.geogebra.org/m/fxpthpf4*) Divida o gráfico da função *f* em intervalos nos quais a função muda a forma como varia (crescente, decrescente, crescente com acréscimos cada vez maiores, decrescente com acréscimos cada vez menores, etc), em seguida, descreva como as variáveis variam em cada intervalo.

4- Esboce um gráfico da taxa de variação instantânea de *f*.

ANEXO A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO - CAMPUS RECIFE
CENTRO DE EDUCAÇÃO - PPGEDUMATEC

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS)

Convidamos o (a) Sr. (a) para participar como voluntário (a) da pesquisa "Uso de um artefato computacional como suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional em função", que está sob a responsabilidade do pesquisador César Thiago José da Silva, _______(Endereço)____, ____(E-mail)____, _____(Telefone)_____, sob a orientação da Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira/ ______(Telefone)____/ _____(E-mail)_____.

Todas as suas dúvidas podem ser esclarecidas com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubrique as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

O (a) senhor (a) estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Descrição da pesquisa e esclarecimento da participação: De forma geral, a pesquisa analisará os efeitos do uso de tecnologias digitais na aprendizagem do conceito de função. Trata-se de uma investigação importante para compreender o papel e as pontencialidades do uso de tecnologias no ensino da Matemática, sobretudo em um momento de ênfase no uso desses recursos. Como sujeitos da pesquisa, os voluntários participarão de um experimento de ensino, no qual aprenderão a utilizar as ferramentas de um aplicativo baseado no ambiente Geogebra e utilizarão esse aplicativo para resolver tarefas sobre funções, além disso, serão aplicados um questionário e uma entrevista, um ao início e um ao final do experimento de ensino, com o objetivo de compreender melhor o desenvolvimento dos conceitos envolvidos pelos participantes. Os dados serão coletados de forma online, em momentos individuais e coletivos, por meio de plataformas de videoconferências e instrumentos de gravação de tela do computador dos participantes. O planejamento inicial é de 6 encontros online para a realização do experimento de ensino, cada um com aproximadamente 2 horas e meia.

RISCOS: (i) Exposição da imagem ou dado pessoal de forma indevida ou involuntária: para minimizar o risco de que um usuário tenha, em algum momento do experimento de ensino, imagem, áudio, texto ou documento pessoal exposto de forma indevida aos demais participantes, as sessões iniciarão com um momento de checagem, pelos participantes e pelo pesquisador, de possíveis arquivos abertos nos seus computadores e de lembretes permanentes na plataforma online, além de lembretes realizados verbalmente pelo pesquisador, antes de os participantes compartilharem suas telas; (ii) Cansaço: o pesquisador monitorará, durante o experimento de ensino, a disposição dos participantes, para em caso de cansaço, adequar a duração do experimento; (iii) Constrangimento: para evitar o constrangimento dos participantes na resposta a alguma atividade/questionamento, os mesmos serão orientados verbalmente no início do experimento, de que podem se recusar a responder quaisquer questões ou a realizar quaisquer atividades que considerarem constrangedoras, além do mais, as perguntas das atividades, questionários e entrevistas foram concebidas de forma a minimizar o máximo possível a chance de constrangimento aos participantes. **BENEFÍCIOS diretos/indiretos** para os voluntários: Os benefícios aos participantes incluem: treinamento no uso do ambiente Geogebra e no aplicativo desenhado nesse ambiente especialmente para a pesquisa e o desenvolvimento conceitual em função.

Esclarecemos que os participantes dessa pesquisa têm plena liberdade de se recusar a participar do estudo e que esta decisão não acarretará penalização por parte dos pesquisadores. Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (videogravações, entrevistas, questionários e fichas de atividades), ficarão armazenados em computador pessoal, sob a responsabilidade do pesquisador, no endereço acima informado, pelo período de mínimo 5 anos após o término da pesquisa.

Nada lhe será pago e nem será cobrado para participar desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento de transporte e alimentação).

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, o (a) senhor (a) poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da UFPE no endereço: **(Avenida da Engenharia s/n – 1º Andar, sala 4 - Cidade Universitária, Recife-PE, CEP: 50740-600, Tel.: (81) 2126.8588 – e-mail: cephumanos.ufpe@ufpe.br).**

____

(assinatura do pesquisador)

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, ____________________________________, CPF _________________, abaixo assinado, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com o pesquisador responsável, concordo em participar do estudo "Uso de um artefato computacional como suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional em função", como voluntário (a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo(a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Local e data __________________

Assinatura do participante: ___________________________

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite do voluntário em participar. (02 testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura: