



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

VINÍCIUS BELARMINO ALMEIDA

**INTERAÇÃO ENTRE TORÇÃO, FLEXÃO E CORTANTE EM VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO SEGUNDO NBR 6118 E AASHTO LFRD 2014**

Recife

2021

VINÍCIUS BELARMINO ALMEIDA

**INTERAÇÃO ENTRE TORÇÃO, FLEXÃO E CORTANTE EM VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO SEGUNDO NBR 6118 e AASHTO LFRD 2014**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil.

**Área de concentração:** Estruturas.

**Orientador:** Prof. Dr. Bernardo Horowitz.

Recife

2021

Catálogo na fonte:  
Bibliotecária Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

A447i Almeida, Vinícius Belarmino.  
Interação entre torção, flexão e cortante em vigas de concreto armado segundo NBR 6118 e AASHTO LFRD 2014 / Vinícius Belarmino Almeida. – 2021.  
103 f.: il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Recife, 2021.  
Inclui referências e anexos.

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado. 3. Vigas. 4. Flexão. 5. Torção. 6. Cortante. 7. Interação. 8. Otimização. 9. NBR 6118. 10. AASHTO LRFD. I. Horowitz, Bernardo (Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG / 2022-157

VINÍCIUS BELARMINO ALMEIDA

**INTERAÇÃO ENTRE TORÇÃO, FLEXÃO E CORTANTE EM VIGAS DE  
CONCRETO ARMADO SEGUNDO NBR 6118 e AASHTO LFRD 2014**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em 08/11/2021.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Bernardo Horowitz (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Tiago Ancelmo Pires de Oliveira (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof. Dr. Fernando Artur Nogueira (Examinador Externo)  
Universidade Católica de Pernambuco

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, a minha família e amigos e a todos os professores, colegas e autores que de alguma forma me ajudaram a construir este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Finance Code 001.

## RESUMO

Vigas de concreto armado estão sujeitas a flexão, torção e cortante, muitas vezes de forma simultânea. A interação entre esses esforços atuantes é um fenômeno complexo, que exige um modelo unificado de análise e dimensionamento. Consequentemente, é comum adotar procedimentos aproximados, oriundos das normas técnicas ou literatura, que podem levar a resultados conservadores ou inconsistentes. Esta dissertação implementou um procedimento automatizado para análise dos esforços resistentes, segundo os modelos da NBR 6118/2014 (treliça generalizada de banzos paralelos) e AASHTO LRFD Bridge Design Specifications 2014 (Teoria do Campo de Compressão Modificada). Esse algoritmo usou uma analogia que transforma o problema de resistência em um problema de otimização com restrições, o que permitiu gerar uma superfície de interação com indicações das restrições ativas em cada grau de interação entre os esforços. Foram geradas as superfícies de interação para três vigas com ensaios experimentais disponíveis na literatura, plotando os resultados empíricos contra a superfície obtida a partir das prescrições normativas. O trabalho concluiu que o procedimento proposto foi eficiente e eficaz em prever a resistência das vigas analisadas. A comparação das superfícies de interação obtidas com os dados experimentais e outras superfícies da literatura existente mostrou a consistência do procedimento, e sua aplicação se mostrou prática e simples, permitindo utilizar os procedimentos normativos em sua forma completa. A abordagem de otimização garantiu resultados econômicos e seguros. As normas analisadas mostraram prescrições geralmente seguras em comparação com os resultados experimentais.

**Palavras-chave:** concreto armado; vigas; flexão; torção; cortante; interação; otimização; NBR 6118; AASHTO LRFD.

## ABSTRACT

Reinforced concrete beams are subjected to bending, torsion and shear simultaneously. The interaction of combined loading is complex and demands a unified model for analysis and design. Therefore, it's common to use approximate procedures from technical standards or literature, that may lead to conservative or inconsistent results. This dissertation has created an automatic procedure to obtain a beam's strength, according to the models taken from NBR 6118/2014 (variable angle truss model with parallel chords) and AASHTO LRFD Bridge Design Specifications 2014 (Modified Compression Field Theory). This algorithm has used an analogy that converts the resistance problem into a constrained optimization problem, generating an interaction surface that also displays the active constraints for each degree of interaction. Interaction surfaces were produced for three beams with experimental results available in the literature, plotting the tests data against the surface obtained by the standards. This document concluded that the proposed procedure was efficient and effective in predicting the beams' resistance. The comparison between the interaction surfaces here generated and empirical data and other surfaces from the existing literature showed the procedure is consistent and its application simple and practical, allowing full usage of the standards' procedures. The optimization approach guaranteed economical and safe results. The standards analysis demonstrated reasonably safe results in comparison with experimental data.

**Keywords:** reinforced concrete; beams; bending; torsion; shear; interaction; optimization; NBR 6118; AASHTO LRFD.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplos de elementos sujeitos a interação de esforços.....	15
Figura 2 - Número de equações e artigos sobre corte na ACI ao longo do século 20 .....	18
Figura 3 - Número de artigos sobre corte, torção e interação no jornal da ACI .....	20
Figura 4 - Relação entre os esforços de torção, flexão e cortante .....	23
Figura 5 - Tensões principais de compressão e foto de fissuras em uma viga fletida .....	25
Figura 6 - Tensão de cisalhamento média entre fissuras.....	26
Figura 7 - Resistência e fissuras inclinadas de acordo com a esbelteza da viga .....	27
Figura 8 - Mecanismos internos de resistência ao corte numa viga com estribos.....	27
Figura 9 - Modelo de treliça para o concreto armado .....	28
Figura 10 - Mecanismos alternativos de transmissão de esforços entre seções .....	29
Figura 11 - Formas de ruptura numa viga de concreto armado sujeita a corte e flexão .....	29
Figura 12 - Tensões circulatorias de cisalhamento devido à torção .....	30
Figura 13 - Tensões de cisalhamento, principais e fissuras circulatorias de torção .....	31
Figura 14 - Torção em um tubo de paredes finas .....	32
Figura 15 - Seção original cheia e tubo de paredes finas equivalente .....	32
Figura 16 - Tubo de paredes finas equivalente numa seção fissurada.....	33
Figura 17 - Concreto não fissurado sob flexão.....	34
Figura 18 - Deformações num elemento fissurado e círculo de Mohr de deformações .....	35
Figura 19 - Círculo de Mohr das tensões e diagramas de corpo livre da MCFT .....	36
Figura 20 - Tensões médias e locais .....	36
Figura 21 - Treliça espacial generalizada e tubo de paredes finas da MCFT .....	38
Figura 22 - Fenômeno de deslocamento do concreto armado sob torção .....	38
Figura 23 - Quantidade e tipos de vigas ensaiadas sob cortante .....	39
Figura 24 - Idealização da seção pela MCFT .....	41
Figura 25 - Modelo da treliça generalizada com banzos paralelos.....	46
Figura 26 - Contribuição do concreto tracionado na treliça.....	46
Figura 27 - Tubo de paredes finas e treliça espacial generalizada para torção .....	48
Figura 28 - Seção de uma das paredes verticais da treliça - estribos.....	48
Figura 29 - Seção de uma das paredes verticais da treliça – bielas e banzos.....	49
Figura 30 - Domínios de estado limite último .....	50
Figura 31 - Seção de concreto armado com armaduras longitudinais sob flexão .....	50

Figura 32 - Interação entre os esforços de cisalhamento em seções vazada e cheia .....	52
Figura 33 - Esforços internos, externos e deformações na seção .....	55
Figura 34 - Inclinação do campo de compressão versus deformação longitudinal .....	55
Figura 35 - Arranjo das cargas atuantes nas vigas S1 a S7 .....	64
Figura 36 - Dimensões das vigas S1 a S7 em cm (diâmetro das barras em mm) .....	64
Figura 37 - Arranjo das cargas atuantes nas vigas dos grupos M5 a M7 .....	65
Figura 38 - Dimensões das vigas M5, M6 e M7 em cm (diâmetro das barras em mm) .....	65
Figura 39 - Superfície de interação NBR e AASHTO (vigas S1 a S7) .....	68
Figura 40 - Superfície de interação AASHTO (Vigas S1 a S7) .....	68
Figura 41 - Superfície de interação NBR e AASHTO (vigas M5 e M6) .....	70
Figura 42 - Superfície de interação NBR e AASHTO (vigas M7) .....	71

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras gregas

$\sigma$	Tensão normal na seção transversal
$\tau$	Tensão de cisalhamento na seção transversal
$\theta$	Ângulo de inclinação das bielas/campo de compressão
$\alpha$	Ângulo de inclinação da armadura transversal
$\varepsilon_x$	Deformação normal na direção horizontal
$\varepsilon_y$	Deformação normal na direção vertical
$\varepsilon_1$	Deformação principal de tração
$\varepsilon_2$	Deformação principal de compressão
$\gamma_{xy}$	Deformação de cisalhamento na direção vertical
$\varepsilon'_c$	Deformação máxima de compressão do concreto
$\nu_{ci}$	Tensão de cisalhamento transmitida por engrenamento de agregado
$\rho_{sw,min}$	Taxa de armadura transversal mínima
$\rho_{s,min}$	Taxa de armadura longitudinal mínima
$\sigma_{cw}$	Tensão de compressão nas bielas de compressão
$\alpha_{v2}$	Fator de redução da resistência à compressão do concreto nas bielas
$\sigma_{cmed}$	Tensão de compressão média na mesa comprimida da seção transversal
$\sigma_{cmax}$	Tensão de compressão principal na mesa comprimida da seção
$\tau_t$	Tensão de cisalhamento devido à torção na periferia da seção transversal
$\lambda, \gamma$	Fatores de interpolação entre as resistências à compressão do concreto nos diferentes nós de modelos de biela e tirante
$\nu_u$	Tensão de cisalhamento última na direção vertical na seção transversal
$\beta$	Fator de capacidade do concreto fissurado transmitir tensão e corte
$\varepsilon_s$	Deformação longitudinal do aço tracionado
$\beta_r, \alpha_r$	Ângulos que definem a relação entre os esforços de flexão, momento e cortante na seção transversal

### Letras romanas maiúsculas

M	Momento fletor na direção horizontal
V	Esforço cortante na direção vertical
T	Momento torçor
I	Momento de inércia principal da viga

$Q$	Momento estático principal da viga
$V_{cy}$	Esforço cortante resistido pelo concreto comprimido
$V_d$	Esforço cortante resistido pelo “efeito pino”
$V_{ay}$	Esforço cortante resistido pelo “engrenamento de agregado”
$V_s$	Esforço cortante resistido pelos estribos
$A_0$	Área envolvida pela linha média do fluxo de cisalhamento
$A_{cp}$	Área envolvida pelo perímetro seção transversal
$T_{cr}, T_{th}$	Torção de fissuração e torção limite
$A_g$	Área bruta da seção transversal vazada
$A_t$	Área da seção de uma perna de armadura transversal
$A_{sw}$	Área da seção de armadura transversal
$A_{s,inf}, A_{s,sup}, A_{s,tot}$	Área da seção de armadura longitudinal inferior, superior e total
$M_{sd}, V_{sd}, T_{sd}$	Esforços solicitantes de projeto de flexão, corte e torção
$M_u, V_u, T_u, N_u$	Esforços últimos (solicitantes) de flexão, corte e torção
$V_{Rd2}$	Esforço cortante resistido pelas bielas comprimidas
$V_{Rd3}$	Esforço cortante resistido pelos tirantes
$R_{cw}$	Esforço cortante nas bielas comprimidas
$V_{sw}$	Esforço cortante resistido pelos estribos
$R_{swt}$	Esforço cortante nos estribos
$V_{cw}$	Esforço cortante transversal às bielas comprimidas
$V_{c0}$	Esforço cortante resistido pelo concreto nos tirantes reduzido pelo nível de solicitação de corte
$V_{c1}$	Esforço cortante resistido pelo concreto nos tirantes reduzido pelo estado de fissuração da seção
$V_c$	Esforço cortante resistido pelo concreto nos tirantes
$M_0$	Momento fletor de descompressão da seção
$R_{st,v}$	Força de tração no banzo devido ao corte
$R_{st,m}$	Força de tração no banzo devido ao momento fletor
$R_{st}$	Força de tração no banzo devido ao momento fletor e cortante
$A_c$	Área da seção transversal
$A_e$	Área envolvida pela linha média do tubo de paredes finas equivalente

V1, V2, V3, V4	Esforços cortantes ao redor do tubo de paredes finas equivalente
$T_{Rd3}$	Torção resistida pelos tirantes da treliça espacial
$D_2$	Força de compressão nas bielas diagonais da treliça espacial
$N_1, N_2$	Forças normais nos banzos da treliça espacial
$T_{Rd4}$	Torção resistida pelos banzos da treliça espacial
$T_{Rd2}$	Torção resistida pelas bielas comprimidas
$M_{Rd}$	Momento fletor resistente
$A_{sv}$	Área da seção de armadura transversal solicitada pelo cortante
$A_{sv,min}$	Área mínima de seção transversal
$V_n$	Esforço cortante nominal
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$A_{oh}$	Área envolvida pela linha dos estribos
$T_{n,transversal}$	Esforço nominal de torção dos estribos
$V_{u,eq}$	Esforço de corte último equivalente entre torção e cortante
$M_n$	Esforço nominal de flexão
$M_{max}, V_{max}, T_{max}$	Esforço máximo resistente sob flexão, corte ou torção isoladamente

#### Letras romanas minúsculas

r	Multiplicador adimensional de esforços (raio)
y	Distância da linha neutra à fibra extrema da seção transversal
$b_w$	Largura da alma da seção transversal
$p_{cp}$	Perímetro da seção transversal
q	Fluxo de cisalhamento
$p_o$	Perímetro da linha média do fluxo de cisalhamento
$f'_c$	Resistência à compressão do concreto
t	Espessura do tubo de paredes finas equivalente
z	Braço de alavanca da seção transversal
$f_2$	Tensão principal de compressão
$f_{2max}$	Tensão máxima de compressão do concreto
$f_1$	Tensão principal de tração
$f_w$	Tensão na armadura transversal
$f_l$	Tensão na armadura longitudinal
s	Espaçamento longitudinal entre os estribos

$f_{ywd}$	Tensão de escoamento de projeto da armadura transversal
$f_{yd}$	Tensão de escoamento de projeto da armadura longitudinal
w	Largura das fissuras diagonais
$a_g$	Dimensão máxima de agregado graúdo
$s_\theta$	Espaçamento entre fissuras diagonais
$f_{ct,m}$	Resistência à tração média do concreto
$f_{ywk}$	Tensão de escoamento característica da armadura transversal
d	Altura útil da seção transversal
$f_{cd}$	Resistência à compressão de projeto do concreto
$f_{ck}$	Resistência à compressão característica do concreto
$n_{barras}$	Número de barras de estribo cortadas por uma fissura
$f_{ctd}$	Resistência à tração de projeto do concreto
$h_e$	Espessura do tubo de paredes finas equivalente
$h_{e,min}$	Espessura mínima do tubo de paredes finas equivalente
$h_{e,max}$	Espessura máxima do tubo de paredes finas equivalente
u	Perímetro da seção transversal
$c_1$	Distância entre o eixo da barra longitudinal a face do elemento estrutural
$u_e$	Perímetro da linha média do tubo de paredes finas equivalente
h	Altura da seção transversal
$x_o, y_o$	Largura e altura do tubo de paredes finas equivalente
$f_{yt}$	Tensão de escoamento de projeto da armadura transversal
a	Altura do bloco de compressão equivalente da seção transversal
$\bar{f}_{cd12}$	Resistência de projeto à compressão do concreto média em um nó no banzo superior da treliça espacial
$f_{cd1}$	Resistência de projeto à compressão em nó de encontro de bielas
$f_{cd2}$	Resistência de projeto à compressão em nó de biela cortado por tirantes
$s_x$	Espaçamento horizontal entre as fissuras diagonais
$s_{xe}$	Espaçamento horizontal efetivo entre as fissuras diagonais
$p_h$	Perímetro da armadura transversal

## SUMÁRIO

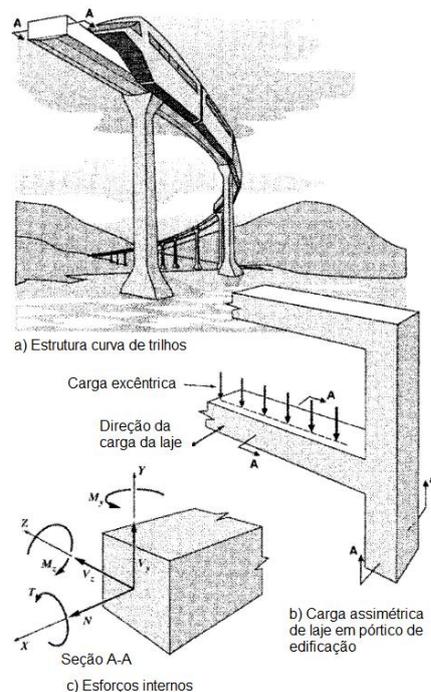
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa e motivação .....</b>	<b>16</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos .....</b>	<b>16</b>
1.2.1	Objetivos gerais .....	16
1.2.2	Objetivos específicos .....	16
<b>1.3</b>	<b>Revisão de literatura.....</b>	<b>17</b>
<b>1.4</b>	<b>Metodologia .....</b>	<b>23</b>
<b>1.5</b>	<b>Organização do trabalho .....</b>	<b>24</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo de Treliça Generalizado com Banzos Paralelos .....</b>	<b>25</b>
2.1.1	Esforço Cortante.....	25
2.1.2	Momento Torçor.....	29
2.1.3	Momento Fletor.....	33
<b>2.2</b>	<b>Teoria do Campo de Compressão Modificado .....</b>	<b>34</b>
2.2.1	Esforço Cortante.....	34
2.2.2	Momento Torçor.....	37
2.2.3	Momento Fletor.....	39
<b>2.3</b>	<b>Observações adicionais sobre os modelos apresentados .....</b>	<b>39</b>
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTOS NORMATIVOS.....</b>	<b>43</b>
<b>3.1</b>	<b>NBR 6118/2014 .....</b>	<b>43</b>
3.1.1	Esforço Cortante.....	43
3.1.2	Momento Torçor.....	46
3.1.3	Momento Fletor e Interação .....	50
<b>3.2</b>	<b>AASHTO LRFD Bridge Design Specifications 2014.....</b>	<b>52</b>
3.2.1	Esforço Cortante.....	53
3.2.2	Momento Torçor.....	56
3.2.3	Momento Fletor e Interação .....	57
<b>4</b>	<b>MÉTODO PROPOSTO .....</b>	<b>58</b>
<b>4.1</b>	<b>Esforços resistentes como um problema de otimização.....</b>	<b>58</b>
<b>4.2</b>	<b>Problemas de otimização para as prescrições normativas .....</b>	<b>58</b>
4.2.1	NBR 6118/2014.....	58

4.2.2	AASHTO LRFD BRIDGE DESIGN SPECIFICATIONS 2014 .....	61
4.3	<b>Pós-processamento.....</b>	<b>63</b>
5	<b>COMPARAÇÃO COM ENSAIOS EXPERIMENTAIS.....</b>	<b>64</b>
5.1	<b>Experimentos analisados .....</b>	<b>64</b>
5.2	<b>Resultados e discussão .....</b>	<b>67</b>
5.2.1	Vigas S1 a S7 .....	67
5.2.2	Vigas dos grupos M5 a M7 .....	69
6	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>73</b>
	<b>ANEXO A – ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO PARA NBR 6118/2014.....</b>	<b>76</b>
	<b>ANEXO B - ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO PARA AASHTO LRFD 2014 .</b>	<b>80</b>
	<b>ANEXO C – ALGORITMO DE PÓS-PROCESSAMENTO.....</b>	<b>83</b>
	<b>ANEXO D – ALGORITMOS DE OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTES MÁXIMOS SOB ATUAÇÃO ISOLADA.....</b>	<b>101</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Vigas de concreto armado estão sujeitas a esforços de flexão, torção e cortante. Há diversos modelos mecânicos e empíricos para análise e dimensionamento dos elementos sob ação de cada um desses efeitos. É comum, porém, uma atuação simultânea desses esforços, como na Figura 1. De fato, a atuação isolada de esforços só existe em ensaios laboratoriais. Frente à interação em situações de projeto, não é rara a análise dos esforços de forma isolada, ou o uso de procedimentos simplificados. Em determinadas combinações, isso é razoável, mas em outras, pode levar a resultados muito conservadores ou não realistas. Há dois fatores que contribuem para essa abordagem simplificada/isolada: 1) Nesses casos, os procedimentos normativos são complexos, requerendo iterações ou muitas equações; 2) O comportamento mecânico das estruturas na interação entre os esforços não é unanimemente estabelecido e carrega um elevado grau de empirismo em algumas normas. (BENTZ e COLLINS, 2017)

Figura 1 - Exemplos de elementos sujeitos a interação de esforços



Fonte: Adaptado de Rahal e Collins (1995).

Este trabalho visa discutir esses dois problemas, expondo os principais modelos para comportamento mecânico que embasam os procedimentos normativos e propondo um método automatizado para prever os esforços resistentes na interação entre os esforços de flexão, torção e cortante, utilizando uma abordagem de otimização.

## 1.1 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

Enquanto a teoria decorrente das hipóteses básicas de flexão (existentes desde o século 17) já está bem estabelecida para o concreto armado desde o meio do século 20, o modelo atualmente mais difundido para análise de torção e cortante (modelo de treliça ou biela e tirante) é relativamente recente, desenvolvido por Ritter e Morsch no início do século 20. Assim, não há unanimidade sobre a resposta estrutural dos elementos de concreto armado sob atuação desses esforços. Mesmo os procedimentos mais completos ainda carregam um certo grau de empirismo e necessitam de análises e validações em diversas situações.

O elevado número de variáveis envolvidas no problema não facilita a proposição de um método simples e eficiente para análise e dimensionamento. Os procedimentos normativos propostos são, portanto, complexos e podem necessitar de várias iterações para solução. É comum que, confrontado com essa situação, o engenheiro adote uma abordagem simplificada ao problema, aceitando o consequente conservadorismo da sua solução, o que não é desejável haja vista o avanço dos modelos computacionais e estruturas cada vez mais complexas.

Justifica-se então a importância do trabalho já que a implantação de um método de otimização automatizado utilizando as prescrições completas das normas facilitará a análise e validação, aplicação prática eficiente e interpretações físicas dos resultados do diagrama de interação flexão-torção-cortante.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivos gerais

O principal objetivo deste trabalho é propor um método que permita utilizar de forma completa as prescrições normativas da NBR 6118/2014 e AASHTO LRFD 2014 para obter diagramas de interação entre torção, flexão e cortante de forma facilitada, permitindo até verificar a aderência delas com experimentos existentes na literatura internacional.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Analisar os modelos mecânicos e as prescrições normativas propostos para análise da interação torção-flexão-cortante;
- Desenvolver um problema de otimização capaz de analisar a interação torção-flexão-cortante em vigas de concreto armado segundo a NBR 6118/2014 e AASHTO LRFD Bridge Design Specifications 2014;

- Verificar a aderência das prescrições normativas com diversos ensaios experimentais, através da rotina computacional proposta.

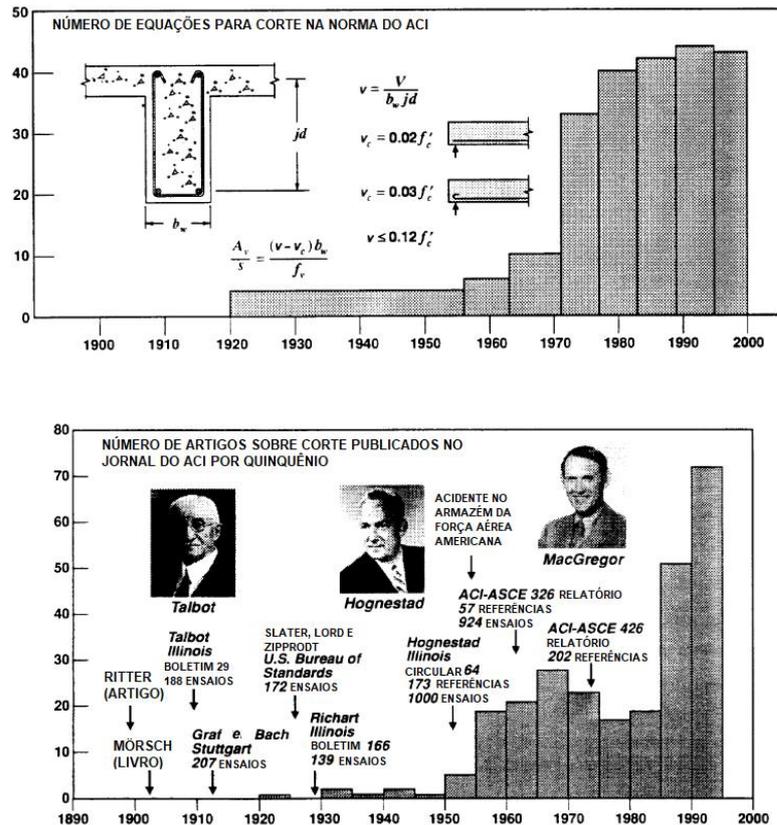
### 1.3 REVISÃO DE LITERATURA

Segundo WIGHT (2016) os atuais modelos mecânicos para análise da flexão surgiram a partir das hipóteses de Hooke, Navier, Euler e Bernoulli (século 17 e 18) e foram consolidados na teoria do concreto armado por autores como Hognestad, Mattock, Withey e Rusch no meio do século 20. Já o modelo mais difundido para análise de cortante (modelo de treliça ou biela e tirante) é relativamente recente, desenvolvido por Ritter e Morsch apenas no início do século 20. A história do modelo para torção de Saint-Venant (sem empenamento) também é recente (com as equações de Bredt surgindo no final do século 19 e as aplicações da treliça de Ritter e Morsch no início do século 20). Desse modo, se faz interessante entender a recente história dos estudos sobre torção e cortante. Para isso serão utilizados, principalmente, os relatórios do ACI-ASCE 445 *Joint Committee*, que buscaram consolidar o arcabouço teórico nessas situações.

Segundo o relatório *Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete* (ACI-ASCE 445 JOINT COMMITTEE, 2000), a maioria das normas utiliza métodos seccionais para flexão e cisalhamento. Até 1995, a própria norma americana analisava os esforços de flexão e cisalhamento de modo separado para uma dada envoltória de esforços, sendo que a interação era considerada apenas pela decalagem do diagrama de momento fletor e verificações dos níveis de tensão no concreto para garantir ductilidade e controle de fissuras. Em meados do século 20, Ritter e Morsch desenvolveram o **modelo de treliça clássico** (com bielas inclinadas a 45°, tirantes verticais sem considerar o concreto tracionado e banzos tracionados horizontais) para corte e torção, enquanto Moritz, Withey, Talbot, Richart, Macgregor, Siess e Sozen validaram experimentalmente tais modelos para a prática americana, notando, no entanto, que havia uma contribuição do concreto tracionado e que o ângulo das diagonais poderia ser inferior a 45°. Empiricamente, a norma americana considerava uma contribuição do concreto tracionado no tirante da treliça, sem alterar a inclinação das diagonais e, entre 1921 e 1951 o modelo permaneceu praticamente inalterado, mas com diferentes graus de conservadorismo. Apenas em 1955, após a ruptura brusca por cortante em vigas de um depósito da aeronáutica americana, foram retomadas as discussões sobre a análise de corte e torção, como pode ser visto na Figura 2. Segundo COLLINS e MITCHELL (1991), Hognestad e Elstner sugeriram, após investigação do acidente, a prescrição de armadura mínima, decalagem e tensões devido aos efeitos térmicos e de

retração. Surgiram vários modelos para o esforço cortante. Zwoyer, Siess, Bressler, Pister, Guralnick e Kani acreditavam que o cisalhamento era transmitido na região comprimida e não fissurada do concreto. Os experimentos de Taylor mostraram o contrário: a maior parte do cisalhamento era transmitido através da zona fissurada, por fenômenos que Fenwick e Paulay denominaram de “engrenamento de agregado” e “efeito de pino”.

Figura 2 - Número de equações e artigos sobre corte na ACI ao longo do século 20



Fonte: Adaptado de Collins et al. (1996).

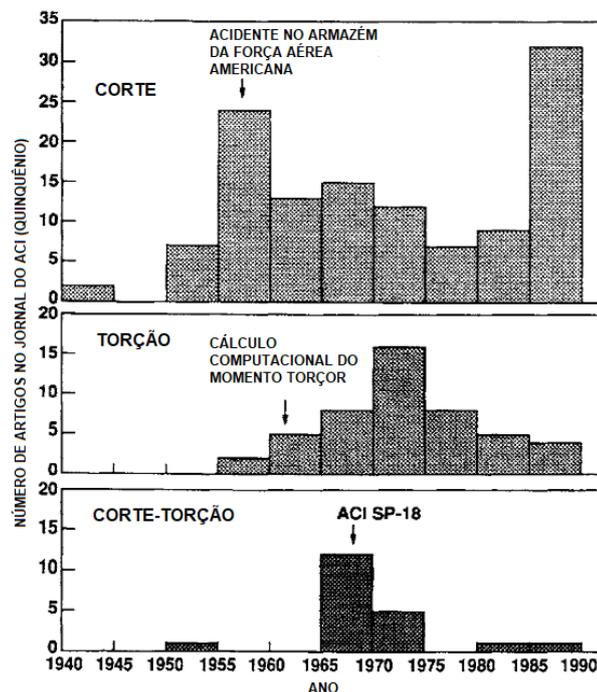
Estudos como o de LEONHARDT e WALTHER (1961), com uma série considerável de ensaios, evidenciaram experimentalmente que as tensões nos estribos previstas pelo **modelo de treliça clássico** eram superestimadas, as bielas possuíam ângulos de inclinação menores que  $45^\circ$  e havia uma contribuição do concreto tracionado na treliça. Foram identificadas algumas formas padrão de ruptura e os mecanismos de resistência ao corte por efeito de viga ou de arco (engrenamento de agregado, atrito, ação de pino, tensão no concreto comprimido e efeitos nas armaduras longitudinais). Esse e outros estudos na época permitiram a criação do **modelo de treliça generalizado** onde há uma contribuição do concreto tracionado e as bielas possuem uma inclinação variável. A questão da inclinação das bielas, no entanto, permanecia sem uma solução definitiva. O próprio Mörsch, no desenvolvimento

do modelo clássico de treliça, evidenciou que o ângulo de 45° para as bielas era conservador, mas achou matematicamente impossível encontrar a inclinação real. A partir dessa questão, surgiram alguns modelos na tentativa de desenvolver uma teoria com base nos mecanismos de resistência do concreto, em concordância com os dados experimentais. Thurlimann, Elfren, Nielsen chegaram na inclinação das bielas com o **modelo de treliça generalizado com base no equilíbrio**, que usa o círculo de Mohr para encontrar o equilíbrio das tensões bidimensionais no concreto e assume o escoamento das armaduras. Ramirez, Breen e outros autores propuseram algumas modificações nesse modelo, como a redução da resistência das bielas devido ao estado de tensões biaxial e os limites dos ângulos de inclinação para garantir a ductilidade. Esse modelo influenciou fortemente as normas europeias, particularmente a CEB-FIP, que foi a base para a **NBR 6118**. Kupfer e Bauman acrescentaram as equações de compatibilidade bidimensionais e relações constitutivas elásticas, com o **modelo de treliça generalizado com base na compatibilidade**. Collins e Mitchell abandonaram o modelo elástico linear em direção ao amolecimento da treliça. Assumindo que a inclinação das tensões e deformações principais era a mesma, foram desenvolvidas relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas gerando a teoria do campo de compressão (CFT em inglês). Posteriormente criou-se a **teoria do campo de compressão modificado** (MCFT em inglês, agora considerando também as tensões de tração no concreto fissurado). Esse modelo posteriormente foi simplificado, de modo a compor as normas canadense (CSA) e da associação de estradas públicas americanas (**AASHTO LRFD**). De modo similar ao MCFT, Hsu, Mo e Belarbi desenvolveram um modelo também com base no amolecimento da treliça, com relações constitutivas em função dos níveis de cortante, o **modelo de treliça com amolecimento**, com ângulos variáveis (*RA-STM*) ou constantes (*FA-STM*) (HSU, 1996). Recentemente, surgiram modelos como a treliça com atrito de fissuras, campo de tensões perturbadas, aplicações de elementos finitos, atrito de cisalhamento e o modelo simplificado de tensões resultantes combinadas (SMCS) (HSU; MO, 2010), (RAHAL, 2021).

O mesmo comitê também elaborou um outro relatório: *Report on Torsion in Structural Concrete* (ACI-ASCE 445 JOINT COMMITTEE, 2012), que será discutido adiante. Assim como para o cortante, até o início do século 20 a teoria para torção se resumia aos membros homogêneos em regime elástico a partir de Navier, Saint-Venant e Bredt/Bach (que demonstraram as tensões ou fluxos de cisalhamento para membros circulares, retangulares e tubos finos, respectivamente). Essas teorias, com a evidência de que a maior parte das tensões era transmitida na periferia dos membros, influenciam até hoje as teorias modernas para a

torção. Já no século 20, Rausch estendeu o modelo de treliça de Ritter e Morsch do 2D para o 3D, aplicado à torção, com o **modelo de treliça espacial** (com bielas inclinadas nas faces, estribos como tirantes e armaduras longitudinais como banzos tracionados). Na segunda metade do século 20, os estudos para torção seguem o mesmo caminho do cortante, impulsionados pelo crescimento do poder computacional e o avanço de técnicas construtivas como vigas com seção vazada. Isso fica evidente no gráfico da Figura 3, que mostra essa evolução histórica.

Figura 3 - Número de artigos sobre corte, torção e interação no jornal da ACI



Fonte: Adaptado de Rahal e Collins (1995b).

Lessig, Walsh, Yudin, Hsu, Collins e Elfgren desenvolveram e aprimoraram o **modelo de flexão inclinada** que utiliza equações de equilíbrio e assume três planos/modos de ruptura para prever a torção resistente. Evidências experimentais de Hsu mostraram que o modelo de treliça espacial inicialmente desenvolvido superestimava a torção resistente, ao considerar que a linha central do fluxo de cisalhamento passava pelos estribos. Isso levou as normas a adotarem fórmulas adaptadas empiricamente. Os modelos posteriores passaram a considerar que as diagonais comprimidas formavam uma membrana fissurada de concreto na periferia da viga. Nielsen, Lampert e Thurlimann desenvolveram o **modelo de treliça espacial com base no equilíbrio**, considerando que o fluxo de cisalhamento no concreto fissurado passava pela linha central das barras longitudinais de canto, o que conciliava a teoria com as evidências experimentais. Esse modelo foi incorporado pela norma CEB-FIP nos anos 90 e foi base

posteriormente para a **NBR 6118**. Baumann desenvolveu o **modelo de treliça espacial com base na compatibilidade** ao encontrar as equações de compatibilidade das deformações conforme o círculo de Mohr, além das equações de compatibilidade para a torção da membrana e curvatura das diagonais comprimidas. De modo similar ao cortante, Mitchell e Collins aplicaram também para a torção a teoria do campo de compressão CFT e depois a **teoria do campo de compressão modificado** (MCFT), com relações constitutivas para o concreto fissurado sob tensão biaxial (amolecimento), equações de equilíbrio e de compatibilidade, além de considerar que as deformações de compressão nas bielas diminuem linearmente em direção ao centro da seção e que há um deslocamento da seção na periferia, reduzindo a área e raio envolvidos pelo fluxo de cisalhamento. Hsu e Mo estabeleceram um **modelo de treliça com amolecimento** para a torção, com novas relações constitutivas, evidenciando a linha neutra da flexão das bielas comprimidas e um coeficiente de amolecimento e chegando também a uma nova espessura das membranas das diagonais comprimidas. Mais recentemente, além de extensivas aplicações de elementos finitos, destaca-se também modelo simplificado de combinação de tensões (SMCS). (ACI-ASCE 445 JOINT COMMITTEE, 2012)

Esse mesmo relatório sobre a torção também faz uma revisão das abordagens históricas sobre interação entre esforços. Segundo ACI-ASCE 445 JOINT COMMITTEE (2012), os primeiros estudos buscaram avaliar a interação da **torção com a flexão**, devido não só a importância, mas a maior facilidade dos ensaios, com diversos diagramas de interação propostos e indicando que forças longitudinais na interação são praticamente aditivas. Nos anos 70, Zia fez uma extensa avaliação de resultados experimentais para vigas sem estribos e observou que momentos fletores entre 50% e 100% do máximo momento resistente causam significativa redução no momento torçor resistente. Já em vigas com estribos, McMullen e Warwaruk mostraram o momento fletor reduziu significativamente resistência, ductilidade e rigidez pós-fissuração à torção. Mardukhi demonstrou resultados similares para vigas de concreto protendido, onde um momento fletor de 60% do máximo momento resistente reduziu em 10% a resistência à torção e um momento torçor de 40% do máximo momento torçor resistente reduziu em 20% a resistência à flexão. Outro fenômeno interessante foi observado por Onsongo: pequenos momentos fletores ou forças axiais geram um aumento da resistência à torção em seções armadas não simetricamente, uma vez que a força axial ou flexão induzem compressão no banzo superior, combatendo a tração devido à torção. A razão entre torção e flexão afetam o padrão de fissuras gerado e a inclinação das bielas nas laterais, achatando o

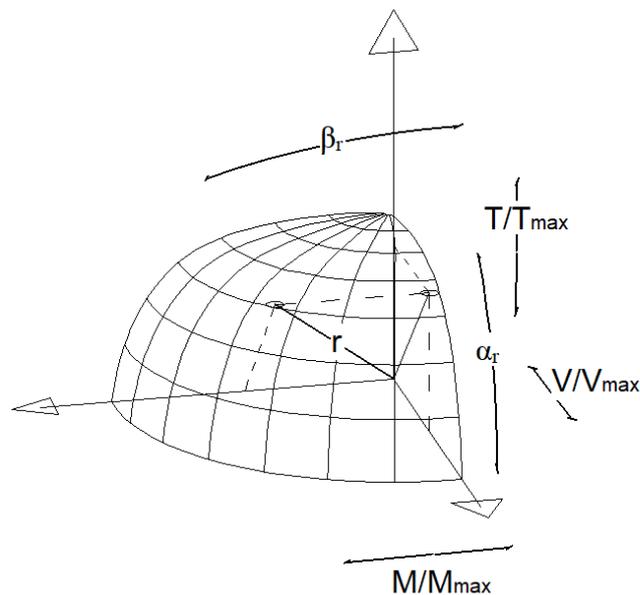
ângulo na região comprimida e levantando o ângulo na região tracionada. Na interação da **torção com o cortante**, as tensões verticais de cisalhamento devido ao cortante são somadas em uma face e subtraídas na outra com a tensão de cisalhamento circulante na periferia devido à torção. Tensões de grande magnitude tracionam os banzos e tirantes e geram tensões biaxiais no concreto. Nylander propôs um modelo de interação linear, enquanto McMullen e Woodhead propuseram uma interação circular para vigas sem estribos. Para vigas com estribos, Klus sugeriu uma interação bilinear, enquanto Ewida e McMullen sugeriram uma interação com um expoente que seria função da taxa de armadura longitudinal. É importante notar que é praticamente impossível ensaiar vigas exclusivamente sob torção e cortante, uma vez que o cortante não pode ser induzido sem momento fletor. A resistência do concreto ao cisalhamento geralmente é obtida indiretamente do ensaio de resistência à compressão. Apesar de existirem ensaios de cisalhamento direto com membranas e cilindros, ainda não há uma padronização desses (NOGUEIRA, 2020). A interação da **torção com força axial** foi menos estudada que as outras formas de interação, embora fique claro que a compressão (até um determinado patamar) reduz a fissuração e, portanto, o amolecimento das seções sob torção, o que não foi perfeitamente traduzido nos procedimentos normativos. No caso mais geral, de interação entre **torção, flexão e cortante**, a maioria dos estudos inicialmente focou no comportamento último dos elementos, gerando curvas de interação. Nesse sentido, se destacaram os trabalhos de Elfgren, Luchinger, Muller e Thurlimann, utilizando **treliça espacial com base no equilíbrio** ou **superfícies de ruptura pela flexão inclinada**. Foram previstos diferentes modos de ruptura considerando combinações do escoamento da armadura longitudinal e estribos nas faces onde os esforços de cisalhamento são somados. Onsongo, Rabbat, Rahal, Collins, Greene e Belarbi fizeram grandes contribuições ao estender os modelos existentes de **treliça com amolecimento** e **teoria do campo de compressão modificado** para ações combinadas, permitindo previsão não apenas do comportamento último, mas da resposta completa tensão x deformação das vigas na interação entre esforços. (ACI-ASCE 445 JOINT COMMITTEE, 2012)

Este trabalho utilizará duas abordagens: o **modelo de treliça generalizado com banzos paralelos** e a **teoria do campo de compressão modificado** que são a base para a **NBR 6118/2014** e a **AASHTO LRFD 2014**, respectivamente. Será proposto um método automatizado utilizando as prescrições normativas de forma completa para prever os esforços resistentes na interação entre os esforços de flexão, torção e cortante, utilizando otimização.

#### 1.4 METODOLOGIA

A fim de determinar os esforços resistentes de uma viga de concreto armado submetida a uma combinação entre um momento torçor  $T$ , um momento fletor  $M$  e um esforço cortante  $V$ , pode-se fazer uma analogia com ensaios experimentais, onde é fixada uma razão entre os esforços e esses são aumentados até a ruptura. Assim, os ângulos  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  definem a relação entre os esforços, e  $r$  é o multiplicador de esforços, uma variável adimensional e indicadora da magnitude dos esforços, doravante denominado raio, conforme Figura 4. Utilizando uma abordagem de otimização, as verificações normativas são tratadas como restrições do problema. O esforço resistente é o máximo esforço possível que pode solicitar uma seção, logo, a função objetivo a ser maximizada no problema de otimização é o raio  $r$ . Os esforços são, divididos respectivamente por  $M_{max}$ ,  $T_{max}$  e  $V_{max}$ , que são os esforços resistentes máximos isoladamente. Esse método foi importado a partir de OBEL (2019), aqui estendido para o 3D.

Figura 4 - Relação entre os esforços de torção, flexão e cortante



Fonte: O autor (2021).

Após a implementação do procedimento e geração das superfícies de interação, serão inseridos nos gráficos resultados de ensaios experimentais disponíveis na literatura, a fim de comparar com os resultados previstos pelas normas. A facilidade e novidade da metodologia

proposta representam um grande avanço na análise da interação entre os esforços pelos complexos procedimentos normativos existentes atualmente.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Após esta introdução do **Capítulo 1**, o **Capítulo 2** traz uma fundamentação teórica apresentando os modelos para o comportamento mecânico das vigas de concreto armado que servem de embasamento para as normas analisadas no trabalho. Em seguida, é demonstrado no **Capítulo 3** como esses modelos inspiraram as prescrições para as duas normas técnicas analisadas neste trabalho (NBR 6118/2014 e AASHTO LFRD Bridge Design Specifications 2014). No **Capítulo 4** é explicitado o método proposto, a partir de um problema de otimização equivalente. O **Capítulo 5** mostra alguns resultados experimentais da literatura, analisando a aderência dos modelos normativos propostos. O **Capítulo 6** apresenta as conclusões do trabalho e sugestões de trabalhos futuros e finalmente são apresentadas as **Referências** utilizadas.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo será subdividido em três partes:

- 1) Fundamentação do arcabouço teórico da NBR 6118, com o Modelo de Treliça Generalizado com Banzos Paralelos;
- 2) Fundamentação do arcabouço teórico da AASHTO LRFD 2014, com base na Teoria do Campo de Compressão Modificado (MCFT, em inglês);
- 3) Observações adicionais sobre os modelos apresentados.

### 2.1 MODELO DE TRELIÇA GENERALIZADO COM BANZOS PARALELOS

Esta seção descreve a analogia de treliça que embasa as prescrições da norma brasileira, sendo um aprofundamento do modelo de treliça originalmente desenhado por Ritter e Morsch. Será subdividida em três partes, abordando a utilização da treliça para a obtenção dos esforços resistentes cortante, torção e fletor.

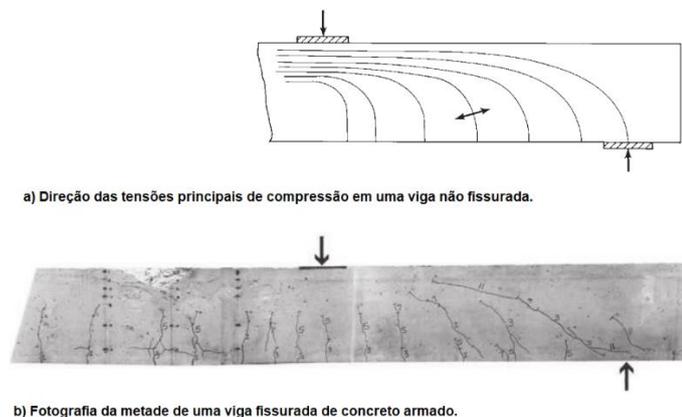
#### 2.1.1 Esforço Cortante

Em regime elástico não fissurado com material homogêneo uma viga submetida a uma força cortante e um momento fletor desenvolve internamente tensões normais e de cisalhamento conforme Equações (1) e (2). Convertendo esse estado de tensões em tensões principais, a viga sofre fissuras quando a tensão principal de tração supera a resistência à tração do concreto. As trajetórias das tensões principais de tração correspondem às direções das fissuras, geralmente consideradas fissuras de flexão, conforme Figura 5. (WIGHT, 2016)

$$\sigma = M \times y / I \quad (1)$$

$$\tau = V \times Q / I \times b_w \quad (2)$$

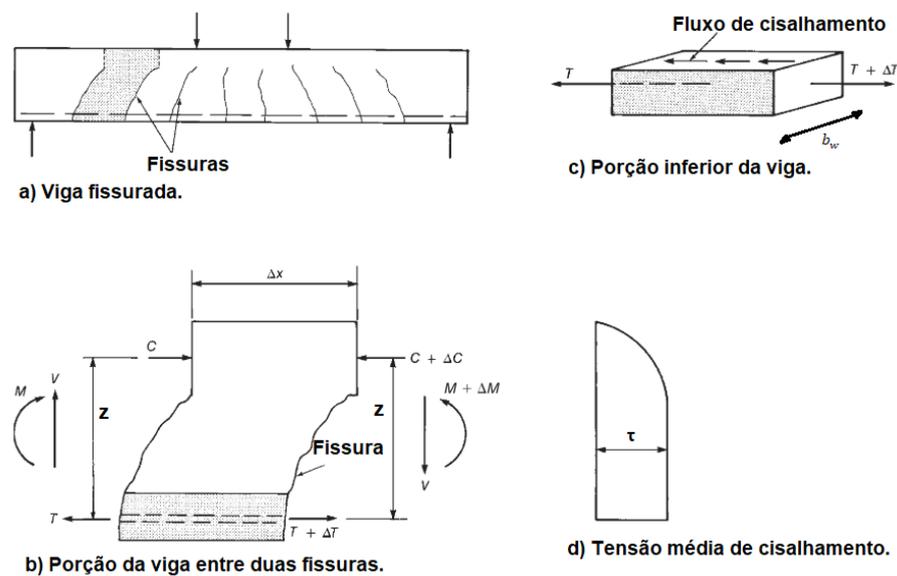
Figura 5 - Tensões principais de compressão e foto de fissuras em uma viga fletida



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

Após o surgimento das primeiras fissuras, começam a aparecer fissuras inclinadas fruto do efeito combinado entre flexão e cortante. Já não é possível prever a direção dessas fissuras pela teoria elástica da resistência dos materiais, uma vez que o concreto fissurado sofre uma grande redistribuição de esforços e não resiste à tração do mesmo modo. Analisando a tensão média entre fissuras e utilizando um diagrama de corpo livre, conforme Figura 6, é possível chegar na tensão de cisalhamento resistida pela região fissurada da Equação (3). Assim, apenas uma pequena parte do cortante é resistido por tensões na região comprimida, o que é consistente com a maioria dos resultados experimentais.

Figura 6 - Tensão de cisalhamento média entre fissuras

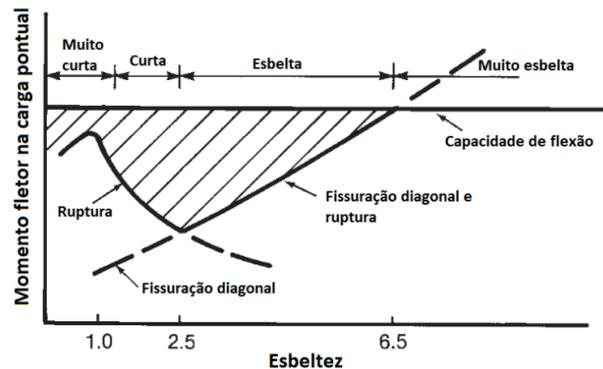


Fonte: Adaptado de Wight (2016).

$$\tau = \frac{V}{b_w \times z} \quad (3)$$

Dependendo da altura e vão, as vigas resistem os esforços via ação de arco ou de viga. Em vigas esbeltas sem estribos, a ruptura ocorre de forma frágil, logo após a formação das fissuras inclinadas enquanto vigas muito esbeltas rompem na flexão antes de desenvolver fissuras inclinadas, conforme Figura 7. O esforço de cortante de fissuração depende de variáveis como a resistência à tração do concreto, armação longitudinal, esbeltez, dimensão e tipo do agregado e interação com outros esforços. Vários estudos foram conduzidos para entender esse fenômeno, uma vez que ele também ajuda a compreender a contribuição do concreto na resistência ao cortante de vigas com estribos. (WIGHT, 2016)

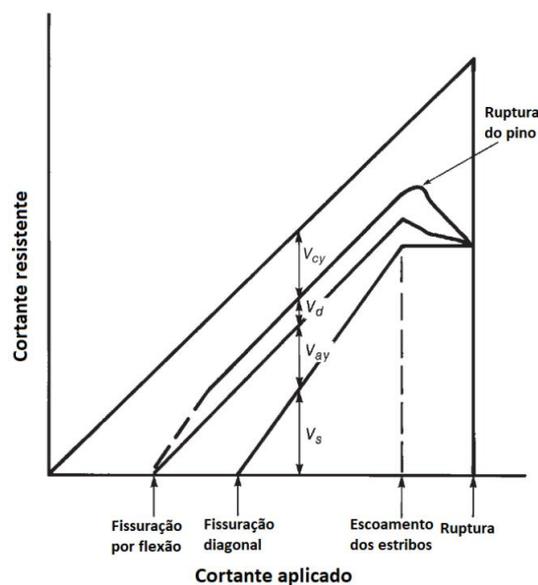
Figura 7 - Resistência e fissuras inclinadas de acordo com a esbeltez da viga



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

O uso de estribos visa evitar que a viga falhe abruptamente sob cortante, permitindo que ela atinja sua capacidade de flexão completa. Não é possível impedir a fissuração, uma vez que a deformação de fissuração do concreto é pequena e não é suficiente para que o aço desenvolva tensões significativas. A Figura 8 mostra a evolução dos mecanismos de resistência com o aumento do cortante. Inicialmente, a viga resiste o esforço cortante com tensões de cisalhamento no concreto não fissurado  $V_{cy}$ . A partir da formação das fissuras de flexão, surgem o efeito de pino  $V_d$  e engrenamento de agregado  $V_{ay}$ , responsáveis pelas tensões de cisalhamento na região fissurada do concreto. Com as fissuras inclinadas os estribos são solicitados com força  $V_s$ , até o escoamento, quando ocorre a ruptura da viga. (WIGHT, 2016)

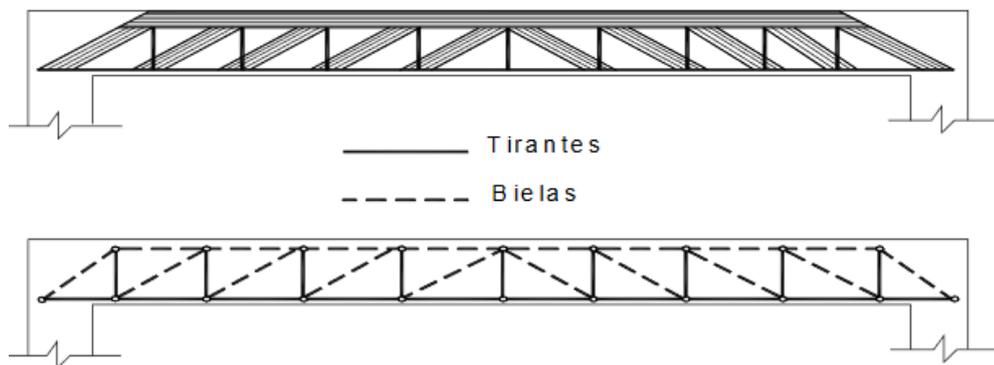
Figura 8 - Mecanismos internos de resistência ao corte numa viga com estribos



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

No Estádio II, o concreto armado encontra-se fissurado e sob ação do cortante, pode ser analisado por um modelo de treliça conforme Figura 9, com bielas diagonais comprimidas de concreto entre fissuras, tirantes compostos pelos estribos, banzo superior na região comprimida da viga e banzo inferior na região tracionada. O ângulo de inclinação das bielas  $\theta$  é definido pela inclinação das fissuras e a inclinação dos tirantes  $\alpha$  é geralmente tomado como  $90^\circ$  para estribos verticais (o caso mais comum). (GIONGO, 2011)

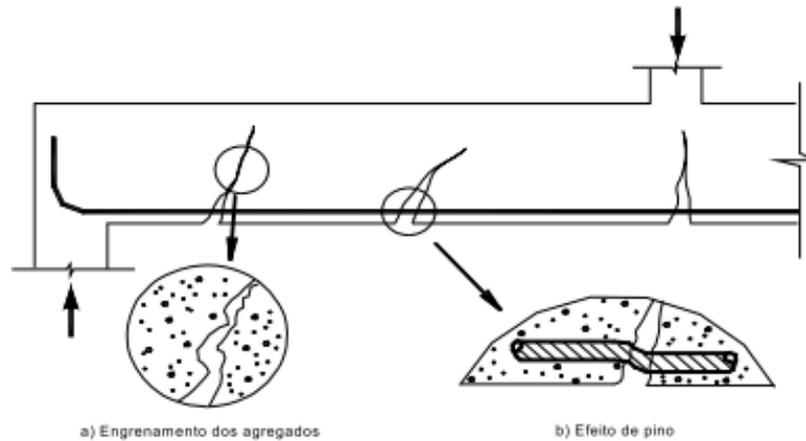
Figura 9 - Modelo de treliça para o concreto armado



Fonte: Giongo (2011).

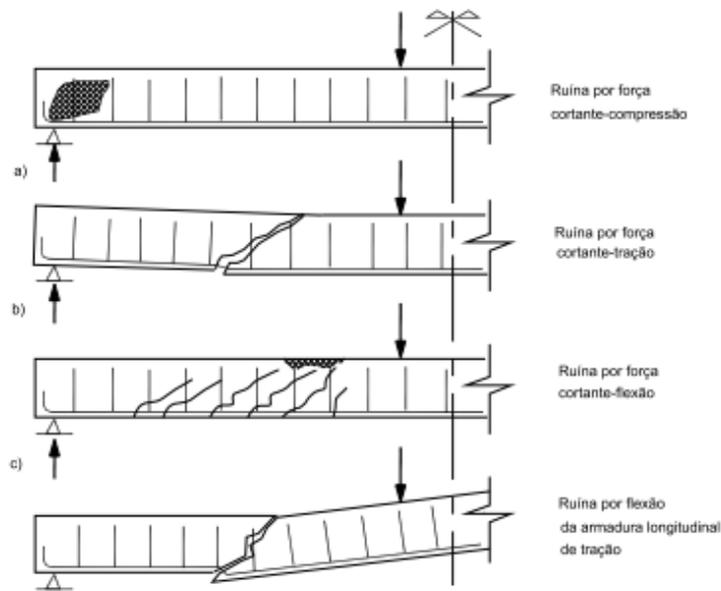
O modelo de treliça clássico, criado por Morsch e Ritter, considera, de maneira simplificada uma treliça isostática, com banzos paralelos, diagonais inclinadas a  $45^\circ$  e sem considerar uma contribuição do concreto tracionado na resistência. Observações experimentais como as de LEONHARDT e WALTHER (1961) descritas na revisão de literatura, levam a uma revisão desse modelo, o que culmina na criação do modelo de treliça generalizado. Nesse modelo, a inclinação das bielas é inferior a  $45^\circ$ , o que redistribui os esforços na treliça: a diminuição de  $\theta$  leva a menores tensões nos estribos e aumento das tensões nas bielas comprimidas e banzos tracionados, requisitando verificações especiais. Considera-se que os banzos não são paralelos e a treliça é hiperestática (PINHEIRO et al, 2003). Além disso, o concreto fissurado contribui na transmissão das tensões entre seções transversais, por meio do engrenamento de agregado e efeito de pino, conforme Figura 10, além do efeito de arco que transmite tensões nas proximidades dos apoios. Considerando o equilíbrio e levando em consideração as possíveis formas de ruptura (Figura 11), podem ser obtidos a inclinação das bielas e, portanto, os esforços resistentes. Para aplicação desse modelo, devem ser verificados os limites de inclinação das bielas, espaçamento de estribos, armaduras mínimas e deve ser garantida a ancoragem das barras que formam a treliça, além da consideração do efeito de arco próximo dos apoios. (GIONGO, 2011)

Figura 10 - Mecanismos alternativos de transmissão de esforços entre seções



Fonte: Fusco apud Giongo (2011).

Figura 11 - Formas de ruptura numa viga de concreto armado sujeita a corte e flexão



Fonte: Fusco apud Giongo (2011).

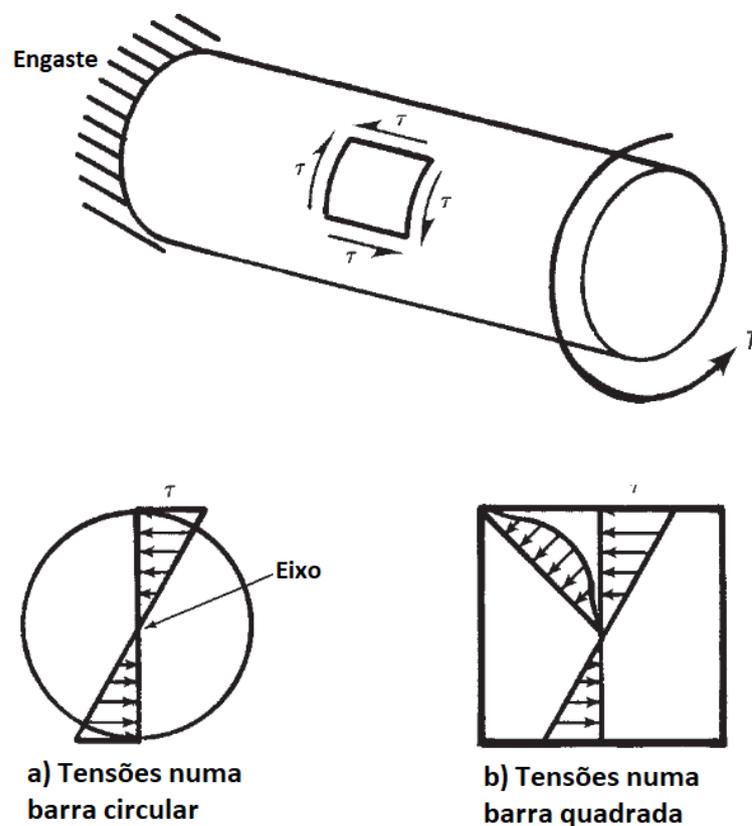
Esse modelo, que é a base para o Código CEB-FIP de 1990 e da NBR 6118, permite obter então os esforços resistentes da treliça na ruptura. Esses esforços resistentes devem ser então superiores aos esforços solicitantes previstos. As equações do modelo implementadas na norma brasileira serão desenvolvidas no capítulo seguinte.

### 2.1.2 Momento Torçor

Para seções usuais de concreto armado, é razoável desprezar as tensões normais devido ao empenamento da seção, assim como os esforços de torção de compatibilidade, uma vez que esses são bastante reduzidos após a fissuração. Logo, é comum que os estudos sobre

torção foquem na torção de equilíbrio e livre de restrições (conforme as hipóteses de Saint-Venant). (PINHEIRO et al, 2003) Em regime elástico e não fissurado, uma viga submetida à torção desenvolve tensões circulatorias de cisalhamento, demonstradas por Navier e Saint-Venant. Essas tensões são máximas e aproximadamente constantes ao redor de sua periferia, conforme Figura 12. Essa constatação mostra que seções fechadas e vazadas são mais eficientes em resistir à torção que seções fechadas sólidas e mais ainda que seções abertas. (WIGHT, 2016)

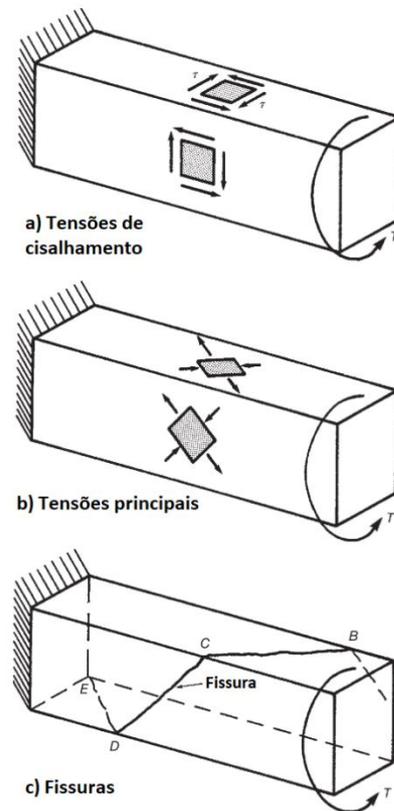
Figura 12 - Tensões circulatorias de cisalhamento devido à torção



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

Em torção pura, as tensões principais são a própria tensão de cisalhamento, que, ao superar a resistência à tração do concreto, geram fissuras em espiral conforme Figura 13. Isso foi usado por bastante tempo na norma americana para prever o momento de torçor de fissuração, até a chegada dos procedimentos modernos. O formato dessas fissuras, no entanto, é fortemente influenciado pela interação entre esforços, já que as tensões devido ao momento e cortante podem ser somadas ou subtraídas das tensões circulatorias de cisalhamento devido à torção. Considerando o processo de fissuração sob torção, são necessários estribos e armaduras longitudinais para controlar a abertura e crescimento das fissuras. (WIGHT, 2016)

Figura 13 - Tensões de cisalhamento, principais e fissuras circulatorias de torção



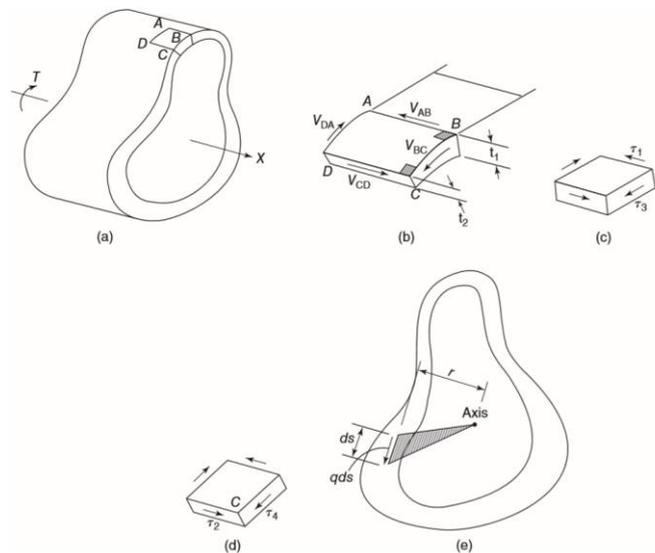
Fonte: Adaptado de Wight (2016).

Uma vez que a maior parte das tensões de cisalhamento é desenvolvida na periferia da seção, pode-se fazer uma analogia de uma seção cheia com um tubo de paredes finas equivalente. Em um tubo de paredes finas (Figura 14), o equilíbrio de um elemento infinitesimal mostra que o fluxo de cisalhamento  $q$  (produto entre a tensão de cisalhamento e a espessura da parede) é constante ao redor do perímetro. É possível obter o momento de torção desenvolvido por essas tensões integrando o produto entre o fluxo de cisalhamento e um arco infinitesimal (força de cisalhamento) e o raio (distância ao eixo) do tubo. Isso resulta na Equação (4), onde  $A_0$  é a área envolvida pela linha do fluxo de cisalhamento. Reorganizando a equação anterior, obtém-se a Equação (5), que corresponde à tensão de cisalhamento devido à torção em um tubo de paredes finas. (WIGHT, 2016)

Em uma seção não fissurada, de área envolvida  $A_{cp}$  e perímetro  $p_{cp}$ , a analogia considera um tubo equivalente conforme Figura 15. A espessura da parede  $t$  pode ser considerada 75% de  $\frac{A_{cp}}{p_{cp}}$ , enquanto o perímetro da linha central do fluxo de cisalhamento é  $p_o$  e a área envolvida pela linha central do fluxo de cisalhamento  $A_o$  é aproximadamente 66% de  $A_{cp}$ . Aplicando a Equação (5) ao tubo equivalente e considerando a tensão de cisalhamento

que causa fissuração igual a  $0.33\sqrt{f'_c}$ , chega-se à torção de fissuração em (6). (WIGHT, 2016)

Figura 14 - Torção em um tubo de paredes finas

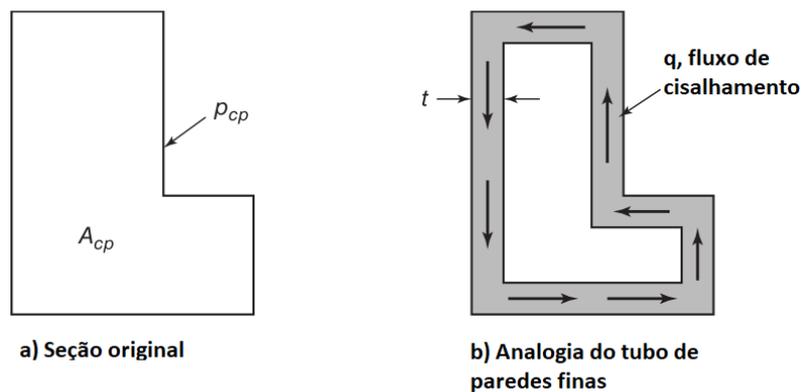


Fonte: Wight (2016).

$$T = 2qA_0 \tag{4}$$

$$\tau = T/2tA_0 \tag{5}$$

Figura 15 - Seção original cheia e tubo de paredes finas equivalente



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

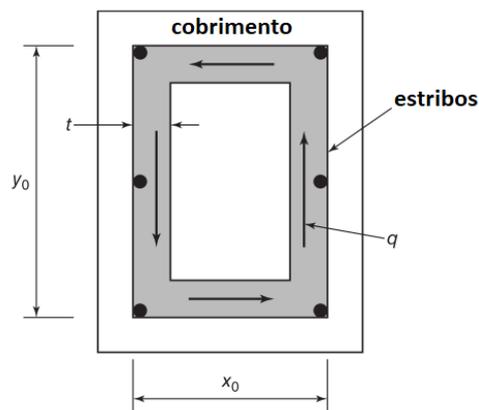
$$T_{cr} = \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \times 0.33\sqrt{f'_c} \tag{6}$$

Resultados experimentais indicam uma interação praticamente circular entre os esforços de fissuração de cortante e torção. É considerado então um limite  $T_{th}$  até o qual a torção pode ser desprezada, igual a 25% da torção de fissuração. A mesma analogia pode ser aplicada para

uma seção vazada de área bruta  $A_g$ , desde que seja considerada uma redução baseada em evidências experimentais, multiplicando  $T_{cr}$  por  $A_g/A_{cp}$  e  $T_{th}$  por  $(A_g/A_{cp})^2$ . (WIGHT, 2016)

Segundo WIGHT (2016), após a fissuração, uma analogia similar pode ser aplicada para prever o momento torçor resistente, corrigindo a espessura ou rigidez do tubo de paredes finas. No caso do modelo da treliça espacial generalizada com banzos paralelos, é considerado que há deslocamento do concreto situado no cobrimento, o que resulta num tubo equivalente aproximadamente como na Figura 16. Novamente, as equações do modelo implementadas na norma brasileira serão desenvolvidas no capítulo seguinte.

Figura 16 - Tubo de paredes finas equivalente numa seção fissurada



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

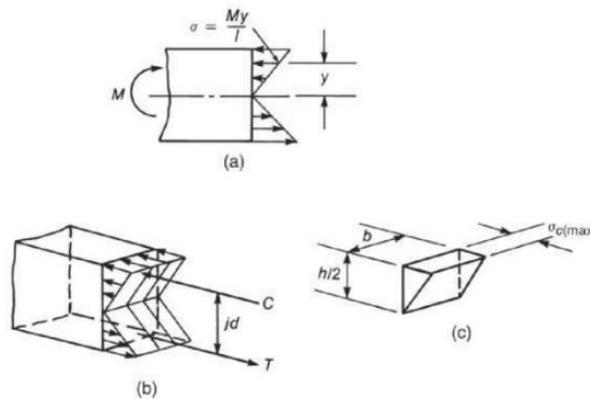
### 2.1.3 Momento Fletor

A teoria para flexão no concreto armado, já está consolidada desde a metade do século 20 por uma série de trabalhos como o de RUSCH (1960), que descrevem as relações constitutivas, de equilíbrio e compatibilidade sob flexão. Esta se integra bem à teoria da treliça generalizada com banzos paralelos. Aqui será descrito o básico da teoria.

Segundo (WIGHT, 2016), a teoria elástica homogênea pode ser resumida na Figura 17. Antes da fissuração, (Estádio I), há deformações e tensões lineares de compressão e tração, que geram forças resultantes que atuam com um braço de alavanca  $z$  em torno da linha neutra, respondendo ao momento fletor atuante. Com a evolução das deformações, o comportamento do concreto comprimido se torna altamente não linear e o concreto sob tração fissa rapidamente, necessitando de armaduras longitudinais e sendo, em geral, desconsiderado em termos de resistência. Após fissuração, no Estádio II, admitem-se as hipóteses básicas da teoria de flexão: seções planas permanecem planas, perfeita aderência aço-concreto e relações

constitutivas aproximadas (blocos de tensão) para o concreto e aço. Desconsideram-se as tensões de tração no concreto fissurado e as deformações são adotadas de acordo com o domínio de ruptura esperado. Através dessas relações e equações de equilíbrio, pode-se obter o momento resistente. A implementação do modelo na NBR 6118/2014 é vista no capítulo seguinte.

Figura 17 - Concreto não fissurado sob flexão



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

## 2.2 TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADO

Esta seção descreve o modelo que embasa as prescrições normativas da norma americana da associação americana de rodovias estatais e funcionários do transporte (AASHTO). Será subdividida em três partes, abordando o tratamento do modelo para o esforço cortante, torção e fletor.

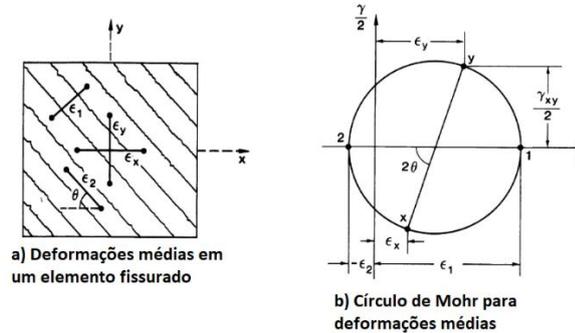
### 2.2.1 Esforço Cortante

A Teoria do Campo de Compressão Modificado (MCFT) apresenta-se como um conjunto de premissas, equações de equilíbrio e compatibilidade e relações constitutivas para o concreto armado fissurado a fim de resolver o problema do modelo de treliça generalizado (encontrar a inclinação das bielas), sem considerar previamente um modo de ruptura. Assim, é possível prever a resposta completa de um elemento sob cortante, diferente do modelo anterior, que permite apenas a avaliação dos esforços na ruptura.

Parte-se do modelo de treliça generalizado com banzos longitudinais paralelos, tirantes tracionados e um campo de compressão diagonal contínuo, utilizando tensões e deformações médios entre fissuras. Assume-se que, num elemento de concreto armado fissurado, a direção das tensões é igual à direção das deformações. Considerando o círculo de Mohr para as

deformações mostrado na Figura 18, e utilizando relações trigonométricas básicas, se obtém as Equações de compatibilidade (7), (8) e (9). (COLLINS e MITCHELL, 1991)

Figura 18 - Deformações num elemento fissurado e círculo de Mohr de deformações



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1991).

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x} \quad (7)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (8)$$

$$\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_2) \times \cot \theta \quad (9)$$

No modelo da NBR 6118, são utilizados coeficientes para adaptar os ensaios de corpo de prova cilíndrico para o estado de tensões biaxiais da alma de uma viga sob atuação de esforço cortante. A MCFT, no entanto, se baseou em ensaios realizados em membranas sob cortante puro. Assim, descobriu-se que as tensões principais de compressão dependem não apenas das deformações de compressão, mas também das deformações de tração, conforme Equações (10) e (11). São também consideradas as tensões de tração no concreto fissurado (Equação (12)). (COLLINS e MITCHELL, 1991)

$$f_2 = f_{2max} \times \left( \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right) \quad (10)$$

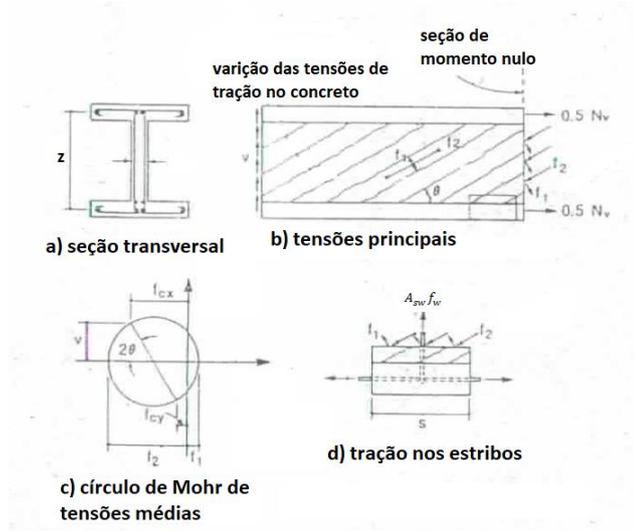
$$f_{2max} = \frac{f'_c}{0,8 - 0,34 \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_c} \right)} \leq 1 \quad (11)$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{f'_c}}{1 + \sqrt{500 \times \varepsilon_1}} \quad (12)$$

A partir do círculo de Mohr para as tensões e os diagramas de corpo livre da Figura 19, são encontradas as Equações de equilíbrio (13), (14) e (15). As tensões de tração no concreto são máximas entre duas fissuras consecutivas e nulas nas fissuras em si, enquanto as tensões nos tirantes são máximas nas fissuras e menores no ponto médio entre as fissuras. Uma vez que foram utilizados valores médios nas equações e há variações locais significativas, é

importante estudar a capacidade de transmissão de tensões entre as fissuras. Para que seja garantido o funcionamento do modelo, os sistemas local e médio (conforme Figura 20) devem ser equivalentes. As fissuras são capazes de transmitir as tensões desde que sejam respeitadas as Inequações (16) (vertical) e (17) (horizontal). (VECCHIO; COLLINS, 1986)

Figura 19 - Círculo de Mohr das tensões e diagramas de corpo livre da MCFT



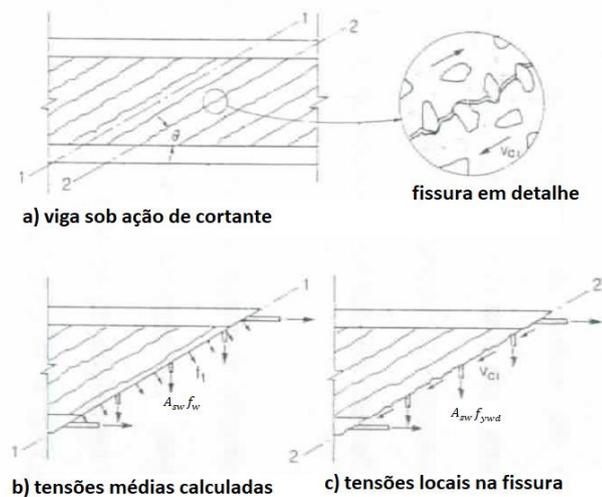
Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1991).

$$f_2 = f_1 - \frac{V_n}{b_w z} (\tan\theta + \cot\theta) \tag{13}$$

$$\frac{V_n}{b_w z} = (f_1 + A_{sw} f_w / b_w s) \cot\theta \tag{14}$$

$$A_{s,inf} f_l = (V_n \cot\theta - f_1) b_w z \tag{15}$$

Figura 20 - Tensões médias e locais



Fonte: Adaptado de Vecchio e Collins (1986).

$$f_1 \leq v_{ci} \tan \theta + \frac{A_{sw}}{b_w s} (f_{ywd} - f_w) \quad (16)$$

$$A_{s,inf} f_{yd} \geq A_{s,inf} f_l + f_1 b_w z - \left( f_1 - \frac{A_{sw}}{b_w s} (f_{ywd} - f_w) \right) b_w z \cot^2 \theta \quad (17)$$

Desconsiderando os casos de concretos de alta resistência ou concretos de agregado leve, as fissuras tendem a acontecer na interface entre a pasta de cimento e agregado, resultando em uma superfície rugosa responsável pela transmissão do corte entre fissuras através do “engrenamento de agregado”  $v_{ci}$  (Figura 20). De acordo com evidências experimentais, ele é função do tamanho de agregado gráudo  $a$  e da largura das fissuras  $w$  em uma determinada profundidade da seção, que por sua vez depende da deformação de tração e espaçamento entre fissuras, conforme Equações (18) e (19). A MCFT desconsidera o “efeito de pino” nesse fenômeno. (VECCHIO e COLLINS, 1986)

$$v_{ci} = \frac{0,18 \sqrt{f'_c}}{0,3 + \frac{24w}{a_g + 16}} \quad (18)$$

$$w = \varepsilon_1 \times s_\theta \quad (19)$$

É possível então, com um procedimento iterativo, resolver esse conjunto de equações a partir de uma estimativa inicial da deformação e da inclinação das bielas (com relações já tabeladas com os demais parâmetros), encontrando uma resposta mecânica do elemento sob esforço cortante. Visando facilitar aplicações práticas e compreensão mecânica dos parâmetros da MCTF pelos engenheiros, foi desenvolvida uma versão simplificada da MCFT, hoje incorporada nas normas da CSA e da AASHTO. (BENTZ, VECCHIO e COLLINS, 2006)

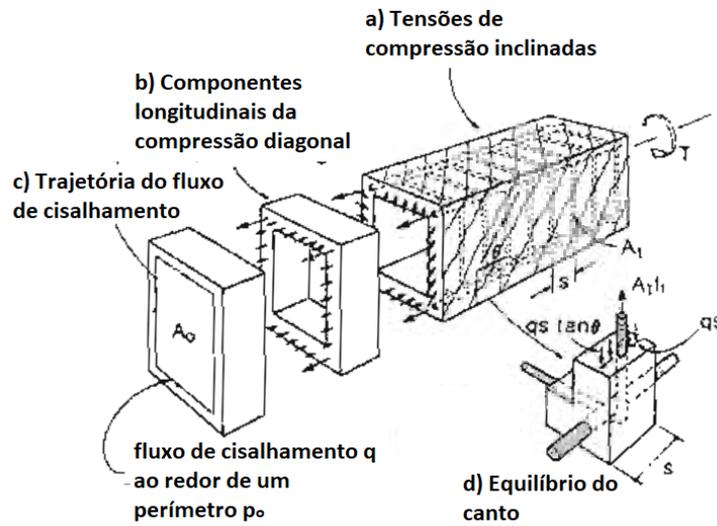
A implementação da MCFT simplificada nos procedimentos normativos da AASHTO LRFD 2014 será mostrada no capítulo a seguir.

### 2.2.2 Momento Torçor

Assim como para o corte, é possível utilizar a MCFT para resolver o problema da treliça espacial generalizada (com auxílio da analogia do tubo de paredes finas), conforme Figura 21, com 4 paredes com treliças planas, onde cada uma é composta por banzos representando as armaduras longitudinais, tirantes representando os estribos e um campo diagonal de tensões de compressão. O tubo de paredes finas equivalente despreza a espessura de concreto de cobertura, devido ao fenômeno de deslocamento mostrado na Figura 22. Embora seja possível calcular a espessura efetiva das paredes considerando a curvatura das

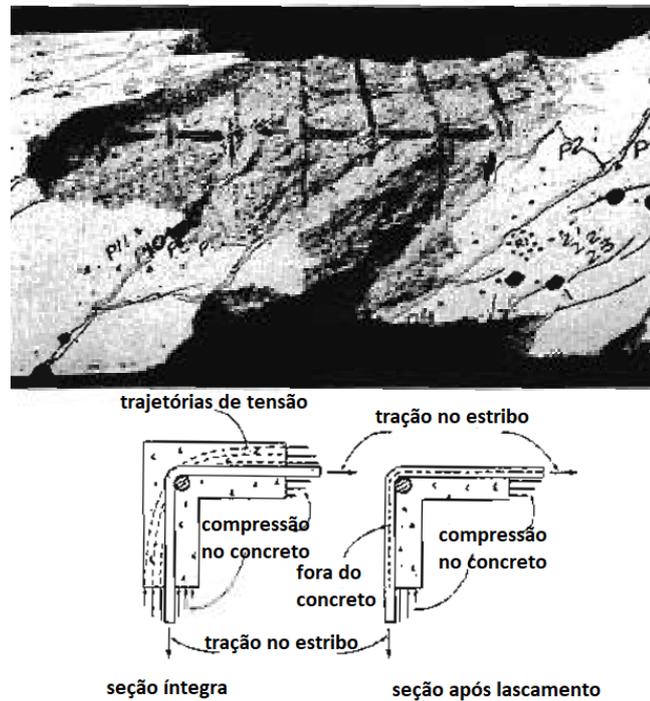
bielas inclinadas, geralmente é considerada uma espessura fictícia em função da geometria dos estribos da seção. Novamente, a implementação da MCFT simplificada nos procedimentos normativos da AASHTO LRFD 2014 será mostrada no capítulo a seguir.

Figura 21 - Trelça espacial generalizada e tubo de paredes finas da MCFT



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1991).

Figura 22 - Fenômeno de deslocamento do concreto armado sob torção



Fonte: Adaptado de Collins e Mitchell (1991).

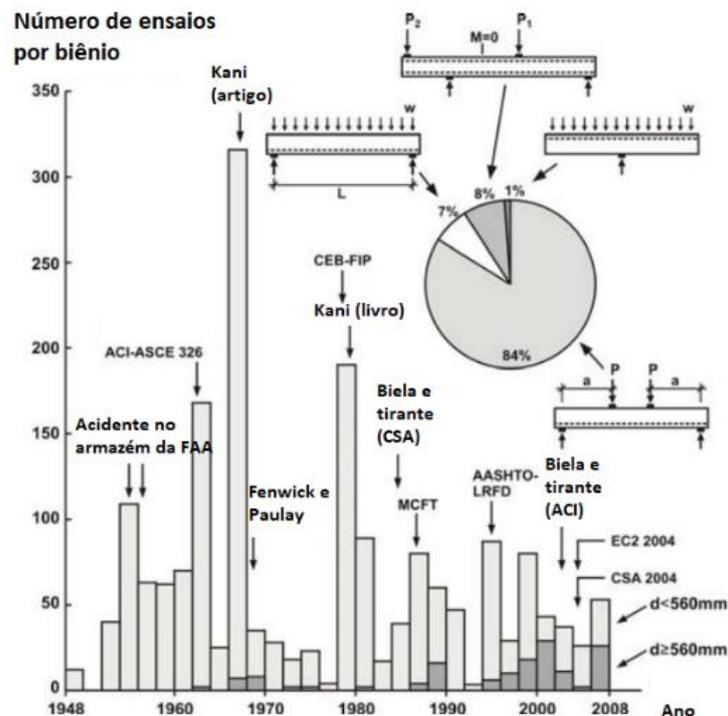
### 2.2.3 Momento Fletor

A teoria de flexão que embasa a norma da AASHTO LRFD é basicamente a mesma da NBR 6118, já descrita no modelo anterior. A implementação prática do modelo na norma da AASHTO LRFD será demonstrada no capítulo a seguir.

### 2.3 OBSERVAÇÕES ADICIONAIS SOBRE OS MODELOS APRESENTADOS

Devido ao grande número de fatores que influenciam na resistência ao cisalhamento, muitas normas, inclusive a americana, faz uso de considerações empíricas, sem um modelo teórico que explicasse a mecânica do fenômeno. Isso pode levar a níveis inconsistentes de conservadorismo (podendo levar a rupturas bruscas devido ao cortante), uma vez que os ensaios nem sempre são representativos de todas as situações da prática, conforme mostrado na Figura 23. Nesse sentido a MCFT se apresenta como uma base racional e consistente para o corte em vigas convencionais, enquanto vigas curtas podem ser analisadas por modelos de biela e tirante. (COLLINS *et al.*, 2009) Segundo os trabalhos de COLLINS *et al.* (1996) e RAHAL e COLLINS (1999), outro mérito da MCFT simplificada é apresentar um método conciso e que permite uma compreensão mecânica do fenômeno pelo engenheiro, em contraste com a grande quantidade de equações e interpolações dos métodos empíricos.

Figura 23 - Quantidade e tipos de vigas ensaiadas sob cortante



Fonte: Adaptado de Collins et al. (2009).

Algumas considerações feitas pelos recentes modelos, no entanto, ainda são questionáveis. Segundo YU e BAŽANT (2011), o “efeito escala” não é completamente controlado ao utilizar estribos e o efeito de “engrenamento de agregado” é menor do que os modelos preveem, sendo muitas rupturas observadas por esmagamento na região comprimida.

Segundo RAHAL (2006) e PROESTOS *et al.* (2018), a limitação do esforço cortante máximo para evitar o esmagamento das bielas antes do escoamento dos estribos é razoável, embora um pouco conservadora para baixas deformações longitudinais.

Segundo YOON *et al.* (1996) e CHIU *et al.* (2007), as armaduras mínimas transversais para cortante e torção prescritas pela MCFT são razoáveis, a fim de impedir a ruptura frágil na fissuração e controlar a abertura das fissuras. Concretos de alta resistência, no entanto, necessitam de um cuidado especial, uma vez que a fissura diagonal tende a atravessar o agregado e reduzir o atrito na região, diminuindo o “engrenamento de agregado” e aumentando a influência dos outros mecanismos de resistência.

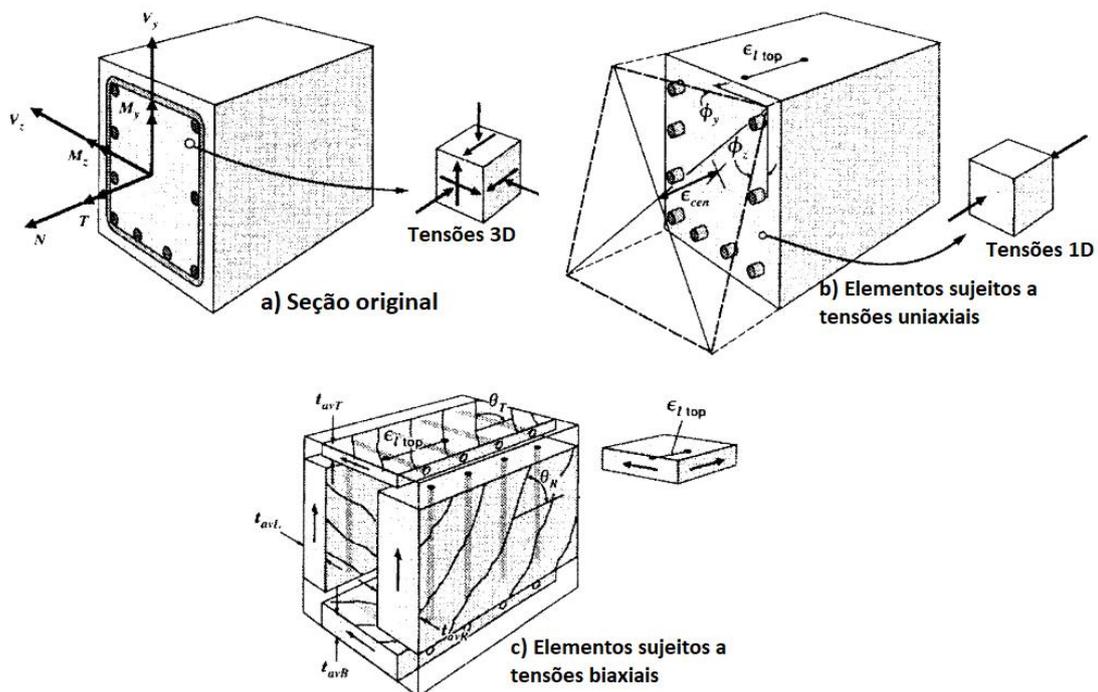
O fenômeno de deslocamento, previsto na MCFT simplificada para torção, ainda não é uma unanimidade: vigas com maior cobrimento conseguem absorver mais esforços de compressão nessa região e, portanto, perdem espessura antes da ruptura da viga, enquanto vigas com menor cobrimento rompem antes do deslocamento da periferia. (RAHAL e COLLINS, 1995b) Além disso, o fenômeno é fortemente influenciado por concentrações locais de tensão, com menores espaçamentos entre estribos favorecendo sua ocorrência. As diferentes espessuras no tubo equivalente geram resultados muito diferentes entre as normas. (IBRAHIM *et al.*, 2020)

A MCFT é um modelo preciso para aproximar o fenômeno de interação, casando os efeitos biaxiais medidos na treliça com os efeitos uniaxiais da flexão, conforme Figura 24, considerando as diferentes deformações em cada parede. O efeito de deslocamento ainda necessita ser mais estudado, mas é função da espessura de cobrimento, tensões nas bielas, resistência do concreto e quantidade de barras na interface do cobrimento. Uma alternativa simplificada seria estimar a “quantidade” de deslocamento com base na razão entre os esforços de torção e cortante. (RAHAL e COLLINS, 1995a) A interação entre esforços nos banzos longitudinais considerada pela MCFT se aproxima bem dos resultados experimentais. (RAHAL *et al.*, 2006) Nas bielas, a MCFT simplificada não considera como a interação da flexão com torção e cortante pode gerar compressão adicional, especialmente em seções vazadas de paredes finas. As prescrições implementadas nas normas da CSA e AASHTO

também não permitem analisar a interação em seções reforçadas não simetricamente. (RAHAL, 2008)

A atuação de possíveis esforços de tração/compressão axiais aumentam o amolecimento das membranas e influenciam gravemente as relações constitutivas, o que não é considerado pela MCFT. A contribuição do concreto tracionado, inclinação das bielas e equações de equilíbrio, no entanto, parecem estar de acordo com resultados experimentais. (XIE *et al.*, 2012) Esses efeitos não serão analisados neste trabalho, no entanto.

Figura 24 - Idealização da seção pela MCFT



Fonte: Adaptado de Rahal e Collins (1995a).

O modelo adotado pela NBR 6118, da treliça generalizada com banzos paralelos, também permite uma consideração adequada da interação entre esforços. A “liberdade” de escolha na inclinação das bielas, no entanto, deve ser considerada com cuidado, especialmente nas bielas e banzos, uma vez que controla a redistribuição dos esforços nos elementos da treliça. (BARROS e GIONGO, 2012)

O trabalho de CAVALCANTE *et al.* (2018) sugeriu uma abordagem mista: utilizar a MCFT simplificada para determinar a deformação e inclinação das bielas e, a partir disso, utilizar a treliça generalizada com o ângulo determinado, o que pode facilitar a aplicação prática da NBR 6118. Outra questão observada é a contribuição do concreto tracionado nos tirantes  $V_c$ : uma vez que a torção não admite essa colaboração devido à intensa fissuração, é razoável que este valor deva ser reduzido na análise da interação torção-cortante.

ANDRADE e BITTENCOURT (2020) e OBEL (2019) também estudaram a interação torção-cortante pelo modelo adotado pela norma brasileira em comparação com outras normas, reconhecendo que a treliça clássica com inclinação de  $45^\circ$  é muito conservadora, com a treliça generalizada com banzos paralelos fornecendo resultados mais adequados com experimentos disponíveis na literatura internacional.

Não foram encontrados trabalhos nacionais analisando a interação flexão-torção-cortante sob o modelo da treliça generalizada com banzos paralelos.

### 3 PROCEDIMENTOS NORMATIVOS

Para comparação com os experimentos, serão considerados valores unitários para coeficientes de majoração e minoração. Assim, os parâmetros mecânicos e geométricos das vigas serão iguais aos obtidos nos experimentos analisados. A nomenclatura das grandezas, no entanto, será mantida conforme utilizado em cada norma para melhor entendimento.

#### 3.1 NBR 6118/2014

A NBR 6118/2014 utiliza uma filosofia de dimensionamento com estados limites, onde ações e resistências são fatoradas, utilizando explicitamente coeficientes com base em análises estatísticas para considerar variabilidade, incertezas, precisão, probabilidade e importância dos fenômenos analisados. Assim, pretende-se garantir que, no estado limite último, o esforço solicitante de projeto  $F_{Sd}$  seja inferior ao esforço resistente de projeto  $F_{Rd}$ . A norma apresenta, nos capítulos 17 e 18, os critérios e prescrições para dimensionamento e detalhamento elementos lineares. Neste capítulo, serão apresentados esses critérios, sempre seguindo a fundamentação teórica apresentada no capítulo anterior. (ABNT, 2014)

##### 3.1.1 Esforço Cortante

A norma admite dois modelos de cálculo baseados na treliça generalizada de banzos paralelos, considerando uma contribuição do concreto tracionado no tirante. O Modelo II permite uma variação da inclinação das bielas entre 30° e 45°, enquanto o Modelo I fixa o ângulo das diagonais em 45°. Assim, o presente trabalho se deterá na demonstração do Modelo II, já que o Modelo I pode ser obtido através do mesmo. O trabalho também não analisará os critérios de detalhamento como ancoragem e arranjo (ABNT, 2014)

A fim de limitar ruptura frágil na fissuração e a abertura das fissuras diagonais, garantindo o funcionamento adequado da treliça, a norma prescreve uma armadura mínima transversal conforme Equação (20). Também é prescrito um espaçamento máximo longitudinal e transversal, a fim de que todas as fissuras sejam costuradas por estribos. A armadura transversal pode ser composta por estribos fechados ou barras dobradas/soldadas, inclinados entre 45° e 90°, com  $f_{ywd}$  considerada no máximo 435 MPa. (ABNT, 2014) Para efeito deste trabalho, serão considerados estribos verticais, já que a utilização de estribos inclinados se tornou incomum devido às dificuldades executivas.

$$\rho_{sw,min} = \frac{A_{sw}}{b_w \times s} \geq 0.2 \times \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (20)$$

A norma considera que, nas proximidades dos apoios, o esforço de corte é transferido majoritariamente pelo concreto comprimido pelo efeito de arco. São prescritas então condições para reduzir o esforço de projeto  $V_{Sd}$  que solicita os banzos e tirantes. Também são ponderados os efeitos de protensão e do cortante em vigas com alma de altura variável. (ABNT, 2014)

A análise de segurança sob atuação do cortante consiste em verificar se o corte solicitante  $V_{Sd}$  é inferior à resistência à compressão das bielas diagonais  $V_{Rd2}$  e da resistência à tração dos tirantes  $V_{Rd3}$ . Também é verificada a tração no banzo tracionado pelo fletor em interação com o cortante por meio de decalagem do diagrama de momentos fletores ou pela verificação da força de tração no banzo. (ABNT, 2014)

Para verificar as **bielas diagonais** de concreto formadas entre as fissuras inclinadas, faz-se o equilíbrio vertical da seção à esquerda na Figura 25 (a e b), que resulta na Equação (21). A tensão de compressão na biela é obtida conforme Figura 25 (c) e mostrada na Equação (22).

$$R_{cw} \times \sin\theta = V_{Sd} \quad (21)$$

$$\sigma_{cw} = \frac{R_{cw}}{bw \times z \times (\cot\theta + \cot\alpha) \times \sin\theta} \quad (22)$$

Substituindo a Equação (21) na (22), obtém-se a Equação (23). Numa situação de ruína, a tensão de compressão na biela se iguala a sua resistência a compressão. Ela é considerada aproximadamente 70% dos  $0.85f_{cd}$  da tradicional curva tensão x deformação do concreto, devido ao estado biaxial de tensões. Considerando um fator de redução  $\alpha_{v2}$  (Equação (24)) devido à forma dos corpos de prova cilíndricos geradores do  $f_{ck}$  e que o braço de alavanca  $z$  é aproximadamente 90% da altura útil  $d$ , é gerada, no estado limite último, a Equação (25).

$$\sigma_{cw} = \frac{V_{Sd}}{bw \times z \times (\cot\theta + \cot\alpha) \times \sin^2\theta} \quad (23)$$

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (24)$$

$$V_{Sd} = V_{Rd2} = 0.54 \times \alpha_{v2} \times f_{cd} \times b_w \times d \times \sin^2\theta \times (\cot\theta + \cot\alpha) \quad (25)$$

Para verificar os **tirantes tracionados** que “seguram” as bielas, é considerada inicialmente apenas a contribuição dos estribos nesses tirantes  $V_{sw}$ . É feito o equilíbrio vertical da seção à direita na Figura 25 (b e d), resultando na Equação (26). Sendo o número de barras cortadas por uma fissura dado pela Equação (27) e considerando o escoamento das mesmas, a força desenvolvida pelos tirantes é dada pela Equação (28). Substituindo a Equação (26) na (28), obtém-se na (29) a contribuição dos estribos na resistência do tirante.

$$R_{swt} \times \sin\alpha = V_{sw} \quad (26)$$

$$n_{barras} = \frac{z \times (\cot\theta + \cot\alpha)}{s} \quad (27)$$

$$R_{swt} = \frac{A_{sw} \times f_{yd} \times 0.9d \times (\cot\theta + \cot\alpha)}{s} \quad (28)$$

$$V_{sw} = \frac{A_{sw} \times f_{yd} \times 0.9d \times (\cot\theta + \cot\alpha) \times \sin\alpha}{s} \quad (29)$$

Considerando uma contribuição do concreto tracionado nos tirantes  $V_{cw}$ , conforme Figura 26, fazendo o equilíbrio vertical e considerando que o braço de alavanca é 90% da altura útil, obtém-se a Equação (30). É considerada, no entanto, uma redução da contribuição do concreto sob tração, em função do estado de fissuração da seção sob atuação do momento fletor e do nível de sollicitação do cortante, conforme Equações (31), (32) e (33), sendo  $M_0$  o momento de decompressão. Juntando as contribuições, obtém-se, na ruptura a Equação (34).

$$V_{cw} = b_w \times 0.9d \times f_{ctd} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad (30)$$

$$V_{c0} = 0.6 \times f_{ctd} \times b_w \times d \quad (31)$$

$$V_{c1} = V_{c0} \times \frac{(V_{sd} - V_{Rd2})}{(V_{c0} - V_{Rd2})} \quad (32)$$

$$V_c = \begin{cases} 0, & \text{se flexo - tração com a seção totalmente tracionada} \\ V_{c1}, & \text{se flexo - tração com a seção parcialmente tracionada} \\ V_{c1} + \left(1 + \frac{M_0}{M_{sd}}\right), & \text{se flexocompressão} \end{cases} \quad (33)$$

$$V_{sd} = V_{Rd3} = V_{sw} + V_c \quad (34)$$

Verificando o **banzo tracionado**, observa-se o equilíbrio horizontal na Figura 25 (b). Devido às componentes horizontais das forças nas bielas e tirantes, é desenvolvida uma força nos dois banzos, conforme Equação (35), que pode ser reescrita na Equação (36). Devido ao momento fletor, existe uma força horizontal no banzo tracionado conforme Equação (37). Assim, cada banzo é tracionado conforme a Equação (38), que pode ser reescrita para verificar o banzo tracionado no estado limite último de acordo com a Equação (39).

$$2R_{st,v} = R_{cw} \times \cos\theta - R_{sw} \times \cos\alpha = V_{sd}(\cot\theta - \cot\alpha) \quad (35)$$

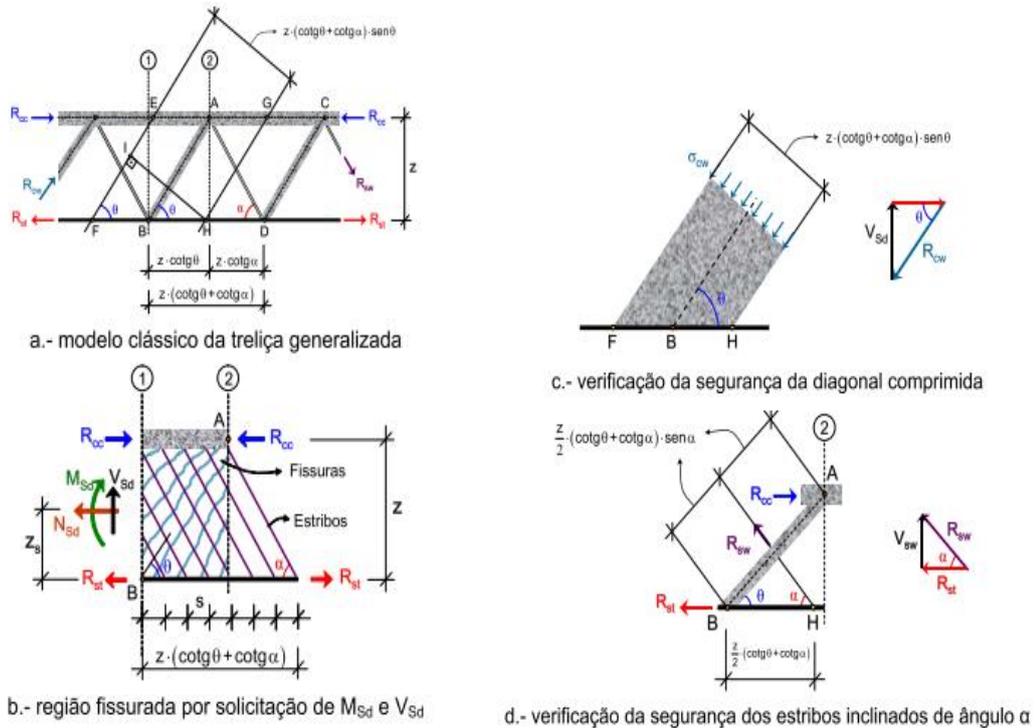
$$R_{st,v} = V_{sd}(\cot\theta - \cot\alpha)/2 \quad (36)$$

$$R_{st,m} = \frac{M_{sd}}{z} \quad (37)$$

$$R_{st} = \frac{M_{sd}}{z} + V_{sd}(\cot\theta - \cot\alpha)/2 \quad (38)$$

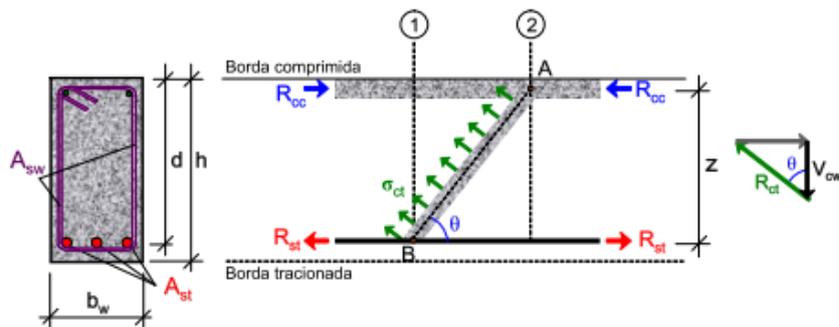
$$\frac{M_{Sd}}{z} + 0.5V_{Sd}(\cot \theta - \cot \alpha) < f_{yd} \times A_{st,inf} \tag{39}$$

Figura 25 - Modelo da treliça generalizada com banzos paralelos



Fonte: Giongo (2011).

Figura 26 - Contribuição do concreto tracionado na treliça



Fonte: Giongo (2011).

### 3.1.2 Momento Torção

Para a torção, a NBR 6118/2014 considera um modelo coerente ao do cortante, a treliça generalizada espacial com auxílio da analogia do tubo de paredes finas equivalente. As bielas estão inclinadas entre 30° e 45°. Seções compostas de retângulos podem absorver o momento torçor de forma proporcional à rigidez de cada retângulo componente e seções vazadas são calculadas com o menor valor entre a seção equivalente e a original (ABNT, 2014)

A geometria da seção vazada equivalente é calculada em função da geometria original da seção retangular. A espessura da seção vazada equivalente  $h_e$  pode variar entre os valores mínimo (40) e máximo (41). De modo similar, o perímetro da linha média da parede equivalente  $u_e$  é dado pela Equação (42) e a área envolvida pela mesma  $A_e$  é obtida conforme a Equação (43). (ABNT, 2014)

$$h_{e,min} = \begin{cases} \min\left(\frac{A_c}{u}, b_w - 2c_1\right), & \text{se } \frac{A_c}{u} < 2c_1 \\ 2c_1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (40)$$

$$h_{e,max} = \begin{cases} h_{e,min}, & \text{if } \frac{A_c}{u} < 2c_1 \\ \frac{A_c}{u}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (41)$$

$$u_e = \begin{cases} u - 8c_1, & \text{se } \frac{A_c}{u} < 2c_1 \\ u - 4h_e, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (42)$$

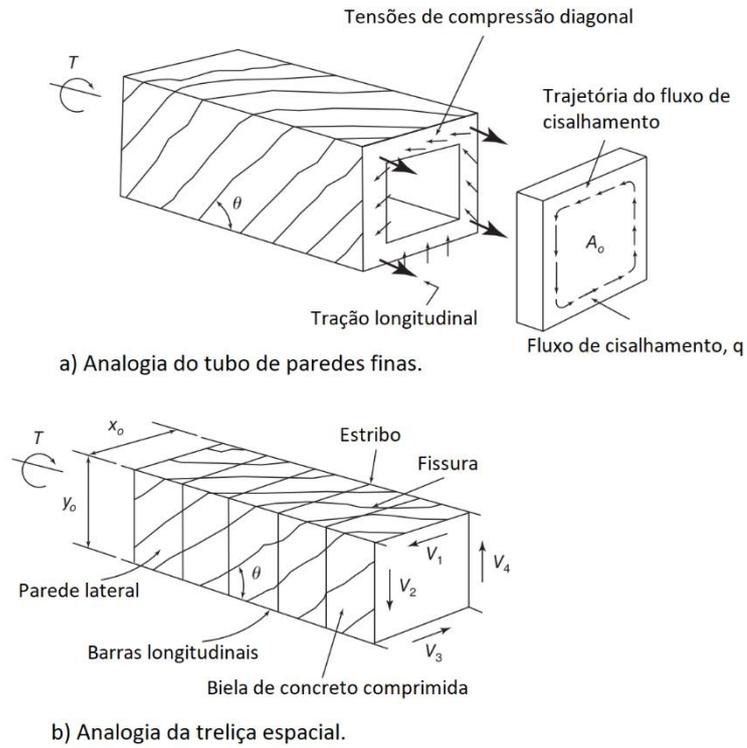
$$A_e = \begin{cases} (b_w - 2c_1) \times (h - 2c_1), & \text{se } \frac{A_c}{u} < 2c_1 \\ (b_w - h_e) \times (h - h_e), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (43)$$

A seção equivalente consiste em quatro paredes perpendiculares compostas por treliças planas conectadas, onde há bielas diagonais de concreto comprimidas, tirantes compostos pelos estribos fechados ao redor do perímetro e banzos paralelos tracionados compostos pelas armaduras longitudinais (Figura 27). Sabendo que a força de corte em uma parede é o produto entre o fluxo de cisalhamento e o comprimento da mesma, e aplicando a Equação (4), pode ser obtido o esforço cortante devido à torção nas paredes da treliça espacial, conforme (44).

Considerando uma parte de uma das paredes verticais da treliça na Figura 28, o número de estribos que equilibra uma biela é dado por Equação (45) e fazendo o equilíbrio vertical supondo o escoamento da armadura transversal, obtém-se (46). Esta, junto à Equação (44), gera o momento torçor máximo resistido pelo ramo de **estribos** conforme (47). O concreto tracionado não contribui à resistência, devido à intensa fissuração (IBRAHIM *et al.*, 2020).

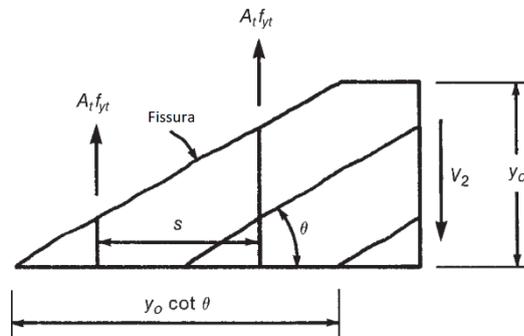
$$V1 = V3 = \frac{T}{2A_o} \times x_o \text{ e } V2 = V4 = \frac{T}{2A_o} \times y_o \quad (44)$$

Figura 27 - Tubo de paredes finas e treliça espacial generalizada para torção



Fonte: Wight (2016).

Figura 28 - Seção de uma das paredes verticais da treliça - estribos



Fonte: Wight (2016).

$$n_{barras} = \frac{y_o}{s} \times \cot\theta \tag{45}$$

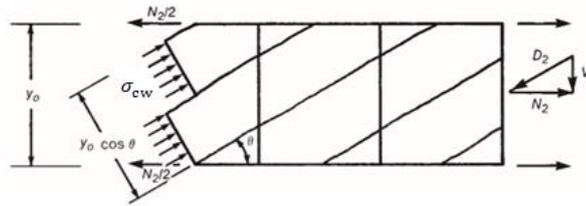
$$V_2 = \frac{A_t f_{yt} y_o}{s} \times \cot\theta \tag{46}$$

$$T_{Rd3} = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s} \times \cot\theta \tag{47}$$

Tomando uma outra parte da parede vertical na Figura 29, chega-se às forças de compressão nas bielas na Equação (48). De modo similar, obtém-se as forças de tração longitudinais nas paredes verticais e horizontais (Equação (49)). Usando novamente a

Equação (44), obtém-se essas forças em função do momento torçor em (50). Considerando o escoamento das barras longitudinais, a Equação (51) mostra o momento torçor máximo resistido pela **armadura longitudinal total**. De modo similar, chega-se à tensão de compressão nas bielas (Equação (52)). Considerando um estado de tensões similar ao do cortante, a resistência à compressão das bielas é diminuída, chegando em (53) no momento torçor máximo resistido pelas **bielas**. (PINHEIRO et al, 2003)

Figura 29 - Seção de uma das paredes verticais da treliça – bielas e banzos



Fonte: Adaptado de Wight (2016).

$$D_2 = \frac{V_2}{\sin \theta} \quad (48)$$

$$N_1 = V_1 \cot \theta \text{ e } N_2 = V_2 \cot \theta \quad (49)$$

$$N = 2(N_1 + N_2) = \frac{T}{2A_0} 2(x_0 + y_0) \cot \theta = \frac{T}{2A_0} p_o \cot \theta \quad (50)$$

$$T_{Rd4} = \frac{2A_0 A_{s,tot} f_{yd} \tan \theta}{p_o} \quad (51)$$

$$\sigma_{cw} = \frac{V_2}{t y_0 \cos \theta \sin \theta} = \frac{\frac{T}{2A_0} \times y_0}{t y_0 \cos \theta \sin \theta} = \frac{T}{2t A_0 \cos \theta \sin \theta} \quad (52)$$

$$T_{Rd2} = 0.5 \times \alpha_{v2} \times f_{cd} \times t \times A_0 \times \sin 2\theta \quad (53)$$

Para torção de equilíbrio, são dadas armaduras mínimas transversais (estribos fechados) e longitudinais conforme Equação (54). A torção de compatibilidade pode ser desprezada desde que garantida a capacidade de adaptação plástica. São apresentadas, finalmente, considerações especiais para flexo-torção em perfis abertos de paredes finas. (ABNT, 2014)

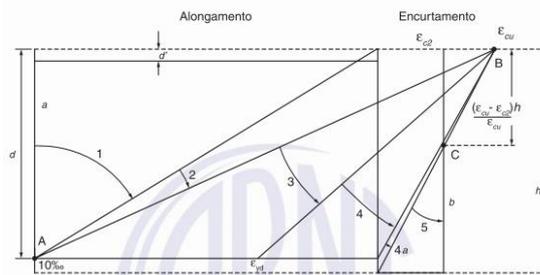
$$\left. \begin{aligned} \rho_{sw,min} &= \frac{A_{sw}}{b_w \times s} \\ \rho_{s,min} &= \frac{A_s}{h_e \times u_e} \end{aligned} \right\} \geq 0.2 \times \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (54)$$

A análise de segurança à torção consiste em verificar se a torção solicitante  $T_{sd}$  é inferior à resistência à compressão das bielas diagonais  $T_{Rd2}$ , à resistência à tração dos tirantes  $T_{Rd3}$  e à resistência à tração longitudinal nos banzos,  $T_{Rd4}$ . (ABNT, 2014)

### 3.1.3 Momento Fletor e Interação

Para flexão, a norma brasileira considera as hipóteses básicas estabelecidas no capítulo anterior, além das relações constitutivas para o aço e o concreto comprimido (desprezando o concreto tracionado) e os domínios representativos das formas de ruptura conforme Figura 30. A norma também apresenta requisitos de ductilidade, desempenho em serviço, armaduras mínimas e máximas para evitar ruptura frágil e seções superarmadas e requisitos para esforços axiais, que não serão tema deste trabalho. (ABNT, 2014)

Figura 30 - Domínios de estado limite último

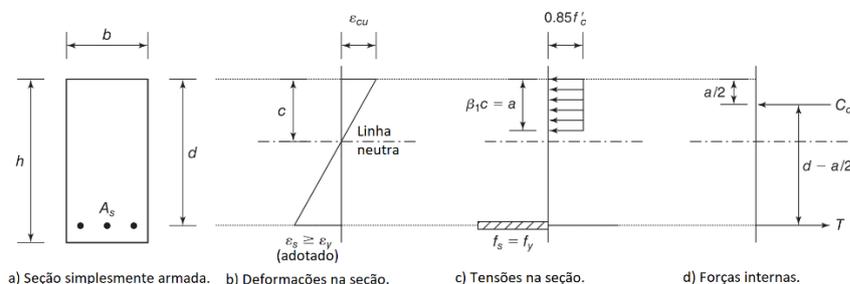


Fonte: ABNT (2014).

Para efeito deste trabalho, os esforços resistentes são obtidos no domínio 3, onde o concreto comprimido é esmagado e o aço já atingiu o escoamento, resultando, conforme Figura 31 e equilíbrio de momentos no  $M_{Rd}$ , que deve ser superior ao momento fletor solicitante  $M_{Sd}$ . na Equação (55). O braço de alavanca pode ser admitido como 90% da altura útil  $d$  ou obtendo a altura do bloco de compressão  $a$ , em função da altura da linha neutra  $c$ , pelo equilíbrio horizontal de forças na seção. (GIONGO, 2009)

$$M_{Rd} = z \times f_{yd} A_{s,inf} = 0.9d \times f_{yd} A_{s,inf} \text{ ou } \left(d - \frac{a}{2}\right) \times f_{yd} A_{s,inf} \tag{55}$$

Figura 31 - Seção de concreto armado com armaduras longitudinais sob flexão



Fonte: Wight (2016).

Na interação entre os esforços, existe um estado de tensões extremamente complexo, com níveis de fissuração, rigidez e capacidade resistente diferentes para cada região do elemento em concreto armado. No entanto, o modelo de treliça generalizada com banzos paralelos consegue capturar com razoável acurácia o fenômeno. (PINHEIRO et al, 2003)

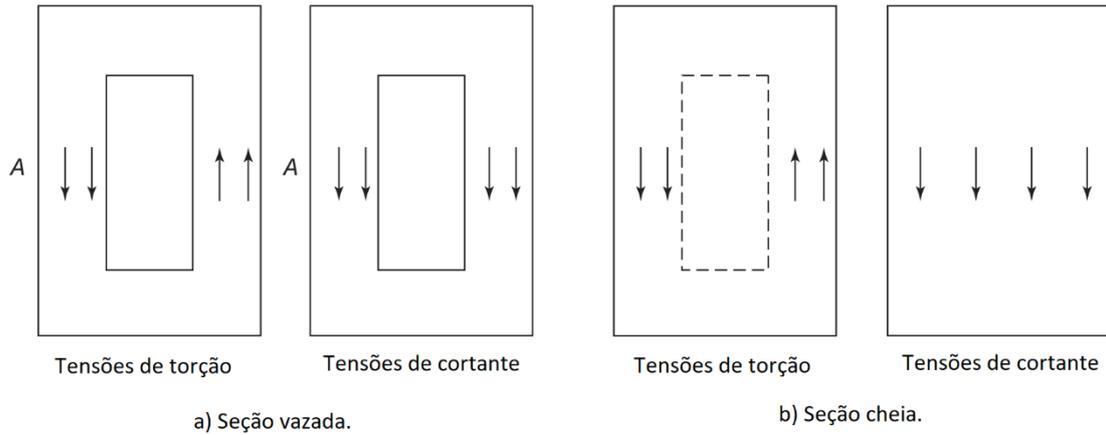
Nas **bielas comprimidas**, assume-se que a flexão contribui apenas com o nível de fissuração e inclinação, diminuindo a rigidez e capacidade resistente delas. Apenas a torção e o cortante induzem esforços nas diagonais. Enquanto as tensões devido ao corte se distribuem em toda a alma da seção, a torção provoca tensões de cisalhamento circulatorias ao redor da periferia da seção. Em seções vazadas, bastaria verificar a parede mais crítica, na qual as tensões são somadas, conforme Figura 32 (a). Em uma seção cheia, no entanto, essa separação não é possível e o estado de tensões é complexo e variável ao longo da seção (Figura 32 (b)), com muitas normas adotando uma interação quadrática entre elas. A norma brasileira, no entanto, adota um procedimento único e conservador, assumindo uma interação linear entre os esforços de torção e corte na biela, conforme Equação (56). (PINHEIRO et al, 2003)

Nos **tirantes tracionados**, o fenômeno é similar ao das bielas, com tensões induzidas apenas pela torção e cortante. Assume-se que os efeitos podem ser superpostos, sendo necessário verificar apenas a perna do estribo na qual as tensões se somam. Essa superposição é mostrada na Equação (57), onde o primeiro e segundo termos são respectivamente as áreas de estribos solicitadas pela torção e cortante. Como no cortante considera-se uma contribuição do concreto fissurado em tração, esse segundo termo é dado pela Equação (58). (OBEL, 2019)

Segundo WIGHT (2016), o banzo longitudinal superior é comprimido pela flexão e tracionado pelo cortante e torção, o que gera um alívio na armadura longitudinal superior solicitada por esses, conforme Equação (59). O banzo inferior, no entanto, é tracionado por todos os esforços, conforme Equação (60).

Em seções com grandes tensões axiais, onde a região comprimida é reduzida (especialmente seções celulares), deve-se verificar o estado de tensões provocado pela interação entre o cisalhamento devido à torção e a compressão devido à flexão. A tensão de compressão máxima atuante é mostrada na Equação (61), a partir das tensões normais (62) e tangenciais (63) atuantes. Considerando as resistências à compressão do concreto num nó entre biela e tirante  $f_{cd1}$  (nó de encontro de bielas) e  $f_{cd2}$  (nó de bielas atravessadas por mais de um tirante), é possível estimar uma resistência média conforme Equação (64). Desse modo, a tensão atuante deve ser inferior à resistência, conforme Equação (65). (ABNT, 2014)

Figura 32 - Interação entre os esforços de cisalhamento em seções vazada e cheia



Fonte: Wight (2016).

$$\frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} + \frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} < 1 \quad (56)$$

$$\frac{T_{Sd}}{f_{ywd} \times A_e \times \cot \theta} + A_{sv} < A_{sw}/s \quad (57)$$

$$A_{sv} = \max(V_{Sd} - V_c, 0) / (f_{ywd} \times z \times \cot \theta) \quad (58)$$

$$-\frac{M_{Sd}}{0.9d} + (0.5V_{Sd} + T_{Sd} \times u_e / 4A_e) \cot \theta < f_{yd} \times A_{s,sup} \quad (59)$$

$$\frac{M_{Sd}}{0.9d} + (0.5V_{Sd} + T_{Sd} \times u_e / 4A_e) \cot \theta < f_{yd} \times A_{s,inf} \quad (60)$$

$$\sigma_{cmax} = \frac{\sigma_{cmed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{cmed}}{2}\right)^2 + \tau_t^2} \quad (61)$$

$$\sigma_{cmed} = \frac{M_{Sd}}{0.9d \times b_w \times 2(d - 0.9d)} \quad (62)$$

$$\tau_t = \frac{T_{Sd}}{2 \times t \times A_0} \quad (63)$$

$$\bar{f}_{cd12} = \lambda f_{cd1} + (1 - \lambda) f_{cd2}, \text{ onde } \lambda = \cos \gamma \text{ e } \gamma = \arctg \left( \frac{T_{Sd}/T_{max}}{M_{Sd}/M_{max}} \right) \quad (64)$$

$$\sigma_{cmax} < \bar{f}_{cd12} \quad (65)$$

### 3.2 AASHTO LRFD BRIDGE DESIGN SPECIFICATIONS 2014

A norma de projeto de pontes da associação americana de estradas e transportes (AASHTO) de 2014 utiliza uma filosofia de projeto similar à norma brasileira, com uma

abordagem estatística para os coeficientes de majoração e minoração. De modo geral, o dimensionamento é feito garantindo que o esforço último solicitante  $F_u$  seja inferior a esforço nominal resistente  $F_n$ . (AASHTO, 2015)

A AASHTO LRFD Bridge Design Specifications apresenta, nas seções 5.7 e 5.8, os critérios e prescrições para dimensionamento e detalhamento elementos sob flexão, cortante e torção. Neste capítulo, serão apresentados esses critérios, seguindo a fundamentação teórica apresentada no capítulo anterior.

### 3.2.1 Esforço Cortante

Baseada na MCFT simplificada, a seção 5.8 da norma apresenta os requisitos de dimensionamento quanto ao corte e à torção, exceto regiões especiais (a serem dimensionadas via biela e tirante), regiões de interface (nas quais deve-se verificar a transferência de cisalhamento) e seções vazadas (que devem ser verificadas com um procedimento específico). Após mostrar as torções de fissuração e limite, é apresentado o fator redutor  $\lambda$  para concretos de agregado leve e um modificador da resistência quando for possível obter experimentalmente a resistência à tração do concreto, além dos critérios de ancoragem e detalhamento. Sempre é necessário utilizar armadura transversal quando o esforço último atuante  $V_u$  for superior a 50% da contribuição do concreto ao tirante  $V_c$  ou o esforço de torção último  $T_u$  for maior que a torção limite. A armadura transversal mínima, para garantir ductilidade e restringir a abertura de fissuras é dada pela Equação (66), onde  $f_{yv}$  é considerada no máximo 690 MPa para cortante e 415 MPa para torção. Podem ser utilizados estribos inclinados, barras dobradas/soldadas, cabos e espirais. Para a torção, estes devem ser fechados e verticais. É dado o espaçamento máximo, em função do braço de alavanca da viga e nível de solicitação de cisalhamento, para garantir que todas as fissuras sejam costuradas. A tensão de cisalhamento na seção é determinada pela Equação (67) e o braço de alavanca pode ser considerado o maior dentre 0.9d e 0.72h. (AASHTO, 2015)

$$A_{sv,min} = 0.083 \times \sqrt{f'_c} \times b_w \times s / f_{yv} \quad (66)$$

$$v_u = \frac{V_u}{b_w z} \quad (67)$$

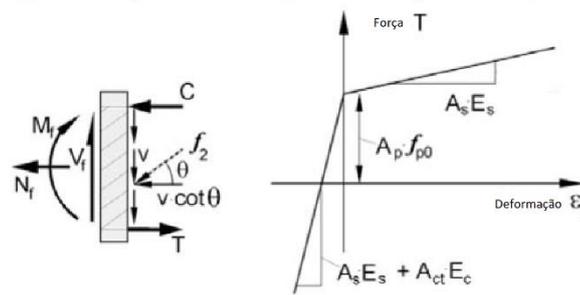
A norma considera o efeito de arco próximo aos apoios e prescreve a distância na qual deve ser avaliado o esforço último de corte, além de admitir a utilização de outros métodos que respeitem a compatibilidade de deformações e o equilíbrio, com relações constitutivas experimentais (como o modelo de treliça com amolecimento) ou modelos de biela e tirante.

Primeiramente, é assumido que, na região comprimida de flexão (banzo superior), a resistência ao cisalhamento é grande, de modo que a resistência ao cisalhamento na região fissurada é crítica, especialmente para vigas sem estribos. Visando a ductilidade, supõe-se que o aço atinge o escoamento antes da ruptura. Assim, a Inequação (17) se torna obsoleta dentro dos limites de dimensionamento, e a Inequação (16) se torna função apenas da inclinação das bielas e engrenamento de agregado. Substituindo esta na Equação (14), pode-se obter a (68). Para evitar o esmagamento das bielas antes do escoamento (Equação (13)), são consideradas as deformações de ruptura e as equações anteriores, o que gera um limite superior para o cisalhamento na seção de  $0.25f'_c$ . Esta equação se aproxima da equação tradicional de dimensionamento ao corte adotada pela norma americana, onde é considerada uma parcela dos estribos e uma parcela “do concreto” (BENTZ e COLLINS, 2017). Também estão incluídos nela os dois parâmetros principais da MCFT simplificada:  $\beta$ , um fator que representa o engrenamento de agregado e  $\theta$ , o ângulo de inclinação das bielas. Devido ao mecanismo de engrenamento de agregado, aplicação da mesma é limitada a concretos de  $f'_c < 64$  MPa e  $\lambda$  é um fator de correção para concretos que usam agregados leves. (BENTZ e COLLINS, 2006)

$$\frac{V_u}{b_w z} < \frac{V_n}{b_w z} = \frac{V_c + V_s}{b_w z} = \lambda \beta \sqrt{f'_c} + \frac{A_{sw} f_{ywd} \cot \theta}{b_w s} < 0.25 f'_c \quad (68)$$

A fim de obter  $\beta$ , é necessário medir alguns efeitos. A deformação longitudinal  $\varepsilon_s$  do aço, obtida pelo equilíbrio da Figura 33, captura a influência da taxa de armadura, esforços, rigidez e outros fatores. Desconsiderando a deformação do concreto na região comprimida e tomando, de modo conservador  $0.5 \cot \theta = 1$  é obtida a Equação (69). Caso o banzo superior esteja fissurado, essa expressão deve ser reavaliada, devido ao amolecimento do concreto. O espaçamento entre fissuras representa o “efeito de escala” (vigas mais altas implicam fissuras mais largas e, portanto, menor engrenamento de agregado) e é dado pela Equação (70), com uma correção pelo tamanho do agregado conforme (71). É necessária ainda uma “correção” no tamanho do agregado para reduzir o engrenamento de agregado em concretos de alta resistência. Com base em evidências empíricas de uma viga “padrão”, a Equação (19) foi simplificada numa relação linear conforme (72) (aplicável para o concreto fissurado, mas conservador para grandes deformações). Para impedir o cálculo de valores negativos de aberturas de fissuras, foi aplicado um limite inferior admitido na Equação (69). Corrigindo a Equação (72) para considerar o “efeito escala” e diferentes agregados e inserindo a mesma na Equação (18), obtém-se o parâmetro  $\beta$ , conforme (73). (BENTZ e COLLINS, 2006)

Figura 33 - Esforços internos, externos e deformações na seção



Fonte : Bentz e Collins (2006).

$$-4 \times 10^{-4} < \varepsilon_s = \frac{\frac{M_u}{z} + 0.5V_u \cot\theta + 0.5N_u}{A_{s,inf} \times E_s} = \frac{\frac{M_u}{z} + V_u + 0.5N_u}{A_{s,inf} \times E_s} < 6 \times 10^{-3} \quad (69)$$

$$s_x = \begin{cases} z, \text{ sem estribos} \\ 0.3m, \text{ com estribos} \end{cases} \quad (70)$$

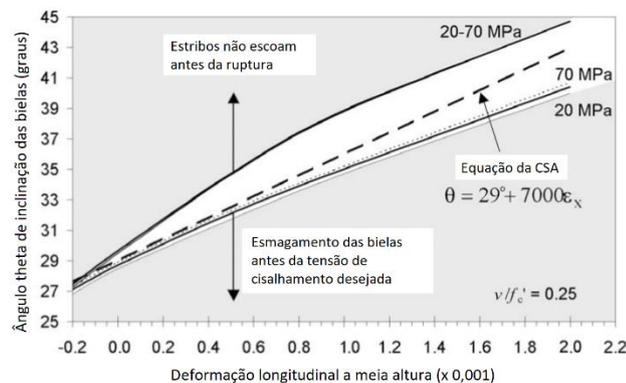
$$s_{xe} = s_x \times \frac{0.035}{0.016 + a_g} > 0.85s_x \quad (71)$$

$$w = 0.2 + 2000\varepsilon_s \quad (72)$$

$$\beta = \frac{4.8}{(1 + 750\varepsilon_s)} \times \frac{1.3}{1 + s_{xe}} \quad (73)$$

Para  $\theta$ , outras considerações são feitas. A inclinação das bielas define a capacidade da treliça de redistribuir esforços entre os tirantes e os banzos. A fim de garantir o escoamento do aço antes do esmagamento das bielas, o ângulo deve estar dentro dos limites mostrados na Figura 34. É assumida uma relação linear entre a inclinação das bielas e a deformação longitudinal conforme Equação (74). Para restringir essa capacidade de redistribuição e garantir o engajamento adequado dos banzos, é aplicado um limite superior a essa inclinação, implicitamente a partir do limite superior da Equação (69). (BENTZ e COLLINS, 2006)

Figura 34 - Inclinação do campo de compressão versus deformação longitudinal



Fonte: Bentz e Collins (2006).

$$\theta = 29^\circ + 3500\varepsilon_s \quad (74)$$

A tração devido ao corte no tirante é verificada atuando em interação com o momento fletor no banzo inferior, o que resulta na Equação (75). (BENTZ e COLLINS, 2006)

$$f_{yd} \times A_{s,inf} > \frac{M_u}{z} + (V_u - 0.5V_s)cot\theta + 0.5N_u \quad (75)$$

No dimensionamento garante-se que o esforço último de corte  $V_u$  seja inferior ao esforço nominal resistente  $V_n$ , dado pela resistência do tirante (Equação (68)). O esmagamento da biela é evitado pela consideração do limite superior da mesma equação. A norma permite considerar  $\beta$  e  $\theta$  simplificadaamente iguais a 2 e  $45^\circ$  ou conforme Equações (73) e (74). O banzo longitudinal inferior tracionado é verificado com a Equação (75). (AASHTO, 2015)

### 3.2.2 Momento Torçor

A torção é considerada com auxílio da analogia do tubo de paredes finas. Após fissuração, a geometria do tubo é função da distância do eixo dos estribos à face da seção  $c_2$ . A partir dessa distância, se obtém a área envolvida e o perímetro dos estribos  $A_{oh}$  e  $p_h$  de modo que  $A_0 = 0.85A_{oh}$  e  $p_0 = 0.9p_h$ .

Para verificar os estribos e os banzos, é considerado o equilíbrio da treliça espacial, sem considerar contribuição do concreto tracionado nos tirantes. Os tirantes são verificados garantindo que o esforço de torção último  $T_u$  seja menor que o esforço de torção nominal resistente  $T_n$  conforme Equação (76) e os banzo tracionado pela flexão é verificado conforme (77). Para impedir o esmagamento das bielas antes do escoamento do aço, é usado o esforço cortante equivalente  $V_{u,eq}$ , considerando uma interação quadrática entre corte e torção conforme Equação (78). Este deve ser menor que o limite superior de  $0.25f'_c b_w z$  para evitar esmagamento das bielas inclinadas (73). Já que a MCFT não considera uma colaboração do concreto tracionado na resistência à torção, basta apenas calcular os parâmetros  $\varepsilon_s$  e  $\theta$  conforme demonstrado anteriormente. Simplificadaamente pode-se também considerar  $\theta$  igual a  $45^\circ$ . (COLLINS e MITCHELL, 1991)

$$T_n = \frac{2A_o A_t f_{yt}}{s} \times cot\theta \quad (76)$$

$$\frac{M_u}{z} + \frac{0.45T_u p_h}{2A_o} \times cot\theta < f_{yd} \times A_{s,inf} \quad (77)$$

$$V_{u,eq} = \sqrt{V_u^2 + \left(\frac{0.9T_u p_h}{2A_o}\right)^2} < 0.25 \times f'_c \times b_w \times z \quad (78)$$

### 3.2.3 Momento Fletor e Interação

O momento fletor é considerado de modo similar à NBR 6118/2014, verificando, no domínio 3 de ruptura, se  $M_u$  é inferior ao valor nominal  $M_n$ , dado pela Equação (79). Novamente, o braço de alavanca, pode ser considerado o maior dentre 0.9d e 0.72h.

$$M_n = z \times f_{yd} A_{s,inf} = 0.9d \times f_{yd} A_{s,inf} \text{ ou } 0.72h \times f_{yd} A_{s,inf} \quad (79)$$

A interação entre os esforços de flexão, cortante e torção na MCFT é presente não apenas nas verificações da treliça, mas no próprio cálculo dos parâmetros  $\beta$  e  $\theta$ , a partir da utilização da deformação longitudinal. É necessário notar, no entanto, que as simplificações na MCFT adotadas pelas normas da CSA e AASHTO foram baseadas em uma viga padrão, o que pode levar a diferentes níveis de conservadorismo dependendo do elemento analisado. O deslocamento do concreto raramente é observado em seções com cobrimentos menores e leva a tensões de cisalhamento devido à torção maiores do que observado experimentalmente. O limite de cisalhamento para evitar o esmagamento das bielas também é deveras conservador para deformações longitudinais do aço abaixo de 2‰. (RAHAL, 2006)

O esmagamento das **bielas** já é verificado na interação entre torção e cortante pela Equação (78). Os **tirantes** são verificados de maneira similar ao modelo anterior, por superposição linear conforme Equações (80) e (81). A interação nos **banzos** é considerada de modo diferente ao do modelo anterior, considerando na Equação (72) uma interação quadrática da sollicitação longitudinal devido à torção, o que resulta nas Equações (82) e (83). (COLLINS e MITCHELL, 1991) Conforme notado por ONSONGO (2007), em seções com armação assimétrica, a verificação do banzo superior pode ser crítica e o momento fletor, até um certo nível, alivia a tração, levando a um aumento da capacidade resistente da seção. A consideração da compressão concomitante entre torção e flexão não é feita para seções sólidas, existindo um tópico específico para analisar vigas de seção vazada.

$$\frac{T_u}{f_{ywd} \times A_o \times \cot \theta} + A_{sv} < A_{sw}/s \quad (80)$$

$$A_{sv} = \max(V_u - V_c, 0) / (f_{ywd} \times z \times \cot \theta) \quad (81)$$

$$\frac{M_u}{z} + \left( \left( \frac{0.45 T_u p_h}{2 A_o} \right)^2 + (V_u - 0.5 \times V_s)^2 \right) \times \cot \theta < f_{yd} \times A_{s,inf} \quad (82)$$

$$-\frac{M_u}{z} + \left( \left( \frac{0.45 T_u p_h}{2 A_o} \right)^2 + (V_u - 0.5 \times V_s)^2 \right) \times \cot \theta < f_{yd} \times A_{s,sup} \quad (83)$$

## 4 MÉTODO PROPOSTO

A presente seção descreve o método proposto para automatizar a utilização completa dos modelos normativos, com uma abordagem de otimização multidimensional.

### 4.1 ESFORÇOS RESISTENTES COMO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Seja uma viga de concreto armado solicitada por um momento torçor  $T$ , um momento fletor  $M$  e um esforço cortante  $V$ , relacionados conforme Figura 4, onde  $r$  é o multiplicador de esforços (variável adimensional, contida entre 0 e 1 e indicadora da magnitude das solicitações) e  $F_{max}$  é o esforço resistente máximo  $F$ , se aplicado isoladamente. Obtém-se então  $T$ ,  $M$  e  $V$  pelas Equações (84), (85) e (86). Para obter o trio de esforços resistentes máximos para um grau de interação ( $\alpha_r$  e  $\beta_r$ ), deve-se maximizar o raio  $r$ , o que significa maximizar os esforços solicitantes até encontrar os esforços resistentes máximos. Assim, surge o problema de otimização restrita mostrado no Problema 1, onde cada restrição de desigualdade da forma  $S$  (solicitação)  $\leq$  Resistência ( $R$ ) representa uma prescrição normativa, em função dos parâmetros e variáveis mecânicos e geométricos da seção da viga analisada.

$$M = M_{max} r \sin \beta_r \quad (84)$$

$$T = T_{max} r \cos \beta_r \sin \alpha_r \quad (85)$$

$$V = V_{max} r \cos \beta_r \cos \alpha_r \quad (86)$$

<b>Maximize</b>	$r = f(r, \alpha_r, \beta_r)$
$r \in \mathbb{R} \mid \alpha_r, \beta_r \in [0, \frac{\pi}{2}]$	
<b>Sujeito a:</b>	$S(r, \alpha_r, \beta_r) \leq R(r, \alpha_r, \beta_r)$

Problema 1

Daí, resolve-se o problema com um algoritmo de *Sequential Quadratic Programming* (SQP) disponível no software comercial MATLAB (2021).

### 4.2 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO PARA AS PRESCRIÇÕES NORMATIVAS

Esta seção descreve, passo a passo, a formulação do problema de otimização equivalente às prescrições de cada uma das normas abordadas neste trabalho.

#### 4.2.1 NBR 6118/2014

Para um determinado par  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  que relaciona a proporção entre os esforços:

1) Seja uma viga com os seguintes parâmetros relevantes:

a. Propriedades mecânicas do aço longitudinal e transversal:  $f_{yd}, f_{ywd}$

- b. Propriedades mecânicas do concreto:  $f_{cd} = f_{ck}$
- c. Propriedades geométricas da seção transversal:  $b_w, h, d, c_1$
- d. Detalhamento das armaduras longitudinal e transversal  $A_{s,inf}, A_{s,sup}, A_{sw}, s$

2) Calculam-se os parâmetros auxiliares:

- a. Resistência à tração média do concreto

$$f_{ct,m} = \begin{cases} 0.3 \times f_{ck}^{2/3}, & \text{se } f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \\ 2.12 \times \ln(1 + 0.11f_{ck}), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (87)$$

- b. Resistência à tração característica inferior do concreto

$$f_{ctk,inf} = 0.7f_{ct,m} \quad (88)$$

- c. Coeficiente de redução da resistência à tração no tirante  $\alpha_{v2}$ , - Equação (24)
- d. Área  $A_c$ , inércia bruta  $I_c$  e perímetro da seção transversal  $u$
- e. Espessura mínima ( $h_{e,min}$ ) e máxima ( $h_{e,max}$ ) das Equações (40) e (41)

3) Calculam-se os esforços resistentes máximos em atuação isolada  $V_{max}$ ,  $T_{max}$  e  $M_{max}$ , correspondentes respectivamente  $\alpha V_{Rd2}$  (25),  $T_{Rd2}$  (53) e  $M_{Rd}$  (55), considerando os valores máximos permitidos para os parâmetros

4) Define-se a função objetivo a ser maximizada: o multiplicador de esforços

$$f(r, \alpha, \beta, h_e, \theta) = r \quad (89)$$

5) Por consequência são definidos:

- a. Os esforços solicitantes  $M_{Sd}$ ,  $T_{Sd}$  e  $V_{Sd}$  conforme Equações (84), (85) e (86)
- b. A resistência à compressão do concreto num nó de encontro entre biela, tirante e banzo  $f_{cd1-2}$  conforme Equação (64)
- c. O perímetro da linha média ( $u_e$ ) e a área envolvida pela linha média da parede do tubo equivalente ( $A_e$ ) conforme Equações (42) e (43)

6) Definem-se as restrições nas variáveis de otimização (domínio)

$$30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ \quad (90)$$

$$h_{e,min} \leq h_e \leq h_{e,max} \quad (91)$$

7) Definem-se as demais restrições em função das variáveis de otimização:

- a.  $T_{Sd} < T_{Rd2}, T_{Rd3}, T_{Rd4}$  conforme (47), (51) e (53)
- b.  $V_{Sd} < V_{Rd2}, V_{Rd3}$  conforme (25) e (34)
- c. Verificações de flexão e interação nos banzos conforme (59) e (60)
- d. Verificação da interação nas bielas e tirantes conforme (56) e (57)
- e. Verificação da compressão concomitante entre torção e flexão (65)

- 8) É feita a maximização da função objetivo sujeita às restrições, conforme os parâmetros e variáveis e com os esforços escalados de acordo com os esforços resistentes máximos isolados, resultando no problema de otimização abaixo (e no algoritmo implementado no MATLAB *Otim\_R\_NBR* presente no Anexo 01).

<b>Dados:</b>	
$f_{yd}, f_{ywd}, f_{cd}, b_w, h, c_1, A_{s,inf}, A_{s,sup}, A_{sw}, s$	
<b>Considerando:</b>	
$V_{Rd2} = 0.54 \times \alpha_{v2} \times f_{cd} \times b_w \times d \times \sin^2 \theta \times (\cot \theta + \cot \alpha)$	
$V_{Rd3} = V_{sw} + V_c = \frac{A_v f_{yt} 0.9d}{s} \times \cot \theta + 0.6 \times f_{ct} \times b_w \times d$	
$h_{e,min} = \begin{cases} \min\left(\frac{A_c}{u}, b_w - 2c_1\right), & \text{se } \frac{A_c}{u} < 2c_1 \\ 2c_1, & \text{caso contrário} \end{cases}$	
$h_{e,max} = \begin{cases} h_{e,min}, & \text{se } \frac{A_c}{u} < 2c_1 \\ \frac{A_c}{u}, & \text{otherwise} \end{cases}$	
$T_{Rd2} = 0.5 \times \alpha_{v2} \times f_{cd} \times A_e \times h_e \times \sin 2\theta$	
$T_{Rd3} = A_{sw} \times f_{ywd} \times A_e \times \cot \theta / s$	
$T_{Rd4} = 4 \times A_s \times f_{yd} \times A_e \times \frac{\tan \theta}{ue}$	
$\sigma_{cmax} = \frac{\sigma_{cmed}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{cmed}}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$	
$\bar{f}_{cd12} = \lambda f_{cd1} + (1 - \lambda) f_{cd2}, \text{ onde } \lambda = \cos \gamma \text{ e } \gamma = \arctg\left(\frac{T_{Sd}/T_{max}}{M_{Sd}/M_{max}}\right)$	
$A_{sv} = \max(V_{Sd} - V_c, 0) / (f_{ywd} \times z \times \cot \theta)$	
<b>Maximize</b>	$f(r, \alpha_r, \beta_r, h_e, \theta) = r$
$r, h_e, \theta \in \mathbb{R}$ $\alpha_r, \beta_r \in [0, \frac{\pi}{2}]$	$M_{Sd} = M_{max} r \sin \beta_r; T_{Sd} = T_{max} r \cos \beta_r \sin \alpha_r; V_{Sd} = V_{max} r \cos \beta_r \cos \alpha_r$
<b>Sujeito a:</b>	$30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
	$h_{e,min} \leq h_e \leq h_{e,max}$
	$T_{Sd} < T_{Rd2}, T_{Rd3}, T_{Rd4}$
	$V_{Sd} < V_{Rd2}, V_{Rd3}$
	$-\frac{M_{Sd}}{0.9d} + (0.5V_{Sd} + T_{Sd} \times u_e / 4A_e) \cot \theta < f_{yd} \times A_{s, superior}$
	$\frac{M_{Sd}}{0.9d} + (0.5V_{Sd} + T_{Sd} \times u_e / 4A_e) \cot \theta < f_{yd} \times A_{s inferior}$
	$\frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} + \frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} < 1$
	$\sigma_{cmax} < f_{cd1-2}$
	$\frac{T_{Sd}}{f_{ywd} \times A_e \times \cot \theta} + A_{sv} < A_{sw}/s$

Problema 2

#### 4.2.2 AASHTO LRFD BRIDGE DESIGN SPECIFICATIONS 2014

Para um determinado par  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  que relaciona a proporção entre os esforços:

- 1) Seja uma viga com os seguintes parâmetros relevantes:
  - a. Propriedades mecânicas do aço:  $f_y, f_{yw}, E_s (\cong 210GPa)$
  - b. Propriedades mecânicas do concreto:  $f'_c$
  - c. Propriedades geométricas da seção transversal:  $b_w, h, d, c_2$
  - d. Detalhamento das armaduras longitudinal e transversal  $A_{s,inf}, A_{s,sup}, A_{sw}, s$
  - e. Diâmetro máximo de agregado graúdo  $a_g$  (considera-se uma redução linear no valor efetivo deste para concretos com  $f'_c$  entre 60MPa e 70MPa)
- 2) Calculam-se os parâmetros auxiliares:
  - a. Área envolvida pelos estribos  $A_{oh}$ , perímetro dos estribos  $p_h$
  - b. Área envolvida pela linha média  $A_o$ , perímetro da linha média  $p_o$  do tubo de paredes finas equivalente, considerados 85% de  $A_{oh}$  e 90% de  $p_h$
  - c. Altura do braço de alavanca  $z$ , considerado o máximo entre 90% da altura útil  $d$  e 72% da altura da seção  $h$
  - d. Espaçamento efetivo das fissuras diagonais  $s_{xe}$  conforme (71)
- 3) Calculam-se os esforços resistentes máximos em atuação isolada  $V_{max}, T_{max}$  e  $M_{max}$ , correspondentes ao limite superior de (68) para V e T e (55) para M.
- 4) Define-se a função objetivo a ser maximizada: o multiplicador de esforços
 
$$f(r, \alpha_{\square}, \beta_{\square}) = \square \tag{92}$$
- 5) Por consequência são definidos:
  - a. Os esforços solicitantes  $M_u, T_u$  e  $V_u$  conforme Equações (84), (85) e (86)
  - b. O esforço cortante equivalente  $V_{u,eq}$  conforme Equação (78)
  - c. A deformação longitudinal  $\epsilon_s$  (Equação (69)) inclinação das bielas  $\theta$  (Equação (74) e o fator de engrenamento de agregado  $\beta$  (Equação (73))
- 6) Definem-se as restrições em função das variáveis de otimização:
  - a. Verificações de flexão e interação nos banzos conforme (82) e (83)
  - b. Restrições de corte, torção e interação na biela e tirante segundo Equações (78) e (80)
- 7) É feita a maximização da função objetivo sujeita às restrições, conforme os parâmetros e variáveis e com os esforços escalados de acordo com os esforços

resistentes máximos isolados, resultando no problema de otimização abaixo (e no algoritmo implementado no MATLAB *Otim\_R\_AASHTO* presente no Anexo 02).

<b>Dados:</b>	
$f_{yd}, f_{ywd}, f_{cd}, b_w, h, c_2, A_{s,inf}, A_{s,sup}, A_{sw}, s, a_g$	
<b>Considerando:</b>	
$A_o = 0.85A_{oh}$ e $p_o = 0.9p_h$	
$A_{sv,min} = 0.083 \times \sqrt{f'_c} \times b_w \times s / f_{ywd}$	
$s_x = \begin{cases} z, & \text{se } A_{sw} \geq A_{sv,min} \\ 0.3m, & \text{se } A_{sw} < A_{sv,min} \end{cases}$	
$s_{xe} = s_x \times \frac{0.035}{0.016 + a_g} > 0.85s_x$	
$V_{u,eq} = \sqrt{V_u^2 + \left(\frac{0.9T_u p_h}{2A_o}\right)^2}$	
$-4 \times 10^{-4} \leq \varepsilon_s = \frac{\frac{M_u}{z} + V_{u,eq}}{A_{s,inf} \times E_s} \leq 6 \times 10^{-3}$	
$\beta = \frac{4.8}{(1 + 750\varepsilon_s)} \times \frac{1.3}{1 + s_{xe}}$	
$\theta = 29^\circ + 3500\varepsilon_s$	
$V_c = 0.083 \times \beta \times \sqrt{f'_c} \times b_w \times z   V_s = \frac{A_{sw} f_{ywd} \cot \theta}{b_w s}$	
$A_{sv} = \max(V_u - V_c, 0) / (f_{ywd} \times z \times \cot \theta)$	
<b>Maximize</b>	$f(r, \alpha_r, \beta_r) = r$
$r \in \mathbb{R} \mid \alpha_r, \beta_r \in [0, \frac{\pi}{2}]$	$M_u = M_{max} r \sin \beta_r; T_u = T_{max} r \cos \beta_r \sin \alpha_r; V_u = V_{max} r \cos \beta_r \cos \alpha_r$
<b>Sujeito a:</b>	$\frac{T_u}{A_o f_{ywd} \cot \theta} + A_{sv} < \frac{A_v}{s}$
	$V_{u,eq} < 0.25 \times f'_c \times b_w \times z$
	$\frac{M_u}{z} + \left( \sqrt{\left(\frac{0.45T_u p_h}{2A_o}\right)^2 + (V_u - 0.5 \times V_s)^2} \right) \times \cot \theta < f_{yd} \times A_{s,inf}$
	$-\frac{M_u}{z} + \left( \sqrt{\left(\frac{0.45T_u p_h}{2A_o}\right)^2 + (V_u - 0.5 \times V_s)^2} \right) \times \cot \theta < f_{yd} \times A_{s,sup}$

Problema 3

### 4.3 PÓS-PROCESSAMENTO

A partir do ponto solução do problema de otimização e das equações acima, pode ser obtido o trio de esforços resistentes máximo para cada par  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  de interação. Esses resultados são então divididos pelo valor máximo encontrado para cada esforço (normalização). Para cada viga, varia-se  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , em intervalos de  $6^\circ$ , encontrando uma quantidade de pontos suficiente para plotar, via interpolação, uma superfície suave de interação. Para isso, utiliza-se um algoritmo de plotagem disponível no programa MATLAB (2021). São plotados também os pontos dos experimentos escolhidos para comparação (com linhas tracejadas partindo da origem e cruzando a superfície de interação). Além disso, o algoritmo calcula o valor das restrições no ponto solução da otimização, indicando a que corresponde a restrição ativa através da cor mostrada em cada ponto da superfície, a saber:

- Restrição de esmagamento das bielas comprimidas - azul marinho;
- Restrição escoamento da armadura transversal - azul piscina;
- Restrição de escoamento da armadura longitudinal inferior - verde;
- Restrição de escoamento da armadura longitudinal superior - laranja;
- Restrição de resistência do banzo comprimido (apenas na NBR 6118) - vermelho.

O algoritmo de pós-processamento foi implementado no MATLAB (*Pos\_OtimR\_NBR\_AASHTO*) e está disponível no Anexo 03. Entre as vigas ensaiadas no mesmo experimento, há variações em alguns parâmetros em relação aos valores nominais. Assim, os pontos experimentais plotados de cada viga foram escalados pelos esforços resistentes máximos previstos pelas normas com base nos parâmetros de cada viga ensaiada. Esses esforços foram obtidos pelos algoritmos *MVTmax\_NBR* e *MVTmax\_AASHTO*, mostrados no Anexo 04.

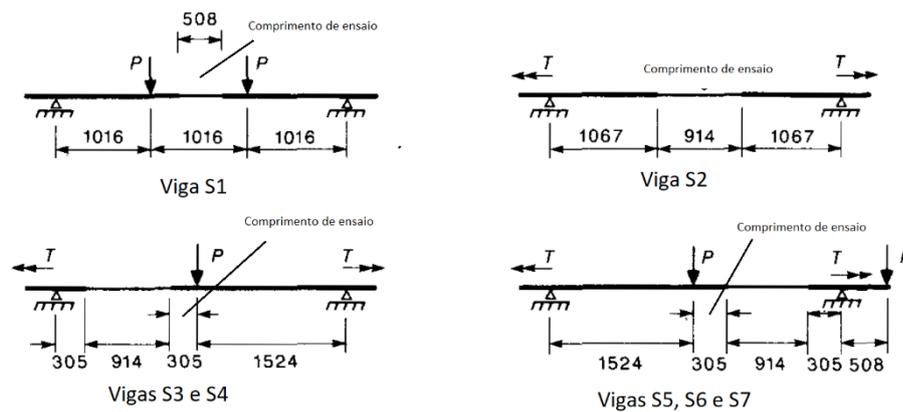
## 5 COMPARAÇÃO COM ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Esta seção compara a resistência prescrita pelas normas com resultados experimentais.

### 5.1 EXPERIMENTOS ANALISADOS

O primeiro trabalho analisado foi realizado por BADAWY, MCMULLEN e JORDAAN (1977), visando comparar o desempenho de vigas curvas e retas submetidas a uma combinação de esforços solicitantes. Foram ensaiadas até a ruptura sete vigas retas (S1 até S7) com cargas atuantes conforme Figura 35. A região de interesse do experimento (em linha fina na Figura 35), apresentava a seção transversal mostrada na Figura 36, enquanto o restante da viga continha uma armação mais pesada (a fim de forçar que a ruptura ocorresse na região de interesse). Os demais parâmetros da seção estão mostrados na Tabela 1, e os esforços de ruptura obtidos são vistos na Tabela 2.

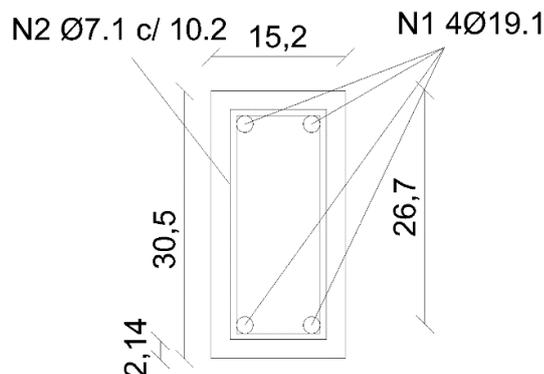
Figura 35 - Arranjo das cargas atuantes nas vigas S1 a S7



Fonte: Badawy, McMullen e Jordaan (1977).

Figura 36 - Dimensões das vigas S1 a S7 em cm (diâmetro das barras em mm)

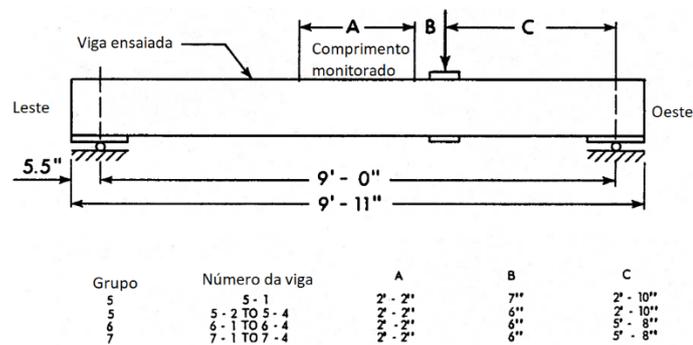
### Vigas S1 a S7



Fonte: O autor (2021)

O segundo trabalho analisado foi realizado por MCMULLEN e WARWARUK (1967), com foco na resistência à torção de seções submetidas a diversas combinações de esforços solicitantes. Foram ensaiadas 34 vigas retas compostas por 7 grupos com armações diferentes. Os 4 primeiros grupos foram ensaiados apenas na interação flexão-torção e, portanto, serão desprezados. Os grupos 5, 6 e 7, doravante chamados M5, M6 e M7, tiveram cargas atuantes conforme Figura 37 e seções transversais conforme Figura 38. Os demais parâmetros das vigas ensaiadas estão mostrados na Tabela 1. Foram feitos 4 ensaios por grupo e os resultados dos esforços de ruptura obtidos são mostrados na Tabela 2. Como a armadura longitudinal inferior e superior utilizaram aços com tensão de escoamento diferentes, optou-se por corrigir a área superior, aumentando-a na razão  $\frac{f_{yd,sup}}{f_{yd,inf}}$  e utilizando  $f_{yd} = f_{yd,inf}$  (isso preservou a taxa mecânica de armadura longitudinal).

Figura 37 - Arranjo das cargas atuantes nas vigas dos grupos M5 a M7



Fonte: Mcmullen e Warwaruk (1967).

Figura 38 - Dimensões das vigas M5, M6 e M7 em cm (diâmetro das barras em mm)



Fonte: O autor (2021).

Tabela 1 - Parâmetros das vigas dos trabalhos analisados.

Vigas	S1 a S7	M5	M6	M7
fydinf (MPa)	475	323.4	323.4	302.0
fydsup (MPa)	475	365.4	365.4	365.4
fywd (MPa)	300.3	370.25	370.25	370.25
fcd (MPa)	30	34.47	34.47	34.47
bw (cm)	15.2	15.24	15.24	15.24
h (cm)	30.5	30.48	30.48	30.48
d (cm)	26.7	26.03	26.03	25.72
c1 (mm)	38	44.75	44.75	47.63
c2 (mm)	24.95	30.16	30.16	30.16
Asinf (cm <sup>2</sup> )	5.73	5.73	5.73	10.13
Assup (cm <sup>2</sup> )	5.73	1.61*	1.61*	1.73*
Asw (cm <sup>2</sup> )	0.79	1.43	1.43	1.43
s (cm)	10.2	8.255	8.255	12.7
Ag (mm)	19	19	19	19
*Áreas corrigidas pela razão fydsup/ fydinf.				

Fonte: Adaptado de Badawy et al. (1977) e McMullen e Wawaruk (1967).

Tabela 2 - Esforços de ruptura obtidos nos trabalhos analisados.

Vigas	Mexp (kN x m)	Texp (kN x m)	Vexp (kN)	bwexp (cm)	hexp (cm)	fcexp (MPa)
S1	76.82	0.00	0.00	15.2	30.5	30
S2	0.00	13.56	0.00	15.2	30.5	30
S3	18.81	12.42	23.13	15.2	30.5	30
S4	51.51	10.73	50.71	15.2	30.5	30
S5	0.00	0.00	151.20	15.2	30.5	30
S6	0.00	8.93	93.41	15.2	30.5	30
S7	0.00	11.65	48.93	15.2	30.5	30
M5-1	7.34	14.46	3.38	15.88	30.81	39.37
M5-2	16.16	15.93	8.41	16.21	30.81	43.92
M5-3	31.41	14.69	17.21	15.24	30.81	41.78
M5-4	43.95	11.19	24.51	15.88	30.81	39.99
M6-1	7.34	14.57	8.05	15.88	30.81	40.40
M6-2	16.83	16.38	18.99	15.09	30.81	40.89
M6-3	29.83	14.91	34.12	15.88	30.81	39.30
M6-4	48.24	12.09	55.38	16.21	30.81	39.44
M7-1	6.33	12.65	6.94	15.09	30.81	41.92
M7-2	12.99	12.99	14.77	15.88	30.81	35.92
M7-3	31.07	14.91	36.07	16.21	30.81	39.30
M7-4	57.06	14.12	66.59	15.09	30.81	36.82

Fonte: Adaptado de Badawy et al. (1977) e McMullen e Wawaruk (1967).

## 5.2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

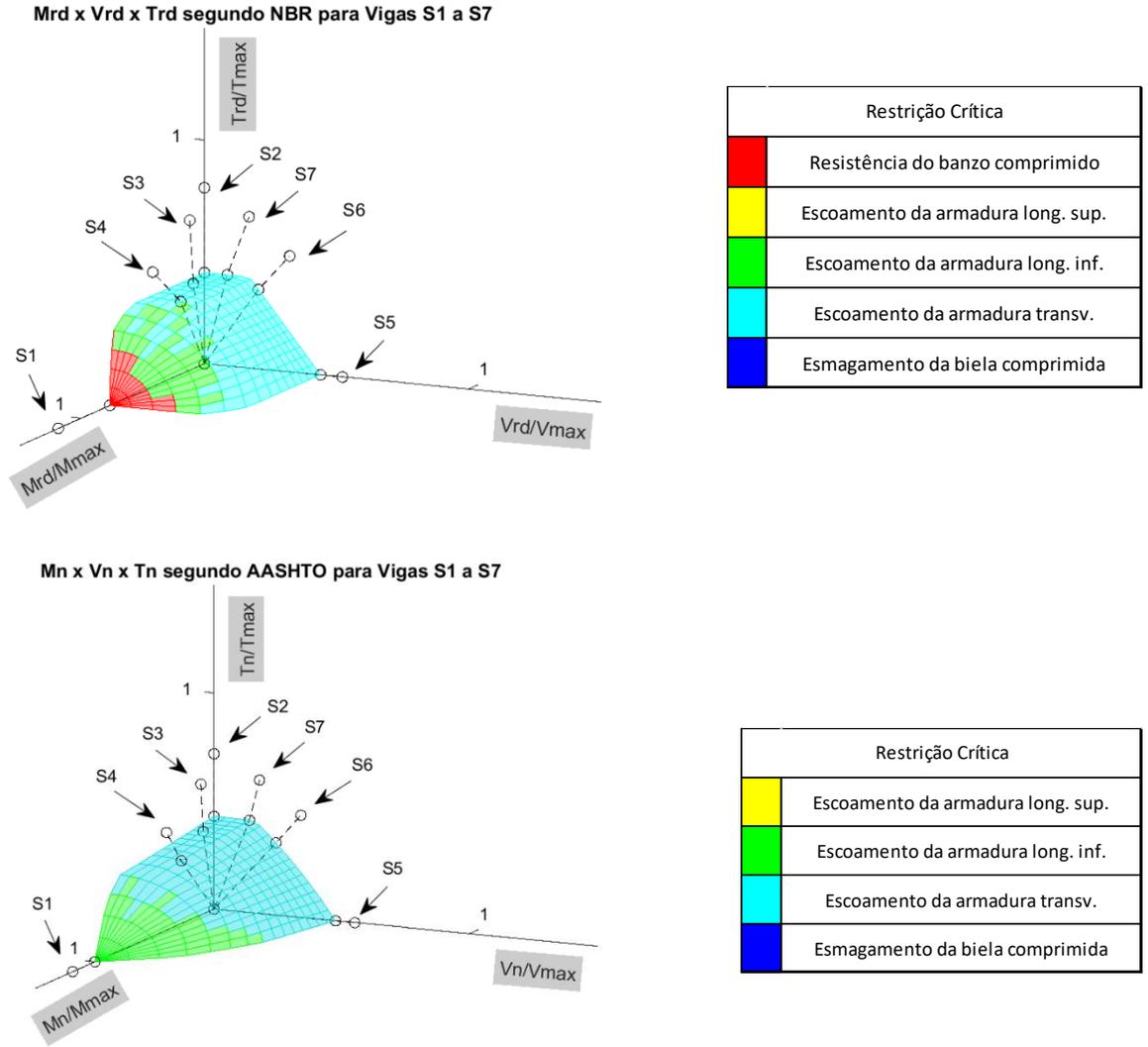
A presente seção discute especificamente os resultados obtidos pelo método para cada um dos experimentos analisados, fazendo também observações sobre as normas analisadas.

### 5.2.1 Vigas S1 a S7

Executando os algoritmos de otimização e pós-processamento aqui desenvolvidos com os parâmetros do ensaio, obtiveram-se as superfícies de interação mostradas na Figura 39 (segundo a NBR à esquerda e AASHTO à direita). O algoritmo foi bem-sucedido em obter o diagrama, permitindo visualizar diferentes níveis de interação nas vigas e mostrando uma razoável segurança dos procedimentos normativos com os valores experimentais. Para fins de validação, pode-se comparar a superfície da Figura 39 com o diagrama de interação obtido pelo RAHAL (2006) para as mesmas vigas na Figura 40. Observa-se que o formato e magnitude da superfície é similar, embora tenham sido utilizados projeções e fatores de escala diferentes dos utilizados no presente trabalho. Dada uma inconsistência encontrada na plotagem dos resultados das vigas S5, S6 e S7, estas serão omitidas no gráfico retirado de RAHAL (2006). Será utilizado para validação o gráfico com os resultados das vigas S1 a S4.

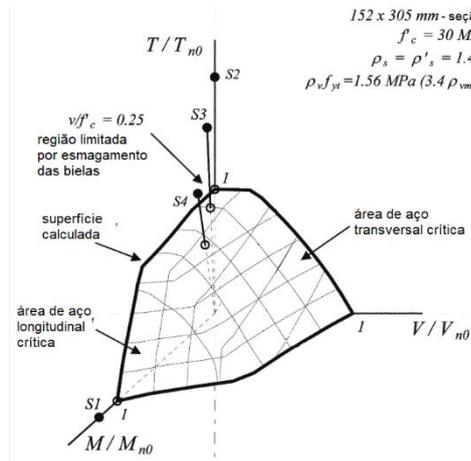
Na maior parte da superfície em ambas as normas, é observada limitação da resistência devido à compressão das bielas ou escoamento dos tirantes, com uma interação praticamente “cônica” entre os esforços (interação circular entre torção e cortante, com raios diminuindo à medida que se aumenta o momento fletor). Apenas com níveis elevados de momento (próximos do momento máximo), os banzos se tornam críticos à resistência, seja por tração no banzo inferior (AASHTO) ou pela compressão da torção e flexão no banzo superior (NBR). Essa restrição de resistência do banzo comprimido imposta pela NBR 6118/2014 gera um “corte” na superfície de interação em comparação com a superfície gerada pela AASHTO LRFD 2014.

Figura 39 - Superfície de interação NBR e AASHTO (vigas S1 a S7)



Fonte: O autor (2021).

Figura 40 - Superfície de interação AASHTO (Vigas S1 a S7)



Fonte: Rahal (2006).

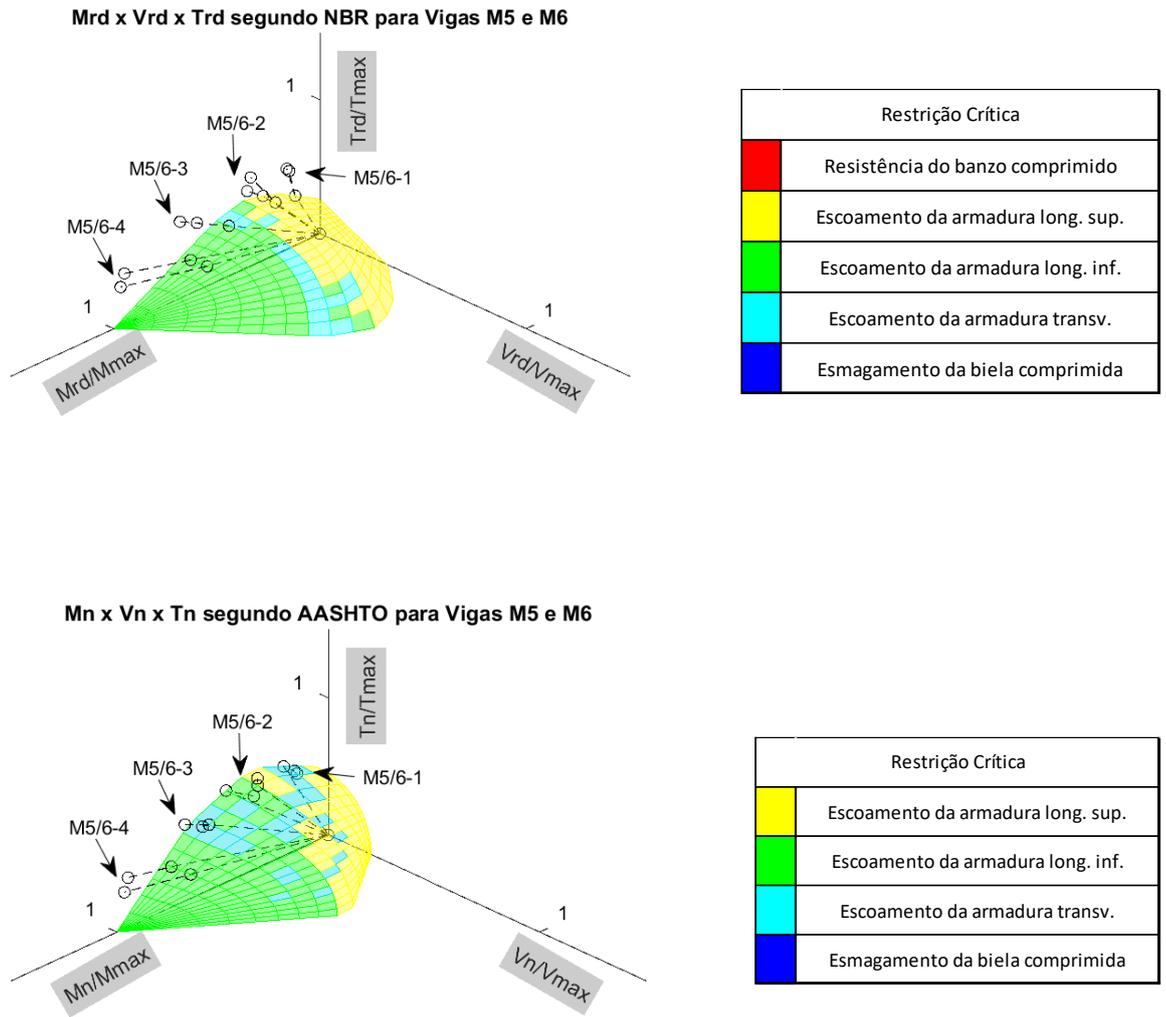
### 5.2.2 Vigas dos grupos M5 a M7

Executando os algoritmos de otimização e pós-processamento aqui desenvolvidos com os parâmetros do ensaio, obtiveram-se as superfícies de interação mostradas nas Figura 41 e Figura 42. O algoritmo foi bem-sucedido em obter o diagrama, permitindo visualizar diferentes níveis de interação nas vigas e uma razoável segurança da norma com os valores experimentais.

Nessas vigas, devido à assimetria da armadura longitudinal, foi observada uma região de interação onde o banzo superior é crítico nas duas normas, em níveis baixos de flexão. Nesta região, para pequenos incrementos de momento fletor há um aumento da resistência à torção e cortante, dado que a compressão devido à flexão alivia a tração causada pelo cisalhamento do esforço cortante e momento torçor. Esse fenômeno já havia sido observado por ONSONGO (2007), se repetindo inclusive para a interação com esforços axiais.

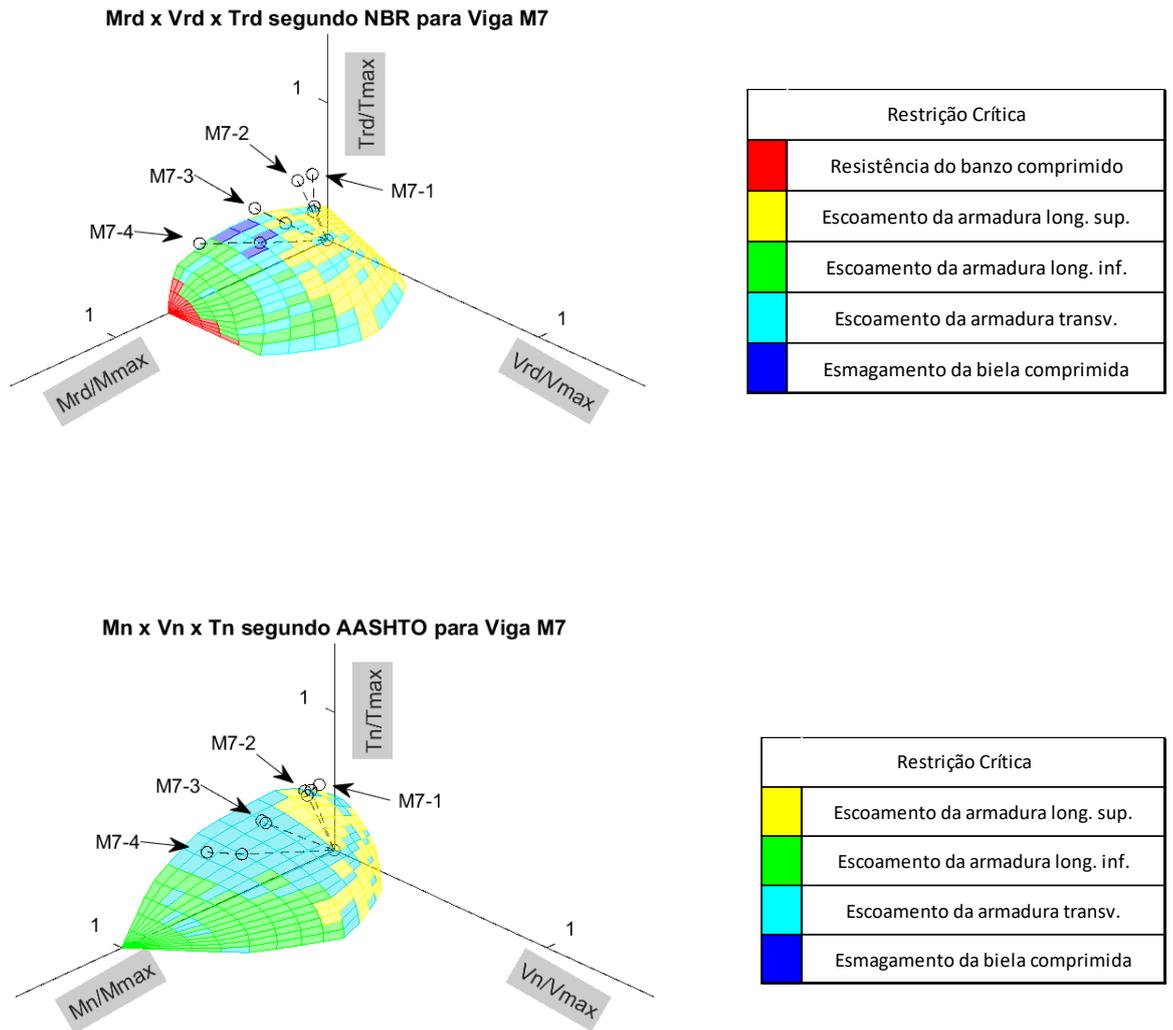
Para níveis intermediários de flexão, a resistência é limitada pelo escoamento dos tirantes, segundo a análise de ambas as normas. Nas vigas M5 e M6, com menor área de armadura longitudinal, a tração no banzo inferior se torna crítica com momentos ainda intermediários. Essa interação se aprofunda rapidamente com o aumento da flexão, provocando uma grave redução da resistência à torção e corte com a elevação do momento fletor tanto na norma brasileira quanto na americana. Nas vigas M7, providas com uma maior área de armadura longitudinal inferior, essa redução ocorre apenas com níveis elevados de flexão, sendo a resistência do banzo comprimido crítica no caso da NBR e a tração no banzo inferior crítica no caso da AASHTO. Novamente, essa restrição no banzo superior da NBR 6118/2014 interrompe o alongamento da superfície de interação na região onde a resistência é dominada pela flexão.

Figura 41 - Superfície de interação NBR e AASHTO (vigas M5 e M6)



Fonte: O autor (2021).

Figura 42 - Superfície de interação NBR e AASHTO (vigas M7)



Fonte: O autor (2021).

## 6 CONCLUSÕES

O desenvolvimento e aplicação do procedimento de otimização proposto conforme as normas NBR 6118/2014 e AASHTO LRFD 2014 para as vigas dos experimentos descritos neste trabalho permitiram concluir que:

- O procedimento proposto foi **eficaz** e **eficiente** em prever a resistência de vigas de concreto armado sob interação de esforços de flexão, cortante e torção, tendo sido, inclusive, validado com outra superfície de interação da literatura;
- O programa deixou visível ao engenheiro qual mecanismo resistente era crítico para cada nível de interação, permitindo **embasamento na tomada de decisão** do engenheiro ao modificar variáveis de dimensionamento;
- As normas analisadas apresentaram **desempenho satisfatório** em comparação com os resultados experimentais;
- Vale salientar, no entanto, que a NBR 6118/2014 apresenta uma grande quantidade de equações e relações empíricas, o que claramente dificulta a compreensão e até aplicação por parte do engenheiro;
- A AASHTO LRFD 2014, por outro lado, apresenta um procedimento geral, porém enxuto e direto. Ela possibilita uma análise não apenas dos esforços últimos, mas de todo o comportamento esforço x deformação da viga na interação.

Para **trabalhos futuros**, sugere-se:

- Desenvolvimento de uma interface gráfica e otimização do algoritmo para maior praticidade da utilização do software;
- Inclusão dos esforços axiais na interação;
- Validação dos procedimentos normativos através da aplicação do algoritmo a uma base de dados experimentais, com análise estatística dos resultados;
- Implementação do algoritmo de otimização para outros modelos de análise como o modelo de treliça com amolecimento e o modelo simplificado de combinação de tensões (SMCS), por exemplo.

## REFERÊNCIAS

- AASHTO. **AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, Seventh Edition, 2014, U.S. Customary Units: 2016 Interim Revisions**. [S.l.]: American Association of State Highway and Transportation Officials, 2015.
- ABNT. **NBR 6118 - Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**. [S.l.]: [s.n.], 2014.
- ACI-ASCE 445 JOINT COMMITTEE. **ACI-ASCE 445R-99 Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete Reported by Joint ACI-ASCE Committee 445**. [S.l.]: [s.n.], 2000. V. 1.
- \_\_\_\_\_. **ACI-ASCE 445.1R-12 Report on Torsion in Structural Concrete**. [S.l.]: [s.n.], 2012. V. 1.
- ANDRADE, R. C. De; BITTENCOURT, T. N. **Concrete beam subjected to shear and torsion: a comparison between the Brazilian Standard Code NBR 6118, ACI and AASHTO Provisions**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, 2020. v. 13, n. 1, p. 160–170.
- BADAWY, H. E. I.; MCMULLEN, A. E.; JORDAAN, I. J. **Experimental Investigation of the Collapse of Reinforced Concrete Curved Beams**. Magazine of Concrete Research, 1977. v. 29, n. 99, p. 59–69.
- BARROS, R.; GIONGO, J. S. **Shear force and torsion in reinforced concrete beam elements: theoretical analysis based on Brazilian Standard Code ABNT NBR 6118:2007**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, 2012. v. 5, n. 5, p. 576–595.
- BENTZ, E. C.; COLLINS, M. P. **Development of the 2004 Canadian Standards Association (CSA) A23.3 shear provisions for reinforced concrete**. Canadian Journal of Civil Engineering, maio. 2006. v. 33, n. 5, p. 521–534. Disponível em: <<https://cdnscepub.com/doi/abs/10.1139/L06-005>>. Acesso em: 21 abr. 2021.
- \_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_. **Updating the ACI shear design provisions**. Concrete International, 2017. v. 39, n. 9, p. 33–38. Disponível em: <<https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal.aspx?m=details&ID=51701012>>.
- \_\_\_\_\_; VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. **Simplified modified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements**. ACI Structural Journal, 2006. v. 103, n. 4, p. 614–624.
- CAVALCANTE, G. H. F. *et al.* **Comparação de diagramas de interação torção x cortante segundo a ABNT NBR 6118 : 2014 e o ACI 318-14 com ensaios experimentais**. 2018.
- CHIU, H. J. *et al.* **Behavior of reinforced concrete beams with minimum torsional reinforcement**. Engineering Structures, 2007. v. 29, n. 9, p. 2193–2205.
- COLLINS, M. P. *et al.* **A General shear design method**. ACI Structural Journal, 1996. v. 93, n. 1, p. 36–60.
- \_\_\_\_\_. *et al.* **Where is shear reinforcement required? review of research results and design procedures**. ACI Structural Journal, 2009. v. 106, n. 4, p. 556.
- \_\_\_\_\_; MITCHELL, D. **Prestressed Concrete Structures**. [S.l.]: Prentice Hall, 1991.
- GIONGO, J. S. **Dimensionamento considerando o estado limite último de elementos**

**estruturais lineares submetidos à ação de momento fletor.** 1. ed. São Carlos: EESC - Departamento de Engenharia de Estruturas, 2009.

\_\_\_\_\_. **Concreto Armado: Dimensionamento de elementos estruturais fletidos solicitados por força cortante.** 1. ed. São Carlos: EESC - Departamento de Engenharia de Estruturas, 2011.

HSU, T. T. C. **Toward A Unified Nomenclature for Reinforced-Concrete Theory.** Journal of Structural Engineering, 1 mar. 1996. v. 122, n. 3, p. 275–283. Disponível em: <<https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9445%281996%29122%3A3%28275%29>>. Acesso em: 24 maio 2021.

HSU, T. T. C.; MO, Y. L. **Unified Theory of Concrete Structures.** [S.l.]: [s.n.], 2010.

IBRAHIM, M. S. *et al.* **Effect of concrete cover on the pure torsional behavior of reinforced concrete beams.** Engineering Structures, 2020. v. 216, n. September 2019, p. 110790. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110790>>.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. **Contribution to the treatment of shear in reinforced concrete.** Stuttgart: [s.n.], 1961.

MATLAB. **Version 9.10.0.1684407 (R2021a) Update 3.** The Mathworks Inc.

MCMULLEN, A. E.; WARWARUK, J. **The Torsional Strength of Rectangular Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Loading.** Structural Engineering Report No. 2 The, University of Alberta, Department of Civil Engineering, 1967. n. 2, p. 162. Disponível em: <<https://era.library.ualberta.ca/items/5086dede-150c-43e1-8a0a-8a0a27d5605f/download/04ed74f7-789e-486d-ba8d-aa3b0ddc554b>>.

NOGUEIRA, C. L. **Anti-plane shear strength of plain concrete.** Materials Today Communications, 1 set. 2020. v. 24, p. 101051.

OBEL, W. **INTERAÇÃO TORQUE – CORTANTE : AVALIAÇÃO DA NBR-6118 – INTERAÇÃO TORQUE – CORTANTE : AVALIAÇÃO DA NBR-6118 –.** [S.l.]: Universidade Federal de Pernambuco, 2019.

ONSONGO, W. M. **Failure interaction curves for combined loading involving torsion, bending, and axial loading.** Journal of the South African Institution of Civil Engineering, 2007. v. 49, n. 1, p. 17–24.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Estruturas de concreto.** 1. ed. São Carlos: EESC - Departamento de Engenharia de Estruturas, 2003.

PROESTOS, G. T.; BENTZ, E. C.; COLLINS, M. P. **Maximum Shear Capacity of Reinforced Concrete Members.** ACI Structural Journal, 2018. v. 115, n. 5.

RAHAL, K. N. **Evaluation of AASHTO-LRFD general procedure for torsion and combined loading.** ACI Structural Journal, 2006. v. 103, n. 5, p. 683–692.

\_\_\_\_\_. **Combined torsion and bending in reinforced and prestressed concrete beams using simplified method for combined stress-resultants.** ACI Structural Journal, 2008. v. 105, n. 3, p. 375–376.

\_\_\_\_\_. **A unified approach to shear and torsion in reinforced concrete.** Structural Engineering and Mechanics, 2021. v. 77, n. 5, p. 691–703.

\_\_\_\_\_; COLLINS, M. P. **Analysis of sections subjected to combined shear and torsion - a theoretical model.** ACI Materials Journal, 1995a. v. 92, n. 4, p. 459–469.

\_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_. **Effect of thickness of concrete cover on shear-torsion interaction - an experimental investigation.** ACI Structural Journal, 1995b. v. 92, n. 3, p. 334–342.

\_\_\_\_\_; \_\_\_\_\_. **Background to the general method of shear design in the 1994 CSA-A23.3 standard.** Canadian Journal of Civil Engineering, 1999. v. 26, n. 6, p. 827–839.

\_\_\_\_\_; SOLANKI, H.; KHOE, C. **Longitudinal steel stresses in beams due to shear and torsion in AASHTO-LRFD specifications.** ACI Structural Journal, 2006. v. 103, n. 4, p. 630–631.

RUSCH, H. **Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete.** ACI Journal Proceedings, 1960. v. 57, n. 1, p. 1–28.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. **Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected To Shear,** 1986. Journal of the American Concrete Institute.

WIGHT, J. K. **Reinforced Concrete - Mechanics and Design.** 7<sup>a</sup> ed. [S.l.]: Pearson, 2016.

XIE, L. *et al.* **Influence of axial stress on shear response of reinforced concrete elements.** ACI Structural Journal, 2012. v. 109, n. 5, p. 745–746.

YOON, Y. S.; COOK, W. D.; MITCHELL, D. **Minimum shear reinforcement in normal, medium, and high-strength concrete beams.** ACI Structural Journal, 1996. v. 93, n. 5, p. 576–584.

YU, Q.; BAŽANT, Z. P. **Can Stirrups Suppress Size Effect on Shear Strength of RC Beams?** Journal of Structural Engineering, 2011. v. 137, n. 5, p. 607–617.

## ANEXO A – ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO PARA NBR 6118/2014

```
function [Rsol,vsol,Tsol,thetasol,hesol,Msol,indrestri]=OtimR_NBR(bw,h,d,c1,...
    Asinf,Assup,Asw,s,alpha,raio,betaraio,fc,fy,fyw)
```

```
%Cálculo do cortante, fletor e torcor resistentes para vigas retangulares
%Concreto armado via NBR 6118/2014 com otimizacao
%Trelica de Mörsch p/ o corte e espacial p/ a torcao
%Seção plana para flexão, além da interação entre esses

%alpha,raio (ângulo da proporção entre V e T) em °
%betaraio (ângulo da proporção entre M e VT) em °
%c1 em mm (distância do eixo da armadura longitudinal à face)
%Asinf, Assup e Asw em cm2
%bw, h, d e s em cm
%fc, fy e fyw em MPa
%Serão utilizados valores "nominais" de resistencia
%Serão utilizados valores unitários para os coeficientes de segurança
%Esses valores devem ser coerentes com os preconizados nos ensaios
%Internamente todas as unidades são transformadas para MN e m
```

### %% Transformação de unidades

```
alpha,raio=alpha,raio/180*pi; %transforma alpha,raio em radianos
betaraio=betaraio/180*pi; %transforma betaraio em radianos
c1=c1/1000; %distancia da face ao eixo da armadura longitudinal em m
Asinf=Asinf/10000;
Assup=Assup/10000;
Asw=Asw/10000;
bw=bw/100;
h=h/100;
s=s/100;
d=d/100;
alpha=90; %ângulo do estribo, geralmente 90 graus
alpha=alpha*pi/180; %ângulo do estribo em radianos
```

### %% Propriedades mecânicas

```
%concreto
if fc<=50
    fctm=0.3*fc^(2/3);
else
    fctm=(2.12*log(1+0.11*fc));
end
fctkinf=0.7*fctm; %resistência à tração característica inferior
fcd=fc;
fctd=fctkinf;
alphav2=1-fcd/250; %redução da resistência em estado biaxial de tensões
%aco
fyd=fy;
fywd=fyw;
```

### %% Propriedades geométricas

```

Ac=bw*h; %area da secao transversal m2
Ic=bw*h^3/12; %#ok<NASGU> %momento de inercia da secao transversal m4
u=2*bw+2*h; %perimetro da secao m

heref=Ac/u; %espessura ficticia de referencia da secao m
if heref>=2*c1
    hemax=heref;
    hemin=2*c1;
else
    hemin=min([heref,bw-2*c1]);
    hemax=hemin;
end

Aswmin=0.2*fctm/fywd*bw*s; %m2 area de aco transversal minima
if Asw<Aswmin
    cont=questdlg('Asw < Aswmin -> Continuar?');
    if strcmp(cont,'No')
        error('Execucao interrompida. Verificar Asw.');
```

%% Corte, momento e torção simultaneos

```

%FUNCAO OBJETIVO
function y=Raio(x)
    %funcao a ser "minimizada" cujas componentes sao
    R=x(1); theta=x(2); he=x(3); %#ok<NASGU> %raio, angulo biela e espessura ficticia
    y=-R;
end

%valores maximos para fatores de escala
Vmax=0.54*alphav2*fcd*bw*d*(cot(pi/2)+cot(pi/4))*sin(pi/4)^2;
Tmax=0.5*alphav2*fcd*(bw-hemin)*(h-hemin)*hemax*sin(2*pi/4);
Mmax=0.9*d*fyd*Asinf;

A=[];b=[];Aeq=[];beq=[]; %restricoes lineares
lb=[0;pi/6;hemin]; up=[+inf;pi/4;hemax]; %restricoes nas variaveis
Ri=0.01; thetai=pi/5; hei=0.01;
x0=[Ri,thetai,hei]; %ponto inicial de otimizacao

%FUNCAO DAS RESTRICOES NAO LINEARES
function [c,ceq]=Nlc(x)
    %funcao das restricoes nao lineares
    R=x(1); theta=x(2); he=x(3); %raio, angulo biela e espessura ficticia
    VSd=R*cos(betaraio)*cos(alpharaio)*Vmax; %cortante solicitante escalado
    TSd=R*cos(betaraio)*sin(alpharaio)*Tmax; %torcor solicitante escalado
    MSd=R*sin(betaraio)*Mmax; %momento solicitante escalado
    FRdinf=Asinf*fyd; %forca resistente inf de tracao longit em MN
    FRdsup=Assup*fyd; %forca resistente sup de tracao longit em MN
    z=min(0.9*d,0.8*h);
    a=(d-z)*2;
```

```

%CORTE
VRd2=0.54*alphav2*fcd*bw*d*...
    (cot(alpha)+cot(theta))*sin(theta)^2; %resistencia da biela em MPa x m2 = MN
c(1)=VSd-VRd2; %VRd<VRd2

Vc0=0.6*fctd*bw*d;
Vc1=max([min([Vc0*(VSd-VRd2)/(Vc0-VRd2),Vc0]),0]);
Vc=Vc1; %concreto no tirante considerando flexotracao com linha neutra na secao em MPa
x m2 = MN
Vsw=fywd*Asw*0.9*d/s*sin(alpha)*(cot(alpha)+cot(theta)); %estribo no tirante em MPa x
m2 = MN
VRd3=Vc+Vsw; %resistencia do tirante em MN
c(2)=VSd-VRd3; %VRd<VRd3

c(3)=MSd/z + VSd*cot(theta)/2 - FRdinf; %VRd<VRd4

%TORÇÃO
if heref>=2*c1
    Ae=(bw-he)*(h-he); %area envolvida pelo fluxo de cisalhamento m2
    ue=u-4*he; %perimetro da linha media da secao vazada em m
else
    Ae=(bw-2*c1)*(h-2*c1);
    ue=u-8*c1;
end

TRd2=0.5*alphav2*fcd*Ae*he*sin(2*theta); %torcor resistente da biela em MNm
c(4)=TSd-TRd2; %TRd<TRd2

TRd3=Ae*Asw*fywd/s*cot(theta); %torcor resistente da armadura transversal em MNm
c(5)=TSd-TRd3; %TRd<TRd3

TRd4=(Assup+Asinf)*fyd*2*Ae*tan(theta)/ue; %torcor resistente da armadura longitudinal
em MNm
c(6)=TSd-TRd4; %TRd<TRd4

%INTERAÇÃO
%biela comprimida
c(7)=VSd/VRd2+TSd/TRd2-1;

%tirante tracionado
c(8)=max([ (VSd-Vc),0])/fywd/0.9/d/cot(theta)+...
    TSd/fywd/Ae/cot(theta)-Asw/s;

%banzo inferior
c(9)=cot(theta)*(TSd*ue/2/2/Ae + VSd/2) + MSd/z - FRdinf;

%banzo superior (alivio da armadura de torcao)
c(10)=cot(theta)*(TSd*ue/2/2/Ae + VSd/2) - MSd/z - FRdsup;

%banzo superior (compressao concomitante)
gamma=atan((TSd/Tmax)/(MSd/Mmax));
lambda=cos(gamma);
fcd1=0.85*fcd; %sem alphav2
fcd2=0.6*fcd; %sem alphav2
fcd12=lambda*fcd1+(1-lambda)*fcd2; %resistencia a compressao do concreto no modelo
biela tirante em MPa

```

```

Talt=TSd/2/Ae/he; %cisalhamento devido a torcao MPa
Sigmacmed=MSd/z/bw/a; %tensao media de compressao devido a flexao MPa
Sigmacmax=Sigmacmed/2+sqrt((Sigmacmed/2)^2+Talt^2); %tensao de principal de compressao
MPa

c(11)=Sigmacmax-fcd12;

ceq=[]; %restricoes nao lineares de igualdade
end

%OPCOES
op=optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp','Display','off','MaxFunctionEvaluations',1000);
%CHAMADA DO OTIMIZADOR
xso1=fmincon(@Raio,x0,A,b,Aeq,beq,lb,up,@Nlc,op);
[rest,~]=Nlc(xso1);
restri=rest([7:11]); %#ok<NBRAK>
[~,indrestri]=max(restri);
%OUTPUTS DA FUNCAO
Rso1=xso1(1);
Mso1=Rso1*sin(betaraio)*Mmax; %momento solicitante em MNm
Vso1=Rso1*cos(betaraio)*cos(alpharaio)*Vmax; %corte solicitante em MN
Tso1=Rso1*cos(betaraio)*sin(alpharaio)*Tmax; %torcor solicitante em MNm
thetaso1=xso1(2); %angulo biela em radianos
thetaso1=thetaso1*180/pi; %transforma theta em graus
heso1=xso1(3); %espessura ficticia em m

end

```

*Published with MATLAB® R2021a*

## ANEXO B - ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO PARA AASHTO LRFD 2014

```
function [Rsol,vsol,Tsol,thetasol,defssol,Msol,indrestri]=OtimR_AASHTO(bw,h,d,c2,...
    Asinf,Assup,Asw,s,alphaarao,betaraio,fc,fy,fyw,dagregmax)
```

```
%Cálculo do cortante, fletor e torcor resistentes para vigas retangulares
%Concreto armado via AASHTO LRFD 2014 com otimizacao
%Trelica + MCFT p/ o corte e p/ a torcao
%Seção plana para flexão, além da interação entre esses
```

```
%Referencias: AASHTO LRFD 2014 e Collins/Mitchell
%alphaarao (angulo da proporção entre V e T) em °
%betaraio (angulo da proporção entre M e VT) em °
%c2 (distância do eixo do estribo à face) em mm
%dagregmax (diâmetro máximo de agregado graúdo) em mm
%Asinf, Assup e Asw em cm2
%bw, h, d e s em cm
%fc, fy e fyw em MPa
%Serão utilizados valores "nominais" de resistencia
%Serão utilizados valores unitários para os coeficientes de segurança
%Esses valores devem ser coerentes com os preconizados nos ensaios
%Internamente todas as unidades são transformadas para MN e m
```

### %% Transformação de unidades

```
alphaarao=alphaarao/180*pi; %transforma alphaarao) em radianos
betaraio=betaraio/180*pi; %transforma betaraio em radianos
c2=c2/1000; %distancia da face ao eixo do estribo em m
dagregmax=dagregmax/1000; %diametro maximo do agregado graudo em m
Asinf=Asinf/10000;
Assup=Assup/10000;
Asw=Asw/10000;
bw=bw/100;
h=h/100;
d=d/100;
s=s/100;
alpha=90; %angulo do estribo, geralmente 90 graus ou pi/2 radianos
alpha=alpha*pi/180; %#ok<NASGU> %angulo do estribo em radianos
```

### %% Propriedades mecânicas

```
fc=fc; %#ok<ASGSL>

%aco
Es=210e+3; %modulo elastico do aco MPa
fyd=fy;
fywd=fyw;
```

### %% Propriedades geométricas

```

Aoh=(bw-2*c2)*(h-2*c2);
ph=2*(bw-2*c2) + 2*(h-2*c2);

Ao=0.85*Aoh;
po=0.9*ph;

z=max(0.9*d,0.72*h); %braco de alavanca conforme AASHTO em m

if fc<60
    dagreg=dagregmax; %diametro do agregado afetando aggregate interlock m
else
    if fc <70 %necessidade de corrigir o aggregate interlock, pois é possível que o agregado
    quebre antes do concreto
        dagreg=(70-fc)/10*dagregmax;
    else
        dagreg=0;
    end
end

Aswmin=0.083*bw*s/fyw*fc^0.5;
if Asw>Aswmin
    sx=0.3; %espacamento das fissuras diagonais m para vigas com estribos m
else
    sx=z; %espacamento das fissuras diagonais m para vigas sem estribos m
end

sxe=sx*0.035/(dagreg+0.016); %espacamento efetivo das fissuras m
sxe=max([min(sxe,2),0.30,0.85*sx]); %limites para espacamento efetivo das fissuras m

%valores maximos para fatores de escala
Vmax=0.25*fc*bw*z;
Tmax=Vmax*2*Ao/po;
Mmax=z*fyd*Asinf;

```

%%Corte, fletor e torção simultaneos

```

%FUNCAO OBJETIVO
function y=Raio(x)
    %funcao a ser "minimizada"
    R=x(1); defsusa=x(2); %ok<NASGU> %raio, def longit usada e ângulo das bielas
    y=-R;
end

A=[];b=[];Aeq=[];beq=[]; %restricoes lineares
lb=[0,-4e-4]; up=[+inf,6e-3]; %restricoes nas variaveis
Ri=0.01; defsusai=0.01;
x0=[Ri, defsusai]; %ponto inicial de otimizacao

%FUNCAO DAS RESTRICOES NAO LINEARES
function [c,ceq]=Nlc(x)
    %funcao das restricoes nao lineares
    R=x(1); defsusa=x(2);
    VSd=R*cos(betaraio)*cos(alpharaio)*Vmax; %cortante solicitante escalado
    TSd=R*cos(betaraio)*sin(alpharaio)*Tmax; %torcor solicitante escalado
    MSd=R*sin(betaraio)*Mmax; %momento solicitante escalado
    theta=(29+3500*defsusa)/180*pi; %angulo bielas radianos

```

```

VSdeq=(VSd^2+(TSd*po/2/Ao)^2)^0.5; %corte solicitante equivalente

defs=(VSdeq+MSd/z)/Es/Asinf; %deformacao longitudinal aco
c(1)=defs-defsusa; %defs<defsusa

beta=4.8/(1+750*defsusa)*1.3/(1+sxe); %parametro de engrenamento de agregado

Vc=0.083*beta*bw*z*fc^0.5; %contrib do concreto no tirante MN

c(2)=VSdeq-0.25*fc*bw*z; %esmagamento da biela

Vsv=max([(VSd-Vc),0])/fywd/z/cot(theta); %parte do estribo solicitada pelo corte
exclusivamente MN
c(3)=Vsv + TSd/fywd/Ao/cot(theta) - Asw/s; %tirante tracionado

FRdinf=Asinf*fyd; %forca resistente de tracao longitudinal em MN
c(4)= MSd/z + ((VSd-0.5*Vsv)^2+(0.45*TSd*po/2/Ao)^2)^0.5*cot(theta) - FRdinf; %banzo
longitudinal inferior

FRdsup=Assup*fyd; %forca resistente de tracao longitudinal em MN
c(5)= -MSd/z + ((VSd-0.5*Vsv)^2+...
(0.45*TSd*po/2/Ao)^2)^0.5*cot(theta) - FRdsup; %banzo longitudinal superior

ceq=[]; %restricoes nao lineares de igualdade
end

%OPCOES
op=optimoptions('fmincon','Algorithm','sqp','Display','off','MaxFunctionEvaluations',1000);
%CHAMADA DO OTIMIZADOR
xso1=fmincon(@Raio,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@Nlc,op); %em MN e radianos
[rest,~]=Nlc(xso1);
restri=rest([2:5]); %#ok<NBRAK>
[~,indrestri]=max(restri);
Rso1=xso1(1); %em MN
defssol=xso1(2); %deformacao longitudinal do aco
thetasol=(29+3500*defssol); %theta em graus
Vso1=Rso1*cos(betaraio)*cos(alpharaio)*vmax; %corte solicitante em MN
Tso1=Rso1*cos(betaraio)*sin(alpharaio)*Tmax; %torcor solicitante em MNm
Mso1=Rso1*sin(betaraio)*Mmax; %momento solicitante em MNm

end

```

## ANEXO C – ALGORITMO DE PÓS-PROCESSAMENTO

```
%Pos processamento para o calculo do momento, cortante e torcor resistentes
%Vigas retangulares de concreto armado via NBR 6118/2014 e AASHTO LRFD 2014
%Superficies via otimizacao e interpolacao variando alpharaio e betaraio
%Valores experimentais da literatura plotados com setas a partir da origem
%Graficos projetados obliquamente no plano yz para melhor visualizacao
```

```
clc
clear
```

```
load ('colormapNBR.mat');
load ('colormapAASHTO.mat');
```

%%Superficie para a vigas S1 a S4 e B5 a B7 do badawy

```
ndivTV=15;
ndivM=15;
dalpharaio=90/ndivTV;
dbetaraio=90/ndivM;
V_Bd_NBR=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);
T_Bd_NBR=V_Bd_NBR;
M_Bd_NBR=V_Bd_NBR;
V_Bd_AASHTO=V_Bd_NBR;
T_Bd_AASHTO=T_Bd_NBR;
M_Bd_AASHTO=M_Bd_NBR;
rest_Bd_NBR=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);
rest_Bd_AASHTO=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);

l=1;
betaraio=0.001;
while betaraio<=91
    alpharaio=0.001;
    k=1;
    while alpharaio<=91
        [~,V_Bd_NBR(k,l),T_Bd_NBR(k,l),~,~,M_Bd_NBR(k,l),rest_Bd_NBR(k,l)]=OtimR_NBR(15.2,30.5,26.7,38
,5.671,5.671,0.792,10.2,alpharaio,betaraio,30,475,300);

        [~,V_Bd_AASHTO(k,l),T_Bd_AASHTO(k,l),~,~,M_Bd_AASHTO(k,l),rest_Bd_AASHTO(k,l)]=OtimR_AASHTO(15
.2,30.5,26.7,24.95,5.671,5.671,0.792,10.2,alpharaio,betaraio,30,475,300,19);
        k=k+1;
        alpharaio=alpharaio+dalpharaio;
    end
    l=l+1;
    betaraio=betaraio+dbetaraio;
end
```

%%Superficie para as vigas M5 e M6 do mcmullen

```
ndivTV=15;
ndivM=15;
dalpharaio=90/ndivTV;
dbetaraio=90/ndivM;
```

```

V_M5M6_NBR=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);
T_M5M6_NBR=V_M5M6_NBR;
M_M5M6_NBR=V_M5M6_NBR;
V_M5M6_AASHTO=V_M5M6_NBR;
T_M5M6_AASHTO=T_M5M6_NBR;
M_M5M6_AASHTO=M_M5M6_NBR;
rest_M5M6_NBR=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);
rest_M5M6_AASHTO=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);

betarao=0.001;
l=1;
while betarao<=91
    alpharao=0.001;
    k=1;
    while alpharao<=91
        [~,V_M5M6_NBR(k,l),T_M5M6_NBR(k,l),~,~,M_M5M6_NBR(k,l),rest_M5M6_NBR(k,l)]=OtimR_NBR(15.24,30.81,26.03,44.75,5.73,1.43/323.4*365.4,1.43,8.255,alpharao,betarao,34.47,323.4,370.25);

        [~,V_M5M6_AASHTO(k,l),T_M5M6_AASHTO(k,l),~,~,M_M5M6_AASHTO(k,l),rest_M5M6_AASHTO(k,l)]=OtimR_AASHTO(15.24,30.81,26.03,30.16,5.73,1.43/323.4*365.4,1.43,8.255,alpharao,betarao,34.47,323.4,370.25,19);
        k=k+1;
        alpharao=alpharao+dalpharao;
    end
    l=l+1;
    betarao=betarao+dbetarao;
end

```

### %Superficie para as vigas M7 do mcmullen

```

ndivTV=15;
ndivM=15;
dalpharao=90/ndivTV;
dbetarao=90/ndivM;
V_M7_NBR=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);
T_M7_NBR=V_M7_NBR;
M_M7_NBR=V_M7_NBR;
V_M7_AASHTO=V_M7_NBR;
T_M7_AASHTO=T_M7_NBR;
M_M7_AASHTO=M_M7_NBR;
rest_M7_NBR=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);
rest_M7_AASHTO=zeros(ndivTV+1,ndivM+1);
betarao=0.001; l=1;
while betarao<=91
    alpharao=0.001;
    k=1;
    while alpharao<=91
        [~,V_M7_NBR(k,l),T_M7_NBR(k,l),~,~,M_M7_NBR(k,l),rest_M7_NBR(k,l)]=OtimR_NBR(15.24,30.81,25.72,47.63,10.13,1.43/302*365,1.43,12.7,alpharao,betarao,34.47,302.0,370.25);
        [~,V_M7_AASHTO(k,l),T_M7_AASHTO(k,l),~,~,M_M7_AASHTO(k,l),rest_M7_AASHTO(k,l)]=OtimR_AASHTO(15.24,30.81,25.72,30.16,10.13,1.43/302*365,1.43,12.7,alpharao,betarao,34.47,302.0,370.25,19);
        k=k+1;
        alpharao=alpharao+dalpharao;
    end
    l=l+1;
end

```

```

betaraio=betaraio+dbetaraio;
end

```

```

%%Plot S1 a S4 e B5 a B7 nbr

```

```

f1=figure;
hold on
grid off
haxis=gca;

haxis.XRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.XRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.SecondCrossoverValue = 0;
xlab=xlabel('Mrd/Mmax');
ylab=ylabel('Vrd/Vmax');
zlab=zlabel('Trd/Tmax');
xlab.Rotation=30;
xlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
xlab.Position=[0.800,-0.034,-0.120];
ylab.Rotation=-5;
ylab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
ylab.Position=[-0.150,1.053,-0.128];
zlab.Rotation=90;
zlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
zlab.Position=[-0.18,0.091,1.215];
xlim([0 1.5]);
ylim([0 1.5]);
zlim([0 1.5]);
xticks(1);
xticklabels([]);
tx=text(0.727089688042732,-0.228341471747299,-0.024299246182473,'1');
tx.EdgeColor='none';
yticks(1);
yticklabels([]);
ty=text(0.074688706827267,1.075197487310891,0.120317723229524,'1');
ty.EdgeColor='none';
zticks(1);
zticklabels([]);
tz=text(0.276195185628161,0.00368598521116,1.088138980063659,'1');
tz.EdgeColor='none';

[Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_NBR(15.2,30.5,26.7,38,5.671,5.671,0.792,10.2,30,475,300);
mesh(M_Bd_NBR./Mmax,V_Bd_NBR./Vmax,T_Bd_NBR./Tmax,rest_Bd_NBR,'FaceColor','flat','FaceAlpha',
0.4');
colormap (haxis,NBR);
caxis([1 5]);

%valores experimentais
Mexp_Bd=[ 0.07682
          0.00000
          0.01881
          0.05151
          0.00000

```

```

0.00000
0.00000 ];

vexp_Bd=[ 0.0000001
          0.00000
          0.02313
          0.05071
          0.15120
          0.09341
          0.04893 ];

Texp_Bd=[ 0.00000
          0.01356
          0.01242
          0.01073
          0.00000
          0.00893
          0.01165 ];

x0=zeros(size(Mexp_Bd,1),1);
y0=x0;
z0=x0;

keq_Bd_NBR=x0;
l_eq_Bd_NBR=x0;

M_Bd_NBR=M_Bd_NBR./Mmax;
V_Bd_NBR=V_Bd_NBR./Vmax;
T_Bd_NBR=T_Bd_NBR./Tmax;

Mexp_Bd=Mexp_Bd./Mmax;
Vexp_Bd=Vexp_Bd./Vmax;
Texp_Bd=Texp_Bd./Tmax;

Rexp_Bd=(Mexp_Bd.^2+Vexp_Bd.^2+Texp_Bd.^2).^0.5;
Betaexp_Bd=abs(asin(Mexp_Bd./Rexp_Bd));
Alphaexp_Bd=abs(atan(Texp_Bd./Vexp_Bd));
Betaexp_Bd=Betaexp_Bd./pi.*180;
Alphaexp_Bd=Alphaexp_Bd./pi.*180;

R_Bd_NBR=(M_Bd_NBR.^2+V_Bd_NBR.^2+T_Bd_NBR.^2).^0.5;
Beta_Bd_NBR=abs(asin(M_Bd_NBR./R_Bd_NBR));
Alpha_Bd_NBR=abs(atan(T_Bd_NBR./V_Bd_NBR));
Beta_Bd_NBR=Beta_Bd_NBR./pi.*180;
Alpha_Bd_NBR=Alpha_Bd_NBR./pi.*180;

for i=1:size(Mexp_Bd,1)
    [~, keq_Bd_NBR(i)] = min(abs(Alpha_Bd_NBR(:,1)-Alphaexp_Bd(i)));
    [~, l_eq_Bd_NBR(i)] = min(abs(Beta_Bd_NBR(keq_Bd_NBR(i),:)-Betaexp_Bd(i)));
end

idxeq_Bd_NBR=sub2ind([ndivM+1,ndivTV+1],keq_Bd_NBR,l_eq_Bd_NBR);

Meq_Bd_NBR=M_Bd_NBR(idxeq_Bd_NBR);
Veq_Bd_NBR=V_Bd_NBR(idxeq_Bd_NBR);

```

```

Teq_Bd_NBR=T_Bd_NBR(idxeq_Bd_NBR);

Mplotmatrix=[x0';Meq_Bd_NBR';Mexp_Bd'];
Vplotmatrix=[y0';Veq_Bd_NBR';Vexp_Bd'];
Tplotmatrix=[z0';Teq_Bd_NBR';Texp_Bd'];
plot3(Mplotmatrix,Vplotmatrix,Tplotmatrix,'--ok');

annotation(f1,'textarrow',[0.616071428571429 0.578571428571428],...
    [0.365666666666667 0.314285714285714],'String',{'S1'});
annotation(f1,'textarrow',[0.441071428571429 0.398214285714286],...
    [0.680952380952381 0.633333333333334],'String',{'S2'});
annotation(f1,'textarrow',[0.501785714285714 0.458928571428571],...
    [0.633333333333334 0.585714285714287],'String',{'S3'});
annotation(f1,'textarrow',[0.566071428571429 0.516071428571428],...
    [0.561904761904762 0.519047619047621],'String',{'S4'});
annotation(f1,'textarrow',[0.142857142857143 0.164285714285712],...
    [0.304761904761905 0.2404761904762],'String',{'B5'});
annotation(f1,'textarrow',[0.239285714285714 0.294642857142856],...
    [0.542857142857143 0.492857142857146],'String',{'B6'});
annotation(f1,'textarrow',[0.296428571428571 0.339285714285713],...
    [0.619047619047619 0.576190476190479],'String',{'B7'});

title('Mrd x Vrd x Trd segundo NBR para Vigas S1 a S4 e B5 a B7')

view(115,15)
hold off
print('01S1S7NBR','-dpng');
savefig('01S1S7NBR');

```

%%Plot S1 a S4 e B5 a B7 aashto

```

f2=figure;
hold on
grid off
haxis=gca;

haxis.XRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.XRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.SecondCrossoverValue = 0;
xlab=xlabel('Mn/Mmax');
ylab=ylabel('Vn/Vmax');
zlab=zlabel('Tn/Tmax');
xlab.Rotation=30;
xlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
xlab.Position=[0.800,-0.034,-0.120];
ylab.Rotation=-5;
ylab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
ylab.Position=[-0.150,1.053,-0.128];
zlab.Rotation=90;
zlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
zlab.Position=[-0.18,0.091,1.215];

```

```

xlim([0 1.5]);
ylim([0 1.5]);
zlim([0 1.5]);
xticks(1);
xticklabels([]);
tx=text(0.727089688042732,-0.228341471747299,-0.024299246182473,'1');
tx.EdgeColor='none';
yticks(1);
yticklabels([]);
ty=text(0.074688706827267,1.075197487310891,0.120317723229524,'1');
ty.EdgeColor='none';
zticks(1);
zticklabels([]);
tz=text(0.276195185628161,0.00368598521116,1.088138980063659,'1');
tz.EdgeColor='none';

[Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_AASHTO(15.2,30.5,26.7,24.95,5.671,5.671,0.792,10.2,30,475,300,19);
mesh(M_Bd_AASHTO./Mmax,V_Bd_AASHTO./Vmax,T_Bd_AASHTO./Tmax,rest_Bd_AASHTO,'FaceColor','flat','
FaceAlpha','0.4');
colormap (haxis,AASHTO);
caxis([1 4]);

%valores experimentais
Mexp_Bd=[ 0.07682
          0.00000
          0.01881
          0.05151
          0.00000
          0.00000
          0.00000 ];

Vexp_Bd=[ 0.0000001
          0.00000
          0.02313
          0.05071
          0.15120
          0.09341
          0.04893 ];

Texp_Bd=[ 0.00000
          0.01356
          0.01242
          0.01073
          0.00000
          0.00893
          0.01165 ];

x0=zeros(size(Mexp_Bd,1),1);
y0=x0;
z0=x0;

keq_Bd_AASHTO=x0;
lq_Bd_AASHTO=x0;

M_Bd_AASHTO=M_Bd_AASHTO./Mmax;
V_Bd_AASHTO=V_Bd_AASHTO./Vmax;

```

```

T_Bd_AASHTO=T_Bd_AASHTO./Tmax;

Mexp_Bd=Mexp_Bd./Mmax;
Vexp_Bd=Vexp_Bd./Vmax;
Texp_Bd=Texp_Bd./Tmax;

Rexp_Bd=(Mexp_Bd.^2+vexp_Bd.^2+Texp_Bd.^2).^0.5;
Betaexp_Bd=abs(asin(Mexp_Bd./Rexp_Bd));
Alphaexp_Bd=abs(atan(Texp_Bd./vexp_Bd));
Betaexp_Bd=Betaexp_Bd./pi.*180;
Alphaexp_Bd=Alphaexp_Bd./pi.*180;

R_Bd_AASHTO=(M_Bd_AASHTO.^2+V_Bd_AASHTO.^2+T_Bd_AASHTO.^2).^0.5;
Beta_Bd_AASHTO=abs(asin(M_Bd_AASHTO./R_Bd_AASHTO));
Alpha_Bd_AASHTO=abs(atan(T_Bd_AASHTO./V_Bd_AASHTO));
Beta_Bd_AASHTO=Beta_Bd_AASHTO./pi.*180;
Alpha_Bd_AASHTO=Alpha_Bd_AASHTO./pi.*180;

for i=1:size(Mexp_Bd,1)
    [~, keq_Bd_AASHTO(i)] = min(abs(Alpha_Bd_AASHTO(:,1)-Alphaexp_Bd(i)));
    [~, leq_Bd_AASHTO(i)] = min(abs(Beta_Bd_AASHTO(keq_Bd_AASHTO(i),:)-Betaexp_Bd(i)));
end

idxeq_Bd_AASHTO=sub2ind([ndivM+1,ndivTV+1],keq_Bd_AASHTO,leq_Bd_AASHTO);

Meq_Bd_AASHTO=M_Bd_AASHTO(idxeq_Bd_AASHTO);
Veq_Bd_AASHTO=V_Bd_AASHTO(idxeq_Bd_AASHTO);
Teq_Bd_AASHTO=T_Bd_AASHTO(idxeq_Bd_AASHTO);

Mplotmatrix=[x0';Meq_Bd_AASHTO';Mexp_Bd'];
Vplotmatrix=[y0';Veq_Bd_AASHTO';Vexp_Bd'];
Tplotmatrix=[z0';Teq_Bd_AASHTO';Texp_Bd'];

plot3(Mplotmatrix,Vplotmatrix,Tplotmatrix,'--ok');

annotation(f2,'textarrow',[0.616071428571429 0.578571428571428],...
    [0.365666666666667 0.314285714285714],'string',{'S1'});
annotation(f2,'textarrow',[0.441071428571429 0.398214285714286],...
    [0.680952380952381 0.633333333333334],'string',{'S2'});
annotation(f2,'textarrow',[0.501785714285714 0.458928571428571],...
    [0.633333333333334 0.585714285714287],'string',{'S3'});
annotation(f2,'textarrow',[0.566071428571429 0.516071428571428],...
    [0.561904761904762 0.519047619047621],'string',{'S4'});
annotation(f2,'textarrow',[0.142857142857143 0.164285714285712],...
    [0.304761904761905 0.2404761904762],'string',{'B5'});
annotation(f2,'textarrow',[0.239285714285714 0.294642857142856],...
    [0.542857142857143 0.492857142857146],'string',{'B6'});
annotation(f2,'textarrow',[0.296428571428571 0.339285714285713],...
    [0.619047619047619 0.576190476190479],'string',{'B7'});

title('Mn x Vn x Tn segundo AASHTO para Vigas S1 a S4 e B5 a B7')

view(115,15)
hold off
print('02S1S7AASHTO','-dpng');
savefig('02S1S7AASHTO');

```

%%Plot M5M6 nbr

```

f3=figure;
hold on
grid off
haxis=gca;

haxis.XRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.XRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.SecondCrossoverValue = 0;
xlab=xlabel('Mrd/Mmax');
ylab=ylabel('Vrd/Vmax');
zlab=zlabel('Trd/Tmax');
xlab.Rotation=30;
xlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
xlab.Position=[0.862127279138949,-0.028937938252358,-0.167510028759338];
ylab.Rotation=-30;
ylab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
ylab.Position=[-0.00326087988055,0.906260859249883,-0.128000014588068];
zlab.Rotation=90;
zlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
zlab.Position=[-0.182702692680152,0.063840785580712,1.236115584023608];
xlim([0 1.5]);
ylim([0 1.5]);
zlim([0 1.5]);
xticks(1);
xticklabels([]);
tx=text(0.88090688984391,-0.270176443859167,-0.103482631069632,'1');
tx.EdgeColor='none';
yticks(1);
yticklabels([]);
ty=text(-0.010865059625264,1.071165459988791,0.183664424051813,'1');
ty.EdgeColor='none';
zticks(1);
zticklabels([]);
tz=text(0.144818487196108,-0.021712452351331,1.198995708702512,'1');
tz.EdgeColor='none';

bwexp= [15.88
        16.21
        15.24
        15.88
        15.88
        15.09
        15.88
        16.21];

fcexp= [39.37
        43.92
        41.78
        39.99
        40.40
        40.89
        39.30

```

```

39.44];

Mmaxexp=zeros(8,1);
Vmaxexp=Mmaxexp;
Tmaxexp=Mmaxexp;
for i=1:8

[Mmaxexp(i),Vmaxexp(i),Tmaxexp(i)]=MVTmax_NBR(bwexp(i),30.81,26.03,44.75,5.73,1.43/323.4*365.4
,1.43,8.255,fcexp(i),323.4,370.25);
end

[Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_NBR(15.24,30.81,26.03,44.75,5.73,1.43/323.4*365.4,1.43,8.255,34.47,323
.4,370.25);
mesh(M_M5M6_NBR./Mmax,V_M5M6_NBR./Vmax,T_M5M6_NBR./Tmax,rest_M5M6_NBR,'FaceColor','flat','Face
Alpha','0.4');
colormap (haxis,NBR);
caxis([1 5]);

%valores experimentais
Mexp_M5M6=[ 0.007343978
            0.016156752
            0.03140963
            0.043950885
            0.007343978
            0.016834658
            0.02982785
            0.048244288 ];

Vexp_M5M6=[ 0.003380632
            0.008407098
            0.017214534
            0.024509582
            0.008051242
            0.018993814
            0.034117694
            0.055380090 ];

Texp_M5M6=[ 0.014461988
            0.015930783
            0.014687956
            0.011185444
            0.014574972
            0.016382721
            0.014913925
            0.012089318 ];

x0=zeros(size(Mexp_M5M6,1),1);
y0=x0;
z0=x0;

keq_M5M6_NBR=x0;
l_eq_M5M6_NBR=x0;

M_M5M6_NBR=M_M5M6_NBR./Mmax;
V_M5M6_NBR=V_M5M6_NBR./Vmax;
T_M5M6_NBR=T_M5M6_NBR./Tmax;

```

```

Mexp_M5M6=Mexp_M5M6./Mmaxexp;
Vexp_M5M6=Vexp_M5M6./Vmaxexp;
Texp_M5M6=Texp_M5M6./Tmaxexp;

Rexp_M5M6=(Mexp_M5M6.^2+Vexp_M5M6.^2+Texp_M5M6.^2).^0.5;
Betaexp_M5M6=abs(asin(Mexp_M5M6./Rexp_M5M6));
Alphaexp_M5M6=abs(atan(Texp_M5M6./Vexp_M5M6));
Betaexp_M5M6=Betaexp_M5M6./pi.*180;
Alphaexp_M5M6=Alphaexp_M5M6./pi.*180;

R_M5M6_NBR=(M_M5M6_NBR.^2+V_M5M6_NBR.^2+T_M5M6_NBR.^2).^0.5;
Beta_M5M6_NBR=abs(asin(M_M5M6_NBR./R_M5M6_NBR));
Alpha_M5M6_NBR=abs(atan(T_M5M6_NBR./V_M5M6_NBR));
Beta_M5M6_NBR=Beta_M5M6_NBR./pi.*180;
Alpha_M5M6_NBR=Alpha_M5M6_NBR./pi.*180;

for i=1:size(Mexp_M5M6,1)
    [~, keq_M5M6_NBR(i)] = min(abs(Alpha_M5M6_NBR(:,1)-Alphaexp_M5M6(i)));
    [~, leq_M5M6_NBR(i)] = min(abs(Beta_M5M6_NBR(keq_M5M6_NBR(i),:)-Betaexp_M5M6(i)));
end

idxeq_M5M6_NBR=sub2ind([ndivM+1,ndivTV+1],keq_M5M6_NBR,leq_M5M6_NBR);

Meq_M5M6_NBR=M_M5M6_NBR(idxeq_M5M6_NBR);
Veq_M5M6_NBR=V_M5M6_NBR(idxeq_M5M6_NBR);
Teq_M5M6_NBR=T_M5M6_NBR(idxeq_M5M6_NBR);

Mplotmatrix=[x0';Meq_M5M6_NBR';Mexp_M5M6'];
Vplotmatrix=[y0';Veq_M5M6_NBR';Vexp_M5M6'];
Tplotmatrix=[z0';Teq_M5M6_NBR';Texp_M5M6'];

plot3(Mplotmatrix,Vplotmatrix,Tplotmatrix,'--ok');

annotation(f3,'textarrow',[0.55 0.499999999999999],...
    [0.683333333333333 0.690476190476191],'string',{'M5/6-1'});
annotation(f3,'textarrow',[0.408928571428571 0.410714285714286],...
    [0.754761904761905 0.685714285714286],'string',{'M5/6-2'});
annotation(f3,'textarrow',[0.310714285714286 0.330357142857143],...
    [0.678571428571429 0.621428571428571],'string',{'M5/6-3'});
annotation(f3,'textarrow',[0.233928571428571 0.258928571428571],...
    [0.580952380952381 0.519047619047619],'string',{'M5/6-4'});

title('Mrd x Vrd x Trd segundo NBR para Vigas M5 e M6')

view(135,45)
hold off
print('03M5M6NBR','-dpng');
savefig('03M5M6NBR');

```

```
%%Plot M5M6 aashto
```

```
f4=figure;
hold on
grid off
haxis=gca;

haxis.XRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.XRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.SecondCrossoverValue = 0;
xlab=xlabel('Mn/Mmax');
ylab=ylabel('Vn/Vmax');
zlab=zlabel('Tn/Tmax');
xlab.Rotation=30;
xlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
xlab.Position=[0.862127279138949,-0.028937938252358,-0.167510028759338];
ylab.Rotation=-30;
ylab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
ylab.Position=[-0.00326087988055,0.906260859249883,-0.128000014588068];
zlab.Rotation=90;
zlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
zlab.Position=[-0.182702692680152,0.063840785580712,1.236115584023608];
xlim([0 1.5]);
ylim([0 1.5]);
zlim([0 1.5]);
xticks(1);
xticklabels([]);
tx=text(0.88090688984391,-0.270176443859167,-0.103482631069632,'1');
tx.EdgeColor='none';
yticks(1);
yticklabels([]);
ty=text(-0.010865059625264,1.071165459988791,0.183664424051813,'1');
ty.EdgeColor='none';
zticks(1);
zticklabels([]);
tz=text(0.144818487196108,-0.021712452351331,1.198995708702512,'1');
tz.EdgeColor='none';

Mmaxexp=zeros(8,1);
Vmaxexp=Mmaxexp;
Tmaxexp=Mmaxexp;
for i=1:8

[Mmaxexp(i),Vmaxexp(i),Tmaxexp(i)]=MVTmax_AASHTO(bwexp(i),30.81,26.03,30.16,5.73,1.43/323.4*36
5.4,1.43,8.255,fcexp(i),323.4,370.25,19);
end

[Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_AASHTO(15.24,30.81,26.03,30.16,5.73,1.43/323.4*365.4,1.43,8.255,34.47,
323.4,370.25,19);
mesh(M_M5M6_AASHTO./Mmax,V_M5M6_AASHTO./Vmax,T_M5M6_AASHTO./Tmax,rest_M5M6_AASHTO,'FaceColor',
'flat','FaceAlpha','0.4');
colormap(haxis,AASHTO);
caxis([1 4]);
```

```

%valores experimentais
Mexp_M5M6=[ 0.007343978
            0.016156752
            0.03140963
            0.043950885
            0.007343978
            0.016834658
            0.02982785
            0.048244288 ];

Vexp_M5M6=[ 0.003380632
            0.008407098
            0.017214534
            0.024509582
            0.008051242
            0.018993814
            0.034117694
            0.055380090 ];

Texp_M5M6=[ 0.014461988
            0.015930783
            0.014687956
            0.011185444
            0.014574972
            0.016382721
            0.014913925
            0.012089318 ];

x0=zeros(size(Mexp_M5M6,1),1);
y0=x0;
z0=x0;

keq_M5M6_AASHTO=x0;
l_eq_M5M6_AASHTO=x0;

M_M5M6_AASHTO=M_M5M6_AASHTO./Mmax;
V_M5M6_AASHTO=V_M5M6_AASHTO./Vmax;
T_M5M6_AASHTO=T_M5M6_AASHTO./Tmax;

Mexp_M5M6=Mexp_M5M6./Mmaxexp;
Vexp_M5M6=Vexp_M5M6./Vmaxexp;
Texp_M5M6=Texp_M5M6./Tmaxexp;

Rexp_M5M6=(Mexp_M5M6.^2+Vexp_M5M6.^2+Texp_M5M6.^2).^0.5;
Betaexp_M5M6=abs(asin(Mexp_M5M6./Rexp_M5M6));
Alphaexp_M5M6=abs(atan(Texp_M5M6./Vexp_M5M6));
Betaexp_M5M6=Betaexp_M5M6./pi.*180;
Alphaexp_M5M6=Alphaexp_M5M6./pi.*180;

R_M5M6_AASHTO=(M_M5M6_AASHTO.^2+V_M5M6_AASHTO.^2+T_M5M6_AASHTO.^2).^0.5;
Beta_M5M6_AASHTO=abs(asin(M_M5M6_AASHTO./R_M5M6_AASHTO));
Alpha_M5M6_AASHTO=abs(atan(T_M5M6_AASHTO./V_M5M6_AASHTO));
Beta_M5M6_AASHTO=Beta_M5M6_AASHTO./pi.*180;
Alpha_M5M6_AASHTO=Alpha_M5M6_AASHTO./pi.*180;

for i=1:size(Mexp_M5M6,1)

```

```

[~, keq_M5M6_AASHTO(i)] = min(abs(Alpha_M5M6_AASHTO(:,1)-Alphaexp_M5M6(i)));
[~, lreq_M5M6_AASHTO(i)] = min(abs(Beta_M5M6_AASHTO(keq_M5M6_AASHTO(i),:)-
Betaexp_M5M6(i)));
end

idxeq_M5M6_AASHTO=sub2ind([ndivM+1,ndivTV+1],keq_M5M6_AASHTO,lreq_M5M6_AASHTO);

Meq_M5M6_AASHTO=M_M5M6_AASHTO(idxeq_M5M6_AASHTO);
Veq_M5M6_AASHTO=V_M5M6_AASHTO(idxeq_M5M6_AASHTO);
Teq_M5M6_AASHTO=T_M5M6_AASHTO(idxeq_M5M6_AASHTO);

Mplotmatrix=[x0';Meq_M5M6_AASHTO';Mexp_M5M6'];
Vplotmatrix=[y0';Veq_M5M6_AASHTO';Vexp_M5M6'];
Tplotmatrix=[z0';Teq_M5M6_AASHTO';Texp_M5M6'];

plot3(Mplotmatrix,Vplotmatrix,Tplotmatrix,'--ok');

annotation(f4,'textarrow',[0.55 0.499999999999999],...
[0.683333333333333 0.690476190476191],'string',{'M5/6-1'});
annotation(f4,'textarrow',[0.408928571428571 0.410714285714286],...
[0.754761904761905 0.685714285714286],'string',{'M5/6-2'});
annotation(f4,'textarrow',[0.310714285714286 0.330357142857143],...
[0.678571428571429 0.621428571428571],'string',{'M5/6-3'});
annotation(f4,'textarrow',[0.233928571428571 0.258928571428571],...
[0.580952380952381 0.519047619047619],'string',{'M5/6-4'});

title('Mn x Vn x Tn segundo AASHTO para vigas M5 e M6')

view(135,45)
hold off
print('04M5M6AASHTO','-dpng');
savefig('04M5M6AASHTO');

```

### %%Plot M7 nbr

```

f5=figure;
hold on
grid off
haxis=gca;

haxis.XRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.XRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.SecondCrossoverValue = 0;
xlab=xlabel('Mrd/Mmax');
ylab=ylabel('Vrd/Vmax');
zlab=zlabel('Trd/Tmax');
xlab.Rotation=30;
xlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
xlab.Position=[0.862127279138949,-0.028937938252358,-0.167510028759338];
ylab.Rotation=-30;
ylab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
ylab.Position=[-0.00326087988055,0.906260859249883,-0.128000014588068];
zlab.Rotation=90;
zlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];

```

```

zlab.Position=[-0.182702692680152,0.063840785580712,1.236115584023608];
xlim([0 1.5]);
ylim([0 1.5]);
zlim([0 1.5]);
xticks(1);
xticklabels([]);
tx=text(0.88090688984391,-0.270176443859167,-0.103482631069632,'1');
tx.EdgeColor='none';
yticks(1);
yticklabels([]);
ty=text(-0.010865059625264,1.071165459988791,0.183664424051813,'1');
ty.EdgeColor='none';
zticks(1);
zticklabels([]);
tz=text(0.144818487196108,-0.021712452351331,1.198995708702512,'1');
tz.EdgeColor='none';

bwexp= [15.09
        15.88
        16.21
        15.09];

fcexp= [41.92
        35.92
        39.30
        36.82];

Mmaxexp=zeros(4,1);
Vmaxexp=Mmaxexp;
Tmaxexp=Mmaxexp;
for i=1:4

[Mmaxexp(i),Vmaxexp(i),Tmaxexp(i)]=MVTmax_NBR(bwexp(i),30.81,25.72,47.63,10.13,1.43/302*365.4,
1.43,12.7,fcexp(i),302.0,370.25);
end

[Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_NBR(15.24,30.81,25.72,47.63,10.13,1.43/302*365.4,1.43,12.7,34.47,302.0
,370.25);
mesh(M_M7_NBR./Mmax,V_M7_NBR./Vmax,T_M7_NBR./Tmax,rest_M7_NBR,'FaceColor','flat','FaceAlpha','
0.4');
colormap (haxis,NBR);
caxis([1 5]);

%valores experimentais
Mexp_M7=[ 0.00632712
          0.012993192
          0.031070677
          0.057057061 ];

Vexp_M7=[ 0.006939192
          0.014768024
          0.036074902
          0.066589554 ];

Texp_M7=[ 0.012654239
          0.012993192
          0.014913925

```

```
0.014123035 ];
```

```
x0=zeros(size(Mexp_M7,1),1);
y0=x0;
z0=x0;

keq_M7_NBR=x0;
l_eq_M7_NBR=x0;

M_M7_NBR=M_M7_NBR./Mmax;
V_M7_NBR=V_M7_NBR./Vmax;
T_M7_NBR=T_M7_NBR./Tmax;

Mexp_M7=Mexp_M7./Mmaxexp;
Vexp_M7=Vexp_M7./Vmaxexp;
Texp_M7=Texp_M7./Tmaxexp;

Rexp_M7=(Mexp_M7.^2+Vexp_M7.^2+Texp_M7.^2).^0.5;
Betaexp_M7=abs(asin(Mexp_M7./Rexp_M7));
Alphaexp_M7=abs(atan(Texp_M7./Vexp_M7));
Betaexp_M7=Betaexp_M7./pi.*180;
Alphaexp_M7=Alphaexp_M7./pi.*180;

R_M7_NBR=(M_M7_NBR.^2+V_M7_NBR.^2+T_M7_NBR.^2).^0.5;
Beta_M7_NBR=abs(asin(M_M7_NBR./R_M7_NBR));
Alpha_M7_NBR=abs(atan(T_M7_NBR./V_M7_NBR));
Beta_M7_NBR=Beta_M7_NBR./pi.*180;
Alpha_M7_NBR=Alpha_M7_NBR./pi.*180;

for i=1:size(Mexp_M7,1)
    [~, keq_M7_NBR(i)] = min(abs(Alpha_M7_NBR(:,1)-Alphaexp_M7(i)));
    [~, l_eq_M7_NBR(i)] = min(abs(Beta_M7_NBR(keq_M7_NBR(i),:)-Betaexp_M7(i)));
end

idxeq_M7_NBR=sub2ind([ndivM+1,ndivTV+1],keq_M7_NBR,l_eq_M7_NBR);

Meq_M7_NBR=M_M7_NBR(idxeq_M7_NBR);
Veq_M7_NBR=V_M7_NBR(idxeq_M7_NBR);
Teq_M7_NBR=T_M7_NBR(idxeq_M7_NBR);

Mplotmatrix=[x0';Meq_M7_NBR';Mexp_M7'];
Vplotmatrix=[y0';Veq_M7_NBR';Vexp_M7'];
Tplotmatrix=[z0';Teq_M7_NBR';Texp_M7'];

plot3(Mplotmatrix,Vplotmatrix,Tplotmatrix,'--ok');

annotation(f5,'textarrow',[0.585714285714286 0.516071428571428],...
    [0.669047619047619 0.692857142857144],'String',{'M7-1'});
annotation(f5,'textarrow',[0.423214285714286 0.467857142857143],...
    [0.744238095238095 0.697619047619048],'String',{'M7-2'});
annotation(f5,'textarrow',[0.355357142857143 0.416071428571428],...
    [0.694238095238095 0.647619047619048],'String',{'M7-3'});
annotation(f5,'textarrow',[0.282142857142857 0.341071428571429],...
    [0.601380952380952 0.592857142857143],'String',{'M7-4'});
```

```

title('Mrd x Vrd x Trd segundo NBR para Viga M7')
view(135,45)
hold off
print('05M7NBR', '-dpng');
savefig('05M7NBR');

```

%%Plot M7 aashto

```

f6=figure;
hold on
grid off
haxis=gca;

haxis.XRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.XRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.YRuler.SecondCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.FirstCrossoverValue = 0;
haxis.ZRuler.SecondCrossoverValue = 0;
xlab=xlabel('Mn/Mmax');
ylab=ylabel('Vn/Vmax');
zlab=zlabel('Tn/Tmax');
xlab.Rotation=30;
xlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
xlab.Position=[0.862127279138949,-0.028937938252358,-0.167510028759338];
ylab.Rotation=-30;
ylab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
ylab.Position=[-0.00326087988055,0.906260859249883,-0.128000014588068];
zlab.Rotation=90;
zlab.BackgroundColor=[0.8,0.8,0.8];
zlab.Position=[-0.182702692680152,0.063840785580712,1.236115584023608];
xlim([0 1.5]);
ylim([0 1.5]);
zlim([0 1.5]);
xticks(1);
xticklabels([]);
tx=text(0.88090688984391,-0.270176443859167,-0.103482631069632,'1');
tx.EdgeColor='none';
yticks(1);
yticklabels([]);
ty=text(-0.010865059625264,1.071165459988791,0.183664424051813,'1');
ty.EdgeColor='none';
zticks(1);
zticklabels([]);
tz=text(0.144818487196108,-0.021712452351331,1.198995708702512,'1');
tz.EdgeColor='none';

bwexp= [15.09
        15.88
        16.21
        15.09];

fcexp= [41.92
        35.92
        39.30
        36.82];

```

```

Mmaxexp=zeros(4,1);
Vmaxexp=Mmaxexp;
Tmaxexp=Mmaxexp;
for i=1:4
[Mmaxexp(i),Vmaxexp(i),Tmaxexp(i)]=MVTmax_AASHTO(bwexp(i),30.81,25.72,30.16,10.13,1.43/302*365
.4,1.43,12.7,fcexp(i),302.0,370.25,19);
end
[Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_AASHTO(15.24,30.81,25.72,30.16,10.13,1.43/302*365.4,1.43,12.7,34.47,30
2.0,370.25,19);
mesh(M_M7_AASHTO./Mmax,V_M7_AASHTO./Vmax,T_M7_AASHTO./Tmax,rest_M7_AASHTO,'FaceColor','flat','
FaceAlpha','0.4');
colormap (haxis,AASHTO);
caxis([1 4]);

%valores experimentais
Mexp_M7=[ 0.00632712
          0.012993192
          0.031070677
          0.057057061 ];

Vexp_M7=[ 0.006939192
          0.014768024
          0.036074902
          0.066589554 ];

Texp_M7=[ 0.012654239
          0.012993192
          0.014913925
          0.014123035 ];

x0=zeros(size(Mexp_M7,1),1);
y0=x0;
z0=x0;

keq_M7_AASHTO=x0;
l_eq_M7_AASHTO=x0;

M_M7_AASHTO=M_M7_AASHTO./Mmax;
V_M7_AASHTO=V_M7_AASHTO./Vmax;
T_M7_AASHTO=T_M7_AASHTO./Tmax;

Mexp_M7=Mexp_M7./Mmaxexp;
Vexp_M7=Vexp_M7./Vmaxexp;
Texp_M7=Texp_M7./Tmaxexp;

Rexp_M7=(Mexp_M7.^2+Vexp_M7.^2+Texp_M7.^2).^0.5;
Betaexp_M7=abs(asin(Mexp_M7./Rexp_M7));
Alphaexp_M7=abs(atan(Texp_M7./Vexp_M7));
Betaexp_M7=Betaexp_M7./pi.*180;
Alphaexp_M7=Alphaexp_M7./pi.*180;

R_M7_AASHTO=(M_M7_AASHTO.^2+V_M7_AASHTO.^2+T_M7_AASHTO.^2).^0.5;
Beta_M7_AASHTO=abs(asin(M_M7_AASHTO./R_M7_AASHTO));
Alpha_M7_AASHTO=abs(atan(T_M7_AASHTO./V_M7_AASHTO));
Beta_M7_AASHTO=Beta_M7_AASHTO./pi.*180;
Alpha_M7_AASHTO=Alpha_M7_AASHTO./pi.*180;

for i=1:size(Mexp_M7,1)

```

```

[~, keq_M7_AASHTO(i)] = min(abs(Alpha_M7_AASHTO(:,1)-Alphaexp_M7(i)));
[~, leq_M7_AASHTO(i)] = min(abs(Beta_M7_AASHTO(keq_M7_AASHTO(i),:)-Betaexp_M7(i)));
end

idxeq_M7_AASHTO=sub2ind([ndivM+1,ndivTV+1],keq_M7_AASHTO,leq_M7_AASHTO);

Meq_M7_AASHTO=M_M7_AASHTO(idxeq_M7_AASHTO);
Veq_M7_AASHTO=V_M7_AASHTO(idxeq_M7_AASHTO);
Teq_M7_AASHTO=T_M7_AASHTO(idxeq_M7_AASHTO);

Mplotmatrix=[x0';Meq_M7_AASHTO';Mexp_M7'];
Vplotmatrix=[y0';Veq_M7_AASHTO';Vexp_M7'];
Tplotmatrix=[z0';Teq_M7_AASHTO';Texp_M7'];

plot3(Mplotmatrix,Vplotmatrix,Tplotmatrix,'--ok');

annotation(f6,'textarrow',[0.585714285714286 0.516071428571428],...
[0.669047619047619 0.692857142857144],'String',{'M7-1'});
annotation(f6,'textarrow',[0.423214285714286 0.467857142857143],...
[0.744238095238095 0.697619047619048],'String',{'M7-2'});
annotation(f6,'textarrow',[0.355357142857143 0.416071428571428],...
[0.694238095238095 0.647619047619048],'String',{'M7-3'});
annotation(f6,'textarrow',[0.282142857142857 0.341071428571429],...
[0.601380952380952 0.592857142857143],'String',{'M7-4'});

title('Mn x Vn x Tn segundo AASHTO para Viga M7')

view(135,45)
hold off
print('06M7AASHTO','-dpng');
savefig('06M7AASHTO');

```

*Published with MATLAB® R2021a*

## ANEXO D – ALGORITMOS DE OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS RESISTENTES MÁXIMOS SOB ATUAÇÃO ISOLADA

```
function [Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_NBR(bw,h,d,c1,...
    Asinf,Assup,Asw,s,fc,fy,fyw)
```

```
%Calculo do cortante, fletor e torcor resistentes para vigas retangulares
%Concreto armado via NBR 6118/2014 isoladamente
%Trelica de Mörsch p/ o corte e espacial p/ a torcao
%Seção plana para flexão, sem interacao
```

```
%c1 em mm (distância do eixo da armadura longitudinal à face)
%Asinf, Assup e Asw em cm2
%bw, h, d e s em cm
%fc, fy e fyw em MPa
%Serão utilizados valores "nominiais" de resistencia
%Serão utilizados valores unitários para os coeficientes de segurança
%Esses valores devem ser coerentes com os preconizados nos ensaios
%Internamente todas as unidades são transformadas para MN e m
```

%% Transformação de unidades

```
c1=c1/1000; %distancia da face ao eixo da armadura longitudinal em m
Asinf=Asinf/10000;
Assup=Assup/10000; %#ok<NASGU>
Asw=Asw/10000;
bw=bw/100;
h=h/100;
s=s/100;
d=d/100;
alpha=90; %angulo do estribo, geralmente 90 graus
alpha=alpha*pi/180; %#ok<NASGU> %angulo do estribo em radianos
```

%% Propriedades mecânicas

```
%concreto
if fc<=50
    fctm=0.3*fc^(2/3);
else
    fctm=(2.12*log(1+0.11*fc));
end

fctkinf=0.7*fctm; %resistência à tração característica inferior
fcd=fc;
fctd=fctkinf; %#ok<NASGU>
alphav2=1-fcd/250; %redução da resistência em estado biaxial de tensões

%aco
fyd=fy;
fywd=fyw;
```

## %%Propriedades geométricas

```

Ac=bw*h; %area da secão transversal m2
Ic=bw*h^3/12; %#ok<NASGU> %momento de inercia da secão transversal m4
u=2*bw+2*h; %perimetro da secão m

heref=Ac/u; %espessura ficticia de referencia da secão m
if heref>=2*c1
    hemax=heref;
    hemin=2*c1;
else
    hemin=min([heref,bw-2*c1]);
    hemax=hemin;
end

Aswmin=0.2*fctm/fywd*bw*s; %m2 area de aco transversal minima
if Asw<Aswmin
    cont=questdlg('Asw < Aswmin -> Continuar?');
    if strcmp(cont,'No')
        error('Execucao interrompida. Verificar Asw.');
```

## %% Valores maximos para fatores de escala

```

Vmax=0.54*alphav2*fcd*bw*d*(cot(pi/2)+cot(pi/4))*sin(pi/4)^2;
Tmax=0.5*alphav2*fcd*(bw-hemin)*(h-hemin)*hemax*sin(2*pi/4);
Mmax=0.9*d*fyd*Asinf;

end
```

*Published with MATLAB® R2021a*

```

function [Mmax,Vmax,Tmax]=MVTmax_AASHTO(bw,h,d,c2,...
    Asinf,Assup,Asw,s,fc,fy,fyw,dagregmax)
```

```

%Calculo do cortante, fletor e torcor resistentes para vigas retangulares
%Concreto armado via AASHTO LRFD 2014 isoladamente
%Trelica + MCFT p/ o corte e p/ a torcao
%Seção plana para flexão, sem interacao

%Referencias: AASHTO LRFD 2014 e Collins/Mitchell
%c2 (distância do eixo do estribo à face) em mm
%dagregmax (diâmetro máximo de agregado graúdo) em mm
%Asinf, Assup e Asw em cm2
%bw, h, d e s em cm
%fc, fy e fyw em MPa
%Serão utilizados valores "nominais" de resistencia
%Serão utilizados valores unitários para os coeficientes de segurança
%Esses valores devem ser coerentes com os preconizados nos ensaios
%Internamente todas as unidades são transformadas para MN e m
```

## %% Transformação de unidades

```

c2=c2/1000; %distancia da face ao eixo do estribo em m
dagregmax=dagregmax/1000; %diametro maximo do agregado graudo em m
Asinf=Asinf/10000;
Assup=Assup/10000; %%ok<NASGU>
Asw=Asw/10000;
bw=bw/100;
h=h/100;
d=d/100;
s=s/100;
alpha=90; %angulo do estribo, geralmente 90 graus ou pi/2 radianos
alpha=alpha*pi/180; %%ok<NASGU> %angulo do estribo em radianos

```

## %% Propriedades mecânicas

```

fc=fc; %%ok<ASGSL>
Es=210e+3; %%ok<NASGU> %modulo elastico do aco MPa
fyd=fy;
fywd=fyw; %%ok<NASGU>

```

## %% Propriedades geométricas

```

Aoh=(bw-2*c2)*(h-2*c2);
ph=2*(bw-2*c2) + 2*(h-2*c2);
Ao=0.85*Aoh;
po=0.9*ph;
z=max(0.9*d,0.72*h); %braco de alavanca conforme AASHTO em m
if fc<60
    dagreg=dagregmax; %diametro do agregado afetando aggregate interlock m
else
    if fc <70 %necessidade de corrigir o aggregate interlock, pois é possível que o agregado
    quebre antes do concreto
        dagreg=(70-fc)/10*dagregmax;
    else
        dagreg=0;
    end
end
Aswmin=0.083*bw*s/fyw*fc^0.5;
if Asw>Aswmin
    sx=0.3; %espacamento das fissuras diagonais m para vigas com estribos m
else
    sx=z; %espacamento das fissuras diagonais m para vigas sem estribos m
end
sxe=sx*0.035/(dagreg+0.016); %espacamento efetivo das fissuras m
sxe=max([min(sxe,2),0.30,0.85*sx]); %%ok<NASGU> %limites para espacamento das fissuras m

```

## %% Valores maximos para fatores de escala

```

Vmax=0.25*fc*bw*z;    Tmax=Vmax*2*Ao/po;    Mmax=z*fyd*Asinf;

```

```

end

```