



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**USO DE VARIÁVEIS SUPLEMENTARES E PROCESSO
DE RENOVAÇÃO GENERALIZADO NO CÁLCULO DA
DISPONIBILIDADE DE SISTEMAS DE COMPONENTES
REPARÁVEIS SUJEITOS A ENVELHECIMENTO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO
POR

BRUNO DA FONTE LEITE
Orientador: Enrique Andrés López Droguett

RECIFE, JUNHO/2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**USO DE VARIÁVEIS SUPLEMENTARES E PROCESSO DE
RENOVAÇÃO GENERALIZADO NO CÁLCULO DA
DISPONIBILIDADE DE SISTEMAS DE COMPONENTES
REPARÁVEIS SUJEITOS A ENVELHECIMENTO**

BRUNO DA FONTE LEITE

ORIENTADOR: Enrique Andrés López Droguett, PhD

RECIFE, JUNHO/2009

L533u

Leite, Bruno da Fonte.

Uso de variáveis suplementares e processo de renovação generalizado no cálculo da disponibilidade de sistemas de componentes reparáveis sujeitos a envelhecimento / Bruno da Fonte Leite. - Recife: O Autor, 2009.

vii, 66 folhas, il : tabs. graf., figs

TCC (Graduação) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Curso de Engenharia de Produção, 2009.

Inclui Referências Bibliográficas e Anexo.

1. Engenharia de Produção. 2. Processos Markovianos não-homogêneos. 3. Variáveis suplementares. 4. Processo de Renovação Generalizado. I. Título

658.5

**UFPE
BCTG/ 2009-111**

AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa o alcance da mais um objetivo, profissional e de vida. Não poderia, entretanto, ser realizado sem a ajuda de algumas pessoas em especial, a quem se faz importante agradecer.

Em primeiro lugar, aos meus pais, Roberto e Ana Elisabete, pelo exemplo de vida que são, pela formação educacional que me proporcionaram e ainda proporcionam, e pelo apoio incondicional sempre que se faz necessário.

À minha namorada, Camila, pela paciência durante os momentos de trabalho e pela força e conselhos prestados quando faltava motivação.

Ao Professor Enrique Droguett, por ter me apresentado ao mundo da Engenharia de Confiabilidade, oferecendo uma primeira oportunidade de Iniciação Científica, e pelos valiosos ensinamentos neste campo.

Ao doutorando Márcio Moura, por toda a ajuda no projeto, desde as primeiras fases de estudo e implementação computacional até a construção deste Trabalho de Conclusão de Curso.

Aos demais companheiros de RISCTEC que, quando solicitados, não se negaram a tirar dúvidas ou emprestar material auxiliar. Em especial a Heitor Duarte, que me acompanhou nos primeiros estudos envolvendo o tema deste trabalho.

RESUMO

Os Processos Markovianos Homogêneo e Não-Homogêneo são alguns dos modelos mais utilizados na estimação da disponibilidade de sistemas complexos sujeitos a envelhecimento em processos de falha e reparo. A adição de variáveis suplementares aos Processos Markovianos Não-Homogêneos, ao tornar as funções intensidade de falha dependentes do tempo efetivo operacional de cada componente, dá ao modelo a possibilidade de representar mais fielmente processos de falha e reparo em sistemas reais. O Processo de Renovação Generalizado permite ainda a modelagem de diferentes níveis de eficácia numa ação de reparo, o que traz maior flexibilidade e aproximação da realidade ao modelo. Utilizando um algoritmo de simulação Monte Carlo, é desenvolvido e apresentado, neste trabalho, um modelo que alia as já conhecidas propriedades dos Processos Markovianos tradicionais às vantagens do uso de variáveis suplementares e do Processo de Renovação Generalizado. Resultados bastante satisfatórios foram obtidos com os testes do modelo proposto, tanto no que tange à precisão e verossimilhança quanto no aspecto da flexibilidade de modelagem. Estes são mostrados ao final do trabalho.

Palavras chave: Processos Markovianos Não-Homogêneos, Variáveis suplementares, Processo de Renovação Generalizado.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Relação entre variável suplementar e tempo de calendário	22
Figura 2 - Gráfico de Markov para sistema de um componente	23
Figura 3 - Gráfico de Markov para sistemas de n componentes em série	26
Figura 4 - Gráfico de Markov para o sistema de 2 componentes em paralelo	32
Figura 5 - Relação entre idade real e idade virtual	38
Figura 6 - Relação entre variável suplementar real, virtual, e tempo de calendário	40
Figura 7 - Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 1	46
Figura 8 - Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 2	48
Figura 9 - Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 3	51
Figura 10- Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 4	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados para o conjunto de testes 1	46
Tabela 2 - Resultados para o conjunto de testes 2	48
Tabela 3 - Resultados para o conjunto de testes 3	51
Tabela 4 - Resultados para o conjunto de testes 4	54

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. APRESENTAÇÃO.....	1
1.2. JUSTIFICATIVA	4
1.3. OBJETIVO.....	5
1.3.1. <i>Objetivos Gerais</i>	5
1.3.2. <i>Objetivos Específicos</i>	5
1.4. METODOLOGIA	6
1.5. RESULTADOS ESPERADOS.....	7
1.6. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	7
2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM ENGENHARIA DE CONFIABILIDADE	8
2.1. SISTEMAS REPARÁVEIS E NÃO-REPARÁVEIS	8
2.2. CONFIABILIDADE	8
2.3. DISPONIBILIDADE	9
3. BASE CONCEITUAL EM MODELOS.....	11
3.1. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.....	11
3.2. PROCESSOS DE CONTAGEM.....	11
3.3. PROCESSOS DE POISSON.....	12
3.4. PROCESSOS NÃO-HOMOGÊNEOS DE POISSON	13
3.5. PROCESSOS DE MARKOV DE TEMPO CONTÍNUO.....	14
3.5.1. <i>Probabilidades de Transição e Taxas de Transição</i>	15
3.5.2. <i>Processos Markovianos Homogêneos</i>	16
3.5.3. <i>Processos Markovianos Não-Homogêneos</i>	17
3.6. PROCESSO DE RENOVAÇÃO GENERALIZADO.....	18
4. UM MODELO COM VARIÁVEIS SUPLEMENTARES.....	20
4.1. INTRODUÇÃO AO MODELO.....	20
4.2. O SISTEMA DE 1 COMPONENTE.....	22

4.3. O SISTEMA DE N COMPONENTES EM SÉRIE	25
4.4. AS DIFICULDADES DA METODOLOGIA PARA SISTEMAS MAIS COMPLEXOS	31
4.4.1. O sistema de 2 componentes em paralelo com funções intensidade de falha variáveis	31
4.4.2. A necessidade de novas metodologias.....	34
5. O MODELO PROPOSTO: VARIÁVEIS SUPLEMENTARES E PRG	36
5.1. INTRODUÇÃO AO MODELO.....	36
5.2. O ALGORITMO MONTE CARLO PARA O MODELO	41
6. TESTES E ANÁLISE DE RESULTADOS DOS MODELOS	44
6.1. METODOLOGIA ANALÍTICO-NUMÉRICA: SISTEMA DE N COMPONENTES EM SÉRIE. 44	
6.1.1. Conjunto de Testes 1	44
6.1.2. Conjunto de Testes 2	46
6.2. MODELO HÍBRIDO PRG E VARIÁVEIS SUPLEMENTARES: SISTEMA DE COMPONENTES EM PARALELO	49
6.2.1. Conjunto de Testes 3	50
6.2.2. Conjunto de Testes 4	53
7. CONCLUSÕES.....	57
7.1. LIMITAÇÕES.....	58
7.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	59
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	60
ANEXO A – MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	62

1. Introdução

1.1. Apresentação

Como ramo de estudo da Engenharia de Produção, a Engenharia de Confiabilidade é, atualmente, um campo de conhecimento extremamente dinâmico, no qual não param de surgir novidades tanto no aspecto teórico-acadêmico quanto no das aplicações práticas. O mundo competitivo atual requer a tomada de decisões rápidas e precisas, tornando cada vez maior a necessidade por informações acuradas e disponíveis com velocidade. Diante desse quadro, empresas de diferentes setores deparam-se cada vez mais com a necessidade de quantificar riscos, estimar possibilidades de falha ou de sucesso, conhecer as probabilidades de ocorrência de eventos específicos de modo a adquirir maior embasamento nas suas decisões.

A premissa principal da Engenharia de Confiabilidade vem de uma constatação bastante simples: componentes, ou sistemas deles, não são perfeitos. O seriam se fossem capazes de permanecer sempre em estado operacional, mas não são e, logo, são passíveis de falhas. Estas podem ser causadas pelos mais diversos fatores, como desgaste natural de componentes ou peças, falhas de projeto, erro humano, política inadequada de manutenção, condições externas ao sistema, entre outros.

Eventos de falha trazem inconvenientes diversos para qualquer operação. Em primeiro lugar, reduz-se o tempo operacional dos sistemas, o que implica em elevados prejuízos à organização, especialmente naquelas onde há produção contínua. Enquanto um sistema de componentes encontra-se parado, a empresa continua tendo que arcar com os custos de recursos ociosos e, ao mesmo tempo, não adquire receita, pois não há saída de produtos finais do processo de produção. Em segundo lugar, há os custos com o reparo da falha. Em geral, os custos de reparação de componentes tendem a ser em muito superiores a, por exemplo, os custos de sua manutenção preventiva. Em terceiro lugar, há o risco de uma falha servir de causa para acidentes mais graves, como incêndios, explosões, vazamentos. Nestes casos, pode haver dano extremo ao patrimônio físico da organização, ao meio ambiente ou, pior, à vida dos indivíduos que trabalham para a mesma ou até da comunidade que a circunda. Por último, podemos citar ainda o prejuízo da imagem organizacional. Quando a empresa falha em corresponder a uma expectativa de seus clientes, ou ainda quando tem seu nome

envolvido em acidentes, há uma formação de imagem negativa em meio a seus mercados consumidores ou em potencial, e esta é bastante difícil de reverter.

Assim, fica evidente a necessidade da busca constante pela eliminação ou minimização das falhas em sistemas produtivos. Se para algumas operações o controle das falhas é crítico, a exemplo de aviões em vôo, fornecedores de energia elétrica para hospitais, ou serviços de emergência médica, para outras ter produtos e serviços confiáveis é uma forma de adquirir vantagem competitiva, a exemplo de empresas automobilísticas japonesas como a Toyota, que aumentaram muito sua participação no mercado através da reputação de seus produtos confiáveis (SLACK et al, 2002). De qualquer maneira, é de interesse de qualquer organização prevenir e evitar falhas.

A Engenharia de Confiabilidade tem participação fundamental e crescente neste aspecto. Hoje, a avaliação de riscos com base apenas no “*feeling*” dos gestores não é, na maioria dos casos, aceitável. Faz-se necessária uma quantificação destes riscos, que forneça previsões mais acuradas das possibilidades de falha, possibilitando o melhor estabelecimento, por exemplo, de intervalos de manutenção, de substituição de componentes, de períodos de garantia ao cliente, aumento da vida útil de componentes ou ainda a inviabilização prévia de projetos em que se identifique a existência de riscos muito elevados, forçando a busca por novas alternativas cujos riscos permaneçam dentro de limites aceitáveis. Para isto, a Engenharia de Confiabilidade trabalha com modelos.

De maneira geral, modelos são utilizados em diversos campos da Engenharia: na maquete que representa um edifício a ser construído, na planta baixa de um galpão industrial, no protótipo de um produto a ser lançado, entre tantos outros. Modelos são recursos utilizados na tentativa de representar uma realidade para melhor conhecê-la sem a necessidade de construir na prática todos os aspectos inerentes à sua existência. Buscam prever, analisar e detectar falhas. Podem ser modelos físicos, gráficos, matemáticos, ou assumir outras formas de representação. A Engenharia de Confiabilidade, na maioria das vezes, se utiliza de modelos matemáticos, que possam estimar de forma quantitativa os riscos na operação de sistemas diversos.

Estes modelos, de alguma forma, procuram representar a realidade de um sistema e estimar algumas métricas de confiabilidade essenciais do mesmo. É impossível, entretanto, que qualquer modelo represente de forma perfeita o mundo real, incluindo todas as variáveis que, de alguma forma, possam interferir no resultado de interesse. Desse modo, há de se admitir que modelos são simplificações da realidade,

pois levam em conta apenas os fatores considerados mais relevantes. Assim, teremos modelos que são mais simples, pois trabalham com menos complexidades da realidade. Têm resolução mais facilitada, mas, em compensação, levam a resultados em geral menos precisos, pois fatores de relevante interferência nos resultados podem estar sendo desconsiderados. Ao mesmo tempo, teremos modelos que incluem mais variáveis em seu corpo e, por isso, têm sua resolução mais dificultosa.

Alguns dos mais conhecidos modelos em Engenharia de Confiabilidade são os diagramas de blocos, árvores de eventos, árvores de falhas e processos de Markov. Destes, os mais adequados para a modelagem de processos de tempo contínuo - aqueles em que os eventos de falha ou reparo, por exemplo, podem acontecer em qualquer momento do tempo, e não apenas em pontos específicos – são os processos de Markov, que têm ampla aplicação. Estes dividem-se em Processos Markovianos Homogêneos (PMH's) e Processos Markovianos Não Homogêneos (PMNH's). Ambos serão melhor descritos no Capítulo 3, mas vale aqui fazer uma introdução a suas características principais.

Um PMH considera que as taxas de transição entre os estados da Cadeia de Markov são sempre constantes. Não interessa o tempo que o sistema ou componente já operou, as probabilidades de transição – falha ou reparo, por exemplo – serão sempre iguais para um intervalo de tempo futuro de igual extensão. Equivale dizer que não se considera o envelhecimento (ou rejuvenescimento, em alguns casos), dos componentes. É como se estes operassem sempre num mesmo nível físico de degradação. Não é difícil imaginar que esta suposição inviabiliza sua aplicação à maioria dos sistemas práticos, onde os componentes degradam-se ao longo do tempo.

Os PMNH's já eliminam esta hipótese simplificadora, pois abrem a possibilidade de taxas de transição variáveis ao longo do tempo. Assim, pode-se modelar a degradação ou o rejuvenescimento de componentes, o que o torna mais aplicável na prática, mas também de tratamento e resolução mais complexos. Uma restrição deste modelo é que as taxas de transição só podem depender do tempo de calendário – tempo desde o início de operação do sistema – e não do tempo operacional de cada componente. Em alguns sistemas reais, este fato pode trazer fortes imprecisões.

Oliveira (2001) já propõe um modelo que inclui variáveis capazes de armazenar a idade operacional de cada componente – as variáveis suplementares -, trabalhando então com PMNH's cujas taxas de transição dependem agora destas novas variáveis, e não mais dos tempos de calendário. Esta nova suposição traz um acréscimo de precisão

e proximidade da realidade ao modelo e, como consequência, aumenta também as dificuldades no seu tratamento. Dentre as vantagens do mesmo, podemos citar a consideração de reparos não pontuais, que diminuem o pessimismo inerente aos PMNH's, e a possibilidade de atribuição de idades prévias aos componentes inseridos no sistema, ou seja, entrada de componentes já usados no sistema. Estas vantagens serão melhor discutidas no Capítulo 4.

O modelo trabalhado por Oliveira (2001), porém, traz ainda uma restrição importante: a consideração de que os reparos efetuados no sistema são sempre mínimos, levam o componente a um estado de degradação exatamente igual ao que se encontrava imediatamente antes do reparo. Esta hipótese tende a ser exageradamente pessimista para a maioria dos sistemas reais, onde um reparo, se não consegue trazer o componente defeituoso a um estado de tão bom quanto novo – o que seria um reparo perfeito-, é capaz de, pelo menos, melhorar a condição em que se encontrava no momento da falha, trazendo-o para um estado intermediário entre o mais novo e o mais velho, caso em que se fala de reparo imperfeito. A modelagem de todos estes tipos de reparo – mínimo, perfeito e imperfeito – pode ser feita por um Processo de Renovação Generalizado, ao qual nos referiremos melhor nos Capítulos 3 e 5.

O objetivo do corrente trabalho é a tentativa de desenvolver um modelo capaz de integrar o modelo de PMNH com variáveis suplementares a um PRG, reduzindo ainda o número de hipóteses simplificadoras dos modelos encontrados na literatura referente ao assunto. Tal modelo teria flexibilidade para representar maior leque de situações existentes em sistemas reais, e com maior precisão, provendo os gestores com estimativas de confiabilidade mais acuradas e dando melhor embasamento a suas decisões. Por motivos que serão detalhados em sessões posteriores, o modelo proposto será intrinsecamente ligado a um algoritmo de simulação Monte Carlo para sua resolução.

1.2. Justificativa

Como já exposto, os modelos que utilizam variáveis suplementares são capazes de representar de forma mais precisa e real a confiabilidade de sistemas complexos, onde diversos componentes estão sujeitos a envelhecimento (ou melhora) ao longo do tempo.

Na maioria dos sistemas reais, os tempos de reparo não são desprezíveis, as manutenções corretivas costumam consumir tempos consideráveis, de modo que os

modelos que desconsideram estas paradas – onde se incluem os PMNH's tradicionais - estão sendo muito pessimistas (no caso de equipamentos que envelhecem) ou otimistas (quando os equipamentos rejuvenescem, caso bastante raro) na estimativa dos parâmetros de confiabilidade. Além disso, é muito provável que, num sistema complexo, com grande quantidade de componentes, as “idades” dos mesmos sejam diferentes, fato que, mais uma vez, só pode ser modelado por variáveis suplementares.

A restrição de trabalhar apenas com reparos mínimos destes modelos, porém, traz ao mesmo tempo uma rigidez e uma imprecisão a este. Rigidez porque não se admite a existência de outros tipos de reparo que, na prática, podem variar desde os que levam o sistema a um estado pior do que velho até um melhor do que novo. Imprecisão porque, quando se aplique o modelo de PMNH's com variáveis suplementares, pode-se estar usando de excesso de pessimismo, justamente porque em geral os reparos não são sempre mínimos.

Assim, este estudo mostra-se relevante no sentido de apresentar e reforçar um modelo que resulte em métricas de confiabilidade aplicáveis a maior número de sistemas e mais fidedignas à realidade, qualidade fundamental para sistemas onde a indisponibilidade envolva elevados custos financeiros ou riscos às pessoas envolvidas.

1.3. Objetivo

1.3.1. Objetivos Gerais

Desenvolver um modelo capaz de estimar métricas de confiabilidade e disponibilidade de um amplo leque de sistemas complexos, que tenha menos hipóteses simplificadoras do que os PMNH's tradicionais e PMNH's com variáveis suplementares.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Analisar os modelos mais utilizados atualmente no cálculo de parâmetros relacionados à confiabilidade/disponibilidade, especialmente os PMNH's tradicionais e com variáveis suplementares;

- Demonstrar o modelo das variáveis suplementares, evidenciando suas vantagens em relação aos markovianos tradicionais;
- Evidenciar as restrições do PMNH com variáveis suplementares e as vantagens obtidas de sua integração a um PRG;
- Implementar os modelos em linguagem computacional C++, de modo que possam ser comparados os resultados dos parâmetros de confiabilidade estimados pelos mesmos e retiradas conclusões acerca de sua aplicabilidade;
- Comprovar a maior verossimilhança e flexibilidade do modelo híbrido proposto, evidenciando seus possíveis campos de aplicação.

1.4. Metodologia

A metodologia de pesquisa utilizada será a mesma dos problemas de Pesquisa Operacional, que consiste nas seguintes fases:

- a) Definição do problema – o problema é a estimação mais fiel possível à realidade da disponibilidade de sistemas de componentes sujeitos a falha e reparo;
- b) Construção do modelo – demonstração e implementação computacional do modelo híbrido proposto, bem como de outros tradicionais modelos de confiabilidade (PMNH's tradicional e com variáveis suplementares) para fins de comparação;
- c) Solução do modelo – obtenção e análise dos resultados obtidos em computador através da aplicação dos diferentes modelos a diversos tipos de sistemas;
- d) Validação do modelo – Comparação dos resultados do modelo com os já presentes em outras obras da literatura, quando possível, e comparação com as expectativas prévias acerca dos resultados, de modo que se analise a validade do modelo proposto;
- e) Implementação da solução – por ser um projeto de pesquisa pura, não haverá implementação prática direta das soluções obtidas, apenas serão feitas sugestões de aplicação;
- f) Avaliação final – apresentação das conclusões obtidas a partir da análise e comparação entre os modelos, evidenciando as vantagens do modelo defendido, e suas deficiências, abrindo campo para novos desenvolvimentos posteriores.

1.5. Resultados Esperados

Ao fim do projeto, espera-se ter desenvolvido um modelo de simulação flexível e com estimações mais fidedignas à realidade do que os PMNH's tradicionais e com variáveis suplementares, e que o mesmo exija tempos de simulação dentro de limites viáveis. Espera-se ainda abrir campo para pesquisas envolvendo soluções ainda mais eficientes para sistemas complexos.

1.6. Organização do Trabalho

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem seu corpo dividido em 7 capítulos.

O capítulo 1 é uma introdução geral ao problema que será discutido durante todo o trabalho: a comparação entre modelos existentes de estimação de métricas de confiabilidade e a proposição de um novo modelo. Traz ainda as justificativas para este trabalho, bem como seus objetivos, metodologia e resultados esperados.

O capítulo 2 fornece uma base mínima de conceitos utilizados em Engenharia de Confiabilidade, como a própria definição de confiabilidade, de disponibilidade, diferenciação entre sistemas reparáveis e não reparáveis, entre outras.

O capítulo 3 traz uma nova base conceitual, agora expondo as definições e características de alguns dos modelos mais tradicionais e utilizados em Engenharia de Confiabilidade, como os PMH's e PMNH's.

O capítulo 4 introduz e detalha as vantagens do modelo de PMNH com variáveis suplementares, exemplificando sua aplicação em alguns tipos de sistemas e justificando sua incapacidade de modelar sistemas mais complexos.

O capítulo 5 aborda o modelo híbrido proposto de simulação Monte Carlo de PMNH's com variáveis suplementares e Processo de Renovação Generalizado, evidenciando as vantagens do mesmo em relação ao modelo do capítulo 4.

O capítulo 6 traz os testes para validação e análise dos resultados do modelo proposto no capítulo 5.

O capítulo 7, enfim, traz as conclusões que foram possíveis de se retirar ao longo da execução deste trabalho, analisa os resultados alcançados e suas limitações, e propõe sugestões para novos trabalhos nesta área.

2. Conceitos Fundamentais em Engenharia de Confiabilidade

2.1. Sistemas Reparáveis e Não-Reparáveis

Sistemas não-reparáveis são aqueles que só podem ser descartados após sua falha, não podendo ser retornados ao estado de funcionamento normal. Assim, para a Engenharia de Confiabilidade, interessa o conhecimento da probabilidade de ocorrência da primeira falha ao longo do tempo, ou seja, sua confiabilidade.

Um sistema reparável, por sua vez, é aquele que *“após falhar em realizar pelo menos uma de suas funções pode ser reconduzido (reparado) para o estado em que o mesmo está hábil em realizar todas as suas funções através de qualquer procedimento que não seja a substituição total (completa) do mesmo”* (ASCHER; FEINGOLD apud ROCHA, 2006). Para estes sistemas, a Engenharia de Confiabilidade busca também saber qual a probabilidade de o sistema estar operacional (disponível) a cada momento no tempo, ou seja, sua disponibilidade.

2.2. Confiabilidade

Podemos definir a confiabilidade de um sistema – ou componente, ou produto – como a probabilidade de que o mesmo desempenhe uma determinada função por um dado período de tempo sob condições operacionais específicas. Podemos, de outra forma, entendê-la como a probabilidade de não-falha do sistema em questão por um determinado período de tempo. A interpretação de falha pode ser bastante ampla, cabendo ao interessado definí-la. De modo geral, falha seria o evento de o componente não apresentar mais o desempenho desejado em algum parâmetro pré-determinado.

Não necessariamente a variável determinante da confiabilidade precisa ser o tempo. Podem ser usados também a distância percorrida – a quilometragem de um carro é um bom exemplo – ou o número de ciclos desempenhados por um sistema – o número de pousos de um avião, por exemplo – ou qualquer outra variável que se considere ser determinante na probabilidade de falha do sistema.

A confiabilidade é quantificada ao longo do tempo pela função de confiabilidade $R(t)$, esta sendo a probabilidade de que o componente funcionará – não falhará – até o instante t . Deste modo, se considerarmos T uma variável aleatória contínua que expresse o tempo de ocorrência da falha do sistema, $T \geq 0$, a função de confiabilidade do sistema pode ser expressa como:

$$R(t) = P(T \geq t); t \geq 0 \quad (2-1)$$

E obedece às seguintes propriedades (DROGUETT, 2002):

$$- R(0) = 1; \quad (2-2)$$

$$- \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0; \quad (2-3)$$

$$- R(t) \geq 0. \quad (2-4)$$

Ou seja, a função de confiabilidade é monotônica decrescente para todo t .

Nota-se ainda que a confiabilidade refere-se à probabilidade de não ocorrência apenas da primeira falha. Portanto, sua aplicação é restrita em sistemas reparáveis. Nestes, é mais útil o conceito de disponibilidade operacional.

2.3. Disponibilidade

Quando estamos tratando com um processo Markoviano, dividimos o comportamento dinâmico do sistema num conjunto de estados entre os quais o sistema transita. Em alguns destes estados, considera-se que o sistema encontra-se operacional. Em outros, o sistema encontra-se não operante, ou indisponível. Cada um destes estados possui uma função de probabilidade instantânea específica, que reflete a probabilidade de o sistema encontrar-se no estado num dado momento t . Chamaremos então de disponibilidade instantânea a soma das funções de probabilidade dos estados operacionais a cada momento no tempo. Em outras palavras, é a probabilidade de que o sistema esteja operacional num dado instante t .

$$A(t) = \sum_{k \in D} P_k(t) \quad (2-5)$$

Onde D é o conjunto ao qual pertencem os estados operacionais, e $P_k(t)$ a função de probabilidade de cada um destes estados. Nota-se que o conceito de disponibilidade instantânea permite que componentes transitem entre estados de reparo, o que o torna mais aplicável a sistemas de componentes reparáveis do que o conceito de confiabilidade.

Podemos ainda nos referir à disponibilidade média do sistema, $\bar{A}(t)$ que será a fração de tempo em que o sistema esteve operacional até o instante t . Esta estimativa é importante, por exemplo, quando se deseja determinar um percentual de tempo em que um sistema produtivo deve manter-se operando. A disponibilidade média é assim definida (DROGUETT, 2002):

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{t} \sum_{k \in D} \int_0^t P_k(t) dt = \frac{1}{t} \int_0^t A(t) dt \quad (2-6)$$

3. Base Conceitual em Modelos

3.1. Processos Estocásticos

Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias (RIGDON; BASU, 2000). Em outras palavras, é um processo onde para cada momento t definido num certo espaço de tempo existe uma variável aleatória $X(t)$ que de alguma forma representa um estado do processo. Assim, de uma forma generalista, um processo estocástico pode ser representado na forma $\{X(t), t \in T\}$, onde T é o espaço determinante de t , chamado de conjunto índice do processo. Quando o conjunto T corresponde a um grupo contável de valores, tem-se um processo estocástico de tempo discreto. Por outro lado, se T for um conjunto incontável, tem-se um processo de tempo contínuo (ROSS, 1997).

A variável aleatória $X(t)$ pode representar, por exemplo, o número de clientes numa fila num dado momento no tempo, caso bastante aplicado na Teoria das Filas, ou a posição de estoque de um armazém. Em Engenharia da Confiabilidade, a aplicação mais comum destes processos estocásticos é quando a variável aleatória representa um estado de uma Cadeia de Markov a cada momento no tempo, sendo que cada estado reflete a condição dos componentes de um sistema (operacional, falho, em standby, etc.) e, conseqüentemente, a condição do sistema com um todo.

3.2. Processos de Contagem

Antes de esclarecer o conceito de processo de Poisson, faz-se necessário definir o que são processos de contagem. Processos de contagem são processos estocásticos $\{N(t), t \geq 0\}$ onde $N(t)$ representa o número total de “eventos” que ocorreram até o momento t (ROSS, 1997). Por exemplo, se $N(t)$ representar o número total de falhas de um componente até o momento t , então $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de contagem onde a ocorrência de uma falha é um evento.

Um processo de contagem deve obedecer às seguintes propriedades (ROSS, 1997):

$$- N(t) \geq 0; \quad (3-1)$$

$$- N(t) \text{ é um inteiro;} \quad (3-2)$$

$$- \text{ Se } s < t, \text{ então } N(s) < N(t); \quad (3-3)$$

$$- \text{ Se } s < t, \text{ então } N(t) - N(s) \text{ é igual ao número de eventos que ocorreram no intervalo } (s,t). \quad (3-4)$$

Diz-se que um processo de contagem tem incrementos independentes quando o número de eventos que ocorrem em intervalos de tempo separados é independente. Por exemplo, o número de eventos no intervalo $[6,10]$ não dependeria do número de eventos no intervalo $[0,5]$. Diz-se ainda que um processo de contagem possui incrementos estacionários quando a distribuição do número de eventos em um intervalo depende apenas do seu comprimento (ROSS, 1997). Isso significa dizer que:

$$N(t_2 + s) - N(t_1 + s) = N(t_2) - N(t_1) \quad (3-5)$$

3.3. Processos de Poisson

De posse destes conceitos, podemos agora definir um Processo de Poisson de taxa λ , $\lambda > 0$ como um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ que possua as seguintes características (ROSS, 1997):

$$- N(0) = 0; \quad (3-6)$$

$$- \text{ O processo tem incrementos independentes;} \quad (3-7)$$

- O número de eventos para qualquer intervalo de comprimento t segue uma distribuição de Poisson com média λt , ou seja:

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}; \quad \forall s, t \geq 0, n = 0, 1, \dots \quad (3-8)$$

Pode ser provado que da Equação 3-8 decorre o fato de que os tempos entre a ocorrência de eventos num Processo de Poisson da forma como o vemos até agora são exponencialmente distribuídos. Isto é, denominando-se T_n o tempo decorrido entre o evento $n+1$ e o evento n , pode-se dizer que $T_n, n = 1, 2, \dots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) exponencialmente, com média $1/\lambda$. Assim, podemos afirmar que um Processo de Poisson possui incrementos independentes e estacionários, pois é como se o processo se reiniciasse em qualquer momento do tempo, tornando-se independente de tudo o que ocorreu previamente (incrementos

independentes) e ainda seguindo a mesma distribuição do processo original (incrementos estacionários) (ROSS, 1997).

Esta crucial característica revela a propriedade de falta de memória de um Processo de Poisson comum, o qual daqui para frente denominaremos de Processo Homogêneo de Poisson. Esta mesma característica torna o processo inadequado para modelar seqüências de eventos onde as distribuições dos tempos entre os eventos dependam do tempo decorrente até então ou dos eventos anteriores, como, por exemplo, falhas de componentes sujeitos a envelhecimento.

Para prosseguirmos à definição de Processo Não-Homogêneo de Poisson, é válido antes oferecer uma definição alternativa de PHP. Podemos então dizer que um PHP é um processo de contagem de taxa λ constante, $\lambda > 0$, que obedeça às seguintes propriedades (ROSS, 1997):

$$- N(0) = 0; \quad (3-9)$$

$$- \text{O processo tem incrementos independentes e estacionários}; \quad (3-10)$$

$$- P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h); \quad (3-11)$$

$$- P\{N(h) \geq 2\} = o(h). \quad (3-12)$$

Onde $o(h)$ é uma função qualquer tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Pode ser provado que esta definição de PHP equivale exatamente à primeira que foi dada, e carrega as mesmas conseqüências.

3.4. Processos Não-Homogêneos de Poisson

Os Processos Não-Homogêneos de Poisson (PNHP's) são uma generalização dos PHP's, onde é relaxada a hipótese de incrementos estacionários inerente a estes últimos. Desta forma, ao invés de o processo ser descrito por uma taxa constante λ , pode-se fazer esta taxa, num dado momento t , ser uma função de t , a qual recebe então o nome de função de intensidade. Podemos, então, definir um PNHP como sendo um processo de contagem com função de intensidade $\lambda(t), t \geq 0$ que possua as seguintes propriedades (ROSS, 1997):

$$- N(0) = 0; \quad (3-13)$$

$$- \{N(t), t \geq 0\} \text{ possui incrementos independentes}; \quad (3-14)$$

$$- P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h); \quad (3-15)$$

$$- P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h). \quad (3-16)$$

Pode ser provado, por exemplo, que $N(t)$ segue uma distribuição exponencial com média $m(t)$, onde $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$. Observa-se que num PHP, onde $\lambda(t) = \lambda$, $m(t) = \lambda t$, que corresponde à média do PHP, o que mostra que o PHP é um caso específico de PNHP. A função $m(t)$ é denominada função de valor médio do processo.

A eliminação da hipótese de incrementos estacionários é bastante relevante em aplicações práticas porque permite a modelagem de casos onde a ocorrência de eventos é mais provável em certas alturas do tempo do que em outras, ao contrário do que ocorre num PHP. Assim, por exemplo, poderíamos fazer com que a probabilidade de ocorrência de uma falha de componente, mesmo em intervalos de tempo de comprimentos iguais, fosse se tornando mais provável ao longo do tempo, representando o envelhecimento do componente no decorrer de sua vida útil.

3.5. Processos de Markov de Tempo Contínuo

Tendo tomado conhecimento das idéias de processos estocásticos, PHP's e PNHP's, podemos agora partir para a análise das Cadeias de Markov. Estas são modelos probabilísticos com um amplo leque de aplicações na atualidade, especialmente em Engenharia de Confiabilidade, em casos quando modelos mais básicos, como árvores de falha, árvores de evento ou diagramas de blocos não são capazes de modelar satisfatoriamente sistemas complexos (MOURA, 2006).

Nas Cadeias de Markov, o sistema é representado por um número de estados, descrevendo estes, por sua vez, condições do sistema ou de seus componentes. As transições entre os estados são quantificadas por taxas de transição, e os tempos entre as transições seguem distribuições probabilísticas que mais tarde serão analisadas. Trabalharemos com as Cadeias de Markov de tempo contínuo, nas quais as transições podem ocorrer em qualquer momento do tempo, ao contrário das de tempo discreto, onde as transições só ocorrem aos saltos em espaços de tempo pré-determinados.

A característica mais importante das Cadeias de Markov é a chamada propriedade Markoviana. Para explicitá-la, vamos a uma definição mais formal deste

tipo de modelo. Para Ross (2007), uma Cadeia de Markov de Tempo Contínuo é um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ onde, para todo $s, t \geq 0$ e para os inteiros não negativos $i, j, x(u), 0 \leq u \leq s$:

$$P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u \leq s\} = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} \quad (3-17)$$

Assim, a propriedade Markoviana faz com que, dado que o sistema se encontra em um estado da cadeia, seu próximo destino não dependa em nada do caminho que o sistema percorreu até chegar ao estado atual, apenas deste mesmo estado. Em outras palavras, o comportamento futuro do sistema não depende do passado, apenas do presente. Por isso, a propriedade Markoviana é às vezes referida como propriedade de falta de memória.

Enfim, podemos afirmar que uma Cadeia Markoviana é um processo estocástico que possui a propriedade Markoviana. Em algumas fontes, inclusive, as Cadeias Markovianas são referidas como Processos Markovianos (PM's), denominação que utilizaremos daqui para frente. Algumas fontes, ainda, utilizam a expressão Cadeia Markoviana para designar apenas a representação gráfica de um PM, onde nós (círculos) representam os estados dos processos e setas dirigidas entre os nós representam as transições.

3.5.1. Probabilidades de Transição e Taxas de Transição

Como já dito, um PM é descrito por estados e taxas de transição entre os estados. Estas, por sua vez, dependem das probabilidades de transição. Cabe aqui uma melhor definição destes dois conceitos.

Howard (1971) define as probabilidades de transição p_{ij} para PM's de tempo discreto como sendo:

$$p_{ij} = P\{X(n+1) = j \mid X(n) = i\}; \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (3-18)$$

Onde i, j , e n são inteiros não negativos, e N é o número de estados do sistema.

Para PM's de tempo contínuo, as probabilidades de transição $p_{ij}(t+s)$ são definidas como segue (ROCHA, 2006):

$$p_{ij}(t+s) = P\{X(t+s) = j \mid X(t) = i\} \quad (3-19)$$

Esta é a probabilidade de que o sistema transite do estado i , onde se encontra no momento t , para o estado j no próximo intervalo s de tempo. Como envolvem variáveis de tempo, são também às vezes chamadas de funções de probabilidade de transição.

Por se tratarem de probabilidades, estas funções devem satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &\geq 0; & \forall i, j = \{0,1,2,\dots,r\} \\ \sum_{i=0}^r p_{ij}(t) &= 1; & t > 0 \end{aligned} \quad (3-20)$$

E ainda pode demonstrar-se (HOWARD, 1971) que estas probabilidades obedecem à equação abaixo, conhecida como equação de Chapman - Kolmogorov:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^r p_{ik}(s) \cdot p_{kj}(t); \quad \begin{aligned} \forall i, j = \{0,1,2,\dots,r\} \\ 0 \leq s \leq t \end{aligned} \quad (3-21)$$

Agora, podemos definir as taxas de transição entre os estados i e j como sendo (ROCHA,2006):

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t+s)}{s} \quad (3-22)$$

Em Engenharia de Confiabilidade, a aplicação mais comum de taxas de transição é na representação de falha ou reparo de componentes de um sistema, quando são chamadas de taxas de falha, ou taxas de reparo, respectivamente. Em se tratando de sistemas reparáveis, é preferível a denominação de função intensidade de falha ao invés de taxa de falha, denominação esta utilizada neste trabalho. A literatura é bastante confusa em relação a esta nomenclatura.

As taxas de transição podem seguir diferentes distribuições. Neste trabalho, serão utilizadas apenas taxas de transição constantes, ou taxas de transição modeladas de acordo com uma distribuição Weibull, quando assumem a seguinte forma (LEWIS apud OLIVEIRA, 2001):

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1} \quad (3-23)$$

Esta é uma das distribuições mais utilizadas para modelar taxas de transição crescentes ou decrescentes ao longo do tempo.

3.5.2. Processos Markovianos Homogêneos

Se, num dado sistema já sabidamente detentor da propriedade Markoviana, for ainda constatado que as probabilidades de transição $P\{X(t+s) = j \mid X(t) = i\}$ são

independentes de t , então se diz que o Processo Markoviano tem probabilidades de transição estacionárias ou homogêneas (ROSS, 1997). Nestes casos, a probabilidade de transição num intervalo de tempo a seguir não depende do tempo em que o sistema já permaneceu no estado em que se encontra. Por exemplo, se T_i for o tempo que o sistema permanece no estado i antes de uma transição, é correto afirmar que (ROSS, 1997):

$$P\{T_i > t + s \mid T_i > t\} = P\{T_i > s\} \quad (3-24)$$

Portanto, para este tipo de PM, a variável T_i em questão não tem memória, logo deve seguir uma distribuição exponencial. Podemos chamar este processo de Processo Markoviano Homogêneo (PMH). Numa definição mais simples, um PMH é um PM onde as taxas de transição entre os estados não variam com o tempo t de funcionamento desde o início de sistema (também conhecido como tempo de calendário), ou seja, são constantes. Isso equivale a:

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} \quad \forall i, j = \{0, 1, 2, \dots, r\} \quad (3-25)$$

A propriedade de falta de memória dos tempos entre transições em relação ao tempo de calendário torna os PMH's inadequados para a modelagem de sistemas onde haja envelhecimento ou evolução de componentes. Nestes processos, é correto dizer, por exemplo, que um sistema que já operou 1000 horas tem a mesma probabilidade de falhar nas próximas 10 horas que um sistema similar que acabou de entrar em operação. Não são muitos os sistemas reais que partilham dessa característica, o que restringe bastante a aplicabilidade deste modelo na prática.

Alguns sistemas, porém, como os de componentes eletrônicos, podem ter seu comportamento de falha satisfatoriamente modelado por um PMH. A facilidade no tratamento matemático destes modelos, por trabalharem com taxas de transição constantes, é um ponto que pesa a favor do seu uso.

3.5.3. Processos Markovianos Não-Homogêneos

Assim como definimos os PNHP's como uma generalização dos PHP's, podemos dizer, de forma similar, que os Processos Markovianos Não-Homogêneos (PMNH's) são generalizações dos PMH's, onde pelo menos uma das taxas de transição entre os estados varia com o tempo de calendário. Isso equivale a dizer que os tempos

entre transições não são necessariamente todos distribuídos exponencialmente, devem ser modelados por uma distribuição que possua memória, como a Weibull ou a Log-Normal.

Podemos dizer que um PMNH é um processo estocástico que possui a propriedade Markoviana, e onde as probabilidades de transição $P\{X(t+s) = j \mid X(t) = i\}$ são dependentes de t , ou que é um PM com probabilidades de transição não-estacionárias ou não homogêneas. Esta última característica não vai de encontro à propriedade Markoviana porque, apesar de as probabilidades serem influenciadas pelo tempo de calendário, elas em nada dependem da seqüência de estados percorrida antes de se chegar ao estado atual.

O fato de as taxas de transição variarem ao longo do tempo permite que os PMNH's modelem com muito mais precisão sistemas sujeitos a desgaste (MOURA, 2006) ou evolução, o que o torna melhor aplicável à maioria dos sistemas reais. Porém, como é de se esperar, seu trato matemático é mais complexo.

3.6. Processo de Renovação Generalizado

Vamos considerar que um sistema, após um reparo, pode retornar ao funcionamento em uma das seguintes formas (YAÑEZ et al, 2002):

1. tão bom quanto novo;
2. tão ruim quanto velho;
3. melhor do que velho mas pior do que novo;
4. melhor do que novo;
5. pior do que velho.

Os modelos probabilísticos que já discutimos até aqui, e que são os mais usados atualmente, modelam adequadamente os casos 1 e 2. No caso 1, diz-se ter um Processo de Renovação (PR), no qual após cada reparo o sistema retorna a um estado de tão bom quanto novo, ou seja, sofre reparos perfeitos. Este caso corresponde ao PMH e, como já discutido, não serve para modelar sistemas em degradação, pois pode fornecer estimativas muito otimistas de sua disponibilidade.

No outro extremo há o caso 2, onde o reparo do sistema serve simplesmente para levá-lo à mesma condição em que se encontrava antes da falha, a um estado de tão ruim

quanto velho. Diz-se, então, que o sistema sofre reparos mínimos, caso que equivale aos PMNH.

Acontece, porém, que, na maioria dos sistemas reais, os reparos levam um sistema a uma condição intermediária entre o tão bom quanto novo e o tão ruim quanto velho, o que se encaixa no caso 3. Os casos 4 e 5 ocorrem muito raramente na realidade. Para os casos 1 e 2, como vimos, já existem modelos bem estabelecidos e de tratamento matemático relativamente simples. A complexidade matemática dos três últimos casos fez com que seu uso não tenha recebido tanta atenção.

De uma forma geral, um Processo de Renovação Generalizado (PRG) é um modelo probabilístico proposto por Kijima e Sumita (1986) que absorve a possibilidade dos cinco estados pós-reparo descritos aqui. Mais à frente, quando se falar de eficácia do reparo e idade virtual do sistema, será mais fácil entender como este modelo funciona.

4. Um Modelo com Variáveis Suplementares

4.1. Introdução ao Modelo

O uso de modelos para representar sistemas de componentes sujeitos a falhas geralmente exige a aplicação de hipóteses simplificadoras, presunções acerca do comportamento do sistema antes de sua modelagem. A realidade é por demais complexa para ser perfeitamente representada por um modelo matemático. Os fatores que influem, de uma forma ou de outra, no resultado que se deseja atingir são infinitos. É necessário, portanto, identificar quais variáveis são as mais relevantes na estimativa dos resultados e quais podem ser postas à margem de um dado modelo, e é aí que surgem as hipóteses simplificadoras. Com o aumento do número dessas hipóteses, o modelo vai se tornando menos complexo e mais fácil de tratar matematicamente. Por outro lado, ele pode se afastar demais da realidade, tornando-se impreciso na estimação das métricas de confiabilidade do sistema.

Uma das simplificações mais utilizadas em modelos é aquela do não-envelhecimento dos equipamentos ao longo do tempo, a qual consiste, como já vimos, no PHP. Ela implica que a probabilidade de falha de um componente não aumenta com o passar do tempo, ou ainda, não interessa o quão velho o componente é, ele sempre terá a mesma probabilidade de falha num período de tempo de mesma duração. Isto leva a funções intensidade de falha constantes. Obviamente, estes tipos de modelos têm aplicação restrita em sistemas reais onde, em geral, equipamentos envelhecem e se tornam mais susceptíveis às falhas com o passar do tempo.

Um passo à frente na escala de aproximação com a realidade estão os modelos que consideram o envelhecimento do sistema ao longo do tempo, aos quais já nos referimos como PMNH's. Nestes, a probabilidade de falha de um componente muda com o tempo (normalmente crescendo junto com a idade do sistema). É, na realidade, o caso mais freqüente, mesmo no caso de componentes não reparáveis (LEWIS apud OLIVEIRA, 2001). Em outras palavras, as funções intensidade de falha se tornam funções dependentes do tempo (de calendário). PMNH's têm mais aplicabilidade em sistemas reais por serem capazes de modelar qualquer etapa da curva da banheira, podendo o sistema estar evoluindo, estacionário ou degradando.

Entretanto, mesmo os PMNH's ainda contêm algumas simplificações que podem afastar os resultados do modelo da realidade. Por exemplo, para um PMNH comum, um componente continua envelhecendo mesmo quando está num estado de reparo. Isso significa que sua função intensidade de falha continua crescendo mesmo quando ele nem está operacional. Em alguns sistemas, onde os tempos de reparo são muito curtos, podendo até ser considerados pontuais, esta hipótese pode ser válida, pois o período de reparo não causaria maiores alterações na função intensidade de falhas. Mas em sistemas que possuem tempos de reparo consideravelmente longos, a função intensidade de falhas crescerá um bocado mais rápido do que realmente deveria, alterando sensivelmente a forma da função de disponibilidade do sistema.

Assim, é perceptível que um PMH é normalmente muito otimista em analisar a disponibilidade de um sistema real, ao considerar o não envelhecimento do mesmo, enquanto um PMNH é frequentemente muito pessimista, ao considerar que os componentes envelhecem mesmo quando estão sendo reparados.

Uma solução mais apropriada para o problema seria um modelo que considerasse o envelhecimento dos componentes apenas quando estes estivessem operacionais. Desta forma, deveria buscar-se um meio termo entre os já discutidos modelos pessimista e otimista, através do qual a disponibilidade estimada representasse mais precisamente o comportamento do sistema.

Uma maneira de atingir este objetivo é a adição de variáveis ao modelo que acompanhem continuamente o tempo de operação de cada componente no sistema, ou seja, sua idade real. Estas variáveis serão chamadas de variáveis suplementares (OLIVEIRA, 2001). Assim, a cada componente do sistema cuja função intensidade de falha não seja constante, em geral, corresponderá uma variável suplementar que apenas se incrementa quando o componente está operacional.

Em alguns casos específicos (como no caso de sistemas em série, por exemplo), múltiplos componentes operam sempre de forma simultânea, de modo que é necessária apenas uma variável suplementar para armazenar o tempo operacional de todos eles. Em suma, será adicionada uma variável suplementar sempre que for preciso acompanhar a idade operacional de um componente, ou, em alguns casos, de um grupo de componentes com regime operacional semelhante. A função intensidade de falhas do componente agora dependerá apenas dessa variável, e não mais do tempo de calendário (como no PMNH), de modo que ela não se altera enquanto o componente está sendo

reparado. A relação entre uma variável suplementar x e o tempo de calendário t pode ser representada pelo gráfico da Figura 1, retirada de Oliveira (2001).

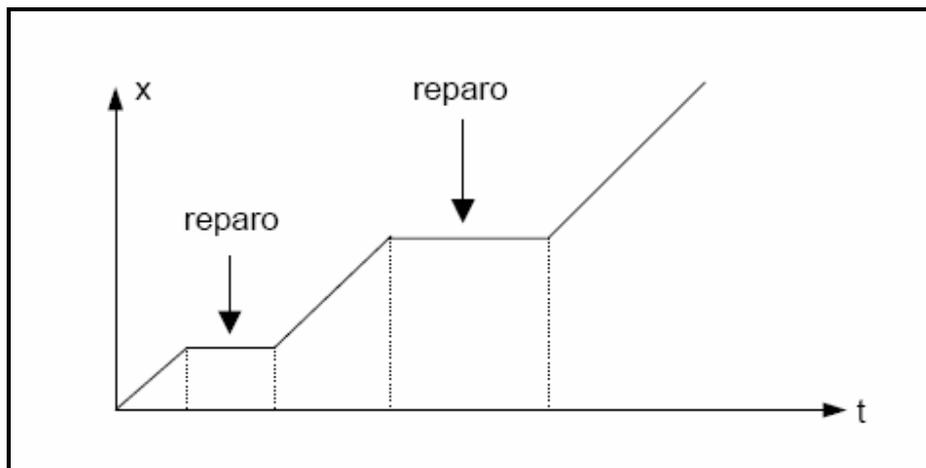


Figura 1 - Relação entre variável suplementar e tempo de calendário

Uma vantagem adicional do uso de variáveis suplementares é a possibilidade de incluir no modelo os tempos iniciais de operação de cada componente. Em vários sistemas reais, são inseridos componentes que não são novos, ou seja, que já operaram por um dado período de tempo. Se conhecido, este período pode ser usado como o valor inicial da variável suplementar correspondente ao componente. Em outras palavras, quando o sistema começa a operar, com tempo de calendário igual a zero, as variáveis suplementares podem conter qualquer valor não negativo, de modo que conte não apenas o tempo operacional do componente desde o momento inicial do sistema, mas também o tempo de operação prévio, ao qual o componente foi submetido em outros sistemas. Isto traz um novo incremento de precisão e de proximidade com a realidade, e torna o modelo mais aplicável em situações gerais.

Neste capítulo, trabalharemos como modelos que usam variáveis suplementares. Exporemos a idéia geral do modelo e sua possibilidade de tratamento por vias matemáticas, numéricas e de simulação. Em capítulos posteriores, introduziremos um modelo que una os benefícios das variáveis suplementares aos do PRG, o qual será solucionado por meio de simulação.

4.2. O sistema de 1 componente

Para a perfeita compreensão do uso das variáveis suplementares, iniciaremos descrevendo a aplicação do modelo ao mais simples sistema reparável possível: o

sistema de apenas 1 componente, que transita entre dois estados, um operacional e um falho. O sistema pode ser representado pelo seguinte gráfico:

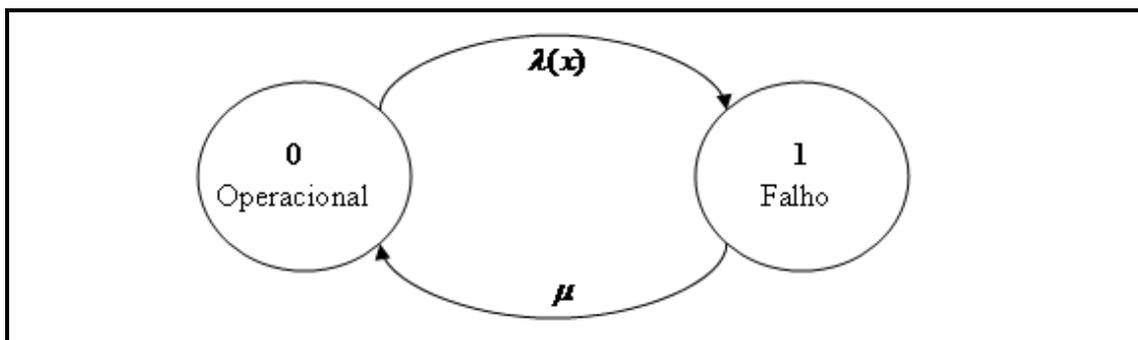


Figura 2 - Gráfico de Markov para sistema de um componente

Considerando que o sistema não falha nem envelhece enquanto está em reparo, a função intensidade de falha torna-se uma função contínua de x , sendo esta a variável suplementar que armazena a idade operacional do componente em estudo, ou ainda o tempo em que o sistema permaneceu, até o momento, no estado 0. A taxa de reparo é uma constante μ , assim como serão consideradas todas as taxas de reparo nesta monografia, por ser amplamente aceito na literatura que a distribuição exponencial modela adequadamente os tempos de reparo.

Segundo Singh & Billington (apud OLIVEIRA, 2001), a inclusão da variável suplementar torna o sistema Markoviano, pois quando a função intensidade de falha depende do tempo de calendário t , a informação sobre o estado atual do sistema e o tempo atual não são suficientes para determinar a próxima transição. É necessário ainda conhecer o tempo operacional do sistema. Assim, as equações de Markov para o sistema são:

$$\frac{\partial P_0(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_0(t, x)}{\partial x} = -\lambda(x)P_0(t, x) + \mu P_1(t, x) \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} = -\mu P_1(t, x) + \lambda(x)P_0(t, x) \quad (4-2)$$

Note que, uma vez que agora estamos trabalhando com mais de uma variável de tempo (o tempo de calendário t e a variável suplementar x), as equações de Markov formam um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP's), e não mais de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's). É através da resolução deste sistema que se consegue determinar as funções de probabilidade de estado para o sistema. Para isso, é necessário ainda definir as condições iniciais:

$$P_0(0, x) = \delta(x - x_0) \quad (4-3)$$

$$P_1(0, x) = 0 \quad (4-4)$$

$$P_0(t, x_0) = \delta(t) \quad (4-5)$$

Onde a função $\delta(y)$ é chamada de Delta de Dirac, e é definida como:

$$\delta(y) = \begin{cases} \infty, & y = 0 \\ 0, & y \neq 0 \end{cases} \quad (4-6)$$

De modo que qualquer integral definida da função $\delta(y)$ onde os limites de integração incluam o valor 0 terá como resultado o valor 1, isto é:

$$\int_a^b \delta(y) dy = 1, a \leq 0 \leq b \quad (4-7)$$

Assim, as condições iniciais garantem que, no momento inicial $t=0$ o sistema se encontra no estado 0, e o componente tem um tempo prévio de funcionamento qualquer dado por x_0 , e que só neste momento a variável suplementar tem esse valor. Mais especificamente, a condição da Equação 4-3 garante o funcionamento do sistema no instante $t=0$, visto que:

$$P_0(0) = \int_0^{\infty} P_0(0, x) dx = \int_0^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (4-8)$$

A condição da Equação 4-4 assegura que o sistema não pode estar no estado 1 no momento $t=0$.

A condição da Equação 4-5 garante que a variável suplementar só assume o valor x_0 no momento $t=0$, admitindo que o sistema não pode falhar imediatamente após a entrada em operação, pois teria que operar pelo menos por um infinitésimo de tempo, o que alteraria o valor da variável x .

É importante ressaltar também de antemão que a função $P_i(t, x) dx$ representa a probabilidade de no instante t o sistema se encontrar no estado i com tempo operacional efetivo no intervalo $(x, x+dx)$. O que nos interessa é estimar funções de probabilidades de estado ao longo de um tempo de missão T , que se refere ao tempo de calendário t . O que desejamos na verdade é que as funções de probabilidade de estado fiquem dependendo apenas de t e, para isso, faz-se necessário integrar estas funções de 0 a ∞ em relação à variável x , ou a quantas sejam as variáveis suplementares que estivermos trabalhando, ou seja:

$$P_i(t) = \int_0^{\infty} P_i(t, x) dx \quad (4-9)$$

A maneira proposta por Oliveira (2001) para solucionar o sistema de EDP's em questão é através da aplicação de transformadas de Laplace às equações em relação a t , seguida por integração da variável x e inversão da transformada. As equações a seguir consistem no 1º passo, a transformação de Laplace na variável t :

$$\frac{\partial \tilde{P}_0(s, x)}{\partial x} + [s + \lambda(x)]\tilde{P}_0(s, x) = \mu\tilde{P}_1(s, x) + \delta(x - x_0) \quad (4-10)$$

$$\tilde{P}_1(s, x) = \frac{\lambda(x)}{s + \mu} \tilde{P}_0(s, x) \quad (4-11)$$

Onde $\tilde{P}_i(s, x)$ é a transformada de Laplace de $P_i(t, x)$ na variável t . Substituindo a Equação 4-11 na Equação 4-10 e fazendo algumas manipulações algébricas ficamos com uma E.D.O. de P_0 , a qual pode ser resolvida por fator de integração, ficando da seguinte forma:

$$\tilde{P}_0(s, x) = \exp \left[- \int_{x_0}^x s \left(1 + \frac{\lambda(r)}{s + \mu} \right) dr \right] \quad (4-12)$$

Após esta etapa, é necessária ainda a integração de 0 a ∞ em relação a x e a inversão da transformada de Laplace para que alcancemos as funções de probabilidade de estado na forma $P_i(t)$. Até aqui, conseguimos chegar analiticamente, mas os passos seguintes dependem da forma da função $\lambda(r)$, e podem ficar extremamente complexos ou até mesmo impossíveis de se resolver analiticamente, a não ser no caso em que $\lambda(r) = \lambda$, ou seja, em que a função intensidade de falha do componente é constante, situação esta que não é de nosso interesse, como já discutido em seções anteriores.

Os métodos usados para inversão da transformada e integração serão explicados na seção seguinte, para o sistema de n componentes em série.

4.3. O sistema de n componentes em série

O sistema de n componentes em série, como o nome sugere, consiste num conjunto de um número N de componentes numa ligação do tipo série, como se fosse uma linha de produção contínua, sem equipamentos em standby ou paralelo, onde o funcionamento do sistema como um todo só é possível se todos os seus componentes estiverem operando. Isto equivale a dizer que cada vez que um componente falha, todos os demais param imediatamente de operar até o término do reparo do componente falho.

Assume-se ainda que, quando um componente está em reparo, nenhum dos outros pode falhar, não se admitindo falhas fora de operação.

Do ponto de vista dos modelos com variáveis suplementares, este tipo de sistema traz uma grande vantagem. Como os componentes estarão todos ou inativos ou em operação ao mesmo tempo, o tempo de operação desde o início do sistema será o mesmo para todos. Assim, precisaremos de apenas uma variável suplementar r que trará a informação da idade operacional de todos os componentes desde o início do sistema, junto com as constantes x_{0i} , $i=1,2,\dots,N$, que armazenarão o tempo de operação prévio de cada um. As variáveis x_i , $i=1,2,\dots,N$, conterão o tempo operacional total acumulado de cada componente, somando seu tempo prévio com o tempo de operação no sistema atual, ou seja, $x_i = r + x_{0i}$.

Um sistema desse tipo com N componentes pode ser representado por uma Cadeia de Markov com $N+1$ estados, sendo N estados referentes à falha de cada um dos componentes e um estado onde todos estão funcionando, sendo também este o único estado onde o sistema está disponível. A seguir, a Cadeia de Markov descrita:

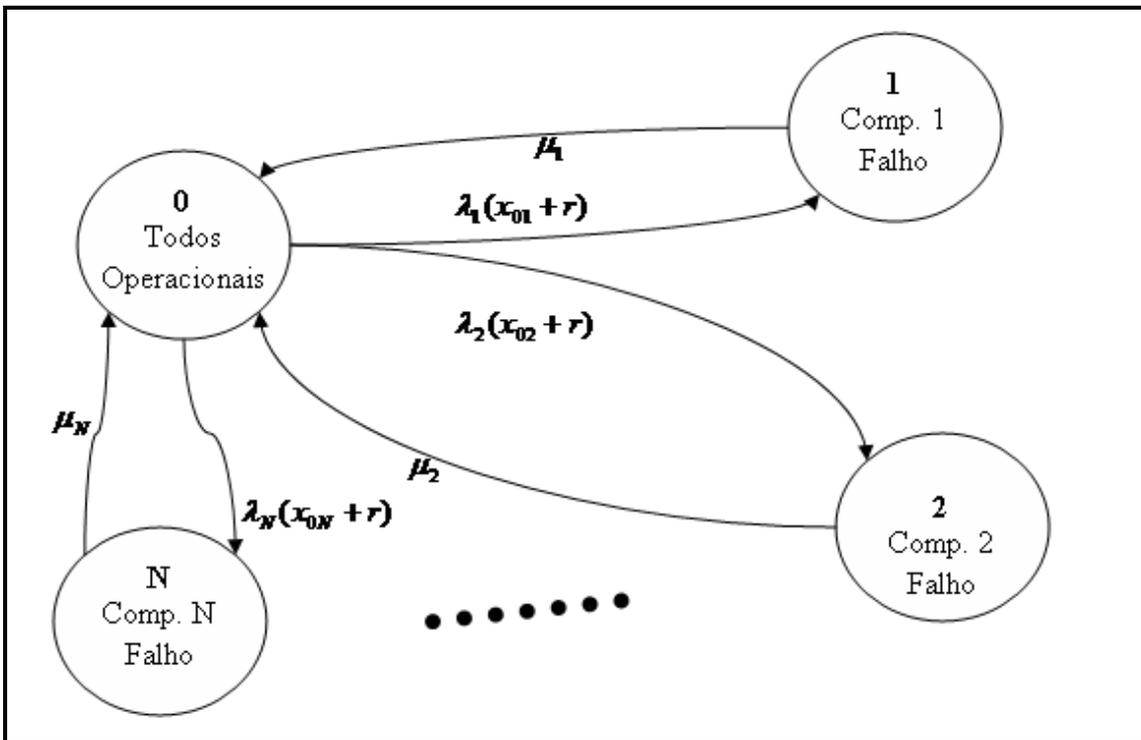


Figura 3 - Gráfico de Markov para sistemas de n componentes em série

Como afirmado em Oliveira (2001), a simples inclusão da variável suplementar r nos dá a informação necessária para considerar o sistema como Markoviano. A idade operacional efetiva de cada componente pode então ser representada por $x_i = r + x_{0i}$, e

suas respectivas funções intensidade de falha são então $\lambda_i(x_i) = \lambda_i(x_{0i} + r)$, $i=1,2,\dots,N$, e as taxas de reparo μ_i , $i=1,2,\dots,N$, são todas admitidas constantes, por motivos já citados. As equações de Markov são, então:

$$\frac{\partial P_0(t, r)}{\partial t} + \frac{\partial P_0(t, r)}{\partial x} = -P_0(t, r) \sum_{i=1}^N \lambda_i(x_{0i} + r) + \sum_{i=1}^N \mu_i P_i(t, r) \quad (4-13)$$

$$\frac{\partial P_i(t, r)}{\partial t} = -\mu_i P_i(t, r) + \lambda_i(x_{0i} + r) P_0(t, r) \quad (4-14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

As condições iniciais para o sistema de EDP's anterior podem ser traduzidas matematicamente da seguinte forma:

$$P_0(0, r) = \delta(r) \quad (4-15)$$

$$P_i(0, r) = 0 \quad (4-16)$$

$$P_0(t, 0) = \delta(t) \quad (4-17)$$

$$P_i(t, 0) = 0 \quad (4-18)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Onde a Equação 4-15 indica que no instante inicial o sistema se encontra no estado 0 e o valor da variável suplementar r é 0. A Equação 4-16 indica que o sistema não pode estar em nenhum dos estados falhos no momento inicial. A Equação 4-17 admite que a variável suplementar r só assume o valor 0 no instante inicial, sendo imediatamente incrementada, mesmo que por um infinitésimo de tempo anterior à primeira falha, quando o sistema inicia a operação. A Equação 4-18 reforça a Equação 4-17 afirmando que o sistema não pode estar num estado falho sem ter operado pelo menos por um infinitésimo de tempo. Em resumo, o sistema inicia em estado operacional, não podendo falhar no mesmo momento que entra em operação e, neste momento, o valor de r é 0. Vale lembrar que r é a idade operacional apenas desde o início deste sistema, e não necessariamente representa a idade operacional total de cada componente, devendo ainda ser somado aos x_{0i} 's para isso.

Aplicando as transformadas de Laplace ao sistema de EDP's e realizando as devidas manipulações algébricas, Oliveira (2001) chegou aos seguintes resultados:

$$\tilde{P}_0(s, r) = \exp\left\{-s \int_0^r \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i(x_{0i} + r')}{s + \mu_i}\right] dr'\right\} \quad (4-19)$$

$$\tilde{P}_i(s, r) = \frac{\lambda_i(x_{0i} + r')}{s + \mu_i} \tilde{P}_0(s, r) \quad (4-20)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Onde $\tilde{P}_i(s, x)$ é a transformada de Laplace de $P_i(t, x)$ na variável t . Mais uma vez, é necessário inverter as transformadas e integrá-las de 0 a ∞ em função de r , como na metodologia proposta por Oliveira (2001). Será detalhada agora a metodologia aqui proposta para atingir as funções de probabilidade e estado como P_i 's desejadas a partir das Equações 4-19 e 4-20, que guarda muitas semelhanças e algumas diferenças com a metodologia de Oliveira (2001).

Em primeiro lugar, realiza-se aqui a ordem inversa da sugerida por Oliveira (2001), fazendo antes a integração de 0 a ∞ em r , para depois invertermos as transformadas, iniciando por:

$$\tilde{P}_i(s) = \int_0^{\infty} \tilde{P}_i(s, r) dr; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4-21)$$

Como estas integrais são intratáveis analiticamente, será utilizado um método numérico de integração chamado Gauss-Legendre, que é uma quadratura Gaussiana. Segundo Press et. al. (1992), as quadraturas Gaussianas são métodos de integração numérica que permitem não só a seleção dos pesos, mas também das abscissas nas quais será calculada a função que se deseja integrar, e posteriormente multiplicada pelos respectivos pesos. Esta propriedade dá às quadraturas Gaussianas o dobro de graus de liberdade em relação ao tradicional método de Newton-Cotes, o que se reverte em maior precisão dos cálculos quando o integrando pode ser facilmente aproximado por um polinômio. Dentre as quadraturas Gaussianas, o método que tem o conjunto de abscissas e pesos mais comum é o Gauss-Legendre. Para maiores detalhes do algoritmo utilizado no cálculo dos pesos e abscissas, consultar Press et. al. (1992).

Este método serve apenas para integrais definidas, de modo que faz-se necessário usar a mudança de variável:

$$z = e^{-r}$$

$$\tilde{P}_i(s) = \int_0^{\infty} \tilde{P}_i(s, r) dr = \int_1^0 \frac{\tilde{P}_i(s, -\ln z)}{-z} dz = \int_0^1 \frac{\tilde{P}_i(s, -\ln z)}{z} dz \quad (4-22)$$

A integral pode ser então aproximada por:

$$\tilde{P}_i(s) = \sum_{k=1}^{100} w_k \frac{\tilde{P}_i(s, -\ln z_k)}{z_k} \quad (4-23)$$

O método Gauss-Legendre fornece uma quantidade Q desejada de pares de valores correspondentes, sendo que a cada z_k , que é o ponto onde a função de dentro da

integral vai ser calculada, corresponde um w_k , um peso que vai multiplicar o valor da função no ponto z_k . A integral aproximada é dada pelo somatório dos pesos multiplicados pela função calculada nos respectivos pontos. Foi utilizada uma quantidade de pontos $Q=100$, por ter fornecido boa precisão nos resultados e velocidade no programa implementado.

Consegue-se, então, sair dos $\tilde{P}_i(s, r)$'s e chegar aos $\tilde{P}_i(s)$'s. Será explicitado agora o método de inversão das transformadas de Laplace. Da definição de transformada de Laplace, temos que:

$$\tilde{P}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_i(t) dt \quad (4-24)$$

Fazendo a mudança de variável $y = e^{-t}$, a Equação 4-24 fica:

$$\tilde{P}_i(s) = \int_0^1 y^{s-1} P_i[-\ln(y)] dy \quad (4-25)$$

Esta última integral pode também, agora, ser aproximada por uma quadratura Gaussiana de acordo com o método Gauss Legendre que já vimos:

$$\tilde{P}_i(s) = \sum_{j=1}^K w_j y_j^{s-1} P_i[-\ln(y_j)] \quad (4-26)$$

Se for utilizada esta mesma equação em K diferentes pontos de s , ter-se-á então um sistema de equações lineares, com K equações e K incógnitas, da seguinte forma matricial:

$$[G][P] = [\tilde{P}] \quad (4-27)$$

Onde:

$$[G] = \begin{bmatrix} w_1 y_1^{s_1-1} & w_2 y_2^{s_1-1} & \cdot & \cdot & \cdot & w_K y_K^{s_1-1} \\ w_1 y_1^{s_2-1} & \cdot & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ w_1 y_1^{s_K-1} & & & & & w_K y_K^{s_K-1} \end{bmatrix} \quad [P_i] = \begin{bmatrix} P_i[-\ln(y_1)] \\ P_i[-\ln(y_2)] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_i[-\ln(y_K)] \end{bmatrix} \quad [\tilde{P}_i] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_i(s_1) \\ \tilde{P}_i(s_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{P}_i(s_K) \end{bmatrix}$$

Será utilizado um número $K=16$ de pontos onde serão calculadas as incógnitas $P_i[-\ln(y_j)]$, de acordo com uma análise de sensibilidade já realizada para este método

em Oliveira (2001). Assim, o método Gauss-Legendre nos dará 16 pesos w_k 's e 16 pontos y_k 's correspondentes nos quais serão calculadas as incógnitas $P_i[-\ln(y_j)]$.

Há ainda um problema: ao reverter a mudança de variável feita, retransformando $-\ln(y_j)$ em t_j percebeu-se que o maior dos t_j 's fica bem aquém do tempo de missão T pré-determinado. Para corrigir este problema, foi criado um fator de correção a , calculado da seguinte forma:

$$a = \frac{T}{t_1} = \frac{T}{-\ln(y_1)} \quad (4-28)$$

Ou seja, a é simplesmente a divisão do tempo de missão pelo maior tempo t_j que se obtém revertendo a mudança de variável que havia sido feita, que corresponde ao t_1 . Este fator de escala, multiplicando os valores de tempo nos quais serão calculadas as probabilidades de estado, causará um espalhamento dos mesmos, deixando o tempo de pertencer ao domínio $[0; t_1]$ e passando a pertencer ao domínio $[0; T]$, que é o que deseja-se alcançar.

Em resumo, usamos as Equações 4-19 e 4-20, seguidas pela integração das Equações 4-22 e 4-23, para calcular valores para as funções transformadas de probabilidade de cada estado nos pontos $s=1,2,\dots,16$, e assim formamos as matrizes $[\tilde{P}_i]$. A matriz $[G]$ tem os valores dados pelo método Gauss-Legendre, elevados às potências de $s = 1,2,\dots,16$. Tem-se, então, um sistema de equações lineares 16×16 para cada estado, cuja resolução dará os valores da função de probabilidade do respectivo estado, dependente apenas do tempo t , este pertencendo ao domínio $[0; T]$. A resolução dos sistemas de equações lineares pode ser feita por diversos métodos numéricos (SANTOS; SILVA, 2006). Aqui, foi utilizado o método de decomposição LU (PRESS et al, 1992).

Foram obtidos excelentes resultados com essa metodologia para sistemas em série, que foram comparados com os resultados mostrados em Oliveira (2001) e com simulação através de um algoritmo Monte Carlo implementado. Em complemento aos testes de Oliveira (2001), mostram-se aqui também casos onde são inseridos componentes já utilizados no sistema, ou seja, com idade inicial maior que zero. Os resultados obtidos são expostos no Capítulo 6.

4.4. As dificuldades da metodologia para sistemas mais complexos

Para os sistemas de componentes em série, viu-se que não é difícil chegar analiticamente até as Equações 4-19 e 4-20. É somente a partir destas equações que se parte então para a integração em função das variáveis suplementares e inversão das transformadas de Laplace, ambas utilizando métodos numéricos. Acontece, porém, que, em alguns sistemas um pouco mais complexos, não é possível avançar tanto analiticamente quanto o é para o sistema de componentes em série.

Oliveira (2001) exemplifica ainda mais dois tipos de sistema mais complexos do que o de componentes em série onde é possível evoluir analiticamente e seguir a mesma metodologia destes. Em nenhum deles, todavia, existe sequer um estado onde funcionem ao mesmo tempo dois componentes cujas funções intensidade de falha variem com o tempo. Num dos problemas mais complexos descritos em Oliveira (2001), é modelado um sistema onde 3 bombas funcionam em paralelo, porém, apenas uma delas tem função intensidade de falha variável com o tempo, enquanto as outras duas têm função intensidade de falha constante, o que possibilita a aplicação de sua metodologia. O problema é revisitado em Oliveira et al (2005).

Será mostrado a seguir, com o exemplo do sistema de 2 componentes em paralelo com funções intensidade de falha variáveis, o aumento na complexidade matemática que este simples fato acarreta.

4.4.1. O sistema de 2 componentes em paralelo com funções intensidade de falha variáveis

Consiste este sistema, que também pode ser chamado de sistema com redundância, num par de componentes que funcionam simultaneamente. A falha de um ou de outro não leva à indisponibilidade do sistema, ficando este indisponível apenas quando ambos os componentes estão inoperantes. Um dos componentes pode falhar mesmo quando o outro está em reparo, caso em que o conjunto entra no estado indisponível, porém os componentes não podem falhar ao mesmo tempo, saindo direto do estado de pleno funcionamento para o indisponível. Podemos representar graficamente este sistema pela Cadeia de Markov da Figura 4.

As taxas de reparo serão também consideradas constantes, enquanto as funções intensidade de falha variam ao longo do tempo. Esta última consideração traz a necessidade de inclusão de duas variáveis suplementares, x_A e x_B , nas equações de Markov, que medirão os efetivos tempos de funcionamento dos respectivos componentes A e B, e das quais dependerão as funções intensidade de falha $\lambda_A(x_A)$ e $\lambda_B(x_B)$.

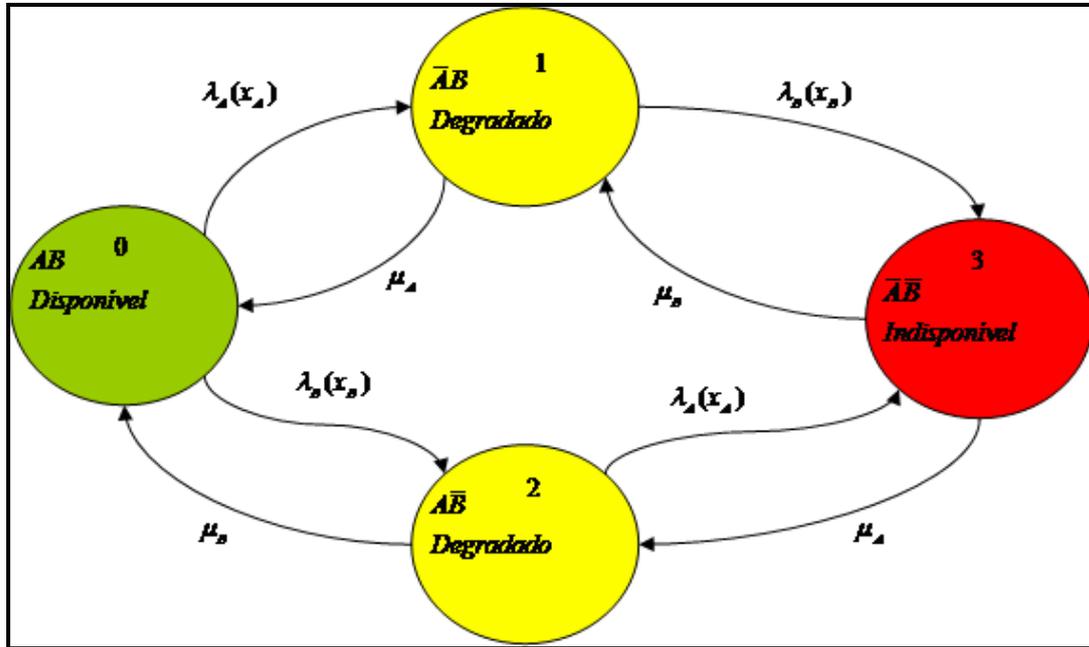


Figura 4 - Gráfico de Markov para o sistema de 2 componentes em paralelo

É importante perceber que, no estado 0, os componentes A e B funcionam com funções intensidade de falha variáveis, ou seja, enquanto o sistema se encontra neste estado, temos duas variáveis suplementares e duas funções intensidade de falha variando ao mesmo tempo. Isto vai trazer um acréscimo de complexidade nas equações de Markov, como mostrado a seguir:

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\partial P_0}{\partial x_A} + \frac{\partial P_0}{\partial x_B} = -\lambda_A(x_A)P_0 - \lambda_B(x_B)P_0 + \mu_A P_1 + \mu_B P_2 \quad (4-29)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial P_1}{\partial x_B} = \lambda_A(x_A)P_0 - \lambda_B(x_B)P_1 - \mu_A P_1 + \mu_B P_3 \quad (4-30)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\partial P_2}{\partial x_A} = -\lambda_A(x_A)P_2 + \lambda_B(x_B)P_0 - \mu_B P_2 + \mu_A P_3 \quad (4-31)$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial t} = \lambda_B(x_B)P_1 + \lambda_A(x_A)P_2 - \mu_A P_3 - \mu_B P_3 \quad (4-32)$$

Onde $P_i = P_i(t, x_A, x_B)$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$

As equações estão sujeitas às seguintes condições iniciais:

$$P_0(0, x_A, x_B) = \delta(x_A - x_{0A}) \cdot \delta(x_B - x_{0B}) \quad (4-33)$$

$$P_i(0, x_A, x_B) = 0 \quad (4-34)$$

$$P_0(t, x_{0A}, x_B) = \delta(t) \cdot \delta(x_B - x_{0B}) \quad (4-35)$$

$$P_i(t, x_{0A}, x_B) = 0 \quad (4-36)$$

$$P_0(t, x_A, x_{0B}) = \delta(t) \cdot \delta(x_A - x_{0A}) \quad (4-37)$$

$$P_i(t, x_A, x_{0B}) = 0 \quad (4-38)$$

Onde a Equação 4-33 assegura que no instante $t=0$ o sistema se encontra no estado 0 e as variáveis suplementares então são $x_A = x_{0A}$ e $x_B = x_{0B}$. A Equação 4-34 garante que o sistema não pode estar em nenhum outro estado no instante $t=0$. As Equações 4-35, 4-36, 4-37 e 4-38 garantem que cada variável suplementar só pode assumir o seu valor original quando $t=0$ e a outra variável suplementar também estiver com seu valor original, visto que nenhum componente pode falhar imediatamente após a entrada em operação, tendo que funcionar ao menos por um infinitésimo de tempo, e assim ambas as variáveis suplementares sofrem no mínimo algum incremento.

No caso do sistema de componentes em série, o sistema de EDP's possuía apenas uma equação com duas derivadas parciais, as demais contendo apenas uma derivada parcial. Situação similar ocorre com outros sistemas mais complexos descritos em Oliveira (2001), onde cada equação do sistema de EDP's contém no máximo duas derivadas parciais. Isto permite que uma das derivadas seja eliminada pela transformada de Laplace, transformando a E.D.P. numa E.D.O., que pode ser resolvida, por exemplo, através de um fator de integração. Só a partir daí é necessário utilizar métodos numéricos.

Para os casos de sistemas onde mais de um componente com função intensidade de falha variável funciona no mesmo estado, como no sistema em paralelo aqui descrito, teremos equações no sistema de EDP's com mais de duas derivadas parciais. Nestes, a metodologia das transformadas de Laplace descrita até aqui mostra-se insuficiente. Isto porque se aplicarmos uma transformada de Laplace, por exemplo, à Equação 4-29, continuaremos lidando com uma E.D.P., que não pode ser resolvida analiticamente.

A dificuldade vai aumentando na medida em que são adicionados componentes com função intensidade de falha variável em paralelo ao sistema, visto que para cada novo componente é necessário criar uma nova variável suplementar. Assim, as EDP's

para os estados onde k componentes estão operacionais serão de ordem $k+1$, ou seja, o lado esquerdo da EDP referente ao estado j , que possui k componentes operacionais, terá a forma:

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \dots \quad (4-39)$$

4.4.2. A necessidade de novas metodologias

Diante desta forte restrição no trato analítico das equações Markovianas para sistemas com variáveis suplementares mais complexos, partimos na busca de métodos numéricos que possibilitassem a resolução das mesmas, com o intuito de definir uma metodologia mais geral, capaz de modelar um leque muito mais abrangente de sistemas, como o de n componentes em paralelo e os mistos série-paralelo.

Um método numérico proposto em Oliveira (2001) é o das diferenças finitas, que usa integrações em passos discretizados de tempo para eliminar as derivadas parciais, e aproximações numéricas para estas integrações. Foram encontradas diversas dificuldades na aplicação deste método aos sistemas mais complexos, tanto de ordem teórica quanto do ponto de vista computacional. Uma descrição mais profunda do método e das dificuldades encontradas, tais como o grande número de pontos em que se precisa calcular e a consideração das condições iniciais, segue no Anexo A.

Percebeu-se, porém, que as simulações do algoritmo Monte Carlo feitas para validar a metodologia do sistema de componentes em série estavam sendo bastante rápidas, não ficando muito acima do tempo gasto com a metodologia. Implementou-se, então, um algoritmo Monte Carlo generalista, capaz de modelar sistemas com as mais variadas configurações, inclusive o de n componentes em paralelo e os mistos série-paralelo. Persistiu a verificação de que os tempos de simulação não estavam sendo altos, e os resultados bastante coerentes.

Dada a eficiência e velocidade observadas no algoritmo Monte Carlo em questão, e considerando as liberdades de modelagem que as técnicas de simulação nos trazem, decidiu-se então eliminar uma forte hipótese restritiva presente na metodologia proposta por Oliveira (2001): a de que os componentes sofrem apenas reparos mínimos. Esta hipótese, como já visto, aumenta o grau de pessimismo nas medidas de disponibilidade resultantes do modelo visto que, na realidade, é mais comum que o

reparo leve o componente a um estado intermediário entre o tão ruim quanto velho e o tão bom quanto novo. Seria mais adequado aos casos reais que o modelo de variáveis suplementares aceitasse também a hipótese de reparos modelados por um PRG, ou seja, o reparo poderia ter uma eficácia q qualquer, capaz de levar um componente a um estado desde o melhor do que novo até o pior do que velho.

Será descrito, então, nas sessões seguintes, um modelo geral capaz de modelar diversas configurações de componentes com funções intensidade de falha variáveis no tempo e dependentes de variáveis suplementares, e reparos submetidos a um PRG. Este modelo, que é a principal contribuição desta monografia, será solucionado por um algoritmo Monte Carlo.

5. O Modelo Proposto: Variáveis Suplementares e PRG

5.1. Introdução ao Modelo

O modelo de variáveis suplementares trabalhado até agora, que tem como base os trabalhos de Oliveira (2001), como já afirmado antes, tem como uma de suas restrições a hipótese de que os componentes estão sujeitos apenas a reparos mínimos. Estaríamos diante, portanto, de um modelo de PMNH, não fosse o uso das variáveis suplementares.

Em outras literaturas, encontram-se modelos onde não há a restrição de reparos exclusivamente mínimos. Yañez et al (2002), trabalha com simulações de sistemas onde os reparos podem levar o sistema desde um estado pior do que velho até um melhor do que novo. Propõe estimadores de máxima verossimilhança para calcular os parâmetros característicos do PRG, especialmente o parâmetro de eficácia do reparo. Considera ainda que os reparos são pontuais, isto é, não consomem nenhum tempo, apenas trazem algum tipo de impacto de renovação ao componente. Rocha (2006) também propõe um modelo de simulação de Processos Markovianos, as transições de reparo são modeladas por um PRG, propondo, entretanto, uma metodologia bayesiana para inferência de seus parâmetros. Moura et al (2007) utilizam o PRG para avaliar o grau de eficácia de ações de reparo.

É nosso objetivo aqui introduzir um modelo de simulação que alie os benefícios decorrentes do uso de variáveis suplementares em processos Markovianos à maior flexibilidade nas hipóteses de reparo trazida por um PRG.

Para prosseguir na descrição do modelo, é fundamental agora explicitar os conceitos de parâmetro de eficácia do reparo e idade virtual do sistema. Yañez et al (2002) definem a idade virtual A_n do sistema como a idade calculada para o sistema após o n -ésimo reparo. A idade virtual diferiria da idade real do sistema apenas por considerar os efeitos do reparo. Seu cálculo depende do parâmetro de eficácia do reparo q , termo que será usado com bastante frequência daqui para frente, e do tipo de PRG que será adotado: se o modelo Kijima do tipo I ou do tipo II.

Kijima & Sumita (1986) fazem a diferenciação entre os modelos Kijima do tipo I e II. O Kijima tipo I assume que um reparo só tem efeito de renovação no intervalo de

tempo entre a última e a penúltima falha. Isto é, o n -ésimo reparo só tem efeito no tempo decorrido entre a falha $n-1$ e a falha n , não sendo capaz de reverter os danos ocorridos antes da falha $n-1$. Se considerarmos como Δ_n o tempo decorrido entre as duas últimas falhas, podemos dizer que, enquanto a idade real do sistema é incrementada de um valor Δ_n , sua idade virtual sofre um acréscimo de $q\Delta_n$. Assim, a idade virtual após o n -ésimo reparo pode ser calculada por:

$$A_n = A_{n-1} + q\Delta_n = qt_n \quad (5-1)$$

Onde t_n é a idade real do sistema após o n -ésimo reparo, ou o tempo de calendário. No início da operação do sistema a idade real é igual à virtual, surgindo a diferença apenas a partir do primeiro reparo. Lembramos que a definição como mostrada até aqui é de um PRG normal, ainda sem o uso de variáveis suplementares.

O Kijima tipo II já assume a capacidade de um reparo eliminar, com algum grau de eficácia, os danos de toda a vida operacional do sistema, e não apenas do intervalo entre as duas últimas falhas. O cálculo da idade virtual é então modificado para:

$$A_n = q(A_{n-1} + \Delta_n) = q(q^{n-1}\Delta_1 + q^{n-2}\Delta_2 + \dots + q^{n-n}\Delta_n) \quad (5-2)$$

Percebe-se que, a cada reparo, toda a idade virtual precedente do componente é multiplicada pelo parâmetro de eficácia do reparo q . Kijima & Sumita (1986) propõem então que os tempos esperados para as próximas falhas podem ser representados pela seguinte função de distribuição acumulada condicionada na idade do sistema imediatamente após o n -ésimo reparo:

$$F(\Delta_n | A_{n-1}) = \frac{F(\Delta_n + A_{n-1}) - F(A_{n-1})}{1 - F(A_{n-1})} \quad (5-3)$$

Isto é, a probabilidade da próxima falha passa a depender não mais da idade real, mas da idade virtual do sistema.

Jacopino, Groen & Mosleh (apud ROCHA, 2006) diferenciam os casos onde é mais apropriado o uso de um Kijima do tipo I ou II. Segundo eles, o tipo I é mais adequado para modelar os reparos de um componente individual, enquanto o tipo II se encaixaria melhor na modelagem de reparos de um sistema complexo. Como neste trabalho estaremos sempre tratando com sistemas complexos, usar-se-á, então, o Kijima tipo II.

Em ambos os tipos, é fácil notar que o q determina o tipo de política de reparo tratada pelo modelo. Assim:

- $q=0$ representa um modelo com reparos perfeitos, visto que após cada reparo a idade virtual do sistema retorna a 0, isto é, ele fica tão bom quanto novo. É o caso do PMH;

- $q=1$ representa um modelo de reparos mínimos, uma vez que a idade virtual do sistema será sempre igual à sua idade real, sendo o reparo capaz apenas de levá-lo a um estado de tão bom quanto estava imediatamente antes da falha. É o caso do PMNH;

- $0 < q < 1$ representa reparos imperfeitos, que levam o sistema a um estado intermediário entre o tão ruim quanto velho e o tão bom quanto novo, e a idade virtual é uma fração da idade real;

- $q > 1$ é o reparo pior, e leva o sistema a um estado pior do que velho;

- $q < 0$ é o reparo melhor, e leva o sistema a um estado melhor do que novo, se é que é possível esta hipótese.

Os dois últimos casos têm ocorrência muito rara na prática, como podemos imaginar intuitivamente. Os gráficos abaixo, retirados de Rocha (2006), mostram a relação entre idade real e virtual do sistema para os 3 primeiros casos de q :

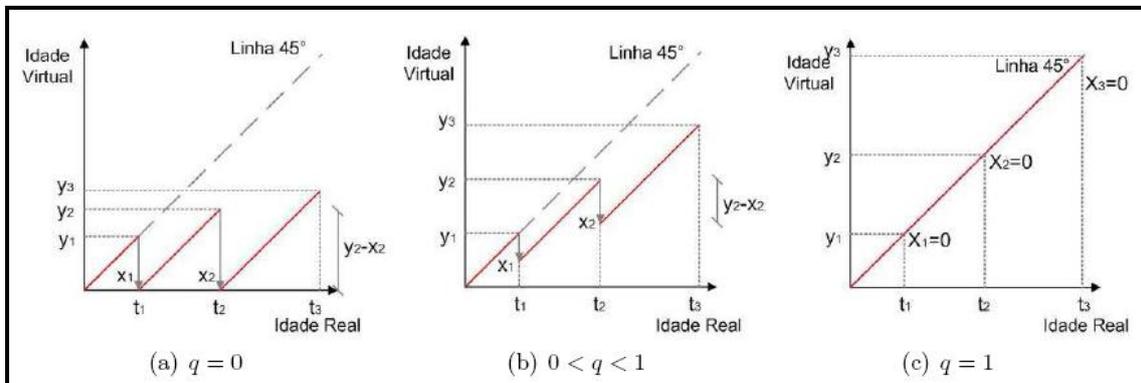


Figura 5 - Relação entre idade real e idade virtual

Através da análise da Figura 5, pode-se notar que os reparos neste caso estão sendo pontuais. É fundamental notar também que, até agora, na descrição de idade virtual, foi falado apenas em idade virtual do sistema, que guardava alguma forma de relação com a idade real, esta por sua vez sendo o tempo de calendário. A adição das variáveis suplementares ao modelo permite que se tenha não uma idade virtual para o sistema, mas sim uma para cada componente.

A multiplicação da variável suplementar pelo parâmetro de eficácia do reparo q , porém, quebraria com o conceito de que a variável suplementar armazena todo o tempo de vida operacional efetiva de um componente, pois alteraria seu valor após cada reparo.

Com o intuito de possibilitar seu uso no modelo sem ferir os conceitos adotados até aqui, será dada então a nomenclatura de variável suplementar virtual à variável suplementar que sofre os efeitos do parâmetro de eficácia do reparo q , ficando a nomenclatura de variável suplementar real para a variável suplementar como havia sido definida até aqui, isto é, aquela que armazena todo o tempo operacional efetivo de cada componente.

Dessa maneira, pode-se dizer que a variável suplementar virtual está para a variável suplementar real assim como a idade virtual do sistema está para sua idade real, com a diferença de que a variável suplementar é específica de cada componente, e não do sistema como um todo.

Junto com estas mudanças, vêm as já mencionadas vantagens do uso de variáveis suplementares, como a possibilidade de inserção de componentes já usados e a modelagem adequada de reparos não pontuais. Esta inovação permite a união dos benefícios das variáveis suplementares com os do PRG.

Assim, em se tratando de um Kijima tipo II, onde o reparo tem efeito sobre toda a vida do componente anterior ao reparo, e considerando x_i^A o valor da variável suplementar virtual correspondente ao componente i antes do seu reparo, e x_i^D o valor da mesma variável imediatamente após o seu reparo, dizemos que:

$$x_i^D = q \cdot x_i^A \quad (5-4)$$

Como x_i^A armazena todo o tempo operacional do componente até o reparo, inclusive o tempo operacional em outros sistemas anteriores que não o em questão, e ainda os efeitos da multiplicação por q em todos os reparos anteriores fica clara uma relação equivalente ao Kijima tipo II. Percebemos também que um reparo só terá efeitos sobre a idade virtual do componente reparado, e não de todo o sistema.

Os gráficos da Figura 6 a seguir exemplificam as relações entre o tempo de calendário, a variável suplementar real e a virtual de um dado componente.

Note que nos três gráficos os reparos ocorrem nos intervalos de [5;8] e [14;16] do tempo de calendário, intervalos nos quais a variável suplementar real e a virtual ficam estacionárias, com a diferença de que, ao final destes intervalos, a variável suplementar virtual sofre a multiplicação pelo parâmetro de eficácia do reparo q . Note ainda que no gráfico da figura 6.b), onde $q=1$, a variável suplementar virtual é sempre igual à real.

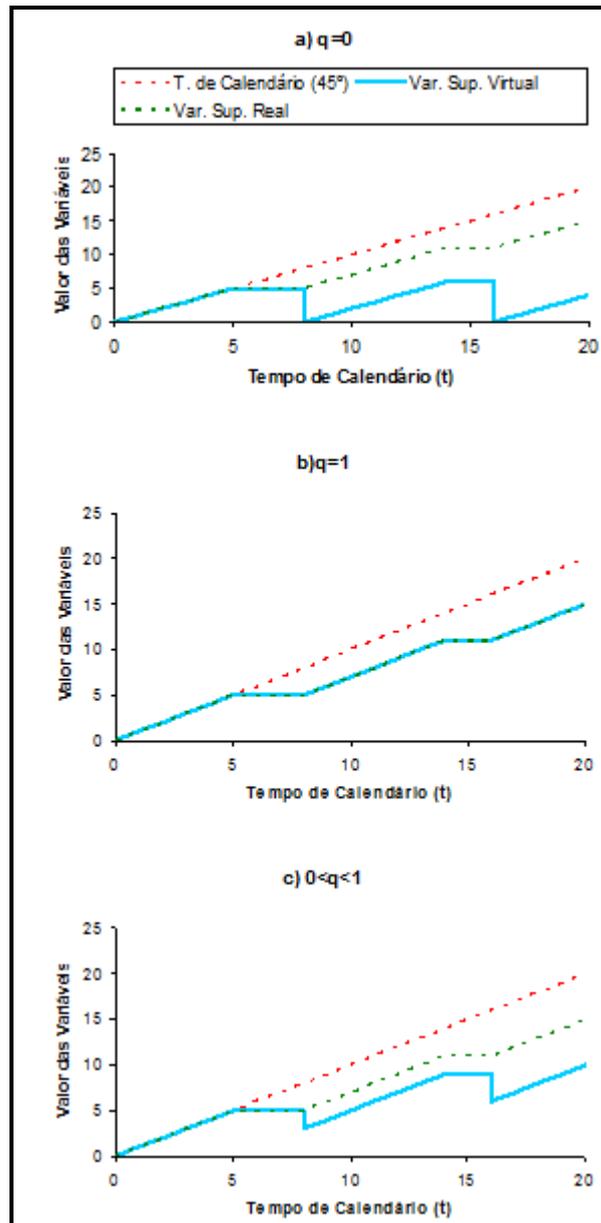


Figura 6 - Relação entre variável suplementar real, virtual, e tempo de calendário

É importante lembrar ainda que:

- nos PMH's, as funções intensidade de falha não dependem de nenhuma variável de tempo, são constantes;
- nos PMNH's tradicionais, as funções intensidade de falha dependem do tempo de calendário;
- nos PMNH's com variáveis suplementares, as funções intensidade de falha dependem da variável suplementar (real);
- no modelo aqui proposto, as funções intensidade de falha dependem da variável suplementar virtual.

Para sistemas sujeitos a envelhecimento, quanto maior a variável de tempo determinante da função intensidade de falha, maior será esta última, e mais degradado estará o sistema. Ou seja, o grau de pessimismo de um modelo depende diretamente do quão rápido ele considera o crescimento da variável da qual a função intensidade de falha é dependente. Quanto mais rápido crescer esta variável, mais rápido é o envelhecimento atribuído ao sistema, e maior é o pessimismo do modelo. Analisando os gráficos acima, não fica difícil entender porque os PMNH's são mais pessimistas (dependem do tempo de calendário), os PMNH's com variáveis suplementares são menos pessimistas (dependem das variáveis suplementares reais) e o modelo aqui proposto (depende das variáveis suplementares virtuais) é o menos pessimista dentre estes três, ao menos nos casos a) e c), onde a variável suplementar virtual cresce mais lentamente do que a real e o tempo de calendário. Os testes demonstrarão esta relação entre os modelos.

Agora, já de posse dos conceitos utilizados de parâmetro de eficácia do reparo, variável suplementar real e virtual, e conhecendo melhor o funcionamento de um PRG aliado ao uso de variáveis suplementares, podemos partir ao detalhamento do algoritmo Monte Carlo que solucionará este modelo.

5.2. O algoritmo Monte Carlo para o modelo

O primeiro passo neste algoritmo é a determinação dos pontos na escala do tempo de calendário onde queremos calcular as funções de probabilidade de estado. Para fins de comparação mais fácil e até mesmo validação, desejamos que o algoritmo calcule as funções de probabilidade nos mesmos 16 pontos de tempo usados na metodologia dos sistemas em série, mostrada na seção 4.3.

As variáveis abaixo serão usadas na representação do algoritmo, portanto é necessário defini-las:

t_n - são os tempos onde serão calculadas as funções de probabilidade de estado, $\forall n = 1, 2, \dots, 16$, definidos da mesma forma da seção 4.3;

a - constante usada para o espalhamento dos tempos t_n , a mesma calculada na Equação 4-28;

z_n - as mesmas abscissas calculadas pelo método Gauss-Legendre,
 $\forall n = 1, 2, \dots, 16$, como exposto na seção 4.3;

NE - número de estados do sistema;

C_i - contador de visitas ao estado i , $\forall i = 1, 2, \dots, NE$;

NA - número de amostras usadas no algoritmo Monte Carlo;

TC - tempo de calendário;

q - parâmetro de eficácia do reparo;

K - número de componentes do sistema;

CT_{0k} - tempo de operação inicial do componente k , $\forall k = 1, 2, \dots, K$ antes de sua entrada no sistema;

CT_k - tempo de operação acumulado do componente k , $\forall k = 1, 2, \dots, K$, correspondente à sua variável suplementar virtual;

EI - Estado inicial;

U_i - variável aleatória de distribuição uniforme $[0; 1]$;

TCT_i - tempo candidato de transição para o estado i ;

TT - tempo de transição vencedor ($TT = \min\{TCT_1, TCT_2, \dots, TCT_{NE}\}$);

$Prob_i(t_n)$ - vetor contendo os valores calculados da função de probabilidade do estado i , $\forall i = 1, 2, \dots, NE$ nos 16 pontos t_n , $\forall n = 1, 2, \dots, 16$.

As demais variáveis que aparecerem no algoritmo e que não foram citadas aqui são apenas variáveis auxiliares, não sendo necessário descrevê-las melhor. Na forma de pseudo-código, o algoritmo pode ser assim mostrado:

Enquanto ($n > 0$) faça:

1. $t_n = -a \ln(z_n)$;
2. Faça $C_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, NE$, e faça $j = 0$;
3. Enquanto ($j < NA$) faça:
 - A. Faça $TC = 0$;
 - B. Faça $CT_k = CT_{0k}$, $\forall k = 1, 2, \dots, K$;
 - C. Faça $Fonte = EI$;
 - D. Enquanto ($TC < t_n$) faça:
 - a. Para $i = 1, 2, \dots, NE$;

- i.** Amostre uma variável aleatória U_i ;
 - ii.** Pegue a transição do estado *Fonte* para o estado i e o correspondente componente k que é alterado por esta transição;
 - iii.** Estime TCT_i , invertendo a CDF (função de distribuição acumulada) da transição condicionada no tempo acumulado CT_k do componente k ;
- b.** Faça $TT = \min\{TCT_1, TCT_2, \dots, TCT_{NE}\}$;
 - c.** Se $(TT = TCT_i)$, faça *Destino* = i ;
 - d.** Faça $TC = TC + TT$;
 - e.** Faça $CT_k = CT_k + TT$ para todos os componentes k que estiverem operacionais no estado *Fonte*;
 - f.** Se $(TT = TCT_i)$ e a transição de *Fonte* para i é de reparo do componente k , calcule q e faça $CT_k = q \cdot CT_k$;
 - g.** Se $(TC < t_n)$ faça *Fonte* = *Destino*;
- E.** Faça $i = \text{Fonte}$, e incremente o contador $C_i = C_i + 1$;
 - F.** Faça $j = j + 1$
- 4.** Faça $Pr ob_i(t_n) = C_i / NA, \forall i = 1, 2, \dots, NE$;
 - 5.** Faça $n = n - 1$.

Note a importância do passo f., pois é ele quem faz a diferença entre um modelo com variáveis suplementares e um com variáveis suplementares aliadas a um PRG. Note ainda que, neste mesmo passo, o comando “calcule q ” não restringe como este cálculo é feito, nem os valores que q pode assumir. Assim, daremos mais tarde exemplos onde q sempre é igual a 0 (reparo perfeito), sempre é igual a 1 (reparo mínimo), sempre é igual a outra constante qualquer ou ainda varia de acordo com alguma distribuição de probabilidade qualquer que definirmos (PRG). Este algoritmo, assim como a metodologia analítico-numérica exposta no Capítulo 4, foi implementado em linguagem computacional C++. A linguagem foi escolhida devido à proximidade deste autor com a mesma, tendo-a já utilizado em trabalhos anteriores, quando no período de Iniciação Científica. Os testes são detalhados no próximo capítulo.

6. Testes e Análise de Resultados dos Modelos

6.1. Metodologia Analítico-Numérica: Sistema de n componentes em série

Como citado na seção 4.3, a metodologia proposta aqui para o tratamento analítico e numérico dos sistemas em série tem como base os estudos de Oliveira (2001), mas apresenta algumas diferenças em relação à mesma. Entre elas, a de maior relevância prática é a possibilidade de inclusão de componentes com idades avançadas, ou seja, já previamente utilizados em outros sistemas.

Serão mostrados aqui, então, testes para dois sistemas de componentes em paralelo, os mesmos que foram testados na tese de Oliveira (2001), para fins de comparação. Ao mesmo tempo, serão testados estes sistemas se os mesmos fossem iniciados com componentes já utilizados, isto é, com idade prévia de funcionamento.

É importante ressaltar que, em todos os testes deste Capítulo 6, estará sendo feita sempre uma presunção dos parâmetros das taxas de transição, pois não se está tratando de um estudo de caso para avaliar um sistema real, mas do desenvolvimento de um modelo teórico que possa, posteriormente, ser aplicado a sistemas reais. Para a estimação de taxas de transição em sistemas reais, pode-se usar, por exemplo, inferência estatística que teste a adequação de dados reais de falha e reparo às diversas distribuições de probabilidade possíveis. Para maior aprofundamento na estimação de parâmetros para taxas de transição com base em conjuntos de dados reais, ver Crowder et al (1991).

6.1.1. Conjunto de Testes 1

O primeiro sistema é o de dois componentes em série, sendo que ambos têm suas funções intensidade de falha modeladas por uma distribuição Weibull de parâmetros $\beta = 2,0$ e $\alpha = 850$ horas, e taxas de reparo constantes $\mu = 0,01/h$. Este sistema equivale ao caso 5 do trabalho de Oliveira (2001). Considera-se que o sistema está disponível apenas quando no estado em que ambos os componentes estão operacionais. O teste foi feito para um tempo de missão de 8760 horas (1 ano).

A Tabela 1 resume os resultados obtidos pelos diferentes modelos. De modo a simplificar sua visualização. As colunas são enumeradas como segue a seguir:

1- Disponibilidade obtida pela metodologia proposta na seção 4.3 para o sistema em questão com componentes novos (idade prévia 0);

2- Disponibilidade obtida pelo modelo Monte Carlo com PRG e variáveis suplementares do Capítulo 5 com componentes novos e reparos sempre mínimos ($q=1$);

3- Disponibilidade obtida pela metodologia proposta na seção 4.3 para o sistema em questão com componentes usados;

4- Disponibilidade obtida pelo modelo Monte Carlo com PRG e variáveis suplementares do Capítulo 5 com componentes usados e reparos sempre mínimos ($q=1$);

5- Disponibilidade obtida em Oliveira (2001), de acordo com sua metodologia, para o sistema com componentes novos. Estes resultados estão ao lado de uma segunda coluna de tempo porque o autor fez o teste com 15 pontos, e não com 16, como ele mesmo sugere.

Quando falar-se em componentes já usados, para este teste, estará se referindo a um tempo operacional prévio de 1000 horas para um dos componentes e de 500 horas para o outro, não fazendo diferença qual deles é o mais velho ou o mais novo no início, visto que ambos possuem distribuições iguais de função intensidade de falhas e estamos interessados apenas no estado em que ambos estão operacionais.

O gráfico da Figura 7 nos ajuda a visualizar melhor os cálculos de disponibilidades efetuados por todos os modelos. Observa-se no gráfico que os modelos 1 e 2 coincidem quase que perfeitamente, enquanto o 5, o de Oliveira (2001), mesmo calculado em pontos diferentes no tempo, delimita uma curva praticamente igual de disponibilidade. Os resultados destes modelos estão em plena correspondência.

Os modelos 3 e 4 são os que consideram os componentes com idade operacional prévia. Suas curvas de disponibilidade são praticamente idênticas, indicando a correspondência de resultados entre o modelo de PRG, Monte Carlo e variáveis suplementares proposto no Capítulo 5 e a metodologia analítico-numérica da sessão 4.3. Notamos ainda que esta curva, em comparação à dos componentes novos, apresenta uma acentuada queda de disponibilidade no início da operação do sistema, e vai se aproximando da curva superior à medida que o tempo de calendário aumenta. Era de se esperar este resultado, visto que na curva inferior os componentes do sistema tem idade muito superior em relação à curva superior. À medida que o tempo de calendário aumenta, porém, a diferença relativa entre as idades vai diminuindo, e é de se esperar que no infinito, ou em algum ponto antes, as duas curvas se igualem, não importando mais a idade prévia de funcionamento dos componentes.

Tabela 1 - Resultados para o conjunto de testes 1

T (horas)	1	2	3	4	T (horas)	5
8.9	0.999829117	0.9998	0.965173676	0.9645	13.0	1
47.0	0.994696826	0.9947	0.853069133	0.8542	68.7	0.988837
116.3	0.974212867	0.9761	0.745771361	0.7554	169.9	0.951936
218.1	0.932088455	0.934	0.682531898	0.6768	318.7	0.888287
354.5	0.874363229	0.875	0.648320163	0.6397	518.0	0.813928
528.4	0.810713134	0.8122	0.621116231	0.624	772.1	0.742246
744.0	0.74950553	0.7561	0.594006729	0.6027	1,087.2	0.676915
1,007.0	0.691664977	0.703	0.564945592	0.5688	1,471.6	0.617585
1,325.6	0.638430046	0.6384	0.535628387	0.5296	1,937.2	0.563583
1,711.6	0.587588634	0.5902	0.50482139	0.5044	2,501.3	0.51422
2,182.7	0.540763967	0.5502	0.47462164	0.4738	3,189.6	0.468735
2,766.9	0.494642873	0.4911	0.442535588	0.4399	4,043.4	0.426288
3,512.8	0.451892648	0.4471	0.411424446	0.4196	5,133.3	0.385902
4,514.1	0.406281664	0.4072	0.375988676	0.3815	6,596.7	0.346272
5,994.5	0.362971197	0.3562	0.34116479	0.3437	8,760.0	0.305144
8,760.0	0.300068441	0.3065	0.287161087	0.2905		

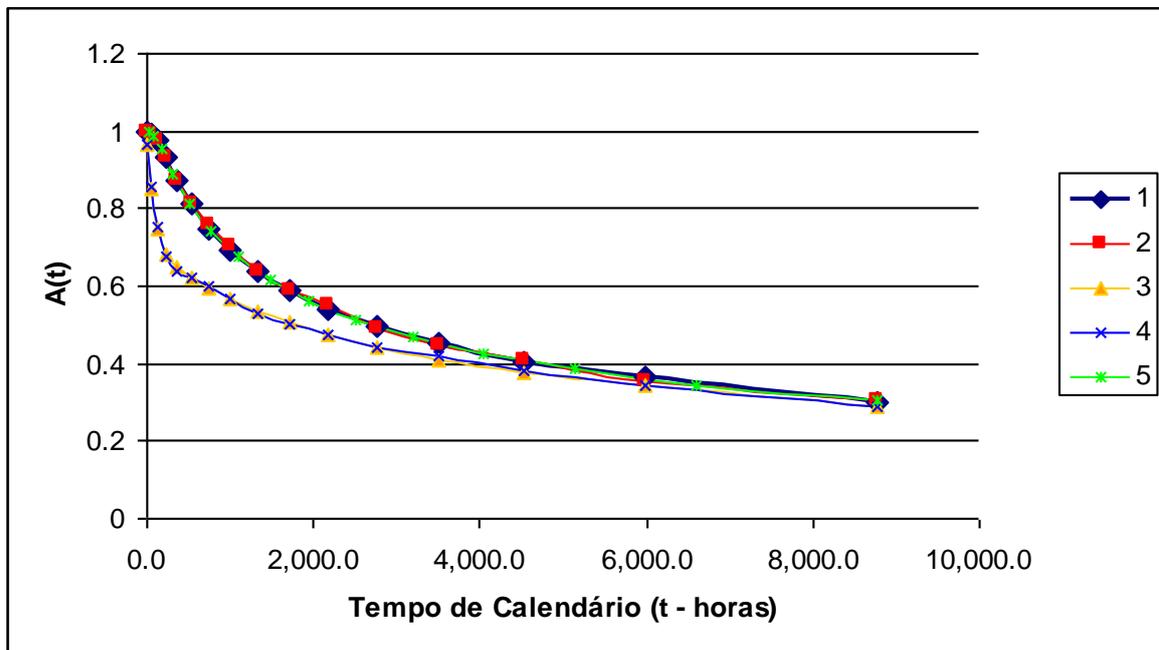


Figura 7 - Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 1

6.1.2. Conjunto de Testes 2

Um segundo sistema que se pode testar em comparação com a tese de Oliveira (2001) é bem parecido com o do conjunto de testes 1. Ainda se trata de sistema de 2 componentes em série, agora ambos com funções intensidade de falha modeladas por uma distribuição Weibull de parâmetros $\beta = 3,0$ e $\alpha = 850$ horas, e taxas de reparo constantes $\mu = 0,01/h$. Este sistema equivale ao caso 6 do trabalho de Oliveira (2001).

Mais uma vez, considera-se que o sistema está disponível apenas quando no estado em que ambos os componentes estão operacionais. O teste foi feito para um tempo de missão de 8760 horas (1 ano).

Desta vez, testes foram feitos em 7 casos, como descritos abaixo:

1- Disponibilidade obtida em Oliveira (2001), de acordo com sua metodologia, para o sistema com componentes novos. Estes resultados estão ao lado de uma coluna de tempo separada porque o autor fez o teste com 15 pontos, e não com 16, como ele mesmo sugere.

2- Disponibilidade obtida pela metodologia proposta na seção 4.3 para o sistema em questão com componentes novos (idade prévia 0);

3- Disponibilidade obtida pelo modelo Monte Carlo com PRG e variáveis suplementares do Capítulo 5 com componentes novos e reparos sempre mínimos ($q=1$);

4- Disponibilidade obtida pela metodologia proposta na seção 4.3 para o sistema em questão com componentes usados com idades prévias 1000 e 2000;

5- Disponibilidade obtida pelo modelo Monte Carlo com PRG e variáveis suplementares da do Capítulo 5 com componentes usados com idades prévias 1000 e 2000 e reparos sempre mínimos ($q=1$);

6- Disponibilidade obtida pela metodologia proposta na seção 4.3 para o sistema em questão com componentes usados com idades prévias 3000 e 3000;

7- Disponibilidade obtida pelo modelo Monte Carlo com PRG e variáveis suplementares da do Capítulo 5 com componentes usados com idades prévias 3000 e 3000 e reparos sempre mínimos ($q=1$);

A tabela 2 resume os resultados para os 7 casos do conjunto de testes 2.

O gráfico da Figura 8 representa os resultados da Tabela 2. A análise deste gráfico nos leva mais uma vez a perceber uma correspondência quase perfeita entre os casos 1, 2, e 3, que geram uma curva de disponibilidade única. Os casos 4 e 5 também correspondem entre si, porém sua curva de disponibilidade sofre uma queda mais abrupta do que vimos no teste 1, primeiro porque o parâmetro $\beta = 3,0$ torna as funções intensidade de falha mais sensíveis à idade operacional prévia, especialmente no início da vida do sistema, segundo porque foram utilizadas idades prévias maiores. Os casos 6 e 7 utilizam idades prévias ainda mais extremas, provocando uma queda ainda mais abrupta no início da curva de disponibilidade. Percebe-se ainda que a linha 6 oscila em torno da 7 no início, o que leva a crer que o modelo Monte Carlo com PRG e variáveis

suplementares tende a estabilizar mais rápido seus resultados do que o modelo analítico-numérico da sessão 4.3.

Tabela 2 - Resultados para o conjunto de testes 2

T (horas)	1	T (horas)	2	3	4	5	6	7
12.98	0.99998	8.88	1.00002	1.00000	0.81265	0.81890	0.51294	0.48260
68.65	0.99892	46.98	0.99966	1.00000	0.42084	0.41810	0.08211	0.11070
169.90	0.98834	116.26	0.99614	0.99720	0.28745	0.28390	0.11695	0.10070
318.67	0.94520	218.07	0.97908	0.97850	0.26830	0.26350	0.08893	0.10250
517.98	0.84549	354.46	0.93182	0.93080	0.26139	0.26590	0.10672	0.10280
772.13	0.70440	528.38	0.84100	0.83900	0.25111	0.24790	0.09216	0.10580
1,087.19	0.57197	743.97	0.71956	0.71610	0.24149	0.24180	0.10143	0.09340
1,471.57	0.46659	1007.01	0.60057	0.60350	0.22913	0.23630	0.09167	0.09790
1,937.19	0.38382	1325.64	0.50140	0.50130	0.21742	0.21760	0.09690	0.09020
2,501.26	0.31842	1711.63	0.41920	0.42640	0.20358	0.20260	0.08926	0.09610
3,189.64	0.26597	2182.70	0.35206	0.34330	0.19048	0.18560	0.09196	0.08670
4,043.42	0.22301	2766.95	0.29517	0.29790	0.17540	0.17700	0.08522	0.08890
5,133.30	0.18686	3512.76	0.24793	0.24370	0.16111	0.16360	0.08584	0.07760
6,596.65	0.15534	4514.15	0.20485	0.20650	0.14407	0.14770	0.07902	0.07720
8,760.00	0.12629	5994.55	0.16777	0.16980	0.12760	0.12050	0.07708	0.07820
		8760	0.12336	0.12370	0.10202	0.10130	0.06686	0.07070

Vê-se ainda que, mesmo iniciando com idades prévias completamente diferentes, as 3 curvas de disponibilidade que se formam já começam a tender a um mesmo ponto no final da missão, sendo que, quanto maior a idade prévia dos componentes, mais rápido a curva de disponibilidade atinge este ponto de estabilidade. Isto confirma a expectativa de que as curvas se encontram no infinito, ou em algum ponto antes.

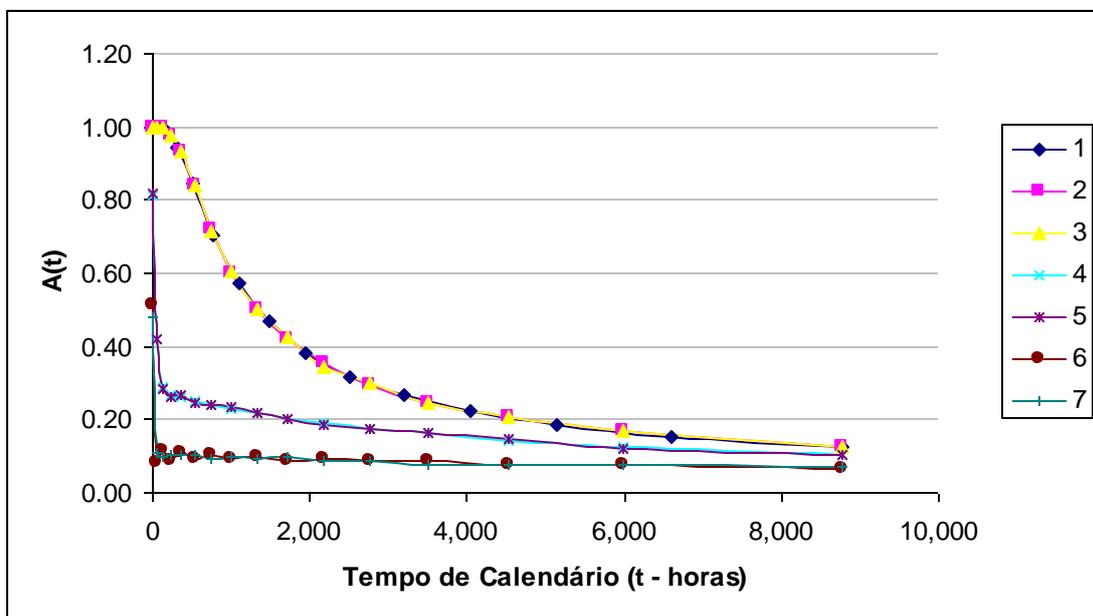


Figura 8 - Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 2

6.2. Modelo Híbrido PRG e Variáveis Suplementares: Sistema de Componentes em Paralelo

Consideremos agora um sistema de 2 componentes funcionando em paralelo. Isto quer dizer que, em operação normal, ambos funcionam simultaneamente, podendo um deles falhar e o outro continuar operando normalmente, ou ainda, enquanto um deles estiver falho o outro também falhar num momento diferente. Não ocorrerão falhas de causa comum (ambos falhando ao mesmo tempo). A cadeia da Markov que representa este sistema já foi mostrada na Figura 4. Consideraremos ainda, para fins de teste, que as funções intensidade de falha serão sempre modeladas por uma distribuição Weibull, e as taxas de reparo serão constantes. O sistema só será considerado disponível quando ambos os componentes estiverem operacionais.

Por motivos já expostos antes, a metodologia analítico-numérica do Capítulo 4 não é suficiente para solucionar as equações deste sistema. Chega a hora então de partirmos para os testes mais detalhados do modelo de simulação Monte Carlo com variáveis suplementares e PRG.

O algoritmo Monte Carlo em questão, para este tipo de sistema, traz a flexibilidade de alterar 4 conjuntos de parâmetros inerentes ao sistema, quais sejam:

a) os parâmetros α e β das funções intensidade de falha de ambos os componentes e os parâmetros μ de suas respectivas taxas de reparo. Para fins de comparação, serão postos em geral os parâmetros α e μ fixos, variando apenas os parâmetros β , que interferem de forma mais significativa no tipo de envelhecimento dos componentes e na forma de suas funções intensidade de falha;

b) as idades prévias dos componentes, ou seja, seus respectivos tempos operacionais anteriores ao início do sistema em questão;

c) os tipos de reparo aos quais os componentes serão submetidos. Aqui, far-se-ão testes para reparos mínimos (q sempre igual a 1), reparos perfeitos (q sempre igual a 0) e reparos imperfeitos onde o q segue uma distribuição de probabilidades discreta no intervalo de 0 a 1. Nada impede que, posteriormente, sejam feitos testes com distribuições contínuas para o q ;

d) o uso ou não de variáveis suplementares. Note que, quando falar-se no modelo usando ou não variáveis suplementares, estar-se-á referindo à evolução ou não de suas idades operacionais quando o componente estiver em reparo. Ou seja, sem variáveis suplementares, as idades dos componentes continuarão evoluindo mesmo

quando eles estiverem em reparo, enquanto com elas as idades dos componentes não evoluem quando em reparo. Como este fator pode ser alterado independentemente do componente b), iremos observar casos em que será dito não haver uso de variáveis suplementares, mas mesmo assim existirão idades prévias dos componentes. Apesar de parecer um contra-senso, tal fato justifica-se porque, na verdade, as variáveis suplementares continuam existindo no modelo, elas apenas passam a evoluir mesmo quando os componentes estiverem em reparo, para simular as propriedades de um modelo sem variáveis suplementares, o que não impede que elas armazenem as idades prévias dos componentes.

Os testes a seguir foram feitos variando-se apenas estes 4 conjuntos de parâmetros, mas trazem uma excelente amplitude de resultados.

6.2.1. Conjunto de Testes 3

Consideremos, no sistema em paralelo em questão, os componentes A e B de modo que seus parâmetros de funções intensidade de falha e taxas de reparo são:

- Componente A: $\alpha = 975\text{h}$ e $\mu = 0,04/\text{h}$;
- Componente B: $\alpha = 500\text{h}$ e $\mu = 0,05/\text{h}$.

Os parâmetros β não serão fixados aqui porque variarão em alguns testes.

A Tabela 3 resume os resultados de 9 testes. A parte superior da tabela representa o conjunto de parâmetros considerados em cada teste, e a parte inferior exhibe seus respectivos resultados para a curva de disponibilidade.

O gráfico da Figura 9 representa as curvas de disponibilidade referentes aos 9 testes da Tabela 3, e nos ajudará a fazer algumas análises de seus resultados. O gráfico parece, à primeira vista, um emaranhado de curvas no qual é difícil distinguir cada uma isoladamente. Isso se deve justamente à similaridade dos resultados, o que nos permite fazer algumas análises.

Em primeiro lugar, no teste 1, onde os β 's são iguais a 1, estamos diante de funções intensidade de falha constantes no tempo. Seria equivalente dizer que as funções intensidade de falhas são as constantes $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ para cada um dos componentes. Estamos diante, portanto, de um PMH. Com os β 's fixos em 1, foram feitos diversos testes variando todos os demais parâmetros. Foi constatado que, quando os β 's são

iguais a 1, não interessam o tipo dos reparos, a idade prévia do componente ou se há ou não uso de variáveis suplementares, os resultados serão sempre exatamente os mesmos. Isto porque, com β 's, as idades dos componentes não são utilizadas, sendo completamente irrelevantes. Estas características seriam inerentes a um PMH, o que já é mais é um indício de validade do modelo. Por isso, a tabela mostra apenas um exemplo de teste com β 's fixos em 1, pois todos os demais seriam exatamente iguais.

Tabela 3 - Resultados para o conjunto de testes 3

Teste		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Parâmetros	β 's	A=1 B=1	A=2.5 B=1.5	A=3 B=3	A=4 B=4	A=5 B=5	A=2.5 B=1.5	A=3 B=3	A=4 B=4	A=5 B=5
	Variáveis Suplementares	Sem	Com	Com	Com	Com	Com	Com	Com	Com
	Tipo de Reparo	Mínimo	Perfeito	Perfeito	Perfeito	Perfeito	Perfeito	Perfeito	Perfeito	Perfeito
	Idades Prévias(horas)	A=3000 B=3000	A=0 B=0	A=0 B=0	A=0 B=0	A=0 B=0	A=0 B=0	A=3000 B=3000	A=3000 B=3000	A=3000 B=3000
Resultados	t (horas)	A(t)	A(t)	A(t)	A(t)	A(t)	A(t)	A(t)	A(t)	A(t)
	17.74542164	0.96377	0.9953	0.99999	1	1	0.77712	0.35288	0.25458	0.27288
	93.85541061	0.93843	0.9774	0.99666	0.9994	0.9999	0.7869	0.8761	0.95561	0.96476
	232.2621525	0.93843	0.95919	0.9769	0.98688	0.99303	0.92491	0.97934	0.9898	0.99452
	435.6448525	0.93804	0.94493	0.93772	0.93559	0.93083	0.94885	0.94394	0.9402	0.93992
	708.1065128	0.93841	0.93254	0.93266	0.94187	0.95505	0.93534	0.93582	0.94359	0.95481
	1055.549892	0.93716	0.92787	0.9257	0.9165	0.90829	0.92797	0.92567	0.91629	0.90453
	1486.242624	0.9386	0.93016	0.93336	0.93635	0.93725	0.93115	0.93346	0.937	0.9401
	2011.717449	0.93869	0.93081	0.9291	0.92749	0.92367	0.93087	0.92987	0.92865	0.9243
	2648.246469	0.93798	0.93163	0.93067	0.93093	0.93199	0.93029	0.93052	0.93127	0.93285
	3419.360338	0.93851	0.92963	0.9298	0.93122	0.93441	0.93021	0.92963	0.931	0.93408
	4360.416757	0.93776	0.93018	0.9295	0.93282	0.93244	0.93117	0.93018	0.93145	0.93369
	5527.577944	0.93699	0.93132	0.93015	0.93144	0.9322	0.92948	0.92997	0.93081	0.93304
	7017.504859	0.93703	0.93005	0.92912	0.93139	0.93081	0.93068	0.93204	0.93123	0.93242
	9017.989762	0.93855	0.93083	0.93121	0.93211	0.93248	0.93057	0.93	0.93215	0.93043
11975.40562	0.93859	0.93073	0.93135	0.93063	0.93203	0.93022	0.93046	0.92962	0.93135	
17500	0.93707	0.93085	0.93087	0.93099	0.93085	0.93012	0.93144	0.93077	0.9315	

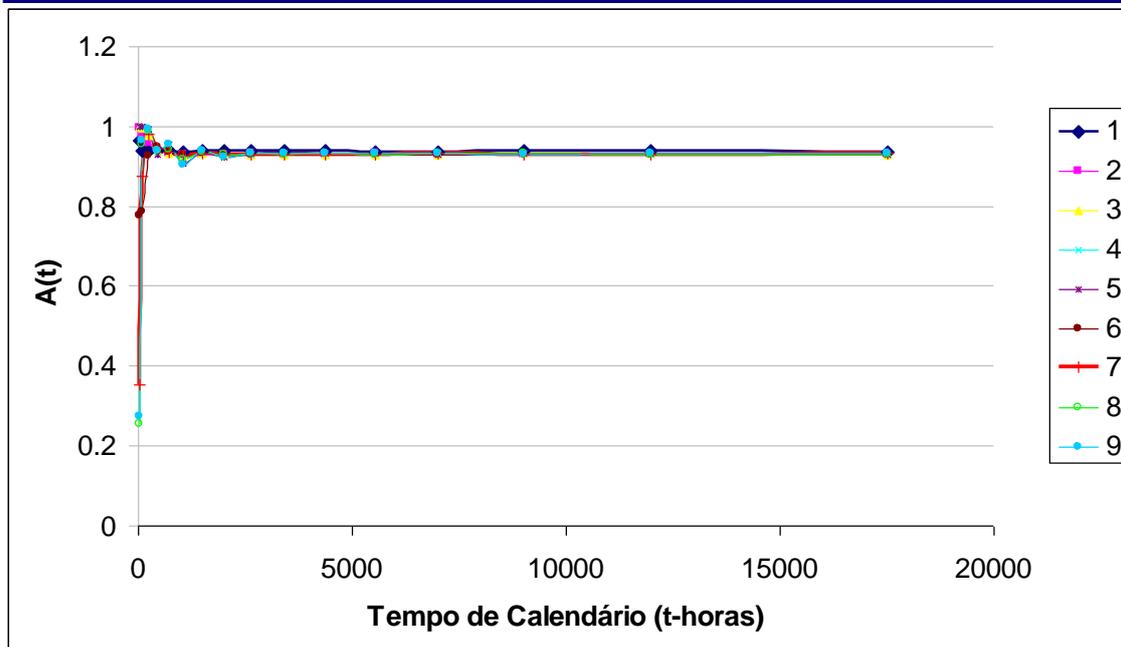


Figura 9 - Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 3

Nos testes 2 a 5, são utilizados reparos perfeitos e idades prévias iguais a 0, variando apenas os β 's a cada teste. Percebeu-se em testes extensivos que, para reparos perfeitos, não interessa o uso ou não de variáveis suplementares. Não interessa se as idades operacionais dos componentes evoluem ou não durante o reparo, uma vez que, assim que o reparo terminar, suas idades serão zeradas. Nota-se ainda que as curvas 2 a 5 são extremamente próximas do PMH do caso 1, indicando que, quando os reparos são perfeitos e as idades operacionais 0, mesmo com β 's extremos (chega-se a usar os β 's iguais a 5), os processos se assimilam bastante a um PMH, mesmo com funções intensidade de falhas crescentes.

Os testes 6 a 9 repetem os β 's dos testes 2 a 5, agora inserindo idades prévias de 3000 horas em ambos os componentes, de modo a verificar o efeito das idades prévias com reparos perfeitos. Como era de esperar, no momento inicial a disponibilidade sofre uma forte queda (especialmente para os β 's mais elevados), mas imediatamente sobe e se estabiliza numa curva praticamente idêntica à dos casos 2 a 5 e do PMH. Era de se prever este resultado porque fica claro que a idade prévia do componente só interfere em sua disponibilidade até o momento de seu primeiro reparo, quando sua idade será zerada.

Poderia ainda causar certo estranhamento o teste 9, porque usando β 's iguais a 5, tem a disponibilidade maior do que a do teste 8 nos primeiros pontos. Não se trata de erro do modelo. Isso acontece porque, como visto antes, quanto maiores os β 's, mais rápida é a tendência à estabilização da curva. Como o primeiro ponto em que se calcula as disponibilidades é por volta de 17 horas de missão, neste momento, a curva do teste 9, mesmo tendo se iniciado abaixo da do teste 8, já cresceu mais rápido do que esta, tendendo a estabilidade e, por isso, é superior nesse ponto. Os β 's muito elevados fazem com que os componentes falhem muito rápido, e, conseqüentemente, sejam reparados mais cedo, tendo suas idades zeradas e tendendo mais rapidamente, portanto, à estabilidade. Esta expectativa foi confirmada em testes que utilizaram β 's ainda maiores.

Assim, fica justificada a similaridade entre as curvas e a rapidez com que atingem o equilíbrio numa disponibilidade em torno de 93%. Como já visto, os resultados foram bastante condizentes com o esperado, servindo ainda como indícios de validade do modelo. Todos estes testes tiveram tempo de simulação muito próximo a 20 segundos, à exceção do teste 9, que tomou 30 segundos. Isto porque os testes foram

feitos buscando-se uma precisão de 5 casas decimais (100.000 amostras). Os testes com 10.000 amostras também levam a resultados satisfatoriamente precisos e são bem mais rápidos.

6.2.2. Conjunto de Testes 4

No conjunto de testes 3, realizamos exaustivas experiências para os casos de reparo perfeito e tiramos conclusões. O objetivo destes próximos testes, agora, é avaliar a relação entre reparos perfeitos, mínimos e imperfeitos, fazendo uso ou não das variáveis suplementares. Para isso, consideraremos o mesmo sistema de componentes A e B atuando em paralelo, onde seus parâmetros de funções intensidade de falha e taxas de reparo são:

- Componente A: $\alpha = 975h$ e $\mu = 0,04/h$;
- Componente B: $\alpha = 500h$ e $\mu = 0,05/h$.

Apenas no teste 1 usaremos β 's iguais a 1, de modo a representar um PMH, como já descrito. Como nos testes anteriores já foram mostradas as similaridades entre o PMH e os reparos perfeitos, usaremos aqui apenas o PMH como exemplo de reparo perfeito, visto que as demais curvas de reparo perfeito são todas bastante próximas. Nos demais testes, os β 's serão fixos em 2,5 para o componente A e 1,5 para o componente B. Serão variados os tipos de reparos e a presença ou não de variáveis suplementares, além da idade prévia dos componentes para melhor ilustração.

É importante ressaltar que, quando falar-se em reparos imperfeitos, estar-se-á referindo a um parâmetro de eficácia do reparo q que segue uma distribuição de probabilidades discreta, tal que:

$$P(q=1)=0,5 ; P(q=0.9)=0,2 ; P(q=0.8)=0,1 ; P(q=0.7)=0,1 ; P(q=0.5)=0,1$$

A Tabela 4 resume os 9 testes do conjunto de testes 4.

O gráfico da Figura 10 representa as curvas de disponibilidade para os 9 testes da tabela 4. A análise deste gráfico leva a diversas comparações interessantes.

Em primeiro lugar, percebe-se a quase perfeita semelhança entre as curvas 2 e 5. Estas curvas descrevem o sistema submetido a reparos imperfeitos (a distribuição discreta já descrita) e sem idades prévias. A diferença entre elas é a presença de variáveis suplementares.

Tabela 4 - Resultados para o conjunto de testes 4

Teste	1	2	3	4	5	6	7	8	9
β^s	A=1 B=1	A=2.5 B=1.5	A=2.5 B=1.5	A=2.5 B=1.5	A=2.5 B=1.5	A=2.5 B=1.5	A=2.5 B=1.5	A=2.5 B=1.5	A=2.5 B=1.5
Variáveis Suplementares	Com	Com	Com	Sem	Sem	Com	Com	Sem	Sem
Tipo de Reparo	Perfeito	Imperfeito	Imperfeito	Imperfeito	Imperfeito	Mínimo	Mínimo	Mínimo	Mínimo
Idades Prévias(horas)	A=0 B=0	A=0 B=0	A=3000 B=3000	A=3000 B=3000	A=0 B=0	A=3000 B=3000	A=0 B=0	A=0 B=0	A=3000 B=3000
t (horas)	P1(t)	P1(t)	P1(t)	P1(t)	P1(t)	P1(t)	P1(t)	P1(t)	P1(t)
17.74542164	0.96377	0.99522	0.77373	0.7734	0.99507	0.77142	0.99533	0.99493	0.77185
93.85541061	0.93843	0.97689	0.66521	0.6615	0.97653	0.64437	0.97675	0.97578	0.64217
232.2621525	0.93843	0.95698	0.69284	0.69098	0.95794	0.63132	0.95737	0.95746	0.62666
435.6448525	0.93804	0.93521	0.72744	0.7227	0.93368	0.61854	0.93111	0.93133	0.60674
708.1065128	0.93841	0.90627	0.75535	0.74725	0.90612	0.59978	0.90248	0.90173	0.5809
1055.549892	0.93716	0.87672	0.77411	0.76756	0.87491	0.57935	0.86391	0.85938	0.5549
1486.242624	0.9386	0.84841	0.78921	0.78196	0.84285	0.55384	0.8181	0.81137	0.52075
2011.717449	0.93869	0.8275	0.79691	0.79178	0.82112	0.52419	0.76622	0.75256	0.47997
2648.246469	0.93798	0.81595	0.80331	0.79326	0.80713	0.4953	0.70554	0.68839	0.44218
3419.360338	0.93851	0.80996	0.80738	0.79572	0.80141	0.46517	0.64529	0.60778	0.39588
4360.416757	0.93776	0.80713	0.80523	0.79708	0.79806	0.42685	0.58441	0.52925	0.34896
5527.577944	0.93699	0.80827	0.80563	0.79698	0.79746	0.39463	0.52246	0.45074	0.30196
7017.504859	0.93703	0.80537	0.80566	0.79874	0.79793	0.35814	0.45288	0.36376	0.25328
9017.989762	0.93855	0.80698	0.80943	0.79952	0.79827	0.31697	0.39227	0.28407	0.20516
11975.40562	0.93859	0.80602	0.80746	0.79881	0.79852	0.27594	0.32562	0.20604	0.15605
17500	0.93707	0.80481	0.80598	0.79728	0.80156	0.22024	0.25283	0.12555	0.10082

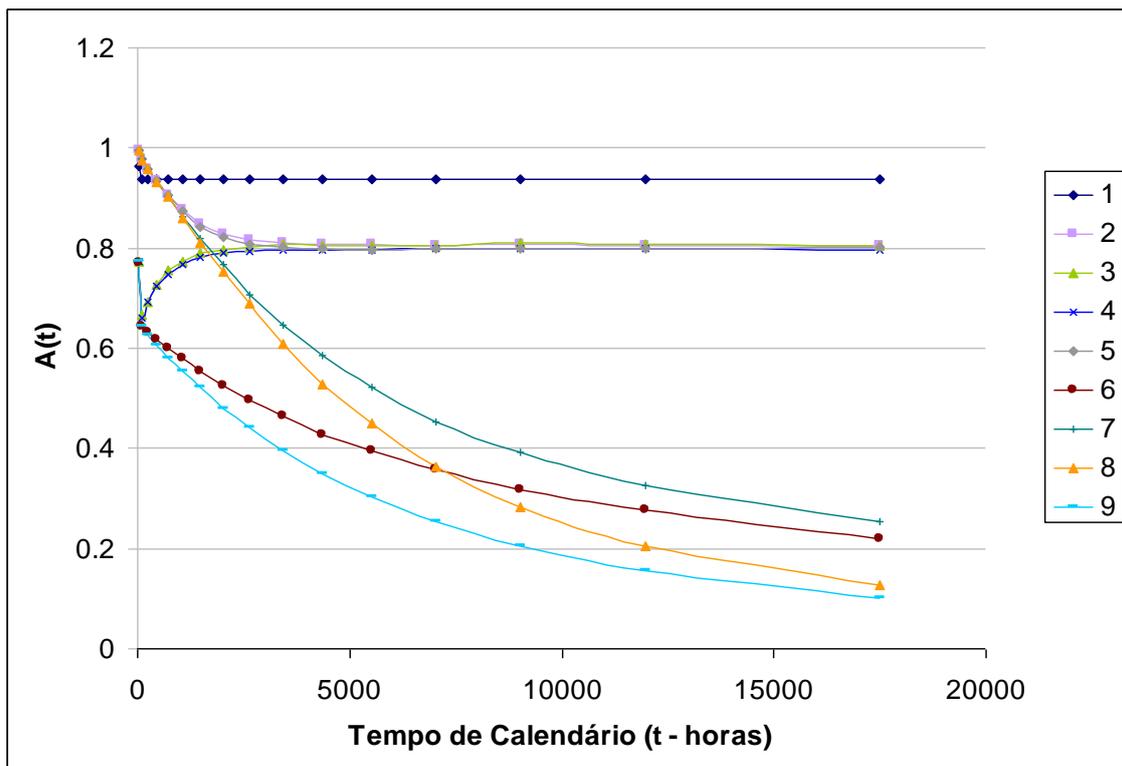


Figura 10- Curvas de disponibilidade para o conjunto de testes 4

A curva 5, se observada ponto a ponto, está sempre um pouco abaixo da 2, pois a primeira é a que não faz uso de variáveis suplementares, continuando a idade do componente a evoluir mesmo quando em reparo. Como o componente após o reparo tem sua idade multiplicada por um parâmetro q de acordo com a distribuição discreta, este avanço de idade durante o reparo não vai ser tão prejudicial assim à disponibilidade, e por isso as curvas são tão próximas, apesar de uma estar sempre um pouco abaixo da outra.

O mesmo ocorre entre as curvas 3 e 4, sendo a 4 a que está sempre um pouco abaixo. A conclusão não pode ser tão generalizante como para os reparos perfeitos, apenas pode-se dizer que, para este sistema, e com esta distribuição de probabilidades para o parâmetro q , o uso ou não de variáveis suplementares não trouxe muita diferença à disponibilidade. É provável que, para distribuições de probabilidade onde o q esteja sempre mais próximo de 1 (tendência ao reparo mínimo), a diferença entre o uso ou não de variáveis suplementares vá se acentuando, enquanto para distribuições com q mais próximo de 0 (tendência ao reparo perfeito), esta diferença vá desaparecendo chegando até o ponto onde q é sempre igual a 0 e não há mais diferença nenhuma.

Uma outra comparação interessante é entre as curvas 1, 7 e 8. A curva 1, como já dito antes, equivale a um PMH tradicional. A curva 8, por sua vez, corresponde a um PMNH tradicional, sem uso de variáveis suplementares. A curva 7 representa um PMNH com variáveis suplementares e reparos mínimos, assim como os modelos trabalhados em Oliveira (2001). Como este autor já afirmava, o PMNH com variáveis suplementares é um intermediário entre o otimismo exagerado do PMH e o pessimismo do PMNH tradicional. As curvas 1, 7 e 8 representam bem esta relação, indicando mais uma adequação do modelo ao que já era previsto. O mesmo se dá quando se inicia com idades prévias de 3000 horas, comparando as curvas 1, 6 e 9.

Observando agora os diferentes tipos de reparo, façamos uma comparação entre as curvas 1, 2 e 7. Todas usam variáveis suplementares e têm componentes que entram com idade prévia igual a 0. A curva 1, porém, tem reparos perfeitos, e sua disponibilidade se estabiliza rapidamente num valor elevado. A curva 7 tem reparos mínimos, e como já dito equivale exatamente aos modelos trabalhados em Oliveira (2001). Como já era de se esperar, esta curva tem disponibilidade bem inferior (é mais pessimista), do que a 2, que considera reparos imperfeitos. A curva 2, por sua vez, é um intermediário entre a 1 e a 7, pois seus reparos têm eficácia variável no intervalo entre 0

e 1. Mais uma vez, a adequação dos resultados do modelo ao que já era previsto antes das simulações traz uma sensação de que o mesmo está correto.

Com relação à influência das idades prévias nas curvas de disponibilidade, já foi visto que, para o caso de reparos perfeitos, há uma alteração de disponibilidade apenas em momentos muito iniciais do sistema, pois há uma estabilização muito rápida. Para reparos imperfeitos, a partir da comparação entre as curvas 2, 3, 4 e 5, nota-se uma estabilização relativamente rápida, que leva as estas curvas a se encontrarem bem antes do final da missão. Esta estabilização deve tender a ser mais rápida quanto maior for a tendência da distribuição de probabilidades do parâmetro q ao reparo perfeito. Nos casos de reparo mínimo, vemos que as curvas 6 e 7 começam a se aproximar bem perto do tempo final de missão, assim como as curvas 8 e 9, indicando que a estabilização é bem mais demorada para reparos mínimos e, conseqüentemente, a existência de idades prévias dos componentes vai interferir na disponibilidade durante um tempo bem maior. Desnecessário dizer que, quanto maiores as idades prévias, maior o tempo necessário para o encontro entre as curvas.

Quanto à velocidade dos testes, foi observado que as simulações de reparo perfeito tomaram em torno de 20 segundos, como já dito. As de reparo imperfeito ficaram todas em torno de 55 segundos, e as de reparo mínimo foram as maiores consumidoras de tempo, com durações variando de 150 a 210 segundos. Acredita-se que, como nos reparos mínimos as idades estão sempre mais elevadas (especialmente quando há idade operacional prévia), o computador “sofre” mais para fazer os cálculos com valores mais altos, e daí as maiores demoras. Mais uma vez, todos os testes foram realizados com precisão de 5 casas decimais (100.000 amostras). Se o objetivo for fazer testes mais rápidos, pode-se usar simulações com 10.000 amostras, que são bastante mais rápidas e dão resultados bem aproximados.

7. Conclusões

Como referido anteriormente, o uso de variáveis suplementares é uma evolução dos Processos Markovianos tradicionais, pois permite a modelagem adequada de sistemas onde os reparos não são pontuais e nos quais são inseridos componentes já previamente utilizados. Assim, os modelos markovianos com variáveis suplementares assumem um caráter intermediário, e mais realista, entre o pessimismo dos PMNH's e o otimismo exacerbado dos PMH's.

Apesar disso, os modelos markovianos de variáveis suplementares encontrados na literatura ainda apresentam restrições que podem tornar sua avaliação pessimista em relação à realidade, dada a suposição de que os reparos sempre levam os componentes a um estado tão ruim quanto velho. Os modelos que se utilizam de PRG's, por sua vez, são capazes de representar diferentes realidades de reparo, porém desconsideram o fato da duração dos reparos, levando em conta apenas o seu efeito quanto à renovação do componente.

Propusemos neste trabalho um modelo híbrido, que alia as vantagens do uso dos PRG's às do uso das variáveis suplementares, capaz ainda de modelar sistemas complexos, como os de n componentes em paralelo ou os mistos série-paralelo. O grau de generalidade atingido por este modelo é bastante satisfatório, visto que ele se adequa perfeitamente a sistemas reais complexos, de reparos não pontuais e de eficácia variável, permitindo ainda a inclusão de componentes usados no sistema.

Dentre as possibilidades de flexibilidade geradas pelo modelo podemos citar:

- a) a possibilidade de usar ou não variáveis suplementares;
- b) a possibilidade de alterar as políticas de reparo, considerando valores diversos para o parâmetro de eficácia dos reparos, atribuindo desde políticas de reparo perfeito até o mínimo, passando pelo imperfeito;
- c) a possibilidade de atribuir idades prévias aos componentes e;
- d) a possibilidade de modelar sistemas complexos, sob diversas configurações, cujos componentes têm funções intensidade de falha variáveis.

Testes extensivos foram feitos considerando as variações destes quatro parâmetros, ficando alguns deles expostos no Capítulo 6.

Os tempos de simulação foram bastante satisfatórios, e os resultados, comparados para os casos específicos onde era possível encontrar solução analítica ou

numérica foram bastante precisos. Além disso, a compatibilidade entre os resultados do modelo e as expectativas prévias em relação a estes resultados, baseadas nas características de cada caso, é um forte indício de validade dos resultados, como foi mostrado repetidas vezes nos testes do Capítulo 6. Para mais testes e discussões acerca do modelo aqui desenvolvido, ver Leite et al (2009).

Acreditamos, portanto, ter logrado êxito com relação à proposta inicial do trabalho, de desenvolver um modelo capaz de se ajustar melhor às diversas variações existentes em sistemas reais, capaz de apresentar maior amplitude de aplicabilidade e ainda maior realismo em suas estimativas, fornecendo, portanto, embasamento mais qualificado aos gestores que buscam a prevenção de falhas em seus sistemas. Este, afinal, é o grande objetivo da Engenharia de Confiabilidade.

É oportuno fazer aqui um comentário acerca da importância deste trabalho para o autor, não simplesmente por representar a conclusão de mais uma etapa da vida profissional, qual seja, a graduação em Engenharia de Produção, mas também por ser o ponto culminante de um projeto onde foram investidas diversas horas em estudos e discussões e que vem se desenvolvendo desde a Iniciação Científica. Sem dúvida alguma, este projeto contribuiu de forma bastante positiva para a formação deste autor como engenheiro, construindo o amadurecimento necessário para a consecução de um trabalho como este e abrindo as portas para o mundo da pesquisa acadêmica. O que se espera é que o trabalho traga à comunidade científica contribuições igualmente positivas.

7.1. Limitações

A ferramenta que atribui tamanho grau de flexibilidade ao modelo é a mesma responsável pela maior restrição: o uso de um algoritmo de simulação. A ferramenta de simulação requer a observação de um grande número de amostras para que forneça resultados precisos, e isto faz, muitas vezes, com que os tempos investidos no cálculo dos resultados sejam bastantes elevados.

Como relatado no Capítulo 6, os tempos de simulação gastos nos testes ali realizados foram bastante satisfatórios, inclusive porque considerável esforço foi gasto na tentativa de otimização do algoritmo, buscando sempre aumentar sua eficiência e velocidade. É de se esperar, porém, que para sistemas bem maiores em número de

componentes ou de estados, os tempos de simulação se alonguem. Por mais que se esforce na tentativa de otimização de um algoritmo de simulação, uma solução por via analítica, como a exposta para o sistema de n componentes em série, sempre tenderá a ser muito mais rápida.

7.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Diante do exposto na seção 7.1, fica portanto a sugestão de busca de alternativas capazes de oferecer o mesmo grau de flexibilidade e precisão nos resultados em um tempo menor, principalmente através de:

- a) aplicação ao algoritmo de ferramentas específicas de aumento na eficiência da simulação Monte Carlo;
- b) busca por uma metodologia analítico-numérica capaz de modelar Processos Markovianos Não-Homogêneos com variáveis suplementares e PRG.

Fica também a sugestão de trabalhos que apliquem o modelo em sistemas complexos reais, analisando seu desempenho num estudo de caso, visto que todos os testes aqui realizados consideraram sistemas teóricos.

Referências Bibliográficas

- ASCHER, H.; FEINGOLD, H. *Repairable systems reliability modeling, inference, misconceptions and their causes*. New York: Marcel Dekker, 1984. (Lecture Notes in Statistics, v. 7).
- CROWDER, M. J.; KIMBER, A. C.; SMITH, R. L.; SWEETING, T. J. *Statistical Analysis of Reliability Data*. Londres: Chapman & Hall, 1991.
- DROGUETT, E. L. Modelos de Markov em Confiabilidade. Material de Aula.
- HOWARD, R. A. *Dynamic Probabilistic Systems – Volume I*. New York: Wiley, 1971.
- JACOPINO, A.; GROEN, F.; MOSLEH, A. Behavioural study of the general renewal process. *Reliability, Availability and Maintainability Symposium (RAMS)*, p. 237 – 242, 2004.
- KIJIMA, M.; SUMITA, N. A useful generalization of renewal theory: counting process governed by non-negative markovian increments. *Journal of Applied Probability*, v. 23, p. 71–88, 1986.
- LEITE, B. F.; MOURA, M. C.; DROGUETT, E.L. Uso de variáveis suplementares e Processo de Renovação Generalizado no cálculo da disponibilidade de sistemas de componentes reparáveis sujeitos a envelhecimento. *Aprovado no XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*, 2009.
- LEWIS, L. L. *Introduction to Reliability Engineering*. New York: Wiley, 1996.
- MOURA, M. J. C. *Processos semi markovianos e redes bayesianas para avaliação de indicadores de desempenho de confiabilidade de sistemas complexos tolerantes à falha*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, 2006.
- MOURA, M. J. C; ROCHA, S. P. V.; DROGUETT, E.L.; JACINTO, C.M. Avaliação bayesiana da eficácia da manutenção via processo de renovação generalizado. *Revista Pesquisa Operacional*, v. 27, n. 3, p. 569-589, 2007.
- OLIVEIRA, E. A. *Uso de variáveis suplementares e inversão de transformadas de Laplace no cálculo de Confiabilidade de sistemas sujeitos a envelhecimento e sob reparo mínimo*. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ: Rio de Janeiro, 2001.

- OLIVEIRA, E. A.; ALVIM, A.C.M; FRUTUOSO E MELO P.F. Unavailability analysis of safety systems under aging by supplementary variables with imperfect repair. *Annals of Nuclear Energy*, v. 32, p. 241-252, 2005.
- PRESS, W.H; VETTERLING, W.T.; TEUKOLSKY, S.A.; FLANNERY, B.P. *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- RIGDON, S.E.; BASU, A.P. *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*. New York: Wiley, 2000.
- ROCHA, S. P. V. *Um modelo integrado de inferência bayesiana e processos markovianos para análise de sistemas reparáveis sujeitos a reparo imperfeito via Processo de Renovação Generalizado*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, 2006.
- ROSS, S.M. *Introduction to Probability Models*. 6ª ed. San Diego: Academic Press, 1997.
- SANTOS, J. D.; SILVA, Z.C. *Métodos Numéricos*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006.
- SINGH, C.; BILLINGTON, R. *System Reliability Modeling and Evaluation*. London: Hutchinson, 1977.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. *Administração da Produção*. 2ª Ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- YAÑEZ, M.; JOGLAR, F.; MODARRES, M. Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 77, p. 167–180, 2002.

Anexo A – Método das Diferenças Finitas

Consideremos o mesmo sistema de 2 componentes funcionando em paralelo e com funções intensidade de falha variáveis, que foi mostrado na Figura 4, sessão 4.4.1.

Agora chamaremos, para fins de menor necessidade de uso de índices, a variável suplementar x_a simplesmente de x e a variável suplementar x_b de y . Desse modo, o sistema de EDP's que representa as funções de probabilidade dos estados terá a seguinte forma, como já visto:

$$\frac{\partial P1(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial P1(t, x, y)}{\partial x} + \frac{\partial P1(t, x, y)}{\partial y} = -(\lambda_a(x) + \lambda_b(y)) \cdot P1(t, x, y) + \mu_a \cdot P2(t, x, y) + \dots$$

$$\dots + \mu_b \cdot P3(t, x, y) \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial P2(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial P2(t, x, y)}{\partial y} = -(\mu_a + \lambda_b(y)) \cdot P2(t, x, y) + \lambda_a(x) \cdot P1(t, x, y) + \mu_b \cdot P4(t, x, y) \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{\partial P3(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial P3(t, x, y)}{\partial x} = -(\mu_b + \lambda_a(x)) \cdot P3(t, x, y) + \lambda_b(y) \cdot P1(t, x, y) + \mu_a \cdot P4(t, x, y) \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial P4(t, x, y)}{\partial t} = -(\mu_b + \mu_a) \cdot P4(t, x, y) + \lambda_b(y) \cdot P2(t, x, y) + \lambda_a(x) \cdot P3(t, x, y) \quad (\text{A-4})$$

Sujeito às condições iniciais:

$$P1(0, x, y) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \quad (\text{A-5})$$

$$Pi(0, x, y) = 0 \quad (\text{A-6})$$

$$P1(t, x_0, y) = \delta(t) \cdot \delta(y - y_0) \quad (\text{A-7})$$

$$Pi(t, x_0, y) = 0 \quad (\text{A-8})$$

$$P1(t, x, y_0) = \delta(t) \cdot \delta(x - x_0) \quad (\text{A-9})$$

$$Pi(t, x, y_0) = 0 \quad (\text{A-10})$$

O método das diferenças finitas (Oliveira, 2001) se utiliza de integrações definidas em intervalos de amplitude fixa em todas as variáveis de tempo (tempo de calendário e as demais variáveis suplementares), de modo a eliminar as derivadas parciais do lado esquerdo do sistema de equações. O problema é que surgirão, então, integrais das demais parcelas que não sejam as derivadas parciais. O método sugere, então, a seguinte aproximação numérica:

$$\int_{t_1}^{t_2} Pi(t)dt \approx Pi(t_2)\Delta t \quad (\text{A-11})$$

Utilizamos a variável t a nível de exemplo, mas a aproximação vale também para as demais variáveis suplementares. A diferença Δt é a dimensão escolhida dos intervalos nos quais se farão as integrações. Quando falarmos nos tempos t_1 e t_2 estaremos nos referindo a dois pontos quaisquer onde t_1 é o inicial do intervalo, t_2 é o final e, logicamente, Δt é a diferença entre eles. O mesmo valerá para os pontos das demais variáveis suplementares.

Assim, faremos primeiro uma integração das equações de um ponto qualquer t_1 a um consecutivo t_2 . As equações abaixo representam o resultado das integrações já seguidas pelas aproximações da Equação A-11.

$$P1(t_2, x, y) - P1(t_1, x, y) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial P1(t, x, y)}{\partial x} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial P1(t, x, y)}{\partial y} dt = -(\lambda_a(x) + \lambda_b(y)) \cdot P1(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \dots$$

$$\dots + \mu_a \cdot P2(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \mu_b \cdot P3(t_2, x, y) \cdot \Delta t \quad (\text{A-12})$$

$$P2(t_2, x, y) - P2(t_1, x, y) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial P2(t, x, y)}{\partial y} dt = -(\mu_a + \lambda_b(y)) \cdot P2(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \lambda_a(x) \cdot P1(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \dots$$

$$\dots + \mu_b \cdot P4(t_2, x, y) \cdot \Delta t \quad (\text{A-13})$$

$$P3(t_2, x, y) - P3(t_1, x, y) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial P3(t, x, y)}{\partial x} dt = -(\mu_b + \lambda_a(x)) \cdot P3(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \lambda_b(y) \cdot P1(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \dots$$

$$\dots + \mu_a \cdot P4(t_2, x, y) \cdot \Delta t \quad (\text{A-14})$$

$$P4(t_2, x, y) - P4(t_1, x, y) = -(\mu_b + \mu_a) \cdot P4(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \lambda_b(y) \cdot P2(t_2, x, y) \cdot \Delta t + \dots$$

$$\dots + \lambda_a(x) \cdot P3(t_2, x, y) \cdot \Delta t \quad (\text{A-15})$$

Em seguida, faz-se o mesmo processo em relação à variável x , integrando as equações acima de um ponto qualquer x_1 a um consecutivo x_2 . O resultado segue abaixo:

$$\int_{x_1}^{x_2} [P1(t_2, x, y) - P1(t_1, x, y)] dx + \int_{t_1}^{t_2} [P1(t, x_2, y) - P1(t, x_1, y)] dt + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial P1(t, x, y)}{\partial y} dt dx = \dots$$

$$\dots = -(\lambda_a(x_2) + \lambda_b(y)) \cdot P1(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \mu_a \cdot P2(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \mu_b \cdot P3(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [P2(t_2, x, y) - P2(t_1, x, y)] dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial P2(t, x, y)}{\partial y} dt dx = -(\mu_a + \lambda_b(y)) \cdot P2(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \dots$$

$$\dots + \lambda_a(x_2) \cdot P1(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \mu_b \cdot P4(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x \quad (\text{A-17})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [P3(t_2, x, y) - P3(t_1, x, y)] dx + \int_{t_1}^{t_2} [P3(t, x_2, y) - P3(t, x_1, y)] dt = -(\mu_b + \lambda_a(x_2)) \cdot P3(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \dots$$

$$\dots + \lambda_b(y) \cdot P1(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \mu_a \cdot P4(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x \quad (\text{A-18})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [P4(t_2, x, y) - P4(t_1, x, y)] dx = -(\mu_b + \mu_a) \cdot P4(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \lambda_b(y) \cdot P2(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x + \dots$$

$$\dots + \lambda_a(x_2) \cdot P3(t_2, x_2, y) \cdot \Delta t \Delta x \quad (\text{A-19})$$

Continuando o processo, fazemos a mesma integração em relação à variável y , de um ponto y_1 a um consecutivo y_2 .

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} [P1(t_2, x, y) - P1(t_1, x, y)] dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} [P1(t, x_2, y) - P1(t, x_1, y)] dt dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} [P1(t, x, y_2) - P1(t, x, y_1)] dt dx = \dots \quad (\text{A-20})$$

$$\dots = -(\lambda_a(x_2) + \lambda_b(y_2)) \cdot P1(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \mu_a \cdot P2(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \mu_b \cdot P3(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} [P2(t_2, x, y) - P2(t_1, x, y)] dx dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} [P2(t, x, y_2) - P2(t, x, y_1)] dt dx = \dots \quad (\text{A-21})$$

$$\dots = -(\mu_a + \lambda_b(y_2)) \cdot P2(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \lambda_a(x_2) \cdot P1(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \mu_b \cdot P4(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} [P3(t_2, x, y) - P3(t_1, x, y)] dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} [P3(t, x_2, y) - P3(t, x_1, y)] dt dy = \dots \quad (\text{A-22})$$

$$\dots = -(\mu_b + \lambda_a(x_2)) \cdot P3(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \lambda_b(y_2) \cdot P1(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \mu_a \cdot P4(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} [P4(t_2, x, y) - P4(t_1, x, y)] dx dy = -(\mu_b + \mu_a) \cdot P4(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \lambda_b(y_2) \cdot P2(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y + \dots$$

$$\dots + \lambda_a(x_2) \cdot P3(t_2, x_2, y_2) \cdot \Delta t \Delta x \Delta y \quad (\text{A-23})$$

Reorganizando estas equações, podemos arranjá-las na forma de um sistema de equações, onde as incógnitas serão $P1(t_2, x_2, y_2)$, $P2(t_2, x_2, y_2)$, $P3(t_2, x_2, y_2)$ e $P4(t_2, x_2, y_2)$:

$$\{\Delta t \Delta x + \Delta t \Delta y + \Delta x \Delta y + [\lambda_a(x_2) + \lambda_b(y_2)] \Delta t \Delta x \Delta y\} \cdot P1(t_2, x_2, y_2) - \mu_a \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P2(t_2, x_2, y_2) - \dots \quad (\text{A-24})$$

$$\dots - \mu_b \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P3(t_2, x_2, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} P1(t_1, x, y) dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} P1(t, x_1, y) dt dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} P1(t, x, y_1) dt dx$$

$$- \lambda_a(x_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P1(t_2, x_2, y_2) + \{\Delta t \Delta x + \Delta x \Delta y + [\mu_a + \lambda_b(y_2)] \Delta t \Delta x \Delta y\} \cdot P2(t_2, x_2, y_2) - \dots \quad (\text{A-25})$$

$$\dots - \mu_b \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P4(t_2, x_2, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} P2(t_1, x, y) dx dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} P2(t, x, y_1) dt dx$$

$$- \lambda_b(y_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P1(t_2, x_2, y_2) + \{\Delta t \Delta y + \Delta x \Delta y + [\mu_b + \lambda_a(x_2)] \Delta t \Delta x \Delta y\} \cdot P3(t_2, x_2, y_2) - \dots \quad (\text{A-26})$$

$$\dots - \mu_a \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P4(t_2, x_2, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} P3(t_1, x, y) dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} P3(t, x_1, y) dt dy$$

$$- \lambda_b(y_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P2(t_2, x_2, y_2) - \lambda_a(x_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P3(t_2, x_2, y_2) + \dots \quad (\text{A-27})$$

$$\dots + [\Delta x \Delta y + (\mu_b + \mu_a) \Delta t \Delta x \Delta y] \cdot P4(t_2, x_2, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} P4(t_1, x, y) dx dy$$

Percebe-se que algumas das integrais ainda não foram aproximadas de acordo com a Equação A-11. Isto porque, quando as integrais envolverem pontos iniciais de alguma das variáveis, isto é, quando alguma das variáveis estiver sendo integrada do índice 0 ao índice 1, a aproximação não deve ser utilizada, pois será incorreta. Já quando estas integrais não estiverem envolvendo pontos iniciais, podemos usar a aproximação, e o sistema fica da forma:

$$\{\Delta t \Delta x + \Delta t \Delta y + \Delta x \Delta y + [\lambda_a(x_2) + \lambda_b(y_2)] \Delta t \Delta x \Delta y\} \cdot P1(t_2, x_2, y_2) - \mu_a \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P2(t_2, x_2, y_2) - \dots \quad (\text{A-28})$$

$$\dots - \mu_b \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P3(t_2, x_2, y_2) = P1(t_1, x_2, y_2) \Delta x \Delta y + P1(t_2, x_1, y_2) \Delta t \Delta y + P1(t_2, x_2, y_1) \Delta t \Delta x$$

$$- \lambda_a(x_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P1(t_2, x_2, y_2) + \{\Delta t \Delta x + \Delta x \Delta y + [\mu_a + \lambda_b(y_2)] \Delta t \Delta x \Delta y\} \cdot P2(t_2, x_2, y_2) - \dots \quad (\text{A-29})$$

$$\dots - \mu_b \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P4(t_2, x_2, y_2) = P2(t_1, x_2, y_2) \Delta x \Delta y + P2(t_2, x_2, y_1) \Delta t \Delta x$$

$$- \lambda_b(y_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P1(t_2, x_2, y_2) + \{\Delta t \Delta y + \Delta x \Delta y + [\mu_b + \lambda_a(x_2)] \Delta t \Delta x \Delta y\} \cdot P3(t_2, x_2, y_2) - \dots \quad (\text{A-30})$$

$$\dots - \mu_a \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P4(t_2, x_2, y_2) = P3(t_1, x_2, y_2) \Delta x \Delta y + P3(t_2, x_1, y_2) \Delta t \Delta y$$

$$- \lambda_b(y_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P2(t_2, x_2, y_2) - \lambda_a(x_2) \Delta t \Delta x \Delta y \cdot P3(t_2, x_2, y_2) + \dots \quad (\text{A-31})$$

$$\dots + [\Delta x \Delta y + (\mu_b + \mu_a) \Delta t \Delta x \Delta y] \cdot P4(t_2, x_2, y_2) = P4(t_1, x_2, y_2) \Delta x \Delta y$$

O sistema de equações acima é, na verdade, um algoritmo que permite ir calculando as funções de probabilidade dos estados em pontos desconhecidos a partir de pontos conhecidos imediatamente anteriores. À medida em que se for caminhando nestes cálculos, obter-se-á uma matriz tridimensional – porque estamos trabalhando com 3 variáveis de tempo, t , x e y - de valores das funções de probabilidade. Sobre esta matriz, será necessário integrá-la ainda em relação a x e y para deixar as funções de probabilidade dependentes apenas da variável t .

Uma das principais dificuldades deste método é a quantidade de pontos em que será necessário solucionar o sistema. Oliveira (2001) sugere que intervalos de tempo de 20 horas fornecem boa precisão nas aproximações. Assim, considerando ainda um tempo de missão de 17520 horas (2 anos), cada variável de tempo teria seu domínio

discretizado em $(17520/20 + 1) = 877$ pontos. Para ser calculado em todos os pontos, seria necessário solucionar o sistema, grosso modo, $877^3 = 674.526.133$ vezes (excluindo-se alguns pontos em que não seria necessário calcular, como nas condições iniciais), gerando uma matriz de valores tridimensional com 674.526.133 para cada função de probabilidade de estado. Imagina-se o trabalho computacional exigido por este método, e o elevado tempo necessário para que forneça resultados, como o próprio Oliveira (2001) mostra. Isto quando trabalha-se apenas com 2 variáveis suplementares, pois o problema cresce sensivelmente a cada adição de nova variável suplementar.

Foram encontradas ainda outras dificuldades de ordem diversa na aplicação deste método, como os valores atribuídos aos pontos discretos pelas condições iniciais. Detalhá-las aqui, porém, exigiria uma análise mais profunda desta metodologia, o que foge ao escopo deste trabalho.