UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

MATHEUS PEREIRA DO NASCIMENTO

COMBINATÓRIA EM OBJETOS DE APRENDIZAGEM DISPOSTOS NO GEOGEBRA: uma discussão sobre situações, representações e invariantes propostos

Caruaru
2022

MATHEUS PEREIRA DO NASCIMENTO

COMBINATÓRIA EM OBJETOS DE APRENDIZAGEM DISPOSTOS NO GEOGEBRA: uma discussão sobre situações, representações e invariantes propostos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientador: Profa. Dra. Cristiane de Arimatéa Rocha

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Nascimento, Matheus Pereira do.
COMBINATÓRIA EM OBJETOS DE APRENDIZAGEM DISPOSTOS NO GEOGEBRA: uma discussão sobre situações, representações e invariantes propostos / Matheus Pereira do Nascimento. - Caruaru, 2022.
73 : il., tab.

Orientador(a): Cristiane de Arimatéa Rocha
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2022.
Inclui referências, anexos.

1. Combinatória. 2. Objetos de Aprendizagem. 3. GeoGebra. . I. Rocha, Cristiane de Arimatéa . (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

MATHEUS PEREIRA DO NASCIMENTO

COMBINATÓRIA EM OBJETOS DE APRENDIZAGEM DISPOSTOS NO GEOGEBRA: UMA DISCUSSÃO SOBRE SITUAÇÕES, REPRESENTAÇÕES E INVARIANTES PROPOSTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Aprovada em: 27/05/2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº Dr. Antônio Carlos de Souza (Examinador Externo)
Universidade Estadual Paulista – UNESP

____

Profª. Msª. Lidiane Pereira de Carvalho (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho aos meus pais que sempre me apoiaram em todas as etapas da graduação e foram peças fundamentais para minha formação.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de mencionar minha gratidão de forma primária a Deus por me proporcionar a chance de estudar em uma das melhores Universidades do País bem como na paciência e calmaria necessárias para a elaboração deste trabalho;

Agradeço imensamente aos meus pais por todo suporte, ajuda e palavras de motivação para continuar na jornada durante toda a graduação;

A professora Doutora Cristiane de Arimatéa Rocha (Cris) pela ajuda e orientação na dinâmica da elaboração deste trabalho;

A professora Doutora Simone Moura Queiroz por todos os ensinamentos e dedicação docente nas disciplinas de Matemática 1, Matemática 2, Resolução de Problemas, Tendências no Ensino de Matemática e MPE;

Aos colegas Luiz Paiva, Gustavo Lira, Will, Eduardo e Brivaldo pela parceria nos trabalhos em grupo da Universidade bem como nos momentos de estudo em grupo;

A todo corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática da UFPE pela dedicação e compromisso com a aprendizagem dos discentes;

A Capes pelo financiamento do Programa institucional de Bolsas de iniciação à Docência (PIBID) e Residência Pedagógica;

Aos professores Edelweis e Dilson pela orientação nas atividades realizadas durante todo PIBID;

Aos professores Valdir, Simone e Jaqueline pelas orientações nas atividades desenvolvidas durante todo projeto Residência Pedagógica;

Ao programa de Monitoria da UFPE pela oportunidade de exercer essa função oito vezes com várias disciplinas dos cursos de licenciatura em Matemática, Física e Química;

As contribuições dos professores integrantes da banca examinadora deste trabalho.

RESUMO

O entendimento de aspectos relacionados a Combinatória por alunos da Educação Básica é algo amplo e complexo. Esse fato é evidente na dificuldade de resolução de situações que envolvem a dinâmica do pensamento combinatório nos diferentes níveis de escolarização. Esse fato é reforçado mediante a grande variedade de problemas que exigem do aluno, habilidades de interpretação e análise do contexto para a solução dos mesmos. Nesse sentido, tecnologias digitais podem auxiliar do processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, o presente trabalho objetiva analisar como se apresenta os aspectos conceituais da combinatória nos Objetos de Aprendizagem (OA) disponibilizados nos materiais didáticos do GeoGebra. Para essa análise fundamentamos na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gerard Vergnaud, especialmente na identificação do conjunto de situações, invariantes e representações sobre combinatória nos diferentes objetos de aprendizagem disponíveis no GeoGebra. A metodologia é constituída por uma abordagem qualitativa, de caráter documental e exploratória sendo que o instrumento de pesquisa será o de observação de sete Objetos de Aprendizagem do GeoGebra que abordam a Combinatória. A pesquisa constatou que a maioria dos objetos de aprendizagem apresentaram situações de problemas combinatórias condicionais, e poucos problemas combinatórios simples. Os invariantes implicitamente observados com maior frequência foram de ordem e escolha. A representação com maior grau de repetição foi a possibilidade de listagem das possibilidades com apoio do GeoGebra, seja possibilitando a construção a partir da manipulação do próprio software, seja apresentada pelo próprio objeto de aprendizagem. Apesar de apresentar diferentes aspectos da Combinatória, o trabalho desse conteúdo por meio desses objetos de aprendizagem pode ser potencializado pela mediação do professor, atuando na proposição de problemas combinatórios, no trabalho coordenado articulando propostas de atividades no papel e no GeoGebra o que pode suscitar o diálogo entre alunos, a criação de hipóteses, e a apresentação de diferentes representações simbólicas.

Palavras-chave: Combinatória; Objetos de Aprendizagem; GeoGebra.

ABSTRACT

The understanding of aspects related to Combinatorics by students of Basic Education is something broad and complex. This fact is evident in the difficulty of solving situations involving the dynamics of combinatorial thinking at different levels of schooling. This fact is reinforced by the great variety of problems that require from the student interpretation skills and context analysis to solve them. In this sense, digital technologies can help in the teaching and learning process. Thus, the present work aims to analyze how the conceptual aspects of combinatorics are presented in the Learning Objects (LO) made available in the GeoGebra teaching materials. For this analysis we based on Gerard Vergnaud's Conceptual Fields Theory (CCT), especially in the identification of the set of situations, invariants and representations about combinatorics in the different learning objects available on GeoGebra. The methodology consists of a qualitative, documentary and exploratory approach, and the research instrument will be the observation of seven GeoGebra Learning Objects that deal with Combinatorics. The research found that most learning objects presented conditional combinatorial problem situations, and few simple combinatorial problems. The most frequently observed implicit invariants were order and choice. The representation with the highest degree of repetition was the possibility of listing the possibilities with the support of GeoGebra, either by allowing the construction from the manipulation of the software itself or presented by the learning object itself. Despite presenting different aspects of Combinatorics, the work of this content through these learning objects can be enhanced by the mediation of the teacher, acting in the proposition of combinatorial problems, in the coordinated work articulating proposals of activities on paper and in GeoGebra, which can encourage the dialogue between students, the creation of hypotheses, and the presentation of different symbolic representations.

Keywords: Combinatorics; Learning Objects; GeoGebra

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Combinatória é um dos conteúdos que tanto professores podem apresentar dificuldades ao ensinar na Educação Básica (ROCHA, 2011), quanto alunos dos diferentes níveis de escolarização podem exibir incompreensões nas resoluções de problemas combinatórios (PESSOA, 2009). Esses fatos podem ser ampliados a partir do enfoque tardio desse conteúdo, já que muitas vezes é um conteúdo apresentado aos estudantes com maior enfoque apenas no Ensino Médio.

Sabe-se que desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a orientação é que o estudo de combinatória ocorra a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997). De modo semelhante a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe habilidades para o trabalho com combinatória a partir do 4º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). Em algumas pesquisas anteriores, tais como English (2005), Pessoa (2009), Borba (2013), Rocha e Souza (2021) já apresentam que crianças pequenas respondem alguns problemas combinatórios.

No Ensino Médio a BNCC aponta o trabalho de combinatória por meio das seguintes habilidades

> • EM13MAT310: Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore;
> • EM13MAT311: Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade; (BRASIL, 2018, p.546).

Nessas habilidades vemos a indicação do trabalho com combinatória priorizando diferentes estratégias de resolução o que coaduna com a perspectiva apresentada por Borba (2010) a fim de promover um amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Outro pressuposto que sustenta essa discussão, diz respeito a dificuldade enfrentada pelos alunos na identificação prévia dos diferentes tipos de problemas combinatórios já apontada por English (2005), Pessoa (2009), Rocha (2011), sejam as mais simples como permutação, arranjo ou combinações, ou ainda, problemas combinatórios condicionais (BRAZ, 2013), problemas de arranjo e combinação com repetição (ARAÚJO; ROCHA, 2018).

O processo de ensino e aprendizagem de combinatória é complexo, pois envolve um universo diverso de situações que não apresentam um procedimento único para resolução, pois é possível analisar e interpretar cada tipo de problema de forma específica. Para identificar o tipo de agrupamento a ser aplicado em um evento combinatório é necessário investigar com concentração, as informações presentes na referida circunstância, viabilizando assim a trajetória mais acessível de resolução. Nesse contexto Farias (2013, p.10) afirma que "[...] a mera memorização e utilização de fórmulas está fundamentalmente incorreta e em segundo lugar por acreditarmos que a metodologia que está por trás desta noção é que gera a dificuldade."

Nem sempre as fórmulas estabelecidas para cada tipo de agrupamento irão surtir efeito na solução de determinados problemas, pois em alguns contextos o uso de expressões regras pré-definidas será dispensado e a formulação de um novo método será preciso. O método a ser desenvolvido na resolução de problemas também é importante, pois em uma situação podem existir diversos caminhos que levam a resposta.

O conhecimento do raciocínio combinatório é importante à medida está intimamente ligada com situações presentes no dia a dia, pois aos nos depararmos com essas, podemos aplicar as noções de agrupamentos e/ou princípios de contagem para obter o sucesso desejado.

> Esse modo de pensar e agir é útil no cotidiano - por estar presente em situações variadas como organização de equipes, de campeonatos esportivos, de cardápios etc. - Bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento- tais como, Biologia, Química, Estatística, Ciências da computação dentre outras - em situações classificatórias, por exemplo. (BORBA, 2010, p. 3)

Percebemos então, que o raciocínio combinatório se faz presente também em outras disciplinas, estando inserido em um processo interdisciplinar que ultrapassa as mediações da matemática.

Rocha e Borba (2021, p.43) afirmam que na busca pela "Combinatória seja compreendida ao longo da escolarização e que o desenvolvimento do raciocínio combinatório seja alcançado, faz-se necessário processos de ensino e de aprendizagem".

Nessa direção, Rocha e Borba (2021) apresentam diferentes domínios de conhecimento para ensinar combinatória, a saber, o conhecimento comum de combinatória, o conhecimento especializado de combinatória, o conhecimento de horizonte de combinatória, o conhecimento de combinatória e ensino, conhecimento de combinatória e alunos e o conhecimento de combinatória e currículo. Com relação ao conhecimento de combinatória e ensino, as autoras, caracterizam como “apresentar proposta para tratar os erros dos estudantes cometidos na resolução de problemas combinatórios; propor recursos que podem ser utilizados em aulas de Combinatória” (ROCHA; BORBA, 2021, p.51).

As autoras afirmam que poucos professores dizem conhecer recursos para ensinar combinatória, o que pode “indicar dificuldades desses professores na criação e/ou elaboração de recursos estruturados para o ensino de Combinatória” (ROCHA; BORBA, 2021, p.63).

Rocha (2011, p.63), discutindo sobre os trabalhos que abordam recursos didáticos para o ensino de combinatória, afirma que “jogos e os materiais manipuláveis podem fomentar a discussão que viabilize o interesse dos alunos e auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos diferentes níveis”. A autora complementa que são “necessários mais estudos que observem como esses recursos podem auxiliar nessa construção” (ROCHA, 2011, p.63).

Rocha e Souza (2021) em sua pesquisa sobre o que dizem as pesquisas sobre conhecimento combinatório de crianças pequenas e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental observaram “a utilização de diferentes recursos para apresentar essas situações (tecnológicos, manipulativos, questões escritas em cadernos, cartelas e em fichas) o que possibilita uma melhor participação dos alunos na resolução das questões.” (ROCHA; SOUZA, 2021, p.479).

A prática da dinamicidade da combinatória em problemas pode ser apresentada em recursos tecnológicos, que permitam enxergar sob uma outra óptica a representação das situações cotidianas. Em um estudo anterior, Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) propuseram a análise de cinco softwares e objetos de aprendizagem voltados para o ensino de combinatória (Softwares Diagrama de Arbol, ML Combiner, e do Rived[1] os objetos de aprendizagem[2] Combinação, Arranjo e

1 Rede Interativa Virtual de Educação foi criada programa da Secretaria de Educação a Distância – SEED, que tem por objetivo a produção de conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos de aprendizagem.
2 Leite et al(2009, p.4) afirma que o objeto de aprendizagem “consistem em qualquer entidade, digital ou não, que possa ser utilizada, reutilizada ou referenciada durante o aprendizado apoiado pela tecnologia”.

Permutação). As autoras constataram que os recursos tecnológicos analisados estimulam o uso de fórmulas em detrimento a criação de estratégias pessoais.

Nesse contexto, a BNCC adota como uma das competências específicas de matemáticas e suas tecnologias

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

Dessa forma, a resolução de problemas combinatórios pode ser um campo de interesse na busca por conjecturas e criação de estratégias próprias (BORBA, 2010, 2013) e para além um lugar para experimentações e diferentes tecnologias. Na mesma direção, se faz necessário a utilização de uma plataforma digital que promovam nos alunos a motivação para construir ideias que busquem a resolução de diferentes problemas.

Sendo assim, para essa pesquisa, centralizamos a discussão na plataforma do GeoGebra, principalmente a seção que apresenta materiais didáticos a que nos referimos de objetos de aprendizagem. Esse software é uma alternativa possível, uma vez que para Império (2017) permite que o sujeito possa explorar diversos recursos/ferramentas no mesmo lugar, possibilitando a dinâmica desses recursos, além da facilidade de acesso disponível em diversos sistemas operacionais, podendo também ser instalado em aparelhos celulares.

A ideia de propor e analisar recursos alternativos no ensino de combinatória é essencial, principalmente ferramentas tecnológicas que permeiam o processo de ensino e aprendizagem. O GeoGebra apresenta a possibilidade de uso sem necessariamente, dispor de internet possibilitando seu manuseio em diferentes locais desprovidos dessa rede. Além disso, disponibiliza uma seção com materiais didáticos, criados por diferentes professores, abordando diversos conceitos matemáticos.

Nossa pesquisa busca responder o seguinte questionamento: *Quais aspectos conceituais da combinatória são evidenciados pelos Objetos de Aprendizagem (OA) disponibilizados nos materiais didáticos do Geogebra?*

O fato de que a combinatória é um assunto bastante amplo e não há padrões definidos que possibilitem a resolução de qualquer tipo de situação problema, é uma inquietação que nos levou a pensar em realizar a pesquisa com enfoque nesse componente curricular. E a relação com o GeoGebra foi pensada de acordo com a compreensão de que recursos tecnológicos podem agregar diferentes representações, invariantes e situações que promovam um desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Acreditamos que essa temática, pode ser relevante para a formação de professores de Matemática na Educação Básica, pois promove pensar em novas estratégias de apresentar o conteúdo para os alunos e induzir o interesse dos mesmos a construírem o desenvolvimento de habilidades de análise, interpretação e caminhos na resolução de problemas.

1.1 OBJETIVO GERAL

Analisar como se apresenta os aspectos conceituais da combinatória nos Objetos de Aprendizagem (OA) disponibilizados nos materiais didáticos do GeoGebra.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar os tipos de representações que são utilizadas (Imagens, Diagrama de árvores, fórmulas);
- Averiguar as propriedades que são utilizadas nesses recursos e a presença dos invariantes nos recursos (de escolha, de ordem e/ou repetição de elementos);
- Verificar quais os tipos de situações de combinatória são mais utilizados nos materiais didáticos do Geogebra.

Nosso referencial teórico foi dividido em dois capítulos. No capítulo 2 discutimos sobre a ideia de combinatória no que tange ao processo de ensino e aprendizagem vinculado a educação básica. Os tipos de problemas combinatórios foram evidenciados seguidos de exemplos que fundamentam a representação dos mesmos. Para firmar as ideias descritas, recorremos a alguns autores que possuem pesquisas na área como Borba (2010), Borba(2013), Rocha (2011), Rocha e Souza(2021), entre outros, que foram essenciais para estabelecer uma relação de apoio das convicções construídas.

Em seguida, no capítulo 3 fizemos uma discussão sobre a importância dos recursos tecnológicos para facilitar o entendimento de conteúdos matemáticos. Além disso, apresentamos os desafios enfrentados por professores e alunos no que tange ao manuseio de aparelhos eletrônicos necessários para o desempenho nas atividades escolares. Essa discussão é sustentada por Macaya e Jereissati (2021), Nascimento (2012) e Ponte (2000).

Posteriormente na seção 3.1 fizemos uma breve explicação sobre o conceito e exploração do Geogebra, para melhor entendimento posterior na análise dos Objetos de Aprendizagem. Segundo Império (2017) isso é importante, pois o recurso tecnológico em si não permite o ensino de Matemática. É necessário conhecer bem suas funcionalidades para melhor aproveitamento na análise e organização de problemas.

Logo após na seção 3.2 enunciamos algumas definições do conceito de Objetos de aprendizagem (OA). Para tal nos apoiamos nos trabalhos de Costa (2013) e Aguiar e Flôres (2014). Além disso comentamos sobre problemas de combinatória com e sem o uso do GeoGebra nos trabalhos de Império (2017) e Furtado (2019).

Na metodologia explicamos o tipo de pesquisa realizada bem como o instrumento de coleta de dados utilizado. Apresentamos também os critérios para escolha dos Objetos de aprendizagem para análise e a representação de um quadro com o nome do OS e suas principais características.

Em seguida, apresentamos o capítulo de análise dos resultados, no qual expomos o detalhamento dos objetos de aprendizagem selecionados e a análise segundo as situações, invariantes e representações dispostos. Cada OA mencionado foi representado por ilustrações (extraídas do GeoGebra *online*) da sua interface.

Como conclusão do nosso estudo, descrevemos nas considerações finais os apontamentos sobre como os objetos de aprendizagem ajudaram no alcance dos objetivos estabelecidos previamente e um apanhado geral sobre os tipos de situações, invariantes e representações mais frequentes em cada um dos materiais.

2 ASPECTOS TEÓRICOS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

O estudo de combinatória envolve o desenvolvimento de estratégias de contagem e agrupamentos de elementos de um dado conjunto. Expressões do tipo: De quantos modos, de quantas maneiras ou de quantas formas são possíveis combinar elementos de um dado evento, são geralmente evidenciadas em diversos problemas combinatórios. Não obstante aos problemas combinatórios simples, existem diferentes tipos de problemas combinatórios que ultrapassam a utilização de fórmulas em sua resolução. Sobre esse aspecto, Borba, Rocha e Azevedo (2015, p. 1351) afirmam que:

> Observa-se, dessa forma, a natureza variada, e por vezes complexa, dos problemas de Combinatória – situações problematizadoras nas quais não há, sempre, indicação clara de caminhos diretos de solução, mas necessita-se examiná-las com atenção para verificar o tipo de problema combinatório e/ou qual(is) estratégia(s) sistemática(s) pode(m) ser utilizada(s) para encontrar solução viável para o mesmo.

Nessa perspectiva, podemos refletir sobre a variedade de tipos de situações problemas que permeiam o conceito de Combinatória em especial, a variedade de estratégias de resoluções, sejam pessoais ou formais. Nesse contexto, Borba (2010, p.14) declara que: “os problemas combinatórios requerem uma análise cuidadosa para escolha de estratégias válidas de solução e muitas destas exigem sistematização criteriosa de modo a ser possível enumerar, direta ou indiretamente, todas as possibilidades válidas.” Isso vai depender do tipo de problema proposto e da óptica das técnicas que serão utilizadas na obtenção do êxito objetivado.

Dessa forma, Borba (2010) reitera que é o raciocínio combinatório deve ser evidenciado na prática de estudar sobre a análise de situações em que sejam dispostos elementos de certos conjuntos e dispor seu devido agrupamento obedecendo requisitos específicos, sejam de escolha, ordem para responder a todas as possibilidades de solução.

> Estas são, portanto, as relações básicas presentes em problemas combinatórios: escolha de elementos e ordenação dos elementos. Assim, o que diferencia os problemas básicos de Combinatória – produtos cartesianos, arranjos, permutações e combinações – são as formas como são escolhidos e ordenados os seus elementos. Esse é um aspecto que precisa ficar claro aos alunos ao serem trabalhadas situações combinatórias em sala de aula.(BORBA, 2013, p. 3)

Desse pensamento, podemos descrever as diferenças entre cada tipo básico de problema combinatório. Rocha e Souza (2021) ao analisar pesquisas brasileiras que tratam de problemas combinatórios da educação infantil aos anos iniciais do ensino fundamental constataram que existe a discussão de todos os problemas combinatórios simples. Os autores afirmam que as ordens de grandezas adotadas nos problemas combinatórios nessas pesquisas "possibilitam o uso de estratégias enumerativas" (ROCHA; SOUZA, 2021, p.479).

A compreensão de formação de um conceito matemático por alunos segundo Rocha (2011) possibilita aos professores tomar decisões mais apropriadas para o processo de ensino e aprendizagem. Rocha (2011) ainda reitera que é necessário que os docentes sejam capazes do autoconhecimento de seu trabalho, reconhecendo os desafios que serão encontrados e ter papel no incentivo de fazer com que seus alunos possam progredir na esfera educativa.

Para Vergnaud (1996, p.133, tradução nossa) a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) "trata-se de uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual". Segundo Vergnaud (1983, 1988, 1994, 1998) citado por Magina, Merline e Santos (2012) a formação de um conceito envolve a interligação do mesmo com os variados tipos de situações.

Magina, Merline e Santos (2012) afirmam que em uma determinada situação-problema estão inclusos diversos conceitos a serem analisados. Sendo assim, as autoras relatam que "[...] não faz sentido referir-se à formação de conceito, mas sim na formação de um campo conceitual, cuja apropriação requer o domínio de diversos conceitos de naturezas diferentes." (MAGINA; MERLINE; SANTOS, 2012, p. 3).

Podemos definir que campo conceitual se refere a situações problemas em que é necessário o conhecimento de vários conceitos que permeiam esse campo. Nessa compreensão, essa teoria propõe uma visão ampliada da noção de conceito, a que atribui a indicação de campo conceitual, e a define como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, bem conectados uns com os outros'' (VERGNAUD, 1982, p. 36, tradução nossa).

Podemos dizer então que para resolver um determinado problema matemático, é essencial a leitura e releitura do mesmo e diagnosticar os vários conceitos com a óptica de enxergar os métodos mais viáveis de solução. A prática do conhecimento sobre conceito na perspectiva de campo conceitual, segundo Rocha (2011), requer tempo no estudo da variedade de problemas bem como nas particularidades da representação de cada tipo. A formação de um conceito em Matemática pode ser compreendida como:

> [...] Se dá por meio por meio da proposta de uma gama de situações que proporcionem a oportunidade para os alunos reconhecerem os invariantes e utilizarem variadas representações simbólicas, permitindo aos mesmos a visão do conhecimento matemático com sentido e significados. (ROCHA, 2011, p. 38)

Dessa forma a construção de tais conceitos se fundamenta em tipos de problemas que possibilitem aos alunos a capacidade de identificar em uma situação, concepções que auxiliem na visão de buscar técnicas diversas que levarão ao caminho da solução, bem como a absorção do sentido do problema.

Cedran e Kiouranis (2019, p.65) afirmam que os campos conceituais “pode ser pensado em termos de produção do conhecimento científico, no que diz respeito aos problemas da ciência, bem como, advindo da produção intelectual de qualquer indivíduo, procedente das situações cotidianas”. Dessa forma as autoras indicam que para Vergnaud (1982, p. 36) um conceito pode ser entendido por um tripé de conjuntos diferentes mais dependentes entre si de Situações(S), Invariantes(I) e Representações(L), explicados a seguir:

> S: deve ser entendido como o conjunto de situações, que tornam o conceito significativo;
> I: deve ser compreendido como, o conjunto de invariantes operacionais, que instituem o conceito e estruturam as formas de organização do pensamento, e que serão evocados pelas situações;
> L: deve ser concebido como o conjunto de representações linguísticas e simbólicas que são usadas para retratar o conceito, suas propriedades e as situações ao qual estão relacionados.

Borba (2013), tomando como base a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Gerard Vergnaud, propõe algumas diferenças entre cada situação que classifica a partir de tipo de problema combinatório, entre os quais destaca o produto cartesiano, ou produto de medidas, a permutação, o arranjo e a combinação, as quais exemplificamos a seguir.

Para Borba, Montenegro e Santos (2021, p.21) os problemas combinatórios envolvem “além do trabalho com as situações de *produtos de medidas*, destacadas por Vergnaud (1996), a *Combinatória* também envolve situações de *arranjo, combinação* e *permutação*”.

Os problemas de *produto de medidas* envolvem a escolha de elementos é determinada a partir de conjuntos disjuntos e o panorama da ordem em que estão dispostos não originam probabilidades diferentes. Um exemplo desse tipo de problema seria:

Problema 1: *Marcos vai a um restaurante e dispõe de 4 tipos de comida (feijão, arroz, macarrão e lasanha) e 3 tipos de peixe (salmão, bacalhau e peixe espada). De quantas maneiras, Marcos pode montar sua refeição?*

Nesse caso, há dois conjuntos envolvidos na escolha, o tipo de comida e o tipo de peixe. Podemos observar que a ordem em que escolhe cada tipo de refeição não origina uma possibilidade diferente. A escolha de (lasanha e bacalhau) é a mesma possibilidade de escolher (bacalhau e lasanha) e nesse caso a quantidade de possibilidades de montagem da refeição é: $4 \times 3 = 12$ maneiras possíveis, o que caracteriza a aplicação do princípio fundamental da contagem. Sobre esse tipo de problema Mekhmandarov (2000) afirma que:

> Saber que uma possibilidade é construída escolhendo um e apenas um elemento de cada um dos dois conjuntos; entender que uma possibilidade é um elemento do novo conjunto-produto; aceitar o fato de que cada elemento dos conjuntos originais podem aparecer em várias possibilidades(diferente da situação em uma estrutura aditiva) e compreender que cada possibilidade pode aparecer apenas uma vez no conjunto-produto (não há repetição na construção de pares) (MEKHMANDAROV, 2000, p.296-297, tradução nossa).

Já as noções de situações que envolvem permutação, arranjo e combinação se diferenciam do problema anterior de acordo com Borba (2010) pelo fato de permitir a numeração de elementos em apenas um conjunto. Esses tipos de agrupamentos se diferenciam na quantidade de elementos e nas restrições, como a ordenação de disposição de tais elementos.

A ideia de permutação está relacionada como um subconjunto de arranjo, pois todos os elementos são escolhidos e ordenados. Nesse caso, a noção de permutação está relacionada a disposição de elementos distintos, já que todos os elementos poderão ser selecionados. Um exemplo de permutação:

Problema 2: De que forma quatro pessoas podem ser organizadas em uma fila?

Podemos analisar que nesse caso, temos apenas um conjunto a ser representado. São 4 posições para que as quatro pessoas sejam ordenadas. Sendo assim, temos 24 possibilidades, pois se aplicarmos o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) obtemos, 4x3x2x1 = 24.

Problemas Combinatórios de Arranjos são agrupamentos de um conjunto unitário em que há restrições na escolha dos elementos que compõem as possibilidades além de ser necessário o critério de ordenação. Exemplo:

Problema 3: *Pedro tem 4 colegas de sala (Maria, Cris, Antônio e Breno) e tem que escolher dois para ser representante e vice representante. Nesse caso, há quantas possibilidades diferentes de representante e vice para a sala?*

Analisando a situação, percebemos que são 12 as possibilidades (Maria e Cris; Maria e Antônio; Maria e Breno; Cris e Maria; Cris e Antônio; Cris e Breno; Antônio e Maria; Antônio e Cris; Antônio e Breno; Breno e Maria; Breno e Cris; Breno e Antônio).

Os problemas de combinação são caracterizados pelo agrupamento de elementos de um único conjunto, onde a ordem da disposição dos elementos não são critérios a se considerar.

Problema 4: *Pedro tem 4 colegas de sala (Maria, Cris, Antônio e Breno) e tem que escolher dois para dar uma carona para uma visita ao parque. Nesse caso, há quantas possibilidades diferentes para as pessoas de carona?*

Discutindo essa situação, percebemos que nesse caso, a escolha de Maria e Cris, ou, de Cris e Maria, não representa uma nova possibilidade, o que reforça a ideia de que a ordem não importa. No total são seis possibilidades (Maria e Cris, Maria e Antônio, Maria e Breno, Cris e Antônio, Cris e Breno, e Antônio e Breno).

No Quadro 1 a seguir sistematizamos às situações, invariantes e representações de cada problema mencionado nesta seção:

Quadro 1- Situações, representações e Invariantes dos problemas combinatórios

PROBLEMA	SITUAÇÕES	INVARIANTES	REPRESENTAÇÕES
1	Trata-se do *produto de medidas*	*Escolha* do tipo de comida e tipo de peixe. A ordenação não interfere na refeição.	Possibilidades de construção de *árvore de possibilidades* ou a *listagem* das possibilidades ou ainda o uso do *princípio fundamental da contagem* (PFC), entre outras
2	Problema de *permutação*.	*Ordem* interfere na situação e estabelece novas possibilidades. Utiliza geralmente todos os elementos do conjunto	Devido ao menor número de possibilidades uma *listagem,* usar o *PFC* e aplicar a *fórmula* de permutação.
3	Problema de arranjo.	*Ordem* interfere na situação e estabelece novas possibilidades. *Escolha* de pessoas que fazem parte da possibilidade	*Listagem* das possibilidades, uso do *PFC* e a aplicação da *fórmula* de arranjo, entre outras
4	Problema de combinação	*Ordem* não estabelece novas possibilidades. *Escolha* de pessoas que fazem parte da possibilidade.	Podemos fazer a *listagem* das possibilidades e aplicar a *fórmula* de combinação, entre outras

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Borba (2013), além dos critérios de escolha e ordem de elementos evidenciados nos agrupamentos citados anteriormente, existem outros tipos de disposições de elementos de conjunto(s). Tais disposições podem causar nível de dificuldade maior quando discutidos nos anos iniciais da educação básica, uma vez que os livros didáticos não abordam essas características. Esses problemas são chamados por Borba e Braz (2012) de problemas combinatórios condicionais.

De acordo com Borba (2013) as autoras “Apontam, além das relações de escolha e ordem de elementos, as relações de repetição e as condicionais de posicionamento e de proximidade de elementos”. (BORBA; BRAZ, 2012 apud BORBA, 2013, p. 5). Segundo o trabalho com problemas combinatórios condicionais nos anos iniciais do ensino fundamental as autoras comentam.

> Embora não, necessariamente, devam ser tratadas nos anos iniciais de escolarização as situações combinatórias condicionais, é importante que os professores tenham consciência que uma das formas de tornar mais complexo o ensino de combinatória ao longo da escolarização Básica[...]. (BORBA; BRAZ, 2012 apud BORBA, 2013, p. 5)

Portanto, cabe ao professor analisar cada tipo de problema e seu nível de dificuldade antes de propor a seus alunos, a fim de adequar cada situação à realidade de sua turma. Para Vergnaud (1993, p. 1) “É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança”. No caso da Combinatória o sentido pode ser compreendido a partir das situações apresentadas, mas pode ser ampliado para discussões de problemas combinatórios condicionais conforme apresentado por Borba (2013).

Em acréscimo as características de problemas combinatórios apresentadas, Araújo e Rocha (2018) em sua investigação discutem o desempenho de estudantes do ensino médio na compreensão de invariantes prescritos de ordenação e repetição em problemas de arranjo e combinação. As autoras constataram que nos problemas combinatórios nos quais o invariante da repetição se apresentava os alunos apresentavam mais erros que naqueles que não apresentavam.

De acordo com Vergnaud (1993, p.25) as “invariantes operatórias organizam a busca da informação pertinente em função do problema a resolver ou do objeto a atingir, além de balizar as inferências”. Nesse sentido, a partir da pesquisa de Araujo e Rocha (2018), podemos dizer que o invariante de repetição dos problemas combinatórios precisa ser mais discutido no ensino médio, inclusive nesses tipos de situações podem ser abordadas além da execução das operações, situações que discutam a identificação dos invariantes de problemas combinatórios.

Cedran e Kiouranis (2019, p.81) reafirmam o potencial da Teoria dos Campos Conceituais no “entendimento dos processos de desenvolvimento dos conhecimentos científicos pelos indivíduos, além de se constituir um bom referencial para o estudo, elaboração e compreensão de práticas para o ensino de ciências”. Em nosso caso, nos referendamos nessa teoria e, em especial, a discussão de Borba (2010, 2013) nas características de situações, invariantes e representações da Combinatória, para discutir as qualidades dos objetos de aprendizagem desse conteúdo presentes no GeoGebra. Na próxima seção, discutimos um pouco sobre tecnologia no ensino de matemática e sobre os recursos propostos no GeoGebra.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO

Na era moderna, a utilização de recursos digitais na Educação se tornou constante devido a necessidade de dinamizar as aulas com aparelhos eletrônicos que motivem os alunos a buscarem o interesse em ser um sujeito ativo no processo de aprendizagem. Devido a pandemia de COVID-19, essa intensificação de utilização de tecnologias digitais está ainda mais presente, pois com o distanciamento social e a impossibilidade de, por um longo período, muitos alunos voltarem as atividades presenciais, se faz preciso que os professores utilizem tais ferramentas visando "levar" o conteúdo até o aluno.

> As tecnologias digitais se apresentam como recursos favoráveis para a mediação, sobretudo no que tange as diferentes possibilidades de transformar tais ferramentas em salas de aulas virtuais, que possibilitam a interação de alunos e professores. (SANTOS JÚNIOR; MONTEIRO, 2020, p. 4)

Por esse ângulo salientamos que as ferramentas digitais são grandes aliadas da prática docente, pois a aplicação permite uma aproximação entre a dualidade profissional professor-aluno favorecendo em um sólido processo de ensino e aprendizagem. Furtado (2019, p.35) afirma que o uso na escola de tecnologias de informação e comunicação "representa um momento que permite (re)pensar uma maneira de integrar e compartilhar as experiências de cada instituição de ensino, dos profissionais, dos alunos e comunidade inseridos nesse meio".

Nos tempos de pandemia da Covid-19, de acordo com Aquino et al (2020) foram adotados em vários países, inclusive no Brasil, o distanciamento social, isolamento dos casos, quarentena de contatos e o fechamento das escolas como medidas protetivas para impedir a disseminação do coronavírus na população.

Macaya e Jereissati (2021), em estudo realizado no Education and Digital Technologies sobre os desafios e estratégias adotados para continuidade da aprendizagem em tempos de COVID-19 indicaram um cenário para as escolas públicas no Brasil com muitos desafios para implementação do ensino remoto como, por exemplo,

> Falta de dispositivos, como computadores e telefones celulares, e acesso à Internet nas residências dos alunos, Atendimento aos alunos que moram em áreas isoladas ou remotas, Aumento da carga horária dos professores, Falta de habilidade dos professores das escolas para usar recursos tecnológicos nas atividades pedagógicas, Dificuldades enfrentadas pelos pais e responsáveis legais no apoio aos alunos nas

> atividades escolares, Atendimento aos alunos em situação de vulnerabilidade social, como aqueles sem acesso à alimentação no domicílio, Dificuldades na realização de atividades remotas para alunos da Educação Infantil e Ensino Fundamental (MACAYA; JEREISSATI, 2021, p.191).

De acordo com Macaya e Jereissati (2021, p.191) de todas essas indicações a ausência de dispositivos nas residências foi mencionada por mais de 94 mil das escolas públicas no Brasil, demonstrando “a enorme relevância das barreiras de acesso às tecnologias em todos os contextos populacionais do Brasil, principalmente em tempos de isolamento social”.

Sobre esse fator Santos Júnior e Monteiro (2020, p. 5) reconhecem que: “[...] a educação e suas relações de ensino-aprendizado vêm, a passos lentos, acompanhando as transformações sociais advindas dos impactos das tecnologias digitais.” Portanto, o processo de ensino e aprendizagem na esfera pública educacional segue caminhos que levaram um certo tempo para se adaptar ao novo modelo imposto pela pandemia de COVID-19 que passa por uma série de transformações advindas de vários fatores ligados à tecnologia.

> As escolas públicas atuais têm sido colocadas em estudo, sendo analisadas quanto a sua atuação frente às perspectivas e projetos de integração ao avanço tecnológico educacional, não se pode negar que elas têm de acordo com suas possibilidades, elas têm se integrado às inovações e transformações que o sistema educacional tem passado. (NASCIMENTO, 2012, p. 111)

As dificuldades com manuseio de plataformas digitais por parte dos professores também são evidenciadas como um dos desafios para continuidade da aprendizagem durante a pandemia da Covid-19. Esse fato pode estar pode estar relacionado a formação inicial e continuada de cada profissional, pois muitos não obtiveram cursos nessa área. Nascimento (2012) sustenta essa ideia afirmando que:

> A falta de preparação de muitos profissionais da área da educação, entre estes se destaca o professor não estão preparados para atuarem como representantes das inovações tecnológicas, uma vez que, em grande maioria não sabem fazer uso desses recursos para proveito em suas aulas. (NASCIMENTO, 2012, p.112).

Ponte (2000) destaca alguns papeis do professor frente as tecnologias digitais

> Alguns, olham-nas com desconfiança, procurando adiar o máximo possível o momento do encontro indesejado. Outros, usam-nas na sua vida diária, mas não sabem muito bem como as integrar na sua prática profissional. Outros, ainda, procuram usá-las nas suas aulas sem,

> contudo, alterar as suas práticas. Uma minoria entusiasta desbrava caminho, explorando incessantemente novos produtos e ideias, porém defronta-se com muitas dificuldades como também perplexidades (PONTE, 2000, p. 64).

Esses diferentes papeis assumidos pelos professores frente as tecnologias geram outro desafio para a educação pública, pois além da necessidade de acompanhar o ritmo das mudanças, há uma urgência que professores de diversas regiões do país se adaptem a utilização desses recursos tecnológicos em suas aulas com a práxis da dinamicidade do(s) conteúdo(s) abordado(s) impulsionando nos alunos, o interesse em participar ativamente das aulas.

As instituições públicas de Ensino Básico tiveram que reinventar na transição do modelo de ensino presencial para o ensino remoto e isso foi uma tarefa árdua, pois como apresentado, nem todas as escolas estavam preparadas para tal cenário. Dentre as estratégias adotadas pelas escolas públicas brasileiras de acordo com Macaya e Jereissati foram:

> [...] agendar um dia e tempo para que pais e responsáveis legais pudessem escolher atividades impressas e materiais pedagógicos na escola (93%), e a criação de grupos em aplicativos ou redes sociais, como WhatsApp ou Facebook, para se comunicar com alunos e pais e responsáveis legais (90%); por outro lado, as ações menos implementadas foram o envio de atividades e materiais aos alunos por e-mail (55%) e utilizando plataformas virtuais e recursos educacionais, como Google Classroom, adotado por pouco mais da metade das escolas (53%), o que equivale a mais de 53 mil instalações escolares. (MACAYA; JEREISSATI, 2021, p.196).

Ainda de acordo com as autoras, na Região Nordeste outra estratégia adotada para o ensino remoto foi a parceria com líderes comunitários para distribuição de materiais pedagógicos impressos implementado em cerca de 69% das escolas, o que aliada a utilização de grupos de WhatsApp em 91% das escolas, proporcionou um auxílio nessa conjuntura (MACAYA; JEREISSATI, 2021).

Outra questão que merece destaque é a precarização em que alunos e/ou professores se encontram para enfrentar as mudanças impostas pelos recursos tecnológicos, transformações que estão ocorrendo de forma contínua e requer adaptação por ambas as partes objetivando seguir e se inserir no contexto de tais mudanças.

> A realidade com que a educação pública brasileira se mostra inserida, na atualidade, denuncia a efetivação de certa falta de condições e um despreparo seja por parte do educador como do educando para se

> inserir no âmbito de uma política educacional em que o avanço tecnológico constitui um fator evidente, ou seja, as transformações que a esfera tecnológica tem processado, nos últimos tempos, deixam os educadores e educandos brasileiros numa certa desvantagem, visto que, a velocidade com que se processam as mudanças é bem maior do que a capacidade que o indivíduo dispõe para acompanhá-las. (NASCIMENTO, 2012, p. 112)

Soma-se a esse quadro, a escola pública brasileira que no período pandêmico adotaram plataformas digitais que apesar de “muitas vezes oferecidas “gratuitamente”, foram implementadas às pressas, sem necessariamente considerar as implicações dessas escolhas” (MACAYA; JEREISSATI, 2021, p.205).

Com base no exposto, a adoção de tecnologias digitais nas aulas remotas durante a pandemia atingiu mais 53 mil escolas, mas apesar de ser uma decisão acertada devido aos fatores sanitários por causa da pandemia, é necessário alguns cuidados. Macaya e Jereissati (2021, p.200) alertam sobre as escolhas dos recursos tecnologias digitais para as aulas, e indicam que seja tomada uma “decisão consciente e qualificada, envolvendo direção e corpo docente, com base em informações sobre as potencialidades e limitações das tecnologias, devendo também estar alinhada com a perspectiva educacional da escola e demandas específicas”.

Nesse sentido, estudos que analisam os recursos digitais podem fomentar argumentos para que o professor tome decisões com maiores conhecimentos, conhecendo alguns dos limites e potencialidades do uso desse recurso.

3.1 O SOFTWARE GEOGEBRA E SUAS CONTRIBUIÇÕES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica gratuito e **multiplataforma** para todos os níveis de ensino, que de acordo com Império (2017) combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única aplicação.

Conforme apontam Sanches, Souza e Barbosa (2011, p.17) esse software foi criado por Markus Hohenwarter no ano de 2001 com a intenção de “auxiliar os professores a tornarem suas aulas mais dinâmicas”. Outra característica peculiar do GeoGebra é o fato dele ser um software aberto, o que de acordo com os autores “permite que professores e alunos criem problemas e soluções com criatividade, diferentemente de softwares fechados que pouco permite a criação de soluções e problemas” (SANCHES *et al.* 2011, p.17).

Segundo Império (2017, p. 21) “o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso”. Atualmente, no site do GeoGebra[3] existe a informação que existem milhões de usuários localizados em vários países que utilizam o software, inclusive afirma que é um “líder de software de matemática dinâmica, apoiando a educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo”

O aspecto dinâmico e interativo presente no Geogebra configura-o como uma ferramenta de suma importância na apresentação de conteúdos matemáticos em sala de aula.

Jardim *et al.* (2015) considera esse software como prático e dinâmico, permitindo que os discentes compreendam com maior facilidade os conceitos e conteúdos abordados em sala de aula. Dessa forma Jardim et al (2015) complementa e discorre sobre o aspecto de simples manipulação e interatividade que o GeoGebra proporciona aos alunos, o interesse em manusear o recurso de forma a aprender um determinado assunto por meio das diferentes funcionalidades da interface do software em questão. A utilização desse recurso tecnológico na sala de aula proporciona ao aluno o desenvolvimento de práticas que possibilitam a aprendizagem significativa, através de conceitos postos em ação que dão sentido no estudo de Matemática.

De acordo com Bortolossi (2016, p.430)

> [...] atualmente, ao longo de seu percurso escolar, se um licenciando em Matemática tiver contato com algum software educacional, muito provavelmente este software será o GeoGebra. Por que não usá-lo então para o ensino e a aprendizagem de Estatística e Probabilidade?

Ainda segundo Bortolossi (2016, p.436) o GeoGebra possui diferentes recursos gráficos, numéricos e simbólicos que “podem ser usados para criar material didático de apoio para o ensino e a aprendizagem de Estatística e Probabilidade”.

Com base na discussão, observamos o potencial desse software para o trabalho com matemática, seja em cursos de formação inicial ou continuada de professores. Para além desses recursos, existe no GeoGebra, uma sessão de materiais didáticos que estão disponibilizados mais de 1 milhão de atividades

---

[3] Sobre o GeoGebra – GeoGebra

gratuitas, sendo simulações ou, exercícios, ou aulas e jogos. Essas atividades possibilitam tanto para futuros professores como professores em exercícios outras propostas metodológicas para subsidiar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

3.2 OBJETOS DE APRENDIZAGEM(OA) DO GEOGEBRA E PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

A ideia de objetos de aprendizagem é bastante ampla. “Um objeto de aprendizagem (OA) é um recurso educacional que traz em sua concepção a ideia de compartilhamento e reutilização” (COSTA, 2013, p. 29). Nesse contexto, trata-se de ferramentas que podem auxiliar professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem no que tange ao entendimento de variados conteúdos nos diferentes níveis de escolarização.

> Flexibilidade e possibilidade de reutilização são algumas das características de um objeto de aprendizagem, que facilitam a disseminação do conhecimento, assim como sua atualização. Salienta-se como em qualquer planejamento de aula, a adequada seleção de um OA para uso em atividade didática fica definida a partir do objetivo que se pretende alcançar na aprendizagem de um determinado conteúdo. (AGUIAR; FLÔRES, 2014, p. 12)

Podemos perceber então que a utilização de Objetos de Aprendizagem em sala de aula é interessante, pois permite a aplicação em diferentes níveis de ensino. É importante afirmar que para a escolha de um OA, se faz necessário que os objetivos de aprendizagem para uma determinada aula estejam definidos.

Na pesquisa de Império (2017) foi realizado um questionário no Google Drive com 19 professores com relação as condições tecnológicas das escolas em que lecionam, como também com relação ao uso de tecnologias em suas práticas, em especial, se usam algum software como recurso para o ensino de combinatória. Como resultados Império (2017) aponta que apesar de 84% das escolas possuírem recursos tecnológicos, apenas 5% dos professores utilizam tais recursos na Combinatória.

Em continuidade da pesquisa, o autor compara o desempenho obtido em duas turmas do curso de Técnico de Informática, relativo ao 2º ano do Ensino Médio, nas quais foram abordadas a combinatória, na primeira sem o uso do GeoGebra e na segunda com o uso desse software. Império (2017, p.49) constatou que na turma que fez uso do GeoGebra “teve um desempenho superior em comparação à outra turma”.

Império (2017, p.49) afirma que na resolução de problemas combinatórios, o GeoGebra se torna uma plataforma de destaque porque: “[...] dispõe de um aspecto importante que é sua dinamicidade, permitindo analisar um problema de várias maneiras”. O software pode ser útil na verificação de possíveis erros, assim como, a demonstração das origens de tais erros possibilitando a correção de um determinado problema.

Furtado (2019) realizou um estudo que teve por objetivo abordar processo de resolução de problemas dos conteúdos de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade com aporte do software GeoGebra. Nessa pesquisa foram criadas três situações de combinatória para serem resolvidas com uso do GeoGebra e para esse fim foram escolhidos problemas que fizessem uso “de visualização e compreensão geométricas para serem solucionadas, assim, o GeoGebra configura-se como um complemento de auxílio na resolução das mesmas, de modo que os alunos possam alcançar os objetivos de cada proposta.” (FURTADO, 2019, p.50).

Com as tarefas propostas para Combinatória, Furtado (2019, p.51) indica que o GeoGebra “traz a possibilidade de construção de um mecanismo dinâmico que auxilia a visualização dos possíveis caminhos”. Em sua investigação, Furtado (2019) elaborou um problema de permutação denotado por: *Encontro no parque* no qual consiste em descobrir a quantidade de caminhos distintos que um jovem dispõe para ir ao encontro de sua namorada em um parque de uma cidade composto por um conjunto de 15 blocos de jardins. Nesse sentido o jovem deve partir do ponto R(Saída) ao ponto S(chegada) sempre da esquerda para a direita e de baixo para cima. Dessa forma podemos identificar a quantidade de caminhos possíveis aplicando o conceito e a fórmula de permutação. Além disso, também foi proposto um problema de arranjo simples exposto como: *Logotipo de uma empresa* que trata de uma situação em que os participantes de uma empresa deveriam elaborar um logotipo para um concurso. Para tal fim, era necessário dispor de um círculo dividido em quatro partes e colorir cada parte com as cores disponíveis. Foram impostas várias condições para a validade do projeto, entre elas é que as partes adjuntas não podem ter a mesma cor e nesse caso é nítido a relevância da interferência da ordenação dos elementos caracterizando um problema de arranjo simples.

Por fim é proposto o problema: *diagonais de um polígono convexo* o qual solicita a quantidade de diagonais existentes em um polígono de *n* lados. Nesse caso é necessário perceber que os segmentos dos vértices do polígono podem ser calculados por meio de um problema de combinação e assim chegar na expressão para cálculo do número total de diagonais de um polígono.

Furtado (2019, p.57) constatou que “o papel do professor como mediador de conhecimento é de fundamental importância na escolha e na utilização do recurso computacional no processo de ensino e aprendizagem”.

Martarelli, Silva, Souto e Tajima (2021) em seu artigo apresentam uma sequência didática de problemas combinatórios elaborada com o jogo senha construído no GeoGebra.

Os autores sugerem que antes do início da sequência, as atividades podem ser exploradas com lápis e papel e tentar chegar à solução antes da inserção do recurso tecnológico. Em seguida, é necessário um momento de familiarização dos estudantes com o jogo senha no GeoGebra.

A sequência de atividades foi constituída em um problema de combinação, uma de raciocínio lógico, um problema de arranjo e um problema de permutação caótica. De acordo com Martarelli et al. (2021, p.57)

> Em todas as resoluções apresentadas aqui foram usados dois princípios fundamentais da análise combinatória: Princípio da Adição e o Princípio da Multiplicação. E trouxemos exemplos em que é possível visualizar todas as soluções possíveis, o que facilita a compreensão de conteúdos como combinação simples e permutação caótica, quando muitas vezes o aluno, ou o professor, se prende a fórmulas sem compreenderem o sentido delas

A possibilidade de diferentes tipos de representações como listagem de todas as possibilidades, diagrama de árvores, como também estratégias de resolução com diferentes de um mesmo problema (a primeira com o uso do princípio multiplicativo e a segunda com o princípio aditivo) observada nesse trabalho, permite perceber o potencial do GeoGebra no ensino e aprendizagem de combinatória.

Como observado Império (2017) trabalhou com o GeoGebra na sala de aula, enquanto as pesquisas de Furtado (2019) e Martarelli *et al*. (2021) produziram atividades para o trabalho de Combinatória por meio de GeoGebra.

Em nosso estudo, realiza-se uma análise dos materiais didáticos do GeoGebra, os quais denominamos de objetos de aprendizagem sobre os aspectos de combinatória apresentados, uma vez que acreditamos na importância de que sejam analisados esses objetos de aprendizagem, antes mesmo de serem utilizados em sala de aula.

4 METODOLOGIA

Nesse capítulo apresentamos as escolhas adotadas para a realização da pesquisa. Como o foco é a análise dos objetos de aprendizagem (OA) referentes a combinatória disponíveis na seção de materiais didáticos do software GeoGebra, classificamos a pesquisa quanto a sua natureza como uma abordagem qualitativa.

> As metodologias qualitativas não emergem como alternativas aos modelos quantitativos, mas como uma necessidade e uma urgência dentro da sociologia para aquele que estão convencidos de que a sociedade é uma estrutura que se movimenta mediante a força da ação social individual e grupal. (HAGUETTE, 2001, p. 20)

Para o desenvolvimento desta pesquisa, fizemos a análise dos Objetos de Aprendizagem do GeoGebra quanto aos aspectos evidenciados de combinatória, caracterizando, assim, uma pesquisa de caráter documental:

> A característica da pesquisa documental é que a fonte de coleta de dados está restrita a documentos, escritos ou não, constituindo o que se denomina de fontes primárias. Estas podem ser feitas no momento em que o fato ou fenômeno ocorre, ou depois. (MACORNI; LAKATOS, 2003, p. 174)

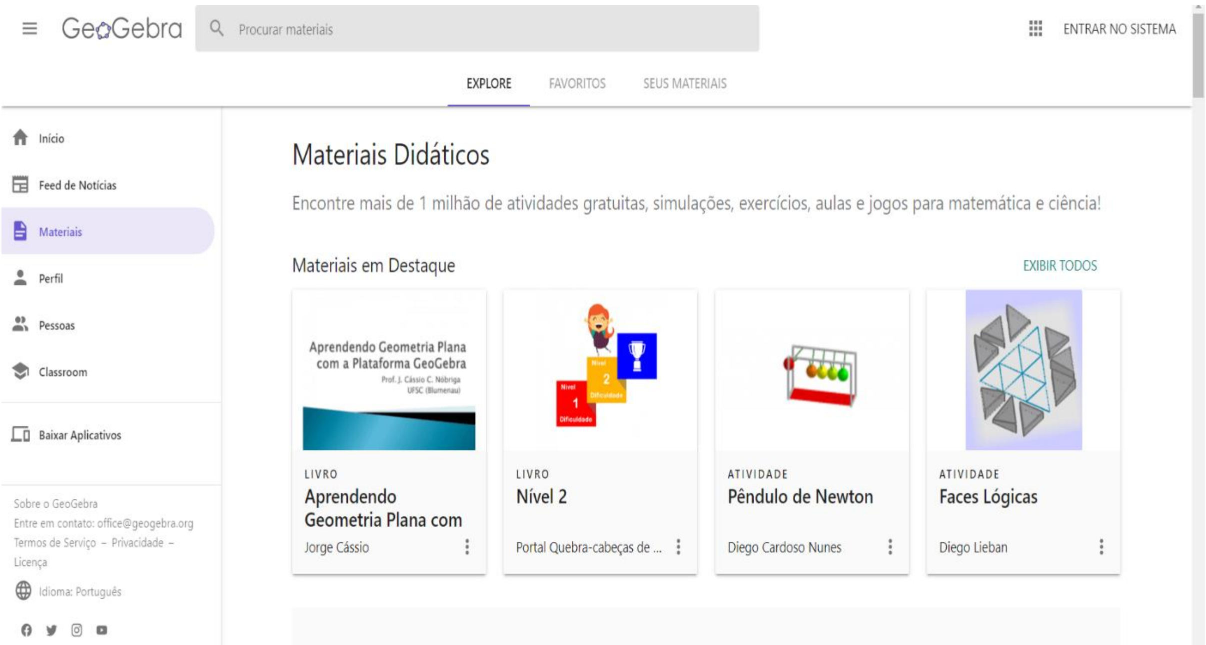
Esta pesquisa caracteriza-se como documental pelo fato de que utilizamos os documentos, mesmo que sejam no formato digital com o intuito de investigar e examinar informações a serem organizadas para o procedimento da construção das análises de acordo com os objetivos estabelecidos.

Como campo de pesquisa, utilizamos o software GeoGebra, especificamente a seção de materiais didáticos disponibilizada no site do GeoGebra. Nele temos a opção de filtrar os materiais por conteúdo matemático de nosso interesse (Álgebra, Geometria, Aritmética, Probabilidade, Cálculo, Funções, Trigonometria e Estatística). Além disso, ao clicar em cada grande eixo temático, aparecem as ramificações específicas referente a determinada área de interesse. Essa opção de conseguirmos filtrar os materiais desejados por área específica da matemática é essencial, pois permite mapear a quantidade encontrada referente ao interesse de pesquisa, bem como identificar quais os tipos de materiais encontrados (livros, jogos, simulações, atividades, aulas entre outros dispostos).

Ao clicar na aba materiais, outras três opções são apresentadas no GeoGebra. São elas: **explore** – onde encontramos os materiais disponíveis para consulta e o campo de filtragem com a palavra matemática ao centro, e os eixos temáticos como subdivisões. **Favoritos –** há opção de marcar os materiais que mais interessam como sendo os favoritos e isso facilita em uma consulta posterior, já que ele estará reservado em um local do sistema. E **seus materiais –** quando há o desejo em construir e/ou elaborar o próprio material para ser lançado a disposição de consulta para outras pessoas.

Porém para obter acesso nas duas últimas opções (favoritos e seus materiais) é necessário obrigatoriamente a criação de uma conta ou efetuar o login com uma conta do Google, Facebook ou outras (já existentes) e conseguir entrar no sistema. Na Figura 1 abaixo, podemos observar a interface específica da aba “materiais”.

Figura 1 – Aba de materiais do GeoGebra online

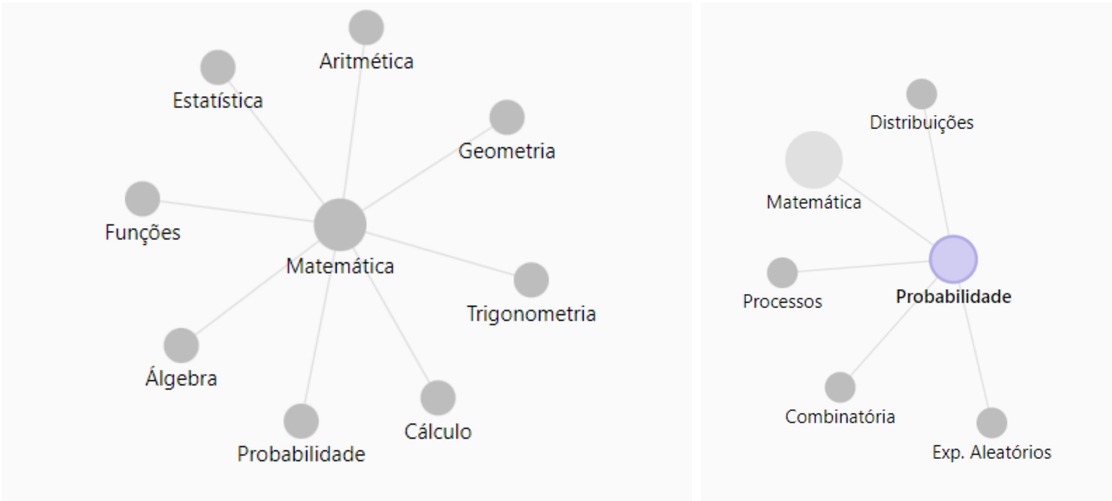


Fonte: GeoGebra (2022, *online)*

De início acessamos o software GeoGebra e navegamos até a aba de materiais didáticos e buscamos o tópico de combinatória, inserida na mesma aba de probabilidade. Nessa busca, encontramos vários materiais que podem ser explorados nessa pesquisa. Escolhemos dentre estes, alguns para nortear o enfoque da pesquisa, visto que a análise de todos os materiais encontrados levaria mais tempo do que o disposto que temos para realizar a pesquisa.

A figura 2 apresenta os conteúdos matemáticos para consulta de objetos de aprendizagem.

Figura 2 - Imagem do campo de filtração por conteúdo



Fonte: GeoGebra (2022, *online*)

Averiguamos os tipos de problemas combinatórios e como esses problemas se apresentam (representações) que são encontrados nesses materiais do software GeoGebra, onde temos à disposição diversos jogos e outros recursos produzidos por vários professores. Também fizemos um estudo sobre as propriedades e os tipos de agrupamentos que mais são evidenciados nesses trabalhos, trazendo os resultados por meio da análise dos dados obtidos.

Foram encontrados 20 materiais referente ao conteúdo de combinatória dos quais selecionamos sete para análise dos dados. Além disso, no final deste trabalho, segue em anexo um quadro com os materiais encontrados no software.

Abaixo apresentamos o Quadro 2 com sete objetos de aprendizagem que analisamos no software GeoGebra. Nesse quadro, podemos verificar as nomenclaturas e as características básicas de cada um. Os critérios para a seleção dos materiais estabelecidos foram os seguintes:

- Apresentação de situações implícitas e/ou explícitas que envolvam o raciocínio combinatório;
- Possibilidade de aplicação em sala de aula;
- Diversidade na construção das soluções;
- Capacidade de induzir a interpretação de um problema através da observação;
- Envolvimento com outras áreas da Matemática

Quadro 2 - Objetos de aprendizagem analisados no GeoGebra

	Nome	Característica
1	Círculos no triângulo	Esse material pode ser utilizado para o ensino de combinatória e traz um problema de preenchimento de círculos no interior de um triângulo com as cores dispostas. Há opção de três cores distintas. Sendo que círculos tangentes não podem ter a mesma cor. O OA possibilita uma listagem de soluções possíveis.
2	Pintando o Hexágono	Similar ao OA anterior, pintando o hexágono tem a característica de preencher os círculos dentro de um hexágono com as cores dispostas na sua interface. Há opção de escolher até seis cores diferentes.
3	O jogo da senha	Esse OA faz referência ao descobrimento de uma senha composta por quatro cores diferentes sendo que a cor preta não pertence a senha. A senha não pode apresentar cores repetidas. Esse problema também possibilita listar as soluções.
4	Qual a senha do cofre?	Consiste em um problema para descobrir a senha composta por três dígitos que abre o cofre. A senha é caracterizada por apresentar um número primo no primeiro dígito, um número quadrado perfeito no segundo e o número oito no terceiro. O OA permite fazer uma listagem das sequências digitadas até encontrar a senha correta.
5	O Problema do Estacionamento	É um tipo de simulador que possibilita realizar o estacionamento de seis carros em oito vagas numeradas de 1 a 8. Porém há a restrição de que uma vez estacionado um carro, o seguinte só poderá estacionar ao lado deste.
6	Permutação, Arranjo e Combinação	Corresponde a um problema de realizar conjuntos das letras dispostas e formar novas palavras(anagramas) de acordo com o tipo de situação (permutação, arranjo ou combinação).
7	Jogo Bicolorido – versão 1	Este OA caracteriza-se pelo ligamento entre segmentos de reta até chegar em uma situação em que um dos jogadores perde. Nesse caso, perde o jogador que formar um triângulo com todos os lados de mesma cor. Cada jogador é separado por uma cor, lembrando que são duas cores dispostas(azul e vermelho). Sendo assim, é um jogo que possibilita a competição entre duas equipes ou dois jogadores.

Fonte: Produzido pelo autor (2022)

Decidimos organizar os recursos em um quadro para facilitar na identificação das peculiaridades específicas individuais e como forma de chamar atenção do leitor para a representação do conteúdo proposto no trabalho mediante ilustrações que aproxime a observação do mesmo com o texto.

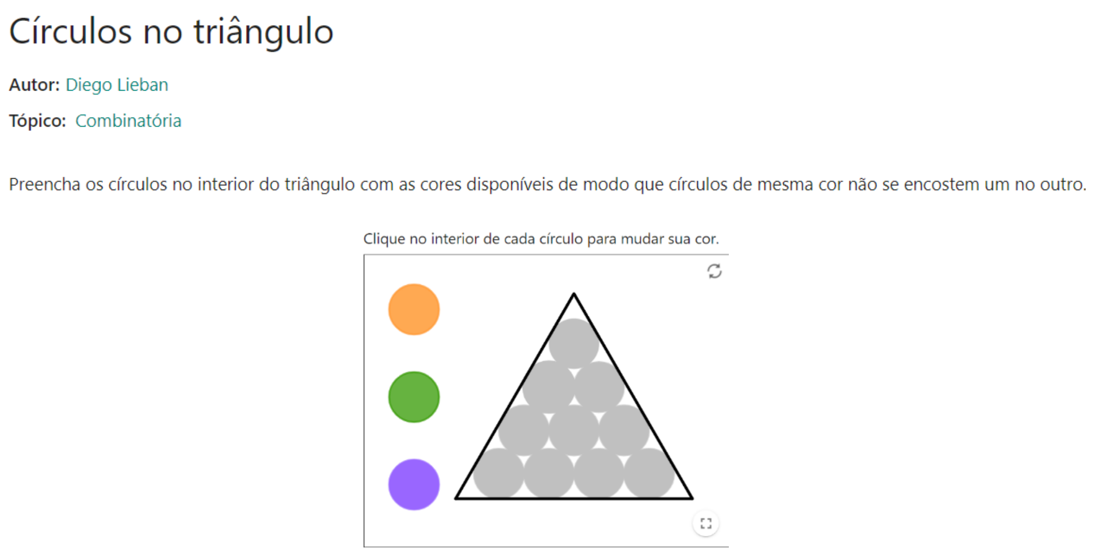
5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA PESQUISA

Esta pesquisa tem como principal objetivo analisar a combinatória nos objetos de aprendizagem (OA) presentes no software GeoGebra. Nesse cenário, investigamos sete objetos de aprendizagem sob a ótica da teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud no que tange as situações, representações e invariantes propostos no âmbito da Educação Básica. Mais especificamente aqueles relativos a Combinatória baseado na discussão de Borba (2010, 2013). Dessa forma, explicamos nessa seção o detalhamento das análises referente aos materiais selecionados para a pesquisa.

5.1 OBJETO DE APRENDIZAGEM 1: CÍRCULOS NO TRIÂNGULO

A figura 3 apresenta o modelo do material "Círculos no Triângulo" e foi extraída do GeoGebra online[4] de autoria de Diego Lieban, que por sua vez se baseou em um problema proposto pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Esse autor, segundo sua página no GeoGebra, é formado em Matemática e possui como área de interesse a Tecnologia em Educação Matemática e a utilização de softwares de Geometria Dinâmica. O Objeto de Aprendizagem foi elaborado com o intuito de explorar o tópico de combinatória, como explicitado na imagem.

Figura 3 - Objeto de aprendizagem 1: Círculos no triângulo



Fonte: GeoGebra (2022, *online*)

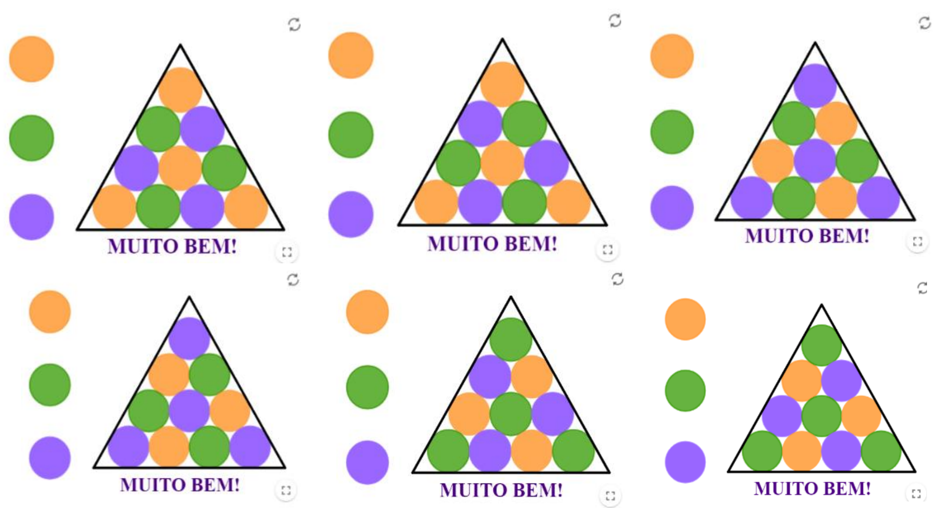
[4] Link de acesso: https://www.geogebra.org/m/w32ggdj5. Acesso em: 08 de Maio de 2022

Pelo exposto na interface, podemos verificar que o OA1 propõe a exploração da resolução de um problema que envolve o raciocínio combinatório por meio do uso de cores e condições. Podemos analisar que a situação em tela pede quais as possíveis soluções de preenchimento dos círculos, sendo que círculos de mesma cor não se tangenciem.

Nesse sentido, o problema proposto apresenta uma situação exploratória, onde há possibilidade de construir soluções prototípicas para refletir na resolução do problema.

De acordo com o que está exposto no material supracitado, podemos observar que o mesmo permite através do desenho, por tentativa e erro listar e/ou enumerar as possibilidades diferentes, como essas a seguir:

Figura 4 - Possibilidades de resolução do problema combinatório - Círculos no triângulo



Fonte: GeoGebra (2022, *online*)

Na listagem acima, podemos perceber que existem seis possibilidades de construir triângulos diferentes, de tal forma que círculos que encostem um no outro não tenham a mesma cor. Outro aspecto notável é que em todas as soluções, os círculos das extremidades possuem a mesma cor entre si e a mesma cor que o círculo do centro. Na análise, notamos que não há possibilidade de fechar um triângulo em que as extremidades tenham cores diferentes.

O círculo do centro do triângulo tangencia seis outros círculos. Sendo assim, para conseguir completar alternadamente os outros círculos, é necessário escolher uma cor entre as três disponíveis para o círculo central e os demais que encostam nele terão que ter cores alternadas (duas possibilidades) de modo que círculos de mesma cor não se encontrarem. Para realizar essas soluções, estamos utilizando o princípio fundamental de contagem para organizar a ideia de preencher as opções de cores em cada círculo e a possibilidade de escolhas para cada cor que será utilizada.

Aplicando o princípio fundamental da contagem, temos que para pintar o círculo central temos três opções de cores, para pintar um círculo que tangencia o central, teremos 2 opções de cores, e os demais apenas uma cor, incluindo também os círculos que tangenciam dois lados do triangulo, assim obtendo, $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$

Abaixo segue o Quadro 3 com a averiguação do OA1 de acordo com as situações, invariantes e representações apresentadas(os).

Quadro 3 – Combinatória no OA 1

Situações(S)	Invariantes(I)	Representações(R)
Trata-se de um problema combinatório condicional, não prototípico, pois existe a restrição de que círculos que tangenciam não pode ter a mesma cor, posição e proximidade. Apesar de não conter uma classificação para essa situação, podemos supor arranjo condicional	Os invariantes implícitos na situação são de *ordem*, pois o modo como as cores serão dispostas interfere na elaboração da solução; escolha, pois selecionamos a cor que será utilizada e de *proximidade e posição*, pois dois círculos tangentes não podem ser pintados da mesma cor.	As representações apresentadas no OA são os de listagem das possibilidades de acordo com a figura 4. Podemos observar que não há existência de fórmulas e nem árvore de possibilidades de forma explícita, mas pode ser complementado pelo professor com o uso do princípio multiplicativo. Também se observa a relação com a geometria, uma vez que a resolução pode fazer uso de termos da geometria, vértices, triângulo, simetria.

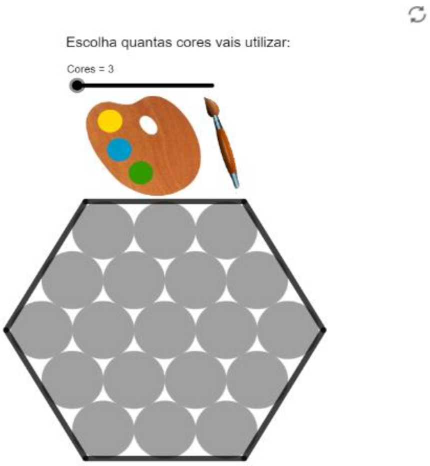
Fonte: Produzido pelo autor (2022)

O professor com base no OA1 pode desafiar os estudantes a explicitar todas as possibilidades, e pensar em situações sem a condição inicial, quantas possibilidades teríamos (para cada círculo, três possibilidades, resultando 3^{10}) ou ainda, situação com mais cores, produzindo a necessidade de generalização. Nesse caso, amplia demais o número de possibilidades impedindo a utilização de listagens, por exemplo, no caso de 4 cores o número de possibilidades, obtendo, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3072$

5.2 OBJETO DE APRENDIZAGEM 2: PINTANDO O HEXÁGONO

A figura 5 faz referência a interface do material pintando o hexágono e foi retirada do GeoGebra online[5]. O presente OA foi produzido por Vandoir Stormowski visando explorar conceitos de combinatória e geometria.

Figura 5 - Objeto de aprendizagem 2: Pintando o Hexágono

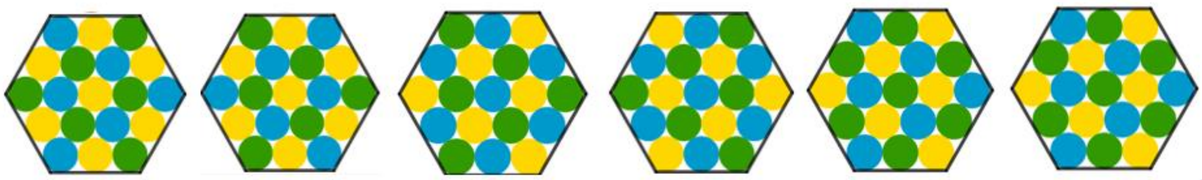


Fonte: GeoGebra (2022, *online*)

Podemos verificar que este é bem semelhante ao OA 1, mudando apenas a forma geométrica a ser pintada e inclui um parâmetro que permite alterar a quantidade de cores com as quais a figura pode ser preenchida.

A situação proposta segue a mesma referente ao OA 1(círculos no triângulo), onde cada círculo deve ser pintado com uma cor e há a condição de que círculos que se encontram não podem apresentar a mesma cor. No entanto, a quantidade de possibilidades de preenchimento no caso do OA 2 apresenta o mesmo número de opções de preenchimento conforme apresentado na figura 6.

Figura 6 - Possibilidades de resolução do problema combinatório – OA2

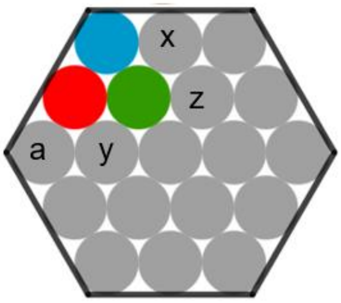


Fonte: GeoGebra (2022, *online*)

[5] Link de acesso: https://www.geogebra.org/m/smyxkxgu. Acesso em: 07 de Maio de 2022

Com três cores é fácil ver que quando selecionamos as três primeiras cores de um triângulo formado por três círculos (ver figura 7) determinamos a certeza das cores de alguns círculos que o tangenciam, e dessa forma os outros são determinados.

Figura 7 - Para provocar uma discussão do objeto OA 2



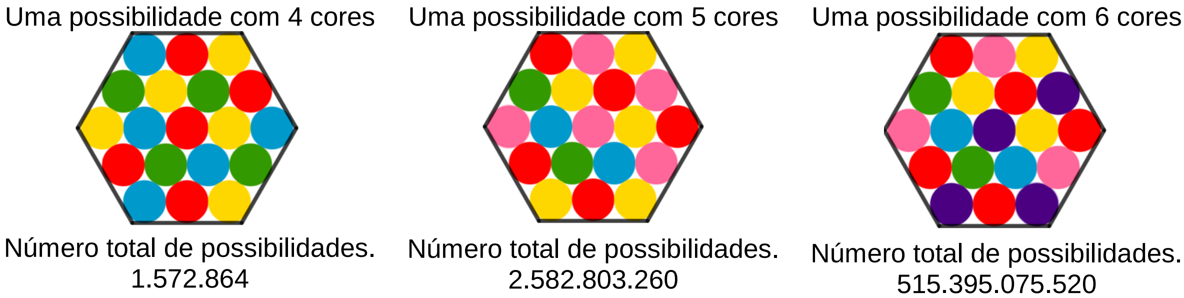
Fonte: Adaptado do GeoGebra (2022, *online*)

Ou seja, segundo a figura 7 com as cores azul, verde e vermelho definidas no primeiro triângulo, *x* só pode ser vermelha, *y* por sua vez deve ser azul, sendo assim *a* tem que ser verde e *z* só pode ser azul. Logo precisamos definir as cores que podem ser usadas nesse triângulo e o restante do hexágono será pré-determinado.

O autor ainda sugere perguntas relativas ao número de possibilidades se ampliarmos o número de cores para 4, 5 ou 6 cores. Sentimos falta de discussões que orientem o professor na solução desses problemas, uma vez que para mais cores as possibilidades crescem o que deixa impossível de fazer uma listagem.

Uma alternativa, que pode ser proposta pelo professor, para que uma variedade de possibilidades seja apresentada é a proposta de adivinhação de uma solução previamente selecionada. Mesmo assim muito difícil exaurir todas as possibilidades, como podemos ver na figura 8.

Figura 8 – Exemplo de possibilidade e número de solução do objeto OA2



Fonte: Adaptado do Geogebra (2022, *online*)

Acreditamos que no OA2 pode ser inserido uma discussão sobre o processo de encontrar as soluções, ou pelo menos, feedback nas respostas para indicar acertos ou erros nas propostas de solução encontradas.

Quadro 4 – Combinatória no OA 2

Situações(S)	Invariantes(I)	Representações(R)
Trata-se de um problema combinatório condicional, já que existe a restrição de que círculos que tangenciam não pode ter a mesma cor, posição e proximidade. Apesar de não conter uma classificação para essa situação, podemos supor arranjo condicional.	Os invariantes implícitos na situação são de *ordem*, pois o modo como as cores serão dispostas interfere na elaboração da solução; escolha, pois selecionamos a cor que será utilizada e de *proximidade e posição*, pois dois círculos tangentes não podem ser pintados da mesma cor.	As representações apresentadas no OA são os de listagem das possibilidades de acordo com a figura 4. Podemos observar que não há existência de fórmulas e nem árvore de possibilidades de forma explícita, mas pode ser complementado pelo professor com o uso do princípio multiplicativo. Também se observa a relação com a geometria, uma vez que a resolução pode fazer uso de termos da geometria, vértices, triângulo, simetria.

Fonte: Produzido pelo autor (2022)

5.3 OBJETO DE APRENDIZAGEM 3: JOGO DA SENHA

A figura 9 expõe o molde do material “jogo da senha” e foi extraída do GeoGebra online.[6] O Objeto de aprendizagem em tela foi elaborado pelos autores Luzia da C. T. Martarelli, Humberto Bortolossi, Brendow P. de M. Souto, Fernando G. da Silva, Ubyrajara C. Tajima.

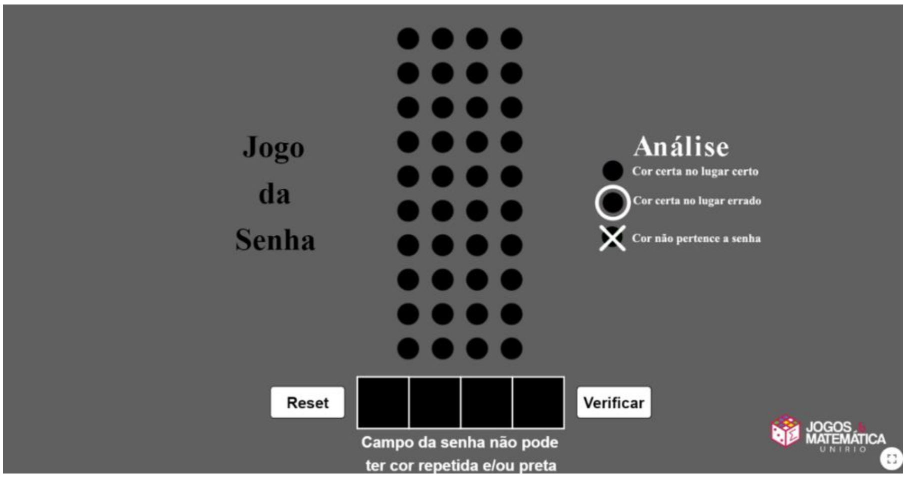
Como citado na ilustração (figura 9), esse OA3 trabalha o desenvolvimento do raciocínio combinatório. No entanto, não se trata de um jogo específico somente de combinatória, pois é necessário utilizar bastante o raciocínio lógico na construção das estratégias jogadas.

Podemos verificar que o jogo é competitivo, onde cada jogador deve formar uma sequência (senha) de quatro cores distintas escolhidas entre as seis cores disponíveis (azul, verde, vermelho, amarelo, rosa e roxo) atendendo ao critério de que a cor preta não pertence a senha, ou seja, o jogador não deverá utilizá-la e a repetição

[6] Link de acesso: https://www.geogebra.org/m/rjyuwp2j. Acesso em: 08 de Maio de 2022

de cores também não valida a combinação. A ordem em que as cores devem ser dispostas é da esquerda para a direita conforme segue a Figura 9.

Figura 9 - Objeto de aprendizagem 3: jogo da senha



Fonte: Geogebra (2022, *online*)

As cores podem ser selecionadas clicando em cada quadradinho. Para alterar a cor basta quantas vezes desejar até surgir a cor desejada pelo participante. Sendo designada a cor para cada quadradinho, basta pressionar a tecla verificar. Instantaneamente é projetada na tela uma análise da tentativa jogada. Tal análise é apresentada em quatro pontos expostos na própria interface do jogo representando as quatro cores.

Caso a cor certa esteja no lugar certo, ela irá aparecer na posição correta dos pontos. Se a cor certa estiver no lugar errado, então o ponto recebe um círculo branco ao seu redor. Se a cor não pertencer a senha, o ponto recebe um X. Para repetir a jogada, o participante observa cautelosamente a análise descrita e escolhe novamente as cores de acordo com as informações cedidas na análise para formular as melhores estratégias na nova jogada. É admissível reproduzir as jogadas várias vezes, lembrando que vence o jogador que acertar a senha com a menor quantidade de tentativas possíveis.

Vamos analisar o exemplo a seguir, disposto na Figura 10, em que o jogador conseguiu descobrir a combinação da senha em três tentativas. Podemos notar que na primeira tentativa em que a sequência de cores foi: VERDE, VERMELHO, AMARELO E AZUL, a cor verde não pertence a senha, pois o ponto com essa cor apareceu com um X. Em contrapartida, as cores vermelho, amarelo e azul pertencem a sequência, porém estão na ordem errada. Sabendo disso, só restaram duas cores para completar a senha que são, rosa ou roxo.

Figura 10 - Possibilidades de resolução do problema combinatório: jogo da senha

Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Na segunda jogada, a cor que falta para completar a combinação é rosa, já que o ponto aparece com um círculo branco ao seu redor. Portanto, as cores que compõem a senha são: amarelo, azul, vermelho e rosa. Para finalizar a partida, só faltava descobrir qual a posição correta de cada cor, tendo plena noção de que somente a cor vermelha está na posição correta.

Com base na discussão, na terceira tentativa que a última cor é a amarela, já que nas jogadas anteriores, nem a azul e nem a rosa que ocupavam essa posição estavam no lugar correto. Se a cor azul não podia ocupar a segunda e nem a quarta posição e sabendo que a terceira posição já está com a cor certa, só restou a primeira posição para a cor azul. Por eliminação, a segunda posição foi a que sobrou, então a cor que falta para completar a senha é a rosa. Clicando no botão verificar, aparece a mensagem na tela: parabéns, você acertou a senha.

Sobre esse Jogo da Senha existe ainda um vídeo do YouTube[7] de como programar essa atividade usando o GeoGebra, discutindo e apresentando o passo a passo dessa construção.

Martarelli et al (2021) propuseram uma sequência didática para o trabalho com esse recurso. Vejamos alguns exemplos:

[7] https://youtu.be/eYVvPS9DBR0

> 1. De quantas maneiras podemos escolher quatro cores distintas, dentre as 6 disponíveis, sem considerar a ordem das cores? [combinação]
> [...]
> 2. Quantas cores, no mínimo, você pode acertar na primeira tentativa, independentemente da posição estar correta ou não? [raciocínio lógico]
> [...]
> 3. Quantas são as possibilidades de senha na primeira jogada? [arranjo] (MARTARELLI et al. 2021, p.51-53)

Atividades como essas podem orientar o trabalho do professor com o OA3, principalmente, com relação ao ensino de Combinatória.

Abaixo segue a Quadro 5 contendo a análise do OA 3 referente as situações, invariantes e representações apresentadas(os).

Quadro 5 - Combinatória no OA 3

Situações(S)	Invariantes(I)	Representações(R)
Os problemas combinatórios não estão explícitos no jogo. No entanto, podemos classificar as situações propostas por Martarelli et al (2021) como combinação no caso 1 e arranjo no caso 3. Uma situação de permutação pode ser elaborada. Caso 4. Se possuímos as quatro cores iniciais da senha, quantos casos diferentes de senha podem ser solicitados?	Como foram pensados três tipos de situações os invariantes são diferentes. Mas são presentes os invariantes de ordem nos casos 1 e 4, o de escolha, nos casos 1 e 3. No jogo a escolha das cores em cada quadradinho de acordo com o feedback exposto no próprio jogo ajuda no raciocínio da estratégia da próxima tentativa.	As representações apresentadas no OA 2 se baseiam em uma listagem, pois não há presença do princípio fundamental de contagem (PFC), gráficos, árvore de possibilidades. Nessa perspectiva, o jogo apresenta possibilidade de listar as soluções através de tentativas.

Fonte: Produzido pelo autor (2022)

Nesse OA3 a mediação do professor torna-se necessária, a partir da proposição de situações de exploração do jogo, para que a discussão sobre combinatória ocorra.

5.4 OBJETO DE APRENDIZAGEM 4: QUAL A SENHA DO COFRE?

O Objeto de aprendizagem (OA4) foi elaborado pelo autor Aparecido Sousa, visando explorar o conceito de combinatória. No entanto, não se trata de um jogo específico somente de combinatória, pois é necessário utilizar bastante o raciocínio lógico na construção das estratégias jogadas.

No entanto, ao aplicar esse jogo em sala de aula o professor pode explorar o a combinatória ao fazer as combinações possíveis de encontrar a senha e observar a quantidade de soluções possíveis de acordo com as regras definidas previamente. A Figura 11 mostra o formato do material “Qual a senha do cofre?” e foi extraída do GeoGebra online.[8]

Figura 11 - Objeto de aprendizagem 4: Qual a senha do cofre?

Fonte: GeoGebra (2022, *online*)

É um problema que deve ser resolvido por tentativa e erro, visto que alguns critérios são estabelecidos inicialmente e isso cede um suporte ao participante. Trata-se de uma situação em que a senha é composta por 3 dígitos diferentes, sendo que o primeiro dígito deve ser obrigatoriamente um número primo, aquele que é maior que 1 apenas e possui apenas dois divisores: o número 1 e ele mesmo. O segundo dígito da senha deve ser um número quadrado perfeito e o terceiro dígito é o número 8.

Na interface do problema, há a opção de apagar a sequência numérica da senha digitada clicando no botão **C**. Após digitar os números da combinação da senha,

[8] Link de acesso: https://www.geogebra.org/m/mmcvpr9u. Acesso em: 08 de Maio de 2022

o participante deve clicar no botão *ENTER* para verificar se a sequência digitada foi a correta ou não. Caso tenha errado, o mesmo poderá tentar novamente até conseguir encontrar a senha correta.

O problema pode ser trabalhado em sala de aula de forma competitiva, no qual o professor propõe a situação ao aluno ou grupo de alunos e enfatizar a competição em que o aluno ou grupo de alunos que conseguir encontrar a senha do cofre com a menor quantidade de tentativas será o vencedor.

Logo abaixo, na Figura 12, segue a imagem em que o participante conseguiu encontrar a senha e o respectivo número de tentativas.

Figura 12 - *Possibilidades de resolução do problema combinatório*: Qual a senha do cofre?

Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Analisando a figura 12 é perceptível que a quantidade de tentativas que o participante fez foram três. Como o primeiro número sempre deve ser primo e existem apenas quatro entre os dispostos nos dígitos do cofre (2, 3, 5 e 7), foi pensado no número dois (primeiro número primo do conjunto dos naturais e único número primo par). O segundo deve ser um número quadrado perfeito e existem apenas três entre os dispostos (1,4 e 9), sendo assim foi pensado de início no número um como sendo quadrado perfeito que compõe o dígito do meio da senha e o último dígito sempre é o número 8.

Dessa forma, o jogador resolveu tentar a sequência (2,1,8) e ao clicar no botão *Enter*, não obteve sucesso. Partindo então para a próxima tentativa, o jogador escolheu a sequência (2,4,8), mudando apenas o número do meio em relação a senha anterior. Mais uma vez, ao clicar no botão *Enter*, não obteve êxito na jogada.

Na terceira tentativa o participante conseguiu abrir o cofre. Ao combinar a sequência (2,9,8) mudando apenas o dígito do meio em relação a senha anterior, a senha foi encontrada e o cofre aberto e a mensagem contendo a quantidade de doze senhas possíveis foi exibida.

Abaixo segue a Quadro 6 contendo a análise do OA 4 referente as situações, invariantes e representações apresentados.

Quadro 6 - Combinatória no OA 4

Situações(S)	Invariantes(I)	Representações(R)
A situação combinatória está explícita no problema, visto que podemos classificar a situação como um problema de combinatória simples que envolve basicamente o produto de medidas, pois é possível descobrir quantas possibilidades podemos escolher no primeiro dígito e no segundo, já que o terceiro é sempre o número oito Nesse caso já sabemos o número de possibilidades que cada dígito pode ter e queremos apenas saber a quantidade de senhas que é possível para abrir o cofre. Aplicando o PFC, podemos multiplicar a quantidade de possibilidades de cada dígito encontramos a quantidade total de possibilidades de abertura do cofre.	Quanto aos invariantes expostos é o de escolha, pois há a condição de que número primos só podem estar no primeiro dígito e números quadrados perfeitos só podem aparecer no segundo dígito. Esses critérios são obrigatórios e interferem na criação da sequência da senha do cofre	As representações podem ser a listagem e princípio fundamental de contagem (PFC), mas se o professor usar um auxílio para registro. Verificamos que não há presença de gráficos, árvore de possibilidades e/ou representações icônicas. Para resolver o jogo é necessário listar as soluções através de tentativas.

Fonte: Produzido pelo autor (2022)

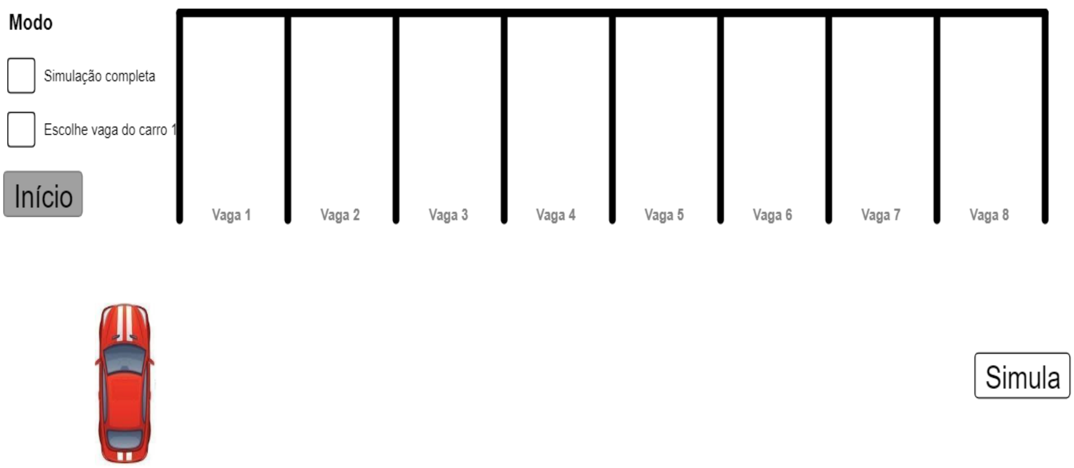
Esse tipo de AO4, o trabalho com combinatória precisa também da mediação do professor, uma vez que o conteúdo está implícito na situação. Para auxiliar esse trabalho o professor pode antecipar o problema na sala de aula e depois solicitar que os alunos comparem a resposta obtida, como o número de tentativas no jogo.

5.5 OBJETO DE APRENDIZAGEM 5: O PROBLEMA DO ESTACIONAMENTO

Elaborado por André Luiz Souza Silva, o problema exposto no objeto de aprendizagem (OA5) trata-se de um problema específico de combinatória e isso é nítido ao acessar o material e verificar que a situação exige uma resolução através de recursos de contagem.

É um simulador que apresenta as possibilidades de diferentes sequências de estacionamento de carros, sendo que há condição de que uma vez um carro estaciona primeiro, os demais só poderão estacionar em vagas vizinhas aos que já estão estacionados. Nesse caso, o estacionamento dispõe de oito vagas para que seis carros possam estacionar atendendo ao critério mencionado anteriormente. Na figura 13 apresentamos a tela inicial do problema do estacionamento retirada do Geogebra online[9].

Figura 13 - Objeto de aprendizagem 5: O problema do estacionamento



Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Ao acessar o OA5 podemos verificar que a sequência em que os carros podem ser estacionados depende exclusivamente da simulação em o primeiro carro é estacionado. Esse fato é evidente quando notamos na interface do problema, onde há opção de escolher a simulação completa, a qual o carro 1 pode ser estacionado aleatoriamente (simulação completa) e em seguida os demais devem seguir a condição de ocuparem as vagas ao lado de carros já estacionados.

[9] Link de acesso: https://www.geogebra.org/m/YXX9U2Vs. Acesso em: 07 de Maio de 2022.

Nesse caso, ao clicar no botão *Simula*, o carro 1 é estacionado em uma vaga aleatória dentre as oito disponíveis. Para continuar estacionando os demais deve-se ir clicando no botão *Simula* até que todos os carros sejam ocupem as vagas vizinhas aos que já estão estacionados.

Também há opção de escolher em qual vaga o carro 1 deve ser estacionado. Tendo selecionada a opção de escolher a posição do carro 1, ao clicar no botão simula é possível escolher qualquer vaga dentre as oito para que o carro 1 possa ocupar e em seguida é só ir clicando no botão *Simula* que os demais carros vão ocupando as vagas de acordo com as mesmas orientações expostas anteriormente.

Abaixo seguem algumas figuras com simulações feitas no material:

- Simulação completa

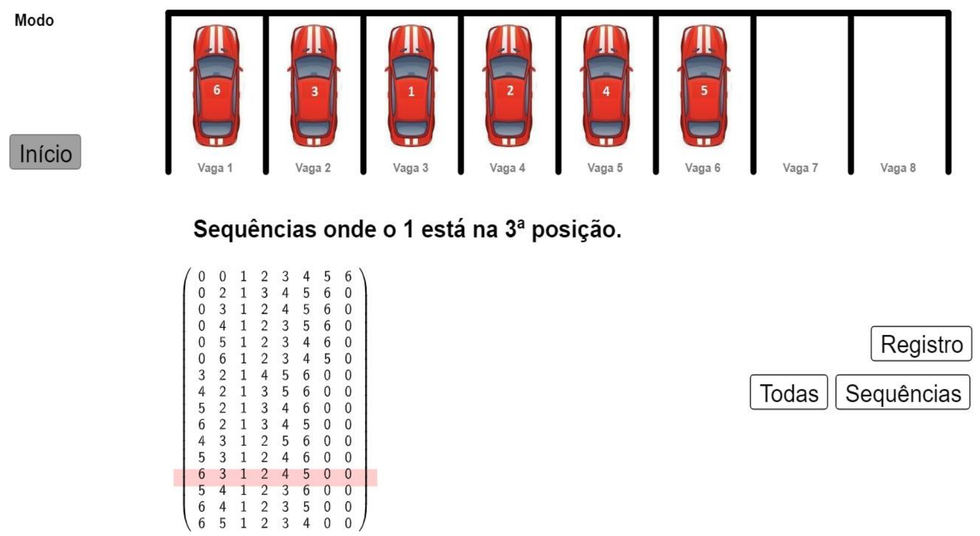
Figura 14 - *Possibilidades de resolução do problema combinatório*: O problema do estacionamento

Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Nesse caso, a sequência em que os carros estão dispostos no estacionamento é registrada no botão registro. Ao clicar, são expostas as vagas que cada carro ocupou. Na simulação acima, como o primeiro carro foi estacionado na vaga 1, os outros carros só podem ter uma possibilidade de estacionar, vizinho ao anterior. Sendo assim, o segundo carro fica na vaga 2, terceiro carro na vaga 3, quarto carro na vaga 3, quarto carro na vaga 4, quinto carro na vaga 5 e sexto carro na vaga 6 ficando as vagas 7 e 8 livres. O mesmo acontece se o primeiro carro for estacionado na vaga 8, só há uma sequência possível mudando apenas as posições dos carros em relação ao caso em que o primeiro carro é estacionado na vaga 1.

Vejamos outra simulação completa:

Figura 15 - *Possibilidades de resolução do problema combinatório*: O problema do estacionamento



Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Na figura 15 o primeiro carro ocupou a vaga 3, nessa perspectiva o segundo carro só teria duas possibilidades de estacionar: ocupando a vaga 2 ou a vaga 4. Nesse caso a vaga preenchida pelo segundo carro foi a 4 e os demais carros foram sendo dispostos atendendo a mesma condição.

Clicando no botão *Sequências* é apresentado uma lista com as possibilidades de posicionamento em que os carros podem serem dispostos. É fixado o primeiro carro na vaga 3 e vai alternando as outras possibilidades.

Nas sequências listadas temos um total de 16 possibilidades de estacionar os seis carros entre as oito vagas, sendo o primeiro carro fixado na vaga 3. Porém o primeiro carro pode ocupar qualquer vaga dentre as oito, então cada simulação diferente tipos de sequências e depende exclusivamente do pontapé inicial da ocupação da vaga pelo primeiro carro.

Vamos observar agora, na figura 16, alguns exemplos em que escolhida a vaga do primeiro carro, teremos as sequências expostas com os outros carros.

- Escolhe vaga do carro 1:

Figura 16 - *Possibilidades de resolução do problema combinatório*: O problema do estacionamento

Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Fixado o primeiro carro na vaga 2 vimos que há duas possibilidades de estacionar o segundo carro que seria na vaga 1 ou na vaga 3. Nesse caso ficou na vaga 3. O terceiro carro também possui duas possibilidades, a vaga 1 ou vaga 4, o mesmo fixou-se na vaga 4. Os demais carros também irão possuir duas possibilidades de estacionamento,

No exemplo acima, ao clicar no botão sequências é mostrado na tela a lista de possíveis sequências de estacionar os carros nas vagas dispostas.

O Quadro 7 apresenta pela análise do OA 5 de acordo com as situações, representações e invariantes propostos.

Quadro 7 - Combinatória no OA 5

Situações(S)	Invariantes(I)	Representações(R)
Referente as situações apresentadas no OA5 temos um arranjo simples com condição, pois a ordem da posição de cada carro interfere na possibilidade de estacionar os demais. Nesse sentido, como são seis carros dada a condição, não há possibilidade de repetição de carros estacionarem na mesma vaga simultaneamente.	Os invariantes apresentados são de ordem e escolha, e ainda se apresenta a condição de proximidade e posição, já que cada carro só pode ser estacionado um ao lado do outro.	As representações expostas no OA 5 se apresentam na forma de simulação do estacionamento, visto que não apresenta registro de fórmulas. É apresentada a transcrição da posição e organização dos carros a serem dispostos nas vagas. Além disso é anunciada a sequência de possibilidades de acordo com a vaga inicial. A listagem de todas as possibilidades pode ser observada em registro semelhante ao matricial.

Fonte: Produzido pelo autor (2022)

Percebemos que o OA5 facilita na listagem de algumas sequências registrando a posição correta dos carros atendendo a condição imposta e faz algumas discussões para que o problema possa ser levado para sala de aula pensando no trabalho do professor de Matemática onde é colocado algumas questões para discussão.

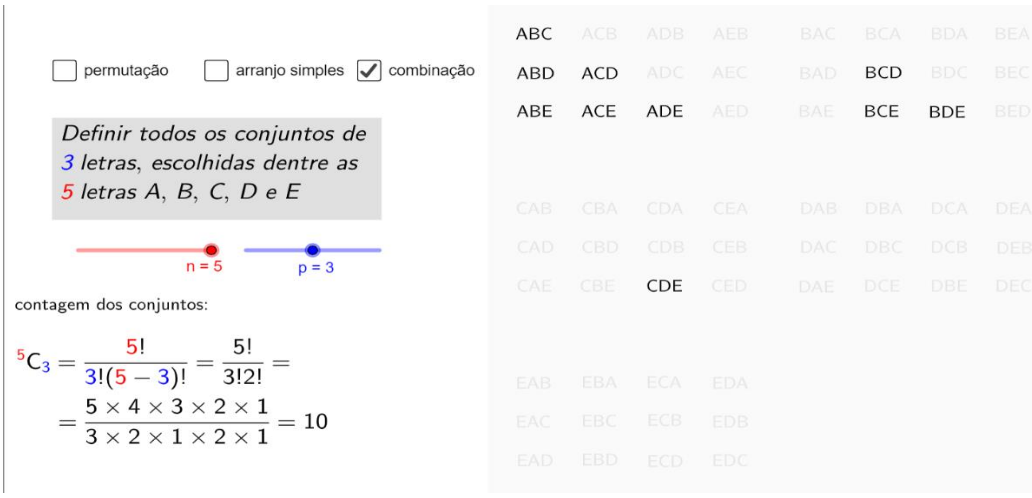
Para auxiliar na discussão desse problema, pode ser apresentado analogamente de antemão a sala, para que estratégias possam surgir. É interessante que o professor inicie um diálogo com a classe para que os estudantes formulem hipóteses e compare entre duplas ou entre grupos.

5.6 OBJETO DE APRENDIZAGEM 6: PERMUTAÇÃO, ARRANJO E COMBINAÇÃO

Elaborado por NEID e Luciana Brito, o presente material aborda a ideia do raciocínio combinatório mediante um problema ao qual é solicitado o conjunto das possibilidades em que letras A, B, C, D e E podem ser combinadas e/ou reorganizadas para formar palavras diferentes contendo as letras previamente definidas. Nesse sentido, é um problema que envolve os três tipos de agrupamentos (permutação, arranjo e combinação).

Na figura 17 se apresenta o OA 6 – permutação, arranjo e combinação extraídos do Geogebra online [10].

Figura 17 - Objeto de aprendizagem 6: Permutação, arranjo e combinação



Fonte: Geogebra (2022, *online*)

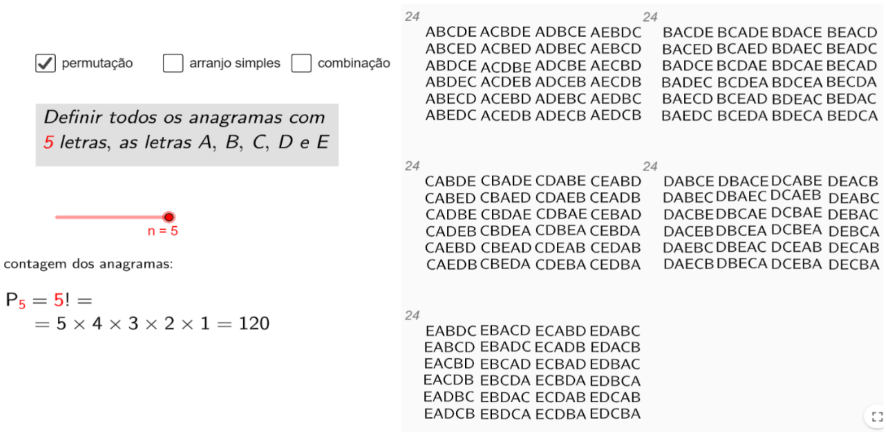
[10] Link de acesso: https://www.geogebra.org/m/ejnsuty4. Acesso em: 08 de Maio de 2022

Na própria interface do OA há opção de escolher qual tipo de agrupamento queremos trabalhar, clicando na caixa ao lado de cada um bem como escolher a quantidade de letras que formam as sequências denotada pela letra p em azul na interface enunciada contendo uma barra onde podemos clicar e arrastar para escolher a quantidade de letras que formam a sequência. Também temos a preferência de selecionar as letras em sequência (Exemplo: arrastando a barra até o número 3, indica que os anagramas a serem formados serão compostos pelas letras A, B e C) que querermos que componham a reorganização das letras clicando na barra vermelha denotada por n.

Vejamos alguns exemplos dessa ideia para nortear a teoria explicitada:

- Problema de Permutação

Figura 18 - *Possibilidades de resolução do problema combinatório*: Permutação, arranjo e combinação



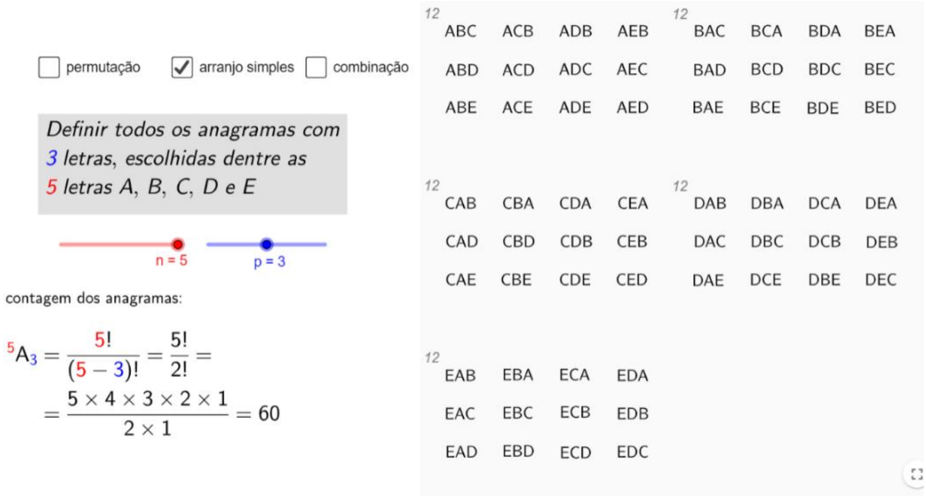
Fonte: Geogebra (2022, *online*)

No caso mencionado anteriormente, como escolhemos um problema de permutação o qual exige a quantidade de anagramas que podem ser formados com as cinco letras(A,B,C,D,E), notamos que foi selecionado o total de cinco letras para verificar todas as soluções possíveis de formar anagramas diferentes.

O OA6 apresenta a listagem de todas as possibilidades de formação de anagramas (120), denotadas pelas letras assim como demonstra o número de possibilidades da ocorrência por meio do cálculo efetuado pelo próprio OA. Percebemos que também é um tipo de simulador que expõe as prováveis soluções de acontecimentos da situação.

- Problema de Arranjo

Figura 19 - *Possibilidades de resolução do problema combinatório*: Permutação, arranjo e combinação



Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Na Figura 19 temos a composição de um problema específico de arranjo, pois escolhemos a caixa de seleção referente a arranjo simples. Além disso, selecionamos a quantidade de três letras para compor a sequência de anagramas dispostas de modo aleatório podendo ser qualquer uma entre as cinco letras.

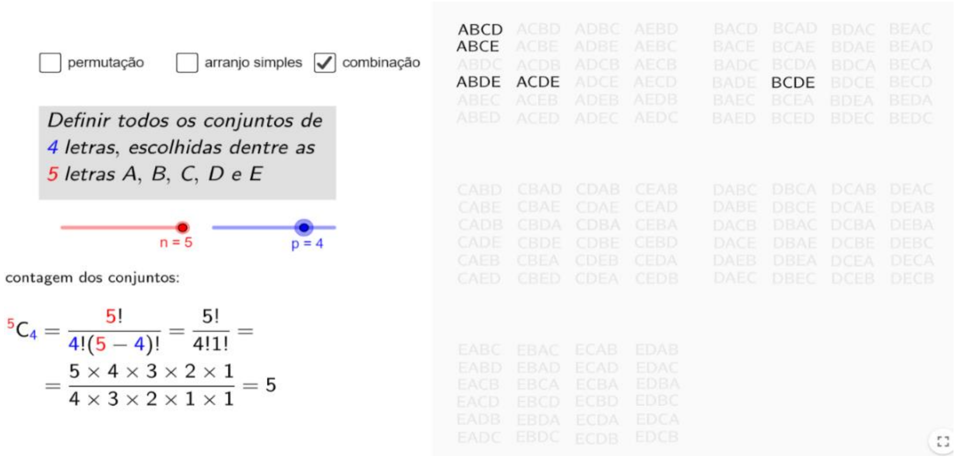
Da mesma forma que o exemplo de permutação, o OA6 faz uma listagem de todas as possíveis soluções de agrupamentos de letras que dão origem aos anagramas. A quantidade de anagramas na situação também é explícita (60 possibilidades) através dos cálculos realizados automaticamente pelo OA.

- Problema de Combinação

Ao analisar o problema de combinação exibido na figura 20, onde foram escolhidas um total de quatro letras para a estruturação da construção dos conjuntos a serem formados, sendo que esse agrupamento de letras pode ser formado por todas as cinco letras disponíveis no material.

O OA6 apresenta a listagem das possibilidades, bem como a quantidade de casos (5) que podem ocorrer na situação. É nítido que a quantidade de conjuntos a serem formados por combinação é menor que a quantidade exposta em permutação e arranjo simples.

Figura 20 - *Possibilidades de resolução do problema combinatório*: Permutação, arranjo e combinação



Fonte: Geogebra (2022, *online*)

O OA é interessante, pois permite que o professor possa levar a atividade para sala de aula e propor atividades diferenciadas com o intuito de apresentar as principais diferenças entre permutação, arranjo e combinação através de problemas que exemplificam as resoluções apresentando o detalhamento das possibilidades bem como a quantidade de soluções que podem ser aferidas.

O professor pode solicitar aos alunos que listem todas as possibilidades que o problema apresenta, e no final realizar a contagem dessas soluções antes de aplicar na fórmula matemática que define o tipo de situação proposta. Isso é importante, porque induz o aluno a trabalhar o seu raciocínio combinatório por meio de tentativas associadas ao problema.

Uma comparação entre os problemas de arranjo, combinação e permutação pode ser sistematizada pelo professor, por exemplo a relação $C_3^5 = \frac{A_3^5}{P_3}$ pode ser obtida a partir da análise conjunta das três situações propostas.

Roa, Batanero e Godino (2003, p.18) chamam essa relação de regra quociente e indicam que para compreendê-la “implica em estabelecer uma relação de equivalência dentro de um conjunto de configurações combinatórias”. Rocha (2019) afirma que questões que abordem essa regra devem ser incluídas no processo de ensino e aprendizagem de combinatória.

No Quadro 8 apresentamos a identificação das situações, representações e invariantes apresentados no OA6.

Quadro 8 - Combinatória do OA 6

Situações(S)	Invariantes(I)	Representações(R)
É visível que as situações apresentadas no OA fundamentam-se em problemas que podem ser classificados como permutação, arranjo simples e combinação. O tipo de problema vai depender da escolha do professor e como ele deseja aplicar em sala de aula, quais objetivos devem ser alcançados.	Os invariantes apresentados vão depender da escolha das situações dispostas. No caso de problema de arranjo são de ordem e escolha, de combinação a escolha e de permutação a ordem. A relação que combinação pode ser obtida pelo quociente do arranjo pela permutação pode ser discutida por meio do OA6.	A representações apresentadas no OA se fixam na listagem das possibilidades bem como na apresentação das fórmulas de permutação, arranjo e combinação.

Fonte: Produzido pelo autor (2022)

5.7 OBJETO DE APRENDIZAGEM 7: JOGO BICOLORIDO (VERSÃO 1)

Elaborado pelos autores Luzia da C. T. Martarelli, Humberto Bortolossi, Brendow P. de M. Souto, Fernando G. da Silva, Ubyrajara C. Tajima, o presente material tem a finalidade de abordar o tópico de combinatória através da criação de segmentos de reta partindo de pontos dados que serão os vértices da figura formada. A figura 20 refere-se ao OA 7 – jogo bicolorido(versão 1) e foi extraída do geogebra online[11].

Figura 21- Objeto de aprendizagem 7: Jogo bicolorido(1)

Fonte: Geogebra (2022, online)

[11] Link de acesso: https://www.geogebra.org/m/hu5ffc6w. Acesso em: 08 de Maio de 2022.

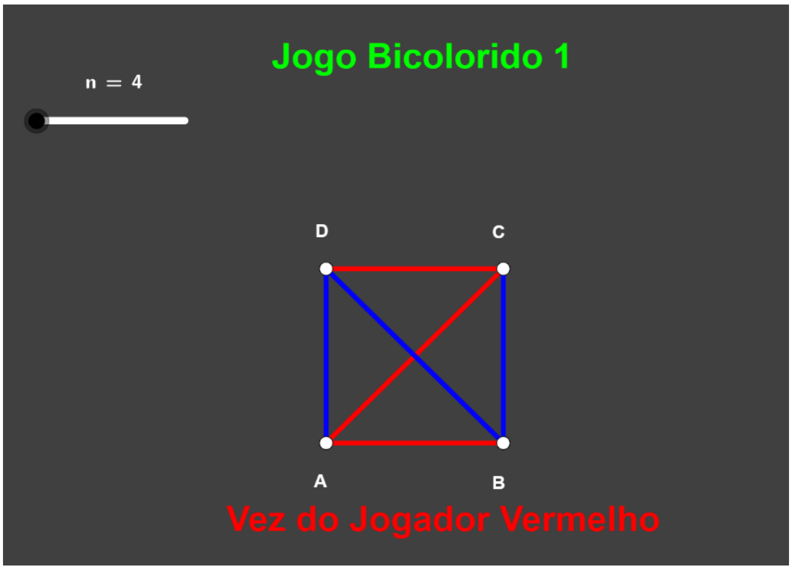
O objetivo do jogo é não construir um triângulo em que as arestas tenham a mesma cor. Observando a interface do jogo, constatamos que tem-se a opção de escolher o número de pontos através de uma barra fixada onde há a possibilidade de arrastar para a direita para aumentar o número de pontos. O jogo deve ser iniciado com quatro pontos fixados e aumentando de forma gradativa até que alguém perca, formando o triângulo com todos os lados de mesma cor.

Para iniciar o jogo são necessários dois jogadores diferenciados por jogador vermelho e jogador azul. Decide-se quem será o jogador vermelho e o azul. O jogo começa com o jogador representado pela cor vermelha que irá traçar um segmento de reta podendo ser na diagonal, horizontal ou vertical e as jogadas vão alternando-se entre eles apertando nos quadrados contendo os segmentos a serem traçados. Poderão clicar em qualquer um que desejar, porém devem ficar atentos a condição imposta.

Vejamos alguns exemplos com diferentes números de pontos(n) :

- **Para n = 4**

Figura 22- possibilidade de resolução do problema combinatória : Jogo bicolorido(1)

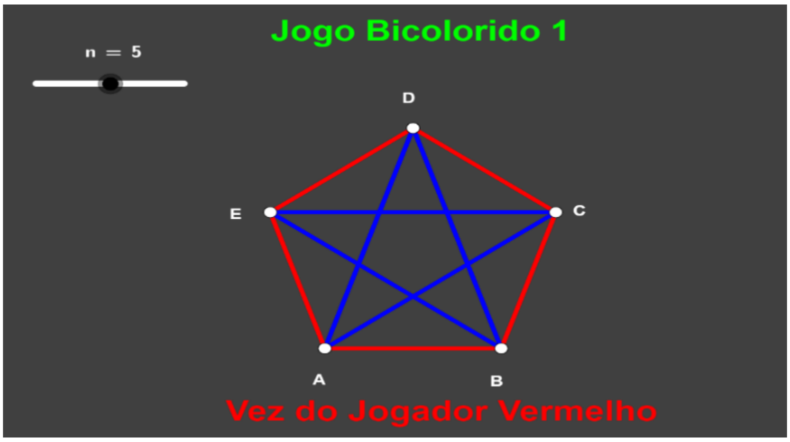


Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Na figura acima, vislumbramos um empate entre os jogadores representados por vermelho e azul, pois nenhum deles formaram um triângulo contendo todos os lados de mesma cor. Uma informação importante é que a medida que os jogadores vão clicando nos botões que contém os segmentos, os mesmos vão sumindo impossibilitando que jogadores diferentes tracem a mesma reta ligando os mesmos pontos.

- **Para n = 5**

Figura 23- possibilidade de resolução do problema combinatória : Jogo bicolorido(1)



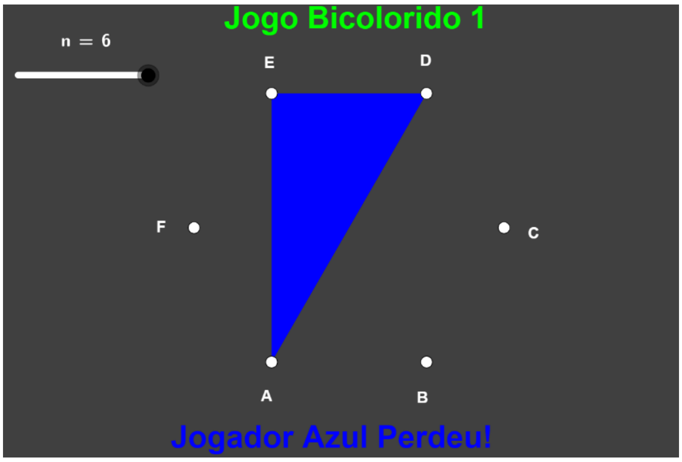
Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Logo acima podemos verificar que também houve o caso de um empate entre os jogadores, mesmo aumentando o número de pontos para n = 5. Os triângulos formados não geram indícios de que todas os seus lados apresentam cores idênticas. É importante salientar que esses dois casos em que aconteceram empate foi em apenas uma partida, mas há chances de ganhar dependendo de deslizes de algum jogador.

Vamos analisar agora o caso em que teremos seis pontos

- **Para n = 6**

Figura 24- possibilidade de resolução do problema combinatória : Jogo bicolorido(1)



Fonte: Geogebra (2022, *online*)

Logo acima, notificamos um caso em que o jogador azul perdeu, portanto formou um triângulo em que todos os seus lados coincidiram na mesma cor. Quando o jogador perde é exposto na tela informando qual deles (azul ou vermelho) perdeu. Por consequência o jogador vencedor será o que está representado pela cor vermelha.

O jogo bicolorido pode ser aplicado em sala de aula pelo professor para explorar atividades como:

- Quantas possibilidades de traçar os segmentos de reta atendendo a condição podem ser listadas em cada caso (quando n = 4, n = 5 e n = 6)?
- Quantas casos possíveis são identificados de formação de triângulos em que não apresentem todos os lados de mesma cor fazendo com que o jogador perca?
- Há possibilidade de empate no jogo quando aumentamos o número de pontos para seis?

Essas são algumas perguntas para roteiro de estudo pós-jogo para serem questionadas aos alunos e instigar neles a capacidade de pensar para buscar estratégias de ligação de pontos visando obter o êxito nas jogadas efetuadas.

Abaixo segue a análise do OA 7 referente as situações, representações e invariantes expostos.

Quadro 9 - Combinatória no OA 7

Situações(S)	Invariantes(I)	Representações(R)
Quanto as situações supracitadas no OA 7, temos um problema de arranjo, pois a ordem em que os segmentos de reta que serão traçados interferem na construção do triângulo. Segmentos de mesma cor podem se encontrar, porém três segmentos de uma mesma cor não podem fechar um triângulo.	Os invariantes apresentados são de ordem e escolha, visto que o jogador tem a disposição vários segmentos para selecionar e ligar os pontos. No entanto, a ordem em que esses segmentos vão ser traçados é peça fundamental para a construção das estratégias de ganho.	A representações apresentadas no OA se fixam na listagem das possibilidades assim como na figura em si, com a representação das cores (azul e vermelho) de cada segmento traçado.

Fonte: Produzido pelo autor (2022)

É importante afirmar que os objetos de aprendizagem mencionados neste trabalho nos guiaram para a construção dos resultados necessários para atingir os objetivos esperados. Nesse sentido, a análise das situações, invariantes e situações nos permitiu verificar como a combinatória se apresenta nesses materiais e apresentar as peculiaridades de cada um para o processo de ensino e aprendizagem no contexto da Educação Matemática.

Apesar de apresentar diferentes aspectos da Combinatória, o trabalho desse conteúdo por meio desses objetos de aprendizagem pode ser potencializado pela mediação do professor, atuando na proposição de problemas combinatórios, no trabalho coordenado articulando propostas de atividades no papel e no GeoGebra o que pode suscitar o diálogo entre alunos, a criação de hipóteses, e a apresentação de diferentes representações simbólicas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a alta inserção de tecnologias digitais na sociedade nos mais variados setores, a esfera educacional tem se apropriado cada vez mais desses recursos com o intuito de dinamizar o ensino no contexto geral. Nessa perspectiva, este trabalho objetivou investigar como se apresenta os aspectos conceituais da combinatória nos Objetos de Aprendizagem (OA) disponibilizados nos materiais didáticos do GeoGebra.

Para alcançar os objetivos supracitado, foi necessário acessar o software GeoGebra e selecionar os materiais presentes no conteúdo de combinatória. Dessa forma, foram selecionados sete materiais para compor a nossa análise.

Referente aos materiais analisados, é nítido que alguns deles trabalham com a Combinatória implicitamente, nesse caso abrem espaços para discussões sobre que outros conteúdos podem ser explorados no problema e ou jogo proposto. Sendo assim, a mediação do professor é imprescindível para que a discussão ocorra, reforçando a necessidade que o professor ao aplicar qualquer um dos OA analisados oriente os estudantes no que tange o desenvolvimento do raciocínio combinatório que pode ser trabalhados de forma mais explicitas a partir da propostas de atividades combinatórias exploratórias.

Podemos verificar que ao acessar os Objetos de Aprendizagem, não há informação de qual grau de ensino se encaixam. No entanto, fazendo uma análise detalhada percebemos que são materiais que podem ser trabalhados na Educação Básica pois é preciso que o aluno tenha capacidade de pensar além do problema pensando em estratégias diversas para a resolução com maior enfoque nos materiais que se apresentam de forma implícita no que tange aos conceitos de combinatória.

Os OA presentes neste trabalho permitem discussões referentes as possibilidades de aplicar em sala de aula física e virtual graças a facilidade de manuseio dos elementos da interface do GeoGebra.

Esses elementos foram essenciais para atingir os objetivos estabelecidos, visto os elementos presentes em cada um deles atenderam as nossas expectativas. Além disso foi possível através destes, a relação intrínseca com a dinâmica da sala de aula no que tange a dinamicidade do ensino de combinatória como forma de apresentar novas metodologias que favorecem no processo de ensino e aprendizagem.

A maioria dos OAs adotam o potencial de abertura de atividades diversas a serem desenvolvidas e essas atividades devem ser pensadas e adaptadas para a realidade concreta dos estudantes no âmbito da Educação Básica. Em vista disso, cabe ao professor assumir um papel de orientador nesse processo, apresentando o conteúdo que será proposto, nesse caso combinatória para que o estudante adquira a habilidade de associar a teoria e aplicar na prática no desenvolvimento das atividades.

Ao aplicar esses materiais em sala de aula é necessário eu o professor repense nos objetivos que deseja alcançar, visto que a maioria cede a permissão de adicionar e/ou adaptar atividades para diversas turmas. Ao mesmo tempo é essencial antes da aplicação, rever detalhadamente os conceitos presentes no OA, quais as vantagens para o aprendizado do estudante e um planejamento sólido da aula a ser lecionada.

Sendo assim, para obter êxito nesses trabalhos é crucial que o professor levante questionamentos em sala de aula visando promover a facilidade de reconhecer a combinatória presente no material exposto no software, gerar indagações e motivação nos estudantes para que consigam resolver o problema apresentado. É importante afirmar que todo jogo matemático ou outro material lúdico deve ser pensado na prática pedagógica, ou seja, exibir como não só como forma de entretenimento e diversão, mas com a finalidade do aprendizado com a prática.

Na análise percebemos que nos sete materiais selecionados, é possível de trabalhar o raciocínio combinatório seja de forma explícita ou implícita. Os objetos de aprendizagem 1 e 2 são bem semelhantes e trazem a mesma problemática. Com a disposição de cores e círculos podemos preencher as figuras apresentadas de forma que círculos de mesma cor não se tangenciem. Os problemas propõem uma listagem de soluções sendo que OA 2 pode gerar muitas soluções a depender da escolha da quantidade de cores desejadas. O aporte da geometria nesses objetos de aprendizagem pode ser mais bem explorados pelos professores. São problemas interessantes de trabalhar com os estudantes, pois apresentam condições para chegar à solução, ou seja, não há uma fórmula para a resolução. É necessário que os estudantes pensem seguindo a condição imposta e vejam as melhores estratégias ao fazerem a listagem e contagem de possibilidades.

Os OAs 3 e 4 também são muito interessantes de aplicar em sala de aula porque também apresentam problemas combinatórios condicionais, o que favorece o uso de representações como o PFC ou a listagem. Nesses OA a resolução é encontrada por meio de tentava e erro. A cada erro que o estudante comete, ele reflete em quais caminhos podem percorrer atendendo ao requisito apresentado que é justamente a condição do problema. Além disso, também há possibilidade de fazer uma listagem, cada erro que é exibido na tela construindo assim uma lista de tentativas até a solução correta.

Já os OAs 5 e 6 e 7 são típicos de combinatória sendo que apresentam situações de agrupamentos (permutação, arranjo e combinação). São materiais muito bons de serem apresentados para os estudantes porque permitem com que eles possam identificar quais deles possuem condições e restrições e aplicar a fórmula correta para o determinado tipo de situação presente.

Com relação as situações apresentadas nos Objetos de Aprendizagem mencionados, identificou-se que a maioria deles se apresenta como problemas condicionais, onde não há uma fórmula pronta que aplicando os dados possa chegar na solução. Sendo assim fica evidente que são materiais que exibem um enfoque no pensamento lógico do raciocínio combinatório visando fazer com que o estudante formule a resolução de acordo com as estratégias pensadas por ele e não com o uso de fórmulas prontas.

Referente aos invariantes apontados, verificou-se que o mais recorrente nos OA deste trabalho foram os de ordem e escolha. A maioria não utiliza critérios de repetição.

Quanto as representações exibidas, destacaram-se a possibilidade de listagem de soluções para os OAs mencionados e a representação por meio de imagens. Não constatamos a existência de diagrama de árvores, gráficos, representações icônicas e pouca existência do PFC.

Com base no exposto, acreditamos que o uso da Teoria dos Campos Conceituais, possibilitou uma melhor compreensão de como a Combinatória pode ser trabalhada por meio desses objetos de aprendizagem, inclusive alertando para algumas semelhanças e diferenças das situações implícitas ou explicitas apresentadas.

Como este trabalho foi apoiado em sete materiais do GeoGebra reiteramos que se faz necessário a realização de pesquisas futuras que se fundamentem nessa discussão visando conhecer como a combinatória se apresenta em tipos de materiais do software. Outro ponto importante é a sugestão de conhecer melhor as potencialidades do processo de ensino e aprendizagem desses materiais para a dinâmica do raciocínio combinatório.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, E.V.B. ; FLÔRES, M.L.P. Objetos de aprendizagem: conceitos básicos. In: TAROUCO, L.M.R et al . **Objetos de aprendizagem**: teoria e prática. 1. ed. Porto Alegre: Evangraf Ltda, 2014. p. 12-28. Disponível em:https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/102993/000937201.pdf. Acesso em: 28 de Agosto de 2021.

AQUINO. E.M.L. et al. Medidas de distanciamento social no controle da pandemia de COVID-19: potenciais impactos e desafios no Brasil**. Ciência & Saúde Coletiva**, v.25(Supl.1), 2020, p.2423-2446

ARAUJO, K.L.S; ROCHA, C.A.R. Como alunos de Ensino Médio Compreendem os Invariantes Prescritivos de Ordem e Repetição em Problemas de Arranjo e Combinação? **Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas**. v. 19, n. 2. 2018.p.142-150 .Disponível em : http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/ensino/article/view/6063/4170 Acesso em: 11 maio.2022

BORBA, R.E.S.R. ; ROCHA,C.A. ; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na educação básica. **Bolema,** Rio Claro(SP), v. 29, n.53, p.1348-1368, 2015. DOI 10.1590/1980-4415v29n53a27. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a27. Acesso em: 20 de Agosto de 2021.

BORBA, R.E.S.R. O Raciocínio combinatório na educação básica. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais do X ENEM**, Salvador, BA, 2010.

BORBA, R.E.S.R. Vamos Combinar, Arranjar e Permutar: Aprendendo Combinatória desde os Anos Iniciais de Escolarização. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais do XI ENEM**, Curitiba, PR, 2013.

BORTOLOSSI, H. O uso do software gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade. **VIDYA**, v. 36, n. 2, p. 429-440, jul./dez., 2016 - Santa Maria, 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997

CEDRAN, D. P.; KIOURANIS, N. M. M. Teoria dos Campos Conceituais: visitando seus principais fundamentos e perspectivas para o ensino de ciências. **Actio**, Curitiba, v. 4, n. 1, p. 63-86, jan./abr. 2019.Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio>. Acesso em: julho 2022

COSTA, V.M. Recursos Educacionais Abertos. In: TAROUCO, L.M.R *et al*. **Objetos de aprendizagem**: teoria e prática. 1. ed. Porto Alegre: Evangraf Ltda, 2014. p. 29-53. Disponível em:https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/102993/000937201.pdf. Acesso em: 28 de Agosto de 2021.

ENGLISH, L. D. Combinatorics and the development of Children's Combinatorial Reasoning. In: JONES, G. A (Ed) **Exploring Probability in School**: Challenges for Teaching and Learning. New York: Springer, 2005.

FARIAS, F.R. **Uma Sequência Didática alternativa para o Ensino de Análise Combinatória na Educação Básica**. 2013. 46 f. Monografia (Programa de Pós Graduação de Matemática e Estatística) Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém- PA, 2018.

FURTADO, A.B. **Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio:** uma abordagem com o auxílio do software GeoGebra. Mestrado em Matemática para Professores. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 2019.

GEOGEBRA. Sobre o geogebra. In: Instituto São Paulo de Geogebra. Faculdade de Ciências exatas e Tecnologia, PUC-SP. Disponível em: <https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html> . Acesso em: 28 de Agosto de 2021

HAGUETTE, T. M. F. **Metodologias qualitativas na Sociologia**. 3 ed. Petrópolis: Vozes, 2001

IMPÉRIO, P.S. **A Utilização do Geogebra na Resolução de Problemas de Análise Combinatória.** 2017. 55 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís – MA, 2017.

JARDIM, D.F. et al. Estudando Limites com o GeoGebra**. Revista Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas**. ISSN: 2238-6424 QUALIS/CAPES – LATINDEX. n.08. 2015. p. 1-19. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Jaqueline-Da-Silva-3/publication/286220543_Estudando_Limites_com_o_Geogebra/links/5666e68908aef42b57867571/Estudando-Limites-com-o-Geogebra.pdf. Acesso em: 22 de Março de 2022.

MACAYA, J.F.M.; JEREISSATI, T. Continuity of learning during the COVID-19 pandemic: The use of ICT in Brazilian public schools In: EDUCATION AND DIGITAL TECHNOLOGIES: **Challenges and strategies for the continuity of learning in times of COVID-19**. Núcleo de Informação e Coordenação do Ponto BR. São Paulo, SP: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2021.

MAGINA, S.; MERLINI, V.L.; SANTOS, A. A Estrutura Multiplicativa sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais: Uma Visão do Ponto de Vista da Aprendizagem. In: 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 3º SIPEMAT, **Anais...** Fortaleza- CE, 2012.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTARELLI, L.C.T.; SILVA, F.G.; SOUTO, B.P.M., & TAJIMA, U.C. O jogo da senha no GeoGebra e suas atividades exploratórias em combinatória. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, 2021, n.10, v.2, p. 040–059. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i2p040-059

MEKHMANDAROV, I. Analysis and synthesis of the cartesian product by kindergarten children. In. 24th **Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (PME), Hiroshima, Japan, July 23-27, 3, 295-301, 2000.

NASCIMENTO, E.G.A. Avaliação do Uso do Software Geogebra no Ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola. In: Conferencia Latinoamericana de Geogebra**. Anais**, Uruguay, 2012.

PESSOA, C. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese. Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PONTE, J. P. Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? **Revista Ibero Americana de Educação**, 2000, n. 24, p. 63-90.

ROA, R., BATANERO, C; GODINO, J. Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. **Educación Matemática**, México, v.15, n.2, p. 5–25, 2003.

ROCHA, C.A. **Formação Docente e o Ensino de Problemas de Combinatórios**: Diversos Olhares, diferentes Conhecimentos. 2011. 192 f. Dissertação (Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE, 2011.

ROCHA, C.A. **Estudo de combinatória no ensino médio à luz do enfoque ontossemiótico:** o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas? . 2019. 384 f. Tese. (Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE, 2019.

ROCHA, C.A.; BORBA, R.E.S.R. Conhecimentos de combinatória para ensinar nas diferentes etapas da Educação Básica: com a palavra professores! In BORBA, R.E.S.R.; MONTENEGRO, J.A; SANTOS, J.A.F.L. (org) **Investigações em ensino e em aprendizagem:** uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico (Geração). Recife: Ed. UFPE, 2021.

ROCHA, C.A.; SOUZA, A.C. Conhecimento de crianças pequenas da Educação Infantil e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental sobre Combinatória: O que apontam as pesquisas brasileiras no período de 2010 a 2019? **Educação Matemática e Pesquisa.** v. 23 n. 4 (2021): Número especial :Educação Estatística - Seminário hispano-brasileiro, p.452-484.

SANTOS JUNIOR, V.B. ; MONTEIRO, J.C.S. Educação e Covid-19: As Tecnologias Digitais mediando a aprendizagem em Tempos de Pandemia. **Revista Encantar** – Educação, Cultura e Sociedade, v.2, p. 1-15. 2020.

SANCHES, B.F.; SOUSA, D.C.; BARBOSA, R.N.C. **O ambiente do software Geogebra:** uma ferramenta interativa para o ensino de matemática. Monografia. Curso de Licenciatura Plena em Matemática. Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2011.

VERGNAUD, G. b Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. **Perspectivas**, v. XXVI, n. 1, 1996.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: Nasser. L. (Ed.) Primeiro Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. **Anais ...** p. 1 – 26, 1993

VERGNAUD, G. Association Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education: SomeTheoretical and Methodological Issues**. For the Learning of Mathematics**, v. 3, p. 31-41, 1982.

ANEXO A – MATERIAIS REFERENTE A COMBINATÓRIA DISPONÍVEIS NO GEOGEBRA

Logo abaixo, segue um quadro com o mapeamento dos materiais encontrados no software sobre combinatória realizado em Abril/Maio de 2022. Nesse sentido, certamente novos materiais no que tange a noção de combinatória serão lançados no Geogebra com o decorrer do tempo.

Material	Autor	Tópico
Círculos no Triângulo	Diego Lieban	Combinatória
Jogo da senha	Luzia da C. T. Martarelli, Humberto Bortolossi, Brendow P. de M. Souto, Fernando G. da Silva, Ubyrajara C. Tajima	Combinatória
truchet	Diego Lieban	Área, combinatória, frações,geometria, razões
ULURU I	Diego Lieban	Combinatória, lógica
Relembrando os conceitos de combinatória	Greice Lacerda	Aritmética, combinatória
Diagonais de um Polígono	Derivando a matemática	Combinatória, geometria,polígonos
Jogo Bicolorido(versão 1)	Luzia da C. T. Martarelli, Humberto Bortolossi, Brendow P. de M. Souto, Fernando G. da Silva, Ubyrajara C. Tajima	Combinatória
Jogo Bicolorido(versão 2)	Luzia da C. T. Martarelli, Humberto Bortolossi, Brendow P. de M. Souto,	Combinatória

	Fernando G. da Silva, Ubyrajara C. Tajma	
Triângulo de Pascal - Relações	Derivando a matemática	Aritmética, combinação, construções, geometria
Qual a senha do cofre?	Aparecido Sousa	Combinatória
Pintando o Hexágono	Vandoir Stormowski	Combinatória, geometria
O problema do estacionamento	André Luiz Souza Silva	Combinatória
Tetraedros combinatória	Alexandre Trocado	Combinatória
Do decimal para o binário e vice-versa	Fábio Vinícius	Aritmética, combinatória, divisão, matemática
Princípio fundamental de contagem	Leonardo Nogueira	Combinatória
Permutação, arranjo e combinação	NEID, Luciana Brito	Combinatória
Desafio geométrico das cores	Rafael Bueno	Área, circunferência, combinatória, construções, geometria, figuras planas ou formas
A rua das cores	Aparecido Sousa	Combinatória
Isaac Newton	Rafael Bueno	Combinatória
Jogo das 3 cores	Rafael Bueno	Combinatória,