UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
MATEMÁTICA - LICENCIATURA

GABRIEL JOSÉ DA SILVA LIMA

UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA SOBRE O CONTEÚDO DE CURVAS EM DOIS LIVROS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL USADOS NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Caruaru
2022

GABRIEL JOSÉ DA SILVA LIMA

UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA SOBRE O CONTEÚDO DE CURVAS EM DOIS LIVROS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL USADOS NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Graduado em Matemática - Licenciatura.

Área de concentração: Geometria Diferencial, Didática da Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Cleiton de Lima Ricardo.

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Lima, Gabriel José da Silva.
Uma análise praxeológica sobre o conteúdo de curvas em dois livros de geometria diferencial usados no curso de licenciatura em matemática / Gabriel José da Silva Lima. - Caruaru, 2022.
56 p. : il., tab.

Orientador(a): Cleiton de Lima Ricardo
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2022.

1. Geometria Diferencial. 2. Curvas Diferenciáveis. 3. Praxeologia. 4. Teoria Antropológica do Didático. I. Ricardo, Cleiton de Lima . (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

GABRIEL JOSÉ DA SILVA LIMA

UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA SOBRE O CONTEÚDO DE CURVAS EM DOIS LIVROS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL USADOS NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Graduado em Matemática - Licenciatura.
.

Aprovada em: 12/05/2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Profº. Dr. Cleiton de Lima Ricardo (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Dr. Marcos Luiz Henrique (Examinador Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

A você que sempre me apoiou em todos os momentos ruins e me dar coragem de enfrentar qualquer coisa todos os dias, Stephany Maria.

AGRADECIMENTOS

Grato a Deus por me dar suporte em todos os dias, e me iluminar nos caminhos que desejo seguir.

Grato a meus familiares por sempre está me ajudando e dando base aos meus objetivos.

Grato a Stephany por sempre está ao meu lado lutando contra todos os acasos e está trilhando uma vida com grandes frutos ao meu lado, construindo um futuro sólido e próspero.

Grato ao meu orientador Cleiton por estar me auxiliando nos melhores caminhos e projetos que são de grande importância para minha vida profissional e pessoal.

Grato a universidade que me deu suporte para tantas experiencias e aprendizados.

E por fim, grato aos meus colegas que além de me ajudar contribuíram para a minha formação profissional e enfrentar os problemas com mais alegria no rosto.

“Nunca seja cruel, nem covarde, nunca desista e nunca se renda”

The Doctor (Doctor Who)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar como é abordado o conteúdo de Curvas em Livros de Geometria Diferencial utilizados na disciplina de introdução a geometria diferencial na Licenciatura em Matemática na UFPE, apoiando-se na análise praxeológica sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático formulada por Yves Chevallard. A pesquisa surgiu por meio de discussões sobre qual livro aborda um melhor conteúdo de Curvas em um primeiro curso de geometria diferencial, para isso foram analisados dois livros de geometria diferencial, buscando entender como os autores abordam o conteúdo de Curvas no campo das demonstrações e das definições. Diante disto baseamos nossa metodologia em cunho qualitativo, em que analisamos o conteúdo sob os componentes tarefa, técnica, tecnologia e teoria, que formulam o modelo praxeológico. Assim elaboramos 7 questões que nos auxiliaram nesta análise, e que nos mostrará qual livro está melhor estruturado e contextualizado para um curso introdutório, com o modelo praxeológico podemos analisar estes aspectos e determinar qual o mais indicado a esta disciplina. Notamos a partir das análises, que os livros estão bem estruturados, porém foi observado que mediante ao andamento da disciplina pode-se adotar ambos os livros ou apenas um, tendo em vista o objetivo do docente da disciplina.

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Curvas Diferenciáveis; Praxeologia; Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This work aims to analyze how the content of Curves in Differential Geometry Books used in the discipline of introduction to differential geometry in the Degree in Mathematics at UFPE, relying on praxeological analisys from the perspective of Anthropological Theory of Didatic formulated by Yves Chevallard. The research came about through discussions about which book best adresses the content os Curves in a fiste of Diferrrential Geometry. For this, two books of differential geometry were analyzed, trying to undestand how the authors approach the contest of Curves in the field of demonstration and settings. In view of this, we base our methodology on a qualitative basis, where we will analyze the content under the componentes task, tchnique, technology and theory, the formulate the praxeological model. Thus we elaborate 7 questions that helped us in this analisys, and that will show us which book is best structured and contextualized for na introductory course, with the praxeological model we can analyze these aspects and determine which one is most suitable for this discipline. From the analysis, we noticed that the books are well structured, but it was observed that through the course of the course it is possible to adopt both books or just one, in view of the objective of the professor of the course.

Keywords: Differential Geometry; Differentiating Curves; Prexeology; Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAA	Campos Acadêmicos do Agreste
LD	Livro Didático
Ld	Linearmente Dependente
Li	Linearmente Independente
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria tem um importante papel no cotidiano, pois tudo que observamos tem formas geométricas, e essas formas podem ir de simples curvas e retas a superfícies como uma membrana. No ensino básico estudamos conceitos de geometria a partir dos postulados de Euclides, em geral chamada de Geometria Euclidiana, quando estudamos o Cálculo Diferencial no ensino superior, notamos que existem formas do nosso cotidiano em que a geometria euclidiana não abrange, e com isto surge os primeiros estudos em Geometria Diferencial, em que há o estudo da geometria com ferramentas do cálculo diferencial.

A Geometria Diferencial é um conteúdo comumente ofertado no mestrado em Matemática, e que também é uma linha de pesquisa em matemática bastante escolhida entre os jovens matemáticos com o intuito de descobrir novos teoremas e novas subáreas que podem ser muito importantes tanto na matemática quanto em outras áreas do conhecimento.

Diante disto, alguns cursos de graduação em matemática, disponibilizam um curso introdutório para que o discente consiga ter um arcabouço teórico que sirva de base para este curso no mestrado. Os conteúdos consistem em conceitos geométricos relacionados ao cálculo diferencial, estudando espaços e superfícies por meio da diferenciabilidade e dos aspectos intrínsecos dos mesmos, com demonstrações e propriedades bem mais robustas que, nos fazem observar sob uma perspectiva mais abrangente a geometria já estudada no ensino básico e no ensino superior, sendo assim, é muito importante que exista um curso introdutório que faça o estudante iniciar nesses conceitos.

Nosso primeiro contato com a disciplina foi em 2020.1, porém com a pandemia fomos impossibilitados de continuar os estudos, no período seguinte em 2020.2 cursamos a disciplina na íntegra, neste ínterim conversávamos sobre qual seria o livro mais indicado a um primeiro curso de Geometria Diferencial e mediante a este debate, notamos a necessidade de uma análise dos livros, que estavam como bibliografia.

Para os estudos de qualquer curso, precisa-se de um material bem elaborado para que seja um forte auxiliador ao ensino do conteúdo, assim livros didáticos são em geral a principal ferramenta do professor em sala de aula, ele “precisa ser usado de forma sistemática, no ensino e aprendizagem de um determinado objeto ou conhecimento, já consolidado como disciplina.” (LAJOLO, 1996, p.4). Notamos que um livro bem elaborado e adequado para o contexto que será inserido, segundo Allevato e Terto (2009), auxiliará e contribuirá para a forma como será preparada a aula, e podendo ser importante no cotidiano do aluno e também do professor, ajudando ambos nessa organização do ensino-aprendizagem, e do trabalho dentro e fora da sala de aula.

Com base nisso, um livro bem elaborado se torna de grande valia, tendo em vista que um bom material de estudo pode proporcionar ao aluno uma aprendizagem mais significativa.

> O livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além de ajudar no avanço dos estudos. (COSTA; ALLEVATO, 2010, p. 72).

Neste contexto é imprescindível uma boa análise em livros didáticos, diante disto, optamos por analisar dois livros da disciplina, Introdução a Geometria Diferencial, ofertada na UFPE campus Agreste. Na busca para analisar os livros, escolhemos o conteúdo Curvas Diferenciais, tendo em vista que é o primeiro conteúdo estudado dentro da geometria diferencial, utilizando-se de conceitos previamente estudados em disciplinas de Cálculo, também estudados na graduação.

Tomamos como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), formulada por Chevallard (1998, 1999, 2002), em que segundo (FREITAS, 2016, p. 4), a TAD “[...] nos possibilita analisar os aspectos matemáticos e didáticos do ensino investigado.”

A partir dos conteúdos estudados, dos trabalhos já publicados como a tese de doutorado, Prexeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau, do autor Edelweis José Tavares Barbosa e também o artigo, Uma análise praxeológica do ensino de volume dos sólidos geométricos em livros didáticos do ensino médio do autor Maxlei Vinícius Cândido de Freitas, entre outros, e pelas experiencias vivenciadas sobre as temáticas, a nossa pesquisa visa responder a seguinte pergunta: como é abordado o conteúdo de Curvas em Livros de Geometria Diferencial utilizados na Licenciatura em Matemática, apoiando-se na análise praxeológica da Teoria Antropológica do Didático?

Organizamos nosso trabalho da seguinte forma, o 1º capítulo a introdução, o 2º capítulo os objetivos geral e específicos, o 3º capítulo a Geometria Diferencial, onde será apresentado dois subtópicos, o primeiro tratará dos aspectos da história da geometria diferencial e o segundo mostrará uma breve introdução de Curvas Diferenciáveis apresentando definições e teoremas importantes para este conteúdo, em seguida virá o 4º Capítulo, onde abrangerá os aspectos teóricos da teoria antropológica do didático que iremos utilizar e aplicar no decorrer das nossas análises, com um subtópico em praxeologia, em que descreveremos como é realizado a praxeologia determinada por Chevallard, apresentando os componentes e os blocos para nossa análise, no 5º capítulo nos destinaremos aos aspectos metodológicos onde apresentaremos nossos passos para a análise e os livros que serão analisados, no 6º capítulo apresentaremos as análises do conteúdo de Curvas destes livros, no 7º nossas considerações finais acerca das análises.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Diante o tema de pesquisa temos o seguinte objetivo geral do trabalho: Analisar praxeologicamente o conteúdo de curvas em dois livros de geometria diferencial utilizados nas aulas de geometria diferencial do curso de licenciatura em matemática na Universidade Federal de Pernambuco, Campos Agreste, sob a ótica da teoria antropológica do didático segundo Chevallard, (1998, 1999, 2002).

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Conhecido nosso objetivo geral é importante que esclarecemos nossos objetivos específicos, que irão contribuir no desenvolvimento do nosso objetivo geral e responder a nossa questão de pesquisa.

Sendo assim, precisamos descrever a praxeologia definida por Chevallard, seguindo os componentes tarefa, técnicas, teoria e tecnologia, e descrever os blocos prático-técnico e tecnológico-teórico, analisando o conteúdo de Curvas Diferenciáveis nos livros selecionados, comparando-os sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), e definir qual livro está mais coerente a um primeiro curso de Geometria Diferencial.

3 GEOMETRIA DIFERENCIAL

Neste capítulo descreveremos os aspectos do desenvolvimento da geometria diferencial na história, e uma introdução rápida do conteúdo de curvas diferenciáveis, a fim de mostrar os desafios históricos da geometria que culminaram no estudo da geometria diferencial, em particular o conteúdo de curvas diferenciáveis, e de modo sintético e didático descrever o conteúdo de curvas diferenciáveis para identificarmos sua importância dentro do âmbito da geometria e a forma como podemos analisar os livros que abordariam este conteúdo, viabilizando o exame dos livros didáticos mais adiante.

3.1 ASPECTOS DO DESENVOVIMENTO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL

A geometria diferencial como é estudada hoje, obteve grandes contribuições de vários matemáticos, entre eles, o grande matemático do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que contribuiu significativamente para o estudo em geodésicas e em curvaturas dentro da geometria diferencial, porém a história da geometria diferencial iniciou com os primeiros estudos em geometria, segundo Gorodski (2002) os registros mais antigos em atividades no campo da geometria remontam aos babilônicos, talvez há cerca de cinco mil anos.

Entretanto foi com o filósofo, matemático, Tales de Mileto (624 - 546 a.c.), que a maneira de ver a geometria dos babilônicos motivados a problemas de agrimensura foi profundamente transformado, Tales em conjunto com a escola pitagórica grega segundo Gorodski (2002) fizeram grandes contribuições no sentido de determinar o método conhecido como dedutivo-formal em matemática.

O surgimento da obra *Os Elementos* escrito por Euclides cerca de 300 a.c. fez este método ser finalmente concretizado, esta obra é o texto grego matemático mais antigo, ela compõe 13 livros em ordem lógica sobre geometria euclidiana, que reúne quase todo o conhecimento matemático daquela época. O primeiro livro segundo Guimarães e Ribeiro (2020) foi o principal para o surgimento da geometria euclidiana, pois, a partir de algumas definições, 9 axiomas, e 5 postulados, Euclides deduz 465 teoremas.

Segundo Gorodski (2002) a ponte entre a geometria grega e a geometria diferencial que temos hoje é um capítulo crucial dentro da história da geometria, e inicia-se com severas tentativas de demonstração ao decorrer da história, acerca do postulado V descrito por Euclides, que também é conhecido como o postulado das paralelas: “É verdade que, se uma reta corta duas outras retas formando ângulos internos no mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas se continuadas indefinidamente encontrar-se-ão no lado em que estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.”

Muitos matemáticos ao decorrer da história se viram confrontados com a frase “se continuada indefinidamente” contida neste postulado, pois segundo Gorodski (2002) desafiava uma intuição baseada em construções com régua e compasso.

O pontapé para a geometria diferencial se dá com os estudos em curvas, que também foi padronizada a partir da obra Elementos de Euclides, segundo Polonini (2014) nesta época para os estudos em curvas eram utilizados círculos e seus derivados como, arcos, cordas, raio e centro, esses elementos se tornaram elementos básicos para qualquer construção de curva, e por mais de mil anos estes meios continuaram como os principais para o estudo de curvas, até que no século XVII, segundo Polonini (2014), com a criação da Geometria Analítica pelos dois franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), foi introduzido a notação algébrica em que poderia descrever formas geométricas por meio de equações ao em vez do desenho geométrico que por muitos séculos foi adotado.

Esta descoberta foi a porta de entrada para a matemática moderna que nós conhecemos hoje, pois a partir da Geometria Analítica, é possível descrever curvas por meio de equações ou seja a notação algébrica, e na Geometria deu passagem para que Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727) criassem o Cálculo Infinitesimal ao final do século XVII, dando início a Geometria Diferencial como a conhecemos hoje, por meio da unificação entre o Cálculo Diferencial e a Geometria.

> A Geometria Diferencial dessa época englobava o estudo das propriedades das curvas e superfícies no espaço euclidiano através da aplicação do Cálculo. Nela se estudavam as propriedades locais, isto é, aquelas que dependem somente do comportamento da curva ou superfície na vizinhança de um ponto. Por isso é usual chamar-lhe Teoria Local de Curvas e de Superfícies (HILBERT; COHN-VOSSEN, 1990, p. 171)

Por volta de 1820, Gauss foi contatado pelo governo de Hanover para orientar um levantamento topográfico do reino, medições dos terrenos, triangulações, foram seu principal trabalho em anos, porém o estimulou com ideias que em 1827 publicou uma obra chamada: *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* em que Gauss introduz a forma diferencial quadrática ds^2, que hoje é reconhecida como a primeira forma fundamental, lhe permitindo a escrita de equações para curvas geodésicas (Gorodski, 2002). Neste mesmo trabalho ele apresenta vários conceitos que hoje em dia é aprendido em livros em geometria diferencial, como a aplicação de Gauss, a segunda forma fundamental, e o notório teorema chamado *Teorema egregium de Gauss* que resultou em uma parte da geometria diferencial chamada geometria intrínceca, onde podemos estudar a geometria de uma superfície operando exclusivamente na própria superfície, sem vínculo com o espaço dimensional em que ela está imersa.

Apartir destes conhecimentos a geometria diferencial se firmou como uma grande área de pesquisa, e assim muitos geômetras se destinaram a continuar o trabalho de Gauss e de muitos outros que contribuiram para o seu desenvolvimento, é o caso do Bernhard Riemann (1826-1860) que deu um grande passo na geometria, utilizando aspectos e conceitos da geometria diferencial, introduzindo as variedades n-dimencionais, a métrica Riemanniana e a curvatura Riemanniana, e em 1869 Elwin Christoffel (1829-1900) publicou um trabalho no qual introduziu o que é chamado hoje de Símbolos de Christoffel e o Tensor Curvatura, servindo de base para a Geometria Riemanniana, que generaliza conceitos de superfícies diferenciais para dimensões maior que dois.

A geometria diferencial ainda é um campo muito procurado entre os jovens aspirantes matemáticos como linha de pesquisa, e muitas propriedades são aplicadas em diversas áreas, esta evolução de conceitos se torna muito importante para a ciência, pois existem muitas possibilidades ainda em testes, que faram avanços a sociedade significativamente graças a geometria diferencial desenvolvida por estes grandes matemáticos.

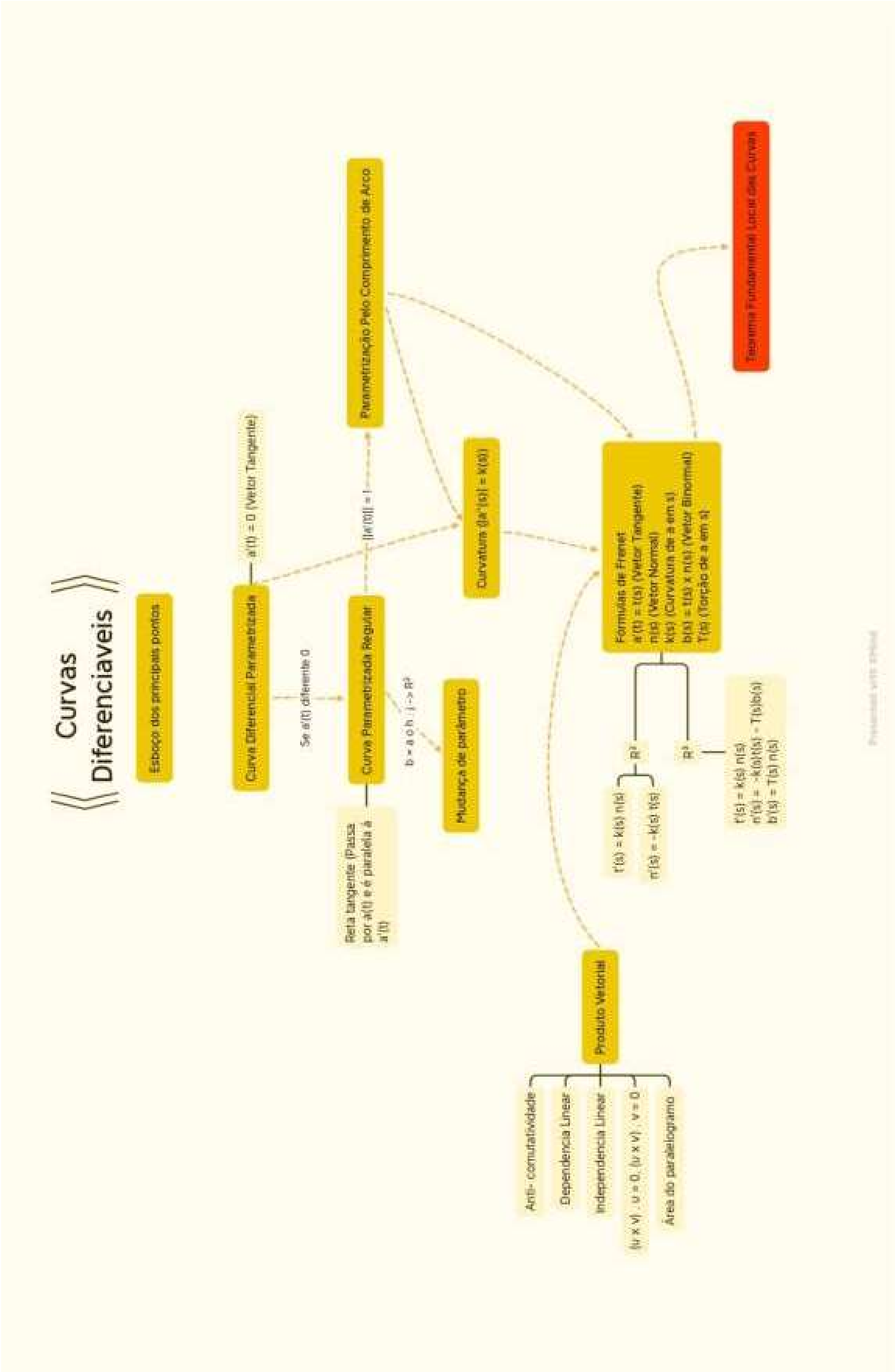
3.2 CURVAS DIFERENCIÁVEIS

Tendo em vista que o conteúdo de curvas é o pontapé inicial histórico para o inicio da geometria diferencial e o primeiro passo para o entendimento da geometria diferencial, escolhemos este assunto como objetivo de estudo neste trabalho, segue abaixo uma síntese deste assunto que servirá de auxilio para nossa análise mais adiante.

No conteúdo de curvas diferenciáveis, tem-se como objetivo, apresentar o Teorema fundamental das curvas locais, pois é para este teorema que toda literatura em geral organiza o conteúdo de curvas mesclando conhecimentos como torção e curvatura, apontando para este teorema, onde podemos mesclar todo conhecimento de curvas em um teorema. O conteúdo de curvas não se pauta apenas neste teorema, existem teoremas mais avançados, entretanto, para uma disciplina introdutória, o Teorema fundamental das curvas locais é o principal ponto a ser abordado.

Para apresentarmos o conteúdo de curvas diferenciáveis, faremos um esboço que possa nos orientar na construção deste conhecimento, com isto construímos um mapa conceitual para que possamos compreender o passo a passo para chegarmos no Teorema Fundamental.

Figura 1: Mapa conceitual do conteúdo de Curvas Diferenciáveis



Fonte: Construção nossa (2022)

Nota-se que precisamos passar por algumas definições e propriedades estudadas em Cálculo e Álgebra Linear para entender o conteúdo e seguir o passo a passo até o teorema fundamental das curvas locais, também notamos a presença do nome diferenciável ao lado de curva, na matemática quando dizemos que algum ente geométrico é diferenciável, neste caso, curvas, queremos dizer que é derivável e que podemos calcular esta derivada, por isto o nome **diferenciável**. Então quando chamamos curva diferenciável, esta curva possui derivada em todos os pontos.

Agora mostraremos nossa primeira definição sobre curvas que dará início aos nossos estudos, sendo o primeiro tópico do mapa conceitual, a definição de curva parametrizada.

Definição 1. *Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável* $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ *de um intervalo aberto* $I = (a, b)$ *da reta real* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}^3$*.*

Como dito acima a palavra diferenciável na definição significa que α *é uma correspondência que leva cada* $t \in I$ *em um ponto* $a(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$*, de tal modo que as funções reais* $x(t), y(t), z(t)$ *são diferenciáveis, ou seja, podemos derivar todas as coordenadas.*

Dizemos que o Vetor $a'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, é o vetor tangente a curva no ponto $t \in I$.

Esta definição advém do Cálculo, onde podemos parametrizar curvas de algumas formas, a mais adequada para cada caso, entretanto, agora não estamos preocupados em parametrizar as curvas e sim após ser parametrizadas, se elas podem ser diferenciáveis nas coordenadas determinadas.

Agora daremos um passo adiante e definiremos um caso importante dessas curvas parametrizadas.

Definição 2. *Uma curva diferenciável parametrizada* $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ *é chamada* ***regular*** *se* $\alpha'(t) \neq 0, para\ todo\ t \in I.$

Ou seja, em cada ponto da curva diferenciável, aplicando a derivada o resultado não ser 0, então esta curva é regular, veremos alguns exemplos de curvas regulares e não regulares, para que fique mais didático esta definição.

Exemplo de curva regular:

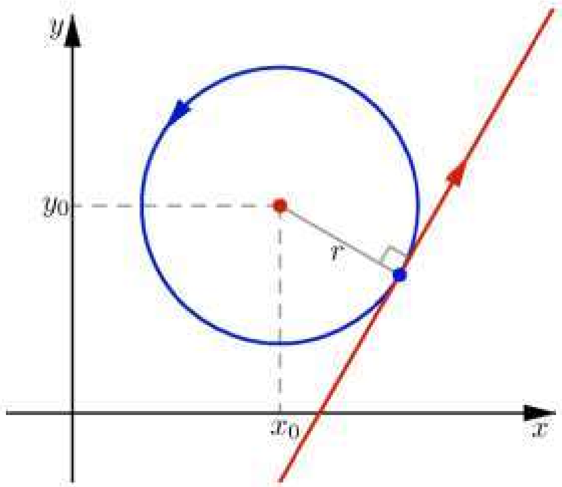
A aplicação $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (r\cos t\,, r\sin t) + (x_0, y_0)$$

com $r > 0$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\alpha'(t) = (-r\sin t\,, r\cos t)$ e portanto, $||\alpha'(t)|| = r \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

O traço da curva α é o círculo de centro (x_0, y_0) e raio r (ver Fig. 2)

Figura 2: Curva $\alpha(t) = (r\cos t\,, r\sin t) + (x_0, y_0)$



Fonte: DELGADO, FRENSEL (2017, p. 2)

Exemplo de curva não regular:

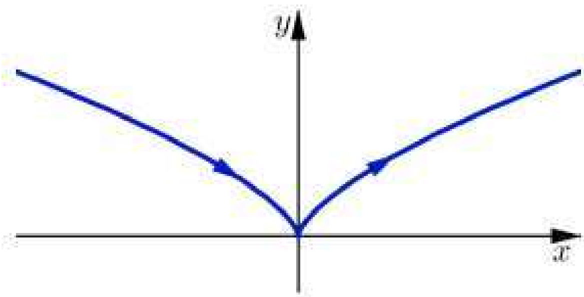
A curva parametrizada $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3, t^2)$$

é diferenciável, mas não é regular, pois $\alpha'(t) = (3t^2, 2t) = (0{,}0)$ para $t = 0$, ou seja, $t = 0$ é um ponto singular.

Observando que as coordenadas de um ponto da curva satisfazem à equação $y^3 = x^2$, podemos traçar a curva (ver Fig. 3).

Figura 3: curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$



Fonte: DELGADO, FRENSEL (2017, p. 2)

Temos um caso especial das curvas regulares que é muito importante para a continuidade do tema curvas, que é o conceito de parametrização pelo comprimento de arco.

Definição 3. *Dizemos que uma curva regular $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ está* ***parametrizada pelo comprimento de arco*** *se*

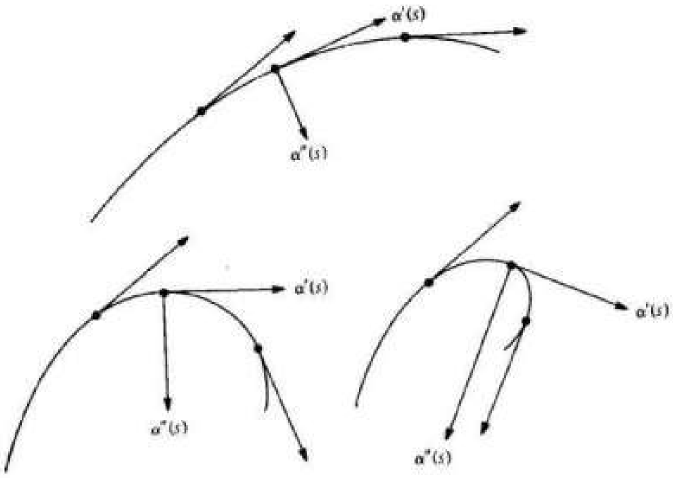
$$\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \; dt \; = t - t_0$$

Ou seja, isto acontece se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| \; = \; 1$, para todo $t \in I$.

Esta definição é muito importante para o conteúdo de curvas, pois sabendo que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco, sabemos que admite reparametrizações, e que podemos encontrar outro conceito, o de curvatura de uma curva, sendo uma das definições mais importantes em todo estudo da geometria diferencial, pois tem consequências não só em curvas, mas também em superfícies. vejamos a definição

Definição 4. *Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $|\alpha'(s)| = 1, s \in I$. O número $|\alpha''(s)| = k(s)$ chama-se curvatura de α em s.*

Figura 4: Tangentes de $a(s)$ e $\alpha'(s)$



Fonte: CARMO (2012, p.20)

Notamos que segue dos mesmos conhecimentos do Cálculo, a segunda derivada será perpendicular a primeira derivada que tangencia a curva, e que se $|\alpha''(s)| = k(s) = 0$, então por integração $\alpha(s) = us + v$, e a curva é uma reta, ou seja, se uma curva tem curvatura nula então a curva será uma reta, logo uma reta é uma curva com curvatura 0.

Antes de prosseguirmos com os nossos conceitos precisamos abordar um tema importante pro que se segue, o Produto Vetorial, como notamos lá no início no mapa conceitual que está nos guiando, o produto vetorial está a parte, e não recebe ligação de nenhum conceito anterior, pois este tema é abordado em Álgebra Linear, logo é um conhecimento que precisamos abordar para entendermos o que se segue.

Definição 5. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$. O **Produto Vetorial** de u e v (nesta ordem) é um único vetor $u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ caracterizado por*

$$(u \wedge v).w \ = \ det(u, v, w)$$

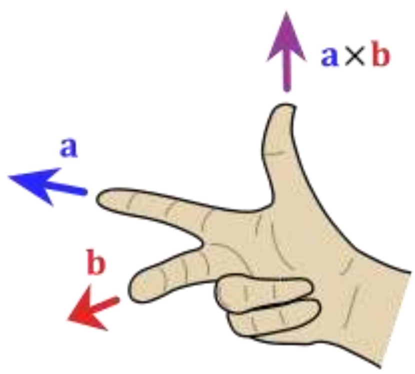
Para todo $w \in \mathbb{R}^3$.

O (det) representa determinante, ou seja,

$$det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Observação: em geral encontra-se $u \wedge v$ escrito como $u \ x \ v$.

Figura 5: Conceito geométrico do produto vetorial de forma lúdica



Fonte: GOOGLE IMAGENS (2022)

Propriedades:

1- $u \wedge v \ = -v \wedge u$ (Anti-comutatividade).

2- $u \wedge v$ depende linearmente de u e v; i. e., para quaisquer números reais a, b temos

$$(au + bw) \wedge v = a(u \wedge v) + b(w \wedge v).$$

3- $u \wedge v = 0$ se e somente se u e v são linearmente dependentes.

4- $(u \wedge v) . u = 0, (u \wedge v) . v = 0$

Segue da propriedade 4 que o produto vetorial $u \wedge v \neq 0$ é ortogonal ao plano gerado pelos vetores u e v.

Não temos a intensão em demonstrar tais propriedades, visto que o objetivo deste capítulo é apenas apresentar os conteúdos, as demonstrações podem ser encontradas facilmente em livros sobre Álgebra Linear.

Tendo posses destas propriedades, podemos continuar nossos estudos em curvas diferenciáveis, vamos apresentar um tópico muito importante, as fórmulas de Frenet.

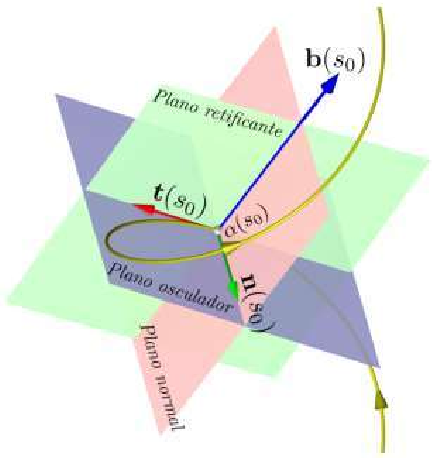
Alguns Livros apresentam primeiro no caso $\mathbb{R}^2$ e depois o caso $\mathbb{R}^3$, em questão de síntese do capítulo vamos apresentar no caso $\mathbb{R}^3$, tendo em vista que englobará o $\mathbb{R}^2$ e simplificará o conteúdo.

Para tornar as coisas mais simples chamaremos a primeira derivada da curva $\alpha'(s) = t(s)$, então $t(s) = (x'(s), y'(s), z'(t))$.

O vetor $n(s)$ será o veto normal unitário, que segue na direção de $\alpha''(s)$.

Nos pontos onde $k(s) \neq 0$, fica bem definido pela equação $\alpha'' = k(s)n(s)$. Além disso, $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, pois derivando $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1$ obtemos $\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$. Assim, $n(s)$ é normal a $\alpha'(s)$ e é chamado o *vetor normal* em s o plano determinado por $\alpha'(s)$ e $n(s)$ é chamado o *plano osculador* em s.

Figura 6: Plano Osculador



Fonte: KONZEN; AZEVEDO; SAUTER (2021)

O vetor unitário $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ é normal ao plano osculador e será chamado o *vetor binormal* em s. Para derivarmos o $b(s)$, observamos que $b'(s)$ será normal ao $b(s)$, então,

$$b(s) = t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s) = t(s) \wedge n'(s);$$

Isto é, $b'(s)$ é normal a $t(s)$. Decorre daí que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$, e podemos escrever

$$b'(s) = \tau(s)n(s)$$

Para alguma função $\tau(s)$.

Definição 6. *Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. O número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s)n(s)$ é chamado torção de α em s.*

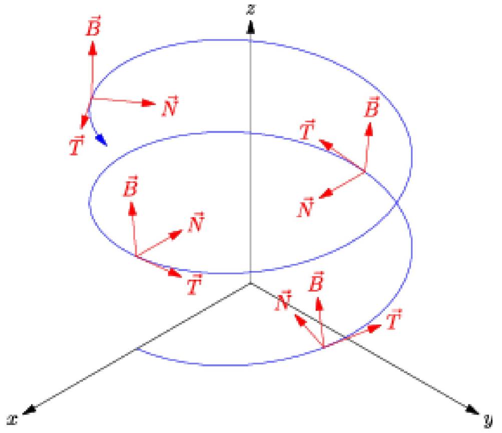
Em suma, a cada valor do parâmetro s, associamos 3 vetores unitários ortogonais $n(s)$, $t(s)$, $b(s)$. O triedro assim construído é denominado, ***triedro de Frenet*** *em s,* para simplificar vamos destacar as seguintes equações:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases}$$

E estas formam, as *fórmulas de Frenet,*

As derivadas $t'(s)$ e $b'(s)$ dos vetores $t(s)$ e $b(s)$, quando expressas na base $\{t, n, b\}$, fornece entidades geométricas, que informam sobre comportamento de α em uma vizinhança de s.

Figura 7: Triedro de Frenet



Fonte: KONZEN; AZEVEDO; SAUTER (2021)

Com todas estas informações podemos enunciar o objetivo final deste capítulo sobre Curvas, o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas.

Teoremas Fundamental da Teoria Local das Curvas. *Dadas as funções diferenciáveis* $k > 0$ *e* $\tau(s)$, $s \in I$, *existe uma curva parametrizada regular* $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ *tal que* s *é o comprimento de arco,* $k(s)$ *é a curvatura e* $\tau(s)$ *é a torção de* $\alpha.$ *Além disso, qualquer outra curva* $\tilde{\alpha},$ *satisfazendo às mesmas condições, difere de* α *por um movimento rígido; isto é, existe uma transformação linear ortogonal de* $\mathbb{R}^3$, *com determinação positivo, e um vetor* c *tal que* $\tilde{\alpha} = \rho \circ \alpha + c.$

Com este teorema podemos encontrar as propriedades locais das curvas no espaço e que se existir outra curva com as mesmas propriedades podemos transforma-la na curva inicial apenas aplicando uma transformação linear.

4 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

4.1 ANÁLISE EM LIVROS DIDÁTICOS

A grande maioria da população no Brasil tem um baixo poder aquisitivo, o que gera uma grande evasão escolar, sendo assim, o livro didático se torna talvez o único texto, que os alunos terão ao longo da sua vida (BANDEIRA, STANGE e SANTOS, 2012). Ainda segundo esses autores, a escolha por um livro didático é um problema corriqueiro para o professor, a partir disto, perguntas surgem para tais escolhas, são elas: Que livro escolher? Quais critérios devo usar? De que maneira serão selecionados os livros didáticos? Assim é pertinente ao professor saber quais ferramentas serão utilizadas, uma análise bem elaborada, pode estruturar melhor os conceitos para os seus alunos e mesmo que só tenham o livro para tal estudo, ele será transparente e didático, com isto notamos que o professor precisa fazer sua análise a partir de um procedimento adequado.

Para nossa análise em livros didáticos, levaremos em consideração a praxeologia baseado na Teoria Antropológica do Didático segundo Chevallard (1998, 1999, 2002). Porém muitos autores abordam este tema com grande destreza, é o caso de (BARBOSA, 2017) que faz a utilização deste procedimento em equações polinomiais do primeiro grau em sua tese de doutorado, segundo (BARBOSA, 2017) a Teoria Antropológica do didático (TAD) pode ser analisada de acordo com a praxeologia matemática ou organização matemática, das tarefas mais simples as mais complexas.

Seguindo nessa linha faremos menção a (Bittar, 2017).

> Uma análise de LD descortina ao pesquisador diversas paisagens que podem ir desde o estudo da cultura escolar em uma dada época à identificação de possíveis razões de dificuldades de aprendizagem e à elaboração de sequências didáticas. Conforme o objetivo da investigação, uma ferramenta teórica pode se mostrar mais pertinente do que outra. Não tenho a pretensão de afirmar que a TAD é a única ferramenta que permite analisar LD; a metodologia a ser utilizada deve ser coerente com as outras escolhas teóricas e com o objetivo da pesquisa. (BITTAR, 2017, p. 366)

Neste artigo Bittar, utiliza a sigla (LD) como forma de simplificação para as palavras Livro didático. Ainda sobre (Bittar, 2017), o artigo nos mostra a TAD como ferramenta para análise de livros, discutindo sobre o porquê analisar livros, e algumas breves análises sobre conteúdos a luz da TAD. Alguns desses conteúdos são pesquisas na qual a autora foi a orientadora, e observa as contribuições desta teoria para tais análises em livros didáticos que possam ser escolhidos.

Muito interessante o fato do livro muitas vezes ser a principal ferramenta de apoio de conteúdo para o professor, por isso, uma análise bem estruturada poderá ajudar o docente a uma melhor escolha desses livros, "é importante conhecer as propostas dos LD, especialmente para ajudar na elaboração de intervenções didáticas com alunos, pois, independente da escolha teórica, é preciso levar em consideração seu contexto de ensino" (BITTAR, 2017, p. 366).

Segundo (BARBOSA; LIMA, 2019, p. 1358) sobre o livro didático "[...], no contexto brasileiro, ele se torna uma das únicas ferramentas balizadoras para o trabalho docente". Sendo assim, análises em livros didáticos, devem sempre ser bem elaboradas, e seguindo uma praxeologia adequada, neste sentido analisaremos dois livros de Geometria Diferencial, seguindo o modelo proposto pela TAD sob os trabalhos de Chevallard (1998, 1999, 2002).

Chevallard (2018) Apud (Barbosa, 2017, p.46) afirma que a TAD foi inicialmente construída como uma teoria cujo objetivo consiste em controlar os problemas da difusão de conhecimentos e de saberes quais quer compreendidos em suas especificidades; logo, de conhecimentos matemáticos também.

A TAD tem grande importância nas análises de livros, e principalmente em matemática em que segundo Freitas (2016), a TAD nos permite reconhecer qual matemática nos livros didáticos está empregada e as determinadas propostas que os autores apresentam em suas obras acerca do ensino e aprendizagem dos conteúdos abordados. Ainda sobre a TAD Freitas (2016) complementa que esta teoria "nos mostra o(s) caminho(s) que o autor compreende que os professores, que optarem por tal coleção, devam prosseguir e de que maneira o conteúdo ali apresentado deve ser trabalhado." (Freitas, 2016, p. 8). Assim, notamos esta grande importância que a teoria tem, e o quanto ela pode nos fornecer de informação sobre o material escolhido.

4.2 PRAXEOLOGIA

O modelo praxeológico é formado por quatro componentes, tarefa (T), técnica (τ) tecnologia (θ) e teoria (Θ), dentro desses componentes podemos fazer duas combinações entre eles, o bloco [T, τ] é conhecido como o bloco prático-técnico e o bloco [θ, Θ] está ligado ao bloco tecnológico-teórico, o bloco prático-técnico também pode ser denominado de saber-fazer e o tecnológico-teórico é reconhecido como o bloco do saber.

Segundo Vieira (2019), tarefa (T) é denotado como um desejo do ser humano, ou "fazer coisas", neste sentido, questões como, demonstrar curvas parametrizadas regulares, ou encontrar o triedro de Frenet em uma curva, são encontrados neste componente, tarefa. Uma forma ou meio de realizar uma tarefa (T), chamamos de técnica (τ), em geral podemos ter técnicas superiores a outras para desempenhar uma determinada tarefa, então explorar uma técnica com grande capacidade de realização de uma tarefa se torna muito significativo, notaremos que a técnica em geral está bem relacionada com a algoritmização, entretanto, algumas tarefas não tenham necessidade de tal algoritimização para ser realizado (Chevallard, 1998).

A tecnologia (θ) pode ser vista como um a descrição racional da técnica (τ), isto é, para realizar o tipo de tarefa (T), validar a técnica utilizada, contudo existe mais duas funções da tecnologia (θ), uma delas "[...] é explicar, tornar inteligível, lançar luz sobre a técnica. Se a primeira função - justificar a técnica - consiste em fazer com que a técnica dê o que se a firma, esta segunda função consiste em explicar por que o é" (Chevallard, 1999, p. 226, tradução nossa). A terceira função consiste na produção de técnicas, existem algumas tecnologias que estão à espera de novas técnicas e outras que contém técnicas, mas em pouca quantidade. Porém toda tecnologia necessita de uma explicação, que é chamado de teoria (Θ), a teoria segundo BARBOSA (2017, p. 47), "[...] tem como finalidade justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar compreensível o discurso tecnológico."

Definido os quatro componentes, notamos que um análise de livro didático sob essa praxeologia, poderemos avaliar pontos em exercícios e em conteúdos, que comumente não veríamos, podemos analisar se as técnicas utilizadas em demonstrações estão de acordo com a tarefa que está sendo requisitada, ainda sobre a praxeologia, podemos fazer uma distinção entre a praxeologia (organização) matemática (OM) e a praxeologia (organização) didática (OD), a organização matemática OM segundo Barbosa (2017), está relacionado ao contexto matemático que os alunos podem atuar de forma adequada na resolução de problemas, para uma construção do conhecimento, investigando assim a realidade em sala de aula desse desenvolvimento. Ainda segundo Barbosa (2017), a organização didática OD, tem como determinante admitir a existência de praxiologias matemáticas adaptável em determinado saber, estruturando-se em torno dos componentes praxeológicos.

Com isso mostraremos a seguir um exemplo de como faremos tais análises utilizando a praxeologia matemática a partir de tarefa, técnica, e o bloco teórico-tecnológico:

Quadro 1: Exemplo de análise de acordo com a praxeologia

Tarefa (T):	Seja $\alpha(t)$ uma curva parametrizada que não passa pela origem. Se $\alpha(t_0)$ é o ponto do traço de α mais próximo da origem e $\alpha'(t_0) \neq 0$, mostre que o vetor posição $\alpha(t_0)$ é ortogonal a $\alpha'(t_0)$.
Técnica (τ):	Utilização da demonstração formal.
Bloco Teórico-Tecnológico (θ,Θ):	Apresentar o conceito de ortogonalidade a um ponto da curva $\alpha(t_0)$.

Fonte: Construção Nossa (2022)

Então podemos relacionar uma técnica a uma tarefa determinada, e uma teoria e uma tecnologia sendo a finalidade que esperamos ser alcançada. Mesmo mostrado apenas uma técnica, a tarefa não se limita, ou seja, podemos encontrar diversos meios de técnicas aos quais podemos relacionar a tarefa.

Com isso, podemos agora definir como será nossos passos metodológicos e quais serão nossos livros que iremos analisar.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A metodologia será bibliográfica de cunho qualitativo como o propósito de uma análise de conteúdo de Curvas em dois livros de Geometria Diferencial, no que diz respeito a teoria antropológica do didático (TAD) segundo Chevallard (1998, 1999, 2002). Segundo Deslandes (1994), a metodologia qualitativa, contém uma gama de significados, sendo eles, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, consistindo num meio mais profundo das relações, ainda sobre essa linha metodológica ZANETTE (2017, p. 154) afirma que “no Brasil, as abordagens das pesquisas qualitativas configuram-se, como enfoque metodológico, a partir da década de 1970, devido às concepções epistemológicas interpretarem a realidade de forma distorcida nas suas metodologias.”

Ainda sobre a metodologia qualitativa Ludke e André, 1986, articulam que uma análise em dados tendem a seguir um desenvolvimento indutivo, ou seja, as hipóteses definidas antes do início dos estudos, não tem necessidade de comprovação pelos pesquisadores, “O fato de não existirem hipóteses ou questões específicas formuladas a priori não implica a inexistência de um quadro teórico que oriente a coleta e a análise dos dados” (Ludke, André, 1986, p.13).

Segundo Vieira (2019), uma análise de conteúdo tendo como base interpretar e descrever os conteúdos de textos e documentos, é uma metodologia de pesquisa, sendo assim, nesse trabalho iremos analisar o capítulo de Curvas em Geometria Diferencial nos livros escritos pelo professor Manfredo Perdigão do Carmo ao qual chamaremos de **Livro 1** e o livro em Geometria Diferencial I escrito por Jorge Delgado e Kátia Frensel que chamaremos de **Livro 2.** Após uma breve analisada, notamos que todos os conteúdos posteriores a curvas, necessitam que este conhecimento tenha sido trabalhado da melhor forma possível, pois conceitos estudados neste conteúdo serão utilizados em praticamente todos os assuntos posteriores, necessitando assim que o livro ao qual seja escolhido, consiga varrer todo o conteúdo de modo significante, e ainda, para um primeiro curso de Geometria Diferencial em que este tema será bem detalhado, assim é imprescindível que este curso seja dado com um material bem elaborado, portanto, é muito importante uma análise apurada.

Para esta análise do conteúdo, aplicaremos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) segundo Chevallard (1998, 1999, 2002), sendo baseada na organização praxeológica em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, tendo por objetivo investigar como os livros abordam o conteúdo de Curvas e como ele é organizado seguindo esta praxeologia.

Começaremos com a coleta do material que será analisado, e investigaremos como é abordado o conteúdo de Curvas Diferenciáveis, passado esta primeira abordagem, seguiremos com nossa análise praxeológica, identificando os processos utilizados em relação a tarefa (T) se o que está sendo pedido ao leitor esteja de acordo com o determinado conteúdo, em seguida, identificaremos as técnicas (τ) utilizadas para a realização de tais tarefas, terminado esta etapa, montaremos o bloco prático-técnico ou "saber-fazer" [T, τ] nesses livros, em seguida, trataremos da tecnologia (θ) e teoria (Θ) que os livros tratam, diferenciando os meios que utilizam, e a partir disto montar o segundo bloco, o bloco tecnológico-teórico ou "saber" [θ, Θ].

Definido nossos componentes praxeológicos, apresentaremos tabelas com as comparações entre os livros e como os autores tratam cada bloco, explicando sob a ótica da TAD essas organizações praxeológicas. Ao final definiremos qual o livro mais coerente com um primeiro curso introdutório em Geometria Diferencial.

6 ANÁLISE E RESULTADOS

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar a análise, dados, e resultados da nossa pesquisa, como já foi mencionado, faremos nossa análise apenas no conteúdo de Curvas Diferenciáveis, no **Livro 1** e no **Livro 2**, tendo em vista que este conteúdo é o principal objetivo da disciplina Introdução a Geometria Diferencial, dado no curso em Licenciatura em Matemática do campos CAA da Universidade Federal de Pernambuco.

Faremos agora uma breve apresentação dos determinados livros escolhidos e do público alvo a qual ele foi direcionado.

O **Livro 1** (Carmo, 2012), foi escrito com o propósito de ser usado em mais de um tipo de curso de Geometria Diferencial. Além disso o livro conta com 5 capítulos, desses apenas o de Curvas contém um menor número de folhas. Mesmo com poucos capítulos o livro contém um alto número de páginas, e por isso que o material pode ser dividido a um curso de Geometria Diferencial de um ano, porém o próprio livro tenta sintetizar e dar dicas para o uso em um semestre.

O livro ainda orienta os melhores conteúdos e orientações para a quantidade de conhecimento que o estudante venha a ter, sendo o mais recomendado os conhecimentos de Álgebra Linear, Cálculo e Análise em várias variáveis, contudo o conhecimento em Análise em várias variáveis é estudado em geral no mestrado, sendo assim, o livro sugestiona conteúdos que o estudante deve omitir e exercícios que deve retirar dos seus estudos, e além disto, inicia cada capítulo com uma breve introdução.

No **Livro 2** (Delgado e Frensel, 2017), é composto por notas de aulas, dadas por estes professores, tendo como base o texto do Livro 1, porém, com mais detalhes e passagens que são de grande importância para o estudo da disciplina, o livro contém 7 capítulos, com o conteúdo de Curvas ocupando os dois primeiros capítulos, Curvas Planas e Curvas no Espaço, então para nossa análise nos pautaremos nestes dois capítulos. Um ponto interessante é a utilização de cores como organização e destaque dentro do livro, deixando o padrão de muitos livros de matemática do ensino superior, que são utilizadas poucas cores.

Como o livro a princípio foi elaborado para os estudantes da disciplina desses professores, não foi adicionado uma organização com o qual outro estudante deve utilizar, porém, a partir de uma breve analisada, nota-se uma grande quantidade de exemplos e cálculos, que podem ser familiar a estudantes que tenham pelo menos o estudado Cálculo de várias variáveis, e é observado o uso também da Álgebra Linear.

6.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DOS LIVROS 1 E 2

Para iniciarmos nossa análise nos livros em Geometria Diferencial seguindo o modelo praxeológico designado por Chevallard (1998, 1999, 2002), será necessário o uso de alguns termos e elementos dos quais precisamos definir.

- Q_n, para questão n.
- $T_m Q_n$, para tarefa m da questão n.
- $t_k(T_m Q_n)$, para técnica k, em relação a tarefa m da questão n.
- $[\theta, \Theta]_n$, discurso teórico-tecnológico que justifica a questão n.

Foram elaboradas 7 questões, que servirão de orientação para nossa análise, relacionando a partir da tarefa, as técnicas escolhidas pelos autores sendo justificadas pelo bloco teórico-tecnológico. Neste sentido as tarefas estarão diretamente relacionadas com a metodologia que é comumente utilizada no conteúdo de curvas diferenciáveis.

Abaixo segue o quadro com o modelo das praxeologias que determinam nossa análise:

Quadro 2: Modelo das praxeologias a partir das questões elaboradas

Questão	Tarefa	Técnica	Tecnologia/Teoria
$\boldsymbol{Q_1}$	$\boldsymbol{T_1 Q_1}$	$t_1(T_1 Q_1)$	$[\theta, \Theta]_1$: Definição de Curva Diferenciável Parametrizada
	$\boldsymbol{T_2 Q_1}$	$t_1(T_2 Q_1)$	
		$t_2(T_2 Q_1)$	
	$\boldsymbol{T_3 Q_1}$	$t_1(T_3 Q_1)$	
		$t_2(T_3 Q_1)$	
$\boldsymbol{Q_2}$	$\boldsymbol{T_1 Q_2}$	$t_1(T_1 Q_2)$	$[\theta, \Theta]_2$:Definição de Curva Regular
		$t_2(T_1 Q_2)$:	
	$\boldsymbol{T_2 Q_2}$	$t_1(T_2 Q_2)$	
		$t_2(T_2 Q_2)$	
$\boldsymbol{Q_3}$	$\boldsymbol{T_1 Q_3}$	$t_1(T_1 Q_3)$	

		$t_2(T_1Q_3)$	$[\theta,\Theta]_3$: Parametrização Pelo Comprimento de Arco
	$\boldsymbol{T_2Q_3}$	$t_1(T_2Q_3)$	
		$t_2(T_2Q_3)$	
		$t_3(T_2Q_3)$	
$\boldsymbol{Q_4}$	$\boldsymbol{T_1Q_4}$	$t_1(T_1Q_4)$	$[\theta,\Theta]_4$: Definição de Curvatura
		$t_2(T_1Q_4)$	
		$t_3(T_1Q_4)$	
	$\boldsymbol{T_2Q_4}$	$t_1(T_2Q_4)$	
		$t_2(T_2Q_4)$	
		$t_3(T_2Q_4)$	
$\boldsymbol{Q_5}$	$\boldsymbol{T_1Q_5}$	$t_1(T_1Q_5)$	$[\theta,\Theta]_5$: Propriedades do Produto Vetorial
		$t_2(T_1Q_5)$	
	$\boldsymbol{T_2Q_5}$	$t_1(T_2Q_5)$	
		$t_2(T_2Q_5)$	
		$t_3(T_2Q_5)$	
		$t_4(T_2Q_5)$	
$\boldsymbol{Q_6}$	$\boldsymbol{T_1Q_6}$	$t_1(T_1Q_6)$	$[\theta,\Theta]_6$: Construção das Fórmulas de Frenet
		$t_2(T_1Q_6)$	
	$\boldsymbol{T_2Q_6}$	$t_1(T_2Q_6)$	
		$t_2(T_2Q_6)$	
		$t_3(T_2Q_6)$	
	$\boldsymbol{T_3Q_6}$	$t_1(T_3Q_6)$	
		$t_2(T_3Q_6)$	
		$t_3(T_3Q_6)$	
$\boldsymbol{Q_7}$	$\boldsymbol{T_1Q_7}$	$t_1(T_1Q_7)$	$[\theta,\Theta]_7$: Apresentação do Teorema Fundamental das Curvas Locais
		$t_2(T_1Q_7)$	
	$\boldsymbol{T_2Q_7}$	$t_1(T_2Q_7)$	
		$t_2(T_2Q_7)$	
		$t_3(T_2Q_7)$	
		$t_4(T_2Q_7)$	
		$t_5(T_2Q_7)$	
		$t_6(T_2Q_7)$	

Fonte: Construção nossa (2022)

Questão 1: Como é apresentado a definição de Curva Diferenciável Parametrizada?

-T_1Q_1: Explicar o conceito de diferenciável

$t_1(T_1Q_1)$: Abordagem do Cálculo.

-T_2Q_1: Apresentar a definição de curva diferenciável parametrizada

$t_1(T_2Q_1)$: Definição formal matemática.

$t_2(T_2Q_1)$: Apresentar exemplos para fixação do conceito.

-T_3Q_1: Apresentar terminologias (vetor tangente, traço, parâmetro, intervalo) que serão utilizadas no conteúdo

$t_1(T_3Q_1)$: Observação após a definição.

$t_2(T_3Q_1)$: Na continuação do texto como uma extensão da definição.

$[\theta, \Theta]_1$: O bloco teórico-tecnológico que orienta as técnicas escolhidas para as tarefas $\boldsymbol{T_1Q_1}$, $\boldsymbol{T_2Q_1}$ **e** $\boldsymbol{T_3Q_1}$, tem como base a definição de curvas parametrizadas que dão início ao conteúdo de curvas diferenciáveis e embasamento para todo conteúdo posterior.

Abaixo apresentaremos uma tabela com as respectivas técnicas das tarefas com relação as questões desenvolvidas pelos Livros 1 e 2. Aplicaremos a letra "X" como indicação que os determinados autores abordaram respectivas técnicas.

Quadro 3: Análise das tarefas da questão 1 (Q_1)

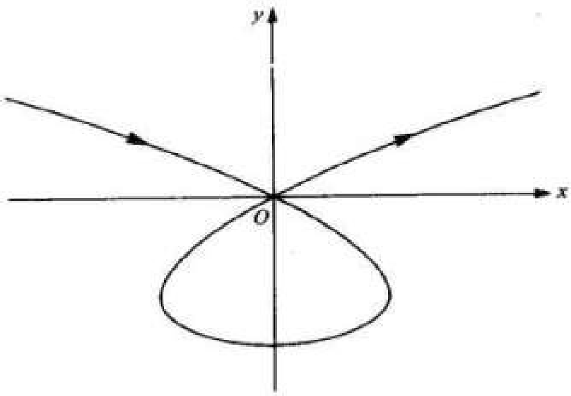
		Livro 1	**Livro 2**
$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{t_1(T_1Q_1)}$	**X**	
$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{t_1(T_2Q_1)}$	**X**	**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_2Q_1)}$	**X**	
$\boldsymbol{T_3}$	$\boldsymbol{t_1(T_3Q_1)}$		
	$\boldsymbol{t_2(T_3Q_1)}$	**X**	

Fonte: Construção nossa (2022)

Para que alunos da graduação consigam dar início a seus estudos em curvas no campo da Geometria Diferencial, é importante que se tenha uma revisão prévia de alguns conceitos, é o caso da diferenciabilidade, pois irar acompanhar durante todo o capítulo este conceito, diante disto, é importante uma breve revisão sobre tal propriedade, e a partir das nossas observações o livro 1, Carmo (2012) aborda este tema com bastante cautela, utilizando da técnica elaborada $t_1(T_1Q_1)$, o que torna para o estudante que irá utilizar este livro, um começo já conhecido, tendo em vista que o Cálculo é introduzido nos primeiros semestres dos cursos de exatas, sendo assim, mostra-se viável para um primeiro contato a um aluno da graduação, o que não visto no livro 2, Delgado e Frensel (2017) não abordam o conceito de diferenciabilidade, e introduz o capítulo ao estudante a partir da definição de curva diferenciável, requerendo do estudantes estes conceitos estudados.

Para a continuidade do tema é importante que se defina o conceito de curvas diferenciáveis, como observado na tabela, os dois livros utilizaram da técnica $t_1(T_2Q_1)$, a qual é padrão nos livros de matemática, o uso da definição formal, enunciando e descrevendo, por ser definição não há necessidade de demonstração. Para fixação da definição e por estarmos no âmbito geométrico é necessário que se apresente exemplos que tornem mais claros os temas, notamos que apenas o livro 1 utilizou esta técnica $t_2(T_2Q_1)$, apresentando 3 exemplos que são familiares aos estudantes que estudaram cálculo, com uma linguagem bem acessível a tais estudantes.

Figura 8: A aplicação $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4, t^2 - 4), t \in \mathbb{R}$ é uma curva diferenciável parametrizada.



Fonte: CARMO (2012) p.3

Além disso em um dos exemplos, apresenta as propriedades de produto interno e bases como revisão para o que seja trabalhado nos próximos conceitos.

Em seguida, é imediato que resultados surjam a partir da definição, e é importante a organização desses tópicos após a definição, sendo assim elaboramos

2 técnicas que ocorrem em livros, porém analisando os livros 1 e 2, notamos que nenhum dos dois fazem uso da técnica $t_1(T_3Q_1)$, mesmo o livro 2 utilizando de uma observação para explicar a derivada, não contempla nenhum dos outros conceitos que a T_3 requer, sendo essenciais para a continuidade. Entretanto o livro 1 faz uso da técnica $t_2(T_3Q_1)$, mesmo que não esteja em uma observação é explicado ao decorrer do texto como uma consequência direta da definição.

Vale ressaltar que para um professor que deseja introduzir em uma disciplina voltado a Geometria Diferencial o conteúdo de curvas diferenciáveis, é necessário pequenas revisões em conteúdos vistos no cálculo e em álgebra, para que o estudante se sinta imerso dentro desta geometria entendendo que existe uma continuidade dessas disciplinas.

Questão 2: A partir da definição de Curva Parametrizada, como é definido a Curva Regular?

-T_1Q_2: Definir o conceito de curva regular

$t_1(T_1Q_2)$: Definição formal matemática.

$t_2(T_1Q_2)$: Exemplos geométricos.

-T_2Q_2: Apresentar os conceitos de reta tangente e ponto singular

$t_1(T_2Q_2)$: Dentro da definição de curvas regulares.

$t_2(T_2Q_2)$: Apresentar antes da definição de curva regular como ponto de partida para a definição.

$[\theta, \Theta]_2$: O bloco teórico-tecnológico que norteia as tarefas $\boldsymbol{T_1Q_2}$ **e** $\boldsymbol{T_2Q_2}$**,** tem objetivo de apresentar o conceito de curva diferenciável parametrizada regular, que tem algumas ramificações como a reta tangente e o ponto singular, que serão de grande importância posteriormente.

Abaixo está a tabela com nossa análise nos livros 1 e 2, sobre o conteúdo de curvas, com relação a questão 2 da nossa organização praxeológica.

Quadro 4: Análise das tarefas da questão 2 (Q_2)

		Livro 1	**Livro 2**
$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{t_1(T_1Q_2)}$	**X**	**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_1Q_2)}$		**X**

T_2	$t_1(T_2Q_2)$		X
	$t_2(T_2Q_2)$	X	

Fonte: Construção nossa (2022)

A curva parametrizada regular, omitiremos o diferenciável com o intuito de facilitar a leitura, é uma consequência direta de um caso especial das curvas parametrizadas, este conceito é tão relevante dentro do conteúdo de curvas que necessita de uma definição formal matemática, sendo assim, os livros 1 e 2 apresentam esta definição, ou seja, fazem uso da técnica $t_1(T_1Q_2)$, porém Carmo (2012) livro 1, não apresenta exemplos geométricos, técnica $t_2(T_1Q_2)$, aos quais são tão relevantes para o entendimento desta definição, entretanto além de utilizar da técnica $t_2(T_1Q_2)$, Delgado e Frensel (2017) abordam mais uma definição de curva simples, que é uma consequência da definição de curva parametrizada regular, apresentando mais exemplos, e resoluções de tais, sendo um breve aprofundamento do conteúdo, tornando para o estudante que está lendo um bônus de conteúdo ao qual o professor pode trabalhar, o que deixa mais prático os conceitos apresentados.

Além disto, é importante que os livros apresentem dois temas bem importantes dentro da Geometria Diferencial, e por isso elaboramos as técnicas baseadas na organização que os livros podem abordar tais temas. O Carmo (2012) optou por utilizar a técnica $t_2(T_2Q_2)$, então antes da definição apresentou tais conceitos como introdução a definição, e Delgado e Frensel (2017) utilizam a técnica $t_1(T_2Q_2)$, apresentando tais conceitos após a definição, ao analisarmos notamos que se torna mais interessante ao estudante que se apresente primeiro a definição e logo após tais consequências, tendo em vista que de posse da definição essas consequências se tornam imediatos, e antes, pode confundir o estudante com conceitos que não foi lhe apresentado.

Questão 3: Como é abordado do conceito de Parametrização pelo Comprimento de Arco?

-T_1Q_3: Introduzir o conceito

$t_1(T_1Q_3)$: Utilização da Análise Real

$t_2(T_1Q_3)$: Utilização do Cálculo

-T_2Q_3: Definição de curva parametrizada pelo comprimento de arco

$t_1(T_2Q_3)$: Definição formal matemática

$t_2(T_2Q_3)$: Enunciando sem definição em parágrafo
$t_3(T_2Q_3)$: Exemplos geométricos

$[\theta, \Theta]_3$: O discurso teórico-tecnológico que baseiam técnicas das tarefas $\boldsymbol{T_1Q_3}$ **e** $\boldsymbol{T_2Q_3}$, é a apresentação do conceito de parametrização pelo comprimento de arco por meio de caminhos simples que possam direcionar melhor um estudante da graduação, com técnicas menos complexas em que o estudante consiga entender geometricamente e algebricamente os passos utilizados.

Quadro 5: Análise das tarefas da questão 3 (Q_3)

		Livro 1	**Livro 2**
$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{t_1(T_1Q_3)}$		**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_1Q_3)}$	**X**	
$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{t_1(T_2Q_3)}$		**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_2Q_3)}$	**X**	
	$\boldsymbol{t_3(T_2Q_3)}$:		

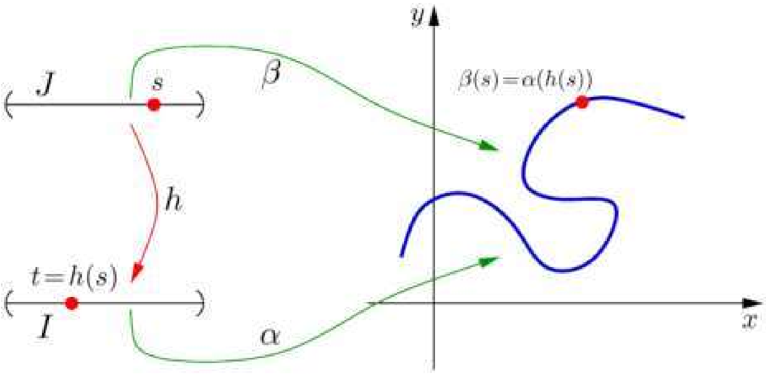
Fonte: Construção nossa (2022)

Para o conceito de Parametrização pelo Comprimento de Arco, é necessário para um curso introdutório, que haja uma breve introdução sobre os temas de parametrização e o que seria o comprimento de arco, ambos podem ser estudados nos cursos de cálculo e análise, diante deste cenário observamos que os livros 1 e 2 seguem caminhos diferentes e interessantes para a introdução deste conteúdo.

No livro 1, Carmo (2012) a partir da definição de curva regular, inicia o próximo parágrafo enunciando o comprimento de arco, utilizando das notações comumente vistas em cálculo com uma linguagem acessível a esses estudantes, porém não utiliza uma revisão sobre tal conteúdo, admitindo que o estudante já tenha estudado. Entretanto Delgado e Frensel (2017), livro 2, utilizam conceitos de análise tanto em uma variável quanto em várias variáveis, sendo assim, o estudante da graduação terá algumas dificuldades em compreender determinados conceitos, além disto, o livro 2 apresentam definições em análise, como mudança de parâmetro, reparametrização, difeomorfismos, orientação, partições, conjuntos ratificáveis.

Abaixo mostraremos uma reparametrização como exemplo de como está elucidado esta proposição contida no livro 2.

Figura 9: Reparametrização de α por h



Fonte: DELGADO; FRENSEL (2017, p.6)

Sendo assim, tais conteúdos e definições podem ser apresentados e estudados dependendo do objetivo do professor, porém como são conceitos mais avançados é interessante uma abordagem menos formal, com mais exemplos e aplicações. Após a apresentação desses temas, é dado a definição formal sobre comprimento de arco, apresentando algumas observações e em seguida a definição sobre curva parametrizada pelo comprimento de arco, neste livro 2, Delgado e Frensel (2017), utilizam uma organização baseada em definição e observações ou preposições, com consequências das definições, tornando interessante ao estudante e ao professor que pode utilizar-se dessas consequências para enriquecer o conhecimento do conteúdo, entretanto é interessante que o professor intermedeie de acordo com o andamento da turma os exemplos e observações que devem demonstrar e apresentar, pois nosso objetivo é em uma disciplina introdutória.

No livro 1, não é fornecido tantas informações sobre o tema, o autor busca uma apresentação breve e sem exemplos, com o foco voltado aos exercícios, que vão fazer os estudantes demonstrar consequências desta definição, toda via, esta forma de aprendizagem é interessante a estudantes da pós-graduação, aos quais poderão utilizar com maestria ferramentas estudadas em cursos de análise em várias variáveis, não se tornando interessante a estudantes da graduação.

Questão 4: Mediante aos conceitos apresentados, como os autores abordam o conceito de Curvatura?

-T_1Q_4: Construção da definição de curvatura

$t_1(T_1Q_4)$: Por meio do Cálculo

$t_2(T_1Q_4)$: Por meio da Álgebra Linear

$t_3(T_1Q_4)$: Por meio de figuras geométricas

-T_2Q_4: Organizar de forma coerente dentro do capítulo

$t_1(T_2Q_4)$: Dentro das formulas de Frenet.

$t_2(T_2Q_4)$: Após o conceito de curva parametrizada pelo comprimento de arco.

$t_3(T_2Q_4)$: Após o conceito de Produto Vetorial.

$[\theta,\Theta]_4$: O tema curvatura é muito importante dentro da geometria diferencial, então é necessário que a abordagem deste conceito esteja estruturado da melhor forma e organizado de uma coerentemente ($\boldsymbol{T_2Q_4}$) dentro do capítulo, e a definição ($\boldsymbol{T_1Q_4}$) bem apresentada, e com isso justificando as técnicas escolhidas dentro deste bloco teórico-tecnológico.

Quadro 6: Análise das tarefas da questão 4 (Q_4)

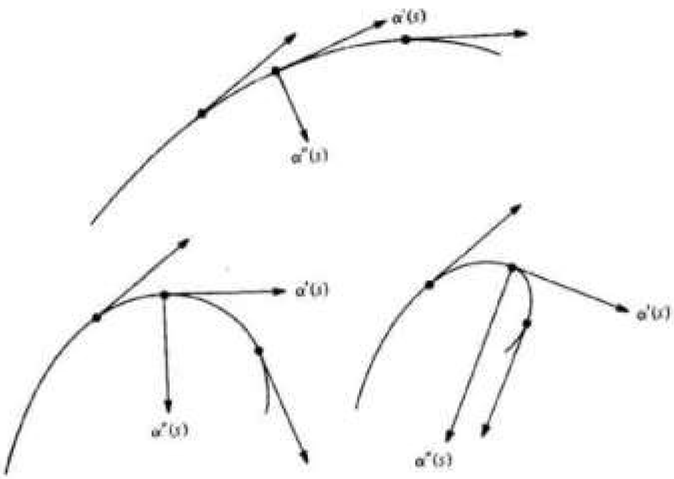
		Livro 1	**Livro 2**
$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{t_1(T_1Q_4)}$	**X**	**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_1Q_4)}$	**X**	**X**
	$\boldsymbol{t_3(T_1Q_4)}$	**X**	
$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{t_1(T_2Q_4)}$		**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_2Q_4)}$		
	$\boldsymbol{t_3(T_2Q_4)}$	**X**	

Fonte: Construção nossa (2022)

Quando estamos falando em curvatura, estamos falando num dos temas mais importantes dentro da Geometria Diferencial, pois com este resultado podemos chegar nos principais teoremas deste conteúdo, então a forma como os livros textos abordam este conceito é de imensa importância para o decorrer da disciplina, sendo assim analisamos por meio da praxeologia a forma organizacional e os caminhos utilizados para a definição formal.

No livro 1, notamos a utilização das três técnicas elaboradas, ou seja, $\boldsymbol{t_1(T_1Q_4)}$, $\boldsymbol{t_2(T_1Q_4)}$ e $\boldsymbol{t_3(T_1Q_4)}$, porém esta definição é posta como primeiro tópico do subcapítulo teoria local de curvas parametrizada pelo comprimento de arco, e após outro subcapítulo denominado produto vetorial, assim o professor que escolher este livro como referência para a disciplina, precisa orientar seus estudantes sobre a organização deste tema dentro deste subcapítulo para que não ocorra confusões durante o processo de aprendizagem deles, este tema como mostrado no mapa mental no início deste trabalho, não requer uma ligação entre o produto vetorial, então Carmo (2012) aplica este conceito após o produto vetorial, com o intuito de apresentar as fórmulas de Frenet, sendo assim, não dedica um espaço maior para o tema curvatura. Entretanto o autor trabalha de forma superficial, porém eficaz para enunciar a definição, utilizando as técnicas mencionadas acima, que alunos da graduação podem compreender o conceito desta definição.

Figura 10: Vetor tangente ($\alpha'(s)$) e curvatura ($\alpha''(s)$)



Fonte: CARMO (2012, p.20)

Delgado e Frensel (2017), livro 2, optam por um caminho diferente, começam abordando alguns resultados dentro do subcapítulo fórmulas de Frenet, ainda sobre curva parametrizada pelo comprimento de arco, constroem resultados que os leva a apresentar a curvatura, entretanto não é apresentado como definição, mas como consequência de resultados algébricos em conjunto com uma notação utilizada no cálculo, por isto que marcamos nas técnicas $\boldsymbol{t_1(T_1Q_4)}$ e $\boldsymbol{t_2(T_1Q_4)}$, além disto, o livro aborda uma observação com a interpretação geométrica da curvatura, mesmo sendo geométrico não é abordado figuras e o plano cartesiano com a curva para que torne mais lúdico ao estudante, e por isso não contemplamos com a $\boldsymbol{t_3(T_1Q_4)}$.

Como observado no livro 1, o livro 2 também não destina um subcapítulo baseado na curvatura, Delgado e Frensel (2017) fazem uma distinção em dois capítulos sobre o conteúdo de curvas em planas e no espaço, temos que ressaltar que no caso das curvas planas este conceito de curvatura é abordado como consequência das fórmulas de Frenet, e no caso das curvas espaciais, segue o mesmo raciocínio do livro 1, abordando o conceito após o produto vetorial como definição no subcapítulo teoria local de curvas no espaço.

Questão 5: Para o andamento do conteúdo é necessário conceitos de Álgebra Linear como o Produto Vetorial, então como é estruturado o Produto Vetorial?

-T_1Q_5: Apresentar o tema

$t_1(T_1Q_5)$: Dentro de um capítulo.

$t_2(T_1Q_5)$: Dentro de outro capítulo à medida que for necessário o uso.

-T_2Q_5: Determinar propriedades do produto vetorial

$t_1(T_2Q_5)$: Demonstração formal matemática.

$t_2(T_2Q_5)$: Demonstração por meio de imagens.

$t_3(T_2Q_5)$: Sem demonstração

$t_4(T_2Q_5)$: Sem demonstração, referenciando um texto que à contenha.

$[\theta, \Theta]_5$: Neste bloco teórico-tecnológico temos que o discurso que o justifica dentro das tarefas $\boldsymbol{T_1Q_5}$ **e** $\boldsymbol{T_2Q_5}$**,** é o suporte para os temas posteriores, principalmente para as fórmulas de Frenet, sendo assim, muitos textos que tratam de curvas tendem a apresentar este tópico para que o leitor se situe com todos os passos construídos dentro das demonstrações.

Quadro 7: Análise das tarefas da questão 5 (Q_5)

		Livro 1	**Livro 2**
$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{t_1(T_1Q_5)}$	**X**	**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_1Q_5)}$		
$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{t_1(T_2Q_5)}$		**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_2Q_5)}$		
	$\boldsymbol{t_3(T_2Q_5)}$	**X**	
	$\boldsymbol{t_4(T_2Q_5)}$		

Fonte: Construção nossa (2022)

O produto vetorial é muito importante para os estudos em curvas e superfícies, logo é importante analisar como esses livros apresentam o tema. Notamos que nos livros 1 e 2, apresentaram o tema utilizando a técnica $\boldsymbol{t_1(T_1Q_4)}$, dando uma pausa no conteúdo e abordando o capítulo, no caso do livro 2, por ser dividido em curvas planas e espaciais, este tema só foi abordado no capítulo sobre curvas espaciais, pois se faz presente em 3 dimensões ou mais o produto vetorial, logo não fará sentido utilizarmos curvas planas em nossa análise.

No produto vetorial temos algumas propriedades muito importantes, como a anti-comutatividade, linearmente dependente (Ld), linearmente independente (Li), entre outros, sendo assim, é interessante que os livros trabalhem essas propriedades para que não precisem estar justificando quando a utilização, então segue disto que estes livros utilizam de um capítulo dedicado ao produto vetorial, para que possam utilizar tais conceitos e propriedades durante o decorrer do livro.

Os autores construíram de forma semelhante o capítulo, diferenciando a forma como demonstraram as propriedades, no livro 2, Delgado e Frensel (2017) demonstram todas as propriedades com uma linguagem bem acessível e comumente visto em Álgebra Linear, porém com todos os passos e aplicações, então mesmo que o estudante não lembre de como é demonstrado ou onde é utilizado estas propriedades, irá relembrar.

Entretanto o livro 1, Carmo (2012) preferiu omitir as demonstrações, afirmando que as mesmas podem ser verificadas sem dificuldades por serem conhecidas dos determinantes, sendo assim fica a cargo do estudante procurar em algum outro livro que aborde o tema, ou para os mais assíduos, fazer as demonstrações a partir dos seus conhecimentos prévios, pode ser interessante para o professor da disciplina pedir que seus alunos demonstrem para por a prova os conhecimentos pré-estudados.

Questão 6: Como está organizado as Fórmulas de Frenet?

-T_1Q_6: Apresentar o tema

$t_1(T_1Q_6)$: Dentro de um capítulo.

$t_2(T_1Q_6)$: Dentro de outro capítulo à medida que for necessário o uso.

-T_2Q_6: Determinar os vetores e constantes

$t_1(T_2Q_6)$: Utilização de Álgebra linear omitindo os passos.

$t_2(T_2Q_6)$: Utilização de Álgebra linear demonstrando todos os passos.

$t_3(T_2Q_6)$: Utilizando proposições e observações apresentando novas consequências dos resultados.

-T_3Q_6: Determinar as fórmulas de Frenet

$t_1(T_3Q_6)$: Organizado em um subtópico.

$t_2(T_3Q_6)$: Após a determinação algébrica dos vetores ortogonais.

$t_3(T_3Q_6)$: Dentro do texto corrido.

$[\theta, \Theta]_6$: Dentro do conteúdo de curvas as formulas de Frenet, tem um papel fundamental da determinação do teorema fundamental, logo as técnicas escolhidas dentro das tarefas $\boldsymbol{T_1Q_6}$, $\boldsymbol{T_2Q_6}$ **e** $\boldsymbol{T_3Q_6}$, são buscando uma organização adequada e bem demonstrada para que o estudante não cometa erros de interpretação, justificando o bloco teórico-tecnológico.

Quadro 8: Análise das tarefas da questão 6 (Q_6)

		Livro 1	**Livro 2**
$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{t_1(T_1Q_6)}$		**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_1Q_6)}$	**X**	**X**
$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{t_1(T_2Q_6)}$	**X**	
	$\boldsymbol{t_2(T_2Q_6)}$		**X**
	$\boldsymbol{t_3(T_2Q_6)}$		**X**
$\boldsymbol{T_3}$	$\boldsymbol{t_1(T_3Q_6)}$		**X**
	$\boldsymbol{t_2(T_3Q_6)}$	**X**	**X**
	$\boldsymbol{t_3(T_3Q_6)}$	**X**	**X**

Fonte: Construção nossa (2022)

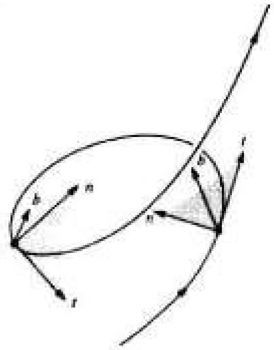
O tema sobre fórmulas de Frenet é a base para o teorema fundamental das curvas, e utiliza dos conceitos anteriores, então nota-se uma grande importância em analisar este tópico, diante disto, notamos alguns pontos em relação a organização e construção que serão muito relevantes para esta análise.

O livro 1 não utiliza um subcapítulo para a construção deste tema ($\boldsymbol{t_1(T_1Q_5)}$), e a partir da definição de curvatura que começa a construção para as fórmulas de Frenet, e mediante aos parágrafos que as equações vão sendo formadas, são omitidas grande parte das construções sem apoio ilustrativo do que esta sendo formado a partir das equações, dificultando ao estudante da graduação, necessitando que o estudante tenha uma certa habilidade de identificar o que está sendo concluído em cada passo que segue, abaixo mostra um exemplo retirado do livro 1.

“Nos pontos onde $k(s) \neq 0$, fica bem definido pela equação $\alpha''(s) = k(s)n(s)$, um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\alpha''(s)$. Além disso, $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$, pois derivado $\alpha'(s)\,.\,\alpha'(s) = 1$ obtemos $\alpha''(s)\,.\,\alpha'(s) = 0$. Assim, $n(s)$ é normal a $\alpha'(s)$ e é chamado o ***vetor normal*** *em s. O plano determinado por $\alpha'(s)$ e $n(s)$ é chamado* ***plano osculador*** *em s.” (CARMO 2012, p.21)*

Em seguida mostra uma ilustração do plano osculador.

Figura 11: Plano Osculador



Fonte: CARMO (2012, p. 21)

Entretanto, mesmo com este auxílio ainda sim pode dificultar a visualização do que está ocorrendo no passo a passo desta construção, e desta forma segue até a apresentação das fórmulas de Frenet, sem mais auxílio de imagem com passagens algébricas.

Com tudo, no livro 2, temos que dividir nossa análise rapidamente em duas partes, a parte com as curvas planas e outra com as curvas espaciais. Nas curvas planas contidas no primeiro capítulo, as fórmulas de Frenet são desenvolvidas em um capítulo que segue a partir da parametrização pelo comprimento de arco, e algebricamente desenvolve os vetores e constantes relevantes para as fórmulas, e enuncia as fórmulas de Frenet em duas dimensões que é composto pelo diedro $\{t(s), n(s)\}$ satisfazendo as seguintes equações:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

Formando as fórmulas de Frenet em uma curva plana.

No caso das curvas espaciais, se faz necessário o uso do produto vetorial, sendo assim, o livro 2 faz todas as passagens demonstrando algebricamente com o uso do produto vetorial, vale ser ressaltado que não é destinado novamente um subcapítulo para as fórmulas e por isto na tabela está marcado as duas técnicas $\boldsymbol{t_1}(\boldsymbol{T_3Q_5})$ e $\boldsymbol{t_3}(\boldsymbol{T_3Q_5})$**,** uma sendo para o caso planar e outra espacial. Como as fórmulas no caso planar já foram desenvolvidos, o livro 2 pauta a busca na terceira coordenada a derivada no binormal, e com o auxílio do produto vetorial, Delgado e Frensel (2017) realizam as demonstrações e observações que vão surgindo mediante as demonstrações, resultando nesta coordenada e na apresentação das fórmulas no espaço, vale ressaltar que o livro ainda apresenta alguns exemplos geométricos para que o estudante consiga observar e entender melhor o funcionamento dessas fórmulas dentro do estudo de curvas, acrescenta a aplicação de algumas atividades que o professor possa pedir que seus alunos resolva após o entendimento destes conceitos.

Questão 7: Como é estruturado o Teorema Fundamental Local das Curvas?

-$\boldsymbol{T_1Q_7}$: Estruturar o Teorema

$t_1(T_1Q_7)$: Em um tópico sem definição.

$t_2(T_1Q_7)$: Em um tópico com definição.

-$\boldsymbol{T_2Q_7}$: Demonstrar o Teorema

$t_1(T_2Q_7)$: Utilizando uma demonstração formal abstrata

$t_2(T_2Q_7)$: Utilização de imagens lúdicas

$t_3(T_2Q_7)$: Utilização de Álgebra Linear

$t_4(T_2Q_7)$: Utilização do Cálculo

$t_5(T_2Q_7)$: Utilização da Análise Real

$t_6(T_2Q_8)$: Utilização de Equações Diferenciais

$[\theta,\Theta]_7$: A discursão que justifica este bloco teórico-tecnológico, é a apresentação do Teorema Fundamental Local das Curvas, tendo como principal observação os métodos utilizados e da estrutura como foi determinado pelos autores, tendo em vista, que estudantes da disciplina na graduação possam compreender os conceitos abordados e como foi feito a demonstração.

Quadro 9: Análise das tarefas da questão 7 (Q_7)

		Livro 1	Livro 2
T_1	$t_1(T_1Q_7)$		
	$t_2(T_1Q_7)$	X	X
T_2	$t_1(T_2Q_7)$	X	X
	$t_2(T_2Q_7)$	X	
	$t_3(T_2Q_7)$	X	X
	$t_4(T_2Q_7)$	X	X
	$t_5(T_2Q_7)$		
	$t_5(T_2Q_8)$	X	X

Fonte: Construção nossa (2022)

Em suma chegamos ao teorema fundamental local das curvas, em nossa análise notamos algumas diferenças entre a estruturação do teorema, porém a maior diferença ficou com relação a demonstração.

No livro 1, Carmo (2012) apresenta o teorema no mesmo escopo que foi apresentado as definições, sendo que agora temos a demonstração do teorema, vale ressaltar que o livro não aborda a demonstração por completa, pois como o próprio autor afirma que a demonstração completa deste teorema exige o conhecimento sobre existência e unicidade de soluções de sistemas de equações ordinárias e que pode ser encontrada no próprio livro em um apêndice, porém utiliza notações e conceitos de análise em várias variáveis que o autor preferiu omitir, entretanto a prova da unicidade é apresentado com uma linguagem um pouco mais robusta, mas que dependendo do nível de conhecimento dos alunos o professor pode apresentar ou omitir e trabalhar apenas com as consequências e as aplicações deste teorema.

No livro 2, Delgado e Frensel (2017) optaram por apresentar o teorema nas curvas planas, e separaram em três tópicos, aos quais são os mesmos do livro 1 sendo no $\mathbb{R}^2$, no caso $\mathbb{R}^2$ o teorema é provado passo a passo de acordo com os tópicos e antes de ser demonstrado o livro apresenta um lema, servindo de auxílio para a prova do teorema, como estamos no caso $\mathbb{R}^2$, a demonstração não precisa de conhecimentos avançados, a demonstração é baseado no cálculo e em álgebra linear, apresentando uma linguagem menos rebuscada e mais acessível para o estudante de graduação.

No caso $\mathbb{R}^3$, o livro 2 utiliza a técnica $\boldsymbol{t_5}(\boldsymbol{T_2 Q_8})$ assim como o Carmo (2012), porém utilizando uma notação menos rebuscada ao estudante de graduação, certamente o mesmo precisa entender os conceitos anteriores para que entenda o processo da demonstração utilizada, e algumas técnicas usadas na Álgebra Linear como derivações de produtos internos, para que seja entendido a demonstração, então ao estudante que estará cursando a disciplina utilizará todos os conhecimentos estudados para o entendimento da demonstração e do teorema, tornando uma ótima prova de conhecimentos ao término do estudo de curvas.

Diante desta análise, notamos que o livro Carmo (2012) inicialmente torna-se um grande material de apoio, utilizando uma notação simples e com grande familiaridade ao estudante da graduação, porém ao decorrer do conteúdo, não aprofunda o necessário para que possa servir de referencia para a disciplina, entretanto, é sob este aspecto que o livro do Delgado e Frensel (2017) atua fortemente, com observações e exemplos, facilitando ao aluno o entendimento, a princípio isso pode assustar alguns estudantes, porém ao decorrer das definições se mostra viável seguir desta forma.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho nos propusermos a uma análise em dois livros textos que são comumente escolhidos por esta disciplina, levando com base na praxeologia a luz da Teoria Antropológica do Didático, buscando compreender qual livro estaria mais adequado a uma disciplina introdutória, tendo como principal objetivo o conteúdo de Curvas Diferenciáveis.

Os livros 1 e 2 se mostraram bem estruturados, seguindo caminhos em momentos, distintos, porém buscando os mesmos resultados, o livro 1 se mostrou mais sucinto, porém com uma linguagem acessível, ressaltando a organização do autor em omitir passos mais avançados e sugerindo capítulos e subcapítulos adequados a diferentes níveis de conhecimento dos estudantes que tem a intenção de ler e estudar. O livro 2 apresentou-se mais completo com todos os passos sendo demonstrados, com observações, em geral, com consequências dos resultados com uma linguagem bem acessível a estudantes da graduação, porém em alguns aspectos abordando conceitos avançados e novos, aos quais não são recomendados a estudantes ainda na graduação.

Entretanto, mesmo com esses aspectos, após nossa análise a luz das técnicas apresentadas, o livro 2 do Delgado e Frensel (2017) se mostrou bem estruturado a um primeiro curso em Geometria Diferencial, apresentando nas definições, construções do passo a passo, e organizando os conteúdos bem determinado, como por exemplo, primeiro apresentando as curvas planas e seus aspectos e após as curvas espaciais com seus aspectos. O livro 1 do Carmo (2012) trabalha o conteúdo de curvas rapidamente para que o estudante possa chegar logo em superfícies que será estudado afundo num curso de pós-graduação, porém inicialmente mostrou-se ser bem elaborado para estudantes que ainda estão na graduação utilizando uma linguagem simples e conhecida do cálculo diferencial. Logo após nossa análise apoiando-se na Teoria Antropológica do Didático sob a organização praxeológica proposta por Yves Chevallard descrevendo a praxeologia sob a ótica das técnicas, tarefas, teoria e tecnologia, concluímos que tanto o livro 1 quanto o livro 2 podem servir de bibliografia para a disciplina de introdução a geometria diferencial, além disso, o docente da disciplina pode utilizar ambos os livros para um suporte mais estruturado nesta disciplina.

Esperamos que possam surgir mais análises em livros didáticos utilizando essa organização praxeológica desenvolvida por Chevallard, auxiliando na seleção de livros didáticos para muitos professores.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; TERTO, L. L. Funções quadráticas nos livros didáticos: um estudo sob a ótica da resolução de problemas. In: CURI, E.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). **Pesquisas e práticas em educação: matemática, física e tecnologias computacionais**. São Paulo: Terracota, 2009. p. 33-50.

Bandeira, A.; Stange, C. E. B.; Santos, J. M. T.; Uma proposta de critérios para análise de livros didáticos de ciências naturais na educação básica. **III simpósio Nacional de Ensino de Ciências e Tecnologia – SINETEC. Ponta Grossa-PR**, 2012.

BARBOSA, E. J.T, **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau**. Tese de doutorado, UFRPE. 2017

Barbosa, E. J. T., & Lima, A. P. A. B. (2019). **Praxeologias do Professor: análise comparativa do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, *33*, 1357-1378.

BITTAR, M**. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos.** São Paulo. Set/dez. 2017, p. 364 – 387

CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro, SBM, 2012. ed. 06.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspective apportèes par une aproche anthropogique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 12, p. 73-112, 1992.

________________. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. Actes de l'U.E. de la Rochelle,** 1998.

_________________. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol 19, nº 2, pp. 221- 266, 1999.

________________. **Organiser l'étude 3: Ecologie et Regulation**. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53. Acesso em: 11 de Agosto de 2021.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, S. G. **Livro Didático de Matemática**: Análise de Professor as
Polivalentes em Relação ao Ensino de Geometria. VIDYA, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez.,
2010, Santa Maria, 2010

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia. **Geometria Diferencial I**. Universidade Federal Fluminense: [s. n.], 2017. 393 p. Disponível em: https://www.professores.uff.br/katiafrensel/wpcontent/uploads/sites/115/delightfuldownloads/2019/09/gdif.pdf. Acesso em: 17 ago. 2021.

FREITAS, M. V. C. **Uma Análise Praxeológica do Ensino de Volume dos Sólidos Geométricos em Livros Didáticos do Ensino Médio**. Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, São Paulo-SP, 13 jul. 2016.

GORODSKI, Claudio. Alguns aspectos do desenvolvimento da geometria. ***Humboldtbrasil***[S.l: s.n.], 2002.

LAJOLO, M. **Livro didático: um (quase) manual do usuário**. In: Em aberto, ano 16, n. 69, Brasília, 1996.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986

NOGUEIRA, C. S. R. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica**. 2008. 125 f. Dissertação (Educação) - A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica, [*S. l.*], 2008.

VIEIRA, R. C. S. **Uma análise praxeológica do conteúdo de semelhança de triângulos em livros didáticos.** Orientador: Dr. Cleiton de Lima Ricardo. 2019. 52 p. TCC (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru-PE, 2019.

SAUTER, E.; AZEVEDO F. S.; KONSEN P. H. A. **Calculo Vetorial.** Texto colaborativo, UFRGS, 2021, p. 46. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo/livro-cv/livro.pdf, Acesso em: 08 Abr. 2021

ZANETTE, M. S. (2017). **Pesquisa qualitativa no contexto da Educação no Brasil**. Educar em Revista, 149-166.