UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Carlos Henrique Gonzaga de Oliveira Paiva

O Grupo Simplético na Estabilidade de Gelfand-Lidskii

Recife

2022

Carlos Henrique Gonzaga de Oliveira Paiva

O Grupo Simplético na Estabilidade de Gelfand-Lidskii

Trabalho apresentado ao programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Hildeberto Eulalio Cabral

Recife

2022

Catalogação na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

P149g Paiva, Carlos Henrique Gonzaga de Oliveira
O grupo simplético na estabilidade de Gelfand-Lidskii / Carlos Henrique Gonzaga de Oliveira Paiva. – 2022.
80 f.

Orientador: Hildeberto Eulalio Cabral.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2022.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Grupo simplético. 3. Teoremas de Krein-Gelfand-Lidskii. 4. Índice de Gelfand-Lidskii. I. Cabral, Hildeberto Eulalio (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 64

CARLOS HENRIQUE GONZAGA DE OLIVEIRA PAIVA

O Grupo Simplético na Estabilidade de Gelfand-Lidskii

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 21/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Thiago Dias Oliveira Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Hildeberto pela orientação desta dissertação. Foi muito prazeroso trabalhar com uma pessoa tão dedicada e entusiasmada com a matemática. Também, agradeço ao CNPQ pelo apoio deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar o papel que o grupo simplético desempenha no estudo dos sistemas Hamiltonianos periódicos lineares fortemente estáveis. Para isso, iremos fazer uso de ideias desenvolvidas por Krein, Gelfand e Lidskii no século passado e recentemente trabalhadas sob um novo ponto de vista na referência [1]. Iremos identificar um sistema Hamiltoniano linear periódico fortemente estável $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ com a sua matriz $\mathcal{A}(t)$ que chamaremos de matriz fortemente estável. Relacionaremos a este sistema o índice de Gelfand-Lidskii $n(\mathcal{A})$, que será a classe de homotopia do caminho fechado $\mathcal{Q}(t)$ no grupo fundamental do grupo simplético, onde $\mathcal{Q}(t)$ é a matriz periódica numa decomposição de Floquet $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$ do matrizante da equação $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$. Diremos que duas matrizes fortemente estáveis $\mathcal{A}_1(t)$ e $\mathcal{A}_2(t)$ estão no mesmo domínio de estabilidade se existir uma homotopia ligando ambas de modo que cada elemento da homotopia também seja uma matriz fortemente estável. O índice de Gelfand-Lidskii nos dará uma maneira de classificar os domínios de estabilidade.

Palavras-chaves: grupo simplético; sistemas Hamiltonianos periódicos lineares fortemente estáveis; teoremas de Krein-Gelfand-Lidskii; índice de Gelfand-Lidskii.

ABSTRACT

In this work we study the role of the symplectic group in the study of strongly stable linear Hamiltonian systems with periodic coefficients. To this end we follow the ideas developed by Krein, Gelfand and Lidskii in the last century and recently work out from a new point of view in the reference [1]. We will identify a strongly stable linear Hamiltonian system with periodic coefficients $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ with the coefficient matrix $\mathcal{A}(t)$ which we will call a strongly stable matrix. We assign to such a system the Gelfand-Lidskii index $n(\mathcal{A})$ which is the homotopy class in the fundamental group of the symplectic group of the closed path $\mathcal{Q}(t)$ in the symplectic group, where $\mathcal{Q}(t)$ is the periodic matrix in a Floquet decomposition $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$ of the matrizant of the equation $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$. We say that two strongly stable matrices $\mathcal{A}_1(t)$ and $\mathcal{A}_2(t)$ belong to the same stability domain if there exists a homotopy connecting them in such a way that each element of the homotopy is also a strongly stable matrix. The Gelfand-Lidskii index will give us a way of classifying the domains of stability.

Keywords: symplectic group; strongly stable linear Hamiltonian systems; theorems of Krein-Gelfand-Lidskii; Gelfand-Lidskii index.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO . . . 8

2 O GRUPO SIMPLÉTICO . . . 11

2.1 INTRODUÇÃO . . . 11

2.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS . . . 11

2.3 O GRUPO SIMPLÉTICO . . . 16

2.4 MATRIZES HAMILTONIANAS . . . 21

2.5 O COLCHETE DE POISSON . . . 22

2.6 ESPAÇOS SIMPLÉTICOS . . . 24

2.7 FORMA NORMAL DE UMA MATRIZ HAMILTONIANA . . . 31

3 A TEORIA DE GELFAND-LIDSKII . . . 40

3.1 INTRODUÇÃO . . . 40

3.2 PRELIMINARES . . . 40

3.2.1 A Exponencial de uma Matriz . . . 40

3.2.2 Sistemas Lineares . . . 42

3.3 LOGARITMO DE UMA MATRIZ SIMPLÉTICA . . . 43

3.4 ESTABILIDADE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS LINEARES PERIÓDICOS . . . 45

3.5 A DECOMPOSIÇÃO DE FLOQUET DE UM SISTEMA HAMILTONIANO PERIÓDICO LINEAR . . . 49

3.6 OS TEOREMAS DE KREIN-GELFAND-LIDSKII . . . 54

3.6.1 O Primeiro Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii . . . 54

3.6.2 O Segundo Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii . . . 56

3.6.3 O Terceiro Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii . . . 62

3.7 A TEORIA DE GELFAND-LIDSKII . . . 63

3.7.1 Prelúdio: o Grupo Fundamental do Grupo Simplético . . . 63

3.7.2 Interlúdio: o Índice de Gelfand-Lidskii . . . 65

3.7.3 Epílogo: uma Fórmula para o Índice de Gelfand-Lidskii . . . 76

REFERÊNCIAS . . . 80

1 INTRODUÇÃO

O estudo da *estabilidade* de um *equilíbrio* de um *sistema mecânico* é um problema de considerável importância. Quando a *parte quadrática* do *Hamiltoniano* que descreve a *dinâmica* do sistema não é *definida positiva (ou negativa)* temos um problema difícil de ser tratado. Quando o sistema tem dois *graus de liberdade*, um teorema de *Arnold* permite analisar a estabilidade do equilíbrio, mas para sistemas com mais de dois graus de liberdade ou para sistemas que dependem do tempo o problema da estabilidade de um equilíbrio não conta com nenhum resultado semelhante e é portanto extremamente difícil. Nesse caso torna-se um problema relevante a análise da estabildade do *sistema linearizado* numa vizinhança do equilíbrio. Essa necessidade já era percebida muito antes do teorema de Arnold. A escola russa da década de 1950, continuando os trabalhos de *Lyapunov* no século dezenove, deu um grande avanço nesses estudos, principalmente com os trabalhos de *Krein*, *Gelfand* e *Lidskii*. Esse é o tema desta dissertação. Uma referência muito importante que cobre bem esses estudos é o livro (bastante denso) de *Yakubovich* e *Starzhinskii* intitulado de *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*.

No capítulo 2 estudaremos o *grupo simplético*. Veremos que o grupo simplético surge de forma muito natural ao estudarmos as mudaças de variáveis que preservam *sistemas Hamiltonianos*. Uma vez apresentado o grupo simplético, demonstraremos algumas das suas propriedades básicas. A seguir faremos o estudo das *matrizes Hamiltonianas* que irá desempenhar um papel fundamental em todo o texto.

Definimos em $\mathbb{K}^{2n}$ o chamado *colchete de Poisson*, como sendo a *forma bilinear*, denotada por $\{\,,\}$, definida como $\{\mathbf{z}, \mathbf{w}\} = \mathbf{z}^\intercal \mathcal{J} \mathbf{w}$. O colchete de Poisson é uma forma bilinear *antissimétrica não degenerada*; mais geralmente, chamaremos uma forma bilinear antissimétrica não degenerada ω num *espaço vetorial* V de *forma simplética*. Dizemos que V munido da forma ω é um *espaço simplético*. Partindo disso, estudaremos a *álgebra linear simplética*.

Por fim, dedicaremos as últimas páginas do capítulo 2 ao estudo de uma *forma normal* para uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{A}$ dada. Para isso, dividiremos os autovalores de $\mathcal{A}$ em três grupos; reais: $\alpha_1, ..., \alpha_k$, imaginários puros: $i\beta_1, ..., i\beta_l$ e complexos que possuem parte real não nula: $\gamma_1 + i\delta_1, ..., \gamma_s + i\delta_s$. Com isso, denotando $\eta(\lambda)$ como o autoespaço relacionado ao autovalor

λ, encontraremos uma *forma canônica* para a restrição de $\mathcal{A}$ aos seguintes subespaços:

$$U_j = \eta(-\alpha_j) \oplus \eta(\alpha_j), \quad V_j = \eta(i\beta_j) \oplus \eta(i\beta_j)$$
$$Z_j = [\eta(\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(\gamma_j - i\delta_j)] \oplus [\eta(-\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(-\gamma_j - i\delta_j)].$$

O nosso caso de maior interesse vai ser o de encontrar a forma normal de $\mathcal{A}$ restrita a cada V_j. E esse será o caso que estudaremos mais a fundo. Seguindo nessa linha, iremos considerar o caso em que temos um autovalor imaginário puro $i\beta$ de $\mathcal{A}$ com multiplicidade igual a k. Com isso, devemos considerar o subespaço $U = \eta^\dagger(i\beta) \oplus \eta^\dagger(-i\beta)$, onde $\eta^\dagger(i\beta)$ é o *autoespaço generalizado* com respeito ao autovalor $i\beta$, e daí teremos também uma forma canônica para $\mathcal{A}$ restrita a U. Isso nos será de extrema utilidade no capítulo seguinte.

No capítulo 3 estudaremos os *sistemas Hamiltonianos lineares periódicos*. Começaremos analisando quando um tal sistema é estável e depois veremos quando é fortemente estável. Em particular, demonstraremos os *teoremas de Krein-Gelfand-Lidskii* que nos darão condições necessárias e suficientes para que tenhamos a estabilidade forte.

Para um sistema Hamiltoniano periódico linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x} \tag{1.1}$$

com *matrizante* $\mathcal{X}(t)$, temos uma *decomposição de Floquet* $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$; que nesse caso pode ser tomada como $\mathcal{Q}(t)$ sendo *simplética* 2τ-periódica e $\mathcal{B}$ Hamiltoniana real. Quando tivermos a estabilidade forte, o *índice de Gelfand-Lidskii* $n(\mathcal{A})$ de tal sistema será definido como a *classe* da *curva fechada* $\mathcal{Q}(t)$ no *grupo fundamental* do grupo simplético. Tal índice não dependenderá da decomposição de Floquet que tomemos.

Identificaremos o sistema (1.1) com sua matriz $\mathcal{A}(t)$, e dizermos que $\mathcal{A}(t)$ é fortemente estável quando tal sistema for fortemente estável. Desse modo, dizemos que duas matrizes $\mathcal{A}_1(t)$ e $\mathcal{A}_2(t)$ fortemente estáveis estão no mesmo *domínio de estabilidade* se existir uma *homotopia* $\mathcal{A}(t,s)$ ligando ambas com a propriedade de que $\mathcal{A}(t,s)$ é fortemente estável para todo s.

Além disso, fazendo uso de um dos teoremas Krein-Gelfand-Lidskii quando tivermos a estabilidade forte de (1.1), teremos que os autovalores de $\mathcal{B}$ serão todos imaginários puros não nulos; e como $\mathcal{B}$ é tomada como real, para cada autovalor teremos que o seu conjugado também será um autovalor. Com isso, supondo que $\pm i\omega_1, ..., \pm i\omega_n$ são tais autovalores com $\omega_1 \geq ... \geq \omega_n > 0$, definiremos a assinatura do sistema (1.1) como sendo o vetor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_n)$, onde $\delta_j = \{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$ para um autovetor qualquer $\mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$ de $i\omega_j$. Veremos que a assinatura está bem definida e que não depende da decomposição de Floquet. Ainda, teremos o conceito de disposição do sistema (1.1). Um dos nossos objetivos será o de provar os dois *teoremas de Gelfand-Lidskii*. O primeiro teorema diz que o domínio de estabilidade de uma matriz fortemente estável $\mathcal{A}(t)$ é dado pelas matrizes fortemente estáveis com o mesmo índice e a mesma assinatura de $\mathcal{A}(t)$; o segundo teorema tem o mesmo enunciado trocando-se somente a assinatura pela disposição. Por fim, apresentaremos uma fórmula para o índice de Gelfand-Lidskii de $\mathcal{A}(t)$.

2 O GRUPO SIMPLÉTICO

2.1 INTRODUÇÃO

O *grupo simplético* desempenha um papel fundamental na mecânica, principalmente no contexto da *teoria dos sistemas Hamiltonianos*, de que tratamos na Seção 2.2. O grupo simplético é formado pelas *matrizes simplétias* e será estudado na Seção 2.3. Às matrizes simpléticas está relacionado outro tipo de matrizes que veremos na Seção 2.4, as *matrizes Hamiltonianas*. Ao longo do texto ficará claro que estudar "coisas Hamiltonianas" mais ou menos equivale a estudar "coisas simpléticas". Depois, estudaremos os *espaços simpléticos* e a *álgebra linear simplética*. Por fim, na última seção estudaremos a *forma normal* para uma matriz Hamiltoniana real $\mathcal{A}$. Sendo m a ordem da matriz quadrada $\mathcal{A}$, vamos escrever $\mathbb{C}^m$ como soma direta de subespaços $\mathcal{A}$-invariantes nos quais a expressão de $\mathcal{A}$ é bem simples. Esse último passo será muito importante para o próximo capítulo, no qual estudaremos a *teoria de Gelfand-Lidskii* relativa à *estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares periódicos*.

2.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS

Um *sistema Hamiltoniano* é um *sistema de equações diferenciais ordinárias* da forma

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}, \tag{2.1}$$

onde $H = H(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, t)$ é uma função diferenciável definida em algum aberto de $\mathbb{R}^{2n+1}$ assumindo valores reais. A função H é chamada de *função Hamiltoniana* ou, simplesmente, *Hamiltoniano* do sistema (2.1).

Usaremos as seguintes notações:

$$H_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} H := \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial x_n}\right), \quad H_{\mathbf{y}} = \nabla_{\mathbf{y}} H := \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial y_n}\right).$$

Além disso, escrevemos $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ como $\nabla_{x_i} H$. Denotemos por $\mathcal{J}_{2n}$ a matriz $\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I}_n \\ -\mathcal{I}_n & 0 \end{pmatrix}$, onde $\mathcal{I}_n$ é a matriz identidade $n \times n$. Escreveremos $\mathcal{I}_n$ e $\mathcal{J}_{2n}$ simplesmente como $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$, respectivamente, a menos que se faça necessária menção sobre a ordem de tais matrizes. Fazendo uso de tais definições, podemos escrever o sistema (2.1) como

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -H_{\mathbf{x}};$$

ou, de forma mais compacta:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J}\nabla H,$$

com ∇H sendo o gradiente de H, isto é, $\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial y_n}\right)$.

Neste capítulo estaremos considerando Hamiltonianos autônomos, ou seja, Hamiltonianos que não dependam diretamente da variável t. Sendo assim, neste capítulo usaremos a notação $H(\mathbf{z}) = H(x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n)$ para designarmos um Hamiltoniano. O caso não autônomo é bem mais difícil de ser estudado. Mas no contexto específico da teoria de Gelfand-Lidskii iremos considerar sistemas Hamiltonianos não autônomos.

Agora, vejamos alguns exemplos de sistemas Hamiltonianos.

Exemplo 2.1. *Sejam n pontos materiais (partículas) $P_1, ..., P_n$ no espaço, onde cada P_i possui massa m_i e vetor posição $\mathbf{x}_i$. Suponhamos que no sistema formado por tais particulas esteja atuando uma força derivada de um potencial $V(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$. A segunda Lei de Newton nos diz que*

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.2}$$

Fazendo a substituição $\mathbf{y}_i = m_i\dot{\mathbf{x}}_i$, obtemos o vetor momento $\mathbf{y}_i$ da i-ésima partícula. Com isso, transformamos o sistema (2.2) *no sistema de primeira ordem*

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{m_i}\mathbf{y}_i, \quad \dot{\mathbf{y}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.3}$$

Para vermos que tal sistema é um sistema Hamiltoniano, denotando $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n)$, basta definirmos

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i}||\mathbf{y}_i||^2 + V(\mathbf{x}).$$

A partir daí, o sistema (2.3) *é equivalente a*

$$\dot{x}_i = \nabla_{\mathbf{y}_i} H, \quad \dot{\mathbf{y}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} H, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Além disso, a expressão $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i}||\mathbf{y}_i||^2$ é a energia cinética do sistema (2.2)*. Desse modo, temos a igualdade*

$$H = T + V.$$

Assim, o Hamiltoniano neste exemplo nos dá a energia do sistema (2.2)*.*

Exemplo 2.2 (Problema dos n corpos). *Consideremos o sistema formado por n particulas $P_1, ..., P_n$, onde as únicas forças em tal sistema são as forças gravitacionais que cada partícula exerce em todas as outras do sistema. Como antes, suponhamos que cada partícula P_i tenha massa m_i e esteja na posição $\mathbf{x}_i$ do espaço. Pelos estudos de Newton, a intensidade da força entre as partículas P_i e P_j é dada por*

$$F_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||^2},$$

onde G é a constante da gravitação universal. Para fazer sentido a expressão $\frac{Gm_i m_j}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||^2}$, devemos nos restringir ao subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por Δ^c (para um conjunto qualquer X, estamos denotando por X^c o complemento de X), sendo Δ o conjunto dos pontos no espaço onde $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$, se $i \neq j$; ou seja, Δ consiste nos pontos do espaço onde os corpos $P_1, ..., P_n$ colidem, o chamado conjunto de colisão. Desse modo, a força em termos vetoriais que P_i exerce em P_j é dada por $\mathbf{F}_{ij} = F_{ij}\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||} = \frac{Gm_i m_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||^3}$. Consequentemente, usando a segunda Lei de Newton, e somando as forças que cada partícula recebe, chegamos ao sistema de equações em Δ^c constituído por

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{Gm_i m_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||^3}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{2.4}$$

Fazendo $V = \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{Gm_i m_j}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||}$, o sistema (2.4) *torna-se equivalente a*

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Isto é, V é o potencial do sistema (2.4). *Sendo assim, caímos na situação do exemplo anterior. Consequentemente, o sistema* (2.4) *é um sistema Hamiltoniano. Nesse caso, tomando $\mathbf{y}_i = m_i\dot{\mathbf{x}}$ o momento da particula P_i, podemos concluir que* (2.4) *pode ser escrito como*

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}_i}, \quad \dot{\mathbf{y}}_i = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{Gm_i m_j(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j||^3} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\},$$

com $H = T + V$, onde T é a energia cinética do sistema.

Exemplo 2.3. *Consideremos o sistema cartesiano no plano e um segundo sistema de coordenadas com a mesma origem do plano cartesiano, mas com a propriedade de que tal sistema esteja em rotação em torno da origem com uma velocidade angular constante igual a ω. Por conseguinte, os vetores unitários nos eixos das coordenadas nesse último sistema são dados em função do tempo por $\mathbf{e}_1(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t)$, $\mathbf{e}_2(t) = (-\sin\omega t, \cos\omega t)$. Consideremos o* *problema de estudar a dinâmica de uma partícula em tal sistema de coordenadas, na qual age uma força derivada de um potêncial V. Tal problema consiste em estudar a equação*

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla V,$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição da partícula com respeito ao sistema de coordenadas que está em rotação. Escrevendo $\mathbf{r} = \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2$ e usando que $\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega\mathbf{e}_2$, $\dot{\mathbf{e}}_2 = -\omega\mathbf{e}_1$, obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi)\mathbf{e}_1 + (\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta)\mathbf{e}_2.$$

Donde, tomando $V = \frac{\partial V}{\partial \xi}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial \eta}\mathbf{e}_2$, a equação $\ddot{\mathbf{r}} = \nabla V$ torna-se equivalente a

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2\xi = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2\eta = \frac{\partial V}{\partial \eta}. \tag{2.5}$$

Fazendo uso da substituição de variáveis $x_1 = \xi$, $x_2 = \eta$, $y_1 = \dot{\xi} - \omega\eta$, $y_2 = \dot{\eta} + \omega\xi$, e tomando

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \omega(x_2y_1 - x_1y_2) - V(x_1.x_2),$$

o sistema (2.5) *transforma-se em*

$$\dot{x}_1 = H_{y_1}, \quad \dot{x}_2 = H_{y_2}, \quad \dot{y}_1 = -H_{x_1}, \quad \dot{y}_2 = -H_{x_2}.$$

Denotando por $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ um vetor genérico em $\mathbb{R}^{2n}$, consideremos uma mudança de variáveis (a qual estaremos supondo ser pelo menos C^1)

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{y} = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \tag{2.6}$$

com $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ variáveis dependendo do tempo. Estudemos quando tal mudança de variáveis preserva qualquer sistema Hamiltoniano dado; isto é, sendo $\mathbf{z} = \mathcal{J}\nabla H$ um sistema Hamiltoniano, quando H considerada como função nas variáveis $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é ainda um Hamiltoniano em tais variáveis; ou seja, quando a função $H^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H(\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ satisfaz

$$\dot{\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{v}} H^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} = -\nabla_{\mathbf{u}} H^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{2.7}$$

Derivando as expressões $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ com respeito ao tempo, o que conseguimos são as expressões

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{x}_{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{y}_{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}}, \tag{2.8}$$

com $\mathbf{x_u} = \mathbf{x_u}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sendo a *matriz Jacobiana* da função na variável $\mathbf{u}$ dada por $\phi_\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Também, escrevemos como $D_\mathbf{u}\phi$ tal matriz Jacobiana. De forma análoga definimos $\mathbf{x_v}$. Escrevendo o sistema (2.8) na forma matricial, ficamos com

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix}, \text{ onde } \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_u} & \mathbf{x_v} \\ \mathbf{y_u} & \mathbf{y_v} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Agora, a partir de $H^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H(\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$, e tomando um vetor $\mathbf{w}$ em $\mathbb{R}^n$, chegamos em

$$\begin{aligned} \langle H^*_\mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle &= D_\mathbf{u} H^* \mathbf{w} = D_\mathbf{x} H(D_\mathbf{u}\phi\, \mathbf{w}) + D_\mathbf{y} H(D_\mathbf{u}\psi\, \mathbf{w}) \\ &= \langle H_\mathbf{x}, \mathbf{x_u w} \rangle + \langle H_\mathbf{y}, \mathbf{y_u w} \rangle = \langle \mathbf{x_u^\intercal} H_\mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{y_u^\intercal} H_\mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente, $\langle H^*_\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x_v^\intercal} H_\mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{y_v^\intercal} H_\mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle$. Consequentemente,

$$H^*_\mathbf{u} = \mathbf{x_u^\intercal} H_\mathbf{x} + \mathbf{y_u^\intercal} H_\mathbf{y}, \quad H^*_\mathbf{v} = \mathbf{x_v^\intercal} H_\mathbf{x} + \mathbf{y_v^\intercal} H_\mathbf{y}.$$

Matricialmente, ficamos com a expressão

$$\begin{bmatrix} H^*_\mathbf{u} \\ H^*_\mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathcal{M}^\intercal \begin{bmatrix} H_\mathbf{u} \\ H_\mathbf{v} \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

De (2.10), obtemos que $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathcal{J}\nabla H^*$ é equivalente a $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathcal{J}\mathcal{M}^\intercal \nabla H$, a qual, por sua vez, implica em $\mathcal{M} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^\intercal \nabla H$. Logo, usando (2.9), conclui-se que $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^\intercal \nabla H$. Por consequência, da expressão $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \mathcal{J}\nabla H$, chega-se a

$$\mathcal{J}\nabla H = \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^\intercal \nabla H.$$

Uma vez que essa expressão vale para qualquer que seja o Hamiltoniano H, considerando $H_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = x_i$, se $i \in \{1, ..., n\}$ ou $H_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = y_i$, caso $i \in \{n+1, ..., 2n\}$, e substituindo na expressão acima, concluímos que

$$\mathcal{J} = \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^\intercal. \tag{2.11}$$

Desse modo, o que mostramos foi que se a mudança de variáveis (2.6) preserva qualquer sistema Hamiltoniano; ou seja, se vale a relação (2.7) para qualquer Hamiltoniano H, então valerá a relação (2.11).

Reciprocamente, suponhamos que a relação (2.11) seja válida. A partir daí,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}\nabla H = \mathcal{J}\mathcal{M}^{\intercal}\nabla H = \mathcal{J}\nabla H^{*}.$$

Concluímos, portanto, que a mudança de variáveis (2.6) preserva qualquer Hamiltoniano se, e somente se, a sua matriz Jacobiana $\mathcal{M}$ satisfaz a relação (2.11).

2.3 O GRUPO SIMPLÉTICO

Para um corpo $\mathbb{K}$, denotemos por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes $n \times m$ sobre $\mathbb{K}$. Quando $n = m$, usaremos a notação $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Tendo em vista tudo o que foi feito até então, consideremos o conjunto das *matrizes simpléticas* de ordem $2n$

$$Sp(2n,\mathbb{R}) := \{\mathcal{M} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) : \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^{\intercal} = \mathcal{J}\}.$$

Portanto, estudar o conjunto $Sp(2n,\mathbb{R})$ é equivalente a estudar as mudanças de variáveis que preservam sistemas Hamiltonianos; daí a importância fundamental de se estudar tal conjunto.

A matriz $\mathcal{J}$ (que é simplética) é chamada de *matriz simplética canônica*. As seguintes propriedades de $\mathcal{J}$, de verificações imediatas, serão usadas ao longo de todo o texto:

$$\mathcal{J}^2 = -\mathcal{I}, \quad \mathcal{J}^{\intercal} = -\mathcal{J}, \quad \mathcal{J}^{-1} = -\mathcal{J}, \quad \mathcal{J}^{\intercal}\mathcal{J} = \mathcal{I}.$$

Devemos perceber que a relação (2.11) equivale a

$$\mathcal{M}^{\intercal}\mathcal{J}\mathcal{M} = \mathcal{J}. \tag{2.12}$$

Provemos tal afirmativa. Aplicando a função determinante em ambos os lados da equação (2.11), concluímos que $det(\mathcal{M})$ é igual a 1 ou -1. Com isso, supondo a validade de (2.11), o que temos é

$$\mathcal{M}^{\intercal}\mathcal{J}\mathcal{M} = (\mathcal{M}\mathcal{J})^{-1}(\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^{\intercal})\mathcal{J}\mathcal{M} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{J}\mathcal{J}\mathcal{M} = -\mathcal{J}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{J}.$$

Reciprocamente, suponhamos que vale (2.12), e denotemos $\mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^\intercal$. Multiplicando ambos os lados dessa igualdade por $\mathcal{M}^\intercal\mathcal{J}$ e usando a hipótese, chegamos na expressão $\mathcal{J}^2\mathcal{M}^\intercal = \mathcal{M}^\intercal\mathcal{J}\mathcal{A}$, a qual é equivalente a $-\mathcal{M}^\intercal = \mathcal{M}^\intercal\mathcal{J}\mathcal{A}$. Por fim, multiplicando ambos os lados por $\mathcal{M}^{-\intercal}\mathcal{J}^{-1}$, encontramos $\mathcal{A} = -\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}$. Temos, portanto, a equivalência desejada.

Transformações que satisfazem a relação (2.11) são chamadas de *transformações simpléticas.*

Ao trabalharmos com uma matriz $\mathcal{M}$ quadrada de ordem $2n$, escrevemos $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$, com $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ matrizes $n \times n$.

A proposição seguinte nos dirá, em particular, que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é um grupo; e o chamaremos de *grupo simplético* de ordem $2n$. Quando estiver clara a ordem, usaremos apenas o termo grupo simplético.

Proposição 2.1. *Para o conjunto $Sp(2n, \mathbb{R})$, temos as seguintes proposições:*

(a) *As matrizes $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são simpléticas.*

(b) *Se $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in Sp(2n, \mathbb{R})$, então $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 \in Sp(2n, \mathbb{R})$.*

(c) *De $\mathcal{M} \in Sp(2n, \mathbb{R})$, chega-se a $\mathcal{M}^\intercal, -\mathcal{M} \in Sp(2n, \mathbb{R})$.*

(d) *Caso $\mathcal{M} \in Sp(2n, \mathbb{R})$, vale que $\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{J}\mathcal{M}^\intercal\mathcal{J}^{-1}$, e, consequentemente, $\mathcal{M}^{-1} \in Sp(2n, \mathbb{R})$.*

(e) *Suponhamos que $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{2n}$, e que $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$. Com isso, $\mathcal{M} \in Sp(2n, \mathbb{R})$ se, e somente se*

$$\mathcal{A}^\intercal\mathcal{C} = \mathcal{C}^\intercal\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}^\intercal\mathcal{D} = \mathcal{D}^\intercal\mathcal{B}, \quad \mathcal{A}^\intercal\mathcal{D} - \mathcal{C}^\intercal\mathcal{B} = \mathcal{I}. \tag{2.13}$$

A condição acima pode ser substituída pelas igualdades

$$\mathcal{A}\mathcal{B}^\intercal = \mathcal{B}\mathcal{A}^\intercal, \quad \mathcal{C}\mathcal{D}^\intercal = \mathcal{D}\mathcal{C}^\intercal, \quad \mathcal{A}\mathcal{D}^\intercal - \mathcal{B}\mathcal{C}^\intercal = \mathcal{I}. \tag{2.14}$$

Demonstração. A prova destes cinco itens consiste apenas de fáceis verificações. O item (e), em particular, prova-se fazendo-se uso das relações (2.11) e (2.12). □

Exemplo 2.4. *Um exemplo importante de transformação simplética é o que define as coordenadas ação-ângulo $I_k = \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2),\ \theta_k = \mathbf{arctan}(\frac{y_k}{x_k}),\ \ k = 1, ..., n$ dada por:*

$$x_k = \sqrt{2I_k}\,\boldsymbol{cos}(\theta_k), \quad y_k = \sqrt{2I_k}\,\boldsymbol{sen}(\theta_k), \quad k = 1, ..., n,$$

com $\mathbf{I} = (I_1, ..., I_n)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_n)$. *Fazendo uso das relações* (2.14)*, é fácil ver que as funções* $\phi(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}$ *e* $\psi(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}$ *constituem uma transformação simplética.*

Já sabemos que o determinante de uma matriz simplética real $\mathcal{M}$ é igual a 1 ou -1. Vamos provar que temos $det(\mathcal{M}) = 1$. Para isso, precisaremos da proposição a seguir.

Proposição 2.2. *Para uma matriz real inversível* $\mathcal{A}$*, existem duas decomposições*

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{O}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{O}'\mathcal{P}',$$

com $\mathcal{P}$*,* $\mathcal{P}'$ *positivas definidas e* $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ *ortogonais. Ainda, se* $\mathcal{A}$ *for simplética, então* $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{O}, \mathcal{O}'$ *serão simpléticas.*

Demonstração. Comecemos percebendo que uma matriz real positiva definida e simétrica possui uma raíz positiva definida. De fato, suponhamos que $\mathcal{B}$ seja positiva definida e simétrica. Sendo $\mathcal{B}$ real e simétrica, existe uma matriz inversível $\mathcal{P}$ com $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{P} = diag[\lambda_1, ..., \lambda_n]$, e cada λ_j sendo real. Além disso, como $\mathcal{B}$ é positiva definida, cada λ_j é positivo. Com isso, $\mathcal{P}\, diag[\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}]\mathcal{P}^{-1}$ é raíz de $\mathcal{B}$. Ainda, Como o produto de matrizes positivas definidas é positiva definida e $\mathcal{P}^{-1}$ e $diag[\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}]$ são positivas definidas, segue que $\mathcal{P}^{-1}diag[\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}]\mathcal{P} = \mathcal{B}$ é positiva definida.

$\mathcal{A}\mathcal{A}^\intercal$ e $\mathcal{A}^\intercal\mathcal{A}$ são positivas definidas e simétricas. Dessa maneira, tomemos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ raízes positivas definidas de $\mathcal{A}\mathcal{A}^\intercal$ e $\mathcal{A}^\intercal\mathcal{A}$, respectivamente. A partir daí, sejam $\mathcal{O} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ e $\mathcal{O}' = \mathcal{A}(\mathcal{P}')^{-1}$. Verifica-se facilmente que $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ são ortogonais. Consequentemente, temos as decompoisições desejadas $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{O}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{O}'\mathcal{P}'$.

Agora, provemos a unicidade. Para isso, suponhamos que tenhamos outra decomposição $\mathcal{A} = \mathcal{P}_1\mathcal{O}_1$, de modo que $\mathcal{P}_1$ seja positiva definida e $\mathcal{O}_1$ ortogonal. Logo, $\mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{P} = \mathcal{O}_1\mathcal{O}^{-1}$. Denotemos $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}_1\mathcal{O}^{-1}$. $\mathcal{O}^*$ é trivialmente ortogonal; Consequentemente, todos os seus autovalores são complexos de norma 1. Porém, se $\mathcal{O}^*\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, então $\mathcal{P}\mathbf{v} = \lambda\mathcal{P}_1\mathbf{v}$; o que implica que $\langle\mathcal{P}\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \lambda\langle\mathcal{P}_1\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$. Portanto, como $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ são positiva definidas, $\lambda = 1$. Com isso, para todo autovetor $\mathbf{v}$ de $\mathcal{O}^*$, tem-se que $\mathcal{O}^*\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Consequentemente, uma vez que toda matriz ortogonal é diagonalizável, $\mathcal{O} = \mathcal{I}$, e, portanto, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$. De modo análogo mostra-se a unicidade da segunda decomposição.

Por fim, mostremos que se $\mathcal{A}$ é simplética, então $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{O}, \mathcal{O}'$ são simpléticas. Sendo $\mathcal{A}$ simplética, o que temos é $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{A}^\intercal\mathcal{J}$. Portanto, supondo que temos a decomposição $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{O}$, obtemos $\mathcal{O}^{-1}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{O}^\intercal\mathcal{P}^\intercal\mathcal{J} = (\mathcal{J}^{-1}\mathcal{O}^\intercal\mathcal{J})(\mathcal{J}^{-1}\mathcal{P}^\intercal\mathcal{J})$. Mas, como $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{O}^\intercal\mathcal{J}$ e $\mathcal{O}^{-1}$ são ortogonais, e além do mais $\mathcal{J}^{-1}\mathcal{P}^\intercal\mathcal{J}$ e $\mathcal{P}^{-1}$ são positivas definidas, por unicidade, segue que $\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{O}^{\intercal}\mathcal{J}$ e $\mathcal{P} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{P}^{\intercal}\mathcal{J}$. E com isso, $\mathcal{O}$ e $\mathcal{P}$ são simpléticas. Argumento semelhante vale para mostrarmos que $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{O}'$ são simpléticas.

□

Ambas as decomposições na proposição acima são chamadas de *decomposições polares da matriz* $\mathcal{A}$.

Lema 2.1. *O determinante de uma matriz simplética real é igual a* 1.

Demonstração. Seja $\mathcal{M}$ uma matriz simplética. Como o determinante de $\mathcal{M}$ possui módulo igual a 1, basta provarmos que $det(\mathcal{M}) > 0$. Consideremos sua decomposição polar $\mathcal{M} = \mathcal{P}\mathcal{O}$. Como $\mathcal{P}$ é positiva definida, o seu determinante é positivo. Assim, para mostrarmos que o determinante de $\mathcal{M}$ é positivo, basta provarmos que o determinante de $\mathcal{O}$ é positivo. Escrevemos a matriz $\mathcal{O}$ como

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}.$$

A partir de $\mathcal{O}\mathcal{O}^{\intercal} = \mathcal{I}$, obtemos

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{\intercal} + \mathcal{B}\mathcal{B}^{\intercal} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{A}\mathcal{C}^{\intercal} + \mathcal{B}\mathcal{D}^{\intercal} = O, \quad \mathcal{C}\mathcal{A}^{\intercal} + \mathcal{D}\mathcal{B}^{\intercal} = O, \quad \mathcal{C}\mathcal{C}^{\intercal} + \mathcal{D}\mathcal{D}^{\intercal} = \mathcal{I}. \tag{2.15}$$

Sendo assim, multiplicando a primeira equação acima à direita por $\mathcal{D}$, multiplicando a segunda equação à direita por $\mathcal{B}$ e subtraindo a primeira da segunda, chegamos em

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{\intercal}\mathcal{D} - \mathcal{C}^{\intercal}\mathcal{B}) + \mathcal{B}(\mathcal{B}^{\intercal}\mathcal{D} - \mathcal{D}^{\intercal}\mathcal{B}) = \mathcal{D}.$$

Porém, usando que $\mathcal{O}$ é simplética, tem-se que $\mathcal{A}^{\intercal}\mathcal{D} - \mathcal{C}^{\intercal}\mathcal{B} = \mathcal{I}$ e $\mathcal{B}^{\intercal}\mathcal{D} - \mathcal{D}^{\intercal}\mathcal{B} = O$. Consequentemente, o que obtemos é $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

Fazendo o mesmo procedimento na terceira e quarta equação de (2.15), podemos concluir que $\mathcal{C} = -\mathcal{B}$. Portanto, $\mathcal{O}$ é da forma

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}.$$

Agora, consideremos a matriz $\mathcal{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{I} & i\mathcal{I} \\ \mathcal{I} & -i\mathcal{I} \end{pmatrix}$, que possui inversa $\mathcal{Q}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{I} \\ -i\mathcal{I} & i\mathcal{I} \end{pmatrix}$.

Sendo assim,

$$\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} - i\mathcal{B} & O \\ O & \mathcal{A} + i\mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira, usando que $\mathcal{Q}$ é unitária, e portanto $det(\mathcal{Q})det(\mathcal{Q}^{-1}) = 1$, temos

$$det(\mathcal{O}) = det(\mathcal{A} - i\mathcal{B})det(\mathcal{A} + i\mathcal{B}) = \overline{det(\mathcal{A} + i\mathcal{B})}det(\mathcal{A} + i\mathcal{B}) > 0.$$

□

Continuemos com as transformações em (2.6) da seção 2.2 dadas por $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Dessa vez, vamos procurar alguma condição para que

$$H^{\mu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\mu} H(\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$$

seja um Hamiltoniano; ou seja, para que sejam válidas as relações

$$\dot{\mathbf{u}} = H^{\mu}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \dot{\mathbf{v}} = -H^{\mu}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{2.16}$$

Analogamente, como antes, teremos a relação

$$\begin{bmatrix} H^{\mu}_{\mathbf{u}} \\ H^{\mu}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \mathcal{M}^{\intercal} \begin{bmatrix} H_{\mathbf{x}} \\ H_{\mathbf{y}} \end{bmatrix},$$

onde $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_u} & \mathbf{x_v} \\ \mathbf{y_u} & \mathbf{y_v} \end{pmatrix}$. Se procedermos como anteriormente, ao invés de obtermos a relação (2.12), teremos

$$\mathcal{M}^{\intercal} \mathcal{J} \mathcal{M} = \mu \mathcal{J}. \tag{2.17}$$

Com isso, valem as relações em (2.16) se, e somente se, a relação acima (2.17) é satisfeita.

Matrizes em $\mathbb{R}^{2n}$ que satisfazem a relação (2.17) são chamadas de *matrizes μ-simpléticas* ou *matrizes simpléticas com multiplicador μ*.

Diferentementente de $Sp(2n, \mathbb{R})$, o conjunto das matrizes μ-simpléticas, em geral, não formam um grupo. Para vermos isso, consideremos, por exemplo, o conjunto das *matrizes antissimpléticas* reais, que são as matrizes $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ com

$$\mathcal{M}^{\intercal} \mathcal{J} \mathcal{M} = -\mathcal{J}.$$

O produto de duas matrizes antisimpléticas é uma matriz simplética. Portanto, não temos um grupo no caso $\mu = -1$. Porém, dispomos do seguinte resultado análogo à Proposição 2.1:

Proposição 2.3. *Se $\mathcal{M}$ é μ_1-simplética e $\mathcal{N}$ é μ_2-simplética, então $\alpha\mathcal{M}$ (para $\alpha \in \mathbb{R}$), $\mathcal{M}^{\intercal}$, $\mathcal{M}^{-1}$ e $\mathcal{M}\mathcal{N}$ são matrizes simpléticas com multiplicadores α^2, μ_1, μ_1^{-1} e $\mu_1\mu_2$, respectivamente.*

Podemos também definir o conjunto $Sp(2n, \mathbb{C})$ das *matrizes simpléticas complexas* de ordem $2n$; que são as matrizes em $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ satisfazendo a relação (2.12). Para $Sp(2n, \mathbb{C})$, ainda continua valendo os itens da Proposição 2.1; além de o determinante de uma matriz simplética complexa também ser igual a 1.

Da mesma forma, definimos o conjunto das matrizes μ-simpléticas complexas de ordem $2n$ como sendo o subconjunto de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ das matrizes possuindo a propriedade (2.17).

2.4 MATRIZES HAMILTONIANAS

Se um sistema linear real em $\mathbb{R}^{2n}$ dado por $\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{A}\mathbf{z}$ é Hamiltoniano; isto é, se pudermos escrever tal sistema como $\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J}\nabla H(\mathbf{z})$, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *matriz Hamiltoniana*. Nesta seção iremos estudar algumas equivalências da propriedade de uma matriz ser Hamiltoniana.

Proposição 2.4. *Uma matriz $\mathcal{A}$ real $2n \times 2n$ é Hamiltoniana se, e somente se, $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$, para alguma matriz simétrica $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Admitamos que $\mathcal{A}$ seja Hamiltoniana. Com tal hipótese, $\mathcal{A}\mathbf{z} = \mathcal{J}\nabla H(\mathbf{z})$, para algum Hamiltoniano H e todo vetor $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Diferenciando esta equação, obtemos $\mathcal{A} = \mathcal{J}D^2H(\mathbf{z})$, sendo $D^2H(\mathbf{z})$ a matriz Hessiana de H em $\mathbf{z}$. Como $D^2H(\mathbf{z})$ é simétrica, isto prova que $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$, com $\mathcal{S}$ simétrica.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$, para alguma matriz simétrica $\mathcal{S}$. Tomemos $H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^\intercal\mathcal{S}\mathbf{z}$. A partir daí, $\nabla H(\mathbf{z}) = \mathcal{S}\mathbf{z}$. Consequentemente, $\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{A}\mathbf{z} = \mathcal{J}\mathcal{S}\mathbf{z} = \mathcal{J}\nabla H(\mathbf{z})$. $\square$

Proposição 2.5. *Para uma matriz $\mathcal{A}$ real $2n \times 2n$, os seguintes itens são equivalentes:*

(a) *$\mathcal{A}$ é Hamiltoniana.*

(b) *$\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$, com $\mathcal{S}$ simétrica.*

(c) *$\mathcal{A}^\intercal\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A} = O$.*

(d) *$\mathcal{J}\mathcal{A}$ é simétrica.*

Demonstração. A equivalência (a) $\iff$ (b) é o conteúdo da Proposição 2.4.

Valendo-se de (b), chega-se a $\mathcal{A}^\intercal\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A} = (\mathcal{J}\mathcal{S})^\intercal\mathcal{J} + \mathcal{J}(\mathcal{J}\mathcal{S}) = \mathcal{S}^\intercal - \mathcal{S} = O$. Desse modo o item (c) é satisfeito.

Agora, caso tenhamos a validade de (c), obtemos $(\mathcal{J}\mathcal{A})^{\intercal} = -\big(\mathcal{A}^{\intercal}\mathcal{J}\big)^{\intercal} = \mathcal{J}\mathcal{A}$; logo $\mathcal{J}\mathcal{A}$ simétrica, donde temos o item (d).

Por fim, suponhamos que seja válido (d). Sendo assim, denotando $\mathcal{J}\mathcal{A} = \mathcal{S}$, temos $\mathcal{A} = \mathcal{J}(-\mathcal{S})$, com $-\mathcal{S}$ simétrica, o que implica em (b).

□

Proposição 2.6. *Para $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ matrizes Hamiltonianas, vale que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{A}-\mathcal{B}$, $\alpha\mathcal{A}$ para um escalar real, $\mathcal{A}^{\intercal}$ e $[\mathcal{A},\mathcal{B}] := \mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A}$ são matrizes Hamiltonianas.*

Demonstração. Usando a Proposição 2.5, prova-se facilmente que $\mathcal{A}+\mathcal{B}, \mathcal{A}-\mathcal{B}, \alpha\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\intercal}$ são Hamiltonianas. Agora, para provarmos que $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$ é Hamiltoniana, basta usarmos que $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{B} = \mathcal{J}\mathcal{S}_2$, com $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ simétricas. Por conseguinte, chegamos em $\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{J}(\mathcal{S}_1\mathcal{J}\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_2\mathcal{J}\mathcal{S}_1)$; e como $\mathcal{S}_1\mathcal{J}\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_2\mathcal{J}\mathcal{S}_1$ é trivialmente simétrica, temos o resultado. □

Tendo em vista a interpretação dada para o grupo simplético, espera-se que matrizes Hamiltonianas e matrizes simpléticas tenham uma relação muito íntima entre si; e esse é de fato o caso. Tal relação ficará evidenciada ao longo do texto.

2.5 O COLCHETE DE POISSON

Fixemos nesta seção um corpo $\mathbb{K}$.

Tendo vetores $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ em $\mathbb{K}^{2n}$, podemos definir a seguinte forma bilinear:

$$\{\mathbf{z},\mathbf{w}\} := \mathbf{z}^{\intercal}\mathcal{J}\mathbf{w}.$$

Denotemos por $\langle\ ,\ \rangle$ o *produto Euclidiano canônico* em $\mathbb{K}^m$; isto é, para $\mathbf{u} = (u_1,...,u_m)$, $\mathbf{v} = (v_1,...,v_m) \in \mathbb{K}^m$, $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ é dado por

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle := \sum_{i=1}^{m} u_i v_i.$$

Mencionemos que vale a igualdade $\{\mathbf{z},\mathbf{w}\} = \langle\mathbf{z},\mathcal{J}\mathbf{w}\rangle$.

A forma bilinear $\{,\}$ é antissimétrica. De fato, $\{\mathbf{z},\mathbf{w}\} = \mathbf{z}^{\intercal}\mathcal{J}\mathbf{w} = (\mathbf{z}^{\intercal}\mathcal{J}\mathbf{w})^{\intercal} = -\mathbf{w}^{\intercal}\mathcal{J}\mathbf{z} = -\{\mathbf{w},\mathbf{z}\}$. Ela também é não degenerada. Para vermos isso, suponhamos que tenhamos um vetor $\mathbf{z}$ em $\mathbb{K}^{2n}$ de modo que $\{\mathbf{z},\mathbf{w}\} = 0$, para todo $\mathbf{w}$ em $\mathbb{K}^{2n}$. Supondo que $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\mathbf{w} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$, temos a identidade de fácil verificação

$$\{\mathbf{z},\mathbf{w}\} = \langle\mathbf{x},\mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{y},\mathbf{u}\rangle.$$

Com isso, fazendo $\mathbf{w} = (0, \mathbf{e}_i)$, para cada i em $\{1, ..., n\}$, onde $\mathbf{e}_i$ é o vetor de $\mathbb{K}^{2n}$ que possui todas as entradas nulas exceto a i-ésima entrada, obtemos que $z_i = \langle \mathbf{z}, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{y}, 0 \rangle = 0$, sendo $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_{2n})$. Consequentemente, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$; o que prova o desejado.

$\{\mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ é o chamado *colchete de Poisson* entre $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$.

Também, para duas funções f e g continuamente diferenciáveis definidas num aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ com valores reais, definimos a função

$$\{f, g\}(\mathbf{z}) := \nabla f(\mathbf{z})^{\intercal} \mathcal{J} \nabla g(\mathbf{z}).$$

$\{f, g\}$ é o colchete de Poisson entre f e g.

O colchete de Poisson é particularmente interessante no contexto das funções continuamente diferenciáveis. Em vista à isso, vamos a seguir tratar de alguns resultados que mostrarão um pouco dessa importância. No próximo capítulo veremos que o colchete de Poisson é de fundamental importância para a teoria de Gelfand-Lidskii.

Observemos que $\{f, g\}(\mathbf{z}) = \langle \nabla_{\mathbf{x}} f, \nabla_{\mathbf{y}} g \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f, \nabla_{\mathbf{x}} g \rangle$; logo

$$\{f, g\}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Usando esta identidade, podemos provar a *identidade de Jacobi*; a qual é dada por

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

Fazendo-se uso do colchete de Poisson, podemos reformular a noção de *integral primeira* de um sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J} \nabla H(\mathbf{z})$. De fato:

$$\frac{df}{dt} = \langle \nabla_{\mathbf{x}} f, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{y}} f, \dot{\mathbf{y}} \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{x}} f, \nabla_{\mathbf{y}} H \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{y}} f, \nabla_{\mathbf{x}} H \rangle = \{f, H\};$$

Consequentemente, $\frac{df}{dt} = 0$ se, e somente se, $\{f, H\} = 0$. A partir daí, usando a identidade de Poisson, para duas integrais primeiras f e g de um sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J} \nabla H(\mathbf{z})$, temos uma terceira integral primeira; a saber $\{f, g\}$.

Proposição 2.7. *A transformação $\mathbf{z} = \phi(\boldsymbol{\xi})$ é simplética se, e somente se,*

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}(\boldsymbol{\xi}) = \{f, g\}(\mathbf{z}),$$

para quaisquer f e g.

Demonstração. Temos $\{f \circ \phi, g \circ \phi\}(\mathbf{z}) = \nabla (f \circ \phi)(\mathbf{z})^{\intercal} \mathcal{J} \nabla (g \circ \phi)(\mathbf{z})$. Além do mais, $\nabla (f \circ \phi)(\boldsymbol{\xi}) = D\phi(\boldsymbol{\xi})^{\intercal} \nabla f(\mathbf{z})$ e $\nabla (g \circ \phi)(\boldsymbol{\xi}) = D\phi(\boldsymbol{\xi})^{\intercal} \nabla g(\mathbf{z})$. Consequentemente,

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla f(\mathbf{z})^{\intercal} [D\phi(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{J} D\phi(\boldsymbol{\xi})^{\intercal}] \nabla g(\mathbf{z}).$$

Logo, como $\{f,g\}(\mathbf{z}) = \nabla f(\mathbf{z})^{\intercal}\mathcal{J}\nabla g(\mathbf{z})$, temos $\{f\circ\phi, g\circ\phi\}(\boldsymbol{\xi}) = \{f,g\}(\mathbf{z})$, para quaiquer f e g se, e somente se,

$$\mathcal{J} = D\phi(\boldsymbol{\xi})\mathcal{J}D\phi(\boldsymbol{\xi})^{\intercal};$$

ou seja, se, e somente se, $\mathbf{z} = \phi(\boldsymbol{\xi})$ for simplética. □

Proposição 2.8. *Seja $\mathbf{z} = \phi(\boldsymbol{\xi})$ uma mudança de variáveis. Fazendo $x_j = \phi_j(\boldsymbol{\xi})$ e $y_j = \phi_j(\boldsymbol{\xi})$, haveremos de ter que $\mathbf{z} = \phi(\boldsymbol{\xi})$ é simplética se, e somente se,*

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{y_i, y_j\} = 0, \quad \{x_i, y_j\} = \delta_{ij}.$$

Demonstração. Primeiramente, percebamos que para uma matriz qualquer $\mathcal{M}$, vale que

$$(\mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^{\intercal})_{kl} = \langle \mathbf{e}_k, \mathcal{M}\mathcal{J}\mathcal{M}^{\intercal}\mathbf{e}_l\rangle = \langle \mathcal{M}^{\intercal}\mathbf{e}_k, \mathcal{J}\mathcal{M}^{\intercal}\mathbf{e}_l\rangle = \{\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_l\},$$

onde $\mathcal{M}_k$ é a k-ésima coluna de $\mathcal{M}$. Sendo assim, $\mathcal{M}$ é simplética se, e somente se,

$$\mathcal{J}_{kl} = \{\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_l\}.$$

A partir daí, tomando $\mathcal{M} = D\phi(\boldsymbol{\xi})$ temos o resultado. □

2.6 ESPAÇOS SIMPLÉTICOS

Na seção anterior introduzimos a forma bilinear antissimétrica não degenerada $\{,\}$ em $\mathbb{K}^{2n}$, para um corpo $\mathbb{K}$. Mais geralmente, temos a definição:

Definição 2.1. *Um espaço vetorial V munido de uma forma bilinear antissimétrica não degenerada ω é dito ser um espaço simplético.*

Para representarmos um espaço simplético V com ω sua forma bilinear não degenerada antissimétrica, escreveremos (V,ω). Também, chamaremos ω de *forma simplética*.

Se $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ são vetores de $\mathbb{K}^{2n}$, frequentemente nesta seção denotaremos o colchete de Poisson $\{\mathbf{z},\mathbf{w}\}$ por $\omega_{\mathcal{J}}(\mathbf{z},\mathbf{w})$. $(\mathbb{K}^{2n}, \omega_{\mathcal{J}})$ é um espaço simplético.

Seja U um subespaço de um espaço simplético (V,ω). Para que U juntamente com a forma ω restrita a U seja um espaço simplético basta que ω restrita a U seja não degenerada. Desse modo, temos a seguinte definição:

Definição 2.2. *Um subespaço U de um espaço simplético (V,ω) é um subespaço simplético se a forma ω restrita a U é não degenerada.*

Uma forma bilinear β em um espaço vetorial V dá origem à transformação linear

$$L_\beta : V \longrightarrow V^*, \quad L_\beta(\mathbf{v})(\mathbf{u}) := \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

L_β é um isomorfismo se, e somente se, β é não degenerada. Isso segue do fato de que a dimensão de V é igual a dimensão de V^* e de que β ser não degenerada significa que se $\mathbf{v}$ satisfaz $\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, para todo $\mathbf{u} \in V$, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Além do mais, para uma base $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ de V, é satisfeita a igualdade $[\beta]_B = [L_\beta]_{B^*}^B$, onde B^* é a *base dual* de B; $B^* = \{\mathbf{v}_1^*, ..., \mathbf{v}_n^*\}$, com cada $\mathbf{v}_j^*$ satisfazendo $\mathbf{v}_j^*(\mathbf{v}_i) = \delta_{ij}$. De fato, escrevendo $L_\beta(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{v}_i^*$, segue que $\beta(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = L_\beta(\mathbf{v}_j)(\mathbf{v}_i) = a_{ij}$. Com isso temos o resultado.

Agora, seja (V, ω) um espaço simplético de dimensão n. Consideremos a matriz $\mathcal{B}$ de ω em uma certa base B de V. Por ω ser antissimétrica, $\mathcal{B}$ também é antissimétrica; ou seja, $\mathcal{B}^\intercal = -\mathcal{B}$. Com isso, tem-se que $det(\mathcal{B}) = (-1)^n det(\mathcal{B})$. Porém, como ω é não degenerada, L_ω é um isomorfismo; e como $\mathcal{B} = [\omega]_B = [L_\omega]_{B^*}^B$, conclui-se que $det(\mathcal{B}) \neq 0$, o que implica que n é par. Registremos essa propriedade no lema abaixo.

Lema 2.2. *A dimensão de um espaço simplético tem que ser necessariamente par.*

Para um subespaço U de um espaço vetorial V, o *aniquilador* de U é o conjunto definido por

$$U^0 := \{f \in V^* : \ f(\mathbf{u}) = 0, \ \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Também, para um subespaço U de V^*, temos o aniquilador de U definido como

$$U_0 := \{\mathbf{v} \in V : \ f(\mathbf{v}) = 0, \ \forall f \in V^*\}.$$

Consideremos uma base $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ de V. Caso tenhamos que $U = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k]$, onde $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k]$ é o subespaço de V gerado pelos os vetores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$, então $U^0 = [\mathbf{v}_{k+1}^*, ..., \mathbf{v}_n^*]$. Dualmente, se $U = [\mathbf{v}_1^*, ..., \mathbf{v}_k^*]$, então $U_0 = [\mathbf{v}_{k+1}, ..., \mathbf{v}_n]$. Tais propriedades são de fácil prova. Temos ainda que $(U_0)^0 = U$ e $(U^0)_0 = U$; e também que $dim(U) + dim(U^0) = dim(V)$.

Para um subespaço U de um espaço simplético (V, ω), definimos o *complemento simplético ortogonal* de U como

$$U^\perp := \{\mathbf{v} \in V : \forall \mathbf{u} \in U, \ \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0\}.$$

Vale ressaltar que podemos ter $U \subseteq U^\perp$; por exemplo, quando U é unidimensional.

Proposição 2.9. *Para um subespaço U de um espaço simplético (V, ω) valem os itens:*

(a) $L_\omega(U^\perp) = U^0$.

(b) $dimU + dimU^\perp = dimV$.

Demonstração. A fim de provarmos (a) o que temos é

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{\mathbf{v} \in V : \forall \mathbf{u} \in U,\ \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} \in V : \forall \mathbf{u} \in U,\ L_\omega(\mathbf{v})(\mathbf{u}) = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \in V : L_\omega(\mathbf{v}) \in U^0\} = L_\omega^{-1}(U^0). \end{aligned}$$

Usando (a) e que $dim(U) + dim(U^0) = dim(V)$, verifica-se (b). □

Para dois subespaços U e W de um espaço simplético (V, ω), definimos

$$\{U, W\} := \{\omega(\mathbf{u}, \mathbf{w}) : \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}.$$

Dizemos que U e W são *simpleticamente ortogonais* se $\{U, W\} = \{0\}$. Na prática, assim como escrevemos $U \cap W = 0$ para dizermos que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, escrevemos simplesmente $\{U, W\} = 0$.

Proposição 2.10. *Para um espaço simplético (V, ω) valem as seguintes propriedades:*

(a) *Caso tenhamos uma soma direta $V = U \oplus W$ com $\{U, W\} = 0$, então U e W serão subespaços simpléticos.*

(b) *Se U é um subespaço simplético de V, então $U^\perp$ também é um subespaço simplético de V, e além do mais, $V = U \oplus U^\perp$.*

Demonstração. (a): suponhamos que tenhamos $\mathbf{u}$ em U de modo que $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = 0$, para todo $\mathbf{u}'$ em U. Logo, tomando $\mathbf{v}$ qualquer em V, podemos escrever $\mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}$, com $\mathbf{u}' \in U$ e $\mathbf{w} \in W$. Consequentemente, $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}') + \omega(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0 + 0 = 0$. Como ω é não degenerada, devemos ter $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, o que implica que U é um subespaço simplético. E é claro que o mesmo vale para W.

(b): temos $dim(U) + dim(U^\perp) = dim(V)$, e como também ω restrita a U é não degenerada, segue que $U \cap U^\perp = 0$. Sendo assim, $V = U \oplus U^\perp$. Por fim, usando (a), conclui-se que $U^\perp$ é simplético. □

Estaremos interessados nas transformações lineares que preservam a forma simplética. Tais transformações serão chamadas de transformações simpléticas. Mais especificamente, o que temos é a definição:

Definição 2.3. *Uma transformação linear $L : V_1 \longrightarrow V_2$ entre dois espaços simpléticos (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) é dita ser um mapa simplético (ou transformação simplética) se satisfaz*

$$\omega_2(L\mathbf{u}, L\mathbf{v}) = \omega_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1.$$

Toda transformação simplética $L : (V_1, \omega_1) \longrightarrow (V_2, \omega_2)$ é injetiva. De fato, suponhamos que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Então, para todo $\mathbf{u}$ em V, temos $\omega_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega_2(L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})) = 0$. Consequentemente, como ω_1 é não degenerada, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto, L é injetiva.

Temos, portanto, que L é um isomorfismo se, e somente se, V_1 e V_2 possuem a mesma dimensão.

Seja V um espaço vetorial com uma base $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$. A partir daí, temos o isomorfismo

$$C_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}, \quad C_B\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i\right) := (a_1, ..., a_n).$$

Quando não houver confusão, escreveremos simplesmente $C : V \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}$.

Definição 2.4. *Uma base B de um espaço simplético (V, ω) é dita ser simplética se $C_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}$ é uma transformação simplética.*

Proposição 2.11. *Uma base $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{2n}\}$ de um espaço simplético (V, ω) é simplética se, e somente se, a matriz de ω nesta base é igual a $\mathcal{J}$, isto é, se vale que*

$$\omega(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \mathcal{J}_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, ..., 2n\}.$$

Demonstração. Suponhamos que $\omega(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \mathcal{J}_{ij}$. Sejam $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + ... + x_{2n}\mathbf{v}_{2n}$ e $\mathbf{v} = y_1\mathbf{x}_1 + ... + y_{2n}\mathbf{v}_{2n}$. Daí, denotando $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{2n})$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., \mathbf{y}_{2n})$ e usando que $\omega(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \mathcal{J}_{ij}$, chegamos a

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{2n} \mathcal{J}_{ij} x_k y_l = \mathbf{x}^\intercal \mathcal{J} \mathbf{y} = \omega_{\mathcal{J}}(C\mathbf{u}, C\mathbf{v}).$$

Com isso, temos que C é simplética. Reciprocamente, se C é simplética, obtemos que $\omega(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \omega_{\mathcal{J}}(C\mathbf{v}_i, C\mathbf{v}_j) = \mathbf{e}_i^\intercal \mathcal{J} \mathbf{e}_j = \mathcal{J}_{ij}$. □

Com tal proposição podemos provar que:

Lema 2.3. *Todo espaço simplético (V, ω) possui uma base simplética.*

Demonstração. Vamos provar tal resultado por indução em n, onde $2n$ é a dimensão de V. Para $n = 1$, como ω é não nula, existem vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de V com $a = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$. Tomando $\mathbf{u}' = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}' = \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{v}$, obtemos $\omega(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = 1$, e, portanto, como $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ são L.I, segue que $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$ é uma base simplética de V.

Agora, suponhamos que a dimensão de V seja $2n$. Como antes, podemos encontrar $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_{n+1}$ em V com $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{n+1}) = 1$. Fazendo $U = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{n+1}]$, obtemos que U é um subespaço simplético com base simplética $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{n+1}$. Com isso, $U^{\perp}$ é um subespaço simplético de V; valendo ainda que $V = U \oplus U^{\perp}$. Como $dim(U^{\perp}) = 2n - 2$, por indução, existe uma base simplética $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+2}, ..., \mathbf{v}_{2n}$ de $U^{\perp}$. Agora é fácil ver que $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}, ..., \mathbf{v}_{2n}$ é uma base simplética de V. $\square$

Tomemos um espaço simplético (V, ω) com uma base simplética B. Consideremos um operador simplético $L : V \longrightarrow V$, e também $C_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}$. Seja $\mathcal{B}$ a matriz de L na base B. Tomemos dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{K}^{2n}$. Logo, como C é um isomorfismo, existem $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ elementos de V satisfazendo $\mathbf{x} = C(\mathbf{u}), \mathbf{y} = C(\mathbf{v})$. A partir daí, é bem sabido que $C(L\mathbf{u}) = \mathcal{B}\mathbf{x}, C(L\mathbf{v}) = \mathcal{B}\mathbf{y}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\intercal}(\mathcal{B}^{\intercal}\mathcal{J}\mathcal{B})\mathbf{y} &= (\mathcal{B}\mathbf{x})^{\intercal}\mathcal{J}(\mathcal{B}\mathbf{y}) = \omega_{\mathcal{J}}(\mathcal{B}\mathbf{x}, \mathcal{B}\mathbf{y}) = \omega_{\mathcal{J}}(C(L\mathbf{u}), C(L\mathbf{v})) \\ &= \omega(L\mathbf{u}, L\mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega_{\mathcal{J}}(C\mathbf{u}, C\mathbf{v}) = \mathbf{x}^{\intercal}\mathcal{J}\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Temos assim que $\mathcal{B}$ é simplética. Portanto, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.12. *Seja V um espaço simplético e $L : V \longrightarrow V$ um operador simplético. Se B é uma base simplética de V, então a matriz $[L]_B^B$ é uma matriz simplética.*

A partir da proposição acima, podemos pensar em fazer a seguinte definição:

Definição 2.5. *Consideremos um espaço simplético (V, ω). Um operador $L : V \longrightarrow V$ é dito ser um operador Hamiltoniano se para alguma base simplética B de V, tem-se que $[L]_B^B$ é uma matriz Hamiltoniana.*

Tentemos caracterizar de alguma maneira os operadores Hamiltonianos. Seja (V, ω) um espaço simplético e $L : V \longrightarrow V$ um operador Hamiltoniano. Fixemos uma base simplética B de V, sendo $C : V \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}$ o isomorfismo de coordenadas nessa base. Tomemos dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{K}^{2n}$. A partir daí, podemos encontrar $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V de modo que $\mathbf{x} = C\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = C\mathbf{v}$. Consequentemente, se $\mathcal{A}$ é a matriz de L na base B, tem-se que $\mathcal{A}\mathbf{x} = C(L\mathbf{u})$

e $\mathcal{A}\mathbf{y} = C(L\mathbf{v})$. Vamos analisar se podemos encontrar alguma propriedade sobre L que faça $\mathcal{A}$ ser Hamiltoniana. Para isso, vamos usar o fato de que $\mathcal{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, $\mathcal{A}^\intercal \mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A} = O$. Agora, observemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\intercal(\mathcal{A}^\intercal \mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A})\mathbf{y} &= (\mathcal{A}\mathbf{x})^\intercal \mathcal{J}\mathbf{y} + \mathbf{x}^\intercal \mathcal{J}\mathcal{A}\mathbf{y} = \omega_{\mathcal{J}}(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \omega_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y}) \\ &= \omega_{\mathcal{J}}(C(L\mathbf{u}), C\mathbf{v}) + \omega_{\mathcal{J}}(C\mathbf{u}, C(L\mathbf{v})) = \omega(L\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{u}, L\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Sendo assim, $\mathcal{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, vale que $\omega(L\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{u}, L\mathbf{v}) = 0$. Temos, portanto, a proposição:

Proposição 2.13. *Se (V, ω) é um espaço simplético e $L : V \longrightarrow V$ é um operador linear, então L é Hamiltoniana se, e somente se,*

$$\omega(L\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \omega(\mathbf{v}, L\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Definição 2.6. *Para um espaço simplético (V, ω), um subespaço U de V é dito ser Lagrangiano se sua dimensão é a metade da dimensão de V e*

$$\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U,$$

o que é equivalente a $U = U^\perp$.

A próxima proposição é de verificação imediata.

Proposição 2.14. *Seja (V, ω) um espaço simplético. Suponhamos que tenhamos uma decomposição em soma direta $V = U \oplus W$, com U e W subespaços simpléticos satisfazendo $\{U, W\} = 0$. Se U e W possuem as bases simpléticas $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{2k}$ e $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{2l}$, respectivamente, então*

$$\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l, \mathbf{u}_{k+1}, ..., \mathbf{u}_{2k}, \mathbf{w}_{l+1}, ..., \mathbf{w}_{2l}$$

é uma base simplética de $V = U \oplus W$.

Definição 2.7. *Uma partição de Lagrange de um espaço simplético V é uma soma direta $V = U \oplus W$, com U e W subespaços Lagrangianos.*

Proposição 2.15. *Para um subespaço Langrangiano U de (V, ω), existe uma partição de Lagrange $V = U \oplus W$.*

Demonstração. Consideremos o isomorfismo de coordenadas $C : V \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}$ com respeito a alguma base simplética de V. Também, consideremos a aplicação linear $\mathcal{J} : \mathbb{K}^{2n} \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}$ definida pela matriz $\mathcal{J}$. A partir daí, seja o subespaço $W = C^{-1}\mathcal{J}C(U)$. Como a dimensão de U é a metade da dimensão de V, o mesmo vale para W. Tomemos $\mathbf{u} = C^{-1}\mathcal{J}C(\mathbf{u}')$ e $\mathbf{v} = C^{-1}\mathcal{J}C(\mathbf{v}')$. Além disso, uma vez que é de fácil verificação que $\mathcal{J} : \mathbb{K}^{2n} \longrightarrow \mathbb{K}^{2n}$ é uma transformação simplética, segue que

$$\omega(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \omega_{\mathcal{J}}(C\mathbf{u}, C\mathbf{v}) = \omega_{\mathcal{J}}(\mathcal{J}C(\mathbf{u}'), \mathcal{J}C(\mathbf{v}')) = \omega_{\mathcal{J}}(C\mathbf{u}', C\mathbf{v}') = \omega(\mathbf{u}',\mathbf{v}') = 0.$$

Com isso, W é um subespaço Lagrangiano.

Por fim, mostremos que $U \cap W = 0$. Para isso, seja $\mathbf{v}$ um elemnto de $U \cap W$. Como $\mathbf{v} \in W$, existe um vetor $\mathbf{u}$ de U com $C\mathbf{v} = \mathcal{J}C(\mathbf{u})$. A partir daí,

$$0 = \omega(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \omega_{\mathcal{J}}(C\mathbf{v}, C\mathbf{u}) = \omega_{\mathcal{J}}(\mathcal{J}C(\mathbf{u}), C\mathbf{u}) = (\mathcal{J}C\mathbf{u})^{\intercal}\mathcal{J}C\mathbf{u} = ||\mathcal{J}C\mathbf{u}||^2.$$

Consequentemente, $\mathcal{J}C\mathbf{u} = \mathbf{0}$; logo $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, e, portanto, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

Vamos acabar esta seção com duas proposições que serão muito úteis na próxima seção.

Proposição 2.16. *Consideremos uma partição Lagrangiana $V = U \oplus W$ invariante pelo operador linear $L : V \longrightarrow V$, isto é, satisfazendo $L(U) \subseteq U$ e $L(W) \subseteq W$. Seja $\mathcal{A}$ a matriz de L em uma base simplética. Suponhamos que L é um operador Hamiltoniano (respectivamente, simplético). Então, a matriz $\mathcal{A}$ tem a forma:*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & O \\ O & -\mathcal{B}^{\intercal} \end{pmatrix}, \quad (respectivamente, \;\; \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & O \\ O & \mathcal{B}^{-\intercal} \end{pmatrix}).$$

Demonstração. Como $\mathcal{A}$ tem a forma $\begin{pmatrix} \mathcal{B} & O \\ O & \mathcal{C} \end{pmatrix}$ e além disso é Hamiltoniana (respectivamente, simplética), o resultado segue facilmente. □

Proposição 2.17. *Seja $V = U \oplus W$ uma partição Lagrangiana e $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ uma base de U. Então, existe uma única base $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ de W tal que $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ é uma base simplética de V.*

Demonstração. Sejam $f_1, ..., f_n$ funcionais de W^* definidos como $f_i(\mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})$. Tais elementos formam um conjunto linearmente independente. De fato, suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = 0.$$

Aplicando a expressão acima em um vetor $\mathbf{w}$ de W, chegamos em $\omega(\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i, \mathbf{w}) = 0$. Além disso, $\omega(\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i, \mathbf{u}) = 0$, para $\mathbf{u} \in U$, uma vez que U é Lagrangiano. Logo, se $\mathbf{v} \in V$, vale que $\omega(\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = 0$. Consequentemente, como ω é não degenerada, $\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{u}_i = 0$, o que implica $c_i = 0$, para $i \in \{1, ..., n\}$; portanto os funcionais lineares $f_1, ..., f_n$ são linearmente independentes. Sendo assim, eles formam uma base para W^*. Tomemos $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ a base dual de $f_1, ..., f_n$, isto é, cada $\mathbf{w}_i$ é tal que $f_i = \mathbf{w}_i^*$. A partir daí, tem-se que $\omega(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j) = \delta_{ij}$. Logo, $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ é uma base simplética de V.

Para provarmos a unicidade, suponhamos que $\tilde{\mathbf{w}}_1, ..., \tilde{\mathbf{w}}_n$ é outra base de W de modo que $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n, \tilde{\mathbf{w}}_1, ..., \tilde{\mathbf{w}}_n$ seja uma base simplética de V. Então, $\omega(\mathbf{u}_i, \tilde{\mathbf{w}}_j - \mathbf{w}_j) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$ e, portanto, $\omega(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{w}}_j - \mathbf{w}_j) = 0$, para $\mathbf{x} \in U$. Mas esta igualdade vale também para $\mathbf{x} \in W$ porque W é Lagrangeano; logo ela vale também para $\mathbf{x} \in V = U \oplus W$. Como ω é não degenerada, segue-se que $\tilde{\mathbf{w}}_j = \mathbf{w}_j$, para $j \in \{1, ..., n\}$.

□

2.7 FORMA NORMAL DE UMA MATRIZ HAMILTONIANA

Um polinômio $p(x)$ de grau n é dito ser recíproco se $p(x) = x^n p(\frac{1}{x})$. Lembremos também que $p(x)$ é par se vale $p(x) = p(-x)$.

Lema 2.4. *O polinômio característico de uma matriz simplética é recíproco, enquanto o polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é par.*

Demonstração. Para $\mathcal{M}$ simplética o que temos é

$$\mathcal{M} - x\mathcal{I} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{M}^{-\mathsf{T}}(\mathcal{I} - x\mathcal{M})^{\mathsf{T}}\mathcal{J} = -x\mathcal{M}^{-\mathsf{T}}(\mathcal{M} - \frac{1}{x}\mathcal{I})^{\mathsf{T}}\mathcal{J}.$$

E como $det(\mathcal{M}) = 1$ e $det(\mathcal{J}) = 1$, obtemos $det(\mathcal{M} - x\mathcal{I}) = x^{2n}det(\mathcal{M} - \frac{1}{x}\mathcal{I})$, onde $2n$ é a dimensão de $\mathcal{M}$. Sendo assim, se $p(x)$ for o polinômio característico de $\mathcal{M}$, então $p(x) = x^{2n}p(\frac{1}{x})$.

Sendo $\mathcal{A}$ uma matriz Hamiltoniana, podemos escrever $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$, onde $\mathcal{S}$ é simétrica. Usando isso, denotando por $q(x)$ o polinômio característico de $\mathcal{A}$, chegamos em

$$\begin{aligned} q(x) = det(\mathcal{J}\mathcal{S} - x\mathcal{I}) &= det(\mathcal{J}\mathcal{S} - x\mathcal{I})^{\mathsf{T}} = det(-\mathcal{S}\mathcal{J} - x\mathcal{I}) \\ &= det(\mathcal{J}(\mathcal{J}\mathcal{S} + x\mathcal{I})\mathcal{J}) = det(\mathcal{J}\mathcal{S} + x\mathcal{I}) = q(-x). \end{aligned}$$

□

Como o polinômio característico de uma matriz simplética é recíproco, cada autovalor vêm aos pares λ, λ^{-1}. Uma matriz Hamiltoniana, por sua vez, tem seu polinômio característico par, e portanto, seus autovalores vêm aos pares $\lambda, -\lambda$.

Nesta seção iremos considerar o problema de se encontrar uma forma normal para uma matriz Hamiltoniana real diagonalizável que tenha todos os seus autovalores distintos, logo não nulos.

Denotando por $\eta(\lambda)$ o autoespaço associado ao autovalor λ, temos os dois lemas a seguir que serão de fundamental importância para nossos propósitos.

Lema 2.5. *Se λ e μ são autovalores de uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{A}$ com $\lambda+\mu \neq 0$, verifica-se que $\{\eta(\lambda), \eta(\mu)\} = 0$.*

Demonstração. Como $\mathcal{A}$ é Hamiltoniana, vale que $\mathcal{A}^\intercal \mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A} = 0$. Tomando $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ autovetores de λ e μ, respectivamente, obtemos

$$0 = \mathbf{u}^\intercal(\mathcal{A}^\intercal \mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A})\mathbf{v} = (\mathcal{A}\mathbf{u})^\intercal \mathcal{J}\mathbf{v} + \mathbf{u}^\intercal \mathcal{J}\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}^\intercal \mathcal{J}\mathbf{v} + \mu \mathbf{u}^\intercal \mathcal{J}\mathbf{v} = (\lambda + \mu)\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Porém, como $\lambda + \mu \neq 0$, segue que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 0$. □

Lema 2.6. *Para λ e μ autovalores de uma matriz simplética $\mathcal{M}$ satisfazendo $\lambda\mu \neq 1$, vale que $\{\eta(\lambda), \eta(\mu)\} = 0$.*

Demonstração. Notemos que

$$\{\mathcal{M}\mathbf{u}, \mathcal{M}\mathbf{v}\} = (\mathcal{M}\mathbf{u})^\intercal \mathcal{J}\mathcal{M}\mathbf{v} = \mathbf{u}^\intercal \mathcal{J}\mathbf{v} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Sendo assim, caso $\mu \in \eta(\lambda)$ e $\mathbf{v} \in \eta(\mu)$, obtemos $\lambda\mu\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Mas como $\lambda\mu \neq 1$, concluímos que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 0$. □

Dessa vez, denotemos por $\eta^\dagger(\lambda)$ o autoespaço generalizado associado a λ, isto é, $\eta^\dagger(\lambda)$ é dado por

$$\eta^\dagger(\lambda) := \bigcup_{k \geq 1} \eta_k(\lambda), \text{ onde } \eta_k(\lambda) = ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^k.$$

Analogamente aos dois últimos lemas, temos os próximos dois lemas a seguir.

Lema 2.7. *Se λ e μ são autovalores de uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{A}$ com $\lambda + \mu \neq 0$, então $\{\eta^\dagger(\lambda), \eta^\dagger(\mu)\} = 0$.*

Demonstração. De $\{\mathcal{A}\mathbf{u},\mathbf{v}\} = -\{\mathbf{u},\mathcal{A}\mathbf{v}\}$, podemos provar que $\{\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{v}\} = \{(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{u},\mathbf{v}\}$. Usemos indução. O caso $k=1$ é totalmente imediato. Supondo que $\{\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{v}\} = \{(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, obtemos

$$\begin{aligned}\{\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^{k+1}\mathbf{v}\} &= -\{(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{v}\}\\ &= -\{\mathcal{A}\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{v}\} - \lambda\{\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{v}\}\\ &= -\{\mathcal{A}\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{v}\} - \lambda\{(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{u},\mathbf{v}\}\\ &= \{(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^{k+1}\mathbf{u},\mathbf{v}\}.\end{aligned}$$

Provemos por indução que $\{\eta_k(\lambda),\eta_k(\mu)\} = 0$, para todo $k \geq 1$. Com isso teremos o resultado desejado. Provamos no Lema 2.5 que $\{\eta(\lambda),\eta(\mu)\} = 0$. Sendo assim, suponhamos que $\{\eta_k(\lambda),\eta_k(\mu)\} = 0$. Mostremos que $\{\eta^{k+1}(\lambda),\eta^{k+1}(\mu)\} = 0$. Mas antes, devemos provar que $\{\eta_{k+1}(\lambda),\eta_k(\mu)\} = 0$. Para isso, consideremos $\mathbf{u} \in \eta_{k+1}(\lambda), \mathbf{v} \in \eta_k(\mu)$. Temos

$$(\mathcal{A}-\mu\mathcal{I})^k = (\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I}-(\lambda+\mu))^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k-j}{j}(-(\lambda+\mu))^{k-j}(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^j$$

A partir daí, usando que $\{\mathbf{u},(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{v}\} = \{(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, obtemos

$$0 = \{\mathbf{u},(\mathcal{A}-\mu\mathcal{I})^k\mathbf{v}\} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k-j}{j}(-(\lambda+\mu))^{k-j}\{(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{u},\mathbf{v}\}.$$

Porém, como $\mu \in \eta_{k+1}(\lambda)$, tem-se que $(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{u} = (-1)^j(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{u} \in \eta_k(\lambda)$, para $j \in \{1,...,n\}$. Consequentemente, $0 = (\lambda+\mu)\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$; mas como $\lambda+\mu \neq 0$, logo $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} = 0$. Portanto, $\{\eta_{k+1}(\lambda),\eta_k(\mu)\} = 0$.

Por fim, consideremos $\mathbf{u} \in \eta_{k+1}(\lambda), \mathbf{v} \in \eta_{k+1}(\mu)$. Seguindo exatamente os mesmo passos como acima, simplesmente trocando k por $k+1$, obtemos

$$0 = \{\mathbf{u},(\mathcal{A}-\mu\mathcal{I})^{k+1}\mathbf{v}\} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1-j}{j}(-(\lambda+\mu))^{k+1-j}\{(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{u},\mathbf{v}\}.$$

Como $\mu \in \eta_{k+1}(\lambda)$, tem-se que $(-\mathcal{A}+\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{u} = (-1)^j(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^j\mathbf{u} \in \eta_k(\lambda)$, como antes, e também como $\mathbf{v} \in \eta_{k+1}(\mu)$, pelo que provamos antes, segue que $0 = (\lambda+\mu)\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$; o que implica que $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} = 0$. □

Lema 2.8. *Seja uma matriz simplética* $\mathcal{M}$ *com dois autovalores* λ *e* μ *satisfazendo* $\lambda\mu \neq 1$. *A partir daí, tem-se que* $\{\eta(\lambda),\eta(\mu)\} = 0$.

Demonstração. De $\mathcal{M}^{\intercal}\mathcal{J}\mathcal{M} = \mathcal{J}$, obtemos $\{\mathbf{u},\mathcal{M}\mathbf{v}\} = \{\mathcal{M}^{-1}\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, consequentemente, usando indução, chegamos em $\{\mathbf{u},(\mathcal{M}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{v}\} = \{(\mathcal{M}^{-1}+\lambda\mathcal{I})^k\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, para $k \geq 1$. A partir daí, usando o Lema 2.6 e seguindo de forma análoga à proposição anterior, podemos concluir o resultado. □

Consideremos uma matriz Hamiltoniana real $\mathcal{A}$ de ordem $2n$. Agrupemos os autovalores de $\mathcal{A}$ em reais, imaginários puros e complexos que não são imaginários puros:

$$\pm\alpha_1, ..., \pm\alpha_k; \quad \pm i\beta_1, ..., \pm i\beta_r; \quad \pm\gamma_1 \pm i\delta_1, ..., \gamma_s \pm i\delta_s.$$

A partir daí, formemos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
&X = \eta^\dagger(0),\\
&U_j = \eta^\dagger(\alpha_j) \oplus \eta^\dagger(-\alpha_j),\\
&V_j = \eta^\dagger(-i\beta_j) \oplus \eta^\dagger(i\beta_j),\\
&Z_j = [\eta^\dagger(\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta^\dagger(\gamma_j - i\delta_j)] \oplus [\eta^\dagger(-\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta^\dagger(-\gamma_j - i\delta_j)];
\end{aligned}$$

e também as somas diretas

$$U = U_1 \oplus .... \oplus U_k, \quad V = V_1 \oplus ... \oplus V_r, \quad Z = Z_1 \oplus ... \oplus Z_s.$$

Logo, temos a decomposisão de $\mathbb{C}^{2n}$ em soma direta

$$\mathbb{C}^{2n} = X \oplus U \oplus V \oplus Z. \tag{2.18}$$

Usando o Lema 2.5, concluímos que $\{X, U \oplus V \oplus Z\} = 0$; consequentemente, pela Proposição 2.10, segue que X e $U \oplus V \oplus Z$ são subespaços simpléticos de $\mathbb{C}^{2n}$. Também, como $\{U, V \oplus Z\} = 0$, pela mesma razão U e $V \oplus Z$ são simpléticos. Por fim, argumentando da mesma forma, V e Z são simpléticos. E é claro que temos também que U_j, V_j, Z_j são todos subespaços simpléticos de $\mathbb{C}^{2n}$. Sendo assim, (2.18) nos dá uma decomposição de $\mathbb{C}^{2n}$ em soma direta de subespaços simpléticos.

Agora, lembremos que um espaço vetorial é uma *complexificação* se, e somente se, ele é invariante por conjugação. Dessa maneira, como cada U_j, V_j, Z_j é invariante por conjugação, usando o fato de que uma complexificação sempre possui uma base real, obtemos que esses subespaços possuem cada qual uma base real.

Nos próximos resultados iremos supor que a matriz $\mathcal{A}$ é uma matriz Hamiltoniana que possui todos os seus autovalores distintos e nenhum deles é nulo. Sendo assim, teremos que

$$\begin{aligned}
&X = \emptyset, \\
&U_j = \eta(\alpha_j) \oplus \eta(-\alpha_j), \\
&V_j = \eta(-i\beta_j) \oplus \eta(i\beta_j), \\
&Z_j = [\eta(\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(\gamma_j - i\delta_j)] \oplus [\eta(-\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(-\gamma_j - i\delta_j)].
\end{aligned}$$

O nosso próximo passo é o de encontrar, nesse caso, uma base real para cada U_j, V_j e Z_j. Esse é o conteúdo dos próximos três lemas. Mas antes disso, é interessante fazermos uma pequena discussão.

Dada uma matriz Hamiltonian $\mathcal{A}$ e uma matriz simplética $\mathcal{P}$, temos que $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é uma matriz Hamiltoniana. De fato, podemos escrever $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$ com$\mathcal{S}$ simétrica. Por outro lado, $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{P}^{\intercal}\mathcal{J}$. Com isso, chegamos em $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = \mathcal{J}(\mathcal{P}^{\intercal}\mathcal{S}\mathcal{P})$. E como $\mathcal{P}^{\intercal}\mathcal{J}\mathcal{P}$ é simétrica, segue que $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é Hamiltoniana.

Lema 2.9. *Podemos encontrar uma base real simplética de U_j na qual a matriz $\mathcal{A}$ restrita ao espaço U_j toma a forma*

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & -\alpha_j \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Fixemos $\mathbf{x}_j$ e $\mathbf{y}_j$ autovetores de α_j e $-\alpha_j$, respectivamente. Estes vetores de U_j são linearmente independentes; e como a dimensão de U_j é 2, segue que $\{\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\} \neq 0$; pois, caso contrário, $\{,\}$ seria nulo em U_j, o que não pode ocorrer, uma vez que a forma $\{,\}$ é não degenerada em U_j, pois U_j é simplética. A partir daí, tomemos os vetores $\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j$ e $\mathbf{v}_j = \frac{1}{\gamma_j}\mathbf{y}_j$, onde $\gamma_j = \{\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\}$. Com isso, temos $\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j\} = 1$; ou seja, $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j$ é uma base simplética de U_j. E é claro que tal base satisfaz a propriedade desejada. $\square$

Lema 2.10. *Existe uma base real simplética de V_j para a qual a matriz $\mathcal{A}$ restrita a V_j é alguma das duas formas abaixo:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Demonstração. Tomemos um autovetor $\mathbf{x}_j = \mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$ de $\mathcal{A}$ relacionado ao autovalor $i\beta_j$. A partir daí, $\mathcal{A}\mathbf{r}_j = -\beta_j\mathbf{s}_j$ e $\mathcal{A}\mathbf{s}_j = \beta_j\mathbf{r}_j$. Vamos provar que $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{s}_j$ são linearmente independentes. Para isso basta provarmos a indepedência linear com coeficientes reais, sendo a com coeficientes complexos vindo de forma imediata. Consideremos a e b reais com $a\mathbf{r}_j + b\mathbf{s}_j = 0$. Aplicando-se $\mathcal{A}$ nessa última igualdade, chegamos em $\beta_j(-a\mathbf{s}_j + b\mathbf{r}_j) = 0$, o que nos dá $a\mathbf{s}_j = b\mathbf{r}_j$. Sendo assim, $(a^2 + b^2)b\mathbf{r}_j = 0$, o que implica $a = 0 = b$.

Assim, $\mathbf{r}_j$ e $\mathbf{s}_j$ formam uma base real de Y_j. Como antes, temos $\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\} \neq 0$; do contrário $\{,\}$ seria nulo em V_j.

Suponhamos que $\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\} = \gamma_j^2 > 0$, com $\gamma_j > 0$. Com isso, tomemos $\mathbf{u}_j = \frac{1}{\gamma_j}\mathbf{r}_j$ e $\mathbf{v}_j = \frac{1}{\gamma_j}\mathbf{s}_j$. $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j$ formam uma base simplética de V_j, uma vez que $\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j\} = 1$. E como $\mathcal{A}\mathbf{u}_j = -\beta_j\mathbf{v}_j$ e $\mathcal{A}\mathbf{v}_j = \beta_j\mathbf{u}_j$, a matriz $\mathcal{A}|_{V_j}$ toma a primeira forma em (2.19).

Agora, suponhamos que $\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\} = -\gamma_j^2 < 0$, com $\gamma_j > 0$. Dessa vez, tomemos $\mathbf{u}_j = \frac{1}{\gamma_j}\mathbf{s}_j$ e $\mathbf{v}_j = \frac{1}{\gamma_j}\mathbf{r}_j$. Logo, $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j$ formam uma base simplética de V_j, cuja a matriz $\mathcal{A}_j|_{V_j}$ é a segunda em (2.19). Notemos que as bases cosntruídas são reais. $\square$

Lema 2.11. *Existe uma base simplética real de Z_j na qual a matriz $\mathcal{A}|_{V_j}$ é da forma*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_j & O \\ O & -\mathcal{B}_j^{\intercal} \end{pmatrix},$$

sendo $\mathcal{B}_j$ uma matriz 2×2 que possui $\gamma_j \pm i\delta_j$ como seus autovalores.

Demonstração. Comecemos provando que a soma direta $Z_j = [\eta(\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(\gamma_j - i\delta_j)] \oplus [\eta(-\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(-\gamma_j - i\delta_j)]$ é uma partição de Lagrange. Denotemos

$$U_j = \eta(\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(\gamma_j - i\delta_j), \quad V_j = \eta(-\gamma_j + i\delta_j) \oplus \eta(-\gamma_j - i\delta_j).$$

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U_j$ dados por $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{u} + b_1\overline{u}$ e $\mathbf{v}_2 = a_2\mathbf{u} + b_2\overline{\mathbf{u}}$, com $\mathbf{u}$ um autovetor relacionado ao autovalor $\gamma_j + i\delta_j$, e $\overline{\mathbf{u}}$ um elemento de $\eta(\gamma_j - i\delta_j)$. Com isso, obtemos $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = (a_1b_2 - a_2b_1)\{\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}\} = 0$. Porém, como $(\gamma_j + i\delta_j) + (\gamma_j - i\delta_i) = 2\gamma_i$, pelo Lema 2.5, segue que $\{\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}\} = 0$, e, portanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 0$. Analogamente, o mesmo vale considerando-se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_j$.

Sendo $Z_j = U_j \oplus V_j$ uma partição de Lagrange, podemos a partir de uma base de U_j construir uma base simplética de Z_j usando a Proposição 2.14. Além disso, como U_j e V_j são subespaços invariantes e fechados por conjugação, podemos tomar tal base real, e pela a Proposição 2.16, a matriz $\mathcal{A}$ restrita a Z_j nessa base toma a forma desejada. $\square$

O nosso caso de maior interesse vai ser o do Lema 2.10, que será muito importante no próximo capítulo. Desse modo, vamos estudá-lo um pouco mais a fundo.

Para um número real a, definimos o *sinal* de a como sendo dado pela seguinte expressão:

$$sign(a) := \begin{cases} 1, & \text{se } a > 0; \\ -1, & \text{se } a < 0; \\ 0, & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Com a notação da demonstração do último lema, percebemos que $\gamma_j = \sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}$, $\delta_j = sign\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$. A partir daí, tomemos os vetores de V_j

$$\mathbf{u}'_j = -k_j\mathbf{s}_j, \quad \mathbf{v}'_j = \delta_j k_j \mathbf{r}_j, \quad \text{sendo} \quad k_j = \gamma_j^{-1}.$$

E como na prova do Lema 2.10, $\mathbf{u}'_j, \mathbf{v}'_j$ formam uma base simplética de V_j e a matriz $\mathcal{A}|_{V_j}$ em tal base é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_j\beta_j \\ -\delta_j\beta_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, consideremos $V = V_1 \oplus ... \oplus V_r$. Tomemos a base simplética de V dada por $\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_r, \mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_r$. Como a matriz $\mathcal{A}|_{V_j}$ na base $\mathbf{u}'_j, \mathbf{v}'_j$ é a matriz acima, obtemos que $\mathcal{A}|_V$ na base simplética $\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_r, \mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_r$ é dada por

$$\begin{pmatrix} O & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & O \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = diag[\delta_1\beta_1, ..., \delta_r\beta_r]$. Agora, a matriz $\mathcal{P}$ de mudança de base da base canônica $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{2r}$ para a base $\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_r, \mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_r$ satisfaz

$$\mathcal{P}\mathbf{e}_j = \mathbf{u}'_j = -k_j\mathbf{s}_j, \quad \mathcal{P}\mathbf{e}_{n+j} = \mathbf{v}'_j = \delta_j k_j \mathbf{r}_j.$$

Portanto, $\mathcal{P}$ é dada por

$$\mathcal{P} = col[-k_1\mathbf{s}_1, ..., -k_n\mathbf{s}_n, \delta_1 k_1 \mathbf{r}_1, ..., \delta_r k_r \mathbf{r}_r].$$

Além disso, como $\mathcal{P}$ é uma matriz de mudança de base da base canônica para uma base simplética, $\mathcal{P}$ é simplética.

Coloquemos toda essa discussão no seguinte lema:

Lema 2.12. *Para cada V_j, seja $\gamma_j = \sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}$ e $\delta_j = sign\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$, sendo $\mathbf{x}_j = \mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$ um autovetor relacionado ao autovalor $i\beta_j$. Sejam $\mathbf{u}'_j = -k_j\mathbf{s}_j, \mathbf{v}'_j = \delta_j k_j \mathbf{r}_j$, onde $k_j = \gamma_j^{-1}$.*

Com isso, tais vetores formam uma base simplética de V_j, de modo que a matriz $\mathcal{A}|_{V_j}$ em tal base é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta_j\beta_j \\ -\delta_j\beta_j & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir daí, a matriz $\mathcal{A}|_V$ na base simplética $\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_r, \mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_r$ é dada por

$$\begin{pmatrix} O & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & O \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = diag[\delta_1\beta_1, ..., \delta_r\beta_r]$. Além disso, a matriz de mudança de base $\mathcal{P}$ da base canônica $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{2r}$ para a base $\mathbf{u}'_1, ..., \mathbf{u}'_r, \mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_r$ é a matriz simplética

$$\mathcal{P} = col[-k_1\mathbf{s}_1, ..., -k_r\mathbf{s}_r, \delta_1 k_1\mathbf{r}_1, ..., \delta_r k_r\mathbf{r}_r].$$

Agora, vejamos o caso em que $i\beta$ seja um *autovalor múltiplo*, isto é, com *multiplicidade geométrica* maior ou igual a 2. Em contrapartida, dizemos que um autovalor é um *autovalor simples* quando possui multiplicidade geométrica igual a 1.

Proposição 2.18. *Suponhamos que $i\beta$ seja um autovalor de uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{A}$ com multiplicidade (algébrica) k. Caso a restrição de $\mathcal{A}$ a $U = \eta^\dagger(i\beta) \oplus \eta^\dagger(-i\beta)$, que denotaremos por $\mathcal{A}_\beta$ seja diagonalizável, então existe uma base simplética real de U de modo que a matriz $\mathcal{A}_\beta$ nessa base seja igual a $\begin{pmatrix} O & \mathcal{B}_\beta \\ -\mathcal{B}_\beta & O \end{pmatrix}$, onde $\mathcal{B}_\beta = diag[\delta_1\beta, ..., \delta_k\beta]$, com $\delta_j = \pm 1$.*

Demonstração. Tomemos $\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_1 + i\mathbf{s}_1$ em $\eta^\dagger(i\beta)$. Como $\mathbf{x}_1$ é autovetor com autovalor $i\beta$, então $\overline{\mathbf{x}}_1$ é autovetor com autovalor $-i\beta$. Sendo assim, $\mathbf{x}_1$ e $\overline{\mathbf{x}}_1$ são linearmente independentes, uma vez que os mesmos são autovetores relacionados a autovalores diferentes. Com isso, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{s}_1$ são linearmente independentes e formam uma base real para o espaço bidimensional U_1 de U gerado por $\mathbf{x}_1$ e $\overline{\mathbf{x}}_1$, e, portanto, $0 \neq \{\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1\} = \langle \mathbf{r}_1, \mathcal{J}\mathbf{s}_1 \rangle$. Seja $\delta_1 = sign\{\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1\}$ e $\kappa_1 = \frac{1}{\sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}}$.

Consequentemente, $\mathbf{v}_1 = k_1\mathbf{r}_1, \mathbf{w}_1 = \delta_1 k_1\mathbf{s}_1$ formam uma base simplética de U_1, o que implica, portanto, que U_1 é um subespaço simplético de U. Notemos também que $\mathcal{A}\mathbf{v}_1 = \delta_1\beta\mathbf{w}_1$ e $\mathcal{A}\mathbf{w}_1 = \delta_1\beta\mathbf{v}_1$.

Como U_1 é um subespaço simplético de U, temos que $U_1^\perp$ é um subespaço simplético e que vale $U = U_1 \oplus U_1^\perp$. Podemos repetir o argumento para cada autovetor $\mathbf{x}_j = \mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$

de $i\beta$ e $\overline{\mathbf{x}}_j$ autovetor de $-i\beta$, e assim encontrar bases reais $\mathbf{v}_j = \kappa_j \mathbf{r}_j, \mathbf{w}_j = \delta_j \kappa_j \mathbf{s}_j$, onde $\delta_j = sign\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$ e $\kappa_j = \frac{1}{\sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}}$, para o espaço gerado pelos vetores $\mathbf{x}_j$ e $\overline{\mathbf{x}}_j$.

Pela Proposição 2.14, temos uma base simplética real $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k; \mathbf{w}_1, .., \mathbf{w}_k$ de $U = \eta^\dagger(i\beta) \oplus \eta^\dagger(-i\beta)$, a qual satisfaz

$$\mathcal{A}\mathbf{v}_j = -\delta_1 \beta \mathbf{w}_j, \quad \mathcal{A}\mathbf{w}_j = \delta_1 \beta \mathbf{v}_j, \quad \forall j \in \{1, ..., k\}.$$

□

A prova da proposição acima nos fornece uma maneira explícita de encontrar uma base simplética real para $U = \eta^\dagger(i\beta) \oplus \eta^\dagger(-i\beta)$; a saber, para cada $j \in \{1, ..., k\}$, consideremos os valores

$$\delta_j = sign\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}, \quad k_j = \frac{1}{\sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}}.$$

A paritr daí, os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \kappa_1 \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{v}_k = \kappa_k \mathbf{r}_k; \mathbf{w}_1 = \delta_1 \kappa_1 \mathbf{s}_1, ..., \mathbf{w}_k = \delta_k \kappa_k \mathbf{s}_k \tag{2.20}$$

formam uma base simplética para U.

Corolário 2.1. *Sejam $x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_k$ as coordenadas de $\mathbf{z} \in U$ na base* (2.20)*. Para $\mathcal{A}$ Hamiltoniana escrita na forma $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$, com $\mathcal{S}$ simétrica, consideremos o Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\intercal \mathcal{S}\mathbf{x}$. Daí, a expressão do Hamiltoniano induzido em U é dada por*

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\beta \sum_{s=1}^{k} \delta_s (x_s^2 + y_s^2). \tag{2.21}$$

Demonstração. Como $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{k} (x_j \mathbf{v}_j + y_j \mathbf{w}_j)$, temos $\mathcal{S}\mathbf{z} = \beta \sum_{s=1}^{k} \delta_s (x_s \mathcal{J}\mathbf{w}_s - y_s \mathcal{J}\mathbf{v}_s)$; logo,

$$\langle \mathbf{z}, \mathcal{S}\mathbf{z} \rangle = \beta \sum_{j,=1}^{k} \delta_s \left(x_j x_s \langle \mathbf{v}_j, \mathcal{J}\mathbf{w}_s \rangle - x_j y_s \langle \mathbf{v}_j, \mathcal{J}\mathbf{v}_s \rangle + y_j x_s \langle \mathbf{w}_j, \mathcal{J}\mathbf{w}_s \rangle - y_j y_s \langle \mathbf{w}_j, \mathcal{J}\mathbf{v}_s \rangle \right).$$

Como $\langle \mathbf{x}, \mathcal{J}\mathbf{y} \rangle = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ e (2.20) é base simplética esta equação se reduz à equação (2.21). □

3 A TEORIA DE GELFAND-LIDSKII

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos os conceitos de *estabilidade* e *estabilidade forte* de sistemas Hamiltonianos lineares periódicos. Relembrado alguns conceitos básicos, veremos como pode ser tomada a *decomposição de Floquet* de um sistema Hamiltoniano linear periódico. Depois, estudaremos os *teoremas de Krein-Gelfand-Lidskii* que nos darão condições necessárias e suficientes para a estabilidade forte. Com isso, estaremos aptos para estudarmos a *teoria de Gelfand-Lidskii*; onde para cada sistema Hamiltoniano linear periódico fortemente estável associaremos o chamado *índice de Gelfand-Lidskii*; além de dizermos que uma matriz de um tal sistema é *uma matriz fortemente estável*. Assim, diremos que duas matrizes fortemente estáveis estão na mesma *classe de estabilidade* se existir uma *homotopia* entre tais matrizes de modo que cada elemento da homopia seja também uma matriz fortemente estável. O *índice de Gelfand-Lidskii* nos permitirá dizer exatamente quais são as classes de estabilidade forte de uma matriz Hamiltoniana fortemente estável. Por fim, apresentaremos uma fórmula para o índice de Gelfand-Lidskii.

3.2 PRELIMINARES

3.2.1 A Exponencial de uma Matriz

Nesta seção iremos considerar matrizes em $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, onde $\mathbb{K}$ é igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Para uma matriz $\mathcal{A}$, vamos trabalhar com a seguinte *norma* de $\mathcal{A}$:

$$||\mathcal{A}|| := \sup_{||\mathbf{v}||=1} ||\mathcal{A}\mathbf{v}||, \tag{3.1}$$

onde para um vetor $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$, $||\mathbf{x}||$ é a norma Euclidiana usual; isto é, caso $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, então $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

É rotineiro provar que a expressão (3.1) define uma norma.

Percebemos que para um vetor qualquer $\mathbf{v}$ que não seja nulo temos $||\mathcal{A}\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}|| \leq ||\mathcal{A}||$, o que nos dá a desigualdade

$$||\mathcal{A}\mathbf{v}|| \leq ||\mathcal{A}||\,||\mathbf{v}||; \tag{3.2}$$

que obviamente vale também para $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Uma propriedade fundamental é a de que

$$||\mathcal{AB}|| \leq ||\mathcal{A}||\,||\mathcal{B}||. \tag{3.3}$$

De fato, para todo vetor unitário $\mathbf{v}$, temos por (3.2)

$$||\mathcal{AB}\mathbf{v}|| \leq ||\mathcal{A}||\,||\mathcal{B}\mathbf{v}|| \leq ||\mathcal{A}||\,||\mathcal{B}||\,||\mathbf{v}|| = ||\mathcal{A}||\,||\mathcal{B}||,$$

donde segue-se (3.3).

A *exponencial* de uma matriz $\mathcal{A}$ é definida como

$$e^{\mathcal{A}} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^j}{j!}.$$

Vamos provar que a expressão acima está bem definida. A partir de (3.3), para todo j, temos $||\frac{\mathcal{A}^j}{j!}|| \leq \frac{||\mathcal{A}||^j}{j!}$. Dessa maneira, como $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é um espaço normado, usando o fato de que a série numérica $\sum \dfrac{||\mathcal{A}||^j}{j!}$ é convergente, pelo *teorema de Weirstrass*, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^j}{j!}$ também é convergente.

Agora, enunciemos na próxima proposição algumas das mais fundamentais relações da exponencial.

Proposição 3.1. *Para duas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ matrizes, valem as seguintes relações:*

(a) $||\, e^{\mathcal{A}}\, || \leq e^{||\mathcal{A}||}$.

(b) *Sendo $\mathcal{P}$ uma matriz invertível, obtém-se $e^{\mathcal{PAP}^{-1}} = \mathcal{P}e^{\mathcal{A}}\mathcal{P}^{-1}$.*

(c) $e^{\mathcal{A}}\mathcal{A} = \mathcal{A}e^{\mathcal{A}}$.

(d) $e^{\mathcal{A}}e^{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = e^{\mathcal{B}}e^{\mathcal{A}}$ *se, e somente se, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$.*

(e) *A função definida em toda a reta com valores em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ dada por $e^{t\mathcal{A}}$ está bem definida, é diferenciável e vale a igualdade $\frac{d}{dt}(e^{t\mathcal{A}}) = \mathcal{A}e^{t\mathcal{A}}$.*

Demonstração. Todos os itens são de demonstração imediata, exceto o item (d), a demonstração do qual pode ser vista na Seção 3 do Capítulo 5 do livro [7]. O item (a), por exemplo, segue de que $||\mathcal{A}^n\mathbf{v}|| \leq ||\mathcal{A}||^n||\mathbf{v}||$, e o (b) de $(\mathcal{PAP}^{-1})^n = \mathcal{PA}^n\mathcal{P}^{-1}$. $\square$

3.2.2 Sistemas Lineares

Um *sistema linear (real) autônomo de ordem* n é uma equação da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}, \tag{3.4}$$

onde $\mathcal{A}$ uma matriz real $n \times n$ e $\mathbf{x}$ um vetor de $\mathbb{R}^n$.

Uma *solução* de (3.4) é uma função $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ definida em algum intervalo I da reta e tomando valores em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo à equação (3.4) para todo t estando em I.

O *fluxo* da equação (3.4) é dado por $\phi(t, \mathbf{x}) = e^{t\mathcal{A}}\mathbf{x}$; isto é, as soluções (que existem pelo *teorema de existência*) do *problema de valor inicial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

são dadas por $\phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{t\mathcal{A}}\mathbf{x}_0$.

Agora, um *sistema linear (real) não autônomo de ordem* n é uma expressão da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}, \tag{3.5}$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{A}(t)$ uma função contínua de um intervalo I da reta para o conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dizemos que o sistema (3.5) é *um sistema* τ*-periódico* se $\mathcal{A}(t)$ for τ-periódica ou seja, $\mathcal{A}(t+\tau) = \mathcal{A}(t)$, para todo t. Nesse caso, a norma da função $\mathcal{A}(t)$ será tomada como

$$||\mathcal{A}|| = \int_0^\tau ||\mathcal{A}(t)||dt.$$

A solução de (3.5) que satisfaz a condição inicial de que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ será denotada por $\phi(t, \mathbf{x}_0)$.

Vamos enunciar algumas das propriedades fundamentais da equação (3.5).

Proposição 3.2. *Para o sistema linear não autônomo* (3.5) *valem os seguintes itens:*

(a) *As soluções maximais estão definidas em todo o intervalo* I*.*

(b) *O conjunto das soluções maximais formam um espaço vetorial de dimensão* n*.*

(c) *Sejam* $\mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_k(t)$ *soluções maximais. A partir daí, para* $t_0 \in I$*, o conjunto de soluções* $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k\}$ *é linearmente independente se, e somente se, o conjunto dos vetores* $\{\mathbf{x}_1(t_0), ..., \mathbf{x}_k(t_0)\}$ *é linearmente independente.*

Tendo em vista a proposição anterior, tomemos uma base $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, ..., x_{1n}), ..., \mathbf{x}_n = (x_{n1}, ..., x_{nn})$ do espaço das soluções maximais. Tomando tal base, podemos formar a aplicação $\mathcal{X} : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

A matriz $\mathcal{X}(t)$ é dita ser uma *solução fundamental* do sistema (3.5). O termo solução fundamental vem do fato de que cada coluna de $\mathcal{X}(t)$ é solução de (3.5) se, e somente se,

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t).$$

Chamamos de *matrizante* do sistema (3.5) a solução fundamental cuja condição inicial é a matriz identidade.

Naturalmente, existem infinitas soluções fundamentais para o sistema (3.5), de acordo com a escolha de uma base para o espaço das soluções maximais. Entretanto, temos a proposição:

Proposição 3.3. *Para uma solução fundamental $\mathcal{X}(t)$ do sistema* (3.5) *e uma matriz constante invertível $\mathcal{P}$, $\mathcal{Y}(t) = \mathcal{X}(t)\mathcal{P}$ é ainda uma solução fundamental de* (3.5).

3.3 LOGARITMO DE UMA MATRIZ SIMPLÉTICA

Continuemos ainda considerando matrizes quadradas que sejam reais ou complexas.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas matrizes $n \times n$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é um *logaritmo* de $\mathcal{A}$ quando tivermos $\mathcal{A} = e^{\mathcal{B}}$. Uma vez satisfeita a relação $\mathcal{A} = e^{\mathcal{B}}$, há de valer necessariamente que $\mathcal{A}$ seja invertível, dado que $e^{\mathcal{B}}$ possui $e^{-\mathcal{B}}$ como inversa, pelo item (d) da Proposição 3.1 e do fato de que $e^{O} = \mathcal{I}$.

As proposições abaixo são de fundamental importância.

Proposição 3.4. *Um bloco de Jordan $\mathcal{J}_\lambda$ relacionado a um autovalor não nulo λ possui um logaritmo complexo.*

Proposição 3.5. *Toda matrix inversível possui um logaritmo complexo.*

Proposição 3.6. *Se $\mathcal{A}$ é uma matriz inversível com $\mathcal{A} = \mathcal{P}^2$, sendo $\mathcal{P}$ real, então $\mathcal{A}$ possui um logaritmo real.*

As demonstrações destas proposições podem ser vistas na referência [1]. Agora, vamos estudar o logaritmo de uma matriz Hamiltoniana. Para isso, precisamos da seguinte propor-posição:

Proposição 3.7. *Seja uma matriz simplética $\mathcal{M}$ com autovalor ρ. Denotemos $U = \eta^{\dagger}(\rho) \oplus \eta^{\dagger}(\rho^{-1})$. Afirmamos que U é um espaço simplético satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) *Existe uma base simplética B de U para a qual*

$$[\mathcal{M}|_U]_B = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_\rho & O \\ O & \mathcal{J}_\rho^{-\intercal} \end{pmatrix},$$

com $\mathcal{J}_\rho$ a forma de Jordan de $\mathcal{M}|_{\eta^{\dagger}(\rho)}$.

(b) *Caso $\mathcal{M}|_U$ seja diagonalizável, existe uma base simplética B de U de modo que*

$$[\mathcal{M}|_U]_B = \mathit{diag}[\rho, ..., \rho, \rho^{-1}, ..., \rho^{-1}],$$

com a quantidade de ρ's igual a dimensão de $\eta^{\dagger}(\rho)$.

Demonstração. Usando o Teorema da decomposição primária, podemos escrever $\mathbb{C}^{2n}$ como soma direta de subespaços $\mathcal{M}$-invariantes correspondentes aos autovalores de $\mathcal{M}$. A partir daí, podemos escrever uma decomposição $\mathcal{M}$-invariante $\mathbb{C}^{2n} = U \oplus V$, de modo que todos os autovalores de $\mathcal{M}|_V$ sejam diferentes de ρ e ρ^{-1}. Pelo Lema 2.8, segue que U e V são subespaços ortogonalmente simpléticos. Sendo assim, usando desta vez a Proposição 2.10, tem-se que U e V são subespaços simpléticos.

Pelo Lema 2.8, para $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\eta^{\dagger}(\rho)$, vale que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = 0$; o mesmo valendo para $\eta^{\dagger}(\rho^{-1})$. Daí, e do fato de que a dimensão de $\eta^{\dagger}(\rho)$ é igual a dimensão de $\eta^{\dagger}(\rho^{-1})$, segue que a decomposição $U = \eta^{\dagger}(\rho) \oplus \eta^{\dagger}(\rho^{-1})$ é uma divisão de Lagrange.

Tomemos uma base de Jordan do subespaço $\mathcal{M}|_{\eta^{\dagger}(\rho)}$ com forma de Jordan $\mathcal{J}_\rho$. A partir de tal base, usando a Proposição 2.17, podemos encontrar uma base de $\eta^{\dagger}(\rho^{-1})$ que juntamente com a base considerada formam uma base simplética de U. Consequentemente, de acordo com a Proposição 2.16, segue que $\mathcal{M}|_U$ toma a forma desejada.

Por fim, para provarmos o item (b), basta seguirmos os mesmos passos da prova de (a), só que ao invés de tomarmos uma base de Jordan, consideramos uma base de autovetores de $\eta^{\dagger}(\rho)$. $\square$

Proposição 3.8. *Para uma matriz simplética $\mathcal{M}$, existe uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{B}$ satisfazendo $e^{\mathcal{B}} = \mathcal{M}$.*

Demonstração. Como a matriz $\mathcal{M}$ é simplética, os seus autovalores distintos são da forma ρ_j, ρ_j^{-1}, para j em $\{1, ..., k\}$. Denotando $U_j = \eta^\dagger(\rho_j) \oplus \eta^\dagger(\rho_j^{-1})$, usando a proposição anterior, podemos encontrar uma base simplética ordenada $B_j = (B_j^{(1)}, B_j^{(2)})$ de U_j com $[\mathcal{M}|_{\eta^\dagger(\rho_j)}]_{B_j^{(1)}} = \mathcal{M}_j$ e $[\mathcal{M}|_{\eta^\dagger(\rho_j^{-1})}]_{B_j^{(2)}} = \mathcal{M}_j^{-\intercal}$, onde $\mathcal{M}_j$ é igual a forma de Jordan de $[\mathcal{M}|_{\eta^\dagger(\rho_j)}]_{B_j^{(1)}}$ caso U_j não seja diagonalizável ou igual a $diag[\rho_j, ..., \rho_j]$, com a quantidade de ρ's igual a dimensão de $\eta^\dagger(\rho)$, caso U_j seja diagonalizável. Desse modo, tomando a base ordenada $B = (B_1^{(1)}, ..., B_k^{(1)}, B_1^{(2)}, ..., B_k^{(2)})$ chegamos na igualdade

$$[\mathcal{M}]_B = diag[\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_k, \mathcal{M}_1^{-\intercal}, ..., \mathcal{M}_k^{-\intercal}].$$

Pela Proposição 3.4, existe uma matriz $\mathcal{B}_j$ com $e^{\mathcal{B}_j} = \mathcal{M}_j$. O que implica que $e^{-\mathcal{B}_j^\intercal} = \mathcal{M}_j^{-\intercal}$. Assim, tomando a matriz $\mathcal{B}$ definida por

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{P} & O \\ O & -\mathcal{P}^{-\intercal} \end{pmatrix}, \text{ com } \mathcal{P} = diag[\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k],$$

se obtém que $e^{\mathcal{B}} = \mathcal{M}$. Por fim, como $\mathcal{J}\mathcal{B}$ é simétrica, pelo item (d) da Proposição 2.5, segue que $\mathcal{B}$ é Hamiltoniana.

□

Proposição 3.9. *Uma matriz $\mathcal{A}$ é Hamiltoniana se, e somente se, $e^{\mathcal{A}}$ é simplética.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}$ seja Hamiltoniana. Logo, podemos escrever $\mathcal{A} = \mathcal{J}\mathcal{S}$, com $\mathcal{S}$ simétrica. Como $\mathcal{A}^\intercal = -\mathcal{S}\mathcal{J}$, e da igualdade de fácil verificação $\mathcal{J}e^{\mathcal{J}\mathcal{S}} = e^{\mathcal{S}\mathcal{J}}\mathcal{J}$, obtemos

$$(e^{\mathcal{A}})^\intercal \mathcal{J} e^{\mathcal{A}} = e^{-\mathcal{S}\mathcal{J}} \mathcal{J} e^{\mathcal{J}\mathcal{S}} = \mathcal{J}.$$

logo, $e^{\mathcal{A}}$ é simplética. Reciprocamente, suponhamos que $e^{\mathcal{A}}$ seja simplética. Sendo assim, $e^{t\mathcal{A}}$ é simplética também. Conseguentemente, $e^{t\mathcal{A}^\intercal}\mathcal{J}e^{t\mathcal{A}} = \mathcal{J}$. Diferenciando essa última igualdade e fazendo $t = 0$, chegamos em $\mathcal{A}^\intercal\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A} = O$. Portanto, $\mathcal{A}$ é Hamiltoniana. □

3.4 ESTABILIDADE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS LINEARES PERIÓDICOS

Consideremos um sistema linear definido em toda a reta e τ-periódico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}. \tag{3.6}$$

Denotemos por $B_r(\mathbf{x})$ a bola aberta de raio r centrada no ponto $\mathbf{x}$. A partir daí, temos as seguintes definições:

Definição 3.1. *O sistema* (3.6) *é dito ser um sistema estável se para cada ϵ positivo, existe δ positivo de modo que se $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0})$, então $\phi(t, \mathbf{x}) \in B_\epsilon(\mathbf{0})$, para todo t.*

Definição 3.2. *Dizemos que o sistema* (3.6) *é fortemente estável se é estável e existe ϵ positivo de modo que para toda matriz $\mathcal{A}_1(t)$ τ-periódica com $||\mathcal{A} - \mathcal{A}_1|| < \epsilon$, o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ é estável. Além disso, caso o sistema* (3.6) *seja constante ou Hamiltoniano, então $\mathcal{A}_1$ deve ser tomada como constante ou Hamiltoniana, respectivamente.*

Como a definição de estabilidade em si não necessita que consideremos o caso Hamiltoniano, os resultados sobre estabilidade que não se referirem a sistemas Hamiltonianos em específico serão apenas enunciados sem ser apresentada uma prova, podendo serem encontrados em [1]. Para os resultados relacionados à estabilidade forte de um sistema, por sua vez, por necessitarem que analisemos o caso Hamiltoniano separadamente, serão apresentados uma demonstração.

Nesta seção vamos estudar um pouco sobre sistemas Hamiltonianos constantes $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ que sejam fortemente estáveis.

Temos a seguinte proposição que nos será útil:

Proposição 3.10. *Um sistema linear constante $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ é estável se, e somente se, todos os autovalores de $\mathcal{A}$ são puramente imaginários, incluido 0, e $\mathcal{A}$ é diagonalizável sobre o corpo dos complexos.*

Tendo em vista o enunciado das duas proposições seguintes, consideremos uma equação da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{3.7}$$

sendo $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Portanto, temos a *existência local e unicidade de soluções* da equação acima.

Dizemos que $\mathbf{x}_0$ é um *ponto de equilíbrio* de (3.7) se $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_0$ é dito ser estável se dado ϵ positivo, existe δ postivo com a propriedade de que para todo $\mathbf{x}$ em $B_\delta(\mathbf{x}_0)$, a solução $\phi(t, \mathbf{x})$ de (3.7) está em $B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$, para qualquer tempo t.

Dessa maneira, um sistema linear constante $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ será estável quando $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ for um ponto de equilíbrio estável deste sistema.

Os dois teoremas abaixo são bem conhecidos dentro da teoria das equações diferenciais.

Teorema 3.1 (Lyapunov)**.** *Seja* $\mathbf{x}_0$ *um ponto de equilíbrio de* (3.7)*. Suponhamos que* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sejam os autovalores da matriz* $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$*. A partir daí, se o equilíbrio* $\mathbf{x}_0$ *for estável, então* $\mathbf{Re}\lambda_j \leq 0$*, para todo* j*. Por conseguinte, se existir um autovalor* λ_j *com* $\mathbf{Re}\lambda_j > 0$*, então o equilíbrio não é estável.*

Teorema 3.2 (Dirichlet)**.** *Suponhamos que* (3.7) *possua um ponto de equilíbrio* $\mathbf{x}_0$ *e uma integral primeira* $\Psi(\mathbf{x})$ *numa vizinhança de* $\mathbf{x}_0$*. Se* $\Psi(\mathbf{x})$ *é positiva ou negativa definida, então o equilíbrio* $\mathbf{x}_0$ *é estável.*

Para a prova da próxima proposição precisaremos do Lema abaixo.

Lema 3.1. *O Hamiltoniano de um sistema Hamiltoniano autônomo é uma integral primeira de tal sistema.*

Demonstração. Seja $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ uma solução do sistema Hamiltonianao em questão. Ainda, suponhamos que H seja o Hamiltoniano de tal sistema. Para a demonstração, temos simplesmente que

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) = \langle H_{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \langle H_{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}} \rangle = \langle \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \langle -\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}} \rangle = 0.$$

□

Agora, vamos nas duas próximas proposições dar condições necessárias e suficientes para que um sistema Hamiltoniano constante seja fortemente estável.

Proposição 3.11. *Tomemos* $\mathcal{A}$ *uma matriz Hamiltoniana constante. Se o Hamiltoniano* H *do sistema* $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ *é positivo definido ou negativo definido, então* $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ *é fortemente estável.*

Demonstração. Tomemos $\mathcal{S} = -\mathcal{J}\mathcal{A}$ a matriz simétrica que define $\mathcal{A}$. Daí, como $H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathcal{S}\mathbf{x}$, segue que $\mathcal{S}$ é positiva definida ou negativa definida. Agora, devemos perceber que qualquer matriz simétrica $\mathcal{S}_1$ suficientemente próxima de $\mathcal{S}$ é também definida. De fato, suponhamos que $\mathcal{S}$ seja positiva definida. Como $\mathcal{S}$ está fixa, existe δ positivo satisfazendo $\langle \mathbf{x}, \mathcal{S}\mathbf{x} \rangle \geq \delta$, para todo $\mathbf{x}$ com $||\mathbf{x}|| = 1$. Temos ainda que $\langle \mathbf{x}, \mathcal{S}_1\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathcal{S}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S})\mathbf{x} \rangle$. Daí, usando

$$-||\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}||||\mathbf{x}||^2 \leq \langle \mathbf{x}, (\mathcal{S}_1 - \mathcal{S})\mathbf{x} \rangle \leq ||\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}||||\mathbf{x}||^2,$$

obtemos, para $||\mathbf{x}|| = 1$, $\langle \mathbf{x}, \mathcal{S}_1\mathbf{x}\rangle \geq \delta - ||\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}|| > 0$, caso $||\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}|| < \delta$. Sendo assim, para $\mathcal{S}_1$ com $||\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}|| < \delta$, $\mathcal{S}$ é positiva definida. Analogamente, prova-se que se $\mathcal{S}$ é negativa definida, então $\mathcal{S}_1$ é negativa definida, caso $\mathcal{S}_1$ esteja suficientemente próxima de $\mathcal{S}$.

Agora, tomemos uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{A}_1$ com $||\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}|| < \delta$, onde $\mathcal{S}_1$ é a matriz simétrica satisfazendo $\mathcal{A}_1 = \mathcal{J}\mathcal{S}_1$. Como $||\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}|| < \delta$, segue que $\mathcal{S}_1$ é positiva ou negativa definida. Consequentemente, o Hamiltoniano $H_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathcal{S}_1\mathbf{x}$ é positivo ou negativo definido; e além disso, como H_1 é uma primeira integral do sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1\mathbf{x}$, pelo o teorema de Dirichlet, tem-se que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1\mathbf{x}$ é estável. Portanto, o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ é fortemente estável. $\square$

Proposição 3.12. *Se o sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ é fortemente estável, então 0 não é autovalor de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Suponhamos que 0 é autovalor de $\mathcal{A}$. Seja $\mathbf{v}$ um autovetor de $\mathcal{A}$ relacionado a 0 que seja unitário. A partir de $\mathbf{v}$, escolhemos vetores $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ de modo que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ formem uma base para $\mathbb{R}^n$. Denotemos $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$.

Fixemos um vetor $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ escrito na base B como $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$. Definimos as seguintes normas:

$$||\mathbf{x}||_B := \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}, \quad ||\mathbf{x}||_\infty^B := max\{|a_1|, ..., |a_n|\}.$$

A norma Euclidiana ainda será denotada por $||\mathbf{x}||$. Como todas as normas de $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, podemos encontrar uma constante positiva C de modo que $||\mathbf{y}||_\infty^B < C||\mathbf{y}||$, para todo vetor $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$. Desse modo, uma vez que $||\mathbf{x}||_\infty^B \leq ||\mathbf{x}||_B$, segue que $|a_j| \leq C||\mathbf{x}||$, para todo j.

Fixemos ϵ real positivo. Tomemos uma matriz $\mathcal{A}_\epsilon$ $n \times n$ satisfazendo $\mathcal{A}_\epsilon\mathbf{v}_1 = \frac{\epsilon}{2C}\mathbf{v}_1$ e $\mathcal{A}_\epsilon\mathbf{v}_j = \mathcal{A}\mathbf{v}_j$, para j diferente de 1. Consequentemente, $||\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A}|| = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$. Para provarmos isso, seja $\mathbf{u}$ satisfazendo $||\mathbf{u}|| = 1$, com representação na base B dada por $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$. Com isso, obtemos

$$||(\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A})\mathbf{u}|| = ||\frac{\epsilon}{2C}a_1\mathbf{v}_1|| \leq \frac{\epsilon}{2C}|a_1| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Dessa maneira, $||\mathcal{A} - \mathcal{A}_\epsilon|| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, tendo em vista que $||\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A}|| = \sup\limits_{||\mathbf{x}||=1} ||\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A}\mathbf{x}||$.

Como $\frac{1}{2}\epsilon$ é um autovalor real de $\mathcal{A}_\epsilon$, pela Proposição 3.10, segue que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_\epsilon\mathbf{x}$ não é estável. Consequentemente, $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ não é fortemente estável.

Ainda supondo que 0 é autovalor de $\mathcal{A}$, consideremos o caso Hamiltoniano. Suponhamos que $n = 2m$ e que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ seja um sistema Hamiltoniano estável. Como $\mathcal{A}$ é Hamiltoniana,

0 é um autovalor com multiplicidade pelo menos 2. Também, sendo o sistema estável, $\mathcal{A}$ é diagonalizável. Assim, $\eta^{\dagger}(0)$ possui dimensão pelo menos 2 e como tal espaço é um susbespaço simplético, podemos extrair os dois primeiros vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_{n+1}$ de uma base simplética de $\eta^{\dagger}(0)$. Em particular, $\omega_{\mathcal{J}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{n+1}) = 1$. Com isso, consideremos o subespaço $W = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{n+1}]$ gerado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_{n+1}$. Logo, $W^{\perp}$ é um subespaço simplético que admite uma base simplética $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{2m}$. Desse modo, $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{n+1}, ..., \mathbf{v}_{2m}\}$ é uma base simplética de $\mathbb{R}^{2m}$. A partir daí, existe uma constante positiva C satisfazendo $||\mathbf{x}||_{\infty}^{B} < C||\mathbf{x}||$, para todo vetor $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^{2m}$.

Consideremos o operador de $\mathbb{R}^{2m}$ definido como a multiplicação à esquerda pela matriz $\mathcal{A}$, que podemos chamar simplesmente de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é Hamiltoniana, a matriz do operador em questão na base canônica é $\mathcal{A}$, e uma vez que a própria base canônica é simplética, segue que o operador $\mathcal{A}$ é um operador Hamiltoniano. Fixemos ϵ real positivo. Além disso, tomemos M como sendo o maior dos números reais $||\mathbf{v}_1||$ e $||\mathbf{v}_{n+1}||$. Vamos definir o operador T_ϵ de $\mathbb{R}^{2n}$ que satisfaz $T_\epsilon \mathbf{v}_1 = \frac{\epsilon}{4CM}\mathbf{v}_1$, $T_\epsilon \mathbf{v}_{n+1} = -\frac{\epsilon}{4CM}\mathbf{v}_{n+1}$ e $T_\epsilon \mathbf{v}_j = \mathcal{A}\mathbf{v}_j$, para j diferente de 1 e $n+1$. Como $\mathcal{A}$ é um operador Hamiltoniano, é trivial verificar que para quaisquer $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$ de B, vale que $\omega_{\mathcal{J}}(T_\epsilon \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) + \omega_{\mathcal{J}}(\mathbf{v}_i, T_\epsilon \mathbf{v}_j) = 0$. Portanto, T_ϵ é um operador Hamiltoniano. Dessa maneira, a matriz $\mathcal{A}_\epsilon = [T_\epsilon]_B^B$ é uma matriz Hamiltoniana.

Consideremos um vetor qualquer $\mathbf{u}$ satisfazendo $||\mathbf{u}|| = 1$. A partir daí, escrevendo $\mathbf{u}$ na base B como $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_{2m}\mathbf{v}_{2m}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
||(\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A})\mathbf{u}|| =& ||\frac{a_1\epsilon}{4CM}\mathbf{v}_1 - \frac{a_{n+1}\epsilon}{4CM}\mathbf{v}_{n+1}|| \leq \frac{\epsilon}{4CM}(|a_1|||\mathbf{v}_1|| + |a_{n+1}|||\mathbf{v}_{n+1}||) \\
\leq& \frac{\epsilon}{4C}(|a_1| + |a_{n+1}|) \leq \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}
$$

uma vez que temos $|a_1|, |a_{n+1}| < C$. Com isso, concluímos que $||\mathcal{A}_\epsilon - \mathcal{A}|| \leq \epsilon$.

Por fim, como $\mathcal{A}_\epsilon$ possui autovalores reais, o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_\epsilon \mathbf{x}$ não é estável; consequentemente, $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ não é fortemente estável. □

3.5 A DECOMPOSIÇÃO DE FLOQUET DE UM SISTEMA HAMILTONIANO PERIÓDICO LINEAR

Dado um sistema linear τ-periódico real

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}, \tag{3.8}$$

com matrizante $\mathcal{X}(t)$, existe uma decomposição, chamada de *decomposição de Floquet*,

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}, \tag{3.9}$$

com $\mathcal{Q}(t)$ uma matriz τ-periódica.

Provemos tal resultado. Para isso, seja $\mathbf{x}(t)$ uma solução de (3.8). Consideremos $\mathbf{u(t)} = \mathbf{x}(t+\tau)$. Como o sistema (3.8) é τ-periódico, $\mathbf{u}(t)$ também é solução de tal sistema. Sendo assim, cada coluna de $\mathcal{X}(t+\tau)$ é uma combinação linear das colunas de $\mathcal{X}(t)$, o que implica que existe uma matriz $\mathcal{C}$ satisfazendo $\mathcal{X}(t+\tau) = \mathcal{X}(t)\mathcal{C}$. Calculando essa última igualdade em $t = 0$, do fato de $\mathcal{X}(0) = \mathcal{I}$, segue que

$$\mathcal{X}(t+\tau) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}(\tau). \tag{3.10}$$

Como $\mathcal{X}(\tau)$ é inversível, existe $\mathcal{B}$ complexa cumprindo $\mathcal{X}(\tau) = e^{\tau\mathcal{B}}$. Por conseguinte, podemos considerar a expressão $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{X}(t)e^{-t\mathcal{B}}$; a qual é equivalente a $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$. Por fim, basta provarmos que $\mathcal{Q}(t)$ é τ-periódica. Porém, tal resultado é imediato:

$$\mathcal{Q}(t+\tau) = \mathcal{X}(t+\tau)e^{-(t+\tau)\mathcal{B}} = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}(\tau)e^{-\tau\mathcal{B}}e^{-t\mathcal{B}} = \mathcal{X}(t)e^{-t\mathcal{B}} = \mathcal{Q}(t).$$

Da identidade (3.10), obtemos $\mathcal{X}(2\tau) = \mathcal{X}(\tau)^2$. Sendo $\mathcal{X}(\tau)$ uma matriz real, tem-se que $\mathcal{X}(2\tau)$ possui um logaritmo real. Com isso, existe uma matriz $\mathcal{B}$ real satisfazendo $\mathcal{X}(2\tau) = e^{2\tau\mathcal{B}}$. Como $\mathcal{X}(t+2\tau) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}(2\tau)$, usando o mesmo argumento anterior, podemos encontrar $\mathcal{Q}(t)$, sendo desta vez 2τ-periódica, satisfazendo $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$. Portanto, temos a seguinte observação:

Lema 3.2. *Na decomposição de Floquet* (3.9) *podemos tomar* $\mathcal{Q}(t)$ *como sendo* 2τ*-periódica, e a partir daí podemos considerar* $\mathcal{B}$ *como uma matriz real.*

Agora, suponhamos que tenhamos $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$ e $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}_0(t)e^{t\mathcal{B}_0}$ duas decomposições de Floquet com $\mathcal{Q}(t)$ τ-periódica e $\mathcal{Q}_0(t)$ 2τ-periódica. Assim sendo, de $\mathcal{X}(2\tau) = \mathcal{X}(\tau)^2$, tem-se que $e^{2\tau\mathcal{B}} = e^{2\tau\mathcal{B}_0}$. Daí,

$$2\tau\mathcal{B}_0 = 2\tau\mathcal{B} + \text{diag}[\mathcal{K}_1, ..., \mathcal{K}_r],$$

onde $\mathcal{K}_j = 2\pi i k_j \mathcal{I}$ para algum real k_j.

Por outro lado, se tivermos $\mathcal{Q}(t)$ e $\mathcal{Q}_0(t)$ 2τ-periódicas, ainda temos a igual acima. Agora, se $\mathcal{Q}(t)$ e $\mathcal{Q}_0(t)$ forem ambas τ-periódicas, teremos que

$$\tau\mathcal{B}_0 = \tau\mathcal{B} + diag[\mathcal{K}_1, ..., \mathcal{K}_r].$$

No que segue ainda estaremos trabalhando com o sistema (3.8) tendo decomposição de Floquet τ-periódica ou 2τ-periódica (3.9).

A primeira aplicação fundamental da decomposição de Floquet é transformar o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ τ-periódico num sistema linear constante como enunciado na proposição a seguir.

Proposição 3.13. *A mudança de variáveis* $\mathbf{x} = \mathcal{Q}(t)\mathbf{y}$ *transforma* $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ *no sistema linear constante* $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$.

Demonstração. Diferenciando $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{X}(t)e^{-t\mathcal{B}}$ chegamos em

$$\dot{\mathcal{Q}}(t) = \dot{\mathcal{X}}(t)e^{-t\mathcal{B}} - \mathcal{X}(t)e^{-t\mathcal{B}}\mathcal{B} = \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t)e^{-t\mathcal{B}} - \mathcal{X}(t)e^{-t\mathcal{B}}\mathcal{B} = \mathcal{A}(t)\mathcal{Q}(t) - \mathcal{Q}(t)\mathcal{B}.$$

Usando isso, e desta vez diferenciando $\mathbf{x} = \mathcal{Q}(t)\mathbf{y}$, obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathcal{Q}}(t)\mathbf{y} + \mathcal{Q}(t)\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A}(t)\mathcal{Q}(t)\mathbf{y} - \mathcal{Q}(t)\mathcal{B}\mathbf{y} + \mathcal{Q}(t)\dot{\mathbf{y}}.$$

Por fim, substituindo $\mathbf{x} = \mathcal{Q}(t)\mathbf{y}$ na equação acima, ficamos com

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x} + \mathcal{Q}(t)(\dot{\mathbf{y}} - \mathcal{B}\mathbf{y}).$$

E é claro que de tal igualdade temos o resultado desejado. □

Tanto os autovalores de $\mathcal{X}(\tau)$ (respectivamente, $\mathcal{X}(2\tau)$) quanto os de $\mathcal{B}$ desempenham um papel fundamental na teoria dos sistemas lineares estáveis e fortemente estáveis. Sendo assim, é de muita utilidade darmos nomes a tais objetos.

Definição 3.3. *Os autovalores de* $\mathcal{X}(\tau)$ *(respectivamente,* $\mathcal{X}(2\tau)$*) são chamados de multiplicadores do sistema* (3.8)*, enquanto que os autovalores de* $\mathcal{B}$ *chamaremos de valores característicos de tal sistema.*

Fixemos uma matriz $\mathcal{B}$. Suponhamos que $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sejam todos autovalores distintos de $\mathcal{B}$, com as respectivas multiplicidades (algébricas) iguais a $m_1, ..., m_k$. Desse modo, temos uma base de Jordan B com $[\mathcal{B}]_B = diag[\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k]$, onde $\mathcal{B}_j = diag[\mathcal{J}_{p_{j,1}}(\omega_j), ..., \mathcal{J}_{p_{j,r_j}}(\omega_j)]$, com $\mathcal{J}_{p_{j,k}}$ sendo um bloco de Jordan básico de ordem $p_{j,k}$ relacionado ao autovalor ω_j; além de $p_{j,1} + ... + p_{j,r_j} = m_j$.

Daí, o que temos é $e^{[\mathcal{B}]_B} = diag[e^{\mathcal{B}_1}, ..., e^{\mathcal{B}_n}]$. E como a exponencial de um bloco básico de Jordan relacionado a um autovalor ω_j é uma matriz triangular com todos os elementos da diagonal iguais a e^{ω_j}, segue que os elementos da diagonal de $e^{[\mathcal{B}]_B}$ são dados por $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_k}, ..., e^{\lambda_k}$, onde cada e^{λ_j} aparece numa quantidade igual a m_j. Portanto, os autovalores de $e^{[\mathcal{B}]_B}$ são $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_k}$, com respectivas multiplicidades (algébricas) $m_1, ..., m_k$. Dessa maneira, temos a seguinte observação:

Lema 3.3. *Se $\lambda_1, ..., \lambda_k$ são os valores característicos de* (3.8)*, com respectivas multiplicidades (algébricas) $m_1, ..., m_k$, então os multiplicadores de* (3.8) *são dados por $e^{\tau\lambda_1}, ..., e^{\tau\lambda_k}$ (respectivamente, $e^{2\tau\lambda_1}, ..., e^{2\tau\lambda_k}$) com multiplicidades (algébricas) dadas por $m_1, ..., m_k$, respectivamente.*

Lema 3.4. *Se algum dos sistemas $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ ou $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é estável e λ é um autovalor de $\mathcal{B}$ com multiplicidade m, segue que $e^{\tau\lambda}$ (respectivamente, $e^{2\tau\lambda}$) é um autovalor de $\mathcal{X}(2\tau)$ com multiplicidade m satisfazendo $\eta(\lambda) = \eta(e^{\tau\lambda})$ (respectivamente, $\eta(\lambda) = \eta(e^{2\tau\lambda})$).*

Agora, vamos analisar o caso em que o sistema (3.8) é Hamiltoniano τ-periódico. Nesse caso podemos tomar uma decomposição de Floquet com $\mathcal{Q}(t)$ simplética e $\mathcal{B}$ Hamiltoniana. Para vermos isso iremos precisar do seguinte lema:

Lema 3.5. *Se* (3.8) *é um sistema Hamiltoniano, então $\mathcal{X}(t)$ é uma matriz simplética para todo t.*

Demonstração. Devemos provar que

$$\mathcal{X}(t)^\intercal \mathcal{J}\mathcal{X}(t) = \mathcal{J}, \tag{3.11}$$

para todo tempo t. Para $t = 0$ o resultado é trivial, uma vez que $\mathcal{X}(0) = \mathcal{I}$.

Diferenciando o lado esquerdo da equação (3.8), e usando o fato de que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{J}\mathcal{S}(t)$ com $\mathcal{S}(t)$ simétrica, chegamos em

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{X}(t)^\intercal \mathcal{J}\mathcal{X}(t)\right) &= \dot{\mathcal{X}}(t)^\intercal \mathcal{J}\mathcal{X}(t) + \mathcal{X}(t)^\intercal \mathcal{J}\dot{\mathcal{X}}(t) = (\mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t))^\intercal \mathcal{J}\mathcal{X}(t) + \mathcal{X}(t)^\intercal \mathcal{J}\mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t) \\ &= (\mathcal{J}\mathcal{S}(t)\mathcal{X}(t))^\intercal \mathcal{J}\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}(t)^\intercal \mathcal{S}(t)\mathcal{X}(t) = O.\end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathcal{X}(t)^\intercal \mathcal{J}\mathcal{X}(t)$ é uma matriz constante; e como o seu valor em $t = 0$ é $\mathcal{J}$, segue a validade da equação (3.11). □

Lembremos que para uma matriz simplética $\mathcal{M}$, existe uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{D}$ com $\mathcal{M} = e^{\mathcal{D}}$. Dessa maneira, como estamos supondo que o sistema (3.8) é um sistema Hamiltoniano, segue que $\mathcal{X}(t)$ é simplética. Consequentemente, existe uma matriz Hamiltoniana $\mathcal{B}$ satisfazendo $\mathcal{X}(\tau) = e^{\tau\mathcal{B}}$ (respectivamente, $\mathcal{X}(\tau) = e^{2\tau\mathcal{B}}$). Dessa maneira, como $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{X}(t)e^{-\tau\mathcal{B}}$ (respectivamente, $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{X}(t)e^{-2t\mathcal{B}}$), $\mathcal{Q}(t)$ é simplética. Vamos colocar tal resultado em termos de proposição.

Proposição 3.14. *Se o sistema* (3.8) *é Hamiltoniano, então $\mathcal{Q}(t)$ pode ser tomada como simplética e $\mathcal{B}$ como Hamiltoniana na decomposição de Floquet* (3.9).

Para encerrarmos esta seção vamos falar sobre a decomposição de Floquet de um sistema τ-periódico estável.

A proposição a seguir é bem conhecida no estudo das equações diferenciais.

Proposição 3.15. *O sistema τ-periódico $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é estável se, e somente se, todas as suas soluções são limitadas.*

Como consequência de tal proposição, temos os dois resultados a seguir.

Proposição 3.16. *O sistema τ-periódico $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é estável se, e somente se, a sequência $||\mathcal{X}(\tau)^k||$ é limitada.*

Demonstração. Para todo k real, temos a identidade $\mathcal{X}(k\tau + t) = \mathcal{X}(t)\mathcal{X}(\tau)^k$. Porém, $||\mathcal{X}(t)||$ é limitada no intervalo compacto $[0, \tau]$, o que implica que $||\mathcal{X}(t)||$ é limitada em toda a reta se, e somente se, $||\mathcal{X}(\tau)^k||$ é uma sequência limitada para todo t. Sendo assim, as soluções $\mathbf{x}(t) = \mathcal{X}(t)\boldsymbol{\xi}$ são limitadas, isto é, $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é estável se, e somente se, $||\mathcal{X}(\tau)^k||$ é uma sequência limitada. $\square$

Teorema 3.3. *$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é estável se, e somente se, $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é estável.*

Demonstração. Tomemos $\mathbf{x}(t) = \mathcal{Q}(t)\mathbf{y}(t)$. Uma vez que e que $||\mathcal{Q}(t)||$ e $||\mathcal{Q}^{-1}(t)||$ são limitada, por $\mathcal{Q}(t)$ ser periódica, temos que $\mathbf{x}(t)$ é limitada se, e somente se $\mathbf{y}(t)$ for limitada; e, portanto, o resultado segue da Proposição 3.15. $\square$

Suponhamos que o sistema (3.13) é estável; o que implica que $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ também é estável. Dessa maneira, pelo Teorema 3.10, $\mathcal{B}$ é diagonalizável sobre os complexos. Consequentemente, supondo que $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sejam os distintos autovalores de $\mathcal{B}$ com multiplicidades $m_1, ..., m_k$, respectivamente, cada autoespaço $\eta(\lambda_j)$ possui dimensão m_j. Tomemos uma base $\mathbf{v}_1^{(j)}, ..., \mathbf{v}_{m_j}^{(j)}$ de $\eta(\lambda_j)$. Primeiramente, percebemos que para um autovetor $\mathbf{v}$ de $\mathcal{B}$ com autovalor λ, vale que $\mathbf{v}$ é um autovetor de $\mathcal{X}(\tau)$ (respectivamente, $\mathcal{X}(2\tau)$) com autovalor $e^{\tau\lambda}$ (respectivamente, $e^{2\tau\lambda}$). De fato, basta percebermos que ambas as funções $\phi(t) = e^{t\mathcal{B}}\mathbf{v}$ e $\psi(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ são soluções do problema de valor inicial $\dot{\mathbf{x}} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$; o que implica que $e^{t\mathcal{B}}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Fazendo $t = \tau$ (respectivamente, $t = 2\tau$), obtemos o desejado. Assim, para cada j em $\{1, ..., k\}$, tem-se que $\mathbf{v}_1^{(j)}, ..., \mathbf{v}_{m_j}^{(j)}$ formam um conjunto linearmente independente de $\eta(e^{\tau\lambda_j})$ (respectivamente, $\eta(e^{2\tau\lambda_j})$). Por fim, como a soma $m_1 + ... + m_k$ é igual a ordem de $\mathcal{B}$, devemos ter necessariamente que cada m_j é a dimensão do autoespaço $\eta(e^{2\tau\lambda})$ (respectivamente, $\eta(e^{2\tau\lambda})$). Conseguentemente, os vetores $\mathbf{v}_1^{(j)}, ..., \mathbf{v}_{m_j}^{(j)}$ formam uma base para $\eta(e^{\tau\lambda_j})$ (respectivamente,

$\eta(e^{2\tau\lambda_j})$). Portanto, concluímos que $\eta(\lambda_j) = \eta(e^{\tau\lambda_j})$ (respectivamente, $\eta(\lambda_j) = \eta(e^{2\tau\lambda_j})$), para todo j. E é claro que o mesmo é válido supondo-se que $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é estável. Enunciemos esta conclusão.

3.6 OS TEOREMAS DE KREIN-GELFAND-LIDSKII

3.6.1 O Primeiro Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii

Tomemos $\mathcal{A}$ uma matriz Hamiltoniana. Consideremos o sistema Hamiltoniano $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$. Suponhamos que $\pm i\beta_1, ..., \pm i\beta_n$, com $\beta_j > 0$, para todo j, sejam todos os autovalores puramente imaginários distintos de $\mathcal{A}$. Para cada j em $\{1, ..., n\}$, consideremos $U_j = \eta^\dagger(i\beta_j) \oplus \eta^\dagger(-i\beta_j)$. Denotemos por H_j o Hamiltoniano dado pela a restrição de $\mathcal{A}$ a U_j. A partir daí, Mantendo a notação, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.4 (Primeiro Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii)**.** *Suponhamos que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ seja estável. Sendo assim, tal sistema é fortemente estável se, e somente se, 0 não é um autovalor de $\mathcal{A}$ e cada H_j é positivo ou negativo definido.*

Demonstração. Suponhamos que o sistema em questão seja fortemente estável. Logo, pela Proposição 3.12, vale que 0 não é um autovalor de $\mathcal{A}$. Agora, para o Hamiltoniano H_j definido em U_j, usando o Corolário 2.1, podemos obter uma base simplética de U_j de modo que o Hamiltoniano H_j nas cordenadas dadas por tal base assume a forma

$$H_j = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m_j} \delta_s \beta_j (x_s^2 + y_s^2),$$

com $\delta_s \in \{-1, 1\}$ e m_j a multiplicidade de $i\beta_j$. Agora, suponhamos que algum H_j é indefinido. Logo, temos um par de $\delta_s' s$ tal que um deles seja igual a 1 e o outro igual a -1. Assim, podemos supor que $\delta_1 = 1$ e $\delta_2 = -1$. Daí, consideremos o Hamiltoniano $H_j^{(\epsilon)} = H_j + \epsilon y_1 y_2$. Sendo assim, $H_j^{(\epsilon)}$ é dado por

$$H_j^{(\epsilon)} = \frac{1}{2}\beta_j(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2}\beta_j(x_2^2 + y_2^2) + \epsilon y_1 y_2 + \frac{1}{2}\beta_j \sum_{s=3}^{n} \delta_s (x_s^2 + y_s^2).$$

Consequentemente, $\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J}\nabla H_j^{(\epsilon)}$ é equivalente a escrever

$$\dot{x_1} = \beta_j y_1 + \epsilon y_2, \quad \dot{x}_2 = -\beta_j y_2 + \epsilon y_1, \quad \dot{y}_1 = -\beta_j x_1, \quad \dot{y_2} = \beta_j x_2, \tag{3.12}$$

e ainda um sistema dependendo das variáveis $x_3, ..., x_n, y_3, ..., y_n$. Com isso, temos que os autovalores da matriz de coeficientes do sistema (3.12) são as soluções da equação

$$0 = det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \beta_j & \epsilon \\ 0 & -\lambda & \epsilon & -\beta_j \\ -\beta_j & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \beta_j & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 + 2\beta_j^2\lambda^2 + \beta_j(\beta_j^2 + \epsilon^2).$$

Porém, o discriminante da equação quadrática acima é $\Delta = \beta_j^2 - \beta_j^2(\beta_j^2 + \epsilon^2) < 0$, para qualque ϵ positivo; o que implica que tais autovalores devem ter partes reais não nulas. Além do mais, podemos escrever $H_j^\epsilon = \frac{1}{2}\mathbf{z}^\intercal \mathcal{S}^{(\epsilon)}\mathbf{z}$, com $\mathcal{S}^{(\epsilon)} = 2(\mathcal{S} + \frac{\epsilon}{2}\mathcal{C}) = 2\mathcal{S} + \epsilon\mathcal{C}$, de modo que $\mathcal{C} = col[\mathbf{0}, ..., \mathbf{e}_{n+2}, \mathbf{e}_{n+1}, ..., \mathbf{0}]$, onde a coluna formada pelo vetor $\mathbf{e}_{n+j}$ é a coluna $n + j - 1$, para $j \in \{1, 2\}$. Uma vez que $\mathcal{S}^{(\epsilon)}$ é simétrica, temos a matriz Hamiltoniana $\mathcal{A}^{(\epsilon)} = \mathcal{J}\mathcal{S}^{(\epsilon)}$. Sendo assim, o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_j^{(\epsilon)}\mathbf{x}$ é não estável. Porém, temos que $||\mathcal{A}_j^{(\epsilon)} - \mathcal{A}_j|| \leq ||\mathcal{J}||||\mathcal{C}||\frac{\epsilon}{2}$. Por conseguinte, tomando $\frac{2}{||\mathcal{J}||||\mathcal{C}||}\epsilon$ ao invés de ϵ, temos $||\mathcal{A}^{(\epsilon)} - \mathcal{A}|| < \epsilon$.

Portanto, o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ não é fortemente estável. Com isso, provamos a ida.

Provemos a volta. Como 0 não é um autovalor de $\mathcal{A}$, podemos escrever simplesmente $\mathbb{C}^{2n} = U_1 \oplus ... \oplus U_n$. Seja $\mathcal{S}$ a matriz simétrica que define $\mathcal{A}$. Consideremos $\mathcal{S}_j$ a restrição de $\mathcal{S}$ a U_j. A partir daí, pelo o que foi feito na Proposição 3.11, para cada ϵ positivo suficientemente pequeno e $\mathcal{S}'$ simétrica com $||\mathcal{S}' - \mathcal{S}|| < \epsilon$, tem-se que o operador (simétrico) induzido pela restrição da matriz $\mathcal{S}'$ a U_j, que podemos denotar por $\mathcal{S}'_j$, bem como $\mathcal{S}_j$, são ou negativos definidos ou positivos definidos em U_j. Sendo assim, o Hamiltoniano H'_j definido por $\mathcal{S}'_j$ em U_j é ou positivo definido ou negativo definido, o que implica que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}'_j\mathbf{x}$ é um sistema estável, onde $\mathcal{A}' = \mathcal{J}\mathcal{S}'$. Assim, usando o Teorema 3.10, obtemos que $\mathcal{A}'_j$ é diagonalizável sobre os complexos, possui todos os seus autovalores imaginários puros, incluindo o 0, para cada j. Consequentemente, o mesmo vale para $\mathcal{A}'$. Portanto, usando o Teorema 3.10 novamente, obtemos que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}'\mathbf{x}$ é estável. Com isso, concluímos que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ é fortemente estável.

$\square$

3.6.2 O Segundo Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii

Vamos considerar nesta seção um sistema Hamiltoniano τ-periódico estável

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}, \tag{3.13}$$

com decomposição de Floquet $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$. Nesta seção, vamos supor que $\mathcal{B}$ é real, e para isso valer estaremos supondo que $\mathcal{Q}(t)$ é 2τ-periódica. Dessa maneira, teremos a relação $\mathcal{X}(2\tau) = e^{2\tau\mathcal{B}}$.

A partir de tal decomposição, temos a mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathcal{Q}(t)\mathbf{y}$. O nosso objetivo é provar a seguinte equivalência:

Teorema 3.5 (Segundo Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii)**.** $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ *é fortemente estável se, e somente se,* $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ *é fortemente estável.*

Comecemos provando a ida de tal teorema. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 3.6. *Seja* $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ *um sistema Hamiltoniano* $\tau-$*periódico com decomposição de Floquet* $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$*. Tomemos uma matrix Hamiltoniana* $\mathcal{B}_1$*. Consideremos a matriz simplética* $\mathcal{X}_1(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}_1}$*. Com tais condições, vale a igualdade*

$$\|\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{Q}\| \, \|\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\| \left\|\mathcal{Q}^{-1}\right\|,$$

onde $\mathcal{A}_1(t) = \dot{\mathcal{X}}_1(t)\mathcal{X}_1^{-1}(t)$*. Além disso,* $\mathcal{A}_1(t)$ *é Hamiltoniana* $\tau-$*periódica.*

Demonstração. Comecemos provando que a matriz $\mathcal{A}_1(t) = \dot{\mathcal{X}}_1(t)\mathcal{X}_1^{-1}(t)$ é Hamiltoniana. De fato:

$$\mathcal{X}_1(t)\mathcal{J}\mathcal{X}_1(t)^\intercal = \mathcal{J} \Longrightarrow \dot{\mathcal{X}}_1(t)\mathcal{J}\mathcal{X}_1(t)^\intercal + \mathcal{X}_1(t)\mathcal{J}\dot{\mathcal{X}}_1(t)^\intercal = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$(\dot{\mathcal{X}}_1(t)\mathcal{X}_1^{-1}(t))\mathcal{X}_1(t)\mathcal{J}\mathcal{X}_1(t)^\intercal + \mathcal{X}_1(t)\mathcal{J}\mathcal{X}_1(t)^\intercal(\dot{\mathcal{X}}_1(t)\mathcal{X}_1(t)^{-1})^\intercal = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\mathcal{A}(t)\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{A}(t)^\intercal = 0.$$

Expandindo a expressão $\mathcal{A}_1(t) = \dot{\mathcal{X}}_1(t)\mathcal{X}_1(t)^{-1}$, obtemos

$$\mathcal{A}_1(t) = \dot{\mathcal{Q}}(t)\mathcal{Q}^{-1}(t) + \mathcal{Q}(t)\mathcal{B}_1\mathcal{Q}^{-1}(t).$$

Logo, uma vez que $\mathcal{Q}_1(t)$ é $\tau-$periódica, $\mathcal{A}_1(t)$ é $\tau-$periódica.

Por fim, de $\mathcal{A}(t) = \dot{\mathcal{X}}(t)\mathcal{X}^{-1}(t)$, chegamos em

$$\mathcal{A}_1(t) - \mathcal{A}(t) = \mathcal{Q}(t)(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B})\mathcal{Q}^{-1}(t),$$

o que implica que

$$\|\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{Q}\| \|\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\| \left\|\mathcal{Q}^{-1}\right\|.$$

$\square$

Voltemos a considerar o sistema (3.13). Pela estabilidade forte, existe ϵ positivo de modo que para cada matriz Hamiltoniana periódica real $\mathcal{A}_1(t)$ com $||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}|| < \epsilon$, vale que o sistema $\dot{x} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ é estável. Tomemos a mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathcal{Q}(t)\mathbf{y}$. Vamos provar que $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é fortemente estável. Para isso, devemos encontrar δ positivo com a propriedade de que para toda matrix Hamiltoniana $\mathcal{B}_1$ que cumpra $\|\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\| < \delta$, tem-se que o sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}_1\mathbf{y}$ é estável. Denotemos $M = \|\mathcal{Q}\| \|\mathcal{Q}^{-1}\|$. Tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. Vamos demonstrar que δ tem a propriedade desejada. Para isso, seja $\mathcal{B}_1$ uma matriz Hamiltoniana. Pelo Lema 3.6, $\mathcal{A}_1(t) = \dot{\mathcal{X}}_1(t)\mathcal{X}_1(t)^{-1}$ é Hamiltoniana periódica, onde $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Q}(t)e^{\mathcal{B}_1}$. Ainda, se $\|\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\| < \delta$, há de valer

$$\|\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{Q}\| \left\|\mathcal{Q}^{-1}\right\| \|\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\| \leq M\delta = \epsilon.$$

Logo, o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ é estável. Portanto, todas as soluções de tal sistema são limitadas. Sendo assim, uma vez que $\mathbf{y}(t) = \mathcal{Q}(t)^{-1}\mathbf{x}(t)$, todas as soluções de $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}_1(t)\mathbf{y}$ são limitadas, o que implica que tal sistema é estável. Com isso, obtemos o desejado, isto é, a demonstração da primeira parte do Teorema 3.5.

Vamos agora entrar no caminho que irá culminar na prova do Teorema 3.5.

Denotemos por $(\ ,\ )$ o produto Hermitiano em $\mathbb{C}^n$. O produto Euclidiano em $\mathbb{R}^n$, por sua vez, será denotado por $\langle\ ,\ \rangle$. Lembremos que uma matriz é dita ser autoadjunta se for simétrica, no caso real, ou Hermitiana, no caso complexo.

Seja $\mathcal{G}$ um matriz autoajunta. Se $\mathcal{G}$ for Hermitiana (respectivamente, simétrica), definimos o seguinte produto em $\mathbb{C}^n$ (respectivamente, $\mathbb{R}^n$):

$$[\mathbf{z}, \mathbf{w}]_{\mathcal{G}} := (\mathcal{G}\mathbf{z}, \mathbf{w}) \ \ (\text{respectivamente, } [\mathbf{z}, \mathbf{w}]_{\mathcal{G}} := \langle \mathcal{G}\mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle).$$

A partir da definição acima, é fácil mostrar que $[\alpha\mathbf{z}, \beta\mathbf{w}]_{\mathcal{G}} = \alpha\overline{\beta}[\mathbf{z}, \mathbf{w}]_{\mathcal{G}}$ e $[\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2, \mathbf{w}]_{\mathcal{G}} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{w}]_{\mathcal{G}} + [\mathbf{z}_2, \mathbf{w}]_{\mathcal{G}}$, $[\mathbf{z}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2]_{\mathcal{G}} = [\mathbf{z}, \mathbf{w}_1]_{\mathcal{G}} + [\mathbf{z}, \mathbf{w}_2]_{\mathcal{G}}$. Isto é, $[\,,]_{\mathcal{G}}$ é uma forma Hermitiana em $\mathbb{C}^n$ (respectivamente, forma bilinear em $\mathbb{R}^n$).

Com isso, dizemos que uma matriz $\mathcal{X}$ complexa ou real é uma *matrix $\mathcal{G}$-unitária* se a transformação linear definida por $\mathcal{X}$ preserva a forma $[\,,]_{\mathcal{G}}$, ou seja, se vale a igualdade

$$[\mathcal{X}\mathbf{z}, \mathcal{X}\mathbf{w}]_{\mathcal{G}} = [\mathbf{z}, \mathbf{w}]_{\mathcal{G}},$$

para quaisquer vetores complexos (respectivamente, reais) $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$. É fácil ver que $\mathcal{X}$ é $\mathcal{G}$-unitária se, e somente se, vale a relação

$$\mathcal{X}^*\mathcal{G}\mathcal{X} = \mathcal{G}.$$

O nosso caso de interesse vai ser o de considerar a matriz $-i\mathcal{J}$, que é uma matriz Hermitiana. Dessa maneira, uma matriz $\mathcal{X}$ vai ser $(-i\mathcal{J})$-unitária quando satisfizer a relação $\mathcal{X}^*\mathcal{J}\mathcal{X} = \mathcal{J}$. Em particular, uma matriz $\mathcal{X}$ real é $(-i\mathcal{J})$-unitária se, e somente se, é simplética.

Em particular, temos que o matrizante $\mathcal{X}(t)$ é uma matriz $(-i\mathcal{J})$-unitária. Esse fato e alguns resultados sobre matrizes $\mathcal{G}$-unitárias que daremos a seguir nos serão úteis ao propósito desta seção.

Lema 3.7. *Para uma matriz $\mathcal{G}$-unitária real $\mathcal{X}$, valem os seguintes fatos:*

(a) *Se ρ é um autovalor múltiplo de $\mathcal{X}$ que esteja no círculo unitário S^1 com $\mathcal{X}|_{\eta^\dagger(\rho)}$ sendo não diagonalizável, então existe um autovetor $\mathbf{v}$ relacionado a ρ satisfazendo $[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = 0$.*

(b) *Caso ρ seja um autovalor de $\mathcal{X}$ que não esteja no círculo unitário S^1 com autovetor $\mathbf{v}$, vale que $[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = 0$.*

Demonstração. Do fato de que $\mathcal{X}|_{\eta^\dagger(\rho)}$ não é diagonalizável, a partir de uma base de Jordan de $\mathcal{X}|_{\eta^\dagger(\rho)}$, podemos extrair dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com a propriedade de que $\mathcal{X}\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}$ e $\mathcal{X}\mathbf{w} = \rho\mathbf{w}+\mathbf{v}$. Usando que $\mathcal{X}$ é $\mathcal{G}$-unitária, tem-se que

$$[\mathcal{X}\mathbf{v},\mathcal{X}\mathbf{w}]_\mathcal{G} = [\mathbf{v},\mathbf{w}]_\mathcal{G} \Longrightarrow \rho\bar{\rho}[\mathbf{v},\mathbf{w}]_\mathcal{G} + \rho[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = [\mathbf{v},\mathbf{w}]_\mathcal{G} \quad \Longrightarrow$$

$$(|\rho|^2 - 1)[\mathbf{v},\mathbf{w}]_\mathcal{G} + \rho[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = 0 \Longrightarrow \rho[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = 0 \Longrightarrow [\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = 0.$$

Agora, suponhamos que $\rho \notin S^1$ e seja $\mathbf{v}$ um autovetor relacionado a ρ. Da igualdade $[\mathcal{X}\mathbf{v},\mathcal{X}\mathbf{v}]_\mathcal{G} = [\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G}$, segue que $(|\rho|^2 - 1)[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = 0$. Como $|\rho| \neq 1$, , tem-se que $[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} = 0$. $\square$

Teorema 3.6 (Krein). *Suponhamos que tenhamos uma matriz $\mathcal{G}$-unitária $\mathcal{X}$ com um autovalor múltiplo ρ de modo que para todo autovetor $\mathbf{v}$ tem-se $[\mathbf{v},\mathbf{v}]_\mathcal{G} \neq 0$. Mediante tais hipóteses, existem γ e δ positivos de modo que se $\mathcal{Y}$ é $\mathcal{G}$-unitária com $||\mathcal{X}-\mathcal{Y}|| < \delta$, então todo o autovalor β de $\mathcal{Y}$ com $|\rho - \beta| < \gamma$ está em S^1 e tem a propriedade de que $\mathcal{Y}|_{\eta^\dagger(\beta)}$ seja diagonalizável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{X}$ e ρ como no enunciado. Suponhamos que vale a negação do que queremos mostrar. Com isso, existem duas sequências $(\mathcal{X}_n)$ e (ρ_n) convergindo para $\mathcal{X}$ e ρ, respectivamente, com $\mathcal{X}_n$ $\mathcal{G}$-unitária tendo ρ_n como autovalor satisfazendo $\rho_n \notin S^1$ ou $\rho_n \in S^1$ tal que $\mathcal{X}|_{\eta^\dagger(\rho)}$ não seja diagonalizável. A partir do Lema 3.7, podemos encontrar uma sequência $(\mathbf{v}_n)$ onde cada $\mathbf{v}_n$ é um autovetor de ρ_n que podemos supor normalizado satisfazendo $[\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n]_{\mathcal{G}} = 0$. Como o conjunto de vetores unitários complexos é compacto, existe uma subsequência $(\mathbf{v}_{n_j})$ de $(\mathbf{v}_n)$ que converge para algum $\mathbf{v}$, de modo que $[\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n]_{\mathcal{G}} = 0$. Desse modo, fazendo-se $j \longrightarrow \infty$ em $\mathcal{X}_{n_j}\mathbf{v}_{n_j} = \rho_{n_j}\mathbf{v}_{n_j}$, $[\mathbf{v}_{n_j}, \mathbf{v}_{n_j}]_{\mathcal{G}} = 0$, chegamos em $\mathcal{X}\mathbf{v} = \rho\mathbf{v}$, $[\mathbf{v}, \mathbf{v}]_{\mathcal{G}} = 0$, o que é um absurdo.

$\square$

Definição 3.4. *Tomemos uma matriz $\mathcal{G}$-unitária $\mathcal{X}$ e ρ um autovalor de $\mathcal{X}$. Dizemos que ρ é de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie) se para todo autovetor $\mathbf{v}$ relacionado a ρ, vale que $[\mathbf{v}, \mathbf{v}]_{\mathcal{G}} > 0$ (respectivamente, $[\mathbf{v}, \mathbf{v}]_{\mathcal{G}} < 0$). Autovalores de primeira e segunda espécie são chamados de definidos. Caso contrário, o autovalor é dito ser indefinido.*

Para um autovetor $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$ de uma matriz $\mathcal{X}$ simplética, temos a relação

$$[\mathbf{v}, \mathbf{v}]_{-i\mathcal{J}} = 2\langle \mathbf{r}, \mathcal{J}\mathbf{r}\rangle = 2\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}. \tag{3.14}$$

Com isso, concluímos que $[\mathbf{v}, \mathbf{v}]_{-i\mathcal{J}} > 0$ (respectivamente, $[\mathbf{v}, \mathbf{v}]_{-i\mathcal{J}} < 0$) se, e somente se, $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} > 0$ (respectivamente, $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} < 0$).

Antes de fazermos a demonstração da volta do Teorema 3.5, precisamos lembrar da *dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais*, cujo enunciado, para sistemas lineares, é dado por:

Lema 3.8. *Sejam $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ sistemas lineares periódicos com matrizantes $\mathcal{X}(t)$ e $\mathcal{X}_1(t)$, respectivamente. A partir daí, para todo ϵ positivo, existe δ positivo de modo que se $||\mathcal{A} - \mathcal{A}_1|| < \delta$, então $||\mathcal{X}(t) - \mathcal{X}_1(t)|| < \epsilon$, para todo t no intervalo $[0, 2\tau]$.*

Também, iremos precisar da *dependência contínua das raízes do polinômio característico de uma matriz com respeito à matriz*, que é um corolário do seguinte lema:

Lema 3.9. *Seja $p(z) = z^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j$ um polinômio complexo com raízes $\rho_1, ..., \rho_k$ de multiplicidades $\alpha_1, ..., \alpha_k$, respectivamente. Dessa maneira, para cada ϵ positivo com a propriedade de que $B_\epsilon(\rho_j) \cap B_\epsilon(\rho_k) \neq \emptyset$, para $j \neq k$, existe δ positivo de modo que todo polinômio*

$q(z) = z^m + \sum_{j=0}^{m-1} b_j z^j$ *com* $|a_j - b_j| < \delta$, *para cada* j, *possui exatamente* α_j *raízes (levando em conta as multiplicidade) em* $B_\epsilon(\rho_j)$.

Corolário 3.1. *Sejam* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *duas matrizes complexas. Suponhamos que* $\rho_1, ..., \rho_k$ *sejam todos os atovalores de* $\mathcal{A}$ *com respectivas multiplicidades (algébricas)* $\alpha_1, ..., \alpha_k$. *Sendo assim, para cada* ϵ *positivo com a propriedade de que* $B_\epsilon(\rho_j) \cap B_\epsilon(\rho_k) \neq \emptyset$, *para* $j \neq k$, *existe* δ *positivo de modo que se* $\mathcal{B}$ *é tal que* $||\mathcal{A} - \mathcal{B}|| < \delta$, *então* $\mathcal{B}$ *possui exatamente* α_j *(considerando-se as multiplicidades) autovalores em* $B_\epsilon(\rho_j)$, *para cada* j.

Demonstração. Consideremos o espaço de polinômios sobre $\mathbb{C}$ munido da norma do máximo. Dessa maneira, para um polinômio complexo $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_k z^k$, a norma de $p(z)$ será dada por $||p(z)|| = max\{|a_0|, ..., |a_k|\}$.

Para uma matriz $\mathcal{A}$ denotemos por $p_c(\mathcal{A})$ o seu polinômio característico. Fixemos ϵ positivo como no enunciado. Pelo Lema 3.9, obtemos δ positivo com a propriedade de que se $||p_c(\mathcal{A}) - p_c(\mathcal{B})|| < \delta$, então $\mathcal{B}$ possui extamente α_j autovalores (contando a multiplicidade) em $B_\epsilon(\rho_j)$, para cada j.

Como a função determinante é contínua, podemos encontrar γ positivo com a propriedade de que se $||\mathcal{A} - \mathcal{B}|| < \gamma$, então $||p_c(\mathcal{A}) - p_c(\mathcal{B})|| < \delta$. Com isso encerramos a demonstração. □

Yakubovich e Starzhinskii no seu livro [3] provam que os autovalores de uma matriz $\mathcal{G}$-unitária são funções contínuas da matriz. Na demonstração desse teorema, é provado o seguinte resultado que nos será muito útil:

Teorema 3.7. *Seja* $\mathcal{X}$ *matriz* $\mathcal{G}$*-unitária. Daí, para todo* ϵ *positivo de modo que* $B_\epsilon(\alpha) \cap B_\epsilon(\beta) = \emptyset$, *para quaisquer dois autovalores distintos* α *e* β *de* $\mathcal{X}$, *existe* δ *positivo com a propriedade de que se* $\mathcal{X}_1$ *é uma matriz* $\mathcal{G}$*-unitária com* $||\mathcal{X} - \mathcal{X}_1|| < \delta$, *então* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{X}_1$ *possuem a mesma quantidade de autovalores de primeira espécie e de segunda espécie em* $B_\epsilon(\alpha)$, *levando em conta as multiplicidades, para qualquer autovalor* α *de* $\mathcal{X}$.

Obs.: A rigor, teríamos que tomar ϵ de modo que para cada autovalor α de $\mathcal{X}$ que não esteja em S^1, tem-se que $B_\epsilon(\alpha) \cap S^1 = \emptyset$. É o que fazem Yakubovich e Starzhinskii. Porém, por simplicidade, ao usarmos o teorema acima, não iremos levar isso em conta, uma vez que podemos tomar ϵ tão pequeno quando quisermos.

Comecemos a demonstração da recíproca do Teorema 3.5.

Suponhamos que o sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ seja fortemente estável. Vamos provar que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é fortemente estável.

Queremos encontar ϵ positivo tal que para toda matriz Hamiltoniana $\mathcal{A}_1(t)$ com $||\mathcal{A} - \mathcal{A}_1|| < \epsilon$, vale que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ é estável.

Dessa maneira, desde já fixemos um sistema estável $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ com matrizante $\mathcal{X}_1(t)$. Denotemos $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1(2\tau)$.

Como $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é fortemente estável, pelas Proposições 3.10 e 3.12, os autovalores de $\mathcal{B}$ são imaginários puros não nulos. Sendo assim, supondo que $\pm iw_1, ..., \pm iw_n$ sejam os autovalores de $\mathcal{B}$ com $\omega_s > 0$, para todo s, tem-se que que os autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$ são dados por $\rho_j = e^{i2\tau w_j}, \rho_{-j} = e^{-i2\tau w_j}$, com $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Logo, tais autovalores estão em S^1.

Denotemos $U_j = \eta^\dagger(i\omega_j) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_j)$. Pelo Teorema 3.4, vale que H_j é positivo ou negativo definido. Fixemos um autovetor $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$. A partir daí, tomemos uma base de U_j dada por $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m_j}, \overline{\mathbf{v}}_1, ..., \overline{\mathbf{v}}_{m_j}$, onde $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, m_j é a multiplicidade de $i\omega_j$ e cada $\mathbf{v}_j$ é um autovetor de $i\omega_j$. Como $\mathcal{B}$ é diagonalizável, podemos usar o Corolário 2.1 para escrever o Hamiltoniano do sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ restrito a U_j como

$$H_j(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\omega_j \sum_{s=1}^{m_j} \delta_s(x_s^2 + y_s^2),$$

onde m_j é a multiplicidade de $i\omega_j$, e $\delta_s = sign\{\mathbf{r}_s, \mathbf{s}_s\}$. Ainda, $x_1, ..., x_{m_j}, y_1, ..., y_{m_j}$ são as coordenadas de $\mathbf{z}$ em uma determinada base de U_j. Escolhendo $\mathbf{z}_1$ de modo que suas coordenadas sejam tais que $x_s = 0$, $y_s = 0$, para $j \neq 1$, e $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, obtemos que $\delta_1 > 0$, caso H_j seja positivo definido ou $\delta_1 < 0$, caso H_j seja negativo definido.

Assim, concluímos que cada autovetor $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$ de $\mathcal{B}$ é tal que $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} > 0$, caso H_j é positivo definido ou $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} < 0$, caso H_j seja negativo definido; em particular, $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} \neq 0$.

Conseguentemente, pelo Lema 3.4, tem-se que o mesmo vale para os autovetores de $\mathcal{X}(2\tau)$, o que implica em particular que para todo autovetor $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$ de $\mathcal{X}(2\tau)$, tem-se que $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} \neq 0$.

Assim, podemos usar o Teorema de Krein. Fazendo isso, para cada autovalor múltiplo ρ_j de $\mathcal{X} = \mathcal{X}(2\tau)$, existem δ_j, γ_j positivos de modo que caso $||\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}|| < \gamma_j$, vale que se $\rho_j^{(1)}$ é um autovalor de $\mathcal{X}_1$ satisfazendo $|\rho_j - \rho_j^{(1)}| < \delta_j$, então $\mathcal{X}_1|_{\eta^\dagger(\rho_j^{(1)})}$ é diagonalizável e $\rho_j^{(1)} \in S^1$.

Sejam $\delta = min\{\delta_1, ..., \delta_n\}$ e $\gamma = min\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$. Logo, pelo Corolário 3.1, podemos encontrar γ^* menor do que γ de modo que se $||\mathcal{X} - \mathcal{X}_1|| < \gamma^*$, então para cada autovalor ρ de $\mathcal{X}$ com multiplicidade α, existe uma quantidade α de autovalores (levando em consideração as multiplicidades) $\rho^{(1)}$ de $\mathcal{X}_1$ com $|\rho - \rho^{(1)}| < \delta$. Isso implica que para um autovalor múltiplo $\rho^{(1)}$ de $\mathcal{X}_1$, tem-se que $\rho^{(1)}$ está em S^1 e que $\mathcal{X}_1|_{\eta^\dagger(\rho^{(1)})}$ é diagonalizável.

Agora, suponhamos que tenhamos um autovalor simples $\rho^{(1)}$ de $\mathcal{X}_1$ que esteja próximo de algum autovalor simples ρ de $\mathcal{X}$. Usando o Teorema 3.7, podemos tomar $\mathcal{X}_1$ suficientemente próxima de $\mathcal{X}$ de modo que $\rho^{(1)}$ seja um autovalor definido. Consequentemente, pelo segundo item do Lema 3.7, segue que devemos ter $\rho^{(1)} \in S^1$. Além disso, $\mathcal{X}_1|_{\eta(\rho^{(1)})}$ é trivialmente diagonalizável.

Usando o Lema 3.8, existe ϵ positivo com a propriedade de que se $||\mathcal{A} - \mathcal{A}_1|| < \epsilon$, então $||\mathcal{X} - \mathcal{X}_1|| < \gamma^*$.

Sendo assim, $\mathcal{X}_1(2\tau)$ é diagonalizável possuindo todos os seus autovalores em S^1. Dessa maneira, existe uma matriz inversível $\mathcal{P}$ satisfazendo $\mathcal{P}\mathcal{X}_1(2\tau)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{D}$, com $\mathcal{D}$ uma matriz diagonal com os elementos da diagonal estando em S^1. Consequentemente, para cada k natural, tem-se que $\mathcal{X}_1^k(2\tau) = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{D}^k\mathcal{P}$. Porém, como $||\mathcal{D}^k|| \leq 1$, obtém-se que $||\mathcal{X}_1^k|| \leq ||\mathcal{P}^{-1}||||\mathcal{P}||$; o que implica que $\mathcal{X}_1(2\tau)^k$ é uma sequência limitada. Isso implica que a seguência $\mathcal{X}_1(\tau)^k$ é uma seguência limitada. Provemos isso. Primeiramente, o que temos é $\mathcal{X}_1(\tau)^{2l} = \mathcal{X}_1(2\tau)^l$. Também, temos que $\mathcal{X}_1(\tau)^{2l+1} = \mathcal{X}_1(2\tau)^k\mathcal{X}_1(\tau)$. Dessa maneira, como a sequência $\mathcal{X}_1(\tau)^k$ é composta das duas sequências limitadas $\mathcal{X}_1(\tau)^{2l}$ e $\mathcal{X}_1^{2l+1}(\tau)$, segue que $\mathcal{X}_1(\tau)^k$ é limitada. Logo, pela Proposição 3.16, $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ é um sistema estável. Com isso, concluímos a demonstração de que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é um sistema fortemente estável.

3.6.3 O Terceiro Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii

O seguinte teorema é o Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii como enunciado e provado no livro de Yakubovich e Strazhinskii.

Teorema 3.8 (Terceiro Teorema de Krein-Gelfand-Lidskii)**.** *Consideremos um sistema Hamiltoniano periódico $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$. Então, tal sistema é fortemente estável se, e somente se, todos os seus multiplicadores estão em S^1 e são definidos.*

Demonstração. Suponhamos que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ seja fortemente estável. A partir daí, $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é fortemente estável. Consequentemente, como vimos antes, nesse caso todos os multiplicadores de $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ são definidos e estão em S^1.

Agora, provemos a recíproca. Suponhamos que todos os multiplicadores de $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ estejam em S^1 e sejam definidos. Consideremos uma decomposição de Floquet $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$

do matrizante $\mathcal{X}(t)$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$. Tomemos uma matriz Hamiltoniana constante $\mathcal{B}_1$ com $||\mathcal{B} - \mathcal{B}_1|| < \eta_1$ e seja $\mathcal{X}_1(t) = \mathcal{Q}(t)e^{\mathcal{B}_1}$. Usando a continuidade da exponencial, temos que $||\mathcal{X}(2\tau) - \mathcal{X}_1(2\tau)|| < \eta_2$, para algum η_2 positivo que pode ser feito suficientemente pequeno fazendo-se η_1 suficientemente pequeno.

Como os autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$ são definidos, usando o teorema de Krein e tomando η_2 suficientemente pequeno, há de vale que existe γ positivo de modo que se ρ é um autovalor de $\mathcal{X}(2\tau)$ com $|\rho - \rho^{(1)}| < \gamma$, onde $\rho^{(1)}$ é um autovalor múltiplo de $\mathcal{X}_1(2\tau)$, então $\rho \in S^1$ e $\mathcal{X}(2\tau)|_{\eta^\dagger(\rho)}$ é diagonalizável. Ainda, pelo Corolário 3.1 podemos fazer η_2 sufcientemente pequeno de modo que todos os autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$ estejam próximos de algum autovalor de $\mathcal{X}_1(2\tau)$.
Como antes, podemos supor que todos os autovalores simples de $\mathcal{X}_1(2\tau)$ estão em S^1.

Dessa maneira, temos que $\mathcal{X}_1(2\tau)$ é diagonalizável e possui todos os seus autovalores em S^1. Tomemos uma base de autovetores $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{2n}$ de $\mathcal{X}_1(2\tau)$ com respectivos autovalores $\rho_1, ..., \rho_{2n}$ não necessariamente todos distintos. A partir daí, façamos $\mathbf{y}_j = e^{t\mathcal{B}_1}\mathbf{v}_j$. Dessa maneira, $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{2n}$ é uma base para o espaço de soluções da equação $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}_1\mathbf{y}$. Porém, uma vez que $e^{2\tau\mathcal{B}_1}\mathbf{v}_j = \rho_j\mathbf{v}_j$ e que para todo natural k, vale que $e^{k2\tau\mathcal{B}_1} = (e^{2\tau\mathcal{B}_1})^k$, obtemos que $\mathbf{y}_j = \rho_j^k\mathbf{v}_j$. Logo, escrevendo $t = k2\tau + s$, $0 \leq s \leq 2\tau$, obtemos $\mathbf{y}_j = \rho_j^k e^{s\mathcal{B}_1}$, e como $|\rho_j| = 1$, segue que $|\mathbf{y}_j(t)| \leq e^{s||\mathcal{B}_1||}||\mathbf{v}_j||$. Consequentemente, todas as soluções de $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}_1\mathbf{y}$ são limitadas. Consequentemente, pela Proposição 3.15, segue que $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}_1\mathbf{y}$ é estável. Portanto, concluímos que $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é fortemente estável; o que implica que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ é fortemente estável.

□

3.7 A TEORIA DE GELFAND-LIDSKII

3.7.1 Prelúdio: o Grupo Fundamental do Grupo Simplético

Pela decomposição polar de uma matriz e pelo fato de que os componentes da decomposição polar de uma matriz simplética são matrizes simpléticas, temos o seguinte homeomorfismo:

$$Sp(2n, \mathbb{R}) \simeq Sp^+(2n, \mathbb{R}) \times Sp^o(2n, \mathbb{R}),$$

onde $Sp^+(2n, \mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes simpléticas reais $2n \times 2n$ que são simétricas e positivas definidas, enquanto que $Sp^o(2n, \mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes simpléticas reais

$2n \times 2n$ ortogonais.

Denotemos por $H_s(2n)$ o conjunto das matrizes Hamiltonianas $2n \times 2n$ simétricas. Vamos provar que há um homeomorfismo entre $H_s(2s)$ e $Sp^+(2n, \mathbb{R})$, por meio da aplicação

$$H_s(2n) \longrightarrow Sp^+(2n, \mathbb{R}), \quad \mathcal{A} \longmapsto e^{\mathcal{A}}.$$

Para vermos isso, consideremos $\mathcal{A}$ em $H_s(2n)$. Na construção da decomposição polar de uma matriz $\mathcal{A}$ a parte positiva definida é uma das raízes quadradas de $\mathcal{A}\mathcal{A}^\intercal$. Daí, a parte positiva definida na decomposição polar de $e^{\mathcal{A}}$ é $e^{\mathcal{A}}(e^{\mathcal{A}})^\intercal = e^{2\mathcal{A}}$, o que implica que $e^{\mathcal{A}}$ é positiva definida; e como $e^{\mathcal{A}}$ também é simplética, segue que $e^{\mathcal{A}} \in Sp^+(2n, \mathbb{R})$.

Reciprocamente, tomemos $\mathcal{B}$ pertencente a $Sp^+(2n, \mathbb{R})$. Como $\mathcal{B}$ é simplética, existe $\mathcal{A}$ Hamiltoniana satisfazendo $e^{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$. Porém, uma vez que $\mathcal{B}$ é positiva, sua decomposição polar é constituída por ela mesma e pela a matriz identidade. Sendo assim, $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}\mathcal{B}^\intercal$; isto é, $e^{\mathcal{A}}e^{\mathcal{A}^\intercal} = e^{2\mathcal{A}}$, o que implica que $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\intercal$. Com isso, temos o homeomorfismo desejado.

É fácil ver que conjunto $H_s(2n)$ é formado pelas matrizes da forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_1 \end{pmatrix},$$

com $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ matrizes simétricas $n \times n$. Consequentemente, temos o homeomorfismo

$$H_s(2n) \longrightarrow \mathcal{SM}(n) \times \mathcal{SM}(n), \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_1 \end{pmatrix} \longmapsto (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2).$$

Logo, denotando por $\mathcal{SM}(n)$ o conjunto das matrizes simétricas reais de oredem n, como $\mathcal{SM}(n) \times \mathcal{SM}(n)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{n(n+1)}$, tem-se que $H_s(2n)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{n(n+1)}$.

É fácil ver que $Sp^o(2n, \mathbb{R})$ consiste das matrizes da forma

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix},$$

com

$$\mathcal{A}^\intercal\mathcal{A} + \mathcal{B}^\intercal\mathcal{B} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{A}^\intercal\mathcal{B} = \mathcal{B}^\intercal\mathcal{A} \tag{3.15}$$

A partir daí, podemos construir o seguinte mapa

$$Sp^o(2n) \longrightarrow U_n(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{A} + i\mathcal{B},$$

onde $U_n(\mathbb{C})$ é o conjunto das *matrizes unitárias* $n \times n$. Que a imagem da aplicação acima está de fato em $U_n(\mathbb{C})$ segue facilmente de (3.15).

Para cada $\mathcal{U} \in U_n(\mathbb{C})$, o determinante de $\mathcal{U}$ é um número complexo de módulo igual a 1; portanto, $det(\mathcal{U}) = e^{i\phi}$. Tendo em vista isso, consideremos a matriz $\mathcal{G}_{\mathcal{U}} = diag[e^{i\phi}, 1, ..., 1]$ de ordem n. Com isso, a matriz $\mathcal{U} = \mathcal{U}_s \mathcal{G}_{\mathcal{U}}$, sendo $\mathcal{U}_s$ em $U_n(\mathbb{C})$ com determinante igual a 1. Portanto, novamente temos um isomorfismo

$$U_n(\mathbb{C}) \longrightarrow U_n^s(\mathbb{C}) \times \{\mathcal{G}_{\mathcal{U}}\}, \quad \mathcal{U} \longmapsto (\mathcal{U}_s, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}),$$

onde $U_n^s(\mathbb{C})$ é o conjunto das matrizes unitárias com determinante igual a 1.

Agora, lembremos o fato da *topologia algébrica* que diz que o conjunto U_n^s é simplesmente conexo. Além disso, como é claro que $\{\mathcal{G}_{\mathcal{U}}\}$ é homeomorfo a S^1, segue que $U_n(\mathbb{C})$ é homeomorfo a S^1.

Com toda a discussão acima, o que concluímos é que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é homeomorfo ao produto cartesiano de um espaço simplesmente conexo X com S^1. Daí, como o *grupo fundamental* de S^1 é $\mathbb{Z}$, segue que o grupo fundamental de $Sp(2n, \mathbb{R})$, denotado por $\pi_1(Sp(2n, \mathbb{R}))$, é $\mathbb{Z}$.

3.7.2 Interlúdio: o Índice de Gelfand-Lidskii

Nesta seção consideraremos um sistema Hamiltoniano linear fortemente estável τ-periódico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}, \tag{3.16}$$

Com matrizante $\mathcal{X}$ tendo decomposição de Floquet

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}. \tag{3.17}$$

Vamos considerar $\mathcal{Q}(t)$ sendo 2τ-periódico e $\mathcal{B}$ real. Além disso, como o sistema é Hamiltoniano, podemos tomar $\mathcal{Q}(t)$ simplética e $\mathcal{B}$ Hamiltoniana.

Como $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é fortemente estável, pelas Proposições 3.10 e 3.12, os autovalores de $\mathcal{B}$ são imaginários puros não nulos. Sendo assim, suponhamos que $\pm iw_1, ..., \pm iw_n$ sejam os autovalores de $\mathcal{B}$ com $w_1 \geq w_2 \geq ... \geq w_n > 0$. Por conseguinte, os autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$ são dados por $\rho_j = e^{i2\tau w_j}, \rho_{-j} = e^{-i2\tau w_j}$, com $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Agora, consideremos dois sistemas Hamiltonianos τ-periódicos fortemente estáveis

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J}\nabla H_0(\mathbf{z}, t), \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J}\nabla H_1(\mathbf{z}, t). \tag{3.18}$$

A partir daí, podemos definir uma *homotopia* entre tais sistemas. Dizemos que os sistemas (3.18) estão no mesmo *domínio de estabilidade* se existe um Hamiltoniano $H(\mathbf{z}, t, s)$ dado por $H(\mathbf{z}, t, s) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^{\intercal}\mathcal{S}(t, s)\mathbf{z}$, com $\mathcal{S}(t, s)$ simétrica, contínuo e τ-periódico na variável t, com s variando no intervalo $[0, 1]$, satisfazendo

$$H(\mathbf{z}, t, 0) = H_0(\mathbf{z}, t), \quad H(\mathbf{z}, t, 1) = H_1(\mathbf{z}, t),$$

de modo que para cada s pertencente a $[0, 1]$, o sistema

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathcal{J}\nabla H(\mathbf{z}, t, s)$$

seja fortemente estável.

Podemos identificar cada sistema Hamiltoniano τ-periódico $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ com a sua matriz $\mathcal{A}(t)$, e formar assim o conjunto $\mathcal{L}$ das *matrizes Hamiltonianas τ-periódicas* $\mathcal{A}(t)$.

Com isso, temos o subconjunto $\mathcal{L}_s$ das *matrizes estáveis τ-periódicas* e o subconjunto $\mathcal{L}_{ss}$ das *matrizes τ-periódicas fortemente estáveis*, de acordo com o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$ ser estável ou fortemente estável, respectivamente. Usando da topologia induzida pela norma no conjunto $\mathcal{L}$, o conjunto $\mathcal{L}_s$ é o interior do conjunto $\mathcal{L}_{ss}$; portanto, $\mathcal{L}_s$ é aberto em $\mathcal{L}$.

Usando os termos introduzidos acima, podemos reformular o conceito de domínio de estabilidade. Para isso, sejam dois sistemas Hamiltonianos τ-periódicos fortemente estáveis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_0(t)\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t). \tag{3.19}$$

A partir daí, dizer que ambos os sistemas em (3.19) pertencem ao mesmo domínio de estabilidade é equivalente a dizer que existe uma *homotopia livre* entre os caminhos fechados $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$ em $\mathcal{L}_{ss}$; isto é, existe uma aplicação contínua

$$\mathcal{A}(t, s) : \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{L}_{ss},$$

satisfazendo

$$\mathcal{A}(t, 0) = \mathcal{A}_0(t), \quad \mathcal{A}(t, 1) = \mathcal{A}_1(t).$$

Sendo assim, temos uma relação de equivalência em $\mathcal{L}_{ss}$ que identifica duas matrizes $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$ possuindo uma hotomopia livre entre elas. Tais classes de equivalência são os chamados domínios de estabilidade em $\mathcal{L}_{ss}$.

Dizemos que uma homotopia livre entre $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$ em $\mathcal{L}_{ss}$ é uma *homotopia forte*, para evidenciarmos o fato de que $\mathcal{A}_s(t) = \mathcal{A}(t, s)$ é uma matriz fortemente estável, para todo

s no intervalo $[0,1]$. Também, se $\mathcal{Q}_0(t)e^{t\mathcal{B}}$ e $\mathcal{Q}_1(t)e^{t\mathcal{B}_1}$ são decomposições de Floquet dos sistemas (3.19), dizemos que $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ são *fortemente conectadas* ou *fortemente ligadas* se existe uma aplicação contínua $\mathcal{B} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{L}^0_{ss}$, com $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}(1) = \mathcal{B}_1$. A notação $\mathcal{L}^0_{ss}$ significa o conjunto das matrizes $\mathcal{A}$ Hamiltonianas constantes com $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ sendo um sistema fortemente estável. Com tais definições temos a seguinte proposição:

Proposição 3.17. *Para dois sistemas Hamiltonianos $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_0(t)\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ fortemente estáveis no mesmo domínio de estabilidade com decomposições de Floquet $\mathcal{X}_0 = \mathcal{Q}_0(t)e^{t\mathcal{B}_0}$ e $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Q}_1(t)e^{t\mathcal{B}_1}$, respectivamente, tem-se que $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ são fortemente conectadas e que $\mathcal{Q}_0(t)$ e $\mathcal{Q}_1(t)$ são homotópicos.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}(t,s) : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{L}_{ss}$ uma homotopia entre $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$. A partir daí, para cada s pertencente a $[0,1]$, consideremos o sistema τ-periódico $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t,s)\mathbf{x}$ com decomposição de Floquet $\mathcal{X}(t,s) = \mathcal{Q}(t,s)e^{t\mathcal{B}(s)}$, sendo $\mathcal{Q}(t,s)$ 2τ-periódica e $\mathcal{B}$ Hamiltoniana real. Como $\mathcal{A}(t,0) = \mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}(t,1) = \mathcal{A}_1(t)$, chegamos em

$$\mathcal{X}(t,0) = \mathcal{X}_0(t) = \mathcal{Q}_0(t)e^{t\mathcal{B}_0}, \quad \mathcal{X}(t,1) = \mathcal{X}_1(t) = \mathcal{Q}_1(t)e^{t\mathcal{B}_1}.$$

Agora, usando que $\mathcal{X}(2\tau,s) = e^{2\tau\mathcal{B}(s)}$, vale que $2\tau\mathcal{B}(s)$ é o logaritmo de $\mathcal{X}(2\tau,s)$. Dessa maneira, o caminho contínuo $\mathcal{B}(s) = \frac{1}{2\tau}\mathbf{log}\left(\mathcal{X}(2\tau,s)\right)$ em $\mathcal{L}$ liga $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}_1$. Como a transformação $\mathbf{x} = \mathcal{Q}(t,s)\mathbf{y}$ transforma o sistema fortemente estável $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t,s)$ no sistema fortemente estável $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}(s)\mathbf{y}$, o caminho $\mathcal{B}(s)$ está em $\mathcal{L}_{ss}$. Por fim, o caminho

$$\mathcal{Q}(t,s) = \mathcal{X}(t,s)e^{-t\mathcal{B}(s)}$$

é um caminho contínuo que liga $\mathcal{Q}_0(t)$ a $\mathcal{Q}_1(t)$.

□

Agora, temos a importante proposição:

Proposição 3.18. *Dado um sistema Hamiltoniano τ-periódico fortemente estável $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$, existe um invariante por homotopia forte $n(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Consideremos a decomposição de Floquet $\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}$. Como $\mathcal{Q}(t)$ é simplética periódica, $\mathcal{Q}(t)$ é um caminho fechado em $Sp(2n,\mathbb{R})$. Além disso, uma vez que $\pi_1(Sp(2n,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$, tem-se que a classe de $\mathcal{Q}(t)$ em $\pi_1(Sp(2n,\mathbb{R}))$ é um número inteiro $[\mathcal{Q}(t)] = n$. Vamos provar que tal inteiro é invariante por homotopia forte.

Sejam $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_0(t)\mathbf{x}$ e $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$ sistemas Hamiltonianos τ-periódicos fortemente estáveis que estejam no mesmo domínio de estabilidade. Sejam $\mathcal{Q}_0(t)$ e $\mathcal{Q}_1(t)$ as matrizes τ-periódicas de suas respectivas decomposições de Floquet. Como $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$ são fortemente estáveis e estão no mesmo domínio de estabilidade, então pela Proposição 3.17 segue que $\mathcal{Q}_0(t)$ e $\mathcal{Q}_1(t)$ são homotópicas. Portanto, $[\mathcal{Q}_0(t)] = [\mathcal{Q}_1(t)]$, ou seja, $n(\mathcal{A}) = n(\mathcal{A}_1)$. $\square$

Definição 3.5. *O número inteiro $n(\mathcal{A})$ na proposição acima é chamado o índice de Gelfand-Lidskii da matriz $\mathcal{A}(t)$.*

Porém, uma vez que não temos apenas uma decomposição de Floquet para o sistema (3.16), devemos provar que o índice de Gelfand-Lidskii está bem definido. Para isso, suponhamos que além da decomposição de Floquet (3.17) tenhamos outra decomposição de Floquet de (3.16), dada por $\mathcal{X}(t) = \tilde{\mathcal{Q}}(t)e^{t\tilde{\mathcal{B}}}$, com $\tilde{\mathcal{Q}}(t)$ 2τ-periódica e $\tilde{\mathcal{B}}$ Hamiltoniana real. Vamos provar que $[\mathcal{Q}(t)] = [\tilde{\mathcal{Q}}(t)]$.

Como $\pm i\omega_1, ..., \pm i\omega_n$ são os autovalores de $\mathcal{B}$, sendo $U_j = \eta^\dagger(i\omega_j) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_j)$, para cada j em $\{1, ..., n\}$, conseguimos a decomposição $\mathcal{B}$-invariante

$$\mathbb{C}^{2n} = U_1 \oplus ... \oplus U_n.$$

Uma vez que cada U_j é um subespaço simplético, tomamos uma base simplética B_j para cada qual desses subespaços e daí podemos escrever $\mathcal{B}$ como

$$\mathcal{B} = diag[\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n],$$

onde $\mathcal{B}_j = [\mathcal{B}|_{U_j}]_{B_j}$. Como vimos antes, a partir de $e^{2\tau\tilde{\mathcal{B}}} = e^{2\tau\mathcal{B}}$, podemos concluir que

$$2\tau\tilde{\mathcal{B}} = 2\tau\mathcal{B} + diag[\mathcal{K}_1, ..., \mathcal{K}_n],$$

com $\mathcal{K}_j = 2\pi i k_j \mathcal{J}$, para algum inteiro k_j. Porém, como cada $\mathcal{B}_j$ comuta com $\mathcal{K}_j$, obtemos

$$e^{2\tau\tilde{\mathcal{B}}} = diag[e^{2\tau\mathcal{B}_1}, ..., e^{2\tau\mathcal{B}_n}]diag[e^{\mathcal{K}_1}, ..., e^{\mathcal{K}_n}].$$

De $\tilde{\mathcal{Q}}(t) = \mathcal{X}(t)e^{-t\tilde{\mathcal{B}}} = \mathcal{Q}(t)e^{-t\mathcal{B}}e^{t\tilde{\mathcal{B}}}$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{Q}}(2\tau) &= \mathcal{Q}(2\tau)e^{2\tau\mathcal{B}}diag[e^{-2\tau\mathcal{B}_1}, ..., e^{-2\tau\mathcal{B}_n}]diag[e^{-\mathcal{K}_1}, ..., e^{-\mathcal{K}_n}] \\
&= \mathcal{Q}(2\tau)e^{2\tau\mathcal{B}}e^{-2\tau\mathcal{B}}diag[e^{-\mathcal{K}_1}, ..., e^{-\mathcal{K}_n}] \\
&= \mathcal{Q}(2\tau)diag[e^{-\mathcal{K}_1}, ..., e^{-\mathcal{K}_n}].
\end{aligned}$$

Mas, $e^{2\pi i k_j} = 1$, o que nos dá $\mathcal{Q}(2\tau) = \tilde{\mathcal{Q}}(2\tau)$. E como também $\tilde{\mathcal{Q}}(0) = \mathcal{Q}(0)$, concluímos que $[\tilde{\mathcal{Q}}(t)] = [\mathcal{Q}(t)]$.

Proposição 3.19. *Consideremos duas matrizes fortemente estáveis $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$. Se $\mathcal{B}_1$ é fortemente conectada a $\mathcal{B}_0$ e $n(\mathcal{A}_1) = n(\mathcal{A}_0)$, então $\mathcal{A}_1(t)$ e $\mathcal{A}_0(t)$ são fortemente homotópicas.*

Demonstração. Usemos o fato provado anteriormente de que $Sp(2n, \mathbb{R})$ é isomorfo a $X \times S^1$, onde X é um espaço simplesmente conexo. Com isso, temos os caminhos $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1 : \mathbb{R} \longrightarrow X \times S^1$. Suponhamos que tais caminhos sejam dados por $\mathcal{Q}_j(t) = (q_j(t), z_j(t))$, para $j \in \{0, 1\}$. Logo, como $q_0(t)$ e $q_1(t)$ são caminhos τ- períodicos em X e X é simplesmente conexo, existe uma homotopia $q(t, s)$ ligando $q_0(t)$ e $q_1(t)$. Por outro lado, como o grupo fundamental de S^1 é $\mathbb{Z}$ e $n(\mathcal{A}_0) = n(\mathcal{A}_1)$, segue que existe uma homotopia $z(t, s)$ entre $z_0(t)$ e $z_1(t)$. Portanto, o mapeamento $\mathcal{Q}(t, s) = (q(t, s), z(t, s))$ dá uma homotopia entre $\mathcal{Q}_0(t)$ e $\mathcal{Q}_1(t)$.

Agora, usando que o matrizante $\mathcal{X}_j(t) = \mathcal{Q}_j(t)e^{t\mathcal{B}_j}$ é solução de $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x}$, tomando a sua derivada chegamos facilmente na expresão

$$\mathcal{A}_j(t) = \dot{\mathcal{Q}}_j(t)\mathcal{Q}_j^{-1}(t) + \mathcal{Q}_j(t)\mathcal{B}_j\mathcal{Q}_j^{-1}(t),$$

para $j \in \{1, 2\}$. Daí, tomemos o caminho $\mathcal{A}(t, s)$ dado por

$$\mathcal{A}(t, s) = \dot{\mathcal{Q}}(t, s)\mathcal{Q}^{-1}(t, s) + \mathcal{Q}(t, s)\mathcal{B}\mathcal{Q}^{-1}(t, s), \tag{3.20}$$

onde o ponto indica a derivada com relação a t. Com isso, obtemos que $\mathcal{A}(t, 0) = \mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}(t, 1) = \mathcal{A}_1$. Logo, $\mathcal{A}(t, s)$ é uma homotopia entre $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$.

Para concluirmos a prova vamos mostrar que a homotopia $\mathcal{A}(t, s)$ é uma homotopia forte. Para isso, seja $\mathcal{X}(t, s) = \mathcal{Q}(t, s)e^{t\mathcal{B}(s)}$. Diferenciando tal expressão e usando (3.20), chegamos em

$$\dot{\mathcal{X}}(t, s) = \dot{\mathcal{Q}}(t, s)e^{t\mathcal{B}(s)} + \mathcal{Q}(t, s)\mathcal{B}(s)e^{t\mathcal{B}(s)} = \mathcal{A}(t, s)\mathcal{X}(t, s).$$

E como $\mathcal{X}(0, s) = \mathcal{I}$, tem-se que $\mathcal{X}(t, s)$ é um matrizante de $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t, s)\mathbf{x}$, com decomposição de Floquet $\mathcal{X}(t, s) = \mathcal{Q}(t, s)e^{t\mathcal{B}(s)}$. Temos também que a transformação $\mathbf{x} = \mathcal{Q}(t, s)\mathbf{y}$ transforma $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t, s)\mathbf{x}$ em $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}(s)\mathbf{y}$, e vice-versa. Porém, como $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}(s)\mathbf{y}$ é fortemente estável, vale que $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t, s)\mathbf{x}$ é fortemente estável. Dessa maneira, a homotopia $\mathcal{A}(t, s)$ é uma homotopia forte.

$\square$

Para o sistema (3.16), estamos supondo que $\pm iw_1, ..., \pm iw_n$ sejam os autovalores de $\mathcal{B}$ com $\omega_1 \geq ... \geq \omega_n > 0$. Como o sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{B}\mathbf{y}$ é fortemente estável, todos os autovalores de $\mathcal{B}$ são definidos. Daí, podemos tomar um autovetor qualquer $\mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$ e definirmos $\delta_j = sign\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$. Com isso, definimos a *assinatura* do sistema (3.16) como sendo o vetor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_n)$. Pelo lema 3.4, a assinatura depende exclusivamente da matriz $\mathcal{A}(t)$. Também, chamamos $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_n)$ de *frequência* do sistema (3.16). Para evidenciarmos a dependência de $\mathcal{A}(t)$ em $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\delta}$ escrevemos $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\mathcal{A})$ e $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathcal{A})$; além de também escrevermos $\delta_j(\mathcal{A}) = \delta_j$, $\omega_j(\mathcal{A}) = \omega_j$. Por fim, dizemos que cada ω_j é uma frequência do sistema, quando estiver claro do que estejamos falando.

O objetivo final desta seção será demonstrar os *Teoremas de Gelfand-Lidskii*.

Teorema 3.9 (Primeiro Teorema de Gelfand-Lidskii)**.** *O domínio de estabilidade forte de uma matriz $\mathcal{A}(t)$ em $\mathcal{L}_{ss}$ é dado por*

$$[\mathcal{A}(t)] = \{\mathcal{A}_1(t) \in \mathcal{L}_{ss} : \boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}) = \boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}_1), n(\mathcal{A}) = n(\mathcal{A}_1)\}.$$

Demonstração. Fixemos uma matriz fortemente estável $\mathcal{A}_0(t)$ e um elemento $\mathcal{A}_1(t)$ na classe de $\mathcal{A}_0(t)$. Consequentemente, existe uma homotopia forte $\mathcal{A}(t,s)$ que liga $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$.

Consideremos os sistemas fortemente estáveis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t,s)\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_0(t)\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}_1(t)\mathbf{x}$$

com decomposições de Floquet

$$\mathcal{X}(t,s) = \mathcal{Q}(t,s)e^{t\mathcal{B}(s)}, \quad \mathcal{X}_0(t) = \mathcal{Q}_0(t)e^{t\mathcal{B}_0}, \quad \mathcal{X}_1(t) = \mathcal{Q}_1(t)e^{t\mathcal{B}_1},$$

sendo as matrizes $\mathcal{Q}(t,s)$, $\mathcal{Q}_0(t)$, $\mathcal{Q}_1(t)$ 2τ-periódicas e $\mathcal{B}(s)$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ matrizes reais.

Sejam $\boldsymbol{\omega}(s) = (\omega_1(s), ..., \omega_n(s))$, $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_1^{(0)}, ..., \omega_n^{(0)})$ e $\boldsymbol{\omega}_1 = (\omega_1^{(1)}, ..., \omega_n^{(1)})$ as frequências de $\mathcal{A}(t,s)$, $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$, respectivamente; e $\boldsymbol{\delta}(s) = (\delta_1(s), ..., \delta_n(s))$, $\boldsymbol{\delta}_0 = (\delta_1^{(0)}, ..., \delta_n^{(0)})$ e $\boldsymbol{\delta}_1 = (\delta_1^{(1)}, ..., \delta_n^{(1)})$ as respectivas assinaturas.

Precisaremos da seguinte afirmação: para todo s_0 pertencente ao intervalo $[0,1]$, existe um intervalo I_{s_0} contido em $[0,1]$ com $s \in I_{s_0}$ de modo que para todo s em I_{s_0}, tem-se que a assinatura $\boldsymbol{\delta}(s)$ da matriz $\mathcal{A}(s)$ é igual à assinatura $\boldsymbol{\delta}(s_0)$ de $\mathcal{A}(s_0)$.

Demonstremos tal afirmação.

Como o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t,s_0)\mathbf{x}$ é fortemente estável, todos os autovalores de $\mathcal{X}(s_0) = \mathcal{X}(2\tau, s_0)$ estão em S^1 e são definidos. Tomemos ϵ positivo com a propriedade de que $B_\epsilon(\alpha) \cap B_\epsilon(\beta) = \emptyset$, para quaisquer autovalores α e β de $\mathcal{X}(s_0)$. Assim, pelo Corolário 3.1, existe η positivo de modo que se $\mathcal{X}$ é uma matriz simplética com $||\mathcal{X} - \mathcal{X}(s_0)|| < \eta$, então para cada autovalor α de $\mathcal{X}(s_0)$ com multiplicidade l, existe uma quantidade l de autovalores de $\mathcal{X}$ em $B_\epsilon(\alpha)$, levando em conta as multiplicidades. Além disso, tomando ϵ suficientemente pequeno, usando o Teorema 3.7, teremos que se α é um autovalor de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie), então todos os autovalores de $\mathcal{X}$ que estejam próximos de α são de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie).

Por outro lado, a função $s \longmapsto \mathcal{X}(s) = \mathcal{X}(2\tau, s)$ é contínua; então existe γ positivo com a propriedade de que se $|s-s_0| < \gamma$, vale que $||\mathcal{X}(s)-\mathcal{X}(s_0)|| < \eta$. É claro que estamos supondo γ suficientemente pequeno de modo que $(s_0-\gamma, s_0+\gamma) \subset [0,1]$. Fixemos s com $|s-s_0| < \gamma$. Consequentemente, caso α seja um autovalor de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie) de $\mathcal{X}(s_0)$ com multiplicidade l, temos que existem l autovalores de $\mathcal{X}(s)$ de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie) em $B_\epsilon(\alpha)$, levando em conta as multiplicidades.

Com a discusão acima, concluímos em particular que os elementos das assinaturas de $\mathcal{A}(t, s_0)$ e $\mathcal{A}(t, s)$ são os mesmos. Agora, vamos provar que tomando γ suficientemente pequeno temos de fato que $\boldsymbol{\delta}(s_0) = \boldsymbol{\delta}(s)$.

Da continuidade da função $t \longmapsto e^{i2\tau t}$, sabemos que existe δ positivo com a propriedade de que se $|t-t_0| < \delta$, então $|e^{2\tau t} - e^{2\tau t_0}| < \epsilon$. E é claro que podemos tomar δ tão pequeno como quisermos. Assim, consideremos δ suficientemente pequeno de modo que $B_\delta(\alpha_1) \cap B_\delta(\alpha_2) = \emptyset$, para quaisquer dois autovalores α_1 e α_2 de $\mathcal{B}(s_0)$. Por outro lado, usando o Corolário 3.1, temos que existe σ positivo de modo que se $||\mathcal{B}(s)-\mathcal{B}(s_0)|| < \sigma$, então se α é um autovalor de $\mathcal{B}(s_0)$ com multiplicidade h, segue $\mathcal{B}(s)$ possui h autovalores (contandos as multiplicidades) β's com $|\alpha - \beta| < \delta$, o que implica que $|e^{2\tau\alpha} - e^{2\tau\beta}| < \epsilon$. Por fim, para que tenhamos $||\mathcal{B}(s) - \mathcal{B}(s_0)|| < \sigma$ basta tomarmos γ suficientemente pequeno, uma vez que a função $s \longmapsto \mathcal{B}(s)$ é contínua.

Sendo k a quantidade de frequências distintas de $\mathcal{A}(t, s_0)$, temos que $\omega_1(s_0) > ... > \omega_k(s_0) > 0$. Tomemos $\delta_j(s_0) = sign\{\mathbf{r}_j(s_0), \mathbf{s}_j(s_0)\}$, onde $\mathbf{r}_j(s_0) + i\mathbf{s}_j(s_0)$ é um autovetor de $\mathcal{B}(s_0)$ relacionado ao autovalor $i\omega_j(s_0)$. Assim, $\boldsymbol{\delta}(s_0) = (\delta_1(s_0), ..., \delta_1(s_0), ..., \delta_k(s_0), ..., \delta_k(s_0))$, onde a quantidade de $\delta_j(s_0)$'s é igual a f_j, sendo f_j a multiplicidade do autovalor $i\omega_j(s_0)$.

Para cada frequência $\omega_j(s_0)$ de $\mathcal{A}(t, s_0)$ sendo $i\omega_j(s_0)$ de primeira espécie, temos uma quantidade f_j de frequências $\omega_{j_1}(s), ..., \omega_{j_{f_j}}(s)$ de $\mathcal{B}(s)$ com $\pm i\omega_a(s) \in B_\delta(\pm i\omega_j(s))$, para todo a em $\{j_1, ..., j_{f_j}\}$, o que implica que $|e^{\pm i2\tau\omega_a(s)} - e^{\pm i2\tau\omega_j(s_0)}| < \epsilon$, o que, por sua vez, nos leva a dizer que os autovalores $i\omega_a(s)$ são de primeira espécie, para $a \in \{j_1, ..., j_{f_j}\}$. O mesmo vale para o caso de $i\omega_j(s_0)$ ser de segunda espécie. Além disso, se $j > l$, então $\omega_{j_e}(s) > \omega_{l_g}(s)$, para $e \in \{j_1, ..., j_{f_j}\}$ e $g \in \{l_1, ..., l_{f_l}\}$. Desse modo, $\boldsymbol{\delta}(s_0) = \boldsymbol{\delta}(s)$. Assim, fazendo $\gamma_0 = \gamma$ e tomando $I_{s_0} = (s_0 - \gamma_{s_0}, s_0 + \gamma_{s_0})$, temos a afirmação provada no caso em que $s_0 \in (0,1)$. No caso em que $s_0 = 0$, teremos um intervalo da forma $I_0 = [0, \gamma_0)$, e para $s_0 = 1$ teremos um intervalo da forma $I_1 = (1 - \gamma_1, 1]$.

Consideremos o intervalo $J = [\gamma_0, 1 - \gamma_1]$. A partir daí, $J \subset \bigcup_{s \in J} I_s$. Como J é compacto, segue que existem $s_1, ..., s_k \in J$ com a propriedade de que $J \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_{s_k}$. Assim, $[0,1] = I_0 \bigcup I_1 \cup \bigcup_{j=1}^{k} I_{s_k}$. Sem perda de generalidade, podemos supor, a menos de uma enumeração, que $s_1 < ... < s_k$. Dessa maneira, teremos que ter necessariamente $I_{s_j} \cap I_{s_{j+1}} \neq \emptyset$, para $j \in \{1, ..., k\}$. De fato, suponhamos que esse não seja o caso, logo, teríamos que $s_j + \gamma_{s_j}$ não estaria em $[0,1]$, um absurdo. Sendo assim, como $I_{s_j} \cap I_{s_{j+1}}$ é um aberto não vazio, temos uma quantidade não enumerável de elementos em tal conjunto. É claro que também temos que $I_0 \cap I_{s_1}$ e $I_{s_k} \cap I_1$ são abertos não nulos.

Dessa maneira, tomando $s^{(j)}$ em $I_{s_j} \cap I_{s_{j+1}}$, para $j \in \{1, ..., k-1\}$, e também t_0 e t_1 pertencentes às interseções $I_0 \cap I_{s_1}$ e $I_1 \cap I_{s_k}$, respectivamente, seguem as igualdades:

$$\boldsymbol{\delta}_0 = \boldsymbol{\delta}(0) = \boldsymbol{\delta}(t_0) = \boldsymbol{\delta}(s^{(1)}) = ... = \boldsymbol{\delta}(s^{(k-1)}) = \boldsymbol{\delta}(t_1) = \boldsymbol{\delta}(1) = \boldsymbol{\delta}_1.$$

Agora, vamos provar a recíproca. Suponhamos que temos duas matrizes Hamiltonianas contínuas e τ-periódicas fortemente estáveis $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$ satisfazendo $\boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}_0) = \boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}_1)$ e $n(\mathcal{A}_0) = n(\mathcal{A}_1)$. Sejam $\boldsymbol{\omega}^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, ..., \omega_n^{(0)})$ e $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (\omega_1^{(1)}, ..., \omega_n^{(1)})$ as frequências de $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$, respectivamente.

Comecemos assumindo que as frequências $\omega_1^{(j)}, ..., \omega_n^{(j)}$, para $j \in \{0,1\}$, são todas distintas. Como $\boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}_0) = \boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}_1)$, podemos usar o Lema 2.12 para encontrarmos duas matrizes simpléticas $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ satisfazendo

$$\mathcal{P}_j^{-1} \mathcal{B}_j \mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} O & \Omega_j \\ -\Omega_j & O \end{pmatrix}, \text{onde } \Omega_j = \begin{pmatrix} \delta_1 \omega_1^{(j)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_n \omega_n^{(j)} \end{pmatrix},$$

para $j \in \{0,1\}$ e $(\delta_1, ..., \delta_n) = \boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}_0) = \boldsymbol{\delta}(\mathcal{A}_1)$.

Consideremos $\omega_j(s) = (1-s)\omega_j^{(0)} + s\omega_j^{(1)}$, com $0 \leq s \leq 1$. Uma vez que $\omega_j^{(0)}$ e $\omega_j^{(1)}$ são positivos, $\omega_j(s)$ é positiva para todo s em $[0.1]$. Além disso, como o grupo simplético é conexo, existe um caminho contínuo $\mathcal{P}(s)$ definido em $[0,1]$ com valores em $Sp(2n, \mathbb{R})$ ligando $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$. A partir daí, para s pertencente ao intervalo $[0,1]$, consideremos a seguinte matriz

Hamiltoniana:

$$\mathcal{B}(s) = \mathcal{P}(s) \begin{pmatrix} O & \Omega(s) \\ -\Omega(s) & O \end{pmatrix} \mathcal{P}(s)^{-1}, \text{ com } \quad \Omega(s) = \begin{pmatrix} \delta_1\omega_1(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_n\omega_n(s) \end{pmatrix}.$$

Vamos provar que $\mathcal{B}(s)$ é um caminho forte entre $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$. Para isso, devemos perceber que $\pm i\omega_1(s), ..., \pm i\omega_n(s)$ são autovalores de $\mathcal{B}(s)$ e que um autovetor correspondente a $i\omega_j(s)$ é o vetor $\mathbf{v}_j = \mathcal{P}(s)\mathbf{e}_j + i\delta_j\mathcal{P}(s)\mathbf{e}_{n+j}$, com $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{2n}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$. Além do mais, como $\mathcal{P}(s)$ é simplética e $\{\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{n+j}\} = 1$, temos $\{\mathcal{P}(s)\mathbf{e}_j, \delta_j\mathcal{P}(s)\mathbf{e}_{n+j}\} = \delta_j$. Consequentemente, $i\omega_j(s)$ é um autovalor definido, o que implica que $\mathcal{B}(s)$ é um caminho forte entre $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$. Ainda, como $n(\mathcal{A}_0) = n(\mathcal{A}_1)$, pela Proposição 3.19 $\mathcal{A}_1(t)$ e $\mathcal{A}_0(t)$ são fortemente homotópicos.

No caso geral, teremos

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1^{(j)}, ..., \omega_1^{(j)}, ..., \omega_k^{(j)}, ..., \omega_k^{(j)}), \quad \boldsymbol{\delta} = (\delta_1^{(j)}, ..., \delta_1^{(j)}, ..., \delta_k^{(j)}, ..., \delta_k^{(j)}), \text{ para } j \in \{1, 2\},$$

onde a quantidade tanto de $\omega_l^{(j)}$'s quanto de $\delta_l^{(j)}$ é igual a multiplicidade do autovalor $i\omega_j$.

Uma vez que $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ são estáveis, ambas matrizes são diagonalizáveis. Dessa maneira, pela Proposição 2.18, existem matrizes simpléticas $\mathcal{P}_{j,l}$ e $\mathcal{P}_{j,l}$ de modo que se $\mathcal{B}_0^{(l)}$ e $\mathcal{B}_1^{(l)}$ são as restrições das matrizes $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$ aos subespaços $U_j = \eta^\dagger(i\omega_l) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_l)$, para $l \in \{1, .., k\}$, tem-se que

$$\mathcal{P}_{j,l}^{-1}\mathcal{B}_j^{(l)}\mathcal{P}_{j,l} = \begin{pmatrix} O & \Omega_l^{(j)} \\ -\Omega_l^{(j)} & O \end{pmatrix}, \text{ com } \Omega_l^{(j)} = \begin{pmatrix} \delta_l\omega_l^{(j)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_l\omega_l^{(j)}, \end{pmatrix}, \text{ para } j \in \{1, 2\}.$$

Para todo l, temos um caminho contínuo $\mathcal{P}(s)$ conectando $\mathcal{P}_{0,l}$ a $\mathcal{P}_{1,l}$. A partir daí, podemos construir um caminho fortemente estável $\mathcal{B}_l(s)$ entre $\mathcal{B}_0^{(l)}$ e $\mathcal{B}_1^{(l)}$, como foi feito antes. Usando-se disso, tomemos o caminho fortemente estável $\mathcal{B}(s) = diag[\mathcal{B}_1(s), ..., \mathcal{B}_k(s)]$ conectando $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$. Por fim, como os índices $n(\mathcal{A}_0)$ e $n(\mathcal{A}_1)$ são iguais pela Proposição 3.19, obtemos que $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$ pertencem a mesma classe.

□

Não podemos ter 1 ou -1 como autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$. De fato, suponhamos que $\rho = 1$ seja um autovalor de $\mathcal{X}(2\tau)$. Uma vez que $\mathcal{B}$ é diagonalizável e $\mathcal{X}(2\tau) = e^{2\tau\mathcal{B}}$, temos que $\mathcal{X}(2\tau)$ é diagonalizável. Além disso, como $\mathcal{X}(2\tau)$ é simplética, ρ tem que ser necessariamente um autovalor com multiplicidade algébrica pelo menos 2; mas como $\mathcal{X}(2\tau)$ é diagonalizável, segue que ρ tem multiplicidade geométrica maior ou igual do que 2. Portanto, sendo $\mathcal{X}(2\tau)$ real, existem dois autovetores reais $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ relacionados a $\rho = 1$. Consequentemente, $\mathbf{z} = \mathbf{u}+i\mathbf{v}$ e $\overline{\mathbf{z}} = \mathbf{u}-i\mathbf{v}$ são também autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$ associado a ρ. A partir daí, usando a identidade (3.14), obtemos

$$[\mathbf{z}, \mathbf{z}] = 2\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}, \quad [\mathbf{v}, \mathbf{v}] = 2\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}. \tag{3.21}$$

Porém, suponhamos que ρ seja positivo definido. Sendo assim, (3.21) não pode ocorrer; contradizendo assim a hipótese de que ρ é um autovalor. O mesmo é válido se ρ for negativo definido. Além disso, o caso em que $\rho = -1$ é totalmente análogo.

Vamos definir os seguintes conjuntos: $S^1_+ := \{z \in S^1 : \mathbf{Im}(z) > 0\}$, $S^1_- := \{z \in S^1 : \mathbf{Im}(z) < 0\}$. Pela natureza dos autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$, metade dos multiplicadores do sistema (3.16), levando em conta as multiplicidades, estão em S^1_+ e a outra metade em S^1_-. Ainda, usando o Teorema 3.8, tem-se que todos os autovetores de $\mathcal{X}(2\tau)$ são definidos.

Suponahmos que tenhamos a seguinte enumeração dos autovalores de $\mathcal{X}(2\tau)$ que estão em S^1_+: ρ_1,..., ρ_n, de modo que $\mathbf{Re}(\rho_1) \geq ... \geq \mathbf{Re}(\rho_n)$. Além disso, para cada ρ_j associemos o valor σ_j, sendo igual a 1 ou -1, caso ρ_j seja de primeira ou segunda espécie, respectivamente. Com isso, definimos a *disposição* do sistema (3.16) como sendo o vetor $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$. Como de costume, vamos usar a notação $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{A})$; além também de escrevermos $\sigma_j(\mathcal{A}) = \sigma_j$, para cada j.

Agora, percebemos que na segunda parte da demonstração do Primeiro Teorema de Gelfand-Lidskii basta usarmos que $\{\delta_1^{(0)}, ..., \delta_n^{(0)}\} = \{\delta_1^{(1)}, ..., \delta_n^{(1)}\}$ e não necessariamente que $(\delta_1^{(0)}, ..., \delta_n^{(0)}) = (\delta_1^{(1)}, ..., \delta_n^{(1)})$. De fato, a partir de $\{\delta_1^{(0)}, ..., \delta_n^{(0)}\} = \{\delta_1^{(1)}, ..., \delta_n^{(1)}\}$, obtemos que $\delta_1^{(0)} = \delta_{k_1}^{(1)}$,...,$\delta_n^{(0)} = \delta_{k_n}^{(1)}$, para distintos $k_1, ..., k_n$ pertencentes a $\{1, ..., n\}$. Em particular, $\{1, ..., n\} = \{k_1, ..., k_n\}$. Com isso, trabalhando com a renumeração $\omega_{k_1}^{(1)}, ..., \omega_{k_n}^{(1)}$ das frequências $\omega_1^{(1)}, ..., \omega_n^{(1)}$, conseguimos fazer exatamente os mesmos passos da prova.

Essa discussão nos dá o seguinte colorário:

Corolário 3.2. *Se $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}_{ss}$, então a classe $[\mathcal{A}(t)]$ é dada pelas matrizes fortementes estáveis $\mathcal{A}_1(t)$'s satisfazendo $n(\mathcal{A}) = n(\mathcal{A}_1)$, $\{\delta_1(\mathcal{A}), ..., \delta_n(\mathcal{A})\} = \{\delta_1(\mathcal{A}_1), ..., \delta_n(\mathcal{A}_1)\}$.*

Teorema 3.10 (Segundo Teorema de Gelfand-Lidskii). *O domínio de estabilidade forte de uma matriz $\mathcal{A}(t)$ em $\mathcal{L}_{ss}$ é dado por*

$$[\mathcal{A}(t)] := \{\mathcal{A}_1(t) \in \mathcal{L}_{ss} : n(\mathcal{A}) = n(\mathcal{A}_1), \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{A}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{A}_1)\}.$$

Demonstração. Pela discussão logo antes do enunciado deste teorema, para a demonstração basta provarmos que Se $\mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}_1(t)$ estão no mesmo domínio de estabilidade, então $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{A}_0) = \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{A}_1)$.

Temos uma homotopia forte $\mathcal{A}(t,s)$ de modo que $\mathcal{A}(t,0) = \mathcal{A}_0(t)$ e $\mathcal{A}(t,1) = \mathcal{A}_1(t)$. Suponhamos que $\boldsymbol{\sigma}(s) = (\sigma_1(s), ..., \sigma_n(s))$ seja a disposição de $\mathcal{A}(t,s)$, com os respectivos multiplicadores em S^1_+ sendo dados por $\rho_1(s), ..., \rho_n(s)$. Denotemos também $\mathcal{X}(s) = \mathcal{X}(2\tau, s)$.

Vamos provar a afirmação: para todo s_0 no intervalo $[0,1]$, existe um intervalo I_{s_0} contido em $[0,1]$ com $s \in I_{s_0}$ de modo que para todo s em I_{s_0}, vale que $\boldsymbol{\sigma}(s) = \boldsymbol{\sigma}(s_0)$.

Provemos tal afirmação. Fixemos s_0 no intervalo $(0,1)$. Desta vez, vamos tomar ϵ positivo com as seguintes propriedades:

(a) para quaisquer autovalores α e β de $\mathcal{X}(s_0) = \mathcal{X}(2\tau, s_0)$, tem-se que $B_\epsilon(\alpha) \cap B_\epsilon(\beta) = \emptyset$;

(b) caso $z \in B_\epsilon(\rho_j)$, $w \in B_\epsilon(\rho_{j+1})$, há de valer que $\mathbf{Re}(z) > \mathbf{Re}(w)$, para $j \in \{1, ..., n\}$;

(c) $B_\epsilon(\rho_1)$ e $B_\epsilon(\rho_n)$ não intersectam o eixo real.

Assim, usando o Teorema 3.7, encontramos δ positivo de modo que para qualquer matriz simplética $\mathcal{X}$ com $||\mathcal{X} - \mathcal{X}(s_0)|| < \delta$, tem-se que se α é um autovalor de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie) de $\mathcal{X}(s_0)$ com multiplicidade m, então existem m autovalores de $\mathcal{X}$ de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie), contando as multiplicidades, em $B_\epsilon(\alpha)$.

Por outro lado, a função $s \longmapsto \mathcal{X}(2\tau, s)$ é contínua. Assim, existe γ positivo, com $(s_0 - \gamma, s_0 + \gamma) \subset [0,1]$, com a propriedade de que se $|s - s_0| < \gamma$, então $||\mathcal{X}(s) - \mathcal{X}(s_0)|| < \delta$. Com isso, temos que para cada autovalor de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie) α de $\mathcal{X}(s_0)$ com multiplicidade m, existem m autovalores de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie) de $\mathcal{X}(s)$ em $B_\epsilon(\alpha)$.

Com isso, fixemos $\mathcal{X}(s)$ com $|s - s_0| < \delta$. Suponhamos que $\rho_1(s_0), .., \rho_k(s_0)$ tenham respectivas multiplicidades $m_1, ..., m_k$. Tomemos $\rho_1^{(j)}(s), ..., \rho_{l_j}^{(j)}(s)$ como sendo todos os autovalores de $\mathcal{X}(s)$ que estejam em $B_\epsilon(\rho_j(s_0))$. Primeiramente, todos esses auotvalores estão em S^1_+ por conta de (c). Daí, temos que ter necessariamente que $l_1 + ... + l_k = n$, conseguentemente, $\rho_1^{(1)}(s), ..., \rho_{l_1}^{(1)}(s), ..., \rho_1^{(k)}(s), ..., \rho_{l_k}^{(k)}(s)$ são todos os autovalores de $\mathcal{X}(s)$ que estão em S^1_+. Além disso, por (b), temos que $\mathbf{Re}(\rho_h^{(j)}(s)) > \mathbf{Re}(\rho_a^{j+1}(s))$, para quaisquer $a \in \{1, ..., l_{j+1}\}$, $h \in \{1, .., l_j\}$. E além disso, se $\rho_j(s_0)$ for de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie), então $\rho_1^{(j)}(s), ..., \rho_{l_j}^{(j)}(s)$ são todos de primeira espécie (respectivamente, segunda espécie). Com isso, temos que $\boldsymbol{\sigma}(s) = \boldsymbol{\sigma}(s_0)$. A prova do teorema segue exatamente como antes.

$\square$

Corolário 3.3. *Caso tenhamos uma matriz fortemente estável $\mathcal{A}(t)$, a classe de estabilidade forte de $\mathcal{A}(t)$ é formada pelas matrizes fortemente estáveis $\mathcal{A}_1(t)$'s com $n(\mathcal{A}) = n(\mathcal{A}_1), \{\sigma_1(\mathcal{A}), ..., \sigma_n(\mathcal{A})\} = \{\sigma_1(\mathcal{A}_1), ..., \sigma(\mathcal{A}_1)\}$.*

3.7.3 Epílogo: uma Fórmula para o Índice de Gelfand-Lidskii

Continuemos com um sistema Hamiltoniano fortemente estável

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{x} \tag{3.22}$$

com decomposição de Floquet

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{Q}(t)e^{t\mathcal{B}}, \tag{3.23}$$

sendo $\mathcal{Q}(t)$ 2τ-periódica simplética e $\mathcal{B}$ Hamiltoniana real. Como a matriz $\mathcal{A}(t)$ é fortemente estável, $\mathcal{B}$ também é fortemente estável.

Sendo $\mathcal{B}$ Hamiltoniana, a partir da proposição 2.18, existe uma base simplética $B = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ de modo que se $\pm w_1, ..., \pm iw_n$ são os autovalores de $\mathcal{B}$, então a matriz $\mathcal{B}$ em tal base toma a forma

$$[\mathcal{B}]_B = \begin{pmatrix} O & \mathcal{B}_0 \\ -\mathcal{B}_0 & O \end{pmatrix},$$

sendo $\mathcal{B}_0 = \text{diag}[\delta_1 w_1, ..., \delta_n w_n]$, onde $\delta_j = sign\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$ para algum autovetor $\mathbf{v}_j = \mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$ de iw_j. Além disso, $\mathcal{B}\mathbf{u}_j = -\delta_j w_j \mathbf{v}_j$ e $\mathcal{B}\mathbf{v}_j = \delta_j w_j \mathbf{u}_j$.

Consideremos as matrizes $[\mathcal{Q}(t)]_B$ e $[\mathcal{X}(t)]_B$. Vamos olhar para suas decomposições polares relativas ao produto interno com respeito a base B:

$$[\mathcal{Q}(t)]_B = \mathcal{Q}_1(t)\mathcal{Q}_2(t), \quad [\mathcal{X}(t)]_B = \mathcal{X}_1(t)\mathcal{X}_2(t).$$

Além disso, suponhamos que θ_j seja o argumento principal do autovalor $\rho_j = e^{i2\tau\omega_j}$.

Vamos considerar o operador $\mathcal{M} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definido como sendo o operador cuja matriz na base B é dada por

$$\mathcal{M}_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathcal{I} & \mathcal{I} \\ i\mathcal{I} & -i\mathcal{I} \end{pmatrix}.$$

Tomando $\mathcal{R}(t)$ como sendo o bloco de matriz $n \times n$ superior esquerdo da matriz $\mathcal{M}_B^* \mathcal{X}_2(t) \mathcal{M}_B$, vamos provar nesta seção a seguinte fórmula para $n(\mathcal{A})$:

$$n(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathbf{Arg}\, det(\mathcal{R}(t))\Big|_0^{2\tau} - \sum_{k=1}^{n} \delta_j \theta_j\right]$$

Comecemos percebendo que valem as igualdades

$$e^{t\mathcal{B}}\mathbf{u}_j = \mathbf{cos}(\delta_j w_j t)\mathbf{u}_j - \mathbf{sen}(\delta_j w_j t)\mathbf{v}_j, \quad e^{t\mathcal{B}}\mathbf{v}_j = \mathbf{sen}(\delta_j w_j t)\mathbf{u}_j + \mathbf{cos}(\delta_j w_j t)\mathbf{v}_j.$$

Consequentemente,

$$[e^{t\mathcal{B}}]_B = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(t) & \mathcal{S}(t) \\ -\mathcal{S}(t) & \mathcal{C}(t) \end{pmatrix},$$

com

$$\mathcal{C}(t) = \mathrm{diag}[\mathbf{cos}(\delta_1 w_1 t), ..., \mathbf{cos}(\delta_n w_n t)], \quad \mathcal{S}(t) = \mathrm{diag}[\mathbf{sen}(\delta_1 w_1 t), ..., \mathbf{sen}(\delta_n w_n t)].$$

Como $\mathcal{Q}(t)$ e $\mathcal{X}(t)$ são simpleticas, $\mathcal{X}_1(t)$ e $\mathcal{Q}_1(t)$ são simpléticas positivas definidas e $\mathcal{X}_2(t)$ e $\mathcal{Q}_2(t)$ são simpléticas ortogonais relativas ao produto $\langle\ ,\ \rangle_B$, isto é,

$$\langle \mathcal{Q}_2(t)\mathbf{u}, \mathcal{Q}(t)\mathbf{v}\rangle_B = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_B, \quad \langle \mathcal{X}_2(t)\mathbf{u}, \mathcal{X}(t)\mathbf{v}\rangle_B = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_B.$$

Para vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ com coeficientes na base B dados por $a_1, ..., a_{2n}$ e $b_1, ..., b_{2n}$, respectivamente, temos que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle_B = a_1 b_1 + ... + a_{2n} b_{2n}$.

Consequentemente, valem as igualdades

$$\mathcal{Q}_2(t)\mathcal{Q}_2^{\intercal}(t) = \mathcal{I} = \mathcal{Q}_2^{\intercal}(t)\mathcal{Q}_2(t), \quad \mathcal{X}_2(t)\mathcal{X}_2^{\intercal}(t) = \mathcal{I} = \mathcal{X}_2^{\intercal}(t)\mathcal{X}_2(t).$$

Como $\mathcal{Q}_2(t)$ e $\mathcal{X}_2(t)$ são simpléticas e ortogonais, como vimos antes, tais matrizes tomam a forma

$$\mathcal{Q}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}(t) & \mathcal{V}(t) \\ -\mathcal{V}(t) & \mathcal{U}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}(t) & \mathcal{Z}(t) \\ -\mathcal{Z}(t) & \mathcal{Y}(t) \end{pmatrix},$$

com $\mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{\intercal}(t) + \mathcal{V}(t)\mathcal{V}^{\intercal}(t) = \mathcal{I}$, $\mathcal{Y}(t)\mathcal{Y}^{\intercal}(t) + \mathcal{Z}(t)\mathcal{Z}^{\intercal}(t) = \mathcal{I}$ além de $\mathcal{U}^{\intercal}(t)\mathcal{V}(t)$ e $\mathcal{Y}^{\intercal}(t)\mathcal{Z}(t)$ serem simétricas. Daí, segue que as matrizes $\mathcal{W}(t) = \mathcal{U}(t) + i\mathcal{V}(t)$ e $\mathcal{R}(t) = \mathcal{Y}(t) + i\mathcal{Z}(t)$ são unitárias. A partir daí,

$$\mathcal{M}_B^*\mathcal{Q}_2(t)\mathcal{M}_B = \begin{pmatrix} \mathcal{W}(t) & O \\ O & \overline{\mathcal{W}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_B^*\mathcal{X}_2(t)\mathcal{M}_B = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(t) & O \\ O & \overline{\mathcal{R}}(t) \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, usando a decomposição polar $[\mathcal{Q}(t)]_B = \mathcal{Q}_1(t)\mathcal{Q}_2(t)$ e o fato de que a matriz $\mathcal{M}_B$ é unitária, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_B^*[\mathcal{Q}(t)]_B\mathcal{M}_B &= (\mathcal{M}_B^*\mathcal{Q}_1(t)\mathcal{M}_B)(\mathcal{M}_B^*\mathcal{Q}_2(t)\mathcal{M}_B)\\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1(t) & \mathcal{S}_2(t) \\ \mathcal{S}_3(t) & \mathcal{S}_4(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{W}(t) & O \\ O & \overline{\mathcal{W}}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1(t)\mathcal{W}(t) & * \\ * & *\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{W}(t)$ unitária, podemos escrever $det\,(\mathcal{W}(t)) = e^{i\theta(t)}$, com $0 \le \theta(t) \le 2\pi$, para todo t. Consequentemente, $det\,(\mathcal{S}_1(t)\mathcal{W}(t)) = det(\mathcal{S}_1(t))e^{i\theta(t)}$. Porém, como a matriz $\mathcal{M}_B^*(t)\mathcal{Q}_1(t)\mathcal{M}_B(t)$ é positiva definida, $det\,(\mathcal{S}_1(t))$ é positivo não nulo. De fato, para um vetor $\mathbf{x}$ não nulo, temos que $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathcal{S}_1(t)\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}^\mathsf{T}\begin{pmatrix} \mathcal{S}_1(t) & \mathcal{S}_2(t) \\ \mathcal{S}_3(t) & \mathcal{S}_4(t)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} > 0$, o que implica que o determinante de $\mathcal{S}_1(t)$ é real positivo. Consequentemente, o argumento principal de $det(\mathcal{S}_1(t))e^{i\theta(t)}$ é $\theta(t)$. Porém, a matriz $[\mathcal{Q}(t)]_B$ é 2τ-periódica, o que implica

$$\theta(2\tau) - \theta(0) = 2\pi m, \tag{3.24}$$

onde m é a classe de $[\mathcal{Q}(t)]_B$ no grupo fundamental de $Sp(2n,\mathbb{R})$.

Tomemos $\mathcal{L}(t)$ como sendo a matriz de transição da base canônica do $\mathbb{R}^{2n}$ para a base B. Sendo assim, $\mathcal{L}(t)$ é uma matriz simplética satisfazendo $\mathcal{L}(t)^{-1}\mathcal{Q}(t)\mathcal{L}(t)$. Tomemos um cominho contínuo $\mathcal{L}(t,s)$ em $Sp(2n,\mathbb{R})$ com $\mathcal{L}(t,0) = \mathcal{I}$ e $\mathcal{L}(t,1) = \mathcal{L}(t)$. Consequentemente, $\mathcal{Q}(t,s) = \mathcal{L}(t,s)^{-1}\mathcal{Q}(t)\mathcal{L}(t,s)$ é uma homotopia de $\mathcal{Q}(t)$ para $[\mathcal{Q}(t)]_B$. Concluímos, dessa maneira, que $m = n(\mathcal{A})$.

Usando que $[e^{-t\mathcal{B}}]_B = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(t) & -\mathcal{S}(t) \\ \mathcal{S}(t) & \mathcal{C}(t)\end{pmatrix}$, obtemos

$$\mathcal{M}_B^*[e^{-t\mathcal{B}}]\mathcal{M}_B = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(t) - i\mathcal{S}(t) & O \\ O & \mathcal{C}(t) + i\mathcal{S}(t)\end{pmatrix}.$$

Valendo-se disso e de que $\mathcal{M}_B$ é unitária, chegamos em

$$\mathcal{M}_B^*[\mathcal{X}(t)]_B[e^{-t\mathcal{B}}]_B\mathcal{M}_B = (\mathcal{M}_B^*\mathcal{X}_1(t)\mathcal{M}_B)\,(\mathcal{M}_B^*\mathcal{X}_2(t)\mathcal{M}_B)\left(\mathcal{M}_B^*[e^{-t\mathcal{B}}]_B\mathcal{M}_B\right).$$

Escrevemos $\mathcal{M}_B^*\mathcal{X}_1(t)\mathcal{M}_B = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1(t) & \mathcal{P}_2(t) \\ \mathcal{P}_3(t) & \mathcal{P}_4(t)\end{pmatrix}$. Com isso, obtemos que o bloco $n\times n$ superior esquerdo de $\mathcal{M}_B^*[\mathcal{X}(t)]_B[e^{-t\mathcal{B}}]\mathcal{M}_B$ é dado pela matriz $\mathcal{P}_1(t)\mathcal{R}(t)\,(\mathcal{C}(t) - i\mathcal{S}(t))$. Agora, como

$\mathcal{R}(t)$ é uma matriz unitária, segue que $det(\mathcal{R}(t)) = e^{i\phi(t)}$, com $0 < \phi(t) \leq 2\pi$, para todo t. Portanto, $det(\mathcal{P}_1(t)\mathcal{R}(t)\,(\mathcal{C}(t) - i\mathcal{S}(t))) = det(\mathcal{P}_1(t))e^{i\phi(t)}e^{-i\langle\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega}\rangle}t$, com $\langle\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega}\rangle = \delta_1\omega_1 + \ldots + \delta_n\omega_n$. Porém, $det(\mathcal{P}_1(t)) > 0$, o que implica que $\mathbf{Arg}\; det(\mathcal{P}_1(t))e^{i\phi(t)}e^{-i\langle\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega}\rangle t} = \phi(t) - \langle\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega}\rangle t$. Consequentemente, de (3.24) obtemos

$$m = \frac{1}{2\pi}\left[\mathbf{Arg}\, det(\mathcal{R}(t))\Big|_0^{2\tau} - \langle\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega}\rangle 2\tau\right]. \tag{3.25}$$

Tomemos a parte inteira de $\frac{\tau\omega_j}{\pi}$ como sendo igual a m_j. Sendo assim, $\frac{\tau\omega_j}{\pi} = m_j + k_j$, com $0 \leq k_j < 1$. Daí, $2\tau\omega_j = 2\pi m_j + \theta_j$, com $0 \leq \theta_j < 2\pi$. Dessa maneira, $\langle\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\omega}\rangle 2\tau = \delta_1\theta_1 + \ldots + \delta_n\theta_n$. Consequentemente, a fórmula (3.25) pode ser escrita como

$$m = \frac{1}{2\pi}\left[\mathbf{Arg}\, det(\mathcal{R}(t))\Big|_0^{2\tau} - \sum_{k=1}^{n}\delta_j\theta_j\right].$$

REFERÊNCIAS

H. E. Cabral, L.F. Brandão, Normal Forms and Stability of Hamiltonian Systems. Em preparação.

I. M. Gel'fand, V. B. Lidskii, "On the structure of the regions of stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients", Uspekhi Mat. Nauk, 10:1(63) (1955), 3–40.

V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii, Linear Differential Equations with Periodic Coefficients, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.

K. Meyer and D. Offin, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, Third Edition, Springer (Applied Mathematical Sciences vol. 90), 2017.

Ivar Ekeland - Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics-Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1990).

A. Alexanderian, On continuous dependence of roots of polynomials on coefficients: https://aalexan3.math.ncsu.edu/articles/polyroots.pdf.

M. Hirsch and S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, Inc., 1974.

C. L. Siegel, J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, 1971.

C. L. Siegel, Symplectic Geometry, Amer.J. Math, 1943. Reprinted in book form by Academic Press, 1964.