



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

MARIA IONERIS OLIVEIRA SILVA

Modelos de Tempo de Vida Acelerado Birnbaum-Saunders Multivariados

Recife

2022

MARIA IONERIS OLIVEIRA SILVA

Modelos de Tempo de Vida Acelerado Birnbaum-Saunders Multivariados

Trabalho apresentado ao programa de Pós-graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutora em Estatística.

Área de Concentração: Estatística Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Francisco José de Azevêdo Cysneiros

Coorientadora: Prof. Dra. Michelli Karinne Barros da Silva

Recife

2022

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

S586m Silva, Maria Ioneris Oliveira
Modelos de tempo de vida acelerado Birnbaum-Saunders multivariados /
Maria Ioneris Oliveira Silva. – 2022.
144 f.: il., fig., tab.

Orientador: Francisco José de Azevêdo Cysneiros.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Estatística, Recife, 2022.
Inclui referências e apêndices.

1. Estatística aplicada. 2. Distribuição Birnbaum-Saunders. 3. Fragilidade.
4. Resíduos. 5. Influência local. I. Cysneiros, Francisco José de Azevêdo
(orientador). II. Título.

310 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 49

MARIA IONERIS OLIVEIRA SILVA

Modelos de Tempo de Vida Acelerado Birnbaum-Saunders Multivariados

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Estatística.

Aprovada em: 21 de fevereiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco José de Azevêdo Cysneiros
UFPE

Prof.^a. Dr.^a. Aline Barbosa Tsuyuguchi
UFPE

Prof. Dr. Abraão David Costa do Nascimento
UFPE

Prof. Dr. Juvêncio Santos Nobre
UFC

Prof. Dr. Filidor Edilson Vilca Labra
UNICAMP

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por tudo que Ele tem feito em minha vida e por ter me feito uma mulher mais forte a cada dia.

Ao professor Francisco Cysneiros por ter me dado a oportunidade de ser sua orientanda. Agradeço o incentivo, a confiança, a excelente orientação e por fazer com que eu tivesse mais confiança em mim mesma.

A professora Michelli Karinne, pela orientação, carinho, generosidade, confiança, por ter sido responsável pela minha vinda para a UFPE e por ter me feito acreditar que eu seria capaz de alçar novos voos. Enfim, a borboleta começa a sair do casulo.

Ao meu esposo Renato, que, com todo seu amor, compreensão e atenção, sempre me deu incentivo e força para alcançar os meus objetivos (os nossos).

Aos meus pais, José Lins e Irene Costa, que sempre vão ser a minha inspiração e que, por vezes, abriram mão dos seus sonhos pelos meus. Meu pai, um dos seus últimos desejos está sendo realizado.

Ao meu irmão Jerfison, meu avô Lourival (Meu pai Louro), ao meu primo Rafael e aos meus padrinhos Severina Helena e Antônio. Pessoas estas que sempre me incentivaram e sempre estiveram dispostas a me ajudar no que fosse preciso.

Aos meus amigos da pós-graduação, em especial a Fernanda Clotilde que me recebeu e me deu todo suporte necessário na minha chegada em Recife, além de dividir o gosto por doces enquanto estudávamos probabilidade avançada, a César Diogo por dividir as angústias e por rir por besteira (deixando os meus dias mais leves), a Ana Cristina, Marcelo, Iraponil e Raimundo pelos momentos de estudo, conversas e boas risadas.

Ao professor e amigo Joelson Campos, pela ajuda dada ao longo do mestrado.

A todos os professores e funcionários da UFCG e UFPE por suas contribuições à minha formação acadêmica.

Aos professores que aceitaram participar da banca para avaliação desse trabalho e pelas suas sugestões para melhorar o mesmo.

À FACEPE pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que torceram e torcem pelo meu sucesso pessoal e profissional.

RESUMO

Modelos de regressão Birnbaum-Saunders têm sido utilizados com frequência nos últimos anos. Uma das principais premissas nos modelos de regressão tradicionais é a suposição de independência entre as observações, o mesmo ocorre em estudos de análise de sobrevivência, em que a independência entre os tempos de sobrevivência de indivíduos distintos é considerada. No entanto, em alguns casos, essa suposição não é válida, como no caso de eventos observados no mesmo indivíduo. A este respeito, modelos de regressão multivariados com estrutura de dependência são uma possível alternativa para modelagem de dados deste tipo. Dessa forma, neste trabalho, introduzimos inicialmente o modelo de tempo de vida acelerado Birnbaum-Saunders bivariado com estrutura de dependência modelada através da abordagem de fragilidade. Posteriormente, propomos uma nova distribuição, a qual denominamos de distribuição Birnbaum-Saunders Frágil multivariada, e derivamos algumas propriedades da mesma. Propomos uma extensão do modelo bivariado acima mencionado, isto é, desenvolvemos um novo modelo de tempo de vida acelerado Birnbaum-Saunders multivariado. Alguns estudos de simulação foram desenvolvidos para avaliar o desempenho dos estimadores propostos. Finalmente, desenvolvemos a distribuição t de Student Birnbaum-Saunders Frágil e o o modelo de tempo de vida acelerado t de Student Birnbaum-Saunders multivariado. Utilizamos o método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros dos modelos propostos, bem como, derivamos alguns resíduos para avaliar o ajuste dos mesmos. Propomos alguns resíduos e derivamos medidas de diagnósticos sob o enfoque de influência local para os modelos propostos. Para ilustrar a metodologia desenvolvida, no que se refere ao modelo bivariado, utilizamos o conjunto de dados reais que reporta os tempos de recorrência de infecções de 38 pacientes renais usando uma máquina de diálise portátil. No caso do modelo Birnbaum-Saunders multivariado, consideramos dois conjuntos de dados reais: o primeiro conjunto de dados retrata o acompanhamento realizado por pesquisadores da escola de odontologia da universidade da Carolina do Norte sobre o crescimento das crianças (16 meninos, 11 meninas) com idade entre 8 e 14 anos; o segundo conjunto de dados reporta a duração do tempo de exercício necessário até provocar a angina em 21 pacientes com cardiopatia. No caso do modelo t de Student Birnbaum-Saunders multivariado, consideramos o conjunto de dados que reporta os tempos de reconstituição da barreira sangue- leite após infecção nos quartos de úberes superiores de vacas leiteiras.

Palavras-chaves: distribuição Birnbaum-Saunders; fragilidade; resíduos; influência local.

ABSTRACT

Birnbaum-Saunders regression models have been used frequently in recent years. One of the main assumptions in traditional regression models is the assumption of independence between observations, the same occurs in studies of survival analysis, where the independence between the survival times of different individuals is considered. However, in some cases, this assumption is not valid, as in the case of events observed in the same individual. In this regard, multivariate regression models with dependence structure are a possible alternative for data modeling of this type. Thus, in this work, we initially introduce the bivariate Birnbaum-Saunders accelerated lifetime model with a dependence structure modeled through the frailty approach. Subsequently, we propose a new distribution, which we call the multivariate Birnbaum-Saunders Fragile distribution, and derive some properties. We propose an extension of the afore mentioned bivariate model, that is, we develop a new multivariate Birnbaum-Saunders accelerated lifetime model. Some simulation studies were developed to evaluate the performance of the proposed estimators. Finally, we developed the Fragile Student- t Birnbaum-Saunders distribution and the multivariate Student- t Birnbaum-Saunders accelerated lifetime model. We use the maximum likelihood method to estimate the parameters of the proposed models, as well as derive some residuals to evaluate their fit. We propose some residuals and derive diagnostic measures under the focus of local influence for the proposed models. To illustrate the methodology developed, with regard to the bivariate model, we used the real dataset that reports the recurrence times of infections of 38 renal patients using a portable dialysis machine. In the case of the multivariate Birnbaum-Saunders model, we considered two real data sets: the first data set depicts the follow-up carried out by researchers at the University of North Carolina Dental School on the growth of children (16 boys, 11 girls) with age between 8 and 14 years; the second set of data reports the duration of exercise time required to provoke angina in 21 patients with heart disease. In the case of the multivariate Student- t Birnbaum-Saunders model, we considered the dataset that reports the reconstitution times of the blood-milk barrier after infection in the upper udder quarters of dairy cows.

Keywords: Birnbaum-Saunders distribution; frailty; residuals; local influence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparando a fdp da distribuição BS e da distribuição BSF para diferentes valores de κ : (a) fragilidade gama, (b) fragilidade estável positiva e (c) fragilidade série logarítmica	29
Figura 2 – Q-Q <i>plots</i> dos K -resíduos ordenados para má-especificação na componente sistemática do modelo: (a) cenário 1, (b) cenário 2, (c) cenário 3 e (d) cenário 4	44
Figura 3 – Curvas de sobrevivência marginal estimadas por Kaplan-Meyer e pela distribuição BS: a) Tempo 1 e b) Tempo 2	52
Figura 4 – Gráficos de probabilidade normal com envelopes - considerando independência dentro dos pares (a) e considerando o modelo de tempo de vida BS bivariado (b)	54
Figura 5 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação ponderação de casos	55
Figura 6 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob perturbação conjunta na variável resposta	56
Figura 7 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob perturbação na variável resposta (primeira coordenada)	57
Figura 8 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob perturbação na variável resposta (segunda coordenada)	58
Figura 9 – Viéses - variando o valor de α e o valor do tau de Kendall (sem censura)	68
Figura 10 – Viéses - variando o percentual de censura e o valor do tau de Kendall (censura em uma das três variáveis e $\alpha = 0.5$)	69
Figura 11 – Viéses - variando a quantidade de variáveis censuradas e o valor do tau de Kendall (20% de censura e $\alpha = 0.5$)	70
Figura 12 – EQM - variando o valor de α e o valor do tau de Kendall (sem censura)	71
Figura 13 – EQM - variando o percentual de censura e o valor do tau de Kendall (censura em uma das três variáveis e $\alpha = 0.5$)	72
Figura 14 – EQM - variando a quantidade de variáveis censuradas e o valor do tau de Kendall (20% de censura e $\alpha = 0.5$)	73

Figura 15 – Estimativas de sobrevivência marginal por Kaplan-Meier e pela distribuição BS	85
Figura 16 – Gráficos normais de probabilidade para os resíduos quantílicos multivariados e K -resíduos multivariados	87
Figura 17 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos	88
Figura 18 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta	89
Figura 19 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (primeira coordenada) .	90
Figura 20 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (segunda coordenada) .	91
Figura 21 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (terceira coordenada) .	92
Figura 22 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (quarta coordenada) . .	93
Figura 23 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável explicativa	94
Figura 24 – Estimativas de sobrevivência marginal por Kaplan-Meier e pela distribuição BS	96
Figura 25 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos	98
Figura 26 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta	99
Figura 27 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (primeira coordenada) .	100
Figura 28 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (segunda coordenada) .	101
Figura 29 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (terceira coordenada) .	102
Figura 30 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável explicativa	103
Figura 31 – Gráfico normal de probabilidades com envelope	107

Figura 32 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos	108
Figura 33 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta	109
Figura 34 – Gráfico normal de probabilidades com envelope - BS_t	116
Figura 35 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos no modelo BS_t multivariado	116
Figura 36 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta no modelo BS_t multivariado .	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Distribuições de fragilidade e transformadas de Laplace	27
Tabela 2 – Tau de Kendall	32
Tabela 3 – Medidas S_T e S_W conforme os cenários considerados	43
Tabela 4 – Média das medidas S_T e S_W - <i>Outlier</i>	45
Tabela 5 – Média das medidas S_T e S_W mediante a amostra de tamanho $n = 50$. . .	46
Tabela 6 – Média das medidas S_T e S_W mediante a amostra de tamanho $n = 100$. .	46
Tabela 7 – Média das medidas S_T e S_W mediante a amostra de tamanho $n = 200$. .	47
Tabela 8 – Valores médios das medidas S e S_{adap} considerando amostras com 10% de censura à direita	48
Tabela 9 – Valores médios das medidas S e S_{adap} considerando amostras com 20% de censura à direita	49
Tabela 10 – Valores médios das medidas S e S_{adap} considerando amostras com 40% de censura à direita	50
Tabela 11 – Estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros (erros-padrão em parênteses e p -valores em $[\cdot]$) e as medidas S_{adap} , AIC e BIC.	53
Tabela 12 – Medidas resumo da distribuição empírica dos resíduos quantílicos multiva- riados	77
Tabela 13 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - sem censura	78
Tabela 14 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 10% de censura em uma das três variáveis	78
Tabela 15 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 20% de censura em uma das três variáveis	79
Tabela 16 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 10% de censura em duas das três variáveis	79
Tabela 17 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 20% de censura em duas das três variáveis	80
Tabela 18 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 10% de censura nas três variáveis	80

Tabela 19 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 20% de censura nas três variáveis	81
Tabela 20 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo . . .	86
Tabela 21 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo . . .	97
Tabela 22 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo . . .	106
Tabela 23 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo BS_t multivarido	115

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	15
1.1	RESUMO	15
1.2	INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
1.3	CONCEITOS BÁSICOS	16
1.4	OBJETIVOS DA TESE	24
1.5	PRODUTOS DA TESE	25
2	MODELO DE TEMPO DE VIDA ACELERADO BS BIVARIADO .	26
2.1	RESUMO	26
2.2	A DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS FRÁGIL UNIVARIADA	26
2.3	A DISTRIBUIÇÃO BSF BIVARIADA	31
2.4	MODELAGEM	33
2.4.1	Testando a Fragilidade	36
2.5	ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO	37
2.6	ANÁLISE RESIDUAL	40
2.7	ESTUDO NUMÉRICO	41
2.8	APLICAÇÃO	51
2.9	CONCLUSÃO	59
3	MODELO DE TEMPO DE VIDA ACELERADO BS MULTIVARIADO	60
3.1	RESUMO	60
3.2	A DISTRIBUIÇÃO BSF MULTIVARIADA	60
3.3	MODELAGEM	63
3.4	ANÁLISE RESIDUAL	74
3.5	ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO	82
3.6	APLICAÇÃO 1	84
3.6.1	Análise Descritiva dos Dados	85
3.6.2	Modelagem	85
3.7	APLICAÇÃO 2	95
3.7.1	Análise Descritiva dos Dados	95
3.7.2	Modelagem	96
3.8	CONCLUSÃO	104

4	MODELO DE TEMPO DE VIDA ACELERADO BS_t MULTIVARI-	
	ADO	105
4.1	RESUMO	105
4.2	MOTIVAÇÃO	105
4.3	A DISTRIBUIÇÃO BSF_t MULTIVARIADA	110
4.4	MODELAGEM	111
4.5	ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO	113
4.6	APLICAÇÃO	114
4.7	CONCLUSÃO	118
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	119
	REFERÊNCIAS	120
	APÊNDICE A – EXPRESSÕES USADAS NO VETOR ESCORE E	
	NA MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA	
	DO MODELO BIVARIADO	124
	APÊNDICE B – EXPRESSÕES USADAS NA MATRIZ DE IN-	
	FORMAÇÃO OBSERVADA E NOS CÁLCULOS	
	DAS CURVATURAS NORMAIS PARA O MO-	
	DELO BS MULTIVARIADO	131
	APÊNDICE C – EXPRESSÕES USADAS NA MATRIZ DE IN-	
	FORMAÇÃO OBSERVADA E NOS CÁLCULOS	
	DAS CURVATURAS NORMAIS PARA O MO-	
	DELO BS_t MULTIVARIADO	140

1 PRELIMINARES

1.1 RESUMO

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados que serão de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho, a saber: uma breve revisão acerca das distribuições Birnbaum-Saunders, senh-normal, Birnbaum-Saunders generalizada e os conceitos de modelos de fragilidade e cópulas, com ênfase nas cópulas arquimedianas. Além disso, apresentamos os objetivos da tese e os produtos dela obtido até o presente momento.

1.2 INTRODUÇÃO E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A distribuição Birnbaum-Saunders (BS) é uma distribuição de tempo de vida que foi desenvolvida por Birnbaum e Saunders (1969) para analisar dados de fadiga de materiais. Desde sua origem até os dias atuais, essa distribuição tem sido estudada sob diversos aspectos, além de ganhar destaque por meio de aplicações em outras áreas do conhecimento (ver, por exemplo, Leiva et al. (2018)). Segundo Tsuyuguchi et al. (2020), a maioria dos trabalhos relacionados aos modelos BS foram desenvolvidos assumindo que as unidades experimentais são independentes. No entanto, alguns trabalhos em dados BS dependentes vêm sendo desenvolvidos nos últimos anos, por exemplo, Kundu et al. (2010) propuseram a distribuição BS bivariada e alguns aspectos inferenciais, Kundu (2015) desenvolveu a distribuição log-BS bivariada e diferentes propriedades foram obtidas usando uma estrutura de cópula, Vilca et al. (2014) definiram a distribuição senh-elíptica bivariada e discutiram algumas de suas propriedades, Vilca et al. (2016) propuseram um modelo de regressão BS bivariado através do uso da distribuição senh-normal bivariada e Saulo et al. (2020) introduziram uma distribuição BS bivariada baseada na distribuição BS reparametrizada proposta por Santos-Neto et al. (2012). Além disso, no contexto multivariado, Marchant et al. (2015) desenvolveram distribuições BS generalizadas multivariadas e propuseram medidas de diagnóstico para o modelo BS generalizado multivariado, Marchant et al. (2016) realizaram uma análise diagnóstica para os modelos de regressão BS generalizados multivariados, em que foram desenvolvidas algumas medidas

de diagnóstico. Finalmente, uma abordagem alternativa para analisar dados BS multivariados com base em equações de estimação foi desenvolvida por Tsuyuguchi et al. (2020).

Modelos de fragilidade têm recebido atenção especial nas últimas décadas para modelagem de dependência de dados de sobrevivência. Por exemplo, Oakes (1989) propôs modelos de sobrevivência bivariados induzidos por fragilidades, Hougaard (1995) apresentou uma abordagem geral para modelos de fragilidade para dados de sobrevivência, Sahu et al. (1997) consideraram um modelo de regressão Weibull com fragilidades gama para dados de sobrevivência multivariados, Liu et al. (2004) propuseram modelos de riscos proporcionais de fragilidade para os processos de eventos recorrentes em que a dependência é modelada pelo condicionamento da fragilidade compartilhada incluída em ambas as funções de risco, Leão et al. (2017) propuseram uma metodologia baseada em um modelo de regressão com fragilidade BS que pode ser aplicado a dados censurados ou não-censurados, Leiva et al. (2018) propuseram um modelo de sobrevivência com fragilidade baseada na distribuição BS e Giussani e Bonetti (2019) investigaram uma nova família de modelos de fragilidade paramétricos bivariados. Além disso, Choi e Matthews (2015) introduziram um modelo de tempo de vida acelerado bivariado, em que as distribuições de fragilidade gama, estável positiva, série de potências, série logarítmica e lognormal são consideradas. No entanto, para o modelo de regressão BS não há estudo usando a abordagem de fragilidade fornecida em Choi e Matthews (2015). Neste sentido, propomos neste trabalho novas distribuições multivariadas induzidas por uma variável de fragilidade, a partir disso, derivamos alguns modelos de regressão, em que foram propostos alguns resíduos para avaliar o ajuste dos mesmos e desenvolvemos algumas medidas de diagnóstico baseadas em influência local.

1.3 CONCEITOS BÁSICOS

Distribuições Birnbaum-Saunders e Senh-normal

Dizemos que uma variável aleatória T , contínua, tem distribuição BS com parâmetros α e β , e denotamos por $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$, se a sua função de distribuição acumulada (fda) é dada por:

$$F(t) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right], \quad t > 0.$$

Neste caso, $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma, $\beta > 0$ é o parâmetro de escala e $\Phi(\cdot)$ denota a fda da distribuição normal padrão.

A partir da fda podemos obter a função densidade de probabilidade (fdp) e a função de sobrevivência. Assim, a fdp e a função de sobrevivência da variável aleatória T com distribuição BS são dadas, respectivamente, por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right\} \frac{t^{-\frac{3}{2}}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}$$

e

$$S(t) = 1 - \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right].$$

Além disso, é importante destacar que a variável aleatória $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$ pode ser obtida a partir da distribuição normal, do seguinte modo:

$$T = \beta \left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right)^2, \quad (1.1)$$

em que $Z \sim N(0, 1)$.

Agora, dada uma variável aleatória Y , contínua, dizemos que Y tem distribuição senh-normal (SN), e denotamos $Y \sim \text{SN}(\alpha, \mu, \sigma)$, se sua fda é dada por

$$F(y) = \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

em que $\alpha, \sigma > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$ representam, respectivamente, o parâmetro de forma, de escala e de posição. Com isso, podemos obter também a fdp e a função de sobrevivência da variável aleatória Y , as quais são dadas, respectivamente, por:

$$f(y) = \frac{1}{\alpha\sigma} \phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] 2 \cosh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)$$

e

$$S(y) = 1 - F_Y(y) = 1 - \Phi \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right],$$

em que $\phi(\cdot)$ é a fdp da distribuição normal padrão. Rieck e Nedelman (1991) apresentam uma propriedade importante que estabelece uma relação entre as distribuições BS e SN, a mesma afirma que se $T \sim \text{BS}(\alpha, \beta)$ então $Y = \log(T) \sim \text{SN}(\alpha, \mu, 2)$. A partir dessa relação, a distribuição de $Y = \log(T)$ é também chamada de distribuição log-Birnbaum-Saunders (log-BS).

Distribuição Birnbaum-Saunders generalizada

Díaz-García (2005) propuseram uma generalização da distribuição BS com base em distribuições de contornos elípticos, a mesma foi denominada distribuição Birnbaum-Saunders Generalizada (BSG).

Dizemos que uma variável aleatória X segue uma distribuição elíptica se a sua função característica for dada por

$$\psi(t) = \exp(it\mu)\phi(t^2\sigma^2), \quad (1.3)$$

em que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, ou se a fdp de X é dada por

$$f(x) = cg \left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] = cg(u), \quad x \in \mathbb{R}, u > 0, \quad (1.4)$$

em que $g(u)$ é o núcleo da fdp de X e c é a constante normalizadora que faz com que $f(x)$ seja uma legítima função densidade de probabilidade. Conforme as Equações (1.3) e (1.4) denotamos $X \sim EC(\mu, \sigma^2; \phi)$ ou $X \sim EC(\mu, \sigma^2; g)$, respectivamente. Além disso, em geral, μ é o parâmetro de posição e coincide com a média ($E(X)$) se o primeiro momento da distribuição existe e σ^2 é o parâmetro de escala.

O modelo proposto por Díaz-García (2005) é uma generalização da distribuição BS clássica. Tais autores relaxaram a suposição de que $Z \sim N(0, 1)$ em (1.1) e consideraram

$$T = \beta \left(\frac{\alpha U}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha U}{2} \right)^2 + 1} \right)^2,$$

com $U \sim EC(0, 1; g)$. Neste caso, a variável aleatória T segue uma distribuição BSG e denotamos $T \sim BSG(\alpha, \beta; g)$, em que α e β são os parâmetros de forma e escala, respectivamente e $g(\cdot)$ é dada conforme na Expressão (1.4). Deste modo, os autores obtiveram uma nova família de distribuições mais flexível que a distribuição BS acima estudada, pois a distribuição BSG pode possuir caudas mais ou menos pesadas do que a distribuição BS clássica. A fdp de T é dada por

$$f(t) = \frac{c}{2\alpha\sqrt{\beta}} t^{-\frac{3}{2}}(t + \beta) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right), \quad t > 0,$$

com c e $g(\cdot)$ dadas conforme na Expressão (1.4).

De acordo com Silva (2007), a fda da distribuição BSG pode ser obtida através da fda da distribuição que a gera, da seguinte forma:

$$F(t) = F(a_t(\alpha, \beta)), \quad (1.5)$$

em que $F(\cdot)$ é obtida a partir de (1.4) e $a_t(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{t/\beta} - \sqrt{\beta/t} \right)$.

Díaz-García (2005) consideraram diferentes núcleos para a fdp de T , ou seja, diferentes expressões para $g(\cdot)$, a partir das distribuições: Normal (que recai na BS clássica), Cauchy, Logística, Pearson XVII e t de Student. Neste trabalho, utilizaremos o núcleo obtido a partir da distribuição t de Student. Assim, neste caso, a fdp fica dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)t^{-\frac{3}{2}}(t+\beta)}{2\alpha\sqrt{\nu\pi}\beta\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{1}{\nu\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \alpha, \beta, \nu > 0.$$

Neste caso, denotamos $T \sim BS_t(\alpha, \beta, \nu)$. Além disso, a fda de T pode ser obtida a partir de (1.5). A fda de T fica dada por

$$F(t) = \Phi_t(a_t(\alpha, \beta)), \quad t > 0,$$

em que $\Phi_t(\cdot)$ é a fda da distribuição t de Student. Daí, segue que a função de sobrevivência de T é dada por

$$S(t) = 1 - \Phi_t(a_t(\alpha, \beta)).$$

Díaz-García e Dominguez-Molina (2006) utilizaram a mesma ideia usada na proposta da distribuição SN e desenvolveram a distribuição seno hiperbólica esférica, a qual foi denotada por $SS(\alpha, \mu, \sigma; g)$, com densidade dada por

$$f(y) = \frac{c}{\sigma} \left\{ \frac{2}{\alpha} \cosh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} g \left[\left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right)^2 \right],$$

com $y \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\mu = \log(\beta) \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e c e $g(\cdot)$ dadas conforme (1.4).

Se $T \sim BS_t(\alpha, \beta, \nu)$ então $Y = \log(T) \sim SS(\alpha, \mu, 2, \nu)$, denotando ainda por $Y = \log(T) \sim \log\text{-}BS_t(\alpha, \mu, \nu)$, com função de probabilidade dada por

$$f(y) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \cosh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right]^2 \right\}^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

A fda é dada por

$$F(y) = \Phi_t \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right),$$

consequentemente,

$$S(y) = 1 - \Phi_t \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right).$$

Modelos de Fragilidade e Cópuas

Inicialmente apresentaremos o conceito de transformada de Laplace (transformada de Laplace-Stieltjes) para variáveis aleatórias não-negativas, o mesmo será essencial para o nosso estudo acerca dos modelos de fragilidade.

Definição 1. *Seja Z uma variável aleatória não-negativa. A função*

$$\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}_Z(s) = E(e^{-sz}) = \int_0^{\infty} e^{-sz} dF_Z(z), \quad s > 0$$

é denominada de transformada de Laplace da variável aleatória Z .

A seguir, apresentaremos uma propriedade acerca da transformada de Laplace, que está descrita em Joe (2014) e que é de fundamental importância para a construção metodológica dos conceitos à serem desenvolvidos.

Propriedade 1. *Seja $\mathcal{L}(\cdot)$ a transformada de Laplace de uma variável aleatória não-negativa Z . Então $\mathcal{L}(0) = 1$, $\mathcal{L}(\cdot)$ é limitada por 1 e é estritamente decrescente.*

Observação 1. *Da Propriedade 1, segue que $\mathcal{L}(\cdot)$ é uma função completamente monótona, ou seja, possui derivadas contínuas de todas as ordens. Para ver mais detalhes acerca da transformada de Laplace, consultar Joe (2014).*

No contexto de sobrevivência univariada, Colosimo e Giolo (2006) afirmam que a heterogeneidade dos indivíduos pode afetar os tempos de sobrevivência observados e, para incluí-la, consideramos um efeito aleatório, conhecido como fragilidade em análise de sobrevivência. A seguir apresentaremos a definição de modelo de fragilidade em um contexto univariado, conforme Oakes (1989) e, em seguida, apresentaremos a extensão do mesmo para o caso multivariado proposta por Genest et al. (2011).

Definição 2. *Seja T uma variável aleatória absolutamente contínua e positiva e Z uma variável aleatória positiva e não-observável. Definimos um modelo de fragilidade como sendo*

$$P(T > t | Z = z) = \{S_1(t)\}^z, \quad (1.6)$$

em que $S_1 = S_1(t)$ é uma função de sobrevivência contínua conhecida como função de sobrevivência baseline. A variável aleatória Z é chamada de fragilidade.

Daí, pode-se mostrar que a função de sobrevivência não-condicional de T é dada por

$$S(t) = P(T > t) = \mathcal{L}\{-\log(S_1(t))\}, \quad (1.7)$$

em que $\mathcal{L}(\cdot)$ é a transformada de Laplace de Z , que depende de um parâmetro, o qual é denominado parâmetro de fragilidade.

O modelo de fragilidade dado na Definição 2 foi estendido por Genest et al. (2011) aos dados de sobrevivência multivariados. Neste sentido, dada a variável aleatória positiva e não-observável Z e as variáveis aleatórias absolutamente contínuas e positivas $T_1, \dots, T_n$, tais que satisfazem a Equação (1.6) e considerando que $T_1, \dots, T_n$ são condicionalmente independentes, dado Z , tem-se

$$\begin{aligned} S(t_1, \dots, t_n | Z = z) &= P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n | Z = z) \\ &= \prod_{i=1}^n P(T_i > t_i | Z = z) \\ &= \prod_{i=1}^n \{S_i(t_i)\}^z, \end{aligned} \quad (1.8)$$

em que $S_i(t_i)$ são funções de sobrevivência *baselines* contínuas. A partir daí pode-se mostrar que a função de sobrevivência não-condicional de $T_1, \dots, T_n$ pode ser expressa através da transformada de Laplace da variável aleatória Z , através da seguinte expressão:

$$S(t_1, \dots, t_n) = \mathcal{L} \left\{ - \sum_{i=1}^n \log(S_i(t_i)) \right\}. \quad (1.9)$$

De acordo com Genest et al. (2011), neste modelo a estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias $T_1, \dots, T_n$ é inteiramente determinada pela distribuição da fragilidade considerada.

Agora, apresentaremos o conceito de cópulas multivariadas, particularmente, apresentamos a definição de cópulas arquimedianas, as quais têm uma relação estreita com o modelo de fragilidade que tratamos anteriormente.

Definição 3. *Uma cópula multivariada é uma função $\mathcal{C}: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz*

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n),$$

em que $U_i \sim U[0, 1]$, $i = 1, \dots, n$.

Cópulas Arquimedianas

Na prática as cópulas arquimedianas são bastante utilizadas. De acordo com Nelsen (2007), o uso frequente das mesmas se dá pela facilidade em construí-las, bem como pelas boas propriedades que esta classe de cópulas possui. Vejamos a seguir a definição deste tipo de cópula.

Definição 4. *Sejam $\mathcal{C} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ e $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua, estritamente decrescente e convexa, com $\varphi(1) = 0$ e $\varphi(0) \rightarrow \infty$. Uma cópula arquimediana multivariada (estrita) de gerador φ é definida como sendo*

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \right), \quad (1.10)$$

em que φ^{-1} é a inversa de φ .

Observação 2. *É possível construirmos cópulas arquimedianas através da Expressão (1.10) da Definição 4. Para fazermos isso, basta-nos encontrar um gerador φ em que as condições impostas na Definição 4 sejam satisfeitas.*

Por exemplo, vimos na Expressão (1.9) que podemos expressar a função de sobrevivência não-condicional de $T_1, \dots, T_n$ na forma

$$S(t_1, \dots, t_n) = \mathcal{L} \left\{ - \sum_{i=1}^n \log(S_i(t_i)) \right\},$$

que equivale a

$$S(t_1, \dots, t_n) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{F}_i(t_i)) \right\}, \quad (1.11)$$

em que $\mathcal{F}_i(t_i) = \mathcal{L}\{-\log(S_i(t_i))\}$ e $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ denota a inversa da transformada de Laplace.

Perceba que a Expressão (1.11) tem a forma de uma cópula arquimediana com gerador $\varphi = \mathcal{L}^{-1}(\cdot)$. De fato, conforme Genest et al. (2011) e Nelsen (2007) a cópula de sobrevivência associada a $T_1, \dots, T_n$ é arquimediana com gerador $\varphi = \mathcal{L}^{-1}(\cdot)$.

A seguir, veremos que as cópulas podem ser utilizadas no estudo de dependência ou associação entre variáveis aleatórias.

Cópulas e Dependência

Como sabemos existem várias formas de analisar e medir a dependência entre variáveis aleatórias. O nosso objetivo na presente seção é discutir a importância das cópulas para o estudo de dependência. De acordo com Nelsen (2007), propriedades de dependência e medidas de associação estão inter-relacionadas. Por exemplo, a medida de associação tau de Kendall, que é conhecida por ser invariante por escala (ver Oakes (1989) e Nelsen (2007)) e mede um grau de dependência conhecido como concordância. Neste trabalho utilizaremos como medida de associação o tau de Kendall, devido a sua boa propriedade de invariância por escala e

também por causa da sua relação com as cópulas arquimedianas, que serão de fundamental importância para modelarmos a associação entre variáveis.

Observação 3. *Nelsen (2007) destaca que embora os termos “correlação” e “associação” sejam utilizados sem distinção, é importante ressaltar **que o termo “correlação” será utilizado quando estivermos tratando de uma dependência linear entre variáveis aleatórias e o termo “associação” para qualquer outra relação existente entre variáveis.***

Seja (U, V) um vetor de variáveis aleatórias absolutamente contínuas e (u_i, v_i) e (u_j, v_j) duas observações desse vetor. As observações (u_i, v_i) e (u_j, v_j) são ditas concordantes se $(u_i - u_j)(v_i - v_j) > 0$ e discordantes se $(u_i - u_j)(v_i - v_j) < 0$.

A partir do conceito de concordância, Nelsen (2007) definiu a versão populacional do tau de Kendall. Dados (U_1, V_1) e (U_2, V_2) dois vetores de variáveis aleatórias absolutamente contínuas, independentes e identicamente distribuídas, cada um com função de distribuição conjunta F . Então, a versão populacional do tau de Kendall é dado pela diferença

$$P \{(U_1 - U_2)(V_1 - V_2) > 0\} - P \{(U_1 - U_2)(V_1 - V_2) < 0\}.$$

Com isso, Nelsen (2007) apresenta um resultado que estabelece uma relação entre o tau de Kendall e as cópulas.

Teorema 1. *Sejam U e V variáveis aleatórias contínuas com cópula C . Então a versão populacional do tau de Kendall para U e V é dada por*

$$\tau_{U,V} = \tau_C = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1,$$

em que U_1 e U_2 são variáveis aleatórias uniformes no intervalo $(0, 1)$.

Observe que na expressão dada no Teorema 1, o tau de Kendall é expresso através de uma integral dupla. No entanto, em se tratando de cópulas arquimedianas, o tau de Kendall será expresso através de uma integral simples e da função geradora da cópula. Vejamos o seguinte resultado:

Proposição 1. *Sejam U e V variáveis aleatórias contínuas com cópula arquimediana C gerada por φ . A versão populacional para o tau de Kendall é dada por*

$$\tau = \tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Através deste resultado pode-se encontrar um estimador para o parâmetro de uma cópula arquimediana multivariada (uniparamétrica), como veremos a seguir.

De acordo com Hofert et al. (2012), um estimador para o tau de Kendall (para o caso bivariado) é dado por

$$\hat{\tau}_n = \hat{\tau}_{U_i, V_i} = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i=1}^n \text{sign}((U_{i1} - V_{i1})(U_{i2} - V_{i2})), \quad (1.12)$$

em que $U_i = (U_{i1}, U_{i2})^\top$ e $V_i = (V_{i1}, V_{i2})^\top$ são vetores aleatórios, tal que $i = 1, \dots, n$. Além disso, $\text{sign}(x) = I_{(0, \infty)}(x) - I_{(-\infty, 0)}(x)$ denota a função sinal.

Genest e Rivest (1993) propõem um estimador do método dos momentos para cópulas arquimedianas bivariadas com um único parâmetro, este estimador é baseado no tau de Kendall. O parâmetro da cópula, digamos θ , é estimado por $\hat{\theta}_n$, de forma que

$$\tau(\hat{\theta}_n) = \hat{\tau}_n,$$

em que $\tau(\cdot)$ denota o tau de Kendall mediante a família de cópula arquimediana utilizada, que pode ser obtido a partir da Proposição 1. Isto significa que

$$\hat{\theta}_n = \tau^{-1}(\hat{\tau}_n), \quad (1.13)$$

assumindo que a inversa τ^{-1} de τ existe.

Para o caso de termos uma amostra aleatória (U_i, V_i) , em que $U_i = (U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{im})^\top$ e $V_i = (V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{im})^\top$, com $i = 1, \dots, n$, Savu e Trede (2010) propõem um estimador para o tau de Kendall com base no estimador dado em (1.12), o qual é dado por:

$$\hat{\tau}_{n,m} = \binom{m}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i \leq m} \hat{\tau}_{U_i, V_i}. \quad (1.14)$$

Então o parâmetro da cópula, θ , é estimado por

$$\hat{\theta}_n = \tau^{-1}(\hat{\tau}_{n,m}). \quad (1.15)$$

De acordo com Hofert et al. (2012), embora o estimador $\hat{\tau}_{n,m}$ seja não-viesado para $\tau(\theta)$, o mesmo não ocorre com $\hat{\theta}_n$.

1.4 OBJETIVOS DA TESE

O objetivo geral deste trabalho é propor uma metodologia para analisar dados BS dependentes, em que a sua dependência é modelada via fragilidade. Para alcançar este objetivo geral, temos os seguintes objetivos específicos:

1. Propor uma nova distribuição com base na distribuição BS e induzida por uma variável de fragilidade, desenvolver um modelo de regressão bivariado e propor medidas de diagnóstico baseado em influência local para o modelo de regressão BS bivariado e aplicar a metodologia desenvolvida a um conjunto de dados reais.
2. Estender a proposta da distribuição bivariada e do modelo bivariado para o caso multivariado. Realizar alguns estudos de simulação Monte Carlo para avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança para o modelo proposto. Propor resíduos e medidas de diagnóstico, bem como realizar um estudo baseado em influência local sob diferentes esquemas de perturbação, além de aplicar esta metodologia a um conjunto de dados reais.
3. Propor um modelo de regressão Birnbaum-Saunders Generalizado (BSG) multivariado, com base na generalização da distribuição BS proposta por Díaz-García (2005), e desenvolver métodos de diagnóstico baseados em análise de resíduos e influência local.

1.5 PRODUTOS DA TESE

Esta tese nos permitiu desenvolver os seguintes artigos:

- Oliveira, M. I., Cysneiros, F. J. A., Barros, M and Campos, J. (2020). Bivariate Birnbaum-Saunders accelerated lifetime model: estimation and diagnostic analysis. *Journal of Applied Statistics*. <<https://doi.org/10.1080/02664763.2020.1859466>>.
- Oliveira, M. I., Cysneiros, F. J. A. and Barros, M. Multivariate Birnbaum-Saunders regression model: estimation and residual analysis (sob revisão).
- Oliveira, M. I., Cysneiros, F. J. A. and Barros, M. Multivariate Birnbaum-Saunders regression model: diagnostic analysis (em produção).
- Oliveira, M. I., Cysneiros, F. J. A. and Barros, M. Residual analysis and diagnostic analysis in a robust multivariate Birnbaum-Saunders- t accelerated lifetime model (em produção).

2 MODELO DE TEMPO DE VIDA ACELERADO BS BIVARIADO

2.1 RESUMO

Neste capítulo, introduzimos novas distribuições a partir da distribuição BS e considerando uma variável de fragilidade, propomos um modelo BS bivariado e através do método da máxima verossimilhança estimamos os parâmetros do modelo. Derivamos resíduos e medidas de diagnósticos sob o enfoque de influência local. A metodologia desenvolvida é aplicada a um conjunto de dados reais.

2.2 A DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS FRÁGIL UNIVARIADA

Com base na Definição 2 acerca de modelos de fragilidade, consideramos uma variável aleatória T e condicionamos a uma variável de fragilidade Z , em que a função de sobrevivência *baseline* é a função de sobrevivência da distribuição BS univariada de parâmetros α e β . Assim, temos uma nova distribuição univariada, a qual denominamos distribuição Birnbaum-Saunders Frágil (BSF). Vejamos a definição dada a seguir.

Definição 5. *Seja T uma variável aleatória absolutamente contínua e positiva e Z uma variável aleatória positiva e não-observável (variável de fragilidade). Dizemos que T segue uma distribuição BSF de parâmetros α , β e κ , e denotamos $T \sim BSF(\alpha, \beta, \kappa)$, se a sua fda é dada por*

$$F(t) = 1 - \mathcal{L} \left\{ -\log \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right) \right] \right\}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2.1)$$

em que $\mathcal{L}(\cdot)$ é a transformada de Laplace da distribuição de fragilidade considerada, que depende do parâmetro de fragilidade κ .

Consequentemente, a fdp de T é dada por

$$f(t) = -\mathcal{L}' \left\{ -\log \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right) \right] \right\} \frac{\phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right)}{1 - \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right)} \\ \times \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} \left[\left(\frac{\beta}{t} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

em que $\mathcal{L}'(s)$ é a derivada de primeira ordem de $\mathcal{L}(s)$ com relação a s (pela Observação 1 vimos que $\mathcal{L}(\cdot)$ possui derivadas contínuas de todas as ordens).

Utilizamos no presente capítulo as distribuições de fragilidade: gama, estável positivo e série logarítmica, tendo em vista as boas propriedades analíticas das mesmas, dentre as quais podemos citar: a simplicidade das expressões das transformadas de Laplace associadas a cada uma delas e a facilidade para a obtenção da função inversa das mesmas. As expressões das transformadas de Laplace para as distribuições de fragilidade consideradas são dadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Distribuições de fragilidade e transformadas de Laplace

Distribuição	Transformada de Laplace, $\mathcal{L}(s)$
Gama	$(1 + (s/\kappa))^{-\kappa}, \kappa > 0$
Estável positiva	$\exp(-s^\kappa), 0 < \kappa \leq 1$
Série logarítmica	$-(1/\kappa) \log\{1 - (1 - e^{-\kappa})e^{-s}\}, \kappa > 0$

Fonte: Autoria própria.

Vejamos a seguir um resultado que relaciona essa distribuição a distribuição BS univariada.

Teorema 2. *Seja $T \sim BSF(\alpha, \beta, \kappa)$. Então, a distribuição dessa variável aleatória se aproxima de uma distribuição $BS(\alpha, \beta)$ quando:*

- (i) $\kappa \rightarrow \infty$, para a distribuição de fragilidade gama;
- (ii) $\kappa \rightarrow 1^-$, para a distribuição de fragilidade estável positiva;
- (iii) $\kappa \rightarrow 0^+$, para a distribuição de fragilidade série logarítmica.

Prova:

Sendo $T \sim BSF(\alpha, \beta, \kappa)$, então a sua fda é dada pela Equação (2.1).

- (i) *Considerando a distribuição de fragilidade gama, a expressão da transformada de Laplace correspondente é*

$$\mathcal{L}(s) = \left(1 + \frac{s}{\kappa}\right)^{-\kappa}, \quad s > 0.$$

Assim, note que

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{L}(s) &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{s}{\kappa}\right)^{-\kappa} \right] \\ &= \exp(-s). \end{aligned}$$

Com isso, aplicando o limite com $\kappa \rightarrow \infty$ na Expressão (2.1) segue que

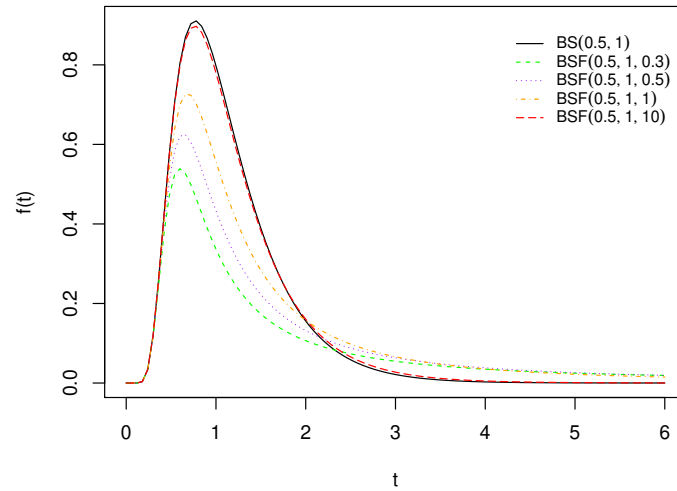
$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} F(t) &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left[1 - \mathcal{L} \left\{ -\log \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right) \right] \right\} \right] \\ &= 1 - \exp \left\{ \log \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right) \right] \right\} \\ &= \Phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right), \end{aligned}$$

que é a fda da distribuição BS de parâmetros α e β . Ou seja, quando $\kappa \rightarrow \infty$ a distribuição da variável aleatória T se aproxima da distribuição BS com parâmetros α e β .

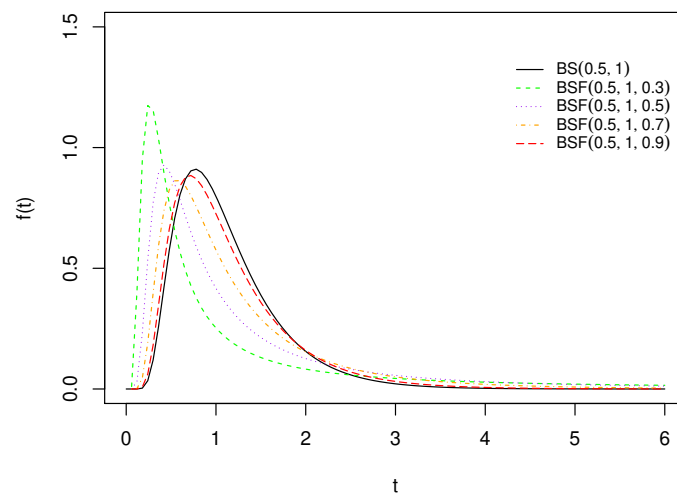
- (ii) Basta substituir a expressão da transformada de Laplace da fragilidade com distribuição estável positiva na Expressão (2.1) e calcular o limite com $\kappa \rightarrow 1^-$.
- (iii) Basta substituir a expressão da transformada de Laplace da fragilidade com distribuição série logarítmica correspondente na Expressão (2.1) e calcular o limite com $\kappa \rightarrow 0^+$.

Na Figura 1 ilustramos o resultado dado no Teorema 2. Para os parâmetros da distribuição BS atribuímos os valores $\beta = 1$ e $\alpha = 0,5$ e para os parâmetros da distribuição BSF consideramos $\beta = 1$; $\alpha = 0,5$ e variamos o valor do parâmetro de fragilidade κ . Na Figura 1-(a) temos a distribuição BSF considerando a fragilidade gama, vemos que à medida que o parâmetro de fragilidade cresce, a curva da fdp da distribuição BSF se aproxima da curva da fdp da distribuição BS, o mesmo ocorre na Figura 1-(b), com a distribuição de fragilidade estável positiva, quando κ se aproxima de 1. Na Figura 1-(c), consideramos a distribuição de fragilidade série logarítmica e a curva da fdp da distribuição BSF se aproxima da curva da fdp da distribuição BS quando κ se aproxima de 0.

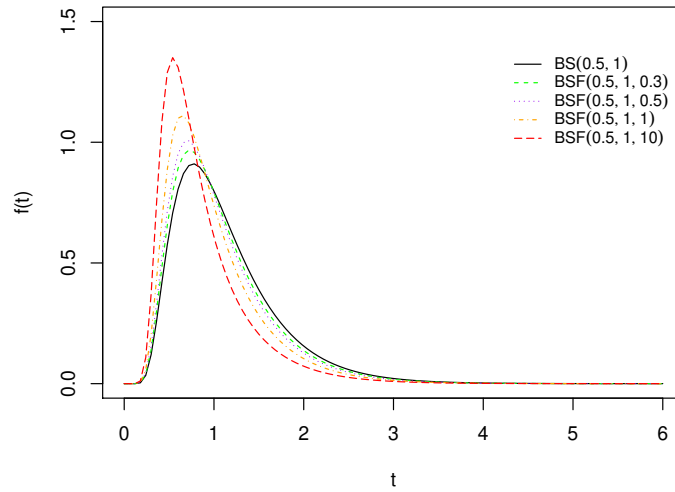
Figura 1 – Comparando a fdp da distribuição BS e da distribuição BSF para diferentes valores de κ : (a) fragilidade gama, (b) fragilidade estável positiva e (c) fragilidade série logarítmica



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autoria própria.

Teorema 3. Seja $T \sim BSF(\alpha, \beta, \kappa)$. Então:

(i) $cT \sim BSF(\alpha, c\beta, \kappa)$, para $c > 0$.

(ii) $T^{-1} \sim BSF(\alpha, \beta^{-1}, \kappa)$.

Prova: A prova deste resultado segue imediatamente da Equação (2.1) usando transformações adequadas.

Podemos definir a distribuição seno-hiperbólico normal frágil (SNF) a partir da distribuição BSF.

Definição 6. Seja $T \sim BSF(\alpha, \beta, \kappa)$. Dizemos que $Y = \log(T)$ segue uma distribuição SNF de parâmetros α , $\mu = \log(\beta)$, 2 e κ , e denotamos $Y \sim SNF(\alpha, \mu, 2, \kappa)$, se a sua fda é dada por

$$F(y) = 1 - \mathcal{L} \left\{ -\log \left[1 - \Phi \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right) \right] \right\}, \quad (2.2)$$

em que $y \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}(\cdot)$ é a transformada de Laplace da distribuição de fragilidade considerada.

Assim, a fdp de Y é dada por

$$f(y) = -\mathcal{L}' \left\{ -\log \left[1 - \Phi \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right) \right] \right\} \frac{\phi \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right)}{1 - \Phi \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right)} \\ \times \frac{1}{\alpha} \cosh \left(\frac{y - \mu}{2} \right), \quad y \in \mathbb{R},$$

em que $\mathcal{L}'(s)$ é a derivada de primeira ordem de $\mathcal{L}(s)$ com relação a s .

2.3 A DISTRIBUIÇÃO BSF BIVARIADA

Definição 7. Um vetor aleatório $\mathbf{T} = (T_1, T_2)^\top$ é dito ter distribuição BSF bivariada com parâmetros α , β e κ , e denotamos $\mathbf{T} \sim BSF_2(\alpha, \beta, \kappa)$, se a sua fda é dada por

$$F(t_1, t_2) = S(t_1, t_2) + F(t_1) + F(t_2) - 1,$$

para $\mathbf{t} = (t_1, t_2)^\top \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, em que $F(t_j)$ é dada a partir da Expressão (2.1), para $j = 1, 2$, e $S(t_1, t_2)$ é dada por

$$S(t_1, t_2) = \mathcal{L} \left\{ -\sum_{j=1}^2 \log(S_j(t_j)) \right\}, \quad (2.3)$$

em que $S_j(t_j)$ é a função de sobrevivência da distribuição BS univariada de parâmetros α e β . Consequentemente, a fdp de $\mathbf{T}$ é dada por

$$f(t_1, t_2) = \mathcal{L}'' \left[-\sum_{j=1}^2 \log(S_j(t_j)) \right] \lambda_1(t_1) \lambda_2(t_2), \quad (2.4)$$

em que $\mathcal{L}''(s)$ indica a derivada de segunda ordem de $\mathcal{L}(s)$ com relação a s e $\lambda_j(t_j)$ denota a função de risco de uma variável aleatória com distribuição BS univariada de parâmetros α e β .

O grau de associação entre as variáveis é medido pelo tau de Kendall. Na Tabela 2 apresentamos as expressões para o tau de Kendall para quando estivermos trabalhando com as distribuições de fragilidade gama, estável positiva e série logarítmica. Estas expressões são fornecidas por Choi e Matthews (2005) e por Hofert et al. (2012).

Tabela 2 – Tau de Kendall

Distribuição	tau de Kendall
Gama	$\frac{1}{2\kappa + 1}$
Estável positiva	$1 - \kappa$
Série logarítmica	$1 + \frac{4(D_1(\kappa) - 1)}{\kappa}$

Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 2 temos $D_1(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \int_0^\kappa \frac{s}{\exp(s) - 1} ds$.

Observação 4. Pela expressão da fda da distribuição BSF bivariada dada na Definição 7, notamos que $F(t_1, t_2)$ se aproxima do produto $F_1(t_1)F_2(t_2)$, em que $F_j(\cdot)$ ($j = 1, 2$) é a fda da distribuição BS univariada de parâmetros α e β , quando:

- (i) $\kappa \rightarrow \infty$, para a distribuição de fragilidade gama;
- (ii) $\kappa \rightarrow 1^-$, para a distribuição de fragilidade estável positiva;
- (iii) $\kappa \rightarrow 0^+$, para a distribuição de fragilidade série logarítmica.

Isto significa também que o grau de associação entre as variáveis se aproxima de zero.

Teorema 4. Seja $\mathbf{T} = (T_1, T_2)^\top \sim BSF_2(\alpha, \beta, \kappa)$. Então,

- (i) As distribuições marginais seguem uma distribuição BSF(α, β, κ).
- (ii) a fdp de T_1 dado $T_2 = t_2$ é dada por

$$f(t_1|t_2) = \frac{-\mathcal{L}'' \left[-\sum_{j=1}^2 \log(S_j(t_j)) \right] \lambda_1(t_1)}{\mathcal{L}'[-\log(S_2(t_2))]}.$$

Prova:

- (i) Segue diretamente da definição da distribuição.

(ii) A fdp de T_1 dado $T_2 = t_2$ é

$$\begin{aligned} f(t_1|t_2) &= \frac{f(t_1, t_2)}{f(t_2)} \\ &= \frac{\mathcal{L}'' \left[-\sum_{j=1}^2 \log(S_j(t_j)) \right] \lambda_1(t_1) \lambda(t_2)}{-\mathcal{L}'[-\log(S_2(t_2))] \lambda_2(t_2)} \\ &= \frac{-\mathcal{L}'' \left[-\sum_{j=1}^2 \log(S_j(t_j)) \right] \lambda_1(t_1)}{\mathcal{L}'[-\log(S_2(t_2))]} \end{aligned}$$

Teorema 5. Seja $\mathbf{T} \sim BSF_2(\alpha, \beta, \kappa)$. Então:

(i) $(cT_1, cT_2) \sim BSF_2(\alpha, c\beta, \kappa)$, para $c > 0$.

(ii) $(T_1^{-1}, T_2^{-1}) \sim BSF_2(\alpha, \beta^{-1}, \kappa)$.

Prova: A prova deste resultado segue imediatamente da Equação (2.4) usando transformações adequadas.

Definição 8. Seja $\mathbf{T} = (T_1, T_2)^\top \sim BSF_2(\alpha, \beta, \kappa)$. Dizemos que o vetor aleatório, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^\top = (\log(T_1), \log(T_2))^\top$, tem distribuição SNF bivariada com parâmetros $\alpha > 0$, $\mu = \log(\beta) \in \mathbb{R}$, 2 e κ , e denotamos $\mathbf{Y} \sim SNF_2(\alpha, \mu, 2, \kappa)$, se a sua fda é dada por

$$F(y_1, y_2) = S(y_1, y_2) + F(y_1) + F(y_2) - 1,$$

para $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, em que $F(y_j)$ é dada a partir da Expressão (2.1), para $j = 1, 2$, e $S(y_1, y_2)$ é dada pela Expressão (2.3), sendo $S_j(y_j)$ a função de sobrevivência da distribuição SN univariada de parâmetros α , μ e 2. Assim, a fdp de $\mathbf{Y}$ é dada por (2.4), sendo que $\mathcal{L}''(s)$ indica a derivada de segunda ordem de $\mathcal{L}(s)$ com relação a s e $\lambda_j(y_j)$ denota a função de risco de uma variável aleatória com distribuição SN univariada de parâmetros α , μ e 2.

2.4 MODELAGEM

Seja $\mathbf{T}_i = (T_{i1}, T_{i2})^\top$ dois tempos de sobrevivência referentes ao i -ésimo sujeito ($i = 1, \dots, n$). Suponhamos que $T_{ij} \sim BSF(\alpha, \exp(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}), \kappa)$, em que $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^0, \dots, x_{ij}^k)^\top$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ denotam o vetor de variáveis explicativas e o vetor dos coeficientes de regressão, respectivamente. O modelo de regressão log-linear é dado por

$$Y_{ij} = \log(T_{ij}) = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + W_{ij}, \quad (2.5)$$

em que $W_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$. Assume-se independência entre os sujeitos e dependência dentro dos pares. A associação entre os grupos é medida pelo tau de Kendall.

Estimação

Consideremos $(y_{1j}, \delta_{1j}), \dots, (y_{nj}, \delta_{nj})$ uma amostra observada de n observações independentes, em que y_{ij} é o logaritmo da medida da resposta j no par i e δ_{ij} é a variável indicadora de falha, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$. Então, o logaritmo da função de verossimilhança é

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n & \left[\delta_{i1}\delta_{i2} \log(f(w_{i1}, w_{i2})) + \delta_{i1}(1 - \delta_{i2}) \log \left[-\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}} \right] \right. \\ & \left. + (1 - \delta_{i1})\delta_{i2} \log \left[-\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}} \right] + (1 - \delta_{i1})(1 - \delta_{i2}) \log[S(w_{i1}, w_{i2})] \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que $w_{ij} = y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \alpha, \kappa)^\top$, $f(w_{i1}, w_{i2}) = \xi_{11}\xi_{12}K(\xi_{21})K(\xi_{22})\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\}$ e $\partial/\partial w_{ij}(S(w_{i1}, w_{i2})) = \xi_{1j}K(\xi_{2j})\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\}$, com $\xi_{1j} = (2/\alpha) \cosh(w_{ij}/2)$, $\xi_{2j} = (2/\alpha) \sinh(w_{ij}/2)$ e $K(\xi_{2j}) = \phi(\xi_{2j}) / \{2[1 - \Phi(\xi_{2j})]\}$.

As funções escores para $\boldsymbol{\beta}$, α e κ são, respectivamente,

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = -[\mathbf{X}_1^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}_1) + \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}_2)] \mathbf{Z},$$

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{b}))$$

e

$$U_{\kappa}(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{c})),$$

em que $\mathbf{X}_j$ é uma matriz de dimensão $n \times (k + 1)$, tal que a i -ésima linha é dada por $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^0, \dots, x_{ij}^k)^\top$, $\mathbf{Z} = [1, \dots, 1]^\top$, $\mathbf{D}(\cdot)$ denota uma matriz diagonal tal que $\mathbf{D}(\mathbf{a}_j) = \text{diag}\{a_{1j}(\boldsymbol{\theta}), \dots, a_{nj}(\boldsymbol{\theta})\}$, $\mathbf{D}(\mathbf{b}) = \text{diag}\{b_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, b_n(\boldsymbol{\theta})\}$ e $\mathbf{D}(\mathbf{c}) = \text{diag}\{c_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, c_n(\boldsymbol{\theta})\}$, com

$$\begin{aligned} a_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = & \delta_{i1}\delta_{i2} \frac{1}{f(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}} + \delta_{i1}(1 - \delta_{i2}) \left[\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i1}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \right] \\ & + (1 - \delta_{i1})\delta_{i2} \left[\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i2}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \right] + (1 - \delta_{i1})(1 - \delta_{i2}) \frac{1}{S(w_{i1}, w_{i2})} \\ & \times \frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
b_i(\boldsymbol{\theta}) = & \delta_{i1}\delta_{i2} \frac{1}{f(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha} + \delta_{i1}(1 - \delta_{i2}) \left[\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{i1}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \right] \\
& + (1 - \delta_{i1})\delta_{i2} \left[\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{i2}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \right] + (1 - \delta_{i1})(1 - \delta_{i2}) \frac{1}{S(w_{i1}, w_{i2})} \\
& \times \frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

e

$$\begin{aligned}
c_i(\boldsymbol{\theta}) = & \delta_{i1}\delta_{i2} \frac{1}{f(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \kappa} + \delta_{i1}(1 - \delta_{i2}) \left[\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \kappa \partial w_{i1}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \right] \\
& + (1 - \delta_{i1})\delta_{i2} \left[\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \kappa \partial w_{i2}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \right] + (1 - \delta_{i1})(1 - \delta_{i2}) \frac{1}{S(w_{i1}, w_{i2})} \\
& \times \frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \kappa}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

As expressões usadas nas equações (2.7), (2.8) e (2.9) estão definidas no Apêndice A.

As soluções do sistema de equações $\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$, $U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = 0$ e $U_\kappa(\boldsymbol{\theta}) = 0$ determinam as estimativas de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Entretanto, tais equações não possuem soluções analíticas fechadas, o que nos faz recorrer à métodos iterativos como, por exemplo, os métodos BFGS, Nelder-Mead, Newton-Raphson, entre outros. Neste trabalho, usamos o método BFGS do pacote maxLik do software R. Utilizamos como valores iniciais para β as estimativas de mínimos quadrados, para κ obtivemos em função do valor inicial do tau de Kendall (conforme a Expressão (1.13)) e para α nos baseamos na estimativa sob o caso não-censurado apresentada em (GALEA et al., 2004) e obtivemos a expressão

$$\tilde{\alpha} = \left\{ \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \left[\sinh^2 \left(\frac{y_{i1} - \mathbf{x}_{i1}^\top \boldsymbol{\beta}}{2} \right) + \sinh^2 \left(\frac{y_{i2} - \mathbf{x}_{i2}^\top \boldsymbol{\beta}}{2} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.10}$$

A inferência assintótica para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ pode ser baseada na distribuição assintótica do estimador de verossimilhança, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, que sob condições usuais (ver Cox e Hinkley (1979)), é dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{a}{\sim} N_{k+3}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_\theta), \tag{2.11}$$

em que $\stackrel{a}{\sim}$ indica convergência assintótica e $\boldsymbol{\Sigma}_\theta$ denota a matriz de variância e covariância assintótica para $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, que pode ser aproximada pela inversa da matriz de informação observada avaliada em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, tal que $I(\boldsymbol{\theta}) = -\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta}$, em que

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\alpha} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\kappa} \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\alpha} & \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\kappa} \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\alpha} & \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\kappa} \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}
\ddot{L}_{\beta\beta} &= [\mathbf{X}_1^\top \mathbf{D}(\mathbf{A}_{11}) + \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D}(\mathbf{A}_{12})] \mathbf{X}_1 + [\mathbf{X}_1^\top \mathbf{D}(\mathbf{A}_{21}) + \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D}(\mathbf{A}_{22})] \mathbf{X}_2, \\
\ddot{L}_{\beta\kappa} &= \ddot{L}_{\kappa\beta} = -[\mathbf{X}_1^\top \mathbf{D}(\mathbf{d}_1) + \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D}(\mathbf{d}_2)] \mathbf{Z}, \\
\ddot{L}_{\beta\alpha} &= \ddot{L}_{\alpha\beta} = -[\mathbf{X}_1^\top \mathbf{D}(\mathbf{e}_1) + \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D}(\mathbf{e}_2)] \mathbf{Z}, \\
\ddot{L}_{\kappa\kappa} &= \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{f})), \\
\ddot{L}_{\kappa\alpha} &= \ddot{L}_{\alpha\kappa} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{g}))
\end{aligned}$$

e

$$\ddot{L}_{\alpha\alpha} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{h})),$$

em que as expressões $\mathbf{D}(\mathbf{A}_{11})$, $\mathbf{D}(\mathbf{A}_{12})$, $\mathbf{D}(\mathbf{A}_{21})$, $\mathbf{D}(\mathbf{A}_{22})$, $\mathbf{D}(\mathbf{d}_1)$, $\mathbf{D}(\mathbf{d}_2)$, $\mathbf{D}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{D}(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{D}(\mathbf{f})$, $\mathbf{D}(\mathbf{g})$ e $\mathbf{D}(\mathbf{h})$ estão definidas no Apêndice A.

2.4.1 Testando a Fragilidade

Em estudos práticos relacionados à análise de sobrevivência, é de fundamental importância identificar se há algum tipo de associação nos dados considerados. Wienke (2010) apresentou um teste para verificar a existência de associação entre as observações. O teste unilateral é formulado da seguinte forma:

$$H_0 : \varepsilon = 0 \quad \text{versus} \quad H_A : \varepsilon > 0,$$

em que ε denota a variância da variável de fragilidade. De acordo com Colosimo e Giolo (2006), a variância da variável fragilidade é vista como uma forma de quantificar a fragilidade presente, pois se $\varepsilon = 0$, todas as variáveis de fragilidade serão iguais a 1, o que significa que a distribuição gama é degenerada no ponto 1. Observe que se $z = 1$ na Equação (1.8), obtemos o modelo usual para dados independentes. Para testar a hipótese nula, usamos o teste da razão de verossimilhanças. O principal problema enfrentado aqui é que o parâmetro de fragilidade está na fronteira do espaço paramétrico e, portanto, a razão de verossimilhanças não terá mais uma distribuição qui-quadrada clássica, ou seja, com 1 grau de liberdade ($\chi^2_{(1)}$). Duchateau et al. (2002), mostrou que a distribuição assintótica da razão de verossimilhanças será dada pela mistura de um ponto de massa em zero e uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade, denotada por $0,5\chi^2_{(0)} + 0,5\chi^2_{(1)}$.

2.5 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO

Nesta seção, apresentamos um breve resumo sobre medidas de diagnóstico, sob o enfoque de influência local. Conforme Cook (1986), o método de influência local é uma forma geral de avaliar a influência conjunta de observações, sob pequenas perturbações no modelo ou nos dados. A seguir, realizamos um estudo de influência local, considerando diferentes esquemas de perturbação.

Influência Local

A influência local, proposta por Cook (1986), corresponde a uma das ferramentas de diagnóstico mais recentes. A ideia principal deste método é realizar pequenas perturbações no modelo ou nos dados e analisar o comportamento de uma medida específica associada a essas perturbações. Para isso, consideramos o logaritmo da função de verossimilhança de um determinado modelo, $\ell(\boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor de dimensão p . Além disso, consideramos $\boldsymbol{\lambda}$ um vetor de perturbação $n \times 1$ restrito a algum subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Desse modo, o logaritmo da função de verossimilhança do modelo perturbado é dado por $\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda})$. Seja $\boldsymbol{\lambda}_0$ um vetor de não-perturbação, temos $\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}_0) = \ell(\boldsymbol{\theta})$. Assim, com o interesse de analisarmos a influência das perturbações em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, consideramos o afastamento pela verossimilhança $LD(\boldsymbol{\lambda}) = 2 \left[\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{\lambda}) \right]$, que é usado como uma medida de influência, em que $\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{\lambda}$ denota a estimativa de verossimilhança sob o modelo perturbado. Além disso, utilizando conceitos de Geometria Diferencial, (COOK, 1986) mostra que a curvatura normal na direção unitária $\mathbf{d}$ é dada por $C_{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\theta}) = 2|\mathbf{d}^\top \boldsymbol{\Delta}^\top \ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta}^{-1} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{d}|$, em que $\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta}^{-1}$ é a matriz de informação observada associada ao modelo considerado e $\boldsymbol{\Delta}$ é uma matriz $p \times n$, que depende do esquema de perturbação considerado, com elementos $\Delta_{rs} = \partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}) / \partial \theta_r \partial \lambda_s$, em que $r = 1, \dots, p$ e $s = 1, \dots, n$, avaliada em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e em $\boldsymbol{\lambda}_0$. Então, Cook (1986) sugere usar a direção $\mathbf{d}_{\max}$, que corresponde à maior curvatura, $C_{\mathbf{d}_{\max}}(\boldsymbol{\theta})$.

Alguns gráficos de diagnóstico são sugeridos, por exemplo, o gráfico de $C_{\mathbf{d}_r}(\boldsymbol{\theta})$ contra a ordem das observações, em que $\mathbf{d}_r$ é um vetor $n \times 1$ composto por um na r -ésima linha e zero nas demais. Essa curvatura é denotada por $C_r(\boldsymbol{\theta})$ e é dada por $C_r(\boldsymbol{\theta}) = 2|\boldsymbol{\Delta}_r^\top \ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta}^{-1} \boldsymbol{\Delta}_r|$, em que $\boldsymbol{\Delta}_r^\top$ é a r -ésima linha de $\boldsymbol{\Delta}$. É sugerida uma atenção especial naquelas observações tais que $C_r(\boldsymbol{\theta}) > 2\bar{C}$, em que $\bar{C} = (1/n) \sum_{r=1}^n C_r(\boldsymbol{\theta})$.

Curvaturas Normais

A seguir, calculamos para cada esquema de perturbação considerado, as expressões para as componentes da matriz Δ , considerando o modelo definido em (2.5) e o logaritmo da função de verossimilhança dado em (2.6).

Perturbação ponderação de casos: Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$ um vetor de perturbação. Neste contexto, o logaritmo da função de verossimilhança perturbada é dado por

$$\ell(\theta|\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i(\theta),$$

em que $\lambda_0 = (1, \dots, 1)^\top$ e

$$\begin{aligned} \ell_i(\theta) = & \delta_{i1} \delta_{i2} \log(f(w_{i1}, w_{i2})) + \delta_{i1}(1 - \delta_{i2}) \log \left[-\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}} \right] + \delta_{i2} \\ & \times (1 - \delta_{i1}) \log \left[-\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}} \right] + (1 - \delta_{i1})(1 - \delta_{i2}) \log[S(w_{i1}, w_{i2})], \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assim, derivando a Expressão (2.12) com relação a λ , temos

$$\frac{\partial \ell(\theta|\lambda)}{\partial \lambda^\top} = (\ell_1(\theta), \dots, \ell_n(\theta)).$$

Agora, derivamos esta última expressão com relação a θ e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta|\lambda)}{\partial \theta \partial \lambda^\top} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ell_1(\theta), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_n(\theta) \right) \\ &= (\Delta_1, \dots, \Delta_n), \end{aligned}$$

em que $\Delta_i = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_i(\theta)$. Dessa forma, podemos escrever a matriz Δ como $\Delta = (\Delta_\beta^\top, \Delta_\alpha^\top, \Delta_\kappa^\top)^\top$, sendo

$$\Delta_\beta = -[X_1^\top D(a_1) + X_2^\top D(a_2)],$$

$$\Delta_\alpha = (\Delta_{\alpha_1}, \dots, \Delta_{\alpha_n})$$

e

$$\Delta_\kappa = (\Delta_{\kappa_1}, \dots, \Delta_{\kappa_n}),$$

com $\Delta_{\alpha_i} = b_i(\theta)$ e $\Delta_{\kappa_i} = c_i(\theta)$, em que X_j , $D(\cdot)$, $a_{ij}(\cdot)$, $b_i(\cdot)$ e $c_i(\cdot)$ são dadas em (2.7), (2.8) e (2.9) para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$, avaliadas em $\hat{\theta}$ e λ_0 .

Perturbação na variável resposta: Para realizar essa perturbação, consideramos $y_{i1}(\boldsymbol{\lambda}) = y_{i1} + \lambda_i$ e $y_{i2}(\boldsymbol{\lambda}) = y_{i2} + \lambda_i$, em que $y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + w_{ij}$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$. Daí, segue que $w_{i1}(\boldsymbol{\lambda}) = w_{i1} + \lambda_i$ e $w_{i2}(\boldsymbol{\lambda}) = w_{i2} + \lambda_i$. Dessa forma, o logaritmo da função de verossimilhança perturbada é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta}),$$

sendo $\boldsymbol{\lambda}_0 = (0, \dots, 0)^\top$ o vetor de não-perturbação. Portanto, as componentes da matriz $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_\beta^\top, \boldsymbol{\Delta}_\alpha^\top, \boldsymbol{\Delta}_\kappa^\top)^\top$ são

$$\boldsymbol{\Delta}_\beta = -[\mathbf{X}_1^\top \mathbf{D}(\mathbf{k}_1) + \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D}(\mathbf{k}_2)],$$

$$\boldsymbol{\Delta}_\alpha = (\boldsymbol{\Delta}_{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\Delta}_{\alpha_n})$$

e

$$\boldsymbol{\Delta}_\kappa = (\boldsymbol{\Delta}_{\kappa_1}, \dots, \boldsymbol{\Delta}_{\kappa_n}),$$

com $\mathbf{D}(\mathbf{k}_j) = \text{diag}\{k_{1j}, \dots, k_{nj}\}$, $\boldsymbol{\Delta}_{\alpha_i} = \partial/\partial\lambda_i[b_i(\boldsymbol{\theta})]$ e $\boldsymbol{\Delta}_{\kappa_i} = \partial/\partial\lambda_i[c_i(\boldsymbol{\theta})]$, para $k_{ij} = \partial/\partial\lambda_i[a_{ij}(\boldsymbol{\theta})]$, sendo que $a_{ij}(\cdot)$, $b_i(\cdot)$ e $c_i(\cdot)$ são dadas em (2.7), (2.8) e (2.9) e avaliadas em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Podemos também realizar uma perturbação na variável resposta em apenas uma das coordenadas. Para isso, devemos considerar $\mathbf{y}_i(\boldsymbol{\lambda}) = (y_{i1} + \lambda_i; y_{i2})^\top$ ou $\mathbf{w}_i(\boldsymbol{\lambda}) = (y_{i1}; y_{i2} + \lambda_i)^\top$.

Perturbação na variável explicativa: Consideremos agora uma perturbação aditiva em uma variável explicativa contínua particular, digamos x_{ij}^s , fazendo $x_{i1}^s(\boldsymbol{\lambda}) = x_{i1}^s + \lambda_i$ e $x_{i2}^s(\boldsymbol{\lambda}) = x_{i2}^s + \lambda_i$, em que $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$. Neste sentido, o vetor de não-perturbação é $\boldsymbol{\lambda}_0 = (0, \dots, 0)^\top$ e $w_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) = y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\beta}$, com $\mathbf{x}_{ij}^\top(\boldsymbol{\lambda}) = (x_{ij}^0, \dots, (x_{ij}^s + \lambda_i), \dots, x_{ij}^k)$. Então, o logaritmo da função de verossimilhança perturbada tem a forma

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta})$$

e as componentes da matriz $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_\beta^\top, \boldsymbol{\Delta}_\alpha^\top, \boldsymbol{\Delta}_\kappa^\top)^\top$ são

$$\boldsymbol{\Delta}_\beta = -[\mathbf{X}_1^\top \mathbf{D}(\mathbf{k}'_1) + \mathbf{X}_2^\top \mathbf{D}(\mathbf{k}'_2)],$$

$$\boldsymbol{\Delta}_\alpha = (\boldsymbol{\Delta}_{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\Delta}_{\alpha_n})$$

e

$$\boldsymbol{\Delta}_\kappa = (\boldsymbol{\Delta}_{\kappa_1}, \dots, \boldsymbol{\Delta}_{\kappa_n}),$$

com $\mathbf{D}(\mathbf{k}'_j) = \text{diag}\{k'_{1j}, \dots, k'_{nj}\}$, $\Delta_{\alpha_i} = \partial/\partial\lambda_i[b_i(\boldsymbol{\theta})]$ e $\Delta_{\kappa_i} = \partial/\partial\lambda_i[c_i(\boldsymbol{\theta})]$, para $k'_{ij} = \partial/\partial\lambda_i[a_{ij}(\boldsymbol{\theta})]$, sendo que $a_{ij}(\cdot)$, $b_i(\cdot)$ e $c_i(\cdot)$ são dadas em (2.7), (2.8) e (2.9) e avaliadas em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e λ_0 .

2.6 ANÁLISE RESIDUAL

Para verificar a qualidade do ajuste do modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado, consideraremos os resíduos propostos por Choi e Matthews (2015), denominados de V -resíduos e K -resíduos. Os V -resíduos são dados por

$$\begin{aligned}\hat{V}_i = C(\hat{U}_{i1}, \hat{U}_{i2}) &= \mathcal{L}\left\{-\log[S_1(\hat{W}_{i1})] - \log[S_2(\hat{W}_{i2})]\right\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}(\hat{U}_{i1}) + \mathcal{L}^{-1}(\hat{U}_{i2})\right\},\end{aligned}\quad (2.13)$$

em que $\hat{U}_{ij} = \mathcal{L}\{-\log[S_j(\hat{W}_{ij})]\}$, com $S_j(\hat{W}_{ij}) = 1 - \Phi((2/\alpha)\sinh(\hat{W}_{ij}/2))$ e $\hat{W}_{ij} = y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$. Além disso, $\mathcal{L}^{-1}$ denota a inversa da transformada de Laplace conforme a distribuição de fragilidade considerada.

Observe que $C(\hat{u}_{i1}, \hat{u}_{i2})$ tem a forma de uma cópula arquimediana com gerador $\varphi = \mathcal{L}^{-1}$ (veja a Observação 2 do Capítulo 1). Assim, considerando uma distribuição de fragilidade que satisfaça as condições para que $C(\hat{u}_{i1}, \hat{u}_{i2})$ seja uma cópula arquimediana segue de um teorema demonstrado em Genest e Rivest (1993) que os V -resíduos tem uma distribuição dada por

$$G(v_i) = P(V_i < v_i) = v_i - \frac{\varphi(v_i)}{\varphi'(v_i)},$$

que depende de um parâmetro de fragilidade κ .

Como a distribuição dos V -resíduos não é totalmente especificada, pois depende do parâmetro de fragilidade κ , os autores sugerem um novo resíduo definido através de uma transformação integral de probabilidade dos V -resíduos, ou seja, $\hat{K}_i = G(\hat{V}_i)$. Assim, segue do Teorema da Transformação Integral de Probabilidade que os K -resíduos possuem distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ (para ver detalhes sobre o referido teorema, consultar Joe (2014)).

Considerando censura à direita, utilizamos os V -resíduos e os K -resíduos adaptados definidos em Choi e Matthews (2015), dados por

$$\hat{V}_i^{\text{adap}} = \mathcal{L}\{\mathcal{L}^{-1}(\hat{U}_{i1}^{\text{adap}}) + (\hat{U}_{i2}^{\text{adap}})\}$$

e

$$\hat{K}_i^{\text{adap}} = G(\hat{V}_i^{\text{adap}}), \quad (2.14)$$

com

$$\hat{U}_{ij}^{\text{adap}} = \hat{U}_{ij} + \frac{1}{2}(\delta_{ij} - 1)\hat{U}_{ij}, \quad (2.15)$$

em que δ_{ij} é a variável indicadora de falha. Para mais detalhes veja Choi e Matthews (2015).

2.7 ESTUDO NUMÉRICO

Agora, apresentaremos alguns estudos de simulação que foram realizados com o objetivo de avaliar o potencial dos K -resíduos em detectar alguma má-especificação na componente sistemática e no componente estocástico do modelo, bem como, detectar a presença de *outliers*.

O Algoritmo

Primeiramente geramos uma amostra bivariada associada, $(Y_{i1}, Y_{i2})^\top$, em que $Y_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}, 2, \kappa)$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$, com base no algoritmo apresentado em Nelsen (2007). Como resultado, temos o seguinte algoritmo:

Algoritmo: Geração de uma amostra bivariada associada $(Y_{i1}, Y_{i2})^\top$

- [1.] Gere valores t e u provenientes de duas variáveis aleatórias independentes T e U com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$;
 - [2.] Obtenha $C_u(t)$, tal que $C_u(t) = P(T \leq t | U = u) = \frac{\partial C(u, t)}{\partial u}$, em que C é a cópula associada a W_{i1} e W_{i2} para as distribuições de fragilidade gama (G), estável positiva (EP) e série logarítmica (SL).
 - [3.] Defina $v = C_u^{-1}(t)$, em que C_u^{-1} denota a inversa de $C_u(t)$.
 - [4.] Considere $w_{i1} = S_1^{-1}(u)$ e $w_{i2} = S_2^{-1}(v)$, $i = 1, \dots, n$, em que S_j^{-1} denota a inversa da função de sobrevivência da distribuição $\text{SN}(\alpha, 0, 2)$.
 - [5.] Gere $\mathbf{x}_{ij}^\top$ a partir de uma distribuição normal padrão.
 - [6.] Obtenha y_{ij} , tal que $y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + w_{ij}$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$.
-

Para investigar a capacidade dos K -resíduos em destacar alguma má-especificação nas componentes do modelo, realizaremos um estudo de simulação semelhante ao estudo de simulação desenvolvido por Choi e Matthews (2015) usando a seguinte medida de qualidade de ajuste:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{K}_{(i)} - \frac{i}{n+1} \right\}^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

Na presença de censura à direita, consideramos a medida de qualidade de ajuste, dada por:

$$S_{\text{adap}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{K}_{(i)}^{\text{adap}} - \frac{i}{n+1} \right\}^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Uma má-especificação na componente sistemática

Primeiramente, consideramos uma má-especificação na componente sistemática do modelo. Neste caso, investigamos se os resíduos apresentados conseguem detectar a omissão de variáveis explicativas importantes da parte sistemática. Para isso, consideramos o modelo:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \sum_{s=1}^3 \beta_s x_{ij}^{(s)} + W_{ij}, \quad (2.18)$$

em que $W_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$ e $x_{ij}^{(s)} \sim N(0, 1)$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$.

Os tamanhos amostrais e os verdadeiros valores dos parâmetros considerados são $n = 50, 100, 200$ e $\beta_0 = 0, \beta_1 = 3, \beta_2 = 1,5, \beta_3 = -2$ e $\alpha = 0,5$. Os valores atribuídos ao parâmetro de fragilidade κ são determinados em função dos valores atribuídos ao tau de Kendall, que, neste caso, consideramos 0,1; 0,3; 0,5 e 0,7. Utilizamos 5000 réplicas de Monte Carlo, para cada valor atribuído ao tau de Kendall. Além disso, utilizamos a distribuição de fragilidade gama. Posteriormente, usamos as amostras geradas e ajustamos o modelo aos dados por meio de quatro cenários distintos:

- Cenário 1: Ajustamos o modelo (2.18), ou seja, o modelo com todas as covariáveis.
- Cenário 2: Ajustamos o modelo $Y_{ij} = \beta_0 + \sum_{s=1}^2 \beta_s x_{ij}^{(s)} + W_{ij}$, ou seja, omitimos a covariável $x_{ij}^{(3)}$.
- Cenário 3: Ajustamos o modelo $Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij}^{(1)} + W_{ij}$, ou seja, omitimos as covariáveis $x_{ij}^{(2)}$ e $x_{ij}^{(3)}$.
- Cenário 4: Omitimos todas as covariáveis do modelo.

Então, obtivemos as medidas S_T e S_W , que correspondem ao modelo ajustado com todas as covariáveis e com a omissão de covariáveis, respectivamente. Na Tabela 3, apresentamos as médias dos valores das medidas mencionadas para cada cenário considerado.

Baseado na Tabela 3, podemos ver que, em geral, para valores fixos do tau de Kendall, que a média dos valores das medidas consideradas aumentam conforme omitimos mais covariáveis do

Tabela 3 – Medidas S_T e S_W conforme os cenários considerados

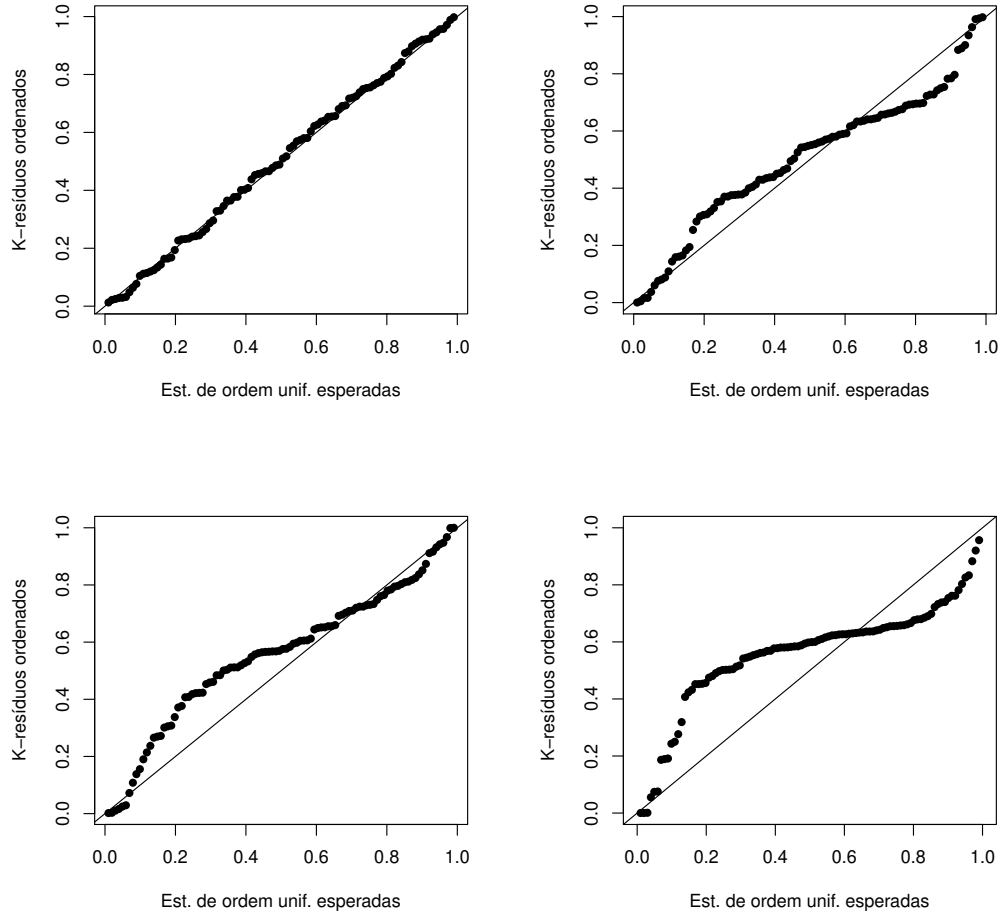
$n = 50$				
τ	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4
0,1	0,001185	0,003727	0,004997	0,024905
0,3	0,001448	0,030956	0,009286	0,013545
0,5	0,001719	0,002430	0,006454	0,017442
0,7	0,002473	0,004735	0,005104	0,007525
$n = 100$				
τ	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4
0,1	0,000591	0,002411	0,004547	0,028376
0,3	0,000734	0,002160	0,007190	0,024706
0,5	0,001128	0,001993	0,003238	0,028080
0,7	0,001870	0,004271	0,006253	0,009526
$n = 200$				
τ	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4
0,1	0,000362	0,002153	0,006710	0,037939
0,3	0,000523	0,002608	0,003899	0,016281
0,5	0,000834	0,000997	0,004769	0,018707
0,7	0,001583	0,001915	0,004791	0,036963

Fonte: Autoria própria.

modelo. Além disso, podemos ver que os valores médios de S_T aumentam quando aumentamos os valores do tau de Kendall. Assim, podemos concluir que o estudo de simulação mostrou que os K -resíduos foram capazes de evidenciar a má-especificação na componente sistemática do modelo.

Na Figura 2 apresentamos os Q-Q *plots* dos K -resíduos para uma amostra de tamanho $n = 100$ e $\tau = 0,3$ em cada cenário considerado. Podemos ver que o Q-Q *plot* para o Cenário 1 está muito próximo da diagonal de referência, o que significa que a suposição de que os K -resíduos têm uma distribuição no intervalo $[0, 1]$ é verificada. Além disso, podemos notar também que os Q-Q *plots* se afastam gradualmente da diagonal de referência à medida que omitimos mais variáveis explicativas do modelo. Portanto, os K -resíduos são sensíveis a má-especificação na componente sistemática do modelo.

Figura 2 – Q-Q plots dos K -resíduos ordenados para má-especificação na componente sistemática do modelo: (a) cenário 1, (b) cenário 2, (c) cenário 3 e (d) cenário 4



Fonte: Autoria própria.

Presença de *outlier*

Do mesmo modo, também investigamos se os K -resíduos podem detectar a existência de *outliers* que podem gerar alguma influência nas estimativas dos parâmetros, o que pode causar mudanças inferenciais. Para isso, geramos 5000 amostras bivariadas $(Y_{i1}, Y_{i2})^\top$, $i = 1, \dots, n$, de tamanhos $n = 50, 100$ e 200 , em que utilizamos a distribuição de fragilidade gama e consideramos como parâmetros verdadeiros $\beta_0 = 1,5$, $\beta_1 = 3$ e $\alpha = 0,5$. Novamente, atribuímos os valores $0,1$; $0,3$; $0,5$ e $0,7$ ao tau de Kendall e obtivemos os três valores associados ao parâmetro de fragilidade κ . Para contaminar a amostra, consideramos $(y_{i1}, y_{i2})^\top = \left((7/5)y_{\arg\max_i(y_{i1})}, y_{i2} \right)^\top$, em que $\arg\max_i(y_{i1})$ retorna o i -ésimo valor tal que

y_{i1} é máximo, com $i = 1, \dots, n$. Com isso, obtivemos as respectivas medidas, S_T e S_W , correspondentes aos modelos ajustados para o caso em que a amostra não foi contaminada e para o caso em que houve contaminação na amostra, respectivamente. Apresentamos os valores médios de S_T e S_W na Tabela 4.

Tabela 4 – Média das medidas S_T e S_W - *Outlier*

	$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$	
τ	S_T	S_W	S_T	S_W	S_T	S_W
0,1	0,001246	0,009017	0,000613	0,007489	0,000302	0,026853
0,3	0,001320	0,008143	0,000955	0,007715	0,000437	0,032681
0,5	0,001699	0,012168	0,001123	0,016090	0,000852	0,014765
0,7	0,002579	0,009703	0,001917	0,018154	0,001660	0,019405

Fonte: Autoria própria.

Através da Tabela 4 podemos ver que os valores médios da medida S_W excedem os valores médios da medida S_T para todos os tamanhos amostrais considerados, ou seja, os K -resíduos detectam a presença de *outlier*.

Uma má-especificação no componente estocástico

Agora, consideramos uma má-especificação no componente estocástico do modelo. Para produzir essa má-especificação, geramos os dados a partir de uma distribuição de fragilidade, chamada fragilidade verdadeira, e ajustamos considerando outras distribuições de fragilidade. Os valores atribuídos aos parâmetros foram $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 3$ e $\alpha = 0,5$. Novamente atribuímos os valores 0,1; 0,3; 0,5 e 0,7 ao tau de Kendall.

Geramos 5000 amostras com tamanhos 50, 100 e 200. Com isso, obtivemos as medidas S_T e S_W que correspondem ao modelo ajustado através da fragilidade verdadeira e ao modelo ajustado com distribuições de fragilidade distintas da distribuição da fragilidade verdadeira, respectivamente. Os valores correspondentes as médias das medidas S_T e S_W se encontram nas Tabelas 5, 6 e 7.

Podemos notar pelas Tabelas 5, 6 e 7 que, em geral, os valores das medidas permaneceram próximos, independentemente da distribuição de fragilidade verdadeira considerada. Assim, os K -resíduos não foram capazes de captar a má-especificação no componente estocástico do modelo.

Tabela 5 – Média das medidas S_T e S_W mediante a amostra de tamanho $n = 50$

Fragilidade Verdadeira	τ	Modelo de Fragilidade Ajustado		
		Gama	Estável Positiva	Série Logarítmica
Gama	0,1	0,001199	0,001263	0,001189
	0,3	0,001338	0,001348	0,001364
	0,5	0,001768	0,001485	0,001609
	0,7	0,002504	0,001889	0,002892
Estável Positiva	0,1	0,001531	0,001230	0,001306
	0,3	0,001970	0,001202	0,002293
	0,5	0,002788	0,001287	0,005612
	0,7	0,003463	0,002108	0,017467
Série Logarítmica	0,1	0,001811	0,001264	0,001417
	0,3	0,001873	0,001252	0,001479
	0,5	0,003033	0,001293	0,001716
	0,7	0,002469	0,001361	0,002123

Fonte: Autoria própria.

Tabela 6 – Média das medidas S_T e S_W mediante a amostra de tamanho $n = 100$

Fragilidade Verdadeira	τ	Modelo de Fragilidade Ajustado		
		Gama	Estável Positiva	Série Logarítmica
Gama	0,1	0,000590	0,000670	0,000601
	0,3	0,000721	0,000807	0,000744
	0,5	0,001126	0,000968	0,000870
	0,7	0,001871	0,001404	0,001875
Estável Positiva	0,1	0,000724	0,000608	0,000667
	0,3	0,001341	0,000634	0,001576
	0,5	0,002213	0,000764	0,005018
	0,7	0,002773	0,001588	0,016349
Série Logarítmica	0,1	0,001184	0,000672	0,000766
	0,3	0,001270	0,000682	0,000819
	0,5	0,001428	0,000699	0,000926
	0,7	0,001745	0,000762	0,001231

Fonte: Autoria própria.

Presença de censura à direita

Agora, estudaremos o comportamento de K -resíduos adaptados e para isso faremos uma comparação entre os K -resíduos e os K -resíduos adaptados na presença de censura à direita.

Tabela 7 – Média das medidas S_T e S_W mediante a amostra de tamanho $n = 200$

Fragilidade Verdadeira	τ	Modelo de Fragilidade Ajustado		
		Gama	Estável Positiva	Série Logarítmica
Gama	0,1	0,000328	0,000373	0,000317
	0,3	0,000435	0,000543	0,000459
	0,5	0,000849	0,000726	0,000530
	0,7	0,001592	0,001162	0,001418
Estável Positiva	0,1	0,000458	0,000313	0,000372
	0,3	0,001278	0,000347	0,001212
	0,5	0,001853	0,000460	0,003993
	0,7	0,002459	0,001283	0,015585
Série Logarítmica	0,1	0,000833	0,000381	0,000428
	0,3	0,001083	0,000401	0,000518
	0,5	0,002451	0,000426	0,000598
	0,7	0,001504	0,000495	0,000885

Fonte: Autoria própria.

Nesse caso, usamos o mesmo cenário considerado na má-especificação da componente estocástica do modelo. Para introduzirmos a censura à direita, simulamos os valores de uma distribuição log-normal com variância 1 e com médias 1,5, 1,0 e $-0,5$ para obtermos 10%, 20% e 40% de censura, respectivamente.

Fizemos isso para uma das variáveis resposta da amostra bivariada gerada e consideramos a outra variável resposta do par como não-censurada. Posteriormente, ajustamos o modelo e obtivemos as respectivas medidas S e S_{adap} dadas em (2.16) e (2.17). Então, nas Tabelas 8, 9 e 10 apresentamos as médias das medidas S e S_{adap} para os tamanhos de amostras $n = 50$, 100 e 200, oriundas de 5000 simulações realizadas.

Portanto, com base nas Tabelas 8, 9 e 10 podemos ver que, em geral, quando fixamos a distribuição de fragilidade, os valores médios das medidas S e S_{adap} aumentam à medida que aumentamos a porcentagem de censura. Além disso, notamos também que os valores atribuídos ao tau de Kendall não afetaram a magnitude das medidas consideradas. Finalmente, observamos que para todas as porcentagens de censura consideradas, os valores médios da medida S_{adap} eram menores do que os valores médios correspondentes da medida S . Assim, concluímos que os K -resíduos adaptados são melhores do que os K -resíduos para trabalhar com dados envolvendo a presença de censura à direita.

Tabela 8 – Valores médios das medidas S e S_{adap} considerando amostras com 10% de censura à direita

Modelo de Fragilidade	τ	$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$	
		S	S_{adap}	S	S_{adap}	S	S_{adap}
Gama	0,1	0,001504	0,001028	0,001218	0,000585	0,001622	0,000582
	0,3	0,003394	0,001892	0,003177	0,001565	0,001966	0,000787
	0,5	0,004208	0,002489	0,001651	0,000802	0,001301	0,000521
	0,7	0,002712	0,001870	0,002048	0,001370	0,001994	0,001015
Estável Positiva	0,1	0,002814	0,002484	0,001156	0,000616	0,043042	0,041264
	0,3	0,001522	0,001072	0,002175	0,001839	0,017651	0,016945
	0,5	0,001677	0,001257	0,004207	0,003529	0,000809	0,000531
	0,7	0,005545	0,004036	0,001591	0,001227	0,006975	0,004946
Série Logarítmica	0,1	0,001473	0,001254	0,000844	0,000654	0,000503	0,000384
	0,3	0,001551	0,001303	0,000991	0,000734	0,000511	0,000428
	0,5	0,002434	0,002019	0,000827	0,000824	0,000455	0,000516
	0,7	0,001644	0,001718	0,000861	0,001067	0,000496	0,000755

Fonte: Autoria própria.

Tabela 9 – Valores médios das medidas S e S_{adap} considerando amostras com 20% de censura à direita

Modelo de Fragilidade	τ	$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$	
		S	S_{adap}	S	S_{adap}	S	S_{adap}
Gama	0,1	0,004061	0,001332	0,003123	0,000732	0,024078	0,019547
	0,3	0,006088	0,001953	0,003313	0,000666	0,006970	0,001830
	0,5	0,005415	0,002207	0,010454	0,003744	0,028186	0,019699
	0,7	0,004587	0,001770	0,011765	0,005711	0,010833	0,003526
Estável Positiva	0,1	0,007942	0,005717	0,004232	0,002456	0,004640	0,002973
	0,3	0,002984	0,001672	0,005035	0,002246	0,016103	0,013545
	0,5	0,005043	0,002849	0,010284	0,009289	0,015356	0,013239
	0,7	0,003067	0,001977	0,003620	0,002616	0,009246	0,004730
Série Logarítmica	0,1	0,025246	0,017504	0,002086	0,000791	0,001688	0,000511
	0,3	0,002169	0,001370	0,061754	0,044018	0,017412	0,012073
	0,5	0,001976	0,001507	0,001572	0,000892	0,001278	0,000649
	0,7	0,001965	0,001676	0,008665	0,004325	0,016379	0,014504

Fonte: Autoria própria.

Tabela 10 – Valores médios das medidas S e S_{adap} considerando amostras com 40% de censura à direita

Modelo de Fragilidade	τ	$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$	
		S	S_{adap}	S	S_{adap}	S	S_{adap}
Gama	0,1	0,018478	0,006118	0,016263	0,007855	0,013280	0,002592
	0,3	0,010664	0,001486	0,020950	0,005465	0,016950	0,004095
	0,5	0,013633	0,002114	0,017202	0,005806	0,018696	0,004150
	0,7	0,010206	0,001367	0,020369	0,003375	0,018503	0,003574
Estável Positiva	0,1	0,019045	0,012978	0,020873	0,017740	0,028292	0,021604
	0,3	0,013611	0,004954	0,014630	0,010150	0,027791	0,023644
	0,5	0,027073	0,017897	0,020428	0,012375	0,017693	0,015692
	0,7	0,016719	0,004947	0,014710	0,004962	0,013204	0,003988
Série Logarítmica	0,1	0,008065	0,001777	0,006873	0,001318	0,019546	0,012083
	0,3	0,009954	0,003090	0,010035	0,004237	0,022681	0,010041
	0,5	0,006657	0,001765	0,005856	0,001788	0,019662	0,007415
	0,7	0,006115	0,002256	0,023288	0,011020	0,023251	0,013081

Fonte: Autoria própria.

2.8 APLICAÇÃO

Nesta seção, consideramos um conjunto de dados reais correspondentes aos tempos de recorrência de infecções de 38 pacientes renais usando um equipamento de diálise portátil. Inicialmente, apresentamos uma breve descrição dos dados. Em seguida, realizamos uma análise exploratória, que sugere uma distribuição BSF para a modelagem marginal dos tempos de infecção. Com base nisso, comparamos o modelo BS independente com o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado e, finalmente, realizamos um estudo de influência local para o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado ajustado.

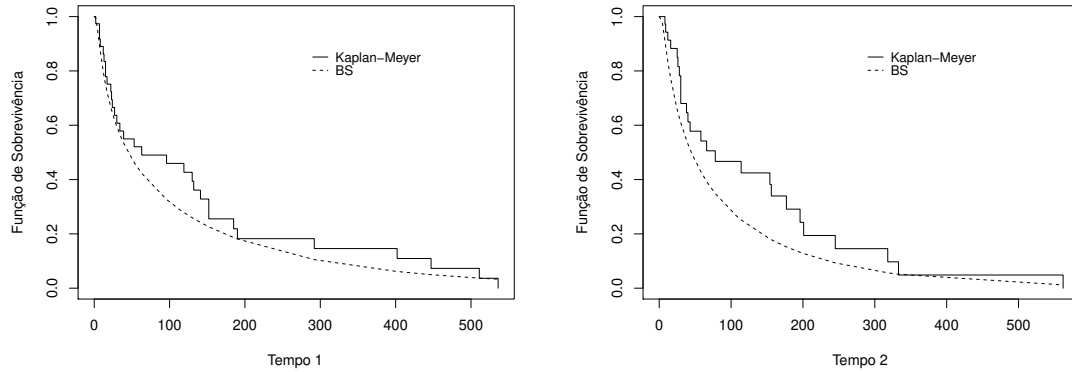
Descrição dos dados

Consideramos o conjunto de dados dado em Klein e Moeschberger (2006) correspondentes aos tempos de recorrência de infecções de 38 pacientes renais usando um equipamento de diálise portátil. Os dados aqui considerados foram analisados por meio do modelo de risco proporcional de Cox com um parâmetro de fragilidade multiplicativo para cada paciente (MCGILCHRIST; AISBETT, 1991), por meio de um modelo de localização-escala para tempos de sobrevivência bivariados, usando a cópula FGM (BARRIGA et al., 2010), através dos modelos de fragilidade compartilhada Weibull/gama (GUTIERREZ, 2002) e através de modelos de fragilidade compartilhada: inversa Gaussiana, Poisson composta e binomial negativa composta (HANAGAL; DABADE, 2013). O objetivo deste estudo é estimar os tempos da primeira e da segunda recorrência da infecção renal para cada indivíduo, utilizando o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado (considerando a fragilidade gama), conforme apresentado em (2.5), considerando a variável explicativa sexo. As porcentagens de observações censuradas para o primeiro e segundo tempo de infecção foram 16% e 32%, respectivamente.

Análise exploratória dos dados

A Figura 3 mostra as curvas de sobrevivência marginal estimadas por Kaplan-Meier e pela distribuição BS. Com base nessa figura, notamos que a função de sobrevivência de uma distribuição BS univariada pode ser adequada para ser utilizada como função de sobrevivência *baseline* para a modelagem dos dados considerados.

Figura 3 – Curvas de sobrevivência marginal estimadas por Kaplan-Meier e pela distribuição BS: a) Tempo 1 e b) Tempo 2



Fonte: Autoria própria.

Modelagem

A seguir, comparamos o modelo BS independente e o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado. No caso independente, consideramos o modelo de regressão:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^{(1)} + w_i, \quad i = 1, \dots, 76,$$

em que w_i são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tais que $w_i \sim \text{SN}(\alpha, 0, 2)$, y_i denota o logaritmo do tempo de sobrevivência e a covariável $x_i^{(1)}$ assume 0 se o indivíduo é do sexo masculino e 1 se é do sexo feminino. Para o caso bivariado, consideramos o modelo:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij}^{(1)} + w_{ij}, \quad i = 1, \dots, 38 \text{ e } j = 1, 2, \quad (2.19)$$

em que $w_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$ e a covariável $x_{ij}^{(1)}$ assume 0 se o indivíduo é do sexo masculino e 1 se é do sexo feminino. Além disso, para j fixo, consideramos que w_{ij} são variáveis aleatórias independentes.

Apresentamos na Tabela 11 as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo (os erros-padrão em parênteses e valores- p em $[\cdot]$) considerando independência dentro dos pares observados e do modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado e as estatísticas: S_{adap} , AIC e BIC. Observamos que todos os parâmetros são significativos ao nível de 10% para ambos os modelos ajustados e que todos os critérios de seleção indicam que o modelo

Tabela 11 – Estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros (erros-padrão em parênteses e p -valores em $[\cdot]$) e as medidas S_{adap} , AIC e BIC.

Parâmetro	Modelo	
	Independente	Bivariado
β_0	2,3242	1,8447
	(0, 0573)	(0, 1012)
	[< 0, 05]	[< 0, 05]
β_1	1, 0906	1, 2833
	(0, 0333)	(0, 0540)
	[< 0, 05]	[< 0, 05]
κ	—	5, 6126
	—	(0, 8267)
	—	—
α	1, 3967	1, 2389
	(0, 0147)	(0, 0252)
	—	—
S_{adap}	0,1501	0,1245
AIC	204,0576	202,3188
BIC	211,0498	207,2316

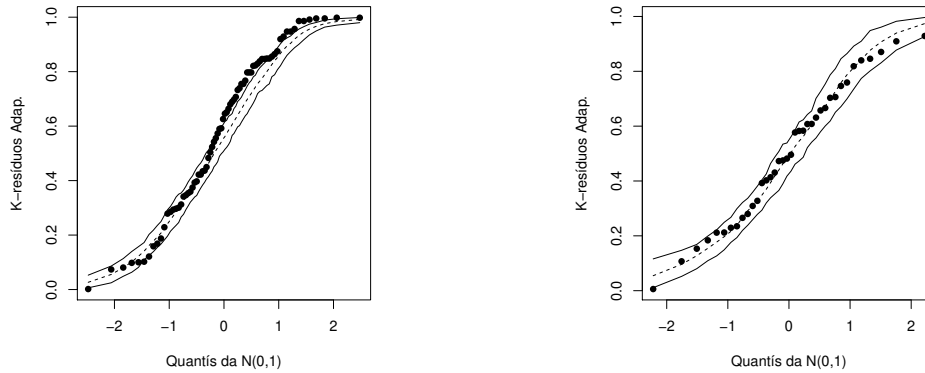
Fonte: Autoria própria.

de tempo de vida acelerado BS bivariado é mais adequado para analisar esses dados. Além disso, aplicamos o teste de fragilidade, definido na Seção 2.4.1, onde testamos a existência de associação entre os tempos para cada indivíduo em estudo. O valor da estatística de teste foi 1,7388 e o valor- p obtido foi igual a 0,093, isto é, rejeitamos a hipótese de que não há associação entre os tempos para cada indivíduo.

Para detectar possíveis afastamentos das suposições feitas inicialmente para os modelos, apresentamos na Figura 4 os gráficos de probabilidade normal para os K -resíduos com envelopes simulados (para o caso independente e para o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado, respectivamente). A Figura 3(a) mostra que grande parte dos pontos estão fora do envelope. Enquanto a Figura 3(b) mostra um comportamento usual que não indica desvios sérios das suposições iniciais do modelo.

Realizamos um estudo de influência local para o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado ajustado. Nas Figuras 5-8 apresentamos os gráficos de índices de $M_r(\theta)$, $M_r(\beta)$, $M_r(\kappa)$ e $M_r(\alpha)$ sob alguns esquemas de perturbação para o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado ajustado, em que $M_r(\cdot) = C_r(\cdot)/\sum_{i=1}^n C_r(\cdot)$. A partir dessas figuras, as seguintes

Figura 4 – Gráficos de probabilidade normal com envelopes - considerando independência dentro dos pares (a) e considerando o modelo de tempo de vida BS bivariado (b)



Fonte: Autoria própria.

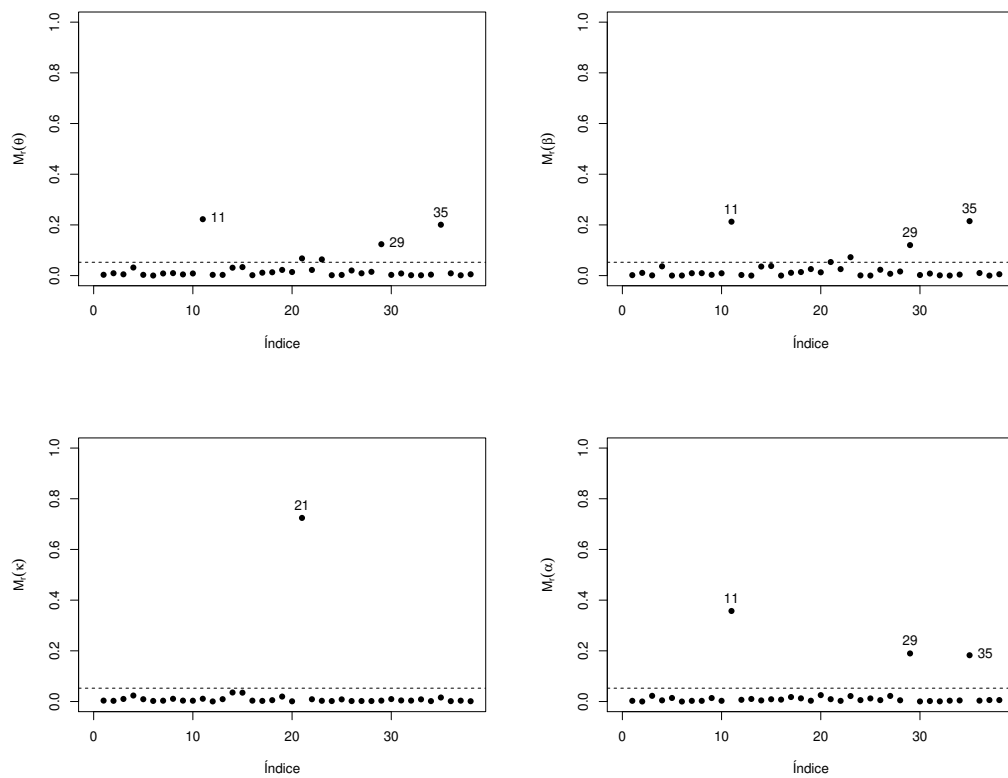
observações foram detectadas como potencialmente influentes: #4, #8, #10, #11, #15, #20, #21, #22, #23, #29 e #35. As observações #8, #11, #15, #20, #22 e #35 correspondem a pacientes do sexo feminino que possuem um par de um longo e um curto período de tempo até a ocorrência da falha ou censura. A observação #4 refere-se a uma paciente do sexo feminino que tem um par de longos períodos de tempo até a ocorrência da falha. As observações #23 e #29 tem um par de curtos períodos de tempo até que a falha ocorra, em que a observação #23 refere-se a uma paciente do sexo feminino e a observação #29 refere-se a um paciente do sexo masculino. Finalmente, as observações #10 e #21 correspondem a pacientes do sexo masculino, a observação #10 mostra um dos menores tempos até a ocorrência da primeira infecção, e a observação #21 refere-se ao tempo mais longo até a ocorrência da segunda infecção.

Os coeficientes estimados do modelo podem ser interpretados como segue. Consideramos os tempos t_{ij} e $t_{i'j}$ associados aos pacientes i e i' , respectivamente, no j -ésimo grupo. Neste caso, consideramos que o i -ésimo paciente é do sexo feminino e que o i' -ésimo paciente é do sexo masculino. Assim, observe que

$$\frac{t_{ij}(x_{ij}^{(1)} = 1)}{t_{i'j}(x_{i'j}^{(1)} = 0)} = \exp(\hat{\beta}_1) = \exp(1,2833) = 3,6085.$$

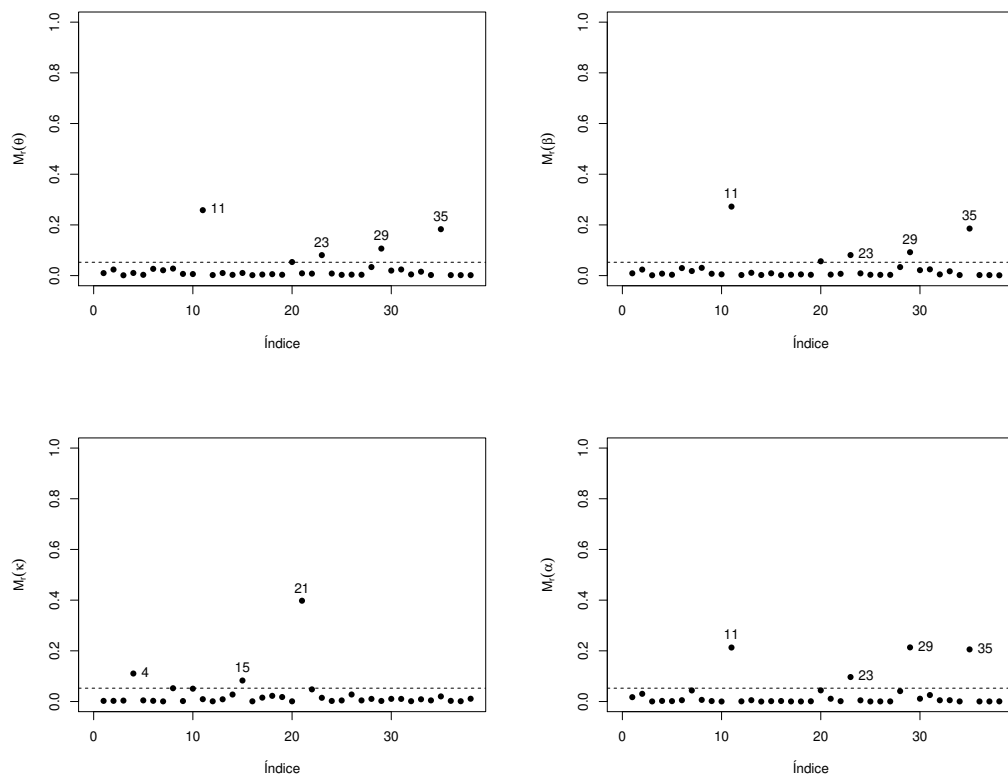
Ou seja, o tempo estimado até a ocorrência de infecção no ponto de inserção do catéter em pacientes do sexo feminino é 260,85% maior que o tempo estimado até a ocorrência de infecção no ponto de inserção do catéter em pacientes do sexo masculino.

Figura 5 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação ponderação de casos



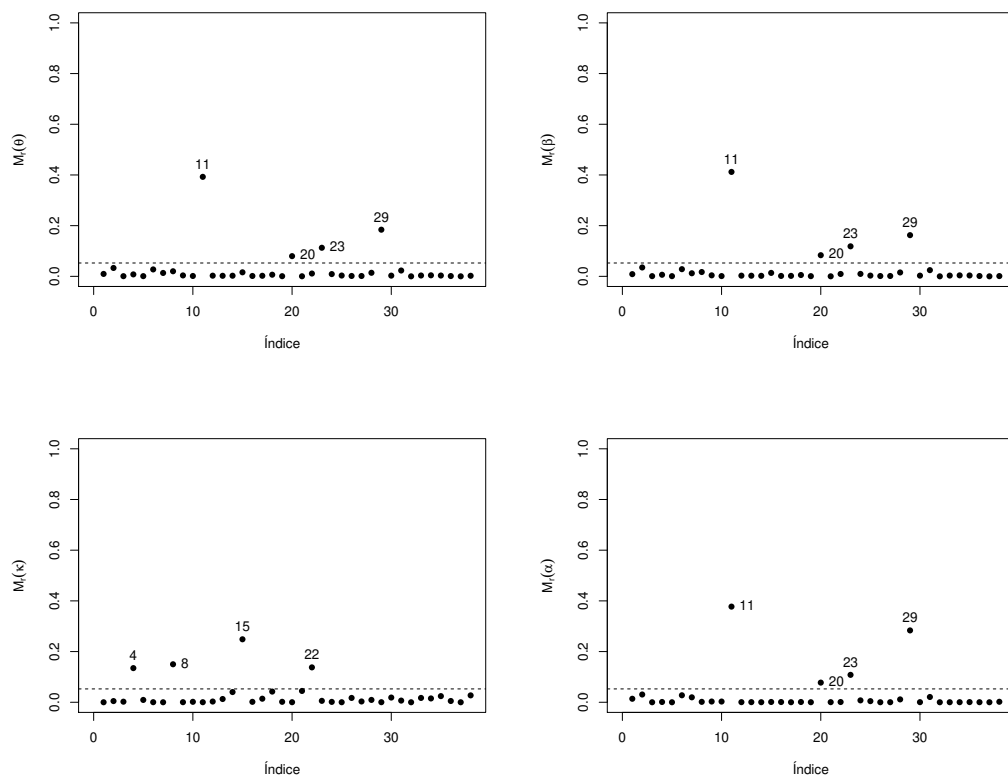
Fonte: Autoria própria.

Figura 6 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob perturbação conjunta na variável resposta



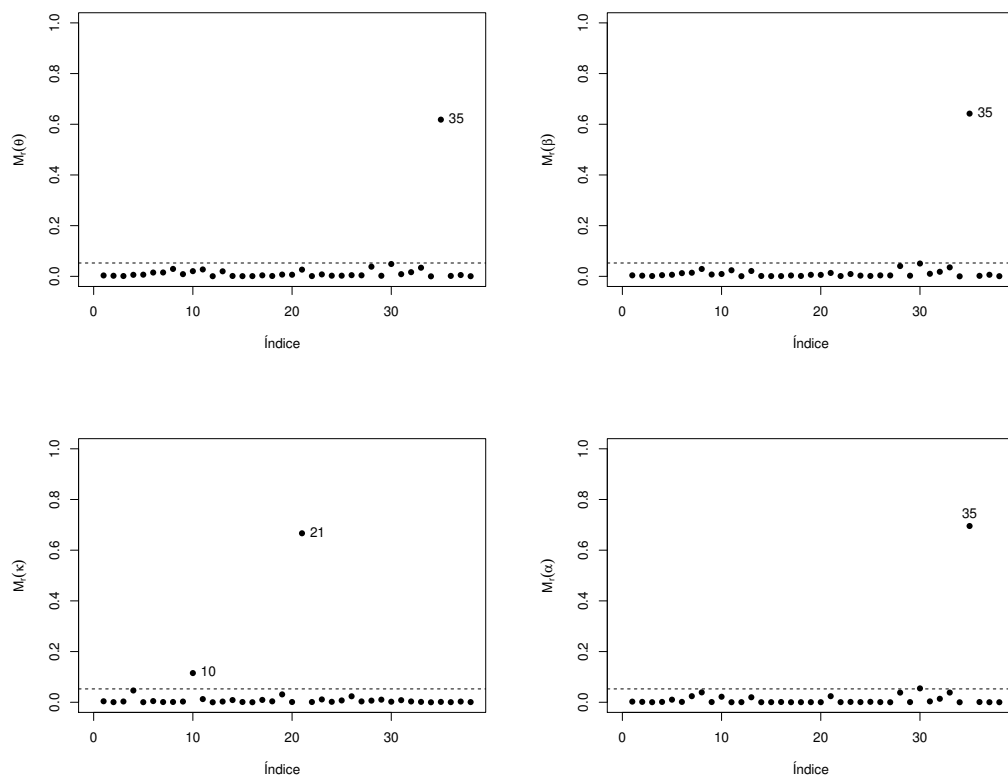
Fonte: Autoria própria.

Figura 7 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob perturbação na variável resposta (primeira coordenada)



Fonte: Autoria própria.

Figura 8 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob perturbação na variável resposta (segunda coordenada)



Fonte: Autoria própria.

2.9 CONCLUSÃO

Neste capítulo, propomos as distribuições BSF e SNF (univariadas e bivariadas), bem como desenvolvemos algumas das suas propriedades. Introduzimos o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado com estrutura de dependência modelada via fragilidade. Apresentamos alguns resíduos e obtivemos as matrizes apropriadas para avaliar a influência local sob diferentes esquemas de perturbação. Um estudo de simulação para os resíduos foi realizado para verificar se os os mesmos são capazes de identificar alguma má-especificação. Observamos que tais resíduos não foram sensíveis apenas para evidenciar má-especificação no componente estocástico do modelo. Conforme mostramos na aplicação, comparamos o modelo proposto com estrutura de dependência com o modelo que assume independência dentro dos pares. Também destacamos a importância da metodologia de influência local na detecção de pontos que exercem impactos desproporcionais nas estimativas dos parâmetros do modelo e a importância de incluir a dependência na análise estatística.

3 MODELO DE TEMPO DE VIDA ACELERADO BS MULTIVARIADO

3.1 RESUMO

No presente capítulo, propomos uma nova distribuição BSF multivariada e apresentamos algumas propriedades da distribuição proposta. Além disso, estendemos para o caso multivariado o modelo proposto no Capítulo 2. Utilizamos o método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do modelo e realizamos alguns estudos de simulação para verificar o desempenho dos estimadores. Finalmente, propomos dois tipos de resíduos, derivamos as curvaturas para realizar análise de diagnóstico baseada no enfoque de influência local e ilustramos a metodologia abordada através de dois conjuntos de dados reais.

3.2 A DISTRIBUIÇÃO BSF MULTIVARIADA

Definição 9. Dizemos que $\mathbf{T}$ tem distribuição BSF m -variada com parâmetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e κ , e denotamos $\mathbf{T} \sim BSF_m(\alpha, \beta, \kappa)$, se a sua fda é dada por

$$F(\mathbf{t}) = P(T_1 \leq t_1, \dots, T_m \leq t_m), \quad (3.1)$$

para $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)^\top \in \mathbb{R}_+^m$, que é obtida a partir da função de sobrevivência conjunta de $\mathbf{T}$, utilizando a expressão

$$S(\mathbf{t}) = 1 - \sum_{j=1}^m F(t_j) + \sum_{i < j} F(t_i, t_j) + \dots + (-1)^m F(\mathbf{t}), \quad (3.2)$$

em que $S(\mathbf{t})$ é dada conforme na Expressão (1.9) do Capítulo 1 com função de sobrevivência baseline tomada como sendo a função de sobrevivência da distribuição BS univariada de parâmetros α e β e $F(\cdot)$ é a fda da distribuição BSF.

Teorema 6. A fdp do vetor aleatório $\mathbf{T}$ é dada por

$$f(\mathbf{t}) = (-1)^{-m} \mathcal{L}^{(m)} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=1}^m \lambda_j(t_j), \quad (3.3)$$

em que $\mathcal{L}^{(m)}(s)$ indica a derivada de ordem m de $\mathcal{L}(s)$ com relação a s e $\lambda_j(\cdot)$ e $S_j(\cdot)$ denotam as respectivas funções de risco e de sobrevivência de uma variável aleatória com distribuição BS univariada de parâmetros α e β .

Prova: Para obter a fdp de $\mathbf{T}$, derivamos o lado esquerdo da Expressão (3.6) com relação a $t_1, \dots, t_m$. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial t_1 \dots \partial t_m} S(\mathbf{t}) &= \frac{\partial^m}{\partial t_1 \dots \partial t_m} \mathcal{L} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \\ &= \mathcal{L}^{(m)} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=1}^m \lambda_j(t_j). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^m}{\partial t_1 \dots \partial t_m} \left[1 - \sum_{j=1}^m F(t_j) + \sum_{i < j} F(t_i, t_j) + \dots + (-1)^m F(\mathbf{t}) \right] = (-1)^m f(\mathbf{t}).$$

Como resultado, temos

$$\mathcal{L}^{(m)} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=1}^m \lambda_j(t_j) = (-1)^m f(\mathbf{t}),$$

ou seja,

$$f(\mathbf{t}) = (-1)^{-m} \mathcal{L}^{(m)} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=1}^m \lambda_j(t_j). \quad (3.4)$$

Teorema 7. Seja $\mathbf{T} \sim BSF_m(\alpha, \beta, \kappa)$. Então:

(i) As distribuições marginais seguem uma distribuição $BSF(\alpha, \beta, \kappa)$.

(ii) Particionando $\mathbf{T}$ como

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix},$$

em que $\mathbf{T}_1 = (T_1, \dots, T_q)^\top$ e $\mathbf{T}_2 = (T_{q+1}, \dots, T_m)^\top$, para $0 < q < m$, tem-se que a fdp de $\mathbf{T}_1$ dado $\mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2$ é dada por

$$f(\mathbf{t}_1 | \mathbf{t}_2) = \frac{(-1)^{-q} \mathcal{L}^{(m)} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=1}^q \lambda_j(t_j)}{\mathcal{L}^{(m-q)} \left\{ - \sum_{j=q+1}^m \log(S_j(t_j)) \right\}}.$$

Prova:

(i) Segue diretamente da definição da distribuição.

(ii) A fdp de T_1 dado $T_2 = t_2$ é

$$\begin{aligned}
 f(t_1 | t_2) &= \frac{f(t_1, t_2)}{f(t_2)} \\
 &= \frac{(-1)^{-m} \mathcal{L}^{(m)} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=1}^m \lambda_j(t_j)}{(-1)^{-(m-q)} \mathcal{L}^{(m-q)} \left\{ - \sum_{j=q+1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=q+1}^m \lambda_j(t_j)} \\
 &= \frac{(-1)^{-q} \mathcal{L}^{(m)} \left\{ - \sum_{j=1}^m \log(S_j(t_j)) \right\} \prod_{j=1}^q \lambda_j(t_j)}{\mathcal{L}^{(m-q)} \left\{ - \sum_{j=q+1}^m \log(S_j(t_j)) \right\}}.
 \end{aligned}$$

Teorema 8. Seja $\mathbf{T} \sim BSF_m(\alpha, \beta, \kappa)$. Então:

(i) $(kT_1, \dots, kT_m) \sim BSF_m(\alpha, k\beta, \kappa)$, para $k > 0$ e $j = 1, \dots, m$.

(ii) $(T_1^{-1}, \dots, T_m^{-1}) \sim BSF_m(\alpha, \beta^{-1}, \kappa)$, para $j = 1, \dots, m$.

Prova: A prova deste resultado segue imediatamente da Equação (3.3) usando transformações adequadas.

Definição 10. Seja $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_m)^\top \sim BSF_m(\alpha, \beta, \kappa)$. Dizemos que o vetor aleatório, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^\top = (\log(T_1), \log(T_2), \dots, \log(T_m))^\top$, tem distribuição SNF m -variada com parâmetros $\alpha > 0$, $\mu = \log(\beta) \in \mathbb{R}$, 2 e κ , e denotamos $\mathbf{Y} \sim SNF_m(\alpha, \mu, 2, \kappa)$, se a sua fda é dada por

$$F(\mathbf{y}) = P(Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m), \quad (3.5)$$

para $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$, que é obtida a partir da função de sobrevivência conjunta de $\mathbf{Y}$, utilizando a expressão

$$S(\mathbf{y}) = 1 - \sum_{j=1}^m F(t_j) + \sum_{i < j} F(y_i, y_j) + \dots + (-1)^m F(\mathbf{y}), \quad (3.6)$$

em que $S(\mathbf{y})$ é dada conforme na Expressão (1.9) e do Capítulo 1 com função de sobrevivência baseline tomada como sendo a função de sobrevivência da distribuição SN univariada de parâmetros α , μ e 2 e $F(\cdot)$ é a fda da distribuição SNF. Assim, a fdp de $\mathbf{Y}$ é dada por (3.3), sendo $S_j(y_j)$ e $\lambda_j(y_j)$ as funções de risco de uma variável aleatória com distribuição SN univariada de parâmetros α , μ e 2, respectivamente.

3.3 MODELAGEM

O Modelo

Seja $\mathbf{T} = (T_{i1}, \dots, T_{im})^\top \sim \text{BSF}_m(\alpha, \exp(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}), \kappa)$. T_{ij} representa o tempo de sobrevivência referente ao i -ésimo sujeito ($i = 1, \dots, n$) e ao j -ésimo grupo ($j = 1, \dots, m$). Segue da primeira parte do Teorema 7, que $T_{ij} \sim \text{BSF}(\alpha, \exp(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}), \kappa)$, em que $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^0, \dots, x_{ij}^k)^\top$ é um vetor de variáveis explicativas fixas e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ denota o vetor de coeficientes de regressão. Consideramos o modelo de regressão log-linear

$$Y_{ij} = \log(T_{ij}) = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + W_{ij}, \quad (3.7)$$

em que $W_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$. Vamos supor independência entre os sujeitos e dependência entre os grupos. Assim como mencionamos no Capítulo 2, a associação entre os grupos é medida pelo tau de Kendall. A partir deste capítulo utilizaremos distribuição de fragilidade gama.

Estimação

Seja $(y_{1j}, \delta_{1j}), \dots, (y_{nj}, \delta_{nj})$ uma amostra observada de n observações independentes, em que y_{ij} é o logaritmo da medida da resposta j na n -upla i e δ_{ij} é a variável indicadora de falha, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Então, o logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left[\log(f(w_{ij})) - \frac{\kappa+1}{\kappa} \log(S(w_{ij})) \right] - \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right. \\ & \times \log \left(1 + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(S(w_{ij})) \right) + \log \left[\Gamma \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right] - \log(\Gamma(\kappa)) \\ & \left. - \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \log(\kappa) \right\}, \end{aligned}$$

em que $w_{ij} = y_{ij} - (\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \alpha, \kappa)^\top$, $f(w_{ij}) = -\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\} \xi_{1j} K(\xi_{2j})$ e $S(w_{ij}) = \mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}$, com $K(\xi_{2j}) = \phi(\xi_{2j})/[2(1 - \Phi(\xi_{2j}))]$, para $\xi_{1j} = (2/\alpha) \times \cosh(w_{ij}/2)$ e $\xi_{2j} = (2/\alpha) \sinh(w_{ij}/2)$.

As funções escores são dadas por $\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = (U_{\beta_0}, \dots, U_{\beta_k})^\top$, $U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{b}}))$ e $U_{\kappa}(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{c}}))$, em que $U_{\beta_s} = U_{\beta_s}(\boldsymbol{\theta}_s) = \text{tr}(\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{a}}))$, $\boldsymbol{\theta}_s = (\beta_s, \kappa, \alpha)^\top$ ($s = 0, 1, \dots, k$), $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{a}}) =$

$\text{diag}\{\tilde{a}_1(\boldsymbol{\theta}_s), \dots, \tilde{a}_n(\boldsymbol{\theta}_s)\}$, $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{b}}) = \text{diag}\{\tilde{b}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \tilde{b}_n(\boldsymbol{\theta})\}$ e $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{c}}) = \text{diag}\{\tilde{c}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \tilde{c}_n(\boldsymbol{\theta})\}$, sendo que

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) = & \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} x_{ij}^s \left[\left[-\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} + \frac{\kappa+1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \right] \right. \right. \\ & \times \left. \left. \xi_{1j} K(\xi_{2j}) + \frac{\frac{1}{2} [\xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - \xi_{2j}]}{\xi_{1j}} \right] \right\} + \frac{\sum_{j=1}^m K(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \\ & \times \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} \left[-\frac{2\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\alpha \mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \xi_{2j} K(\xi_{2j}) + \frac{\xi_{2j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1}{\alpha} \right. \right. \\ & + \frac{2(\kappa+1)}{\kappa} \left. \left. \left[\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\} K(\xi_{2j}) \xi_{2j}}{\alpha \mathcal{L}\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \right] \right] \right\} + \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \frac{2}{\alpha \kappa} \\ & \times \frac{\sum_{j=1}^m K(\xi_{2j}) \xi_{2j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i(\boldsymbol{\theta}) = & -\log \left[1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right] - \frac{\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \\ & \times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) + \psi \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) - \psi(\kappa) - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que $\psi(\cdot) = \Gamma'(\cdot)/\Gamma(\cdot)$ e $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{im})^\top$, para $i = 1, \dots, n$.

As estimativas de máxima verossimilhança podem ser obtidas através da solução do sistema de equações $\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$, $U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = 0$ e $U_\kappa(\boldsymbol{\theta}) = 0$. No entanto, este sistema não possui uma solução de forma fechada. Portanto, usamos o método iterativo Nelder-Mead implementado no pacote maxLik do software R para resolver este sistema. Como valores iniciais para o processo iterativo consideramos as estimativas de mínimos quadrados para β e para κ obtemos da estimativa proposta por (SAVU; TREDE, 2010), dada na Equação (1.14). Finalmente, para α nos baseamos na estimativa sob o caso não-censurado apresentado em (GALEA et al., 2004) e obtivemos a expressão

$$\tilde{\alpha} = \left\{ \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\sinh^2 \left(\frac{y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}}{2} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos utilizar a distribuição assintótica do estimador de verossimilhança, $\hat{\theta}$, para realizar inferência assintótica para o vetor de parâmetros θ . Sendo assim, podemos contruir intervalos de confiança e testes de hipóteses baseados em inferência assintótica para o vetor de parâmetros θ . Sob condições usuais, ver (COX; HINKLEY, 1979)), temos

$$\hat{\theta} \stackrel{a}{\sim} N_{k+3}(\theta, \Sigma_{\theta}), \quad (3.11)$$

em que $\stackrel{a}{\sim}$ indica convergência assintótica e Σ_{θ} denota a matriz de variância e covariância assintótica para $\hat{\theta}$, que pode ser aproximada pela inversa da matriz de informação observada avaliada em $\hat{\theta}$, tal que $I(\theta) = -\ddot{L}_{\theta\theta}$, em que $\ddot{L}_{\theta\theta}$ é a matriz hessiana, dada por

$$\ddot{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^{\top}} = \begin{bmatrix} \ddot{L}_{\beta\beta} & \ddot{L}_{\beta\alpha} & \ddot{L}_{\beta\kappa} \\ \ddot{L}_{\kappa\beta} & \ddot{L}_{\kappa\alpha} & \ddot{L}_{\kappa\kappa} \\ \ddot{L}_{\alpha\beta} & \ddot{L}_{\alpha\alpha} & \ddot{L}_{\alpha\kappa} \end{bmatrix},$$

em que

$$\ddot{L}_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} \ddot{L}_{\beta_0\beta_0} & \ddot{L}_{\beta_0\beta_1} & \dots & \ddot{L}_{\beta_0\beta_k} \\ \ddot{L}_{\beta_1\beta_0} & \ddot{L}_{\beta_1\beta_1} & \dots & \ddot{L}_{\beta_1\beta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{L}_{\beta_0\beta_k} & \ddot{L}_{\beta_1\beta_k} & \dots & \ddot{L}_{\beta_k\beta_k} \end{bmatrix},$$

com $\ddot{L}_{\beta_l\beta_s} = \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i$, $\ddot{L}_{\beta_s\kappa} = \ddot{L}_{\kappa\beta_s} = \sum_{i=1}^n \tilde{e}_i$, $\ddot{L}_{\alpha\beta_s} = \ddot{L}_{\beta_s\alpha} = \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i$, $\ddot{L}_{\kappa\kappa} = \sum_{i=1}^n \tilde{g}_i$, $\ddot{L}_{\alpha\kappa} = \ddot{L}_{\kappa\alpha} = \sum_{i=1}^n \tilde{h}_i$, e $\ddot{L}_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i$, sendo que $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $l = 0, \dots, k$, $s = 0, \dots, k$ e as quantidades $\tilde{d}_i$, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$, $\tilde{g}_i$, $\tilde{h}_i$ e $\tilde{p}_i$ são definidas no Apêndice B.

ESTUDO NUMÉRICO

Nesta seção, realizamos um estudo de simulação para avaliar o desempenho dos estimadores dos parâmetros do modelo proposto. Inicialmente, apresentamos o algoritmo de geração de uma amostra multivariada.

O Algoritmo

Para gerar uma amostra m -variada, $(Y_{i1}, \dots, Y_{im})^\top$, em que $Y_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}, 2, \kappa)$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, tomamos como base o algoritmo apresentado em Embrechts et al. (2001).

Com isso, temos o seguinte algoritmo:

Algoritmo: Geração de uma amostra m -variada associada $(Y_{i1}, \dots, Y_{im})^\top$

- [1.] Gere um valor q_1 a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ e calcule $u_1 = q_1$;
 - [2.] Gere um valor q_2 a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ e calcule $u_2 = C^{-1}(q_2|u_1)$;
 - $\vdots$
 - [3.] Gere um valor q_m a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ e calcule $u_m = C^{-1}(q_m|u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$;
 - [4.] Considere $w_{ij} = S_j^{-1}(u_j)$, $j = 1, \dots, m$, em que S_j^{-1} denota a inversa da função de sobrevivência da distribuição $\text{SN}(\alpha, 0, 2)$.
 - [5.] Gere $\mathbf{x}_{ij}^\top$ a partir de uma distribuição normal padrão.
 - [6.] Obtenha y_{ij} , tal que $y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + w_{ij}$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.
-

A função $C^{-1}(u_m|u_1, \dots, u_{m-1})$ dada no algoritmo é a inversa de $C(u_m|u_1, \dots, u_{m-1})$, dada por

$$C(u_m|u_1, \dots, u_{m-1}) = \frac{\frac{\partial^{m-1} C(u_1, \dots, u_m)}{\partial u_1 \dots \partial u_{m-1}}}{\frac{\partial^{m-1} C(u_1, \dots, u_{m-1})}{\partial u_1 \dots \partial u_{m-1}}}, \quad (3.12)$$

em que $U_1, \dots, U_m$ são variáveis aleatórias com função de distribuição conjunta C , sendo $C(u_1, \dots, u_m) = \mathcal{L}[\sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(u_j)]$, em que $\mathcal{L}(\cdot)$ e $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ são a transformada de Laplace e a inversa da transformada de Laplace para a distribuição de fragilidade gama.

O modelo que utilizamos na avaliação numérica é

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + W_{ij},$$

em que $W_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$ e $x_{ij} \sim \text{U}(0, 1)$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2, 3$.

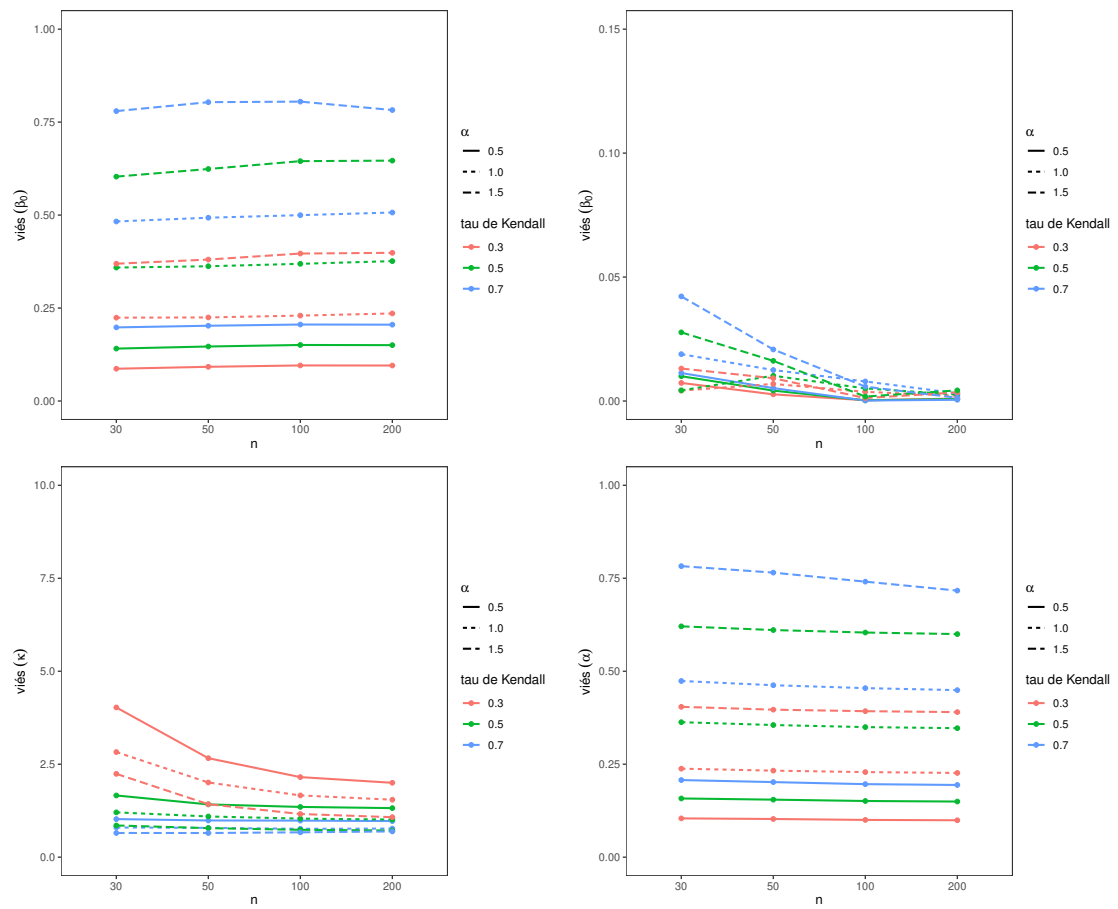
Os verdadeiros valores considerados para os parâmetros são $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = -2$ e $\alpha = 0.5$, 1.0 e 1.5, e tamanhos amostrais $n = 30, 50, 100$ e 200. Os verdadeiros valores atribuídos ao parâmetro de fragilidade κ são obtidos através dos valores atribuídos ao tau de Kendall, que neste caso, consideramos 0.3, 0.5 e 0.7. Utilizamos 5000 réplicas de Monte Carlo, para cada

valor atribuído ao tau de Kendall e calculamos a média, o viés absoluto e o erro quadrático médio (EQM) para cada estimativa.

Geramos amostras não-censuradas e com presença de censura à direita, aleatória e não informativa. Para introduzirmos a censura, simulamos os valores através de uma distribuição log-normal com variância 1 e com médias 5 e 4 para obtermos 10% e 20% de censura, respectivamente. A censura foi introduzida em $(Y_{i1}, Y_{i2}, Y_{i3})^T$ da seguinte forma: primeiramente censuramos apenas uma das três variáveis, depois censuramos duas das três variáveis e, por fim, censuramos as três variáveis.

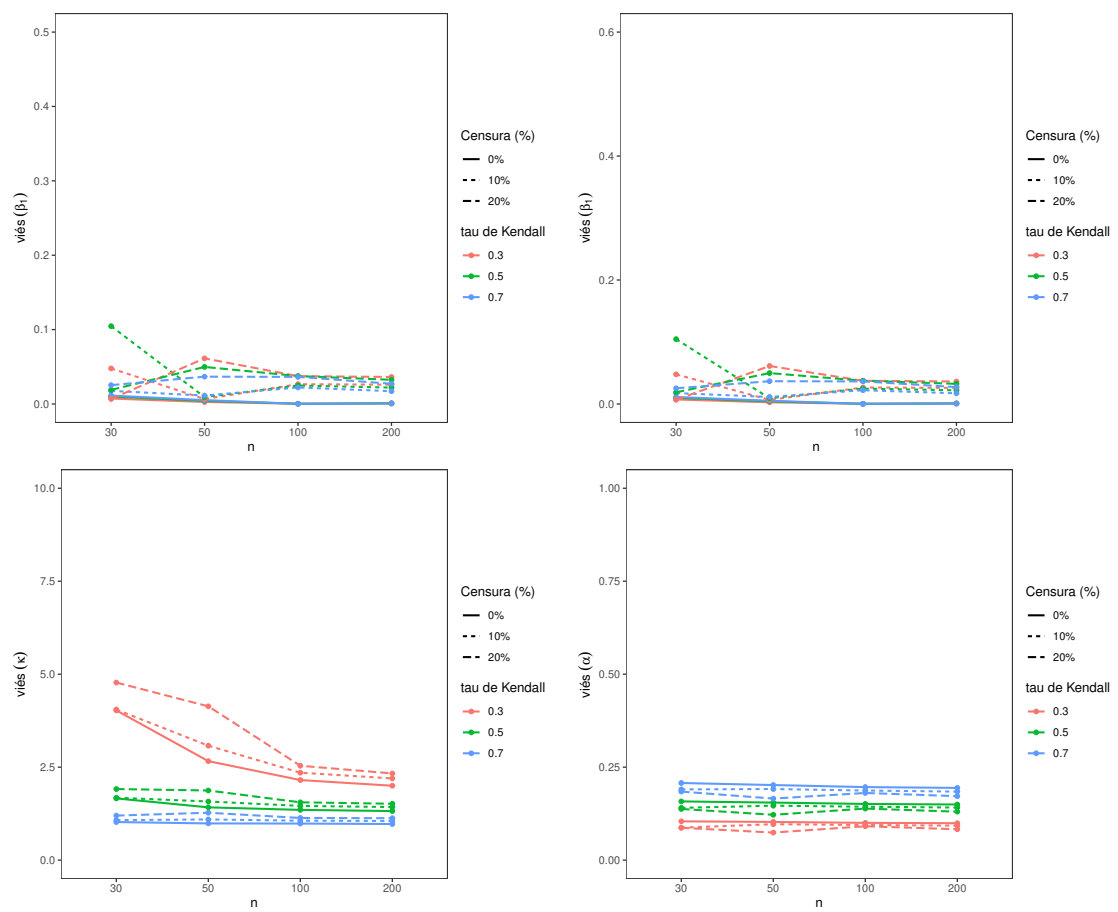
Nas Figuras 9-14 apresentamos os resultados deste estudo de simulação. Podemos observar através destas figuras que, em geral, o viés absoluto e o EQM das estimativas diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta, tanto para o caso não-censurado quanto para o caso censurado. Percebemos também que, conforme observado em (ROMEIRO, 2014), para todos os cenários considerados as estimativas de α subestimam os verdadeiros valores desse parâmetro e se aproximam mais rapidamente dos verdadeiros valores quando estes são pequenos, à medida que o tamanho da amostra cresce. Além disso, vemos que para tamanhos de amostras fixos, o viés e o EQM das estimativas aumentam quando aumentamos o percentual de censura e quando aumentamos a quantidade de variáveis censuradas. Por fim, notamos que para valores fixos do tamanho da amostra e para um percentual fixo de censura, o viés e o EQM das estimativas de β_0 , β_1 e α aumentam à medida que aumentamos o valor do tau de Kendall, porém o viés e o EQM das estimativas de κ decrescem.

Figura 9 – Viéses - variando o valor de α e o valor do tau de Kendall (sem censura)



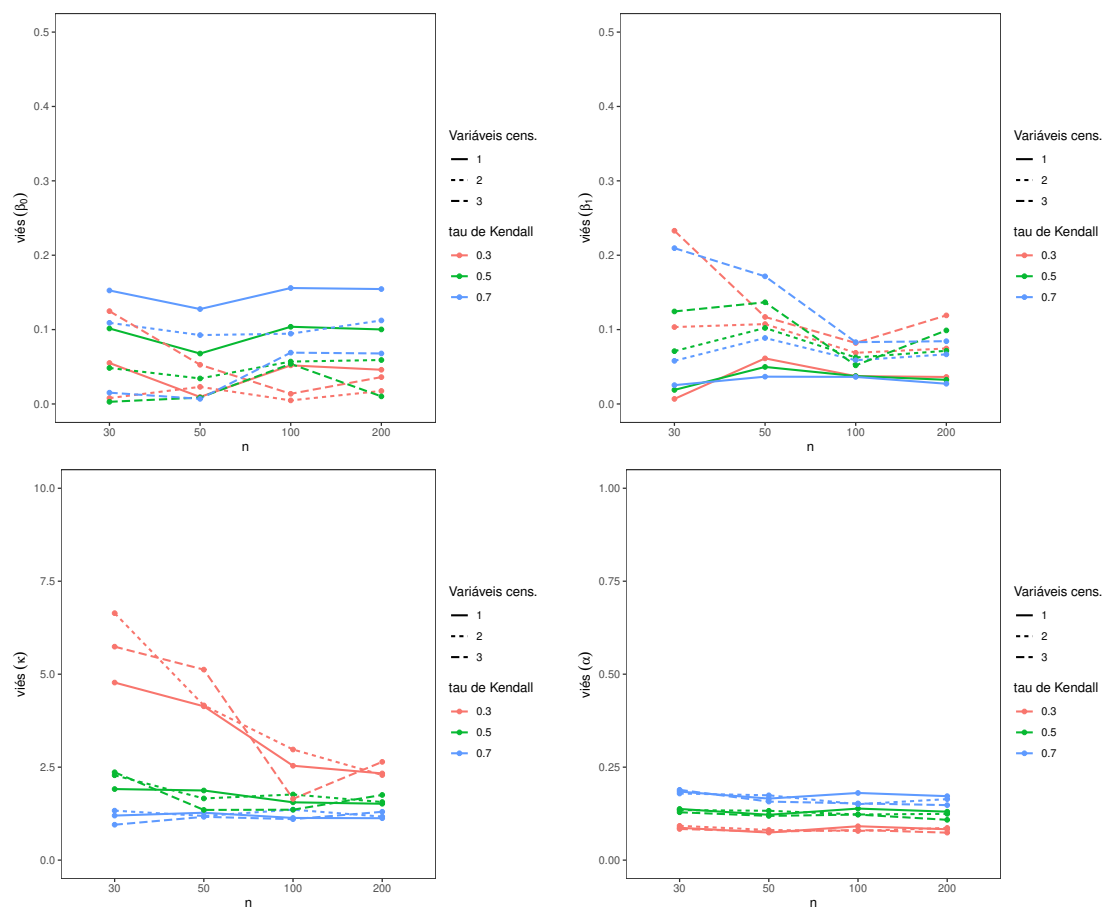
Fonte: Autoria própria.

Figura 10 – Viéses - variando o percentual de censura e o valor do tau de Kendall (censura em uma das três variáveis e $\alpha = 0.5$)



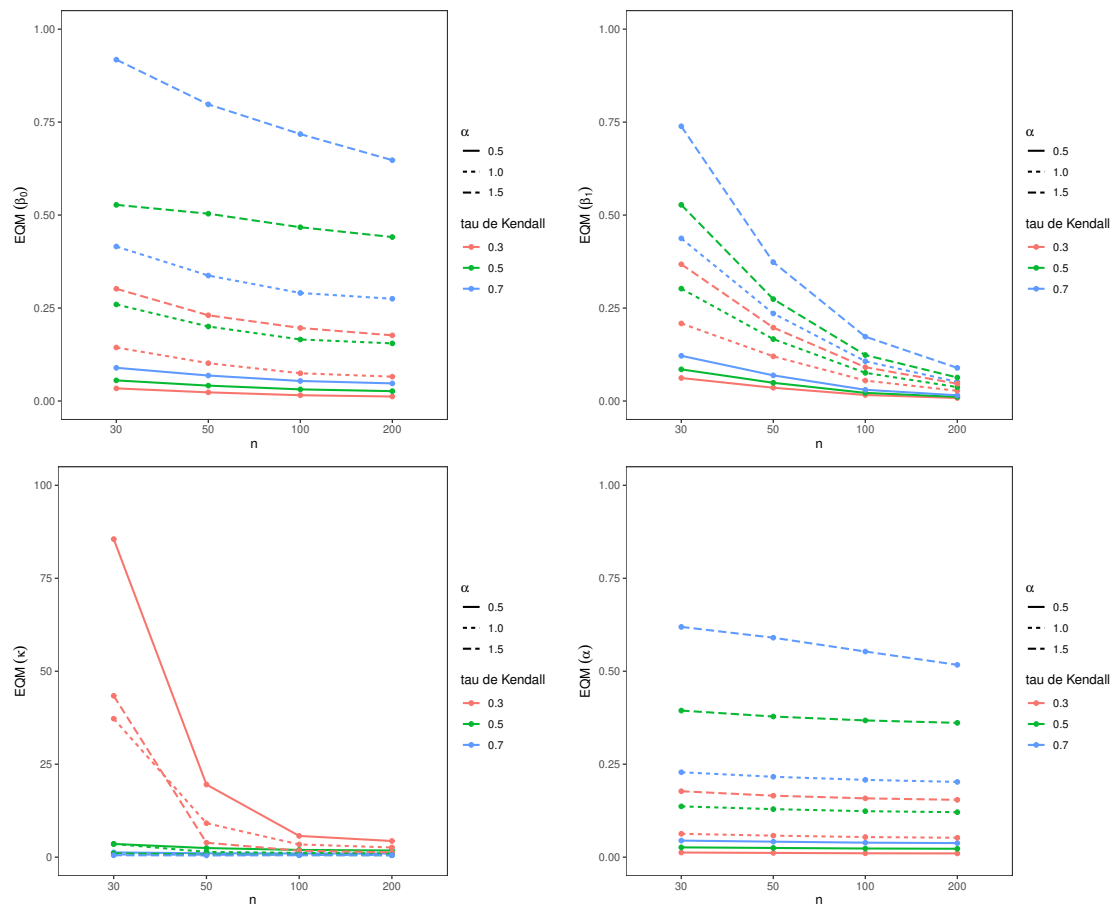
Fonte: Autoria própria.

Figura 11 – Viéses - variando a quantidade de variáveis censuradas e o valor do tau de Kendall (20% de censura e $\alpha = 0.5$)



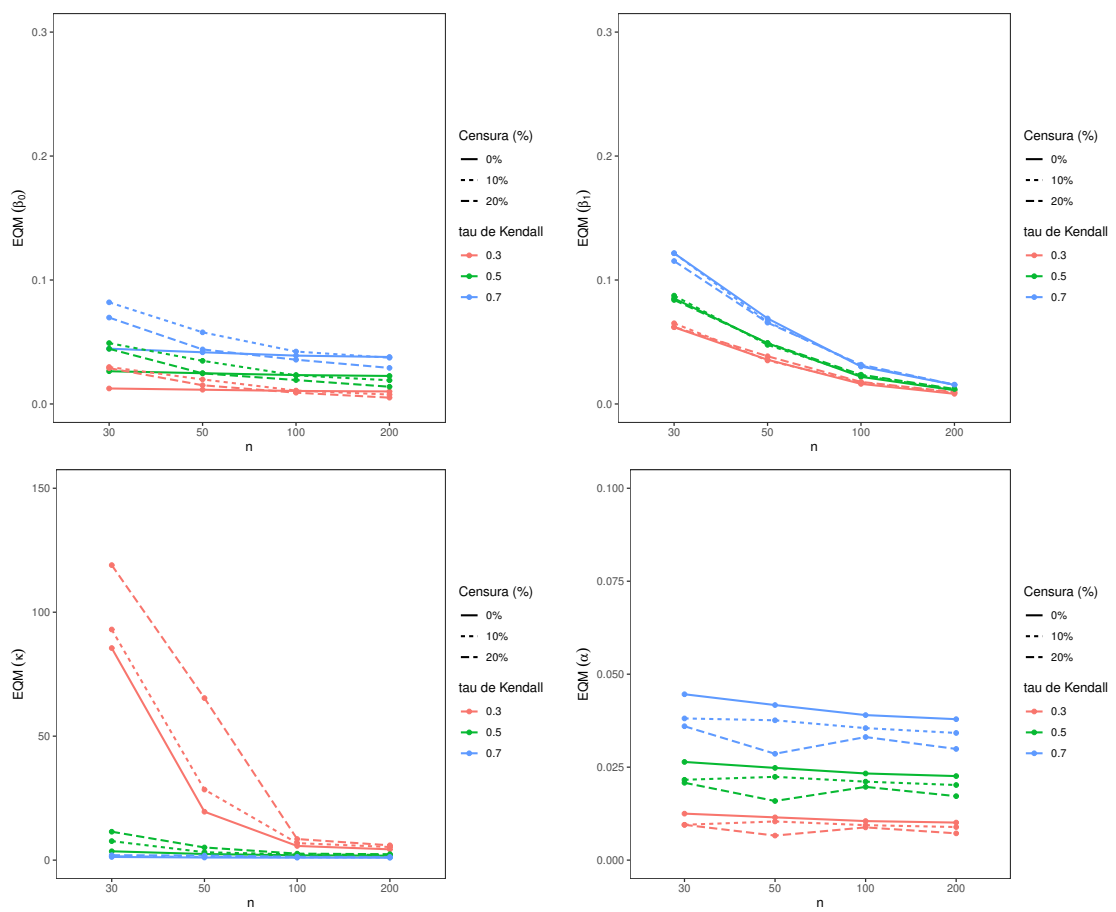
Fonte: Autoria própria.

Figura 12 – EQM - variando o valor de α e o valor do tau de Kendall (sem censura)



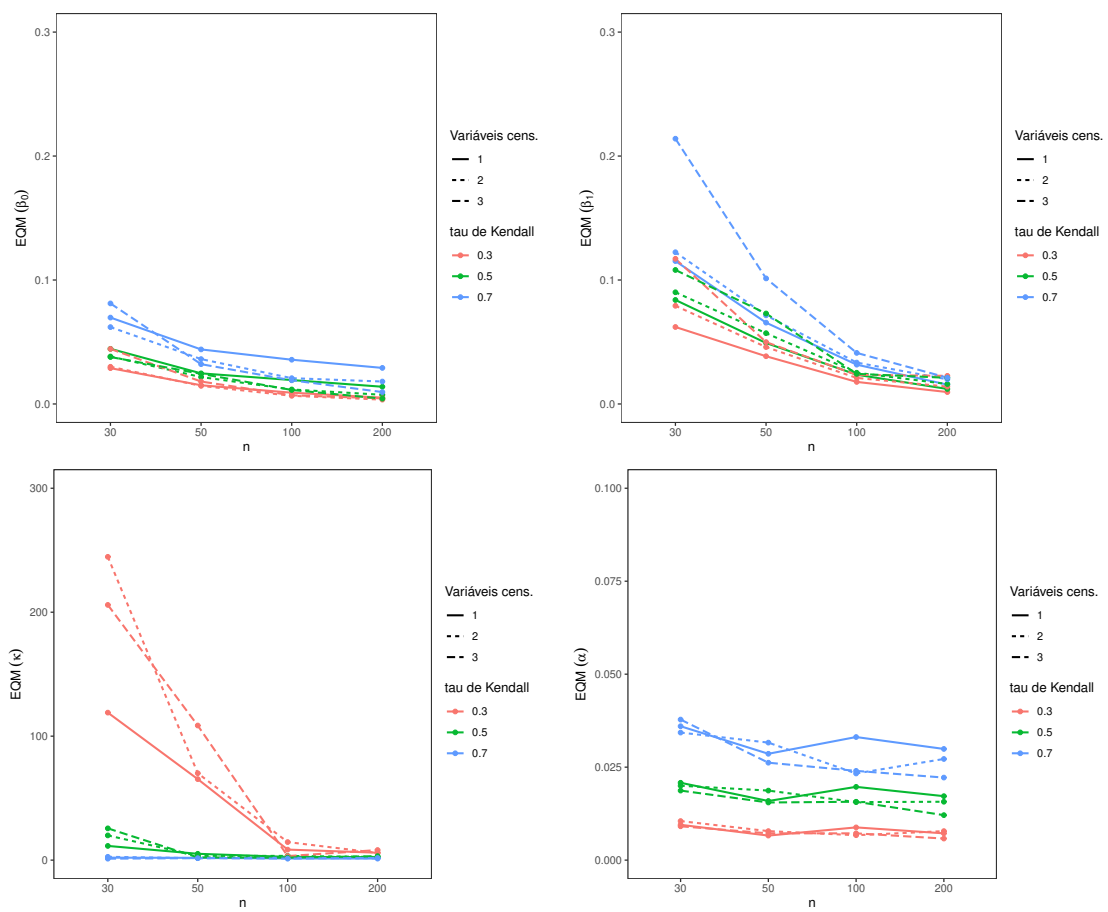
Fonte: Autoria própria.

Figura 13 – EQM - variando o percentual de censura e o valor do tau de Kendall (censura em uma das três variáveis e $\alpha = 0.5$)



Fonte: Autoria própria.

Figura 14 – EQM - variando a quantidade de variáveis censuradas e o valor do tau de Kendall (20% de censura e $\alpha = 0.5$)



Fonte: Autoria própria.

3.4 ANÁLISE RESIDUAL

Com o intuito de verificarmos a qualidade do ajuste do modelo de tempo de vida acelerado log-BS multivariado (com estrutura de dependência) definimos os resíduos quantílicos multivariados e estendemos os V -resíduos e os K -resíduos definidos por Choi e Matthews (2015) para o caso multivariado.

Resíduos Quantílicos Multivariados

Os resíduos quantílicos multivariados foram definidos de modo similar ao resíduo quantílico proposto em Barros e Paula (2019) para o caso multivariado. Assim, precisamos encontrar inicialmente a função de distribuição acumulada conjunta de $\mathbf{W}_i = (W_{i1}, \dots, W_{im})^\top$, a mesma pode ser obtida conforme a Equação (3.5) da Definição 10. Então, os resíduos quantílicos para m ($m \geq 2$) variáveis respostas da i -ésima unidade experimental são dados por

$$\mathbf{r}_{q_i} = \Phi^{-1} \{F(w_{i1}, \dots, w_{im})\},$$

em que $F(\cdot)$ é a fda da distribuição BSF m -variada. Para n suficientemente grande o resíduo $\mathbf{r}_{q_i}$ segue uma distribuição normal padrão. Assim, o gráfico normal de probabilidades de $\mathbf{r}_{q_i}$ é de grande utilidade para avaliarmos o ajuste do modelo proposto à determinado conjunto de dados.

V -resíduos e K -resíduos multivariados

Definimos os V -resíduos e os K -resíduos multivariados a partir de uma extensão natural dos V -resíduos e dos K -resíduos definidos por Choi e Matthews (2015) e apresentados por Oliveira et al. (2020) para o modelo BS bivariado. Os V -resíduos multivariados ficam dados por:

$$\hat{V}_i = \mathcal{L} \left\{ \sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(\hat{U}_{ij}) \right\}, \quad (3.13)$$

em que $\mathcal{L}^{-1}$ denota a inversa da transformada de Laplace da distribuição de fragilidade utilizada e $\hat{U}_{ij} = \mathcal{L}\{-\log[S_j(\hat{W}_{ij})]\}$, com $S_j(\hat{W}_{ij}) = 1 - \Phi[(2/\alpha) \sinh(\hat{W}_{ij}/2)]$ e $\hat{W}_{ij} = y_{ij} - \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}$, para $i = 1, \dots, n$.

Podemos observar que $\hat{v}_i = C(\hat{u}_{i1}, \dots, \hat{u}_{in})$ é uma cópula arquimediana multivariada com gerador $\varphi = \mathcal{L}^{-1}$. Dessa forma, utilizando a Proposição 3 demonstrada em Genest et al.

(2011), concluímos que os V -resíduos multivariados tem distribuição dada pela seguinte relação recursiva:

$$G(v_i) = P(V_i < v_i) = \frac{(-1)^{d-1}}{(d-1)!} \sum_{l=0}^{d-1} S_d^{l+1} \zeta_l(v_i),$$

em que $d \geq 2$ (indica o número de grupos), $\zeta_0(v_i) = v_i$ e $\zeta_l(v_i) = \lambda(v_i) \zeta'_{l-1}(v_i)$, sendo $\lambda(v_i) = \varphi(v_i)/\varphi'(v_i)$. Além disso, considerando $p \geq 1$, $q \geq 1$ e $p \geq q$, tem-se

$$S_p^p = 1, \quad S_p^1 = (-1)^{p-1}(p-1)! \text{ e } S_{p+1}^q = S_p^{q-1} - p \cdot S_p^q.$$

Esta distribuição depende do parâmetro de fragilidade κ . Assim, como Choi e Matthews (2015) procederam para chegar a um resíduo que tivesse a distribuição totalmente especificada, ou seja, que não dependesse de parâmetros desconhecidos, definimos os K -resíduos multivariados a partir de uma transformação integral de probabilidade dos V -resíduos multivariados, isto é, segue do Teorema da Transformação Integral de Probabilidade que os K -resíduos multivariados têm distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

De modo análogo ao que foi realizado em Choi e Matthews (2015) e Oliveira et al. (2020) para o caso bivariado, adaptamos os V -resíduos e os K -resíduos multivariados para o caso de termos presença de censura à direita. Assim, temos os V -resíduos e os K -resíduos multivariados adaptados:

$$\widehat{V}_i^{\text{adap}} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(\widehat{U}_{ij}^{\text{adap}}) \right\} \quad (3.14)$$

e

$$\widehat{K}_i^{\text{adap}} = G(\widehat{V}_i^{\text{adap}}), \quad (3.15)$$

em que $\widehat{U}_{ij}^{\text{adap}} = \widehat{U}_{ij} + 0.5(\delta_{ij} - 1)\widehat{U}_{ij}$, sendo δ_{ij} a variável indicadora de falha, com $j = 1, \dots, m$.

Estudo de Simulação

Nesta seção apresentamos um estudo de simulação para avaliar a distribuição empírica dos resíduos quantílicos multivariados, dos K -resíduos e dos K -resíduos adaptados. Para isso, utilizamos as mesmas configurações utilizadas no estudo de simulação da Seção 3.3. Uma vez que os dados foram gerados e ajustados, conforme o algoritmo dado na Seção 3.3, obtivemos os resíduos supracitados.

Nas Tabelas 12-19, são apresentadas algumas medidas resumo dos resíduos propostos, à saber, média, desvio padrão (DP), coeficientes de assimetria (CA) e curtose (CC) e a

estatística de bondade de ajuste de Kolmogorov-Sminov (KS) com o intuito de avaliar as distribuições destes resíduos. Podemos notar, em todos os cenários, que os resíduos quantílicos multivariados possuem médias próximas de zero, desvios-padrão iguais a 1,0, coeficientes de assimetria próximos de zero e coeficientes de curtose próximos de 0,4. Ademais, para os resíduos quantílicos multivariados, a estatística KS não é significativa, o que corrobora com a afirmação de que tais resíduos têm distribuições normal padrão. Os K -resíduos e os K -resíduos adaptados possuem médias próximas de 0,5, desvios-padrão próximos de 0,3, coeficientes de assimetria próximos de zero e coeficientes de curtose próximos de $-1,4$. Em todos os cenários, a estatística KS não é significativa, o que confirma que os K -resíduos e os K -resíduos adaptados têm distribuições uniformes no intervalo $[0, 1]$.

Tabela 12 – Medidas resumo da distribuição empírica dos resíduos quantílicos multivariados

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	$-1,27 \times 10^{-19}$	$-4,83 \times 10^{-19}$	$1,33 \times 10^{-18}$	$-1,32 \times 10^{-18}$
	DP	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	CA	0,0417	0,0483	-0,0591	-0,0675
	CC	-0,5923	-0,5586	-0,3900	-0,3425
	Estatística	0,1082	0,0856	0,0616	0,0450
0,5	Média	$9,09 \times 10^{-19}$	$8,39 \times 10^{-19}$	$-2,36 \times 10^{-20}$	$1,99 \times 10^{-19}$
	DP	1,000	1,000	1,000	1,000
	CA	-0,2763	-0,3101	-0,3408	-0,3577
	CC	-0,7167	-0,6029	-0,5057	-0,4548
	Estatística	0,1165	0,0970	0,0773	0,0652
0,7	Média	$4,59 \times 10^{-19}$	$-2,11 \times 10^{-18}$	$3,32 \times 10^{-19}$	0,5052
	DP	1,000	1,000	1,000	1,000
	CA	-0,6432	-0,6965	-0,7401	0,2136
	CC	-0,4356	-0,2585	-0,1098	-1,3597
	Estatística	0,1454	0,1305	0,1156	0,0838

Fonte: Autoria própria.

Tabela 13 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - sem censura

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	0,5019	0,5021	0,5021	0,5021
	DP	0,3039	0,3015	0,3000	0,2991
	CA	0,0339	0,0413	0,0481	0,0521
	CC	-1,3735	-1,3284	-1,2981	-1,2810
	Estatística	0,1104	0,0878	0,0655	0,0504
0,5	Média	0,5039	0,5040	0,5039	0,5039
	DP	0,3094	0,3072	0,3057	0,3050
	CA	0,0926	0,1015	0,1086	0,1129
	CC	-1,4209	-1,3780	-1,3476	-1,3331
	Estatística	0,1168	0,0965	0,0768	0,0649
0,7	Média	0,5055	0,5054	0,5053	0,5052
	DP	0,3124	0,3100	0,3084	0,3076
	CA	0,1877	0,1991	0,2085	0,2136
	CC	-1,4482	-1,4055	-1,3737	-1,3597
	Estatística	0,1285	0,1100	0,0937	0,0838

Fonte: Autoria própria.

Tabela 14 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 10% de censura em uma das três variáveis

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	0,5025	0,5027	0,5015	0,5028
	DP	0,3016	0,2978	0,2981	0,2962
	CA	0,0361	0,0445	0,0612	0,0430
	CC	-1,3738	-1,3020	-1,2983	-1,2689
	Estatística	0,1086	0,0863	0,0647	0,0475
0,5	Média	0,5021	0,5024	0,5006	0,5026
	DP	0,3069	0,3036	0,3040	0,3018
	CA	0,1023	0,1156	0,1320	0,1123
	CC	-1,4182	-1,3505	-1,3449	-1,3172
	Estatística	0,1146	0,0931	0,0762	0,0593
0,7	Média	0,5011	0,5011	0,4989	0,5017
	DP	0,3097	0,3067	0,3068	0,3043
	CA	0,2023	0,2236	0,2390	0,2200
	CC	-1,4366	-1,3725	-1,3599	-1,3350
	Estatística	0,1268	0,1077	0,0937	0,0771

Fonte: Autoria própria.

Tabela 15 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 20% de censura em uma das três variáveis

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	0,5043	0,5037	0,5034	0,5046
	DP	0,2970	0,2945	0,2930	0,2919
	CA	0,0309	0,0430	0,0466	0,0358
	CC	-1,3376	-1,2877	-1,2508	-1,2406
	Estatística	0,1074	0,0853	0,0609	0,0448
0,5	Média	0,5022	0,5011	0,5008	0,5025
	DP	0,3023	0,3002	0,2986	0,2974
	CA	0,1052	0,1230	0,1282	0,1130
	CC	-1,3861	-1,3344	-1,2942	-1,2872
	Estatística	0,1115	0,0914	0,0693	0,0538
0,7	Média	0,4991	0,4973	0,4970	0,4994
	DP	0,3053	0,3034	0,3016	0,3000
	CA	0,2133	0,2374	0,2467	0,2290
	CC	-1,4062	-1,3499	-1,3038	-1,3013
	Estatística	0,1243	0,1071	0,0877	0,0723

Fonte: Autoria própria.

Tabela 16 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 10% de censura em duas das três variáveis

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	0,5052	0,5033	0,5045	0,5043
	DP	0,2963	0,2952	0,2921	0,2921
	CA	0,0222	0,0507	0,0502	0,0385
	CC	-1,3199	-1,2959	1,2391	-1,2393
	Estatística	0,1071	0,0847	0,0617	0,0447
0,5	Média	0,5036	0,5007	0,5022	0,5025
	DP	0,3016	0,3011	0,2982	0,2980
	CA	0,0997	0,1289	0,1363	0,1123
	CC	-1,3643	-1,3437	-1,2885	-1,2913
	Estatística	0,1106	0,0924	0,0703	0,0541
0,7	Média	0,4959	0,4987	0,4986	0,5003
	DP	0,3076	0,3024	0,3014	0,3007
	CA	0,2624	0,2433	0,2427	0,2457
	CC	-1,4072	-1,3203	-1,3045	-1,3046
	Estatística	0,1326	0,1049	0,0869	0,0760

Fonte: Autoria própria.

Tabela 17 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 20% de censura em duas das três variáveis

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	0,5109	0,5085	0,5085	0,5098
	DP	0,2877	0,2867	0,2838	0,2835
	CA	-0,0210	0,0025	0,0195	0,0123
	CC	-1,2583	-1,2381	-1,1803	-1,1833
	Estatística	0,1098	0,0853	0,0643	0,0490
0,5	Média	0,5047	0,5047	0,5037	0,5036
	DP	0,2944	0,2908	0,2890	0,2885
	CA	0,1201	0,0998	0,1147	0,1137
	CC	-1,3155	-1,2789	-1,2190	-1,2223
	Estatística	0,1089	0,0850	0,0637	0,0486
0,7	Média	0,4991	0,4993	0,4936	0,4983
	DP	0,2974	0,2932	0,2950	0,2921
	CA	0,2393	0,2239	0,2735	0,2400
	CC	-1,3289	-1,2782	-1,2476	-1,2419
	Estatística	0,1207	0,0961	0,0864	0,0672

Fonte: Autoria própria.

Tabela 18 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 10% de censura nas três variáveis

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	0,5065	0,5018	0,5028	0,5044
	DP	0,2936	0,2890	0,2903	0,2899
	CA	0,0116	0,0987	0,0783	0,0500
	CC	-1,3193	-1,2304	-1,2515	-1,2367
	Estatística	0,1064	0,0877	0,0612	0,0442
0,5	Média	0,5016	0,5031	0,5026	0,5033
	DP	0,2971	0,2881	0,2949	0,2926
	CA	0,1343	0,1492	0,1017	0,1396
	CC	-1,3106	-1,2292	-1,2936	-1,2611
	Estatística	0,1108	0,0903	0,0647	0,0533
0,7	Média	0,4999	0,5005	0,5008	0,5008
	DP	0,3026	0,2989	0,2958	0,2950
	CA	0,2611	0,2355	0,2414	0,2503
	CC	-1,3806	-1,3380	-1,3104	-1,2557
	Estatística	0,1274	0,1015	0,0834	0,0707

Fonte: Autoria própria.

Tabela 19 – Medidas resumo da distribuição empírica dos K -resíduos multivariados - 20% de censura nas três variáveis

τ	Medida	$n = 30$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,3	Média	0,5131	0,5145	0,5111	0,5137
	DP	0,2787	0,2761	0,2742	0,2747
	CA	0,0101	-0,0203	0,0297	0,0174
	CC	-1,2557	-1,1630	-1,1440	-1,1188
	Estatística	0,1118	0,0953	0,0735	0,0622
0,5	Média	0,5103	0,5032	0,5061	0,5100
	DP	0,2832	0,2807	0,2813	0,2786
	CA	0,0693	0,0978	0,1049	0,1103
	CC	-1,2351	-1,2358	-1,2282	-1,1279
	Estatística	0,1126	0,0865	0,0682	0,0595
0,7	Média	0,5099	0,4978	0,4986	0,5021
	DP	0,2827	0,2905	0,2826	0,2788
	CA	0,2192	0,2747	0,3129	0,2185
	CC	-1,2321	-1,2371	-1,1806	-1,1429
	Estatística	0,1198	0,1054	0,0914	0,0670

Fonte: Autoria própria.

3.5 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO

Conforme realizado na Seção 2.5 do Capítulo 2, realizamos nesta seção um estudo de influência local sob diferentes esquemas de perturbação para o modelo multivariado proposto. A seguir, encontraremos as componentes da matriz Δ mediante o esquema de perturbação considerado, tendo em vista o modelo definido em (3.7) e o logaritmo da função de verossimilhança dado em (3.8).

Curvaturas Normais

Perturbação ponderação de casos: Considere $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$ um vetor de perturbação. Assim, o logaritmo da função de verossimilhança perturbada é dado por

$$\ell(\theta|\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i(\theta), \quad (3.16)$$

com $\lambda_0 = (1, \dots, 1)^\top$ e

$$\begin{aligned} \ell_i(\theta) = & \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left[\log(f(w_{ij})) - \frac{\kappa+1}{\kappa} \log(S(w_{ij})) \right] - \log \left(1 + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(S(w_{ij})) \right) \\ & \times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) + \log \left[\Gamma \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right] - \log(\Gamma(\kappa)) - \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \log(\kappa), \end{aligned}$$

em que $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im})^\top$. Neste caso, derivando a Expressão (3.16) com relação a λ temos

$$\frac{\partial \ell(\theta|\lambda)}{\partial \lambda^\top} = (\ell_1(\theta), \dots, \ell_n(\theta)).$$

Com isso, derivamos esta última expressão com relação a θ e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta|\lambda)}{\partial \theta} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ell_1(\theta), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_n(\theta) \right) \\ &= (\Delta_1, \dots, \Delta_n), \end{aligned}$$

com $\Delta_i = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell_i(\theta)$. Assim, podemos escrever a matriz Δ como $\Delta = (\Delta_\beta^\top, \Delta_\alpha^\top, \Delta_\kappa^\top)^\top$, em que $\Delta_\beta = (\Delta_{\beta_1}, \dots, \Delta_{\beta_n})$, $\Delta_\alpha = (\Delta_{\alpha_1}, \dots, \Delta_{\alpha_n})$ e $\Delta_\kappa = (\Delta_{\kappa_1}, \dots, \Delta_{\kappa_n})$, sendo

$$\Delta_{\beta_i} = (\Delta_{\beta_{0i}}, \dots, \Delta_{\beta_{ki}}),$$

$$\Delta_{\alpha_i} = \tilde{b}_i(\theta)$$

e

$$\Delta_{\kappa_i} = \tilde{c}_i(\boldsymbol{\theta}),$$

com $\Delta_{\beta_{s_i}} = \tilde{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s)$ ($s = 0, \dots, k$), sendo $\tilde{a}_i(\cdot)$, $\tilde{b}_i(\cdot)$ e $\tilde{c}_i(\cdot)$ conforme definidas em (3.8), (3.9) e (3.10), respectivamente, e avaliadas em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Perturbação na Variável Resposta: Consideramos inicialmente uma perturbação conjunta na variável resposta, ou seja, perturbamos todas as coordenadas do vetor $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})^\top$ simultaneamente. Para realizar essa perturbação, consideramos $y_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) = y_{ij} + \lambda_i$, em que $y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + w_{ij}$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Assim, temos que $w_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) = w_{ij} + \lambda_i$. Dessa forma, o logaritmo da função de verossimilhança perturbada é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n l_i(\boldsymbol{\theta}),$$

em que

$$\begin{aligned} l_i(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left[\log(f(w_{ij}(\boldsymbol{\lambda}))) - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \log(S(w_{ij}(\boldsymbol{\lambda}))) \right] - \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \log(1 \\ & + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(S(w_{ij}(\boldsymbol{\lambda})))) + \log \left[\Gamma \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right] - \log(\Gamma(\kappa)) - \log(\kappa) \\ & \times \sum_{j=1}^m \delta_{ij}, \end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{\lambda}_0 = (0, \dots, 0)^\top$ é o vetor de não-perturbação. A matriz Δ pode ser escrita como $\Delta = (\Delta_{\boldsymbol{\beta}}^\top, \Delta_{\boldsymbol{\alpha}}^\top, \Delta_{\boldsymbol{\kappa}}^\top)^\top$, em que $\Delta_{\boldsymbol{\beta}} = (\Delta_{\boldsymbol{\beta}_1}, \dots, \Delta_{\boldsymbol{\beta}_n})$, $\Delta_{\boldsymbol{\alpha}} = (\Delta_{\alpha_1}, \dots, \Delta_{\alpha_n})$ e $\Delta_{\boldsymbol{\kappa}} = (\Delta_{\kappa_1}, \dots, \Delta_{\kappa_n})$, com

$$\Delta_{\boldsymbol{\beta}_i} = (\Delta_{\beta_{0i}}, \dots, \Delta_{\beta_{ki}}),$$

$$\Delta_{\alpha_i} = b_i^*(\boldsymbol{\theta})$$

e

$$\Delta_{\kappa_i} = c_i^*(\boldsymbol{\theta}),$$

com $\Delta_{\beta_{s_i}} = a_i^*(\boldsymbol{\theta}_s)$ ($s = 0, \dots, k$), sendo $a_i^*(\cdot)$, $b_i^*(\cdot)$ e $c_i^*(\cdot)$ avaliadas em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $\boldsymbol{\lambda}_0$ e definidas no Apêndice B.

Perturbação na Variável Explicativa: Consideramos agora uma perturbação em uma variável explicativa particular, digamos x_{ij}^l , da forma $x_{ij}^l(\boldsymbol{\lambda}) = x_{ij}^l + \lambda_i$, com $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$.

Assim, o vetor de não-perturbação é $\lambda_0 = (0, \dots, 0)^\top$ e $y_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}_{ij}^\top(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\beta} + w_{ij}(\boldsymbol{\lambda})$, em que $\mathbf{x}_{ij}^\top(\boldsymbol{\lambda}) = (x_{ij}^0, \dots, x_{ij}^l + \lambda_i, \dots, x_{ij}^k)$. Então, o logaritmo da função de verossimilhança perturbada é dado por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta}),$$

sendo

$$\begin{aligned} \ell_i(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left[\log(f(w_{ij}(\boldsymbol{\lambda}))) - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \log(S(w_{ij}(\boldsymbol{\lambda}))) \right] - \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \log(1 \\ & + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(S(w_{ij}(\boldsymbol{\lambda})))) + \log \left[\Gamma \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right] - \log(\Gamma(\kappa)) - \log(\kappa) \\ & \times \sum_{j=1}^m \delta_{ij}. \end{aligned}$$

A matriz Δ é dada por $\Delta = (\Delta_\beta^\top, \Delta_\alpha^\top, \Delta_\kappa^\top)^\top$, com $\Delta_\beta = (\Delta_{\beta_1}, \dots, \Delta_{\beta_n})$, $\Delta_\alpha = (\Delta_{\alpha_1}, \dots, \Delta_{\alpha_n})$ e $\Delta_\kappa = (\Delta_{\kappa_1}, \dots, \Delta_{\kappa_n})$, em que

$$\Delta_{\beta_i} = (\Delta_{\beta_{0i}}, \dots, \Delta_{\beta_{ki}}),$$

$$\Delta_{\alpha_i} = b_i^{**}(\boldsymbol{\theta})$$

e

$$\Delta_{\kappa_i} = c_i^{**}(\boldsymbol{\theta}),$$

sendo $\Delta_{\beta_{li}} = a_i^{**}(\boldsymbol{\theta}_l)$ ($l = 0, \dots, k$), sendo $a_i^{**}(\cdot)$, $b_i^{**}(\cdot)$ e $c_i^{**}(\cdot)$ avaliadas em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e λ_0 e definidas no Apêndice B.

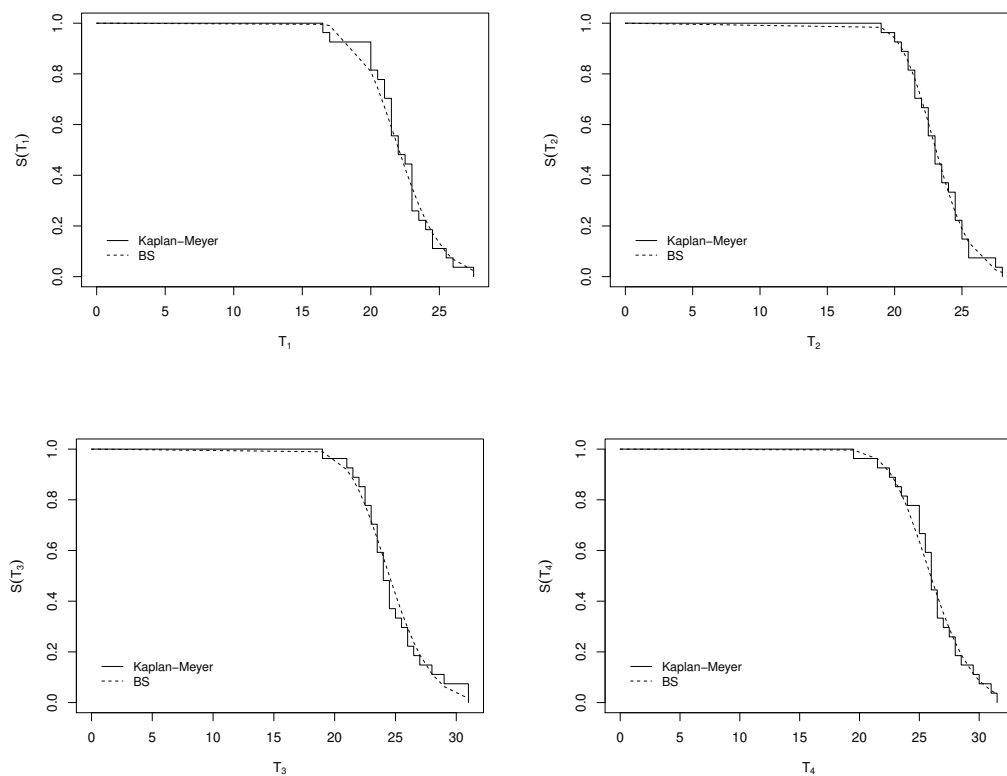
3.6 APLICAÇÃO 1

Nesta seção, consideramos o conjunto de dados apresentado em Potthoff e Roy (1964) e disponível no software R através do pacote *nlme* com o nome “Orthodont” e estudado por Pinheiro e Bates (2006). Esses dados relatam o acompanhamento realizado por pesquisadores da Escola de Odontologia da Universidade da Carolina do Norte sobre o crescimento de 27 crianças (16 meninos e 11 meninas) com idades entre 8 e 14 anos. E para fazer esse estudo, os pesquisadores mediram, a cada dois anos, a distância entre a hipófise e a fissura pteromaxilar por meio de radiografia do lado da cabeça. Desse modo, o objetivo deste estudo é estimar essa distância para 27 pacientes ao longo do tempo, utilizando um modelo de regressão BS multivariado, dado em (3.7), considerando as variáveis explicativas sexo e idade. Neste caso, não temos presença de censura.

3.6.1 Análise Descritiva dos Dados

A Figura 15 apresenta as curvas de sobrevivência marginal para os eventos considerados, estimadas por Kaplan-Meier e utilizando a distribuição BS. Podemos notar, pela Figura 15, que a função de sobrevivência de uma distribuição BS univariada pode ser utilizada como função de sobrevivência *baseline* para a modelagem dos dados considerados.

Figura 15 – Estimativas de sobrevivência marginal por Kaplan-Meier e pela distribuição BS



Fonte: Autoria própria.

3.6.2 Modelagem

Analizamos o conjunto de dados considerado sob o modelo de tempo de vida acelerado BS multivariado. Ou seja, consideramos o modelo:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij}^{(1)} + \beta_2 x_{ij}^{(2)} + w_{ij}, \quad i = 1, \dots, 27 \text{ e } j = 1, \dots, 4, \quad (3.17)$$

em que $x_{ij}^{(1)}$ são valores da covariável idade, $x_{ij}^{(2)}$ assume 1 se a criança é do sexo masculino e 2 se é do sexo feminino e $w_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$. Além disso, para j fixo, consideramos que

w_{ij} são variáveis aleatórias independentes.

A Tabela 20 mostra as estimativas de máxima verossimilhança, seus erros-padrão assintóticos e p -valores. Como podemos ver, todos os parâmetros são significativos aos níveis de significância usuais. Além disso, aplicamos o teste de fragilidade, definido na Seção 2.4.1, em que testamos a existência de associação entre os tempos para cada indivíduo em estudo. O valor da estatística de teste foi de 21,6161 e p -valor inferior a 0,01. Portanto, rejeitamos a hipótese de que não há associação entre os tempos para cada indivíduo.

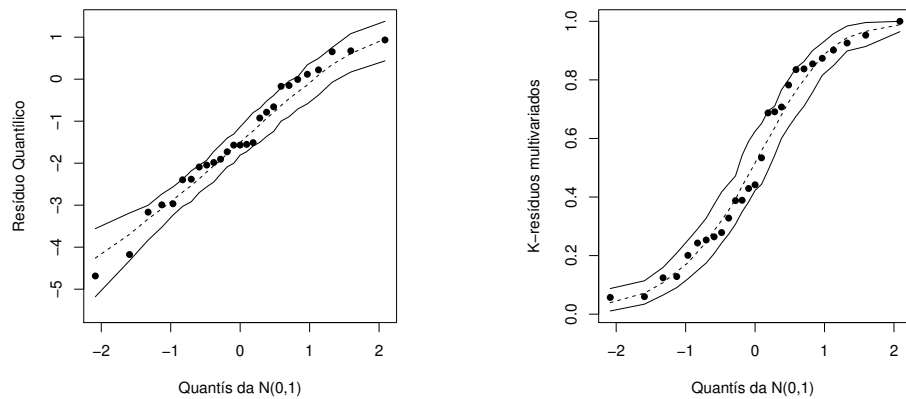
Tabela 20 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	p -valor
β_0	3,0011	0,0087	$< 0,01$
β_1	0,0273	0,0006	$< 0,01$
β_2	-0,1081	0,0042	$< 0,01$
κ	1,9560	0,1572	—
α	0,0701	0,0012	—

Fonte: Autoria própria.

Os respectivos gráficos normais de probabilidade dos resíduos quantílicos multivariados e dos K -resíduos multivariados com os envelopes gerados do modelo ajustado são apresentados na Figura 16. Observamos, na Figura 16, uma melhor acomodação e distribuição dos pontos dentro do envelope gerado no segundo caso, que corresponde aos K -resíduos multivariados. O teste KS mostrou que não há evidência de que os K -resíduos multivariados não têm distribuição uniforme padrão, com p -valor 0,6886.

Figura 16 – Gráficos normais de probabilidade para os resíduos quantílicos multivariados e K -resíduos multivariados



Fonte: Autoria própria.

Também realizamos uma análise de diagnóstico. Apresentamos nas Figuras 17-23 os gráficos de índices de $M_r(\theta)$, $M_r(\beta)$, $M_r(\kappa)$ e $M_r(\alpha)$, em que $M_r(\cdot) = C_r(\cdot) / \sum_{i=1}^n C_r(\cdot)$ considerando os esquemas de perturbação de ponderação de casos, perturbação conjunta na variável resposta e perturbação na variável explicativa. As observações destacadas como potencialmente influentes foram: #9, #13, #19, #20, #26 e #27. As observações #9 e #13 correspondem a crianças do sexo masculino em que a distância entre a hipófise e a fissura pteromaxilar, medidas ao longo do tempo, é significativamente inferior as demais, para as crianças do mesmo sexo quando as mesmas tinham 10 anos de idade, as observações #19 e #20 correspondem a crianças do sexo feminino em que a distância medida é significativamente alta quando as mesmas tinham 8, 10 e 14 anos de idade, a observação #26 corresponde a uma criança do sexo feminino, em que todas as distâncias medidas ao longo do tempo, são as menores entre as distâncias medidas para todas as crianças consideradas no estudo e a observação #27 corresponde a uma criança do sexo feminino em que todas as distâncias entre a hipófise e a fissura pteromaxilar, medidas ao longo do tempo são superiores as demais, para as crianças do mesmo sexo, nas idades de 8, 10, 12 e 14 anos.

A interpretação dos coeficientes estimados do modelo é realizada como segue. Consideramos que t_{ij} e $t_{i'j}$ são as distâncias entre a hipófise e a fissura pteromaxilar associadas as crianças i e i' , respectivamente, no j -ésimo grupo. Consideramos que a i -ésima criança é do sexo feminino e que a i' -ésima criança é do sexo masculino. Assim, observe que fixando a

covariável idade, tem-se:

$$\frac{t_{ij}(x_{ij}^{(2)} = 1)}{t_{i'j}(x_{i'j}^{(2)} = 0)} = \exp(\hat{\beta}_2) = \exp(-0,1081) = 0,8975.$$

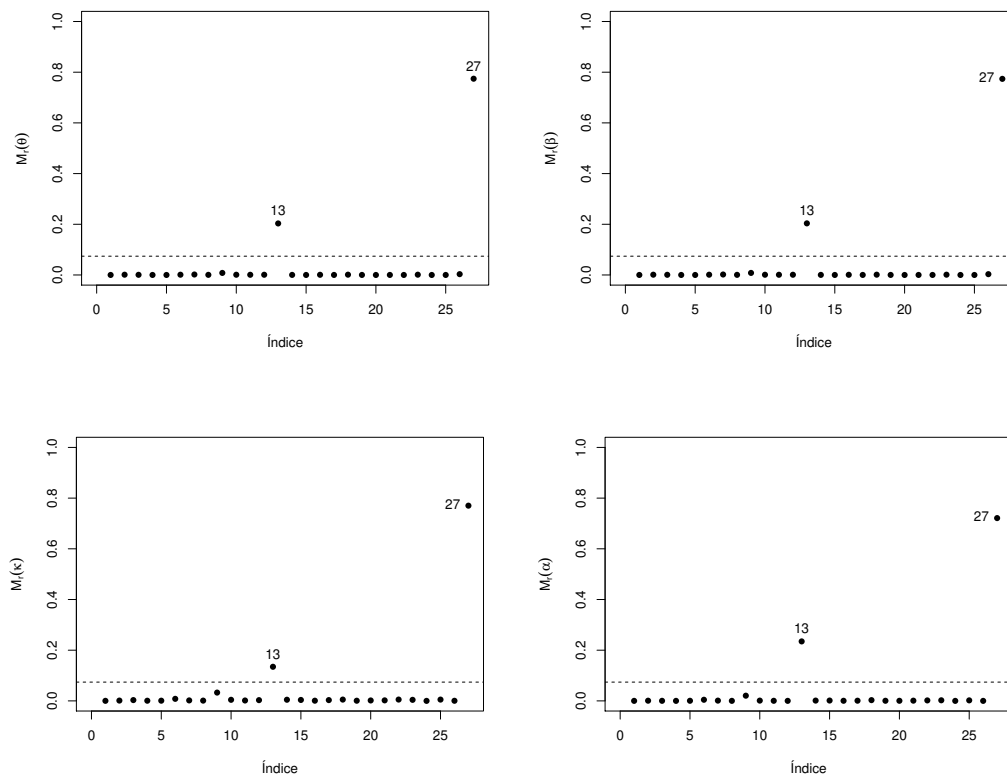
Isto é, a distância estimada entre a hipófise e a fissura pteromaxilar para as crianças do sexo masculino é 10,25% maior que a referida distância para as crianças do sexo feminino.

Agora, fixando a covariável sexo e considerando a i -ésima criança, temos

$$\frac{t_{ij}(x_{ij}^{(1)} + 1)}{t_{ij}(x_{ij}^{(1)})} = \exp(\hat{\beta}_1) = \exp(0,0273) = 1,0277.$$

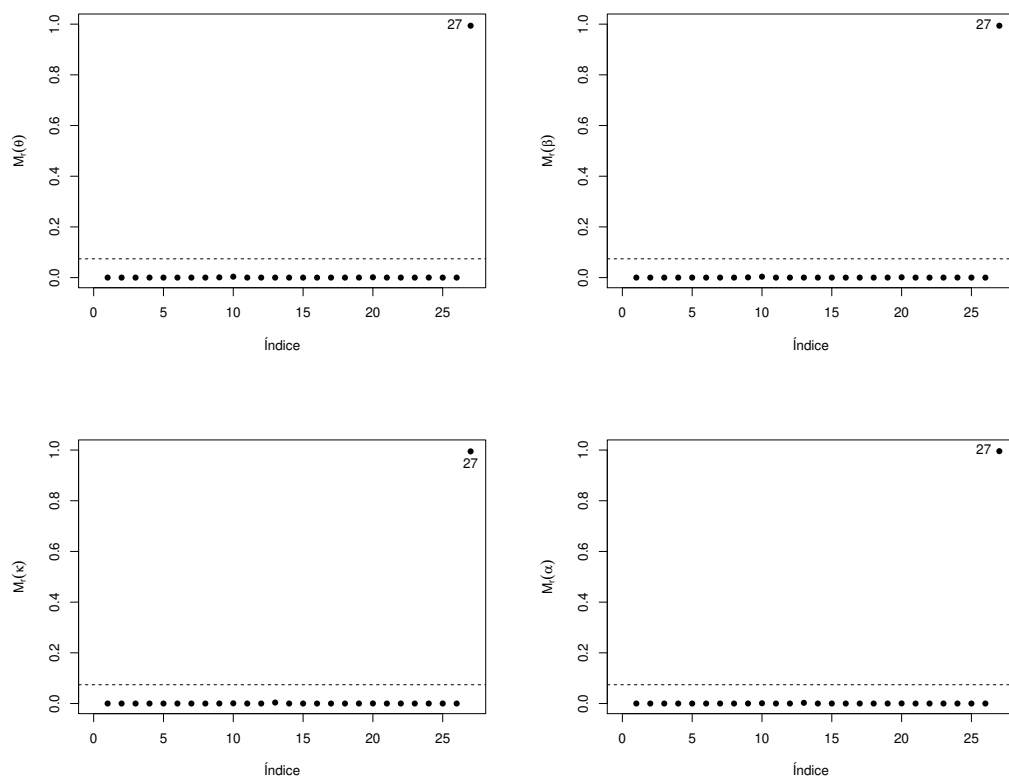
Isto significa que, se aumentarmos em 1 ano a idade das crianças, a distância estimada entre a hipófise e a fissura pteromaxilar fica aumentada em 2,77%.

Figura 17 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos



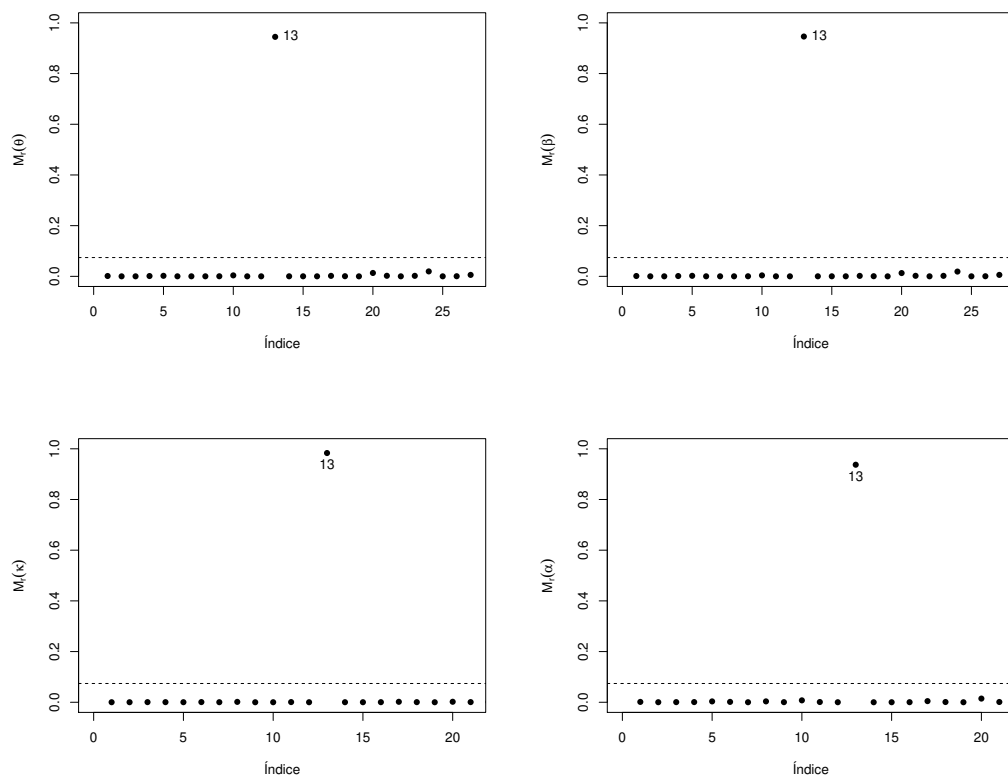
Fonte: Autoria própria.

Figura 18 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta



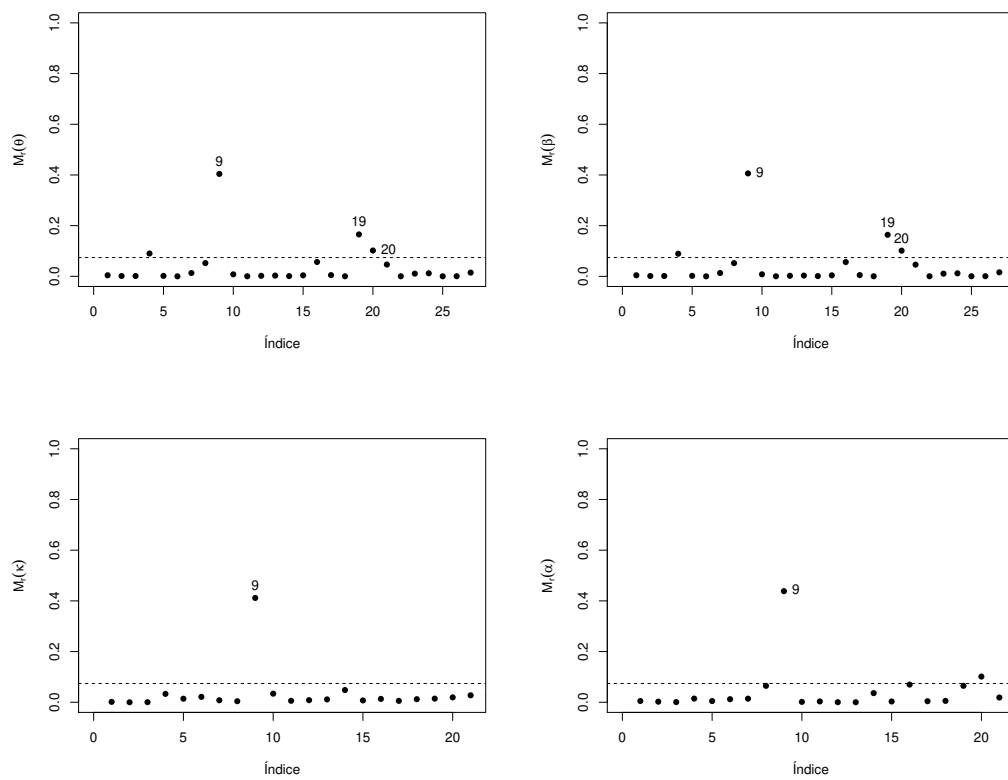
Fonte: Autoria própria.

Figura 19 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (primeira coordenada)



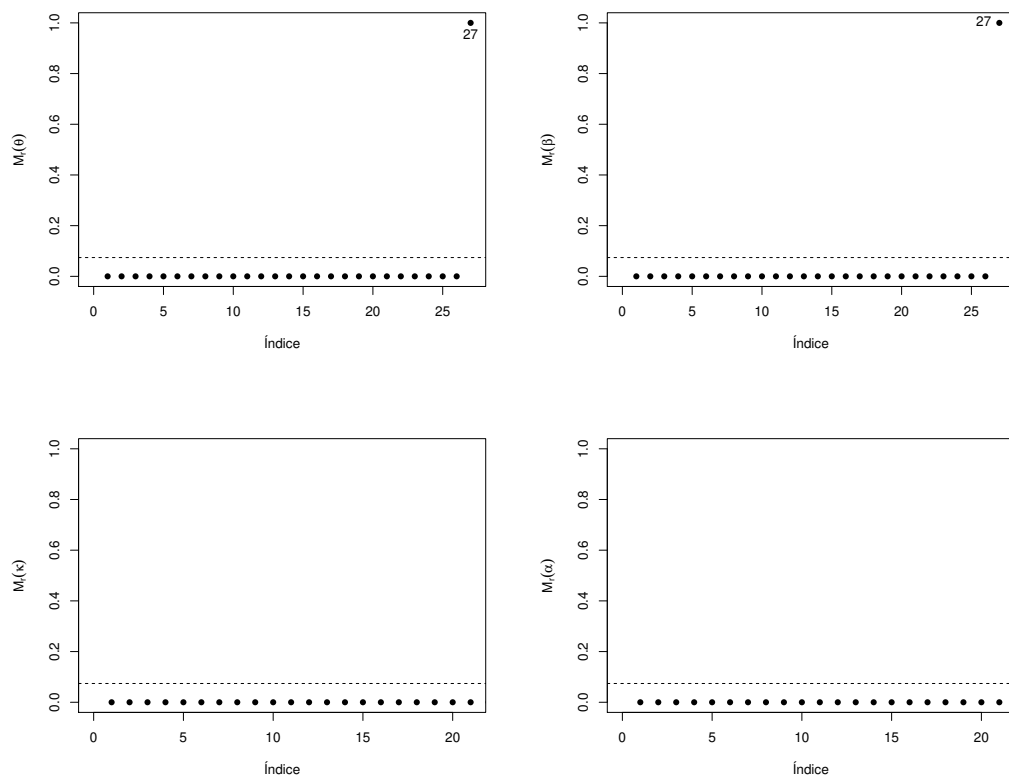
Fonte: Autoria própria.

Figura 20 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (segunda coordenada)



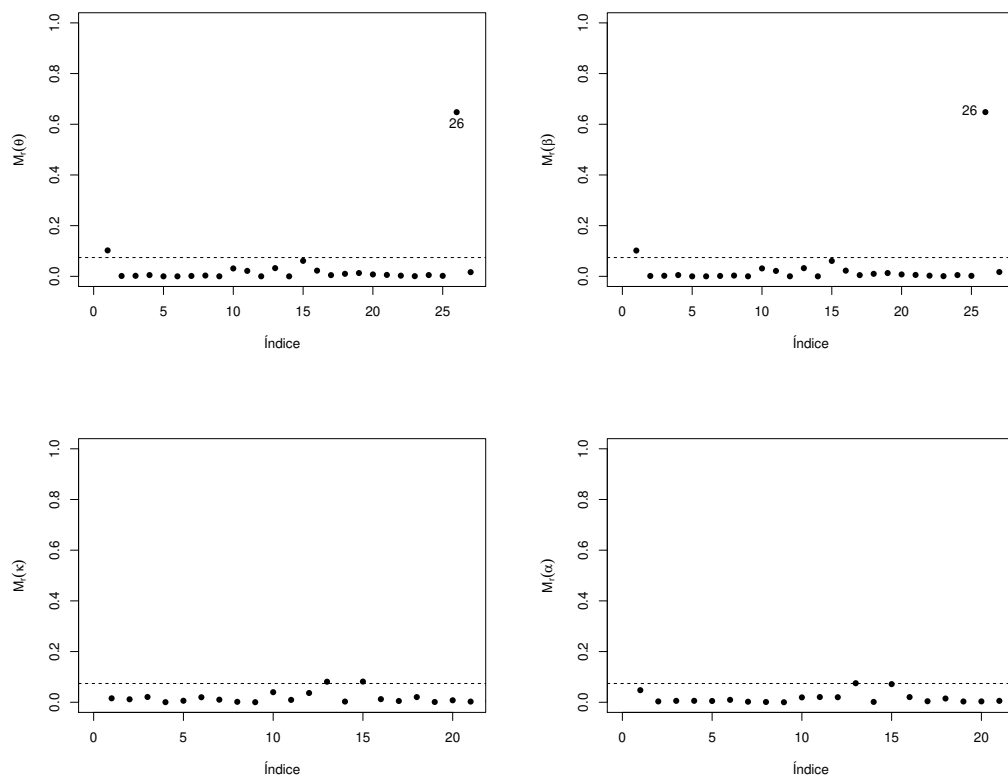
Fonte: Autoria própria.

Figura 21 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (terceira coordenada)



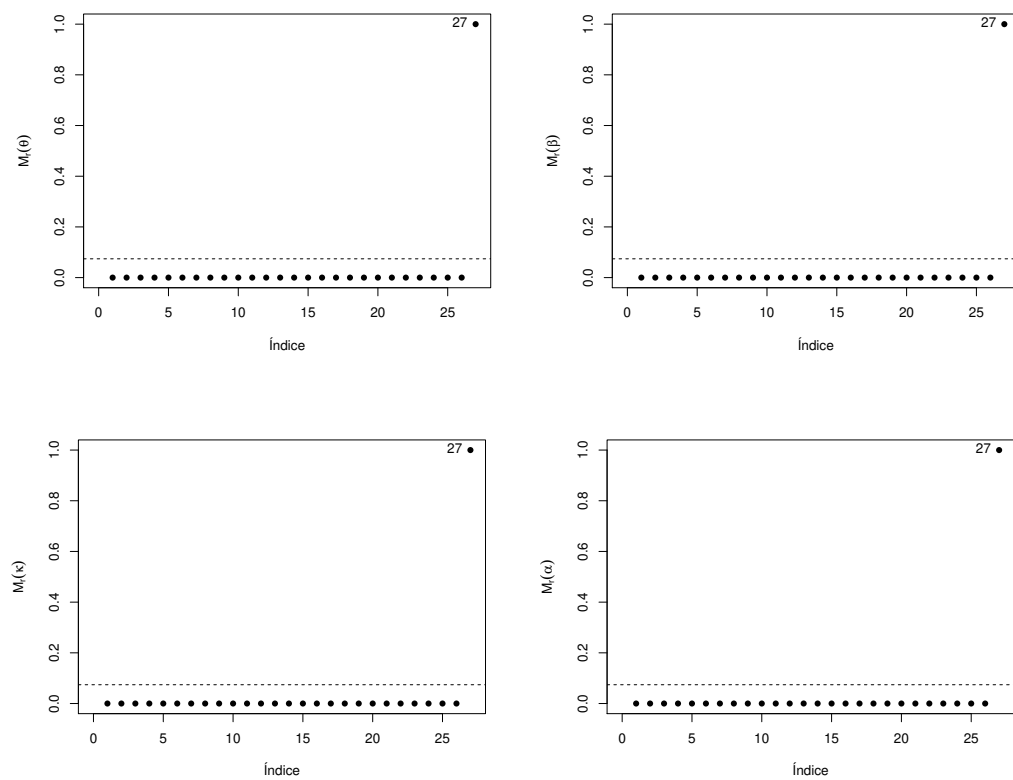
Fonte: Autoria própria.

Figura 22 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (quarta coordenada)



Fonte: Autoria própria.

Figura 23 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável explicativa



Fonte: Autoria própria.

3.7 APLICAÇÃO 2

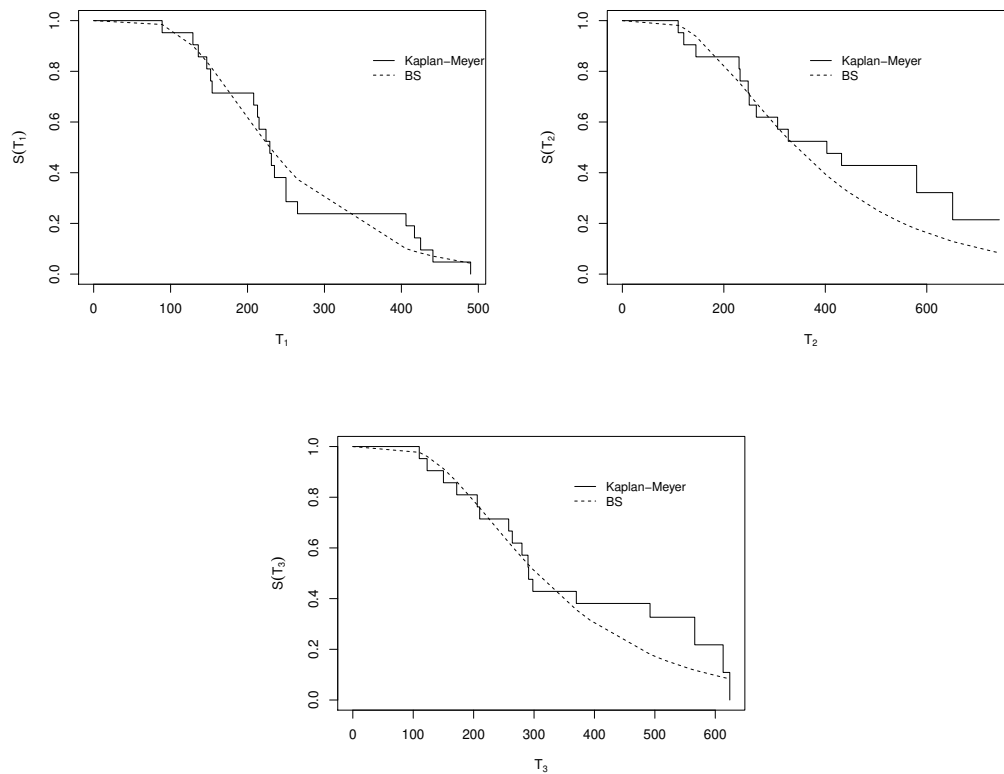
Nesta seção analisamos um conjunto de dados reais que retrata a duração do tempo de exercício necessário até provocar a angina em 21 pacientes com cardiopatia. A seguir, apresentamos uma breve descrição dos dados, seguido de uma análise exploratória e, finalmente, realizamos um estudo de influência local para o modelo de regressão BS multivariado ajustado.

3.7.1 Análise Descritiva dos Dados

Consideramos o conjunto de dados coletados por Danahy et al. (1977) e analisados por Pickles e Crouchlev (1994) através de um modelo com fragilidade multivariada e por Hsieh (2010) no contexto bivariado (considerando uma parte do conjunto de dados). O objetivo desse estudo é estimar a duração de três tempos de exercício até a indução da angina em 21 pacientes com doença cardíaca, usando o modelo BSAL multivariado, dado em (3.7), considerando a variável explicativa que corresponde a dose administrada do remédio (em mg/kg). O primeiro tempo necessário até a angina de peito para cada paciente, corresponde ao tempo imediatamente anterior a administração oral de uma dose de dinitrato de isossorbida, o segundo tempo necessário começou a ser verificado 1 hora depois da ingestão da dose do remédio e, finalmente, o terceiro tempo foi verificado a partir de 3 horas após a administração da dose do remédio. Os tempos foram considerados censurados devido ao cansaço do paciente, o que não permitiu a continuidade do exercício. As porcentagens de observações censuradas para o primeiro, segundo e terceiro tempo até a angina foram aproximadamente 0%, 33% e 19%, respectivamente.

Na Figura 24 são apresentadas as curvas de sobrevivência marginais para os eventos considerados, estimadas por Kaplan-Meier e usando a distribuição BS. Pela Figura 24, notamos que a função de sobrevivência da distribuição BS pode ser utilizada como função de sobrevivência *baseline* para a modelagem marginal dos dados.

Figura 24 – Estimativas de sobrevivência marginal por Kaplan-Meier e pela distribuição BS



Fonte: Autoria própria.

3.7.2 Modelagem

Analizamos o conjunto de dados considerado sob o modelo de tempo de vida acelerado BS multivariado. Ou seja, consideramos o modelo:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij}^{(1)} + w_{ij}, \quad i = 1, \dots, 21 \text{ e } j = 1, \dots, 3, \quad (3.18)$$

em que $x_{ij}^{(1)}$ são valores da covariável **dose do remédio** e $w_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$. Além disso, para j fixo, consideramos que w_{ij} são variáveis aleatórias independentes.

Na Tabela 21 apresentamos os valores das estimativas de máxima verossimilhança do modelo (erros-padrão em $(\cdot)$ e p -valores em $[\cdot]$). Observamos pela Tabela 21 que todos os parâmetros são significativos ao nível de 5%. Para testar a existência de associação dos tempos para cada indivíduo em estudo, aplicamos o teste de fragilidade definido na Seção 2.4.1. O valor da estatística de teste foi de 22.6192 e p -valor inferior a 0,01, ou seja, rejeitamos a hipótese de que não há associação entre os tempos para cada indivíduo. Além disso, encontramos o valor

da estatística KS e o p -valor do teste para avaliar a distribuição dos K -resíduos multivariados adaptados, os respectivos valores são 0.18078 e 0.4466. Assim, notamos que a estatística KS não é significativa e, portanto, não há indícios para rejeitar a hipótese de que os K -resíduos multivariados adaptados têm distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

Tabela 21 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	p -valor
β_0	6,1424	0,0675	$< 0,05$
β_1	-2,1818	0,1940	$< 0,05$
κ	0,6337	0,0537	—
α	0,3143	0,0133	—

Fonte: Autoria própria.

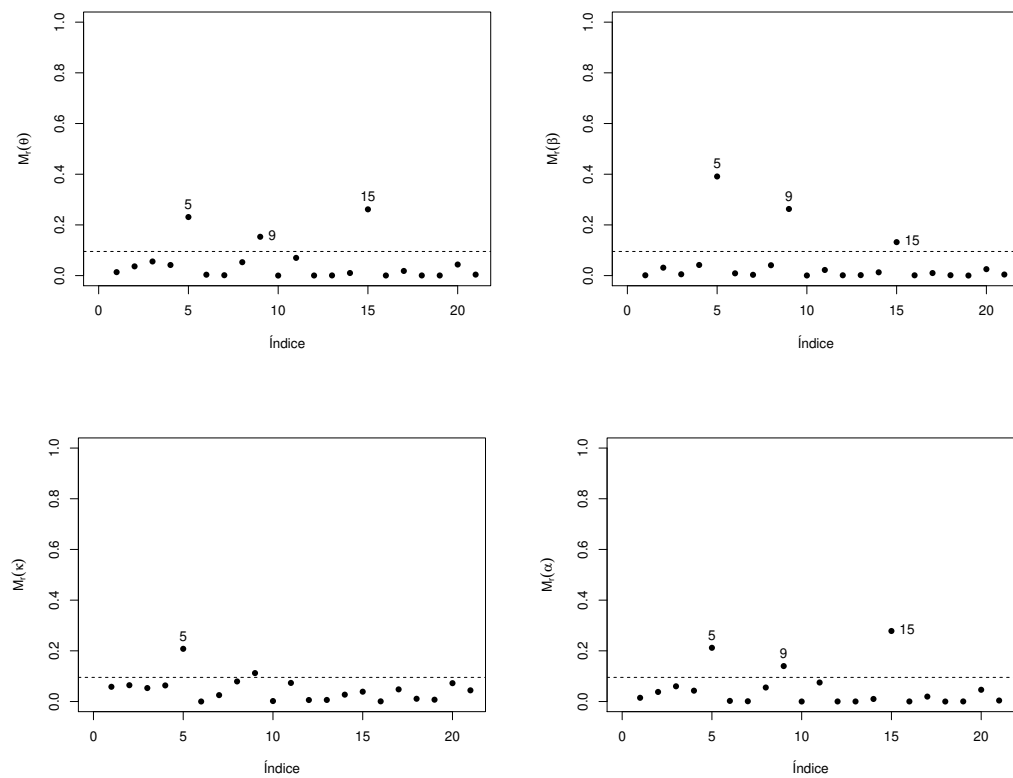
Ao realizar a análise de diagnóstico, apresentamos nas Figuras 25-30 os gráficos de índices de $M_r(\theta)$, $M_r(\beta)$, $M_r(\kappa)$ e $M_r(\alpha)$, em que $M_r(\cdot) = C_r(\cdot)/\sum_{i=1}^n C_r(\cdot)$ para os esquemas de perturbação de ponderação de casos, perturbação conjunta na variável resposta, perturbação na variável resposta individualmente e perturbação na variável explicativa. As observações destacadas como potencialmente influentes foram: #5, #6, #9, #10, #15 e #19. As observações #10, #9 e #5 correspondem aos pacientes que têm os tempos mais curtos até a primeira, segunda e terceira ocorrência da angina, respectivamente. Além disso, estas observações apresentam três tempos curtos até a ocorrência da falha. As observações #6 e #19 se referem a pacientes com três tempos longos até a ocorrência da falha, sendo que a observação #19 tem o tempo mais longo até a terceira ocorrência da angina de peito. A observação #15 corresponde ao paciente que ingeriu a menor dose do medicamento, o mesmo apresentou tempos curtos e longos até a ocorrência da falha ou censura.

Os coeficientes estimados do modelo são interpretados como segue. Consideramos t_{ij} o tempo de exercício necessário até provocar a angina no i -ésimo paciente com cardiopatia do j -ésimo grupo. Temos

$$\frac{t_{ij}(x_{ij}^{(1)} + 1)}{t_{ij}(x_{ij}^{(1)})} = \exp(\hat{\beta}_1) = \exp(-2,1818) = 0,1128.$$

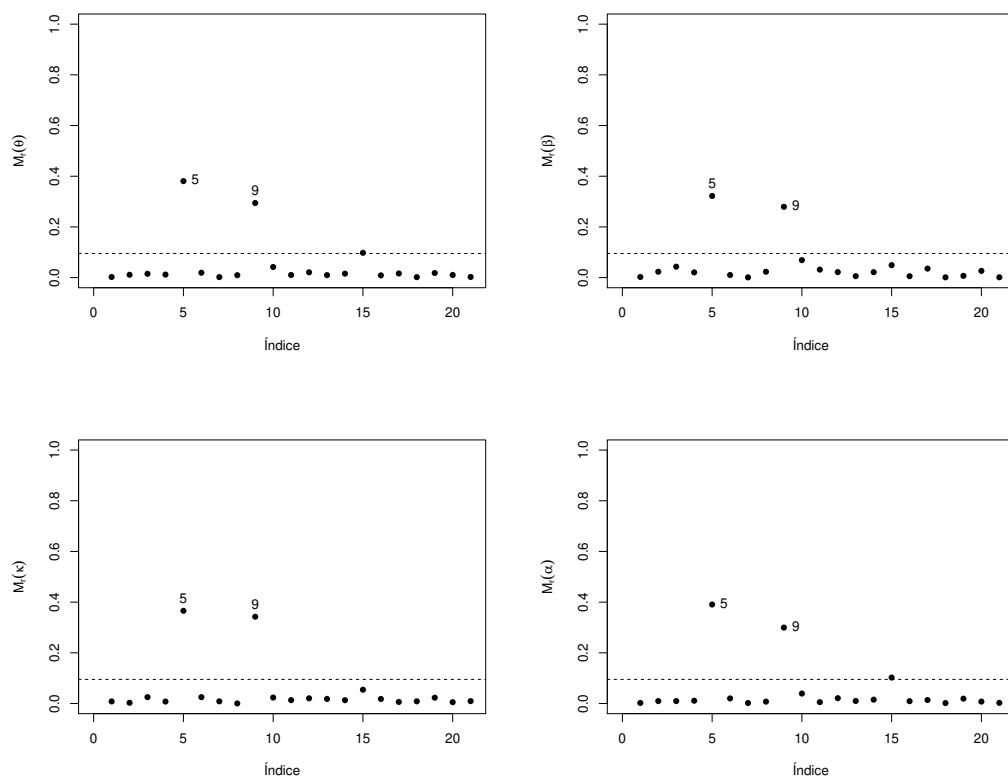
Isto é, se aumentarmos uma unidade da dose de dinitrato de isossorbida, o tempo de exercício necessário até provocar a angina em pacientes com cardiopatia fica reduzido em 88,72%.

Figura 25 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos



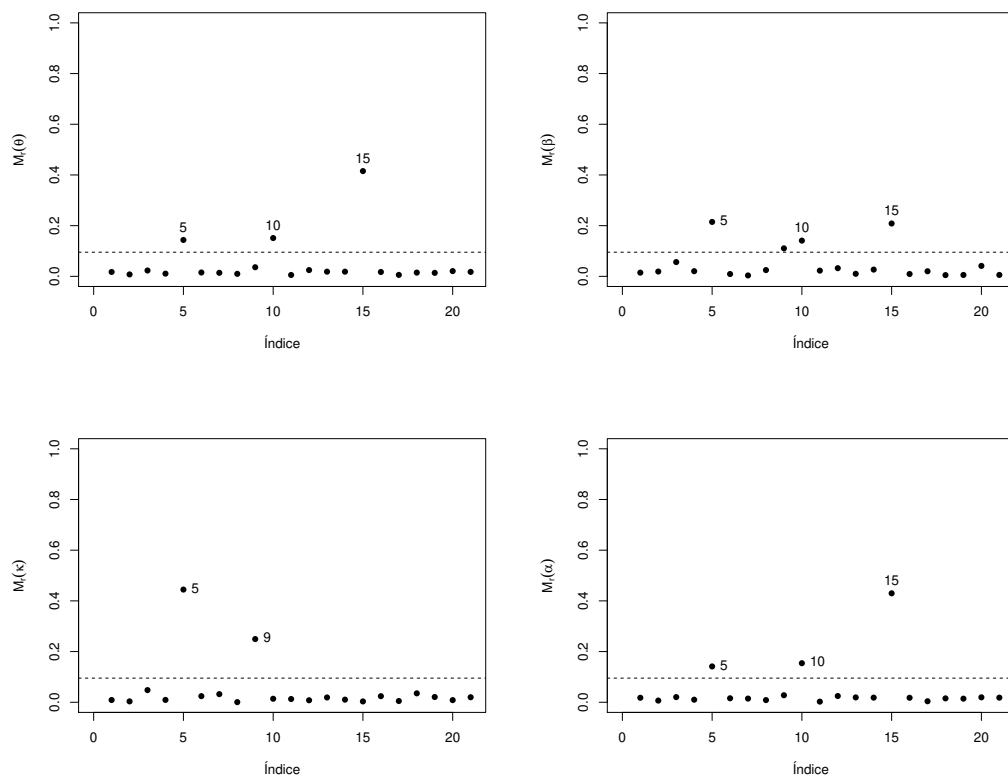
Fonte: Autoria própria.

Figura 26 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta



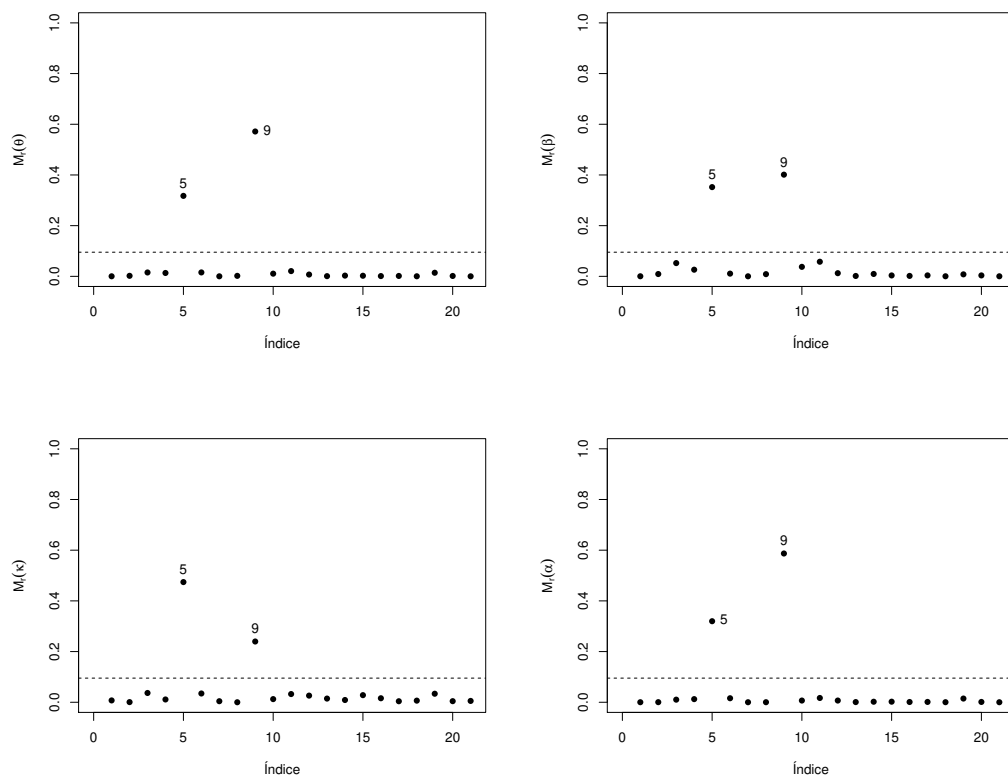
Fonte: Autoria própria.

Figura 27 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (primeira coordenada)



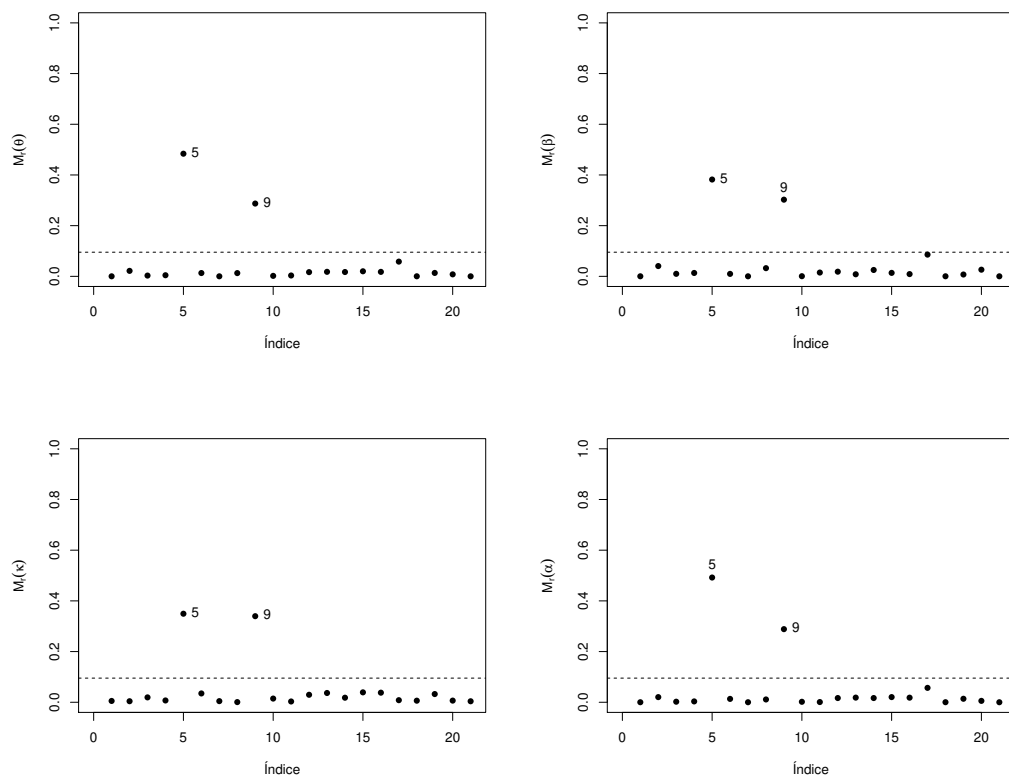
Fonte: Autoria própria.

Figura 28 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (segunda coordenada)



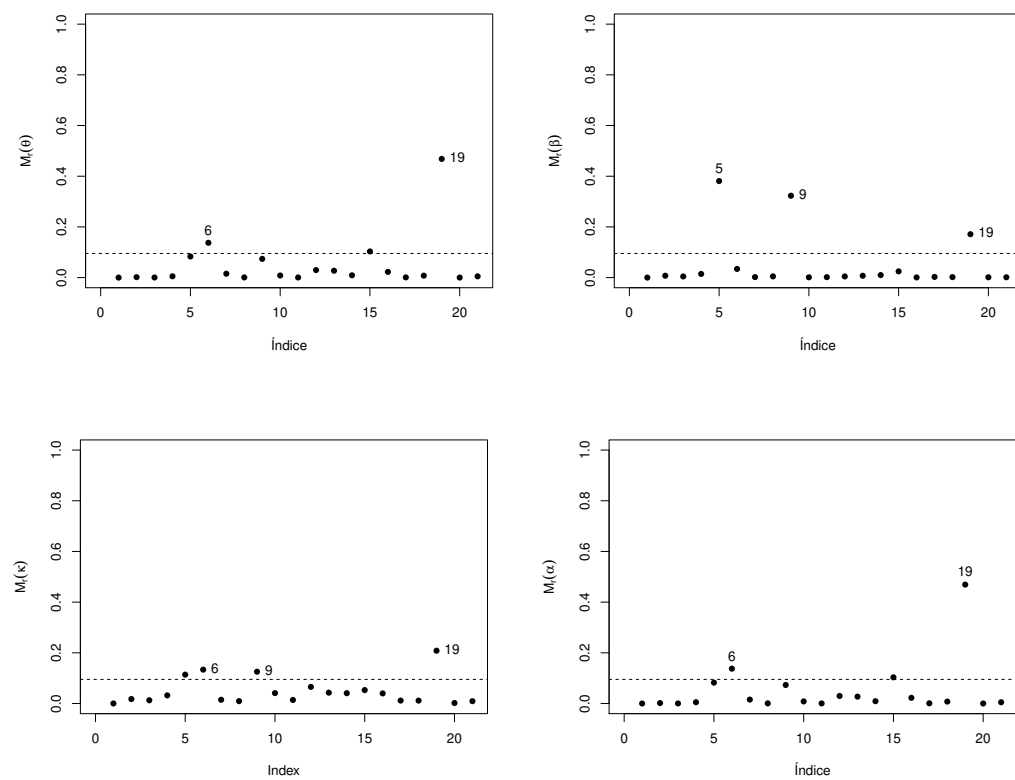
Fonte: Autoria própria.

Figura 29 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável resposta separadamente (terceira coordenada)



Fonte: Autoria própria.

Figura 30 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação na variável explicativa



Fonte: Autoria própria.

3.8 CONCLUSÃO

Neste capítulo, derivamos uma nova distribuição BSF multivariada e algumas de suas propriedades. Propusemos uma extensão do modelo de regressão BS bivariado apresentado no Capítulo 2. Apresentamos alguns procedimentos inferenciais e para avaliar o ajuste do modelo proposto, alguns resíduos foram definidos, tanto para o caso não-censurado quanto para o caso censurado. Desse modo, realizamos estudos de simulação para verificar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança e para avaliar a distribuição empírica dos resíduos propostos. Como resultado, o bom comportamento dos estimadores foi evidenciado e foi possível reafirmar que os K -resíduos multivariados e os K -resíduos multivariados adaptados possuem distribuições uniformes no intervalo $[0, 1]$, enquanto que os resíduos quantílicos multivariados seguem uma distribuição normal padrão. Finalmente, aplicamos esses resultados a um conjunto de dados reais.

4 MODELO DE TEMPO DE VIDA ACELERADO BS_t MULTIVARIADO

4.1 RESUMO

No presente capítulo, inicialmente analisamos um conjunto de dados bivariado, com presença de censura, através do modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado. Em seguida, introduzimos um novo modelo, o modelo de tempo de vida acelerado BS_t multivariado.

4.2 MOTIVAÇÃO

Consideramos o conjunto de dados descrito em Duchateau e Janssen (2007) e também disponibilizado no pacote nlme do software R. O objetivo deste estudo é estimar o tempo de reconstituição da barreira sangue-leite em vacas leiteiras após a aplicação local de um medicamento à base de corticosteroides utilizando o modelo de tempo de vida acelerado Birnbaum-Saunders multivariado. Quando é infectado um dos quartos do úbere de uma vaca, a barreira sangue-leite é parcialmente destruída, possibilitando que íons específicos fluam do sangue para o leite e do leite para o sangue e isso faz com que a concentração de sódio (Na^+) fique elevada, propiciando o desenvolvimento da mastite na vaca. Os quartos de úberes posteriores de 100 vacas foram infectados experimentalmente com uma bactéria. Nove horas após o início da infecção, um dos dois quartos do úbere infectado foi tratado localmente com o medicamento e o outro foi tratado como placebo. Acompanhou-se a concentração de Na^+ em cada uma das unidades experimentais. As vacas foram acompanhadas por 6 dias e meio e foram censuradas nesse momento se a concentração de Na^+ ainda estivesse acima do nível limite. Consideramos como variável explicativa a paridade das vacas, isto é, o número de partos, que corresponde ao número de períodos de lactação que a vaca já experimentou. Para isso, agrupou-se todas as vacas com mais de um parto no grupo de vacas múltíparas (paridade = 0) e primíparas ou novilhas, vacas com apenas um parto (paridade = 1). As porcentagens de observações censuradas para o primeiro e segundo tempo foram 77% e 85%, respectivamente.

Modelagem

Analizamos, inicialmente, o conjunto de dados considerado sob o modelo de tempo de vida BS multivariado. Isto é, consideramos o modelo:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij}^{(1)} + w_{ij}, \quad i = 1, \dots, 100 \text{ e } j = 1, 2, \quad (4.1)$$

em que $x_{ij}^{(1)}$ assume 0 se a vaca é múltipara e 1 se a vaca é primípara ou novilha e $w_{ij} \sim \text{SNF}(\alpha, 0, 2, \kappa)$. Além disso, para j fixo, consideramos que w_{ij} são variáveis aleatórias independentes.

Na Tabela 22 são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo ajustado e, seus respectivos, erros-padrão e p -valores. Podemos notar que os parâmetros β_0 e β_1 são significativos aos níveis de significância usuais. Testamos a existência de associação entre os tempos para cada sujeito em estudo, através do teste de fragilidade. O valor da estatística de teste foi 1,3305 e o p -valor obtido foi igual a 0,1244. Com isso, percebemos que o parâmetro de fragilidade não foi significativo neste caso.

Prosseguindo com a análise, apresentamos na Figura 31 o gráfico normal de probabilidades com envelope gerado para os K -resíduos, os quais apresentam um comportamento incomum com pontos fora do envelope, o que indica que uma distribuição com caudas mais pesadas pode ser mais apropriada para os erros.

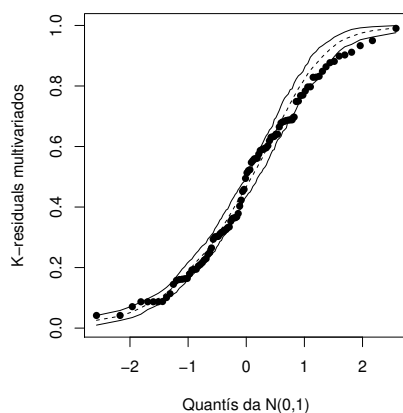
Tabela 22 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	p -valor
β_0	0,6466	0,0125	$< 0,01$
β_1	-0,5171	0,0208	$< 0,01$
κ	6,7649	0.2264	—
α	1,5009	0.0096	—

Fonte: Autoria própria.

Os gráficos de índices de $M_r(\boldsymbol{\theta})$, $M_r(\boldsymbol{\beta})$, $M_r(\kappa)$ e $M_r(\alpha)$, em que $M_r(\cdot) = C_r(\cdot) / \sum_{i=1}^n C_r(\cdot)$ considerando os esquemas de perturbação de ponderação de casos e perturbação conjunta na variável resposta são apresentados nas Figuras 32 e 33, respectivamente. Em ambos os gráficos a observação #49 foi destacada como potencialmente influente. Esta observação corresponde a uma vaca primípara, em que ambos os tempos de reconstituição da barreira sangue-leite são curtos, inclusive a observação destacada apresenta o primeiro tempo de reconstituição mais

Figura 31 – Gráfico normal de probabilidades com envelope

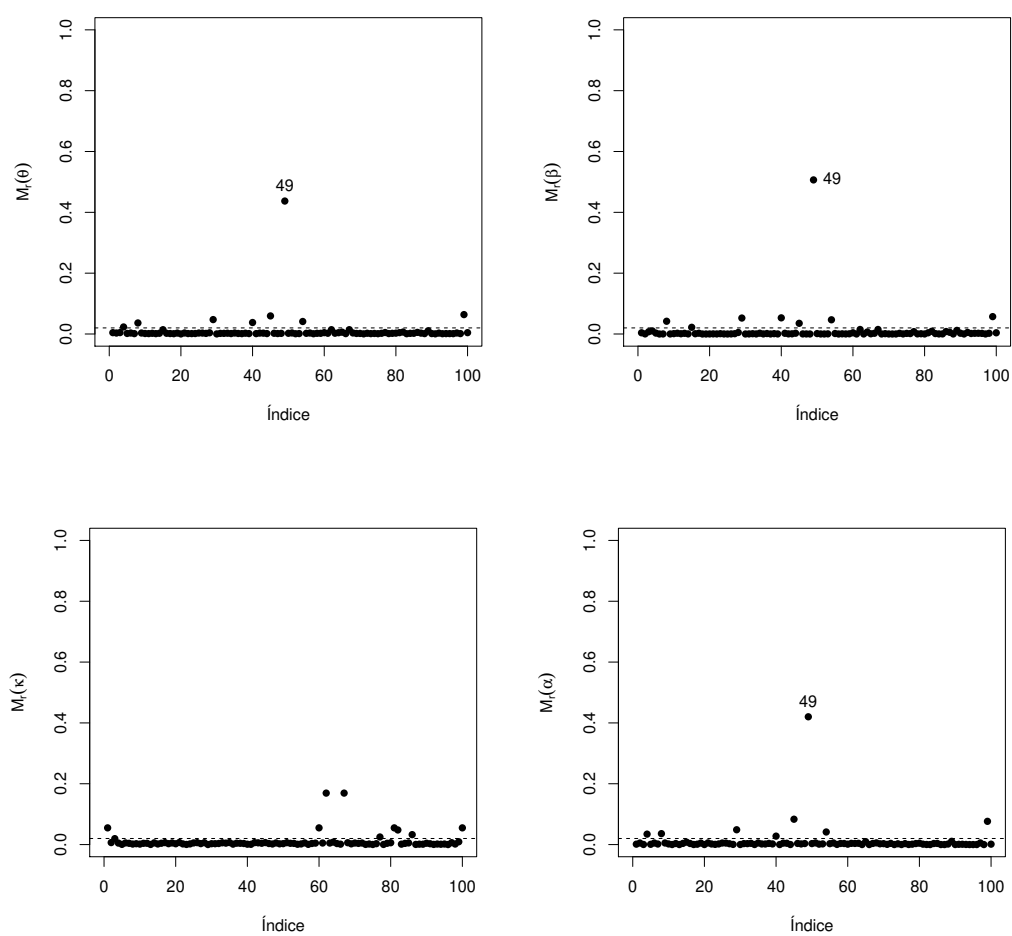


Fonte: Autoria própria.

curto entre todas as observações estudadas. Uma das nossas supostas é que o ponto influente pode ter contribuído para a não significância do parâmetro de fragilidade. Sendo assim a utilização de modelos com caudas pesadas pode levar a conclusões mais fidedignas.

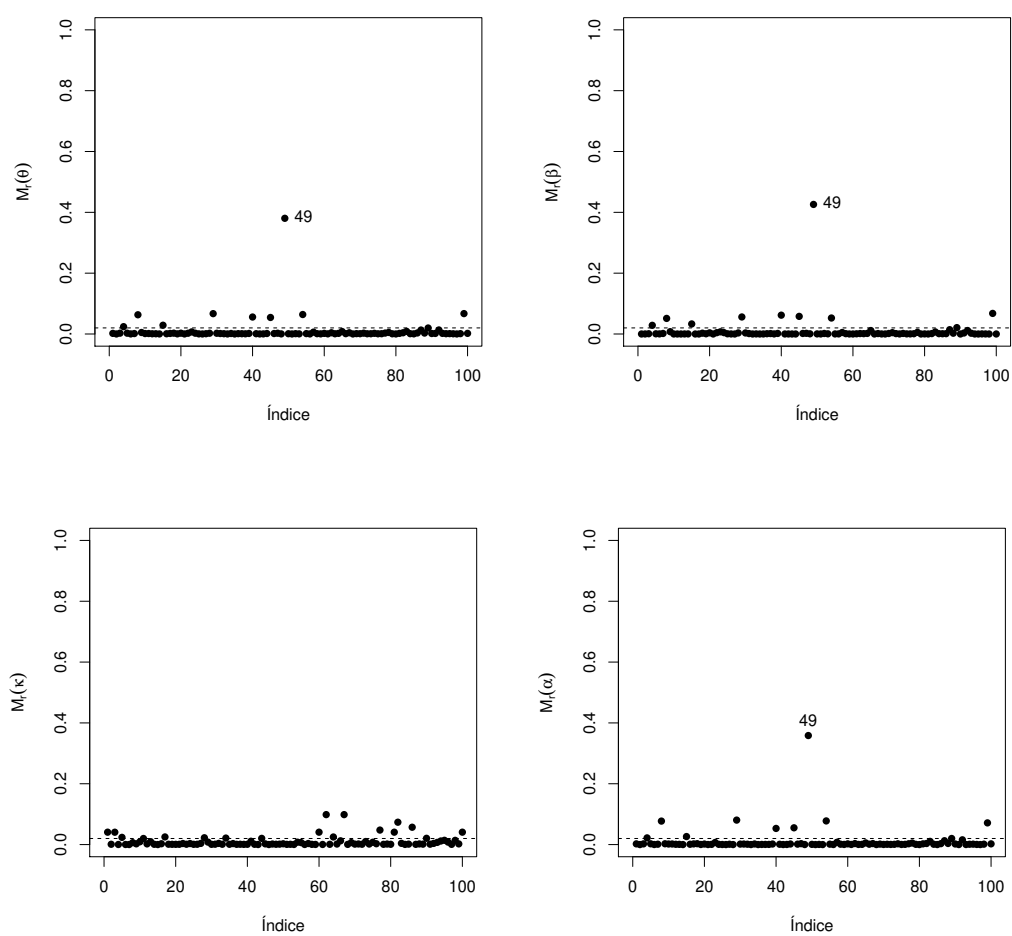
Tendo em vista que a análise dos dados considerados, através do modelo de tempo de vida acelerado BS multivariado, nos sugere uma distribuição com caudas mais pesadas para modelá-los, propomos a seguir o modelo de tempo de vida acelerado BS_t multivariado e posteriormente utilizamos este modelo para analisar o banco de dados supracitado.

Figura 32 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos



Fonte: Autoria própria.

Figura 33 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta



Fonte: Autoria própria.

4.3 A DISTRIBUIÇÃO BSF_t MULTIVARIADA

Inicialmente, consideramos uma variável aleatória T contínua e positiva e a condicionamos a uma variável de fragilidade de Z , com função de sobrevivência *baseline* da distribuição BS_t . A partir daí, fica definida uma nova distribuição univariada, a qual denominamos distribuição t de Student Birnbaum-Saunders Frágil (BSF_t). A fda de T fica dada por

$$F(t) = 1 - \mathcal{L} \left\{ -\log [1 - \Phi_t(a_t(\alpha, \beta))] \right\},$$

em que $a_t = \frac{1}{\alpha}(\sqrt{t/\beta} - \sqrt{\beta/t})$ e $\Phi_t(\cdot)$ e a fda da distribuição t de Student, e denotamos $T \sim BSF_t(\alpha, \beta, \nu, \kappa)$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\nu > 0$ e κ o parâmetro de fragilidade.

Assim, dizemos que a variável aleatória $Y = \log(T)$ segue uma distribuição seno-hiperbólico esférica frágil (SSF) de parâmetros α , $\mu = \log(\beta)$, 2 , ν e κ , e denotamos $Y \sim SSF(\alpha, \mu, 2, \nu, \kappa)$. Neste caso, a fda de Y é dada por

$$F(t) = 1 - \mathcal{L} \left\{ -\log \left[1 - \Phi_t \left(\frac{2}{\alpha} \sinh \left(\frac{y - \mu}{2} \right) \right) \right] \right\}.$$

Da forma que definimos a distribuição BSF m -variada, definimos a distribuição BSF_t m -variada. Dizemos que $\mathbf{T}$ segue uma distribuição BSF_t m -variada, com parâmetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\nu > 0$ e κ , em que denotamos $\mathbf{T} \sim BSF_{t(m)}(\alpha, \beta, \nu, \kappa)$, se as suas respectivas fda e fdp são dadas pelas Expressões (3.1) e (3.3), em que $\lambda_j(\cdot)$ e $S_j(\cdot)$ denotam as funções de risco e de sobrevivência de uma variável aleatória com distribuição BS_t univariada de parâmetros α , β e ν e $\mathcal{L}^{(m)}(s)$ indica a derivada de ordem m de $\mathcal{L}(s)$ com relação a s . Além disso, as marginais de $\mathbf{T}$ seguem uma distribuição $BSF_t(\alpha, \beta, \nu, \kappa)$.

Assim, como na definição da distribuição SNF multivariada, temos que se $\mathbf{T} \sim BSF_{t(m)}(\alpha, \beta, \nu, \kappa)$, então $\mathbf{Y} = (\log(T_1), \dots, \log(T_m))^T$ segue uma distribuição SSF m -variada de parâmetros α , $\mu = \log(\beta)$, 2 , ν e κ , e denotamos $\mathbf{Y} \sim SSF_{(m)}(\alpha, \mu, 2, \nu, \kappa)$. A fda e a fdp conjunta de $\mathbf{Y}$ podem ser obtidas através das expressões (3.1) e (3.3), em que $\lambda_j(\cdot)$ e $S_j(\cdot)$ denotam as funções de risco e de sobrevivência de uma variável aleatória com distribuição SS univariada de parâmetros α , μ , 2 e ν , respectivamente.

4.4 MODELAGEM

O Modelo

Consideremos que $\mathbf{T} = (T_{i1}, \dots, T_{im})^\top \sim \text{BSF}_{t(m)}(\alpha, \exp(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}), \nu, \kappa)$, em que T_{ij} se refere ao tempo de sobrevivência correspondente ao i -ésimo sujeito ($i = 1, \dots, n$) e ao j -ésimo grupo ($j = 1, \dots, m$). Temos que $T_{ij} \sim \text{BSF}_t(\alpha, \exp(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta}), \nu, \kappa)$, em que $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij}^0, \dots, x_{ij}^k)^\top$ é um vetor de variáveis explicativas fixas e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^\top$ denota o vetor de coeficientes de regressão.

Considerando o modelo de regressão log-linear, temos

$$Y_{ij} = \log(T_{ij}) = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + W_{ij}, \quad (4.2)$$

em que $W_{ij} \sim \text{SSF}(\alpha, 0, 2, \nu, \kappa)$. Supondo independência entre os sujeitos e dependência dentro dos grupos. Conforme os capítulos anteriores, utilizaremos o tau de Kendall para medir a associação dentro dos grupos.

Estimação e Análise Residual

Consideremos uma amostra observada de n observações independentes, $(y_{1j}, \delta_{1j}), \dots, (y_{nj}, \delta_{nj})$, em que y_{ij} é o logaritmo da medida da resposta j na n -upla i e δ_{ij} é a variável indicadora de falha, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Assim, o logaritmo da função de verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \alpha, \kappa)^\top$ fica dado por

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left[\log(f(w_{ij})) - \frac{\kappa+1}{\kappa} \log(S(w_{ij})) \right] - \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right. \\ & \times \log \left(1 + \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \mathcal{L}^{-1}(S(w_{ij})) \right) + \log \left[\Gamma \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right] - \log(\Gamma(\kappa)) \\ & \left. - \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \log(\kappa) \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que $w_{ij} = y_{ij} - (\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta})$, $S(w_{ij}) = \mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}$ e $f(w_{ij}) = -\xi_{1j} L(\xi_{2j}) \times \mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}$, com $L(\xi_{2j}) = \phi_t(\xi_{2j})/[2(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))]$, sendo $\phi_t(\cdot)$ e $\Phi_t(\cdot)$ a fdp e a fda da distribuição t de Student, respectivamente.

A partir daí podemos obter as funções escores, que são dadas por $\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = (U_{\beta_0}, \dots, U_{\beta_k})^\top$, $\mathbf{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{D}(\check{\mathbf{b}}))$ e $\mathbf{U}_\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{D}(\check{\mathbf{c}}))$, em que $U_{\beta_s} = U_{\beta_s}(\boldsymbol{\theta}_s) = \text{tr}(\mathbf{D}(\check{\mathbf{a}}))$, $\boldsymbol{\theta}_s = (\beta_s, \alpha, \kappa)^\top$

($s = 0, 1, \dots, k$), $\mathbf{D}(\check{\mathbf{a}}) = \text{diag}\{\check{a}_1(\boldsymbol{\theta}_s), \dots, \check{a}_n(\boldsymbol{\theta}_s)\}$, $\mathbf{D}(\check{\mathbf{b}}) = \text{diag}\{\check{b}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \check{b}_n(\boldsymbol{\theta})\}$ e $\mathbf{D}(\check{\mathbf{c}}) = \text{diag}\{\check{c}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \check{c}_n(\boldsymbol{\theta})\}$, sendo que

$$\begin{aligned} \check{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) = & \sum_{j=1}^m \left\{ -\delta_{ij} x_{ij}^s \left[\left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} + 1 - \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right. \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left. \frac{\kappa + 1}{\kappa} \right] \xi_{1j} L(\xi_{2j}) + \frac{\xi_{2j}}{2} \left(\frac{1}{\xi_{1j}} - \frac{\nu + 1}{2} \frac{\alpha^2 \xi_{1j}}{\nu \alpha^2 + 4 \sinh^2(\frac{w_{ij}}{2})} \right) \right] \right\} + \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} \right. \\ & \left. \frac{\sum_{j=1}^m L(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \check{b}_i(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} \left[\frac{2\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\alpha \mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \xi_{2j} L(\xi_{2j}) - \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \left(\frac{8 \sinh^2(\frac{w_{ij}}{2})}{\nu \alpha^3} \right) \right. \right. \\ & \times \left. \left(1 + \frac{4 \sinh^2(\frac{w_{ij}}{2})}{\nu \alpha^2} \right)^{-1} - \frac{2}{\alpha} \xi_{2j} \left[1 - \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa} \right) \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right] \right. \\ & \times \left. L(\xi_{2j}) \right\} + \frac{2}{\alpha \kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \frac{\sum_{j=1}^m L(\xi_{2j}) \xi_{2j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \end{aligned} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} \check{c}_i(\boldsymbol{\theta}) = & -\log \left[1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j})) \right] - \frac{\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \\ & \times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) + \psi \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) - \psi(\kappa) - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que $\psi(\cdot) = \Gamma'(\cdot)/\Gamma(\cdot)$ e $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{im})^\top$, para $i = 1, \dots, n$.

Podemos obter as estimativas de máxima verossimilhança a partir da solução do sistema de equações $U_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$, $U_\kappa(\boldsymbol{\theta}) = 0$ e $U_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Como este sistema de equações não possui uma solução com forma fechada, recorreremos ao método iterativo Nelder-Mead implementado no pacote maxLik do software R. Os valores iniciais para o processo iterativo foram os mesmos utilizados no 3.

Como já vimos nos capítulos anteriores, é possível utilizar a distribuição assintótica do estimador de verossimilhança, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, para realizar inferência assintótica para o vetor de parâmetros

θ . Para isso, precisamos obter inicialmente a matriz hessiana, que é dada por

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\alpha} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta\kappa} \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\alpha} & \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\kappa} \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\beta} & \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\alpha} & \ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\kappa} \end{bmatrix},$$

em que

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_0\beta_0} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_0\beta_1} & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_0\beta_k} \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_1\beta_0} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_1\beta_1} & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_1\beta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_k\beta_0} & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_k\beta_1} & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_k\beta_k} \end{bmatrix},$$

com $\ddot{\mathbf{L}}_{\beta_l\beta_s} = \sum_{i=1}^n \check{d}_i$, $\ddot{\mathbf{L}}_{\beta_s\kappa} = \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\beta_s} = \sum_{i=1}^n \check{e}_i$, $\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\beta_s} = \ddot{\mathbf{L}}_{\beta_s\alpha} = \sum_{i=1}^n \check{f}_i$, $\ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\kappa} = \sum_{i=1}^n \check{g}_i$, $\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\kappa} = \ddot{\mathbf{L}}_{\kappa\alpha} = \sum_{i=1}^n \check{h}_i$, e $\ddot{\mathbf{L}}_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^n \check{p}_i$, sendo que $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $l = 0, \dots, k$, $s = 0, \dots, k$ e as quantidades $\check{d}_i$, $\check{e}_i$, $\check{f}_i$, $\check{g}_i$, $\check{h}_i$ e $\check{p}_i$ são definidas no Apêndice.

Os V -resíduos e os K -resíduos multivariados definidos no Capítulo 3 serão utilizados no presente capítulo. Para o modelo definido pela Equação (4.2), os resíduos são definidos a partir das Expressões (3.13), (3.14) e (3.15), em que $S_j(\widehat{W}_{ij}) = 1 - \Phi_t[(2/\alpha) \sinh(\widehat{W}_{ij}/2)]$.

4.5 ANÁLISE DE DIAGNÓSTICO

Conforme os Capítulos 2 e 3, realizamos um estudo de influência local para o modelo proposto neste capítulo.

Curvaturas Normais

Da forma que procedemos na Seção 3.5 do Capítulo 3 podemos obter a matriz Δ , considerando o modelo proposto neste capítulo para o esquema de perturbação de ponderação de casos, perturbação na variável resposta e perturbação na variável explicativa, respectivamente.

Perturbação ponderação de casos: Para este esquema de perturbação, a matriz Δ é dada por $\Delta = (\Delta_\beta^\top, \Delta_\alpha^\top, \Delta_\kappa^\top)^\top$, em que $\Delta_\beta = (\Delta_{\beta_1}, \dots, \Delta_{\beta_n})$, $\Delta_\alpha = (\Delta_{\alpha_1}, \dots, \Delta_{\alpha_n})$

e $\Delta_{\kappa} = (\Delta_{\kappa_1}, \dots, \Delta_{\kappa_n})$, sendo

$$\Delta_{\beta_i} = (\Delta_{\beta_{0i}}, \dots, \Delta_{\beta_{ki}}),$$

$$\Delta_{\alpha_i} = \check{b}_i(\theta)$$

e

$$\Delta_{\kappa_i} = \check{c}_i(\theta),$$

em que $\Delta_{\beta_{s_i}} = \check{a}_i(\theta_s)$ ($s = 0, \dots, k$), com $\check{a}_i(\cdot)$, $\check{b}_i(\cdot)$ e $\check{c}_i(\cdot)$ conforme definidas em (4.4), (4.5) e (4.6), respectivamente, e avaliadas em $\hat{\theta}$ e no vetor de não-perturbação.

Perturbação Conjunta na Variável Resposta: Neste caso, a matriz Δ pode ser escrita como $\Delta = (\Delta_{\beta}^{\top}, \Delta_{\alpha}^{\top}, \Delta_{\kappa}^{\top})^{\top}$, em que $\Delta_{\beta} = (\Delta_{\beta_1}, \dots, \Delta_{\beta_n})$, $\Delta_{\alpha} = (\Delta_{\alpha_1}, \dots, \Delta_{\alpha_n})$ e $\Delta_{\kappa} = (\Delta_{\kappa_1}, \dots, \Delta_{\kappa_n})$, com

$$\Delta_{\beta_i} = (\Delta_{\beta_{0i}}, \dots, \Delta_{\beta_{ki}}),$$

$$\Delta_{\kappa_i} = \check{b}_i(\theta)$$

e

$$\Delta_{\alpha_i} = \check{c}_i(\theta),$$

com $\Delta_{\beta_{s_i}} = \check{a}_i(\theta_s)$ ($s = 0, \dots, k$), sendo $\check{a}_i(\cdot)$, $\check{b}_i(\cdot)$ e $\check{c}_i(\cdot)$ avaliadas em $\hat{\theta}$ e no vetor de não-perturbação e definidas no Apêndice C.

4.6 APLICAÇÃO

Nesta seção, retomamos a análise do conjunto de dados sobre o tempo de reconstituição da barreira sangue-leite em vacas leiteiras. No início deste capítulo analisamos esse conjunto de dados utilizando o modelo de tempo de vida acelerado BS multivariado e percebemos, pela análise, que havia indícios de que uma distribuição com caudas mais pesadas para os erros seria mais apropriada. Agora, analisaremos novamente este conjunto de dados sob a perspectiva do modelo de tempo de vida acelerado BS_t multivariado.

Modelagem

Ajustamos o conjunto de dados “reconstituição” com o modelo BS_t multivariado, com $\nu = 3$ (o grau de liberdade foi escolhido maximizando o logaritmo da função de verossimilhança

para vários valores de ν e observando os respectivos valores do AIC, o grau de liberdade que resultou em um menor AIC foi escolhido). Temos o modelo:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij}^{(1)} + w_{ij}, \quad i = 1, \dots, 100 \text{ e } j = 1, 2, \quad (4.7)$$

em que $x_{ij}^{(1)}$ assume 0 se a vaca é múltípara e 1 se a vaca é primípara ou novilha e $w_{ij} \sim \text{SSF}(\alpha, 0, 2, \nu, \kappa)$. Além disso, para j fixo, consideramos que w_{ij} são variáveis aleatórias independentes.

Na Tabela 23 são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo, erros-padrão e p -valores. Os parâmetros β_0 e β_1 são significativos aos níveis de significância usuais. Realizamos também um teste para o parâmetro de fragilidade, cujo valor da estatística de teste e p -valor são 2,5303 e 0,0558, respectivamente. Ou seja, o parâmetro de fragilidade é significativo ao nível de 10%.

Tabela 23 – Estimativas e erros-padrão assintóticos para os parâmetros do modelo BS_t multivariado

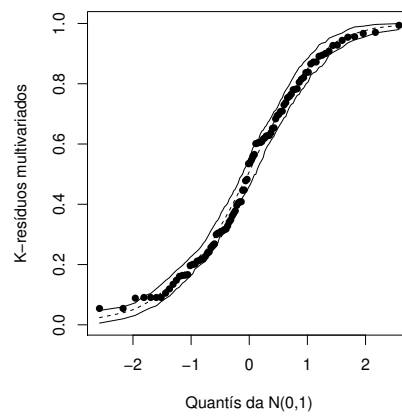
Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	p -valor
β_0	0,7905	0,0124	< 0.05
β_1	-0,4516	0,0227	< 0.05
κ	5,4207	0,2313	—
α	1,0782	0,0091	—

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 34 apresentamos o gráfico normal de probabilidades com envelope simulado para os K -resíduos adaptados multivariados. Observamos um comportamento usual que não indica desvios das suposições feitas inicialmente para o modelo, ou seja, a suposição de que a função de sobrevivência *baseline* a ser assumida é a função de sobrevivência da distribuição SS não parece ser inadequada, o que não ocorreu quando supomos que a função de sobrevivência *baseline* a ser assumida seria a função de sobrevivência da distribuição SN.

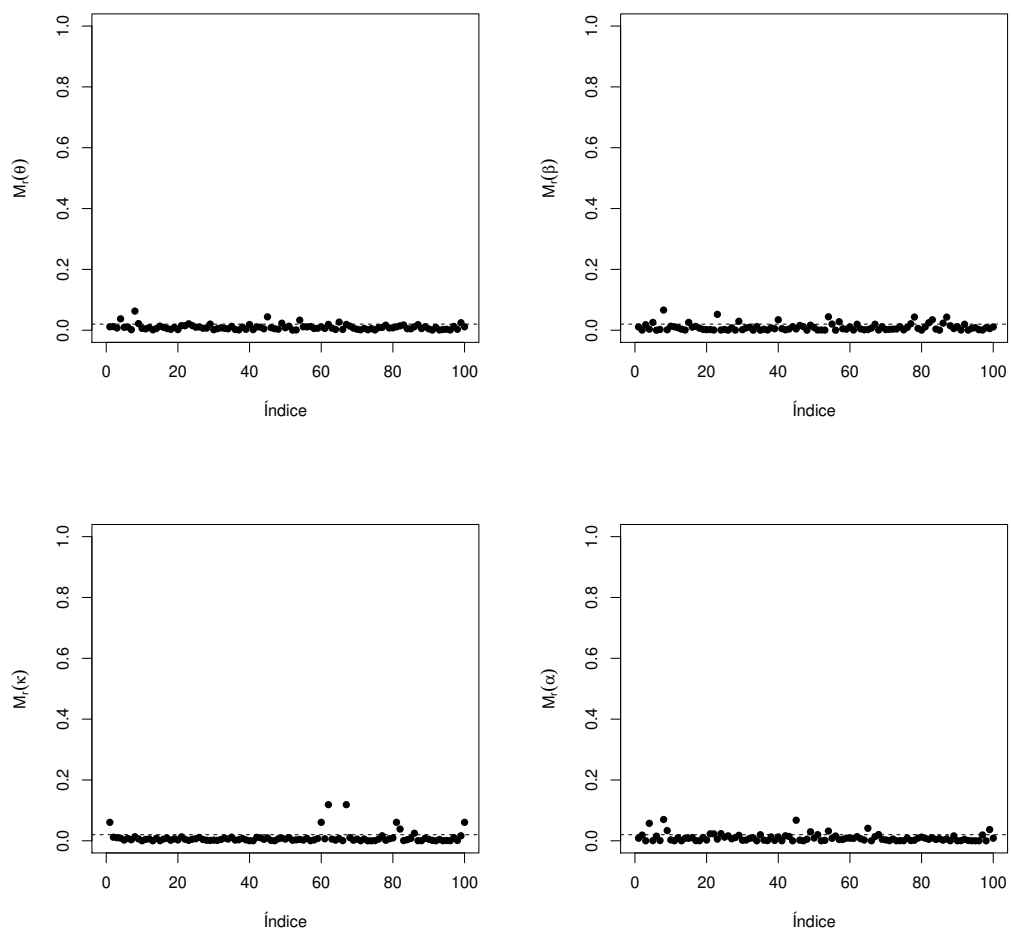
Realizamos uma análise de diagnóstico, em que são apresentadas nas Figuras 35-36 os gráficos de índices de $M_r(\theta)$, $M_r(\beta)$, $M_r(\kappa)$ e $M_r(\alpha)$, em que $M_r(\cdot) = C_r(\cdot) / \sum_{i=1}^n C_r(\cdot)$ considerando os esquemas de perturbação de ponderação de casos e perturbação conjunta na variável resposta e nenhuma observação foi evidenciada. Evidenciando nesse exemplo que a observação #49 foi acomodada ao considerar o modelo de tempo de vida acelerado BS_t multivariado.

Figura 34 – Gráfico normal de probabilidades com envelope - BS_t



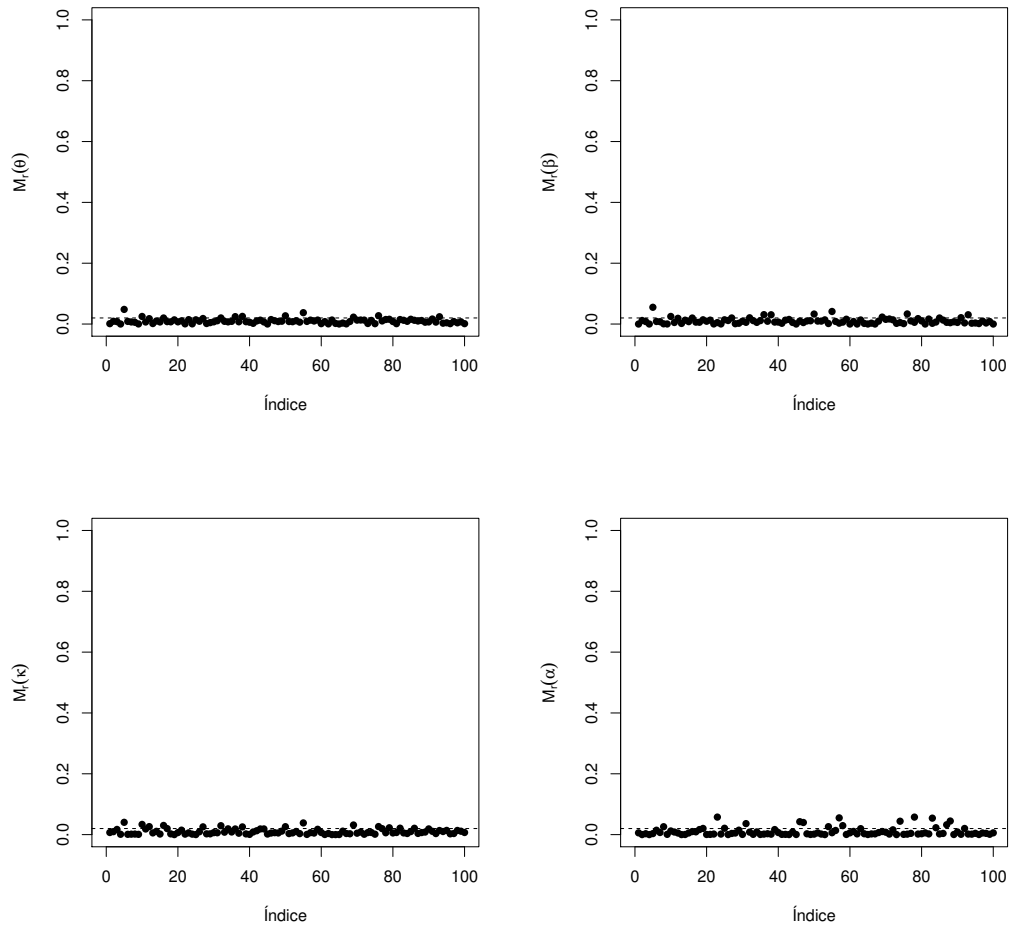
Fonte: Autoria própria.

Figura 35 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação de ponderação de casos no modelo BS_t multivariado



Fonte: Autoria própria.

Figura 36 – Gráficos de índices de $M_r(\cdot)$ para: (a) θ , (b) β , (c) κ e (d) α , sob o esquema de perturbação conjunta na variável resposta no modelo BS_t multivariado



Fonte: Autoria própria.

A seguir, interpretamos os coeficientes estimados do modelo. Consideramos os respectivos tempos t_{ij} e $t_{i'j}$ associados às i -ésima e i' -ésima vacas, no j -ésimo grupo. Suponhamos que a i -ésima vaca é primípara e que a i' -ésima vaca é multípara. Assim, note que

$$\frac{t_{ij}(x_{ij}^{(1)} = 1)}{t_{i'j}(x_{i'j}^{(1)} = 0)} = \exp(\hat{\beta}_1) = \exp(-0,4516) = 0,6366.$$

Ou seja, o tempo estimado até a reconstituição da barreira sangue-leite em vacas multíparas é 36,34% maior que o tempo estimado até a reconstituição da barreira sangue-leite em vacas primíparas.

4.7 CONCLUSÃO

Iniciamos este capítulo estudando um conjunto de dados reais a partir do modelo de tempo de vida acelerado BS multivariado e percebemos que havia indícios de que uma distribuição com caudas mais pesadas para os erros seria mais apropriada. Sendo assim, propusemos o modelo de tempo de vida acelerado BS_t multivariado e alguns procedimentos inferenciais para este modelo foram apresentados, além de apresentar resíduos para avaliar o ajuste do modelo proposto e desenvolver medidas de diagnóstico para o mesmo. Por fim, retornamos ao conjunto de dados abordado no início do capítulo e o analisamos através do modelo de tempo de vida acelerado BS_t multivariado e, com isso, foi evidenciado que este modelo mostrou-se mais apropriado para ajustar esse conjunto de dados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, propomos o modelo de tempo de vida acelerado BS bivariado, logo após estendemos esse modelo para o caso multivariado e, finalmente, desenvolvemos o modelo BS_t multivariado. Além disso, foram propostas as distribuições BSF e BSF_t univariadas e multivariadas. Desenvolvemos procedimentos inferenciais, propusemos alguns resíduos para avaliar o ajuste dos modelos estudados (considerando tanto o caso não-censurado como o caso censurado) e desenvolvemos medidas de diagnóstico baseadas em influência local considerando os esquemas de perturbação de ponderação de casos, perturbação conjunta na variável resposta, perturbação nas variáveis respostas separadamente e perturbação em uma variável explicativa em particular.

Foram realizados alguns estudos de simulação para verificar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança, para observar a capacidade dos resíduos em detectar más especificações e para avaliar a distribuição empírica dos mesmos. Finalmente, as metodologias desenvolvidas neste trabalho foram ilustradas através de conjuntos de dados reais.

REFERÊNCIAS

- BARRIGA, G. D.; LOUZADA-NETO, F.; ORTEGA, E. M.; CANCHO, V. G. A bivariate regression model for matched paired survival data: local influence and residual analysis. *Statistical Methods & Applications*, Springer, v. 19, n. 4, p. 477–495, 2010.
- BARROS, M.; PAULA, G. A. Discussion of “birnbaum-saunders distributions: A review of models, analysis and applications”. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Wiley Online Library, v. 35, n. 1, p. 96–99, 2019.
- BIRNBAUM, Z. W.; SAUNDERS, S. C. A new family of life distributions. *Journal of applied probability*, JSTOR, p. 319–327, 1969.
- CHOI, Y.-H.; MATTHEWS, D. E. Accelerated life regression modelling of dependent bivariate time-to-event data. *Canadian Journal of Statistics*, Wiley Online Library, v. 33, n. 3, p. 449–464, 2005.
- CHOI, Y.-H.; MATTHEWS, D. E. Diagnostic tools for bivariate accelerated life regression models. *Lifetime data analysis*, Springer, v. 21, n. 3, p. 434–456, 2015.
- COLOSIMO, E. A.; GIOLO, S. R. *Análise de sobrevivência aplicada*. [S.l.]: Editora Blucher, 2006.
- COOK, R. D. Assessment of local influence. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Wiley Online Library, v. 48, n. 2, p. 133–155, 1986.
- COX, D. R.; HINKLEY, D. V. *Theoretical statistics*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 1979.
- DANAHY, D. T.; BURWELL, D. T.; ARONOW, W. S.; PRAKASH, R. Sustained hemodynamic and antianginal effect of high dose oral isosorbide dinitrate. *Circulation*, Am Heart Assoc, v. 55, n. 2, p. 381–387, 1977.
- DÍAZ-GARCÍA, J. A. A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 128, n. 2, p. 445–457, 2005.
- DIAZ-GARCIA, J. A.; DOMINGUEZ-MOLINA, J. R. Some generalisations of birnbaum-saunders and sinh-normal distributions. In: CITESEER. *International Mathematical Forum*. [S.l.], 2006. v. 1, n. 35, p. 1709–1727.
- DUCHATEAU, L.; JANSSEN, P. *The frailty model*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- DUCHATEAU, L.; JANSSEN, P.; LINDSEY, P.; LEGRAND, C.; NGUTI, R.; SYLVESTER, R. The shared frailty model and the power for heterogeneity tests in multicenter trials. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 603–620, 2002.
- EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F.; MCNEIL, A. Modelling dependence with copulas. *Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich*, Zurich, Citeseer, v. 14, 2001.
- GALEA, M.; LEIVA-SÁNCHEZ, V.; PAULA, G. Influence diagnostics in log-birnbaum-saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 31, n. 9, p. 1049–1064, 2004.

- GENEST, C.; NEŠLEHOVÁ, J.; ZIEGEL, J. Inference in multivariate archimedean copula models. *Test*, Springer, v. 20, n. 2, p. 223, 2011.
- GENEST, C.; RIVEST, L.-P. Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas. *Journal of the American statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 88, n. 423, p. 1034–1043, 1993.
- GIUSSANI, A.; BONETTI, M. Marshall–olkin frailty survival models for bivariate right-censored failure time data. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, 2019.
- GUTIERREZ, R. G. Parametric frailty and shared frailty survival models. *The Stata Journal*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 2, n. 1, p. 22–44, 2002.
- HANAGAL, D. D.; DABADE, A. D. A comparative study of shared frailty models for kidney infection data with generalized exponential baseline distribution. *Journal of Data Science*, v. 11, n. 1, p. 109–142, 2013.
- HOFERT, M.; MÄCHLER, M.; MCNEIL, A. J. Estimators for archimedean copulas in high dimensions. *arXiv preprint arXiv:1207.1708*, 2012.
- HOUGAARD, P. Frailty models for survival data. *Lifetime data analysis*, Springer, v. 1, n. 3, p. 255–273, 1995.
- HSIEH, J.-J. Estimation of kendall's tau from censored data. *Computational statistics & data analysis*, Elsevier, v. 54, n. 6, p. 1613–1621, 2010.
- JOE, H. *Dependence modeling with copulas*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2014.
- KLEIN, J. P.; MOESCHBERGER, M. L. *Survival analysis: techniques for censored and truncated data*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- KUNDU, D. Bivariate log birnbaum–saunders distribution. *Statistics*, Taylor & Francis, v. 49, n. 4, p. 900–917, 2015.
- KUNDU, D.; BALAKRISHNAN, N.; JAMALIZADEH, A. Bivariate birnbaum–saunders distribution and associated inference. *Journal of multivariate Analysis*, Elsevier, v. 101, n. 1, p. 113–125, 2010.
- LEÃO, J.; LEIVA, V.; SAULO, H.; TOMAZELLA, V. Birnbaum–saunders frailty regression models: Diagnostics and application to medical data. *Biometrical Journal*, Wiley Online Library, v. 59, n. 2, p. 291–314, 2017.
- LEIVA, V.; AYKROYD, R. G.; MARCHANT, C. Discussion of “birnbaum-saunders distribution: A review of models, analysis and applications”. 2018.
- LIU, L.; WOLFE, R. A.; HUANG, X. Shared frailty models for recurrent events and a terminal event. Wiley Online Library, v. 60, n. 3, p. 747–756, 2004.
- MARCHANT, C.; CYSNEIROS, F. J. A. et al. A multivariate log-linear model for birnbaum-saunders distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, IEEE, v. 65, n. 2, p. 816–827, 2015.
- MARCHANT, C.; LEIVA, V.; CYSNEIROS, F. J. A.; VIVANCO, J. F. Diagnostics in multivariate generalized birnbaum-saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 43, n. 15, p. 2829–2849, 2016.

- MCGILCHRIST, C.; AISBETT, C. Regression with frailty in survival analysis. *Biometrics*, JSTOR, p. 461–466, 1991.
- NELSEN, R. B. *An introduction to copulas*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- OAKES, D. Bivariate survival models induced by frailties. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 84, n. 406, p. 487–493, 1989.
- OLIVEIRA, M. I.; BARROS, M.; CAMPOS, J.; CYSNEIROS, F. J. A. Bivariate birnbaum-saunders accelerated lifetime model: estimation and diagnostic analysis. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, p. 1–25, 2020.
- PICKLES, A.; CROUCHLEV, R. Generalizations and applications of frailty models for survival and event data. *Statistical Methods in Medical Research*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 3, n. 3, p. 263–278, 1994.
- PINHEIRO, J.; BATES, D. *Mixed-effects models in S and S-PLUS*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- POTTHOFF, R. F.; ROY, S. A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 51, n. 3-4, p. 313–326, 1964.
- RIECK, J. R.; NEDELMAN, J. R. A log-linear model for the birnbaum—saunders distribution. *Technometrics*, Taylor & Francis, v. 33, n. 1, p. 51–60, 1991.
- ROMEIRO, R. G. Modelo de regressão birnbaum-saunders bivariado. [sn], 2014.
- SAHU, S. K.; DEY, D. K.; ASLANIDOU, H.; SINHA, D. A weibull regression model with gamma frailties for multivariate survival data. *Lifetime data analysis*, Springer, v. 3, n. 2, p. 123–137, 1997.
- SANTOS-NETO, M.; CYSNEIROS, F. J. A.; LEIVA, V.; AHMED, S. E. On new parameterizations of the birnbaum-saunders distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, v. 28, n. 1, 2012.
- SAULO, H.; LEÃO, J.; VILA, R.; LEIVA, V.; TOMAZELLA, V. On mean-based bivariate birnbaum-saunders distributions: Properties, inference and application. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 49, n. 24, p. 6032–6056, 2020.
- SAVU, C.; TREDE, M. Hierarchies of archimedean copulas. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 10, n. 3, p. 295–304, 2010.
- SILVA, M. K. B. d. *Modelos de regressão Birnbaum-Saunders generalizados*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007.
- TSUYUGUCHI, A. B.; PAULA, G. A.; BARROS, M. Analysis of correlated birnbaum—saunders data based on estimating equations. *TEST*, Springer, v. 29, n. 3, p. 661–681, 2020.
- VILCA, F.; BALAKRISHNAN, N.; ZELLER, C. B. The bivariate sinh-elliptical distribution with applications to birnbaum—saunders distribution and associated regression and measurement error models. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 80, p. 1–16, 2014.
- VILCA, F.; ROMEIRO, R. G.; BALAKRISHNAN, N. A bivariate birnbaum—saunders regression model. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 97, p. 169–183, 2016.

WIENKE, A. *Frailty models in survival analysis*. [S.l.]: CRC press, 2010.

APÊNDICE A – EXPRESSÕES USADAS NO VETOR ESCORE E NA MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA DO MODELO BIVARIADO

As expressões usadas nas equações (2.7) e (2.9) da definição do vetor escore são dadas a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}} &= \mathcal{L}''' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \xi_{12} K(\xi_{22}) \xi_{11}^2 \\ &\quad \times K^2(\xi_{21}) + \mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} K(\xi_{22}) \\ &\quad \times \xi_{12} \left[K^2(\xi_{21}) \xi_{11}^2 + \frac{\xi_{21}(1 - \xi_{11}^2) K(\xi_{21})}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}} &= \mathcal{L}''' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \xi_{11} K(\xi_{21}) \xi_{12}^2 \\ &\quad \times K^2(\xi_{22}) + \mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} K(\xi_{21}) \\ &\quad \times \xi_{11} \left[K^2(\xi_{22}) \xi_{12}^2 + \frac{\xi_{22}(1 - \xi_{12}^2) K(\xi_{22})}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}^2} &= \mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} [\xi_{1j} K(\xi_{2j})]^2 \\ &\quad + \mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \left[(\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_{2j}(1 - \xi_{1j}^2) K(\xi_{2j})}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1} \partial w_{i2}} &= \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2} \partial w_{i1}} = \mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \\ &\quad \times \xi_{11} \xi_{12} K(\xi_{21}) K(\xi_{22}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha} &= -\frac{2\xi_{11}\xi_{12}}{\alpha} \mathcal{L}''' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} [K(\xi_{22}) \\ &\quad \times \xi_{21} K^2(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{21}) K^2(\xi_{22})] + \mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) \\ &\quad - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \left\{ [\xi_{11}(\xi_{21}^2 - 1) K(\xi_{21}) - 2\xi_{11}\xi_{21} K^2(\xi_{21})] \right. \\ &\quad \times \frac{1}{\alpha} \xi_{12} K(\xi_{22}) + \frac{1}{\alpha} \xi_{11} K(\xi_{21}) [\xi_{12}(\xi_{22}^2 - 1) K(\xi_{22}) - 2\xi_{12}\xi_{22} \\ &\quad \times K^2(\xi_{22})] \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{ij}} &= -\frac{2}{\alpha} \mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \\ &\quad \times [(\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22}))] + \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{21})) \\ &\quad - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} [\xi_{1j} K(\xi_{2j})(\xi_{2j}^2 - 1 - 2\xi_{2j} K(\xi_{2j}))]. \end{aligned}$$

As expressões utilizadas na definição das componentes da matriz de informação observada são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\mathbf{A}_{1j}) &= \text{diag}\{A_{11}^j, \dots, A_{n1}^j\}, \\
\mathbf{D}(\mathbf{A}_{2j}) &= \text{diag}\{A_{12}^j, \dots, A_{n2}^j\}, \\
\mathbf{D}(\mathbf{d}_j) &= \text{diag}\{\partial/\partial\kappa[a_{1j}(\boldsymbol{\theta})], \dots, \partial/\partial\kappa[a_{nj}(\boldsymbol{\theta})]\}, \\
\mathbf{D}(\mathbf{e}_j) &= \text{diag}\{\partial/\partial\alpha[a_{1j}(\boldsymbol{\theta})], \dots, \partial/\partial\alpha[a_{nj}(\boldsymbol{\theta})]\}, \\
\mathbf{D}(\mathbf{f}) &= \text{diag}\{\partial/\partial\kappa[b_1(\boldsymbol{\theta})], \dots, \partial/\partial\kappa[b_n(\boldsymbol{\theta})]\}, \\
\mathbf{D}(\mathbf{g}) &= \text{diag}\{\partial/\partial\kappa[c_1(\boldsymbol{\theta})], \dots, \partial/\partial\kappa[c_n(\boldsymbol{\theta})]\}
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{D}(\mathbf{h}) = \text{diag}\{\partial/\partial\alpha[c_1(\boldsymbol{\theta})], \dots, \partial/\partial\alpha[c_n(\boldsymbol{\theta})]\},$$

com

$$\begin{aligned}
A_{ij}^j &= \frac{\partial a_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial w_{ij}} = \delta_{i1}\delta_{i2} \left[- \left(\frac{\frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}}}{f(w_{i1}, w_{i2})} \right)^2 + \frac{1}{f(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial^2 f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}^2} \right] \\
&\quad + \delta_{i1}(1 - \delta_{i2}) \left[\frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i1}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i1}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \right)^2 \right] + \delta_{i2}(1 - \delta_{i1}) \left[- \left(\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i2}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i2}} \right) \right] + (1 - \delta_{i1})(1 - \delta_{i2}) \\
&\quad \times \left[- \left(\frac{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}}}{S(w_{i1}, w_{i2})} \right)^2 + \frac{1}{S(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}^2} \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_{ij}^{j'} = \frac{\partial a_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial w_{ij'}} &= \delta_{i1} \left[-\frac{\frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij'}} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}}}{f^2(w_{i1}, w_{i2})} + \frac{1}{f(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial^2 f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij'} \partial w_{ij}} \right] \\
&\times \delta_{i2} + (1 - \delta_{i2}) \delta_{i1} \left[-\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij'} \partial w_{i1}} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i1}}}{\left(\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}} \right)^2} + \frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \right. \\
&\times \frac{\partial}{\partial w_{ij'}} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i1}} \right) \left. \right] + \delta_{i2} (1 - \delta_{i1}) \left[\frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \right. \\
&\times \frac{\partial}{\partial w_{ij'}} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i2}} \right) - \frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij'} \partial w_{i2}} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i2}}}{\left(\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}} \right)^2} \left. \right] \\
&+ (1 - \delta_{i1}) (1 - \delta_{i2}) \left[-\frac{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij'}} \frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}}}{S^2(w_{i1}, w_{i2})} + \frac{1}{S(w_{i1}, w_{i2})} \right. \\
&\times \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij'} \partial w_{ij}} \left. \right],
\end{aligned}$$

em que $j \neq j'$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_{ij}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} &= \delta_{i1} \delta_{i2} \left[-\frac{\frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha} \frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}}}{f^2(w_{i1}, w_{i2})} + \frac{1}{f(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial^2 f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{ij}} \right] \\
&+ \delta_{i1} (1 - \delta_{i2}) \left[-\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{i1}} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i1}}}{\left(\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}} \right)^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i1}} \right) \right. \\
&\times \frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \left. \right] + (1 - \delta_{i1}) \delta_{i2} \left[\frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i2}} \right) \right. \\
&- \frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{i2}} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij} \partial w_{i2}}}{\left(\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}} \right)^2} \left. \right] + (1 - \delta_{i1}) (1 - \delta_{i2}) \left[\frac{1}{S(w_{i1}, w_{i2})} \right. \\
&\times \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{ij}} - \frac{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha} \frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}}}{S^2(w_{i1}, w_{i2})} \left. \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} = & \delta_{i1}\delta_{i2} \left[- \left(\frac{\frac{\partial f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha}}{f(w_{i1}, w_{i2})} \right)^2 + \frac{1}{f(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial^2 f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha^2} \right] \\
& \times (1 - \delta_{i2}) \left[- \left(\frac{\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{i1}}}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{i1}} \right) \right. \\
& \times \left. \frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}}} \right] + (1 - \delta_{i1})\delta_{i2} \left[\frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{i2}} \right) \right. \\
& \times \left. \frac{1}{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}}} \right] + (1 - \delta_{i1})(1 - \delta_{i2}) \left[- \left(\frac{\frac{\partial S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha}}{S(w_{i1}, w_{i2})} \right)^2 \right. \\
& \times \left. \frac{1}{S(w_{i1}, w_{i2})} \frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha^2} \right],
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}^2} = & \xi_{i1}\xi_{i2}K(\xi_{21})K(\xi_{22}) \left\{ \mathcal{L}^{\text{iv}} \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} \right. \\
& \times [\xi_{1j}K(\xi_{2j})]^2 + \mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} \left[\frac{1}{2}\xi_{2j} \right. \\
& \times \left. \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2}\xi_{2j} \right) \right] 2K(\xi_{2j}) + [\xi_{1j}K(\xi_{2j})]^2 + \frac{1}{2}\xi_{2j}(1 - \xi_{1j}^2) \\
& \times K(\xi_{2j}) \} + \mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} \{ 2K(\xi_{2j}) \\
& \times \left[\frac{1}{2}\xi_{2j} + \xi_{1j}^2 \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2}\xi_{2j} \right) \right] + \frac{1}{4} [1 - \xi_{1j}^2 - 2\xi_{2j}^2 + (1 - \xi_{1j}^2) \\
& \times 2\xi_{2j} \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2}\xi_{2j} \right) \} \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_{i2}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2} \partial w_{i1}} \right] = & \xi_{i1}K(\xi_{21}) \{ \mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} \\
& \times [\xi_{12}K(\xi_{22})]^2 + \mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} \\
& \times K(\xi_{22}) \left[\frac{1}{2}\xi_{22} + \xi_{12}^2 \left(K(\xi_{22}) - \frac{1}{2}\xi_{22} \right) \right] \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_{i1}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1} \partial w_{i2}} \right] = & \xi_{i2}K(\xi_{22}) \{ \mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} \\
& \times [\xi_{11}K(\xi_{21})]^2 + \left[\frac{1}{2}\xi_{21} + \xi_{11}^2 \left(K(\xi_{21}) - \frac{1}{2}\xi_{21} \right) \right] \\
& \times K(\xi_{21}) \mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}^3} &= \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \left\{ \mathcal{L}''' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \xi_{1j}^2 K^2(\xi_{2j}) \right. \\
&\quad + \left[\frac{3}{2} \xi_{2j} K(\xi_{2j}) (1 - \xi_{1j}^2) + 3 (\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 \right] \mathcal{L}'' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] \\
&\quad - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} + \mathcal{L}' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \\
&\quad \times \left\{ \xi_{2j} K(\xi_{2j}) + \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2} \xi_{2j} \right) \left[2 \xi_{1j}^2 K(\xi_{2j}) + \frac{1}{2} \xi_{2j} (1 - \xi_{1j}^2) \right] \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4} (1 - \xi_{1j}^2 - 2 \xi_{2j}^2) \right\} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha \partial w_{ij}} &= \frac{\xi_{1j'} K(\xi_{2j'})}{\alpha} \left\{ \mathcal{L}^{\text{iv}} \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \xi_{1j}^2 \right. \\
&\quad \times K^2(\xi_{2j}) [-2 (\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22}))] + \mathcal{L}''' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] \\
&\quad - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} (\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 [(\xi_{2j'} (\xi_{2j'} - 2K(\xi_{2j'})) - 1) + 2 \\
&\quad \times (\xi_{2j} (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1)] - 2 [\xi_{2j'} K(\xi_{2j'}) + \xi_{2j} K(\xi_{2j})] \\
&\quad \times \mathcal{L}''' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \left[(\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \times \xi_{2j} (1 - \xi_{1j}^2) K(\xi_{2j}) \left. \right] + \mathcal{L}'' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \\
&\quad \left\{ [\xi_{2j'} (\xi_{2j'} - 2K(\xi_{2j'})) - 1] \left[(\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 + \frac{1}{2} \xi_{2j} (1 - \xi_{1j}^2) K(\xi_{2j}) \right] \right. \\
&\quad + 2 [\xi_{1j} K(\xi_{2j})]^2 [\xi_{2j} (\xi_{2j} - K(\xi_{2j})) - 1] + \frac{1}{2} [\xi_{2j} (3 \xi_{1j}^2 - 2) K(\xi_{2j}) \\
&\quad \left. \left. + \xi_{2j}^2 (1 - \xi_{1j}^2) K(\xi_{2j}) (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{ij}^2} \right] &= -\frac{2}{\alpha} (\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 \left\{ \mathcal{L}''' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \right. \\
&\quad \times [\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22})] - [\xi_{2j} (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1] \\
&\quad \times \mathcal{L}'' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \left. \right\} - \frac{2}{\alpha} \\
&\quad \times \mathcal{L}'' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} (\xi_{21} K(\xi_{21}) \\
&\quad + \xi_{22} K(\xi_{22})) \left[(\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 + \frac{1}{2} \xi_{2j} (1 - \xi_{1j}^2) K(\xi_{2j}) \right] + \frac{1}{\alpha} \\
&\quad \times \mathcal{L}' \{-\log[1 - \Phi(\xi_{21})] - \log[1 - \Phi(\xi_{22})]\} \left\{ 2(K^2(\xi_{2j})) \right. \\
&\quad \times \xi_{1j}^2 [\xi_{2j} (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1] + \frac{1}{2} [K(\xi_{2j}) \xi_{2j} ((3 \xi_{1j}^2 - 1) \\
&\quad \left. \left. + \xi_{2j} (1 - \xi_{1j}^2) (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j}))) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1} \partial w_{i2}} \right] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2} \partial w_{i1}} \right] = \frac{1}{\alpha} \xi_{11} \xi_{12} K(\xi_{21}) K(\xi_{22}) \{ -2 (\xi_{21} K(\xi_{21}) \\ &\quad + \xi_{22} K(\xi_{22})) \mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] \\ &\quad - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} + [\xi_{21} (\xi_{21} - 2K(\xi_{21})) \\ &\quad + \xi_{22} (\xi_{22} - 2K(\xi_{22})) - 2] \} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \xi_{11} \xi_{12} K(\xi_{21}) K(\xi_{22}) \{ [\xi_{21} (\xi_{21} - 2K(\xi_{21})) + \xi_{22} (\xi_{22} - 2K(\xi_{22})) - 2] \\ &\quad \times [-2\mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} (\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22})) \\ &\quad + \mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} [\xi_{21} (\xi_{21} - 2K(\xi_{21})) + \xi_{22} (\xi_{22} \\ &\quad - 2K(\xi_{22})) - 2] + 4(\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22}))^2 \mathcal{L}^{\text{iv}} \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] \\ &\quad - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} - 2\mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} [K(\xi_{21}) \\ &\quad \times \xi_{21} [\xi_{21} (\xi_{21} - 2K(\xi_{21})) - 1] + \xi_{22} K(\xi_{22}) [\xi_{22} (\xi_{22} - 2K(\xi_{22})) - 1]] \\ &\quad - 2\mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} (\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22})) \\ &\quad \times [\xi_{21} (\xi_{21} - 2K(\xi_{21})) + \xi_{22} (\xi_{22} - 2K(\xi_{22})) - 2] + \mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] \\ &\quad - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} [-2\xi_{21} (K(\xi_{21}) (\xi_{21} - 2K(\xi_{21}) - 1) + \xi_{21}) - 2\xi_{22} \\ &\quad \times (K(\xi_{22}) (\xi_{22} - 2K(\xi_{22}) - 1) + \xi_{22})] \} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial \alpha^2 \partial w_{ij}} &= \frac{1}{\alpha^2} \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \{ [\xi_{2j} (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 2] [-2(\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22})) \\ &\quad \times \mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} + (\xi_{2j}^2 - 1 - 2\xi_{2j} K(\xi_{2j})) \\ &\quad \times \mathcal{L}' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} + 4\mathcal{L}''' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] \\ &\quad - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} (\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22}))^2 - 2\mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] \\ &\quad - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} [\xi_{21} K(\xi_{21}) (\xi_{21} (\xi_{21} - 2K(\xi_{21})) - 1) + \xi_{22} K(\xi_{22}) (\xi_{22} \\ &\quad \times (\xi_{22} - 2K(\xi_{22})) - 1)] - 2 [(\xi_{21} K(\xi_{21}) + \xi_{22} K(\xi_{22})) (\xi_{2j}^2 - 2K(\xi_{2j}) \\ &\quad \times \xi_{2j} - 1) \mathcal{L}'' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \} + (\xi_{2j}^2 + K(\xi_{2j}) \xi_{2j} \\ &\quad \times (\xi_{2j} (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1)) \mathcal{L}' \{ -\log [1 - \Phi(\xi_{21})] - \log [1 - \Phi(\xi_{22})] \}] \} . \end{aligned}$$

Adicionalmente, temos

$$\frac{\partial}{\partial w_{i2}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2} \partial w_{i1}} \right] = \frac{\partial}{\partial w_{i2}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1} \partial w_{i2}} \right] = \frac{\partial}{\partial w_{i1}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2}^2} \right]$$

e

$$\frac{\partial}{\partial w_{i1}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1} \partial w_{i2}} \right] = \frac{\partial}{\partial w_{i1}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i2} \partial w_{i1}} \right] = \frac{\partial}{\partial w_{i2}} \left[\frac{\partial^2 S(w_{i1}, w_{i2})}{\partial w_{i1}^2} \right].$$

APÊNDICE B – EXPRESSÕES USADAS NA MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA E NOS CÁLCULOS DAS CURVATURAS NORMAIS PARA O MODELO BS MULTIVARIADO

As quantidades utilizadas na matriz de informação observada do modelo BS multivariado, apresentado no Capítulo 3, são dadas por

$$\begin{aligned}
 \tilde{d}_i = \frac{\partial}{\partial \beta_l} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) &= \sum_{j=1}^m \delta_{ij} x_{ij}^s \left\{ x_{ij}^l \left\{ \frac{1}{2} K(\xi_{2j}) \left[\xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - \xi_{2j} \right] \left[\frac{\kappa + 1}{\kappa} \right. \right. \right. \\
 &\quad \times \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right) - \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \left. \left. \right] + (\xi_{1j} K(\xi_{2j}))^2 \right. \\
 &\quad \times \left[\left(\frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right) - \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 + \frac{\kappa + 1}{\kappa} \right. \\
 &\quad \times \left(-\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} + \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right) \left. \left. \right] - \frac{1}{4} x_{ij}^l \right. \\
 &\quad \times \left[(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) \left[\xi_{2j} + 2\xi_{1j}^2 K(\xi_{2j}) \right] + \xi_{1j}^2 - \left(1 - \left(\frac{\xi_{2j}}{\xi_{1j}} \right)^2 \right) \right] \left. \right\} + \frac{1}{\kappa} \\
 &\quad \times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \left[\frac{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m x_{ij}^s x_{ij}^l K(\xi_{2j}) \left[\xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - \xi_{2j} \right]}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m x_{ij}^s \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \sum_{j=1}^m x_{ij}^l \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right)^2} \right], \\
 \tilde{e}_i = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m K(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} - \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \left[\frac{\sum_{j=1}^m K(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \sum_{j=1}^m K(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{\left[1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right]^2} \right] \frac{1}{\kappa^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i = \frac{\partial}{\alpha} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) &= \sum_{j=1}^m \delta_{ij} x_{ij}^s \left\{ \frac{1}{\alpha} \xi_{1j} K(\xi_{2j}) [-1 + \xi_{2j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j}))] \left[\frac{\kappa + 1}{\kappa} \right. \right. \\
&\times \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \left. \left. \right] - \frac{2}{\alpha} \xi_{1j} \xi_{2j} K^2(\xi_{2j}) \right. \\
&\times \left[\frac{\kappa + 1}{\kappa} \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right) \right. \\
&- \left(\frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right) + \left. \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] - \frac{1}{2\alpha} \\
&\times [\xi_{1j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) + \xi_{1j} \xi_{2j} [1 + 2K(\xi_{2j})(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j}))]] \left. \right\} + \frac{1}{\kappa} \\
&\times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \left[\frac{\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^m \left\{ x_{ij}^s \xi_{1j} K(\xi_{2j}) [-1 + \xi_{2j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j}))] \right\}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right. \\
&\left. + \frac{\frac{2}{\alpha\kappa} \sum_{j=1}^m [x_{ij}^s \xi_{1j} K(\xi_{2j})] \sum_{j=1}^m \xi_{2j} K(\xi_{2j})}{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right)^2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_i = \frac{\partial}{\kappa} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \left[2 \left(1 - \frac{\left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{\kappa} \right) - \frac{\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa}{\kappa^2} \right. \\
&\times \left. \frac{\sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right] + \psi' \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) - \psi'(\kappa) + \frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \delta_{ij},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_i = \frac{\partial}{\alpha} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\frac{2}{\alpha\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{2j} K(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \left[1 - \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right] \left[1 + \frac{1}{\kappa} \right. \\
&\times \left. \frac{\sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_i = \frac{\partial}{\alpha} \tilde{c}_i(\boldsymbol{\theta}) = & \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left\{ \frac{2}{\alpha^2} \xi_{2j} K(\xi_{2j}) \left\{ \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} [2 - (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) \right. \right. \\
& \times \xi_{2j}] + \left[- \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 + \frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right] \\
& \times 2\xi_{2j} K(\xi_{2j}) \} - \frac{1}{\alpha^2} \{ [\xi_{2j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1] + (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) \\
& \xi_{2j} [1 + 2\xi_{2j} K(\xi_{2j})] + \xi_{2j}^2 \} + \frac{2(\kappa + 1) \xi_{2j} K(\xi_{2j})}{\kappa \alpha^2} \{ [(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) \xi_{2j} \\
& - 2] \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - 2\xi_{2j} K(\xi_{2j}) \left[- \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right. \\
& \left. \left. + \frac{\mathcal{L}''\{+\frac{2}{\alpha^2 \kappa} - \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right] \right\} \} + \left[\frac{2}{\alpha^2 \kappa \left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right)} \right. \\
& \times \left[\sum_{j=1}^m \xi_{2j} K(\xi_{2j}) [\xi_{2j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1] + \frac{\left(\frac{2}{\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{2j} K(\xi_{2j}) \right)^2}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right] \\
& \left. - \frac{\frac{2}{\alpha^2 \kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{2j} K(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right] \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right).
\end{aligned}$$

A seguir apresentaremos as expressões utilizadas na composição da matriz Δ para os esquemas de perturbação conjunta na variável resposta e na variável explicativa, respectivamente.

$$\begin{aligned}
a_i^*(\boldsymbol{\theta}_s) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \beta_s} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) \\
&= \frac{\partial}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} x_{ij}^s \left[\left[-\frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} + \frac{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left. \frac{\kappa + 1}{\kappa} \right] \xi_{1j} K(\xi_{2j}) + \frac{\frac{1}{2} [\xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - \xi_{2j}] }{\xi_{1j}} \right] \right\} + \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\sum_{j=1}^m K(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} x_{ij}^s \left\{ \left[\left[\frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left. \frac{\kappa + 1}{\kappa} - \left[\frac{\mathcal{L}''' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right] \xi_{1j}^2 \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. K^2(\xi_{2j}) + \left[-\frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} + \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right] \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. K(\xi_{2j}) \left[\frac{1}{2} \xi_{2j} + \xi_{1j}^2 \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2} \xi_{2j} \right) \right] + \frac{1}{4} [\xi_{2j} (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) + \xi_{1j}^2] \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left[1 - 4K(\xi_{2j}) \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2} \xi_{2j} \right) \right] - 1 + \left(\frac{\xi_{2j}}{\xi_{1j}} \right)^2 \right] \right\} + \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left[\frac{\sum_{j=1}^m x_{ij}^s K(\xi_{2j}) \left[\frac{1}{2} \xi_{2j} + \xi_{1j}^2 \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2} \xi_{2j} \right) \right]}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m x_{ij}^s \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \frac{\sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right)^2} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_i^*(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \kappa} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{\partial}{\lambda_i} \left\{ -\log \left[1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right] - \frac{\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right. \\
&\quad \times \left. \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) + \psi \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) - \psi(\kappa) - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \right\} \\
&= -\frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} - \left[1 + \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right] \\
&\quad \times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \frac{\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_i^*(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \alpha} \tilde{c}_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{\partial}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} \left[-\frac{2\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\alpha\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \xi_{2j} K(\xi_{2j}) + \frac{2(\kappa+1)K(\xi_{2j})\xi_{2j}}{\kappa\alpha} \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} + \frac{\xi_{2j}(\xi_{2j}-2K(\xi_{2j}))-1}{\alpha} \right] \right\} + \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \frac{2}{\alpha\kappa} \\
&\quad \times \frac{\sum_{j=1}^m K(\xi_{2j})\xi_{2j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1-\Phi(\xi_{2j}))} \left. \right\} \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} \left\{ -\frac{2}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left[1 + 2\xi_{2j} \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2}\xi_{2j} \right) \right] \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \right. \right. \right. \\
&\quad + \xi_{2j} K(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \xi_{1j} \\
&\quad \times K(\xi_{2j}) + \frac{1}{\alpha} \left[\xi_{1j}(\xi_{2j}-2K(\xi_{2j})) \left(\frac{1}{2} + \xi_{2j} K(\xi_{2j}) \right) + \frac{1}{2} \xi_{1j} \xi_{2j} \right] + \frac{2(\kappa+1)}{\kappa\alpha} \\
&\quad \times \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \\
&\quad \times \xi_{2j} K(\xi_{2j}) + \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}}{2\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi(\xi_{2j}))\}} \left[1 + 2\xi_{2j} \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2}\xi_{2j} \right) \right] \left. \right\} \\
&\quad + \frac{2}{\alpha\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \left\{ \frac{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \left(1 + 2\xi_{2j} \left(K(\xi_{2j}) - \frac{1}{2}\xi_{2j} \right) \right)}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1-\Phi(\xi_{2j}))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{2j} K(\xi_{2j}) \sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1-\Phi(\xi_{2j})) \right)^2} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_i^{**}(\boldsymbol{\theta}_s) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \beta_s} \tilde{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) \\
&= \frac{\partial}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} x_{ij}^s \left[\left[-\frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} + \frac{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left. \frac{\kappa + 1}{\kappa} \right] \xi_{1j} K(\xi_{2j}) + \frac{\frac{1}{2} [\xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - \xi_{2j}]}{\xi_{1j}} \right] \right\} + \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\sum_{j=1}^m K(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} \left\{ \beta_s x_{ij}^l \left\{ \frac{K(\xi_{2j})}{2} [\xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - \xi_{2j}] \left(\frac{\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})}{2K(\xi_{2j})} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad - \frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \left. \left. \left. \right) - \xi_{1j}^2 K(\xi_{2j}) \left[\frac{1 + \xi_{2j} (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j}))}{4K(\xi_{2j})} \right. \right. \right. \\
&\quad - K(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}''' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{\xi_{2j}}{\xi_{1j}} \right)^2 \right] - \frac{\kappa + 1}{\kappa} K(\xi_{2j}) \left[\frac{\xi_{2j} - \xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j}))}{2} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \xi_{1j}^2 K(\xi_{2j}) \left[\left(\frac{\mathcal{L}' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \left(\frac{\mathcal{L}'' \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L} \{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right) \right] \right] \right] \right\} \right\} + \frac{\beta_s \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{\kappa} \left\{ \sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \right. \\
&\quad \times \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m x_{ij}^l \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right)^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [(\xi_{2j} - \xi_{1j}^2 (\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j}))) \\
&\quad \times x_{ij}^l K(\xi_{2j})] \frac{1}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \left. \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_i^{**}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \kappa} \tilde{b}_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{\partial}{\lambda_i} \left\{ -\log \left[1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right] - \frac{\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right. \\
&\quad \times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) + \psi \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) - \psi(\kappa) - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left. \right\} \\
&= \frac{\frac{\beta_s}{\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} - \frac{\left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \beta_s}{\kappa^2} \left[\sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j}) \right. \\
&\quad \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} + \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \sum_{j=1}^m \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j})) \right)^2} \left. \right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c_i^{**}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \alpha} \tilde{c}_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{\partial}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} \left[-\frac{2\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\alpha \mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \xi_{2j} K(\xi_{2j}) + \frac{2(\kappa + 1)K(\xi_{2j})\xi_{2j}}{\kappa \alpha} \right. \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} + \frac{\xi_{2j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1}{\alpha} \right] \right\} + \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \frac{2}{\alpha \kappa} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\sum_{j=1}^m K(\xi_{2j})\xi_{2j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi(\xi_{2j}))} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \delta_{ij} \left\{ \frac{\beta_s \xi_{1j} K(\xi_{2j})}{\alpha} \left\{ [\xi_{2j}(\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})) - 1] \left[\frac{\xi_{2j} - 2K(\xi_{2j})}{2K(\xi_{2j})} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} + \frac{\xi_{2j}}{2K(\xi_{2j})} + \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\xi_{2j} K(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\beta_s \xi_{2j}}{\xi_{1j}^2 K(\xi_{2j})} \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

**APÊNDICE C – EXPRESSÕES USADAS NA MATRIZ DE INFORMAÇÃO
OBSERVADA E NOS CÁLCULOS DAS CURVATURAS NORMAIS PARA O
MODELO BS_t MULTIVARIADO**

As quantidades utilizadas na matriz de informação observada do modelo BS multivariado, apresentado no Capítulo 3, são dadas por

$$\begin{aligned}
 \check{d}_i = \frac{\partial}{\partial \beta_t} \check{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) = & \sum_{j=1}^m \delta_{ij} x_{ij}^s x_{ij}^l \left\{ L(\xi_{2j}) \left\{ \frac{1}{2} \left[-\xi_{1j}^2 \left(\frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right) \right. \right. \right. \\
 & + \xi_{2j} \left[-\frac{\kappa+1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} + \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right] \\
 & + \xi_{ij}^2 L(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \Big\} \\
 & + \frac{1}{4} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\xi_{2j}}{\xi_{1j}} \right)^2 \right] \left\{ 1 - \frac{\xi_{1j}^2}{\xi_{2j}} \left(\frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right) \right\} \right. \\
 & + \xi_{2j} \left\{ \left[\left(\frac{\xi_{1j}}{\xi_{2j}} \right)^2 - 2 \right] \left(\frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right) - \frac{\xi_{1j}^2}{\xi_{2j}} \right. \\
 & \times \left\{ \frac{\nu+1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \left[1 - \frac{2}{\nu} \xi_{2j}^2 \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \right] + 2L(\xi_{2j}) \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right) \right\} \Big\} \Big\} - \frac{\kappa+1}{\kappa} (\xi_{1j} L(\xi_{2j}))^2 \\
 & \times \left[-\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} + \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \Big\} \\
 & - \frac{\left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{2\kappa \left[1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1-\Phi_t(\xi_{2j})) \right]} \left\{ \sum_{j=1}^m x_{ij}^s x_{ij}^l L(\xi_{2j}) \left[\xi_{2j} - \xi_{1j}^2 \left(\frac{\nu+1}{\nu} \right. \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right) \right] - \frac{\frac{2}{\kappa} \sum_{j=1}^m x_{ij}^s \xi_{1j} L(\xi_{2j}) \sum_{j=1}^m x_{ij}^l \xi_{1j} L(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))} \Big\},
 \end{aligned}$$

$$\check{e}_i = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \check{b}_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m L(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} - \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \left[\frac{\sum_{j=1}^m L(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} + \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j})) \sum_{j=1}^m L(\xi_{2j}) x_{ij}^s \xi_{1j}}{\left[1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j})) \right]^2} \right] \frac{1}{\kappa^2},$$

$$\begin{aligned} \check{f}_i = \frac{\partial}{\partial \alpha} \check{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) &= \sum_{j=1}^m \frac{\delta_{ij} x_{ij}^s \xi_{1j} L(\xi_{2j})}{\alpha} \left\{ \left[1 - \xi_{2j} \left[\frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right] \right] \right. \\ &\times \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} + 1 \right] - \frac{\kappa+1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \Bigg] \\ &+ \left[\left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 - \frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right] \\ &+ \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 - \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \Bigg] \frac{2\xi_{2j} L(\xi_{2j})}{\kappa} \\ &\times (\kappa+1) - \frac{\nu+1}{\nu} \frac{\xi_{2j}}{L(\xi_{2j})} \left(1 - \frac{\xi_{2j}^2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \right) \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \Bigg\} \\ &+ \left[\frac{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left\{ x_{ij}^s \xi_{1j} L(\xi_{2j}) \left[1 - \xi_{2j} \left[\frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right] \right] \right\}}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \right. \\ &\left. + \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m [x_{ij}^s \xi_{1j} L(\xi_{2j})] \sum_{j=1}^m \xi_{2j} L(\xi_{2j})}{\left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j})) \right)^2} \right] \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{\alpha \kappa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{g}_i = \frac{\partial}{\partial \kappa} \check{b}_i(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \left[2 \left(1 - \frac{\left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{\kappa} \right) - \frac{\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa}{\kappa^2} \right. \\ &\times \left. \frac{\sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \right] + \psi' \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) - \psi'(\kappa) + \frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \delta_{ij}, \end{aligned}$$

$$\check{h}_i = \frac{\partial}{\partial} \check{b}_i(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\frac{2}{\alpha\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{2j} L(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \left[1 - \frac{1}{\kappa} \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \left[1 + \frac{1}{\kappa} \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \right] \right],$$

e

$$\check{p}_i = \frac{\partial}{\partial} \check{c}_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left\{ \frac{2}{\alpha^2} \xi_{2j} L(\xi_{2j}) \left\{ \left[2 - \frac{\nu+1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \xi_{2j}^2 + 2\xi_{2j} L(\xi_{2j}) \right] \right. \right. \\ \times \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} + 1 - \frac{\kappa+1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right] \\ + 2\xi_{2j} L(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right. \\ \left. \left. - \frac{\kappa+1}{\kappa} \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\nu+1}{\nu\alpha} \xi_{2j}^2 \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \frac{2}{\alpha\nu} \xi_{2j}^2 - \frac{3\alpha}{4} \xi_{2j}^2 \right\} \right\} \\ - \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{\kappa\alpha^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j})) \right\}} \left\{ \left[- \sum_{j=1}^m \{ \xi_{2j} L(\xi_{2j}) \left[-1 + \frac{\nu+1}{\nu} \right. \right. \right. \right. \\ \times \left. \left. \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \xi_{2j}^2 \right] + 2\xi_{2j} L(\xi_{2j}) \right\} + \sum_{j=1}^m \xi_{2j} L(\xi_{2j}) \right] - \left(\sum_{j=1}^m \xi_{2j} L(\xi_{2j}) \right)^2 \\ \left. \times \frac{2}{\kappa \left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j})) \right)} \right\}.$$

A seguir apresentaremos as expressões utilizadas na composição da matriz Δ para os respectivos esquemas de perturbação conjunta na variável resposta e na variável explicativa.

$$\begin{aligned}
\check{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \beta_s} \check{a}_i(\boldsymbol{\theta}_s) \\
&= \sum_{j=1}^m -\delta_{ij} x_{ij}^s \left\{ L(\xi_{2j}) \left\{ \left[\xi_{1j}^2 \left(L(\xi_{2j}) - \frac{\nu+1}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu} \right)^{-1} - \frac{\xi_{2j}}{\nu} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \xi_{2j} \right] \left[-\frac{\kappa+1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} + \frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right] \right. \\
&\quad \left. \left. + \xi_{ij}^2 L(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\xi_{2j}}{\xi_{1j}} \right)^2 \right] \left\{ 1 - \frac{\xi_{1j}^2}{\xi_{2j}} \left(\frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right) \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \left[\frac{\xi_{1j}^2}{\xi_{2j}} + 2L(\xi_{2j}) \xi_{1j}^2 - \frac{2\xi_{1j}^2 \xi_{2j}}{\nu} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \xi_{2j} \left(\left(\frac{\xi_{1j}}{\xi_{2j}} \right)^2 - 2 \right) \right] - 2\xi_{2j} L(\xi_{2j}) \left[\left(\frac{\xi_{1j}}{\xi_{2j}} \right)^2 - 2 \right] - 4(\xi_{1j} L(\xi_{2j}))^2 \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\kappa+1}{\kappa} \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right\} \right\} \\
&\quad \times (\xi_{1j} L(\xi_{2j}))^2 + \frac{\left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{2\kappa \left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1-\Phi_t(\xi_{2j})) \right)} \left\{ \sum_{j=1}^m x_{ij}^s L(\xi_{2j}) \right. \\
&\quad \times \left[\xi_{2j} + \xi_{1j}^2 \left(-\frac{\nu+1}{\nu} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - 2L(\xi_{2j}) \right) \right] - \sum_{j=1}^m x_{ij}^s \xi_{1j} L(\xi_{2j}) \\
&\quad \left. \times \frac{\frac{2}{\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{1j} L(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1-\Phi_t(\xi_{2j}))} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{b}_i(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \alpha} \check{c}_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \left\{ -\frac{2}{\alpha} \xi_{1j} L(\xi_{2j}) \left\{ \left[\frac{1}{2} + \xi_{2j} \left(L(\xi_{2j}) - \frac{\nu+1}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \frac{\xi_{2j}}{\nu} \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \times \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} + 1 - \frac{\kappa+1}{\kappa} \frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right] \\
&\quad + \xi_{2j} L(\xi_{2j}) \left[\frac{\mathcal{L}'''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\kappa+1}{\kappa} \left[\frac{\mathcal{L}''\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} - \left(\frac{\mathcal{L}'\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}}{\mathcal{L}\{-\log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))\}} \right)^2 \right] \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\nu+1}{2\nu} \xi_{1j} \xi_{2j} \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \left\{ \frac{2}{\alpha\nu} \xi_{2j}^2 \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} - \frac{2}{\alpha} \right\} \Bigg\} \\
&\quad - \frac{2 \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right)}{\alpha \kappa \left(1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j})) \right)} \left\{ \sum_{j=1}^m \xi_{1j} L(\xi_{2j}) \left[\frac{1}{2} + \xi_{2j} \left[L(\xi_{2j}) - \frac{\nu+1}{2} \right] \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \left(1 + \frac{1}{\nu} \xi_{2j}^2 \right)^{-1} \frac{\xi_{2j}}{\nu} \right] \right] - \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{2j} L(\xi_{2j}) \sum_{j=1}^m \xi_{1j} L(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\check{c}_i(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \kappa} \check{b}_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= -\frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \xi_{1j} L(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} - \left[1 + \frac{\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))} \right] \\
&\quad \times \left(\sum_{j=1}^m \delta_{ij} + \kappa \right) \frac{\frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^m \xi_{1j} L(\xi_{2j})}{1 - \frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \log(1 - \Phi_t(\xi_{2j}))}.
\end{aligned}$$