UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Kézia Patrícia Mestre Carvalho

Sobre a imagem da aplicação de Gauss de hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de Minkowski

Recife

2021

Kézia Patrícia Mestre Carvalho

Sobre a imagem da aplicação de Gauss de hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de Minkowski

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Dr. Fábio Reis dos Santos

Recife

2021

Catalogação na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da S. Portes, CRB4-1217

C331s Carvalho, Kézia Patrícia Mestre
Sobre a imagem da aplicação de Gauss de hipersuperfícies tipo-espaço no espaço de Minkowski / Kézia Patrícia Mestre Carvalho. – 2021.
69 f.

Orientador: Fábio Reis dos Santos.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Geometria. 2. Hipersuperfícies tipo-espaço. I. Santos, Fábio Reis dos (orientador). II. Título.

516 CDD (23. ed.) UFPE- CCEN 2022 - 26

KÉZIA PATRÍCIA MESTRE CARVALHO

SOBRE A IMAGEM DA APLICAÇÃO DE GAUSS DE HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 30/07/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Júnior (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Henrique Fernandes de Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal de Campina Grande

Aos meus pais, José Patrício e Jucelmi. A Deus toda honra e glória!

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador do universo, "porque Nele vivemos, nos movemos e existimos"(Atos 17:28). A Ele toda honra e glória!

Aos meus pais, Jucelmi e José Patrício, não existem palavras que sejam suficientes para agradecer por todo amor, dedicação e apoio.

Ao meu orientador, Fábio Reis, que sempre se disponibilizou a me ajudar com paciência e profissionalismo e sobretudo pelos ensinamentos que me conduziram nesse trabalho.

Aos meus colegas da UFPE, que contribuiram de forma direta ou indireta, para o meu crescimento e minha formação.

E em especial, ao meu esposo Carlos Alberto, que sempre teve paciência comigo, me ajudou, incentivando e sendo sempre um apoio em todos os momentos.

"Até aqui nos ajudou o Senhor!"1 Samuel 7:12b.

RESUMO

Neste trabalho lidaremos com hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas no espaço de Lorentz-Minkowski com curvatura média limitada e cuja aplicação de Gauss aponta para o futuro. Estabeleceremos as notações e pré-requisitos necessários para de entendimento do nosso trabalho e apresentaremos alguns conceitos fundamentais e propriedades de Variedades de Lorentz. Destacaremos, em particular, a apresentação de uma ferramenta analítica que será de fundamental importância para a obtenção do resultado principal: o Princípio do máximo de Omori-Yau, que visa suprir a carência da existência de pontos críticos de funções limitadas definidas em Variedades Riemannianas. Consoante a isso, sob uma restrição apropriada da aplicação de Gauss e com uma aplicação adequada da ferramenta analítica citada acima, obteremos uma extensão do teorema de Xin-Aiyama sobre hipersuperfícies tipo-espaço completas imersas com curvatura média limitada em Espaço de Minkowski. Além disso, por fim, apresentaremos um exemplo que motiva a hipótese do nosso Teorema principal.

Palavras-chaves: variedades de Lorentz; hipersuperfícies tipo-espaço; curvatura média limitada.

ABSTRACT

In this work we deal with complete spacelike hypersurfaces immersed in Lorentz-Minkowski space having bounded mean curvature and whose Gauss map points to the future. We will establish the notations and prerequisites necessary to understand our work and we will present some fundamental concepts and properties of Lorentz manifolds. We will highlight, in particular, the presentation of an analytical tool that will be of fundamental importance to obtain the main result: the Omori-Yau Maximum Principle, which aims to supply the lack of the existence of critical points of bounded functions defined in Riemannian manifolds. Accordingly, under suitable restrictions on the Gauss map and with a proper application of the aforementioned analytical tool, we obtain an extension of the Xin-Aiyama theorem on immersed complete space-like hypersurfaces with bounded mean curvature in Minkowski space. Furthermore, finally, we will present an example that motivates the hypothesis of our Main Theorem.

Keywords: Lorentz manifolds; spacelike hypersuface; bounded mean curvature.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos vem sendo crescente o interesse pelo estudo da geometria de hipersuperfícies tipo-espaço imersas em ambientes Lorentzianos. Em verdade, é bem conhecido que hipersuperfícies com curvatura média constante são soluções de primeira ordem para o problema isoperimétrico, tanto no caso em que o espaço ambiente é uma variedade Riemanniana ou quando é uma variedade Lorentziana. No caso Riemanniano, estas hipersuperfícies vem sendo estudadas em profundidade desde o início da Geometria Diferencial. O caso Lorentziano, tem atraído a atenção de um grande número de pesquisadores tanto na áreas da física como na matemática. Neste sentido, podemos pensar essas hipersuperfícies sobre dois pontos de vista: o físico e o matemático.

Do ponto de vista da física, as hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média constante identicamente nula, são soluções para o problema de Cauchy associado as equações de campo de Einstein, e no caso em que a curvatura média é diferente de zero, são normalmente usadas para compreender o comportamento das ondas gravitacionais (para maiores detalhes confira as referências (STUMBLES, 1981; MARSDEN; TIPLER, 1980; GODDARD, 1977b; GODDARD, 1977a; CHOQUET-BRUHAT, 1976; CALABI, 1970)

Por outro lado, do ponto de vista da matemática, as hipersuperfícies tipo-espaço também desempenham um interessante papel devido as suas boas propriedades tipo- Bernstein. Este tipo de hipersuperfícies foram estudadas pela primeira vez no exemplo de espaço-tempo mais simples: o espaço de Lorentz-Minkowski. Neste cenário, Calabi (CALABI, 1970), Cheng e Yau (CHENG; YAU, 1976) descobriram um tipo de propriedade tipo-Bernstein no caso das hipersuperfícies com curvatura média nula que estabelece:

"As únicas hipersuperfícies tipo-espaço completas no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ *com curvatura média identicamente nula são os hiperplanos tipo-espaço."*

Calabi mostrou o caso $n \geq 4$ e o caso em que n é arbitrário foi mostrado por Cheng e Yau. Mas recentemente, Aiyama (AIYAMA, 1991) e Xin (XIN, 1991) simultaneamente e independentemente, caracterizaram os hiperplanos tipo-espaço como sendo as únicas hipersuperfícies tipo- espaço completas com curvatura média constante no espaço de Lorentz-Minkowski, $\mathbb{L}^{n+1}$ cuja a imagem pela aplicação normal de Gauss esta contida em uma bola geodésica do espaço hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n$ (para uma versão mais fraca desse resultado ver (PALMER, 1990)).

Nosso trabalho está dividido em três capítulos e será direcionado ao estudo de hipersuperfícies tipo-espaço imersas no espaço de Lorentz-Minkowski. A seguir descreveremos sucintamente os conteúdos de cada um destes capítulos.

No Capítulo 1, estabelecemos as notações e pré-requisitos necessários para um bom entendimento do problema a ser tratado. Destacamos, em particular, apresentação de uma ferramenta analítica que será de fundamental importância para a obtenção do resultado principal: o Princípio do máximo de Omori-Yau (cf. Lema (OMORI, 1967)). Em outras palavras, este resultado visa supri a carência da existência de pontos críticos de funções limitadas definidas em Variedades Riemannianas através de uma sequência maximizante que satisfaz as mesmas propriedades de um ponto de máximo.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos fundamentais e propriedades das variedades de Lorentz. Começaremos definindo o que é uma variedade de Lorentz temporalmente orientada e também as propriedades de imersões isométricas entre duas variedades. A partir dessas definições chegaremos as Fórmula de Gauss a qual define uma aplicação bilinear e simétrica chamada Segunda Forma Fundamental da imersão. Consequentemente, obtemos a Fórmula de Weingarten e assim, obtemos as equações fundamentais das imersões isométricas: a equação de Gauss e Codazzi. Além disso, reescreveremos estas equações para o caso em que o espaço ambiente é uma variedade Lorentziana (n+1)-dimensional.

Ainda nessa capítulo, reescreveremos as equações básicas das imersões isométricas apresentadas no início dessa capítulo, mas para o caso em que o espaço ambiente é uma variedade Lorentziana (n+1)-dimensional e M é uma hipersuperfície tipo-espaço imersa.

No último, apresentaremos os principais resultados desse trabalho que versa sobre hipersuperfícies no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Por intermédio da Equação de Gauss obtemos o seguinte resultado que garante uma estimativa inferior para a curvatura de Ricci de Σ^n em termos da curvatura média H, em outras palavras:

Lema (cf. Lema 4.1.3) Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Então a sua curvatura de Ricci satisfaz:

$$Ric(X,X) \geq -2H^2|X|^2, \qquad n = 2$$

e

$$Ric(X,X) \geq -\frac{n^2H^2}{4}|X|^2, \qquad n > 2, \tag{1.1}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n esta contido em um hiperplano tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$.

Além disso, com respeito a hipersuperfície tipo-espaço Σ^n, consideremos duas funções naturalmente associadas a imersão, a saber: a altura vertical e a função ângulo com respeito ao vetor tipo-tempo $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{L}^{n+1}$.

Proposição (cf. Proposição 4.1.5) Se Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$, então

$$\Delta h = nH\langle N, e_{n+1}\rangle. \tag{1.2}$$

Para um melhor entendimento sobre a hipótese da imagem, proposta por Aiyama (AIYAMA, 1991) e Xin (XIN, 1991), sabemos que a bola geodésica centrada em um vetor $a \in \mathbb{H}^n$ e raio $\rho > 0$ é dada por (cf. Proposição (4.1.2))

$$B(a, \rho) = \{p \in \mathbb{H}^n \,;\, -\cosh(\rho) < \langle p, a\rangle \leq -1\}. \tag{1.3}$$

Nesta configuração, dizemos que a imagem hiperbólica de Σ^n está contida no fecho de alguma bola geodésica de $\mathbb{H}^n$ se $N(\Sigma) \subset B(a, \rho)$.

Consoante a esta prévia digressão, sob uma restrição apropriada da imagem hiperbólica $N(\Sigma)$ e com uma aplicação adequada do Princípio do máximo de Omori-Yau, obtemos a seguinte extensão do Teorema de Xin-Aiyama:

Teorema (cf. Teorema 4.1.7) Seja $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperficie tipo-espaço completa limitada longe do infinito passado de $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média limitada $H \geq 0$. Se a imagem hiperbólica de Σ^n está contida no fecho de uma bola geodésica centrada em $e_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ cujo raio ρ satisfaz

$$\cosh\rho \leq 1 + \inf_{\Sigma} H,$$

então Σ^n é um hiperplano tipo-espaço.

Finalizamos este trabalho apresentando um exemplo (cf. Exemplo 4.1.8) que motiva a hipótese da imagem hiperbólica da hipersupefície estar contida no fecho de uma bola geodésica de $\mathbb{H}^n$ no Teorema 4.1.7.

Este trabalho teve como base o artigo de Lima, Henrique Fernandes (LIMA, 2011), intitulado *"On the Gauss map of complete spacelike hypersurfaces with bounded mean curvature in the Minkowski space"*, publicado em 2011 no The Belgian Mathematical Society.

2 PRELIMINARES

2.1 ELEMENTOS DE VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Esta seção objetiva estabelecer as notações que serão utilizadas nas demais seções destas notas. Para maiores detalhes indicamos (O'NEILL, 1983; CARMO, 2008; XIN, 1991).

Definição 2.1.1. *Dizemos que um conjunto M é uma variedade diferenciável (Hausdorff e com base enumerável) de dimensão n, se existir uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M, tais que:*

(a) $M = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} x_\alpha(U_\alpha)$;

(b) Para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$ e $x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}) \to x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \quad e \quad x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \to x_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta})$$

são diferenciáveis.

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado parametrização de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é uma vizinhança coordenada em p . A família $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é chamada de atlas de M. Um atlas $\mathcal{A}$ de M dá origem a um único atlas maximal $\tilde{\mathcal{A}}$, dado por

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{x : U \to M\, ;\, x^{-1} \circ x_\alpha \ \text{ e } \ x_\alpha^{-1} \circ x \quad \text{são suaves para todo } \alpha \in \Lambda\},$$

este atlas maximal é chamado de estrutura diferenciável de M.
Indicaremos que M tem dimensão n por M^n. Note que uma n-variedade possui uma estrutura topológica natural. Para isso definimos

$$A \subset M \text{ é aberto } \iff x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha)) \text{ é aberto no } \mathbb{R}^n \text{ para todo } \alpha \in \Lambda.$$

Exemplo 2.1.2. *Um mesmo conjunto M pode admitir mais de uma estrutura diferenciável. Seja $M = \mathbb{R}$. Veja que M possui um atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, I)\}$ que possui a identidade $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como a única parametrização. Este atlas gera uma estrutura diferenciável denotada por $\tilde{\mathcal{A}}$. Por outro lado, M pode ser munido de um outro atlas $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, x(t) = t^3)\}$ composto também por uma única parametrização e que gera uma outra estrutura diferenciável $\tilde{\mathcal{A}}_1$ distinta de $\tilde{\mathcal{A}}$: de fato, $x^{-1} \circ I = \sqrt[3]{t}$ não é diferenciável em 0 e portanto $x \notin \tilde{\mathcal{A}}$.*

Definição 2.1.3. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $F : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to N$ em $F(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ em p tal que $F(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação*

$$y^{-1} \circ F \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$.

Dizemos que F é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 2.1.4. *Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ de um intervalo aberto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ de $\mathbb{R}$ sobre uma variedade diferenciável M, é uma curva diferenciável em M. Se $\alpha(0) = p \in M$, o vetor tangente à curva α em $t = 0$ é o funcional $\alpha'(0) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\alpha'(0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0},$$

onde $\mathcal{C}^\infty(M)$ é o conjunto das funções diferenciáveis em M.

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ denotado por T_pM e chamado de espaço tangente de M em p.

Proposição 2.1.5. *Seja $F : M^n \to N^m$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis M e N. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. A aplicação $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ dada por $dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α. Esta aplicação é a diferencial de F em p.*

Definição 2.1.6. *Um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis M^n e N^n é uma aplicação $F : M^n \to N^n$ diferenciável com inversa diferenciável.F é dito um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem abertos U de p em M e V de $F(p)$ em n tais que $F : U \to V$ é um difeomorfismo.*

No Exemplo 2.1.2, as variedades de dimensão 1 $\{(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{A}})\}$ e $\{(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{A}}_1)\}$, são difeomorfas via $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(t) = t^3$.

A demonstração do teorema seguinte é uma aplicação imediata do Teorema da Função Inversa no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.7. (da Aplicação Inversa) *Se $F : M^n \to N^n$ é uma aplicação diferenciável entre variedades e se $p \in M^n$ é tal que $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é um isomorfismo, então existe um aberto $U \subset M$ que contém p tal que $F\Big|_U$ é um difeomorfismo.*

Definição 2.1.8. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente com $m > n$. Dizemos que a aplicação $F : M \to N$ é uma*

(a) imersão se a aplicação diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$;

(b) a imersão F é dita um mergulho se $F : M \to F(M)$ é um homeomorfismo (com $F(M)$ tendo a topologia induzida por N).

(c) Se F é um mergulho, $F(M)$ é chamada de subvariedade mergulhada.

(d) Se F é uma imersão, $F(M)$ é chamada de subvariedade imersa.

Exemplo 2.1.9. *Uma parametrização $x : U \to M^2$ de uma superfície regular $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é por definição uma imersão.*

Como aplicação do Teorema da Aplicação Inversa 2.1.7, obtem-se

Proposição 2.1.10. *Seja $F : M^n \to N^m$ é uma aplicação diferenciável entre variedades de dimensão $n \geq m$ e q é um valor regular de F. Então o conjunto $F^{-1}(q) \subset M$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão $n - m$.*

Proposição 2.1.11. *Seja $F : M^n \to N^m$, $m \geq n$, uma imersão de uma variedade diferenciável M^n na variedade diferenciável N^m. Então para cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que a restrição $F\Big|_V : V \to N$ é um mergulho.*

Definição 2.1.12. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.*

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\partial_i$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\partial_i\}$ é a base associada a x, $i = 1, \ldots, n$.

Definição 2.1.13. *Dizemos que uma variedade diferenciável M é orientável se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

(a) Para todo par $\alpha, \beta \in \Lambda$, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.

Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição (a) é uma orientação para M. Duas estruturas diferenciáveis satisfazendo a condição (a) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição (a).

Exemplo 2.1.14. *(a) Toda variedade cujo atlas possui uma única parametrização é orientável, pois o atlas consistindo desta única parametrização é trivialmente coerente (isto é, $det(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha) > 0$).*

(b) Variedades que podem ser cobertas por duas parametrizações cuja interserção é um conjunto conexo também são orientáveis. Se na interseção o determinante da derivada da mudança de coordenadas é negativo, basta trocar a ordem das variáveis em uma das parametrizações, para mudar o sinal do determinante e assim obter um atlas.

(c) A esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser coberta por duas projeções estereográficas que se interceptam ao longo de um conjunto conexo (a interseção é a esfera menos os pólos).

Uma superfície que não satifaz o item (a) da Definição 2.1.13 é dita não-orientável.

Os próximos resultados são devidos a colchetes de Lie.

Definição 2.1.15. *Sejam X e Y campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$. Definimos o colchete de Lie dos campos X e Y, denotado por $[X, Y]$ como*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Proposição 2.1.16. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M e sejam*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j$$

as expressões de X e Y associadas a um sistema de coordenadas locais $x : U \to M$. Então existe um único campo de vetores $[X, Y]$, dado pela Definição 2.1.15, cuja expressão em coordenadas locais é:

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_i \partial_i(b_j) - b_i \partial_i(a_j)\right) \partial_j.$$

Segue então que:

Proposição 2.1.17. *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, então:*

(a) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad e \quad [X, cZ + dW] = c[X, Z] + d[X, W]$

(b) $[X, Y] = -[Y, X]$

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(Identidade de Jacobi)*

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$

2.2 FORMAS BILINEARES SIMÉTRICAS

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma forma bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma aplicação que satisfaz:

1. $b(au, v) = ab(u, v) = b(u, av)$;
2. $b(u + w, v) = b(u, v) + b(w, v)$;
3. $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w)$,

para todo $u, v, w \in V$.

A forma b é dita *simétrica* se $b(u, v) = b(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

Definição 2.2.1. *Dizemos que a forma bilinear b é:*

1. *Positiva definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v, v) > 0$;*
2. *Negativa definida se para todo $v \in V$ com $v \neq 0$ implicar $b(v, v) < 0$;*
3. *Não-degenerada se $b(v, w) = 0$ para qualquer $w \in V$ implicar $v = 0$.*

O caso em que b é semi-definida é análogo trocando apenas a desigualdade estrita. Se b é uma forma bilinear simétrica em V então para qualquer subespaço $W \subset V$, a restrição $b\big|_{W \times W}$, denotada por $b\big|_W$ é ainda simétrica e bilinear.

Definição 2.2.2. *O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro que denota a dimensão do subespaço W de V tal que $b\big|_W$ é negativa definida.*

Assim $0 \leq \nu \leq dim\, V$, e $\nu = 0$ se, e somente se, b é positivo definido. A função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v)$ é chamada a *forma quadrática associada* de b. Em alguns casos é mais conveniente trabalhar com a forma quadrática do que com a própria b, e não há perda de generalidade pois b pode ser recuperada pela identidade de polarização

$$b(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base para V, a matriz $(b_{ij})_{n\times n} = b(e_i, e_j)$ é chamada matriz de b relativa a base $e_1, \ldots, e_n$. Uma vez que b é simétrica, esta matriz é simétrica.

Lema 2.2.3. *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se, a matriz relativa a uma base (e portanto a todas) é invertível.*

Demonstração. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base para V. Se $u \in V$, então $b(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ se, e somente se, $b(u, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Uma vez que (b_{ij}) é simétrica,

$$b(u, e_i) = b\left(\sum_j u_j e_j, e_i\right) = \sum_j u_j b(e_j, e_i) = \sum_j b_{ij} u_j.$$

Assim b é degenerada se, e somente se, existem números não todos nulos $u_1, \ldots, u_n$ tais que $\sum_j b_{ij} u_j = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Mas isso é equivalente a dependência linear das colunas da matriz (b_{ij}), isto é, (b_{ij}) ser singular. ■

Definição 2.2.4. *Um produto escalar g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica e não degenerada sobre V*

Exemplo 2.2.5.

1. *Um produto interno é um produto escalar positivo definido. Quando $V = \mathbb{R}^n$, temos o produto interno canônico definido por*

$$u \cdot v = \sum_i u_i v_i.$$

Muitas propriedades do produto interno valem para produtos escalares, porém alguns fenômenos novos surgem quando g é indeterminado, isto é, $g(v, v) = 0$, mas $v \neq 0$.

2. *Observemos que mudando um sinal do produto escalar usal do $\mathbb{R}^2$ conseguimos um exemplo de escalar indefinido.Defina $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por*

$$g(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2.$$

Observe que g é simétrica e bilinear. Considerando a base $\{(1, 0), (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, que g é não degenerada. Assim, g é um produto escalar indefinido e a sua forma quadrática associada é dada por $q(v) = u_1^2 - u_2^2$.

Definição 2.2.6. *Seja V um espaço vetorial com produto escalar e seja W um subespaço de V. O complemento ortogonal de W é o subespaço $W^{\perp}$ de todos os vetores em V que são ortogonais a todo vetor em W, ou seja,*

$$W^{\perp} = \{v \in V \,;\, v \perp W\}.$$

Lema 2.2.7. *Se W é um subespaço de um espaço com produto escalar V, então*

1. *$dim\, W + dim\, W^{\perp} = n = dim\, V$;*
2. *$(W^{\perp})^{\perp} = W$.*
3. *Um subespaço W de V é não degenerado se, e somente se, $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Demonstração.

1. Dado $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ base de W podemos extender para uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ de V.Temos que , $v \in W^{\perp}$ se, e somente se, $g(v, e_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$. Em termos de coordenadas temos que

$$g(v, e_i) = g\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j,\ e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j\ g(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j = 0 \quad (1 \leq i \leq k)$$

Temos k equações lineares e n incógnitas, pelo lema 0.1.1, g_{ij} é invertível e, portanto, as linhas no sistema linear acima são linearmente independentes e a matriz tem posto k. Assim o espaço das soluções tem dimensão $n - k$. Por construção essas soluções de n-uplas $(v_1, ..., v_n)$ fornece os vetores $v = \sum v_j e_j$ de $W^{\perp}$.

2. Seja $w \in W$. Para todo $v \in W^{\perp}$ $g(w, v) = 0$, então $w \in (W^{\perp})^{\perp}$. Portanto, $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$. Do Teorema da álgebra linear segue que

$$\begin{aligned} dim\,(W^{\perp})^{\perp} &= dim\, V - dim\, W^{\perp} \\ &= dim\, V - (dim\, V - dim\, W) \\ &= dim\, W \end{aligned}$$

Logo, $(W^{\perp})^{\perp} = W$

3. Observemos que

$$dim\,(W + W^{\perp}) + dim\,(W \cap W^{\perp}) = dim\, W + dim\, W^{\perp}$$

Pelo item (1), $dim\, W + dim\, W^{\perp} = dim\, V = n$. Consequentemente, $W + W^{\perp} = V$ se, e somente se, $W \cap W^{\perp} = 0$. Portanto, qualquer uma dessas opções vale a $V = W \oplus W^{\perp}$. Mas $W \cap W^{\perp} = \{w \in W; w \perp W\} = 0$ então W é não-degenerado.

■

Um subespaço W de V é dito não-degenerado, se $g\Big|_W$ for não-degenerado.Quando V é um espaço vetorial munido de produto interno, qualquer subespaço W é também munido de produto interno, portanto não-degenerado.

Nós definimos a norma do vetor $v \in V$ por $|v| = \sqrt{|g(v,v)|}$. Um vetor v é chamado vetor unitário se $|v| = 1$, i.e., se $g(v,v) = \pm 1$.

Lema 2.2.8. *Todo espaço vetorial munido de um produto escalar $V \neq \{0\}$ possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Vamos provar por indução.

Seja $dim\, V = 1$. Tomando $v \in V$, v é uma base para V e $g(v,v) < 0 \ ou \ g(v,v) > 0$. Segue que $v_1 = \frac{v}{|v|}$ é um vetor unitário e $g(v,v) = -1 \ ou \ g(v,v) = 1$ portanto, v_1 é base ortonormal de V

Supondo válido para $n-1$, vamos provar para n Como g é não degenerada, existe um vetor w_1 tal que $g(w_1,w_1) \neq 0$.Seja $W = span\{w_1\}$. Como $V = W \oplus W^\perp$, $dim\, W^\perp = n-1$, sendo $W^\perp$ subespaço vetorial existe base $\{w_2,...,w_n\}$ de $W^\perp$ tal que $g(w_i,w_j) = 0$ se $i \neq j$. Temos também que $g(w_i,w_i) = 0$ se $i > 1$, onde $w_i \in W^\perp$. Assim $\{w_1,w_2,...,w_n\}$ é uma base ortogonal de $V = W \oplus W^\perp$. Vamos ortonormalizar essa base.

Se $g(w_i,w_i) > 0$, tome $v_i = \frac{w_i}{|w_i|}$ e $g(v_i,v_i) = 1$, analogamente se $g(w_i,w_i) < 0$ tomamos $v_i = \frac{v_i}{|v_i|}$ e $g(v_i,v_i) = -1$. Portanto, $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é uma base ortonormal de V. ■

Para uma base ortonormal $\{e_1,...,e_n\}$ de um espaço vetorial V munido de um produto escalar, temos

$$g(e_i,e_j) = \varepsilon_j \delta_{ij}$$

onde, $\varepsilon_j = g(e_j,e_j) = \pm 1$ e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se i} = j \\ 0, & \text{se i} \neq j \end{cases}.$$

Sempre que for conveniente, devemos ordenar os vetores em uma base ortonormal para que os sinais negativos, se houver, vêm primeiro na chamada assinatura $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$

Lema 2.2.9. *Seja $e_1 \ldots, e_n$ uma base ortonormal de V, com $\varepsilon_i = g(e_i,e_i)$. Então toda $v \in V$ é escrito de maneira única como*

$$v = \sum_i \varepsilon_i g(v,e_i) e_i.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que

$$\left(v - \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) e_i\right) \perp e_j,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

De fato, sendo e_j um elemento qualquer de V, temos

$$\begin{aligned} g\left(v - \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) e_i, e_j\right) &= g(v, e_j) - \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) g(e_i, e_j) \\ &= g(v, e_j) - g(v, \sum_i \varepsilon_i g(e_i, e_j) e_i) \\ &= g(v, e_j) - g(v, e_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como e_j é arbitrário e a métrica é não degenerada, segue que

$$v = \sum_i \varepsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

■

Seja π de V a projeção ortogonal em um espaço não degenerado W. Como uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_k\}$ de W pode ser extendida para uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de V, então

$$\pi(v) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(v, e_j) e_j$$

Lema 2.2.10. *Para qualquer base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V o número de sinais negativos na assinatura $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ é o índice ν de V.*

Demonstração. Seja exatamente os m primeiros ε_i negativos. No caso em que g é definida temos $m = \nu = 0$ ou $m = \nu = n$ e cocluí-se a demonstração.

Então, suponha que $0 < m < n$. Segue que g é negativo definido em $S = span\{e_1, ..., e_m\}$ e então $m \leq \nu$. Para mostrar o caso contrário, seja W um subespaço tal que $g\big|_W$ é negativo definido e definindo $\pi : W \to S$ por,

$$\pi(w) = -\sum_{i=1}^{m} g(w, e_i) e_i$$

Temos que π é linear e mostraremos que π é injetiva. Assim, seguirá que $dim\, W \leq dim\, S$ e como W é arbitrário $v \leq dim\, S = m$. Se $\pi(w) = 0$, então

$$w = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(w, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(w, e_i) e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon_i g(w, e_i) e_i = \sum_{i=m+1}^{n} g(w, e_i) e_i$$

Como $w \in W$, temos

$$\begin{aligned} 0 \geq g(w,w) &= g\left(\sum_{i=m+1}^{n} g(w,e_i)e_i, \sum_{k=m+1}^{n} g(w,e_k)e_k\right) \\ &= \sum_{i,k=m+1}^{n} g(w,e_i)g(w,e_k)g(e_i,e_k) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} g(w,e_i)^2 \end{aligned}$$

Assim, $g(w,e_i)^2 = 0$ para todo $i > m$, como g é não-generada $w = 0$. ■

2.3 VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

Definição 2.3.1. *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável M é um tensor do tipo $(0,2)$ simétrico, não degenerado em M de índice constante. Em outras palavras, $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ leva suavemente cada ponto $p \in M$ em um produto escalar g_p em T_pM, e o índice de g_p é o mesmo para todo $p \in T_pM$. Ou seja,*

$$\begin{array}{ccccccccc} g & : & M & \longrightarrow & \mathfrak{T}_2^0(M) & & & & \\ & & p & \longmapsto & g_p & : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & & (u,v) & \longmapsto & g_p(u,v) \end{array}$$

é uma aplicação suave tal que,

1. *$g_p(u,v) = g_p(v,u)$, para todos $u, v \in T_pM$*

2. *$g_p(u,v) = 0$, para todo $v \in T_pM$, implica $u = 0$;*

3. *$ind(T_pM) = ind(T_qM)$, para todos $p, q \in M$ com $p \neq q$.*

Definição 2.3.2. *Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável M munida com um tensor métrico g.*

O valor comum ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana M é chamado *índice de M*. Note que $0 \leq \nu \leq n = dim\,(M)$. Se $\nu = 0$, então M é uma variedade Riemanniana. Neste caso, cada g_p é um produto interno em T_pM.

Quando $\nu = 1$ e $n \geq 2$, então M é dita uma *variedade de Lorentz*.

Notação 2.3.3. *Denotemos por $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ o tensor métrico. Assim $g(u,v) = \langle u, v \rangle$, para todo $u, v \in T_pM$ e $g(U,V) = \langle U, V \rangle$, para todo $U, V \in \mathfrak{X}(M)$.*

Para um sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ em $\mathfrak{U} \subset M$, as componentes de g em $\mathfrak{U}$ são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n.$$

Assim, para os campos de verores $V = \sum_i V^i \partial_i$ e $U = \sum_j U^j \partial_j$, podemos escrever g como

$$g(U, V) = \langle U, V \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} U^i V^j$$

Como g é não degenerada temos que em cada $p \in M$ a matriz $(g_{ij}(p))_{n \times n}$ é invertível e a sua inversa é denotada por $(g^{ij}(p))_{n\times n}$. A fórmula usual para a inversa de uma matriz nos garante que as funções g_{ij} são suaves em U. Além disso, como g é simétrica, então $g_{ij} = g_{ji}$ e consequentemente $g^{ij} = g^{ji}$, para quaisquer $i = 1, \ldots, n$. Finalmente em $\mathfrak{U}$ o tensor métrico g pode ser escrito como

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Assim, se $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$g(U, V) = \sum_{ij} g_{ij}(dx^i \otimes dx^j)(U, V) = \sum_{ij} g_{ij} dx^i(U) \cdot dx^j(V) = \sum_{ij} g_{ij} U^i \cdot V^j.$$

Exemplo 2.3.4. *Seja $M = \mathbb{R}^n$, e para cada $p \in M$ temos que T_pM é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Assim se $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$, então*

$$\langle u_p, v_p \rangle = \sum_i u^i v^i,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, onde $u_p = \sum_i u^i \partial_i$ e $v_p = \sum_j v^j \partial_j$. Desta maneira, $\mathbb{R}^n$ munido com esta métrica nos dá uma variedade Riemanniana chamada espaço Euclidiano $n-$dimensional.

Exemplo 2.3.5. *Seja ν um inteiro tal que $0 \leq \nu \leq n$. Então $\mathbb{R}^n$ munido com o tensor métrico*

$$\langle u_p, v_p \rangle_p = -\sum_{i=1}^{\nu} u^i v^i + \sum_{j=\nu+1}^{n} u^j v^j,$$

de índice ν nos dá uma variedade semi-Riemanniana $\mathbb{R}^n_\nu$, chamado espaço semi-Euclidiano, de índice ν e dimensão n. Observe que quando $\nu = 0$, $\mathbb{R}^n_\nu$ é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, e para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ é chamado espaço de Lorentz-Minkowski n-dimensional, frequentemente denotado por $\mathbb{L}^n$.

Fixando a notação

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1, \text{se} & 1 \leq i \leq \nu; \\ \\ +1, \text{se} & \nu + 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

então o tensor métrico de $\mathbb{R}^n_\nu$ pode ser escrito como

$$g = \sum_i \epsilon_i dx^i \otimes dx^i.$$

Definição 2.3.6. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que $v \in T_pM$ é*

1. *tipo-espaço se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$;*

2. *tipo-tempo se $\langle v, v \rangle < 0$;*

3. *nulo se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.*

O conjunto

$$\mathcal{C}_p = \{v \in T_pM\,;\, \langle v, v \rangle = 0,\, v \neq 0\}$$

de todos os vetores nulos de T_pM é chamado cone nulo em $p \in M$. Quando M é uma variedade de Lorentz, os vetores nulos são chamados de *tipo-luz*.

Para cada $p \in M$, seja

$$\begin{array}{rcccccc} q & : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & & v & \longmapsto & q(v) & = & \langle v, v \rangle, \end{array}$$

a forma quadrática associada ao produto escalar $\langle\ ,\ \rangle$. Temos que q determina $\langle , \rangle$. Observemos que

$$q(fV) = \langle fV, fV \rangle = f^2 \langle V, V \rangle = f^2 q(V),$$

para qualquer $V \in \mathfrak{X}(M)$ e toda $f \in C^\infty(M)$. Assim, temos que q não é $C^\infty(M)$-linear e portanto não é um campo tensorial.

2.3.1 Conexão de Levi-Civita e geodésicas

Seja M uma variedade semi-Riemanniana e sejam V, W dois campos de vetores em M. Queremos calcular a taxa de variação de W na direção de V_p, para cada ponto $p \in M$. No espaço Euclidiano temos naturalmente como a derivada de um campo em relação a outro. Para o nosso contexto, vamos introduzir o conceito de conexão, mas antes.

Definição 2.3.7. *Sejam $u^1, \ldots, u^n$ as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n_\nu$. Se V e $W = \sum_i W^i \partial_i$ são campos de vetores em $\mathbb{R}^n_\nu$, o vetor*

$$D_V W = \sum_i V(W^i)\partial_i,$$

é chamada a derivada covariante de W na direção de V.

Agora definiremos a conexão.

Definição 2.3.8. *Uma conexão ∇ em uma variedade M é uma função*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(M)$

(i) $\nabla_V W$ *é $C^\infty(M)$-linear em V;*

(ii) $\nabla_V W$ *é $\mathbb{R}$-linear em W;*

(iii) $\nabla_V(fW) = f\nabla_V W + V(f)W$ *para toda função $f \in C^\infty(M)$.*

Assim, $\nabla_V W$ é chamada a derivada covariante de W na direção de V com respeito a conexão ∇.

Na definição anterior, (i) nos diz que $\nabla_V W$ é um tensor em V. Assim, podemos examinar o seu caráter pontual , isto é, dado $v \in T_pM$, o vetor $\nabla_v W \in T_pM$, esta bem definido e denotamos por $(\nabla_v W)_p$ onde V é um campo tensorial tal que $V_p = v$. O item (iii) nos diz que $\nabla_V W$ não é um tensor em W.

Vejamos agora um resultado de caráter algébrico, o qual nos diz que na presença da métrica podemos identificar campos com 1-formas.

Proposição 2.3.9. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ seja V^* uma $1-$forma em M tal que*

$$V^*(X) = \langle V, X\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^*(M) \\ & & V & \longmapsto & f(V) \quad = \quad V^*(X) = \langle V, X\rangle \end{array}$$

é um isomorfismo $C^\infty(M)-$linear de $\mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{X}^*(M)$.

Demonstração. Primeiramente observemos que f é $C^\infty(M)-$linear, pois é dada por uma $1-$forma que é $C^\infty(M)-$linear. Para mostrar o isomorfismo, basta mostrar que a aplicação é uma bijeção, uma vez que já temos a linearidade.

1. f é injetora.

   De fato, seja $f(V) = f(W)$, então

   $$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

   Então

   $$\langle V, X\rangle = \langle W, X\rangle \Leftrightarrow \langle V - W, X\rangle = 0 \Leftrightarrow V = W,$$

   uma vez que $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer e a métrica e não degenerada.

   Portanto f é injetora.

2. f é sobrejetora.

   É necessário exibirmos um $V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

   $$\theta(X) = \langle V, X\rangle, \ \forall \ X \in \mathfrak{X}(M).$$

   A unicidade é dada pelo item (i). Mostraremos que podemos encontrar um tal campo V em uma vizinhança coordenada U arbitrária. Seja $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, então podemos escrever $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ em U e tomemos $V \in \mathfrak{X}(M)$ dado por $V = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j$. Então desde que (g^{ij}) e (g_{ij}) são matrizes inversíveis, temos

   $$\begin{aligned}\langle V, \partial_k\rangle &= \left\langle \sum_{ij} g^{ij}\theta_i\partial_j, \partial_k \right\rangle = \sum_{ij} g^{ij}\theta_i \langle \partial_j, \partial_k\rangle \\ &= \sum_{ij} g^{ij}\theta_i g_{jk} = \sum_{ij} \theta_i\delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k).\end{aligned},$$

   onde δ_{ik} é o delta de Kronecker. Portanto f é sobrejetora.

■

Definição 2.3.10. *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão ∇. Dizemos que a conexão é compatível com a métrica, quando ela satisfaz qualquer uma das condições da abaixo:*

1. *Para todos os campos paralelos V e W ao longo de qualquer curva diferenciável α em M vale:*

   $$\langle V, W\rangle = constante.$$

2. *Para todos os campos vetoriais V e W ao longo de qualquer curva diferenciável α em M vale*
$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle.$$

3. *Para todos os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale*
$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Lema 2.3.11. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ uma conexão simétrica e compatível com a métrica de M^n. Então, temos*

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Z X, Y\rangle &= Z\langle X, Y\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Y\langle Z, X\rangle \\ &- \ \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle, \end{aligned} \tag{2.1}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Temos que:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

Somando as duas primeiras equações e subtraindo a terceira temos, usando a simetria de ∇ que:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle$$

$$= \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Z X, Y\rangle &= Z\langle X, Y\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Y\langle Z, X\rangle \\ &- \ \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle. \end{aligned}$$

■

A equação (2.1) é conhecida como *fórmula de Koszul*.

Definição 2.3.12. *Seja $x : U \to M$ uma parametrização de M, com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Se*
$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$
então as n^3 funções suaves $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ são os símbolos de Christoffel *da conexão em U.*

Veremos na próxima Proposição que as propriedades da conexão de Levi-Civita permitem mostrar que

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(\partial_i(g_{jm}) + \partial_j(g_{im}) - \partial_m(g_{ij})\right) g^{mk}.$$

Em particular, temos: $[\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_{k=1}^{n}(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k})\partial_k)$. Como $[\partial_i, \partial_j] = 0$ então temos $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$, para todos $i, j, k = 1, \ldots, n$. Além disso, segue que

$$0 = [\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\partial_i = \sum_{k=1}^{n}(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k})\partial_k = 0.$$

Portanto $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_i}\partial_i$. A partir disso, dizemos que a conexão ∇ é *simétrica*.

Se $M = \mathbb{R}^n$, então $\Gamma_{ij}^{k} = 0$ para todos $i, j, k = 1, \ldots, n$. De fato, seja $\partial_1, ..., \partial_n$ um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^n$, temos $g_{ij} = \langle\partial_i, \partial_j\rangle = \delta_{ij}$, onde $1 \leq i, j \leq n$. Logo, as derivadas da métrica são nulas , isto é , todos os *Símbolos de Christoffel* são nulos.

A conexão esta diretamente ligada a métrica, desde que acrescentemos a compatibilidade e uma outra propriedade relacionada ao colchetes de Lie, é o que nos mostra o teorema de existência e unicidade da conexão de *Levi-Civita*, mas precisamente

Teorema 2.3.13. (Levi-Civita) *Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(conexão simétrica);*

2. $Z\langle X, Y\rangle = \langle\nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \quad para\ todo \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$

Demonstração. Para a unicidade, suponha que ∇^1 e ∇^2 sejam duas conexões simétricas e compatíveis com a métrica de M. Uma vez que o lado direito de (2.1) não depende da conexão, temos

$$\langle\nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z\rangle = \langle\nabla_X^1 Y, Z\rangle - \langle\nabla_X^2 Y, Z\rangle = 0,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto $\nabla^1 = \nabla^2$.

Para a existência, é suficiente mostrar que a conexão existe em uma vizinhança coordenada. Defina ∇ como em (2.1) e seja (U, x) um sistema coordenado de M. Aplicando (2.1) em campos coordenados cujos colchetes de Lie são nulos, temos

$$\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\rangle = \frac{1}{2}\left(\partial_i\langle\partial_j, \partial_l\rangle + \partial_j\langle\partial_i, \partial_l\rangle - \partial_l\langle\partial_i, \partial_j\rangle\right). \tag{2.2}$$

Recorde que

$$g_{ij} = \langle\partial_i, \partial_j\rangle \quad \text{e} \quad \nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{m=1}^{n}\Gamma_{ij}^{m}\partial_m. \tag{2.3}$$

Inserindo (2.3) em (2.2),

$$\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m} g_{ml} = \frac{1}{2} \left(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_l \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle \right) \tag{2.4}$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados de (2.4) pela matriz inversa g^{lk} e observando que $g_{ml} g^{lk} = \delta_{km}$,

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \left(\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_i, \partial_l \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle \right) g^{kl}. \tag{2.5}$$

Esta fórmula certamente define uma conexão em cada vizinhança coordenada. Além disso, a fórmula (2.5) garante que $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$. Assim, temos que a conexão é simétrica.

Para mostrar a compatibilidade com a métrica, mostraremos que $\nabla g = 0$. Note que em coordenadas locais, as componentes de ∇g são da forma:

$$\begin{aligned} \nabla g(\partial_j, \partial_j, \partial_k) &= \partial_k(g_{ij}) - \langle \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle - \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle \\ &= \partial_k(g_{ij}) - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ki}^{l} \langle \partial_l, \partial_j \rangle - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jk}^{l} \langle \partial_i, \partial_l \rangle \\ &= \partial_k(g_{ij}) - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ki}^{l} g_{lj} - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jk}^{l} g_{il}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando (2.4) duas vezes,

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ki}^{l} g_{lj} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jk}^{l} g_{il} = \frac{1}{2} \left(\partial_k(g_{ij}) + \partial_k(g_{ji}) \right) = \partial_k(g_{ji}). \tag{2.7}$$

Portanto, de (2.6) segue o resultado. ■

Definição 2.3.14. *Uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se*

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \quad \textit{em} \quad I.$$

Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existem $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e uma única geodésica $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$. O dominio I, de γ_v é o maior possível. Portanto se, $\alpha : J \to M$ é uma geodésica com velocidade inicial v, então $J \subset I$ e $\alpha = \gamma_v\Big|J$. Nesse sentido a geodésica γ_v é dita ser máximal.

Definição 2.3.15. *Uma variedade semi-Riemanniana M para a qual cada geodésica máximal esta definida em todo $\mathbb{R}$ é dita ser geodesicamente completa, ou simplesmente completa.*

No caso de variedades Riemannianas, temos o seguinte resultado é bastante conhecido:

Teorema 2.3.16. (Hopf-Rinow) *Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a)$\exp_p$ *é definida para todo* $T_p(M)$;

b) Os conjuntos fechados e limitados de M são compactos;

c)M é um espaço métrico completo;

d)M é geodesicamente completo;

e)Existe uma sequência de subconjuntos compactos $K_n \subset M, K_n \in K_{n+1}$ *e* $\cup_n K_n = M$*, tal que se* $q_n \notin K_n$ *então* $d(p, q_n) \to \infty$.

Além do mais, qualquer afirmação acima implica que:

f) Para qualquer $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *com* $l(\gamma) = d(p, q)$.

Corolário 2.3.17. *Uma subvariedade fechada de uma variedade Riemanniana completa é completa na métrica induzida, em particular, as subvariedades fechadas do espaço euclidiano estão completas.*

Lema 2.3.18. *Seja* M *uma subvariedade aberta de uma variedade semi-Riemanniana* N*. Se* M *é completa e* N *é conexa, então* $M = N$.

Demonstração. Consideremos os espaços métricos $(M, d_M) \subseteq (N, d_N)$, em que d_N denota a distância Riemanniana induzida pela métrica Riemanniana em N e d_M a distância Riemanniana induzida por d_N em M. Em virtude do teorema de Hopf e Rinow, (M, d_M) é um espaço métrico completo. Temos que M é um subconjuto aberto de N. Afirmamos que M é, também, fechado em N. A conclusão decorrerá, então, da conexidade de N. Se M não fosse fechado, existiria $q \in \partial M \backslash M$. Assim, existiria uma sequência $(q_n) \subset M$, tal que $q_n \to q$ segundo a distância d_N, o que é uma contradição. ∎

Encerraremos com alguns conceitos relativos a tensores numa variedade diferenciável M. No que segue, representaremos por $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto das 1-formas diferenciáveis sobre M.

Definição 2.3.19. *Seja* M *uma variedade. Um campo tensorial do tipo* (r, s) *em* M *é uma aplicação* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-multilinear* $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{C}^\infty(M)$. *Indicaremos por* $\mathfrak{T}^r_s(M)$ *o conjunto de todos os* (r, s) *campos tensoriais em* M.

Exemplo 2.3.20. *Se* $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ *é* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-multilinear, defina o campo tensorial*

$$\overline{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

por

$$\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_s)).$$

$\overline{A}$ *é* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-linear, e consequentemente, um campo tensorial do tipo* $(1, s)$*. Sendo assim, iremos considerar o próprio* A *como campo tensorial do tipo* $(1, s)$*.*

Definição 2.3.21. *A derivada covariante de um* $(1, r)$*-tensor* T *é um* $(1, r+1)$*-tensor* ∇T *dado por*

$$\begin{aligned}\nabla T(X_1, \ldots, X_r, Z) &= (\nabla_Z T)(X_1, \ldots, X_r)\\ &= Z\left(T(X_1, \ldots, X_r)\right) - T(\nabla_Z X_1, \ldots, X_r)\\ &\quad - T(X_1, \ldots, \nabla_Z X_r).\end{aligned}$$

Dizemos que um tensor é paralelo quando $\nabla T = 0$. Em particular, se $Z \in \mathfrak{X}(M)$, convém considerar o $(1, 1)$-tensor

$$\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Neste sentido, dizemos que um campo é paralelo se $\nabla Z = 0$.

Exemplo 2.3.22. *Em uma variedade semi-Riemanniana* M^n *com métrica* g *e a conexão* ∇ *compatível com a métrica, temos que* $\nabla g = 0$*. De fato, seja* X, Y, Z *campos de vetores. Temos que:*

$$\begin{aligned}\nabla g(X, Y, Z) &= \nabla_Z g(X, Y)\\ &= Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)\\ &= Z\langle X, Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle\\ &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0\end{aligned}$$

2.3.2 Curvaturas

Definição 2.3.23. *Seja* M *uma variedade semi-Riemanniana. O tensor curvatura* R *de* M *é a aplicação*

$$\begin{array}{rccccl} R & : & \mathfrak{X}(M)^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & \\ & & (X, Y, Z) & \longmapsto & R(X, Y, Z) & = \; -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z. \end{array}$$

Uma vez que fixados os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, podemos considerar o operador curvatura* $R(X, Y)$ *dado por*

$$\begin{array}{rccccl} R & : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) & \\ & & Z & \longmapsto & R(X, Y)Z & = R(X, Y, Z). \end{array}$$

Se $M = \mathbb{R}^n$ o tensor curvatura R de M é nulo. Sejam X, Y e Z campos diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ e $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, então

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n) \quad \text{e} \quad \nabla_Y Z = (Yz_1, \ldots, Yz_n).$$

Logo,

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \ldots, XYz_n), \qquad \nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, \ldots, [X,Y]z_n).$$

Portanto

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Observemos que o tensor curvatura é linear em relação a aditividade e trilinear em relação ao produto com elementos do anel $C^\infty(M)$. Além disso, o tensor curvatura satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.3.24. *Se $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, então*

1. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle = 0$;
2. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$;
3. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Demonstração. 1. Basta mostra que

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

De fato, pela simetria da conexão temos:

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\ &\qquad = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_Y X \\ &\qquad\quad + \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[X,Z]} Y \\ &\qquad = \nabla_Y [X,Z] + \nabla_z [Y,X] + \nabla_X [Z,Y] \\ &\qquad\quad - \nabla_{[X,Z]} Y - \nabla_{[Y,X]} Z - \nabla_{[Z,Y]} X \\ &\qquad = [Y,[X,Z]] + [Z,[Y,X]] + [X,[Z,Y]] = 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde, na última igualdade foi usada a identidade de Jacobi em colchetes de Lie.

2. A primeira igualdade segue imediatamente da definição. Para a segunda, vejamos que da multilinearidade do tensor R, temos:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z+W, Z+W\rangle &= \langle R(X,Y)Z+W, Z\rangle + \langle R(X,Y)Z+W, W\rangle \\ &= \langle R(X,Y)Z, Z\rangle + \langle R(X,Y)W, Z\rangle + \langle R(X,Y)Z, W\rangle \\ &\quad + \langle R(X,Y)W, W\rangle.\end{aligned}$$

Logo, se mostrarmos que $\langle R(X,Y)T, T\rangle = 0$ estaremos concluindo que:

$$\langle R(X,Y)Z+W, Z+W\rangle = \langle R(X,Y)Z, Z\rangle = \langle R(X,Y)W, W\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle R(X,Y)W, Z\rangle + \langle R(X,Y)Z, W\rangle = 0.$$

Agora observe que:

$$\langle R(X,Y)Z, Z\rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle.$$

Da compatibilidade da conexão com a métrica,

$$Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle,$$

ou seja,

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle. \tag{2.9}$$

Da mesma forma,

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle. \tag{2.10}$$

Além disso também temos que:

$$X\langle Z, Z\rangle = \langle \nabla_X Z, Z\rangle + \langle Z, \nabla_X Z\rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle$$

implicando em

$$\langle \nabla_X Z, Z\rangle = \frac{1}{2} X\langle Z, Z\rangle \tag{2.11}$$

Daí,

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle.$$

Assim, por (2.9) (2.10) (2.11) temos:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z, Z\rangle &= Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle \\ &= \frac{1}{2}Y\langle (X\langle Z, Z\rangle) - \frac{1}{2}X(Y\langle X, Z\rangle) + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle \\ &= -\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z, Z\rangle = 0.\end{aligned}$$

3. Para demonstrar essa, usaremos o item (ii) e escreveremos:

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= -\langle R(Y,Z)X,W\rangle - \langle R(Z,X)Y,W\rangle \\
&= \langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,X)W,Y\rangle \\
&= -\langle R(Z,W)Y,X\rangle - \langle R(W,Y)Z,X\rangle \\
&- \langle R(X,W)Z,Y\rangle - \langle R(W,Z)X,Y\rangle \\
&= \langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(W,Y)X,Z\rangle \\
&+ \langle R(X,W)Y,Z\rangle + \langle R(Z,W)X,Y\rangle \\
&= 2\langle R(Z,W)X,Y\rangle - \langle R(Y,X)W,Z\rangle \\
&= 2\langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle \\
&= 2\langle R(Z,W)X,Y\rangle - \langle R(X,Y)Z,W\rangle
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = 2\langle R(Z,W)X,Y\rangle - \langle R(X,Y)Z,W\rangle$$

Ou seja,

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle.$$

■

Intimamente relacionado com o operador de curvatura está a curvatura seccional que passaremos a definir.

Lema 2.3.25. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional não-degenerado do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Para qualquer duas bases de σ podemos relaciona-las pelas equações

$$v = ax + by,$$

$$w = cx + dy,$$

onde o determinante dos coeficientes $ad-bc$ é diferente de zero. Um cálculo mais aprofundado mostra que

$$\langle R(v,w)v,w\rangle = (ad-bc)^2\langle R(x,y)x,y\rangle,$$

e

$$(|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2) = (ad - bc)^2(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2).$$

Portanto $K(v, w) = K(x, y)$. ■

Agora podemos definir a

Definição 2.3.26. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional não-degenerado $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamada a curvatura seccional de σ em p.*

Se uma aplicação multilinear $F : T_p(M)^4 \to \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades (2.3.24), dizemos que F é tipo-curvatura. Sendo F tipo-curvatura, das propriedades (2.3.24), segue que se $F(x, y, x, y) = 0$, para todos $x, y \in T_pM$ tais que $\sigma = span(x, y)$ é um plano não-degenerado, então $F \equiv 0$. Com isso, pode-se mostrar que:

Lema 2.3.27. *Seja F uma função tipo-curvatura em T_pM tal que*

$$K(x, y) = \frac{F(x, y, x, y)}{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2}$$

sempre que $\sigma = span(x, y)$ é um plano não-degenerado. Então,

$$\langle R(x, y)z, w\rangle = F(x, y, z, w),$$

para todos $x, y, z, w \in T_pM$.

Uma variedade semi-Riemanniana M tem *curvatura constante* se a função curvatura seccional é constante. O próximo resultado nos dá uma fórmula simples para R quando K é constante.

Corolário 2.3.28. *Se M tem curvatura seccional constante C, então*

$$R(x, y)z = C(\langle z, x\rangle y - \langle z, y\rangle x).$$

Demonstração. Observe que definindo $F(x, y, z, w) = C(\langle z, x\rangle\langle y, w\rangle - \langle z, y\rangle\langle x, w\rangle)$, temos que F é uma função tipo-curvatura em cada ponto, e $F(x, y, x, y) = C(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2)$. Se $\sigma = span(x, y)$ é um plano não-degenerado, então

$$K(x, y) = C = \frac{F(x, y, x, y)}{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2},$$

e o resultado segue do lema anterior:

$$\langle R(x, y)z, w\rangle = F(x, y, z, w) = C(\langle z, x\rangle\langle y, w\rangle - \langle z, y\rangle\langle x, w\rangle)$$

ou seja,

$$\langle R(x,y)z,w\rangle = C(\langle z,x\rangle\langle y,w\rangle - \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle).$$

■

Definição 2.3.29. *Sejam M uma variedade semi-Riemanniana, $p \in M$, $\{e_1,\dots,e_n\}$ um referencial ortonormal definido em uma vizinhança de p e ε_i o sinal de e_i. A aplicação $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinear $Ric : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathcal{C}^\infty(M)$, definida em p por*

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle R(X,e_i)e_i,Y\rangle$$

é chamada curvatura de Ricci de M.

Observemos que o valor de $Ric(X,Y)$ em p independe do referencial escolhido.Além disso, o tensor de Ricci é simétrico

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle R(X,e_i)e_i,Y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle R(e_i,X)Y,e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle R(Y,e_i)e_i,X\rangle = Ric(Y,X). \end{aligned}$$

Em particular, se existe $\kappa\in\mathbb{R}$ tal que

$$Ric(X,X)\geq\kappa\langle X,X\rangle$$

para qualquer $X\in\mathfrak{X}(M)$, dizemos que a curvatura de Ricci de M é limitada inferiormente.

2.3.3 Alguns operadores diferenciáveis

Estenderemos agora os conceitos de vetor gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano para variedades semi-Riemannianas. O referencial $E_1,\dots,E_n$ sempre denotará um referencial ortonormal em um ponto $p\in M$ com assinatura $\varepsilon_i = \langle E_i,E_i\rangle$.

Definição 2.3.30. *O gradiente de uma função $f\in C^\infty(M)$, o qual denotaremos por ∇f, é um campo vetorial metricamente equivalente a diferencial $df\in\mathfrak{X}^*(M)$. Assim*

$$\langle\nabla f,X\rangle = df(X) = X(f),$$

para todo $X\in\mathfrak{X}(M)$.

O próximo resultado exibe algumas propriedades do campo gradiente.

Proposição 2.3.31. *Se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, temos*

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para mostrar o item (a) vejamos que da Definição 2.3.30, temos

$$\langle \nabla(f+g), X\rangle = (X)(f+g) = X(f) + X(g) = \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle$$

Assim,

$$\langle \nabla(f+g) - \nabla f - \nabla g, X\rangle = 0.$$

Como X foi escolhido arbitrariamente, segue que

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g.$$

Para o item (b), vemos que

$$\langle \nabla(fg), X\rangle = X(fg) = gX(f) + fX(g) = \langle g\nabla f, X\rangle + \langle f\nabla g, X\rangle = \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle.$$

Dai,

$$\langle \nabla(fg) - g\nabla f - f\nabla g, X\rangle = 0,$$

e consequentemente,

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

■

Proposição 2.3.32. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então*

$$\langle \nabla f, v\rangle = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Em particular, se p é um ponto de máximo ou mínimo local para f, então $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Seja V uma extensão local de v. Então

$$\langle \nabla f, v\rangle = (V(f))(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Suponhamos agora que p seja um ponto de máximo local para f (o caso mínimo local é análogo). Então, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo

$q \in U$. Assim, se v e α são tais que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

Uma vez que $v \in T_pM$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\nabla f(p) = 0$. ■

Definição 2.3.33. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dizemos que $p \in M$ é um ponto crítico de f se $\nabla f(p) = 0$.*

Da Proposição 2.3.32 temos que todo ponto de máximo ou mínimo local de f é um ponto crítico de f.

Proposição 2.3.34. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana conexa e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.*

Demonstração. Fixemos $p \in M$ e seja

$$A = \{q \in M\,;\, f(q) = f(p)\}.$$

A continuidade de f garante que A é fechado. Sendo $A \neq \emptyset$, se mostrarmos que A é aberto, seguirá da conexidade de M que $A = M$ e consequentemente, f será constante. De fato, seja $q \in A$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada conexa de q em M. Para todo $r \in U$, existe uma curva diferenciável $\alpha : [0,1] \to U$ tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha(1) = r$. Da Proposição 2.3.32, temos que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) = \langle \nabla f, \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Assim a função $f \circ \alpha$ é constante em $[0,1]$. Em particular,

$$f(p) = f(q) = (f \circ \alpha)(0) = (f \circ \alpha)(1) = f(r),$$

donde $r \in A$. Como $r \in U$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $U \subset A$ e portanto, A é aberto. ■

Definição 2.3.35. *Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos a divergência do campo X como a função $div\, X : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$div\, X = tr(Y(p) \to \nabla_Y X(p)), \quad p \in M.$$

Em particular, se $E_1, \ldots, E_n$ é um referencial ortonormal, escrevemos

$$div\, X = \sum_i \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

A seguinte proposição destaca algumas propriedades do divergente.

Proposição 2.3.36. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{C}^2(M)$, temos*

(a) $div(X+Y) = div\, X + div\, Y$;

(b) $div(fX) = f div\, X + X(f)$.

Demonstração. Para provar o item (a), lembremos que o traço é um funcional linear, fazendo uso da Definição $2.3.35$, temos

$$div(X+Y) = tr(\nabla(X+Y)) = tr(\nabla X + \nabla Y) = tr(\nabla X) + tr(\nabla Y) = divX + divY$$

Para o item (b), seguimos de modo análogo

$$div(fX) = tr(\nabla(fX)) = tr(f\nabla X + dfX) = ftr(\nabla X) + tr(df(X)) = fdivX + X(f)$$

O que conclui a demonstração. ■

Definição 2.3.37. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Hessiano de f, denotado por $Hess\, f$, é o campo tensorial $Hess\, f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ dado por*

$$(Hess\, f)(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

O próximo resultado, nos dá algumas propriedades do $Hessiano$.

Lema 2.3.38. *O Hessiano de f é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$ simétrico tal que*

$$(Hess\, f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. $Hess\, f$ é $C^\infty(M)$-linear em cada entrada.Pois,

$$\begin{aligned}
(Hess\, f(gX + Z, Y) &= \langle \nabla_{gX+Z} \nabla f, Y \rangle \\
&= \langle g\nabla_X \nabla f + \nabla_Z \nabla f, Y \rangle \\
&= \langle g\nabla_X \nabla f, Y \rangle + \langle \nabla_Z \nabla f, Y \rangle \\
&= g(Hess\, f)(X, Y) + (Hess\, f)(Z, Y).
\end{aligned}$$

Desta forma, $Hess\, f$ é um tensor do tipo $(0, 2)$.

Como $\langle \nabla f, Y\rangle = Y(f)$, temos que

$$\begin{aligned} X(Y(f)) = X\langle \nabla f, Y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hess\, f)(X,Y) + \langle (\nabla f), \nabla_X Y\rangle \\ &= (Hess\, f)(X,Y) + (\nabla_X Y)f, \end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Para a simetria, vamos usar a definição dos colchetes. Observe que por um lado

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

mas por outro lado usando a simetria da conexão de Levi-Civita, temos

$$[X,Y](f) = (\nabla_X Y)f - (\nabla_Y X)f,$$

daí

$$X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f.$$

Assim pela equação (2.3.3) temos

$$(Hess\, f)(X,Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f = (Hess\, f)(Y,X),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O que conclui o Lema. ■

Proposição 2.3.39. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dados $p \in M^n$ e $v \in T_P M$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$(Hess\, f)_p(v,v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Demonstração. É suficiente ver que

$$\begin{aligned} (Hess\, f)_p(v,v) &= \langle \nabla_{\gamma'} \nabla f, \gamma'\rangle_p \\ &= \frac{d}{dt}\langle \nabla f, \gamma'\rangle\Big|_{t=0} - \langle \nabla f, \frac{D\gamma'}{dt}\rangle_p \\ &= \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

■

Com isso, pode-se mostrar também:

Proposição 2.3.40. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

a. Se $p \in M$ é ponto de mínimo local para f, então p é ponto crítico de f e $(Hess\, f)_p$ é positiva semi-definida.

b. *Se $p \in M$ é ponto crítico de f e e $(Hess\, f)_p$ é positiva definida, então p é ponto de mínimo local estrito para f*

c. *Se $p \in M$ é ponto de máximo local para f, então p é ponto crítico de f e $(Hess\, f)_p$ é negativa semi-definida.*

d. *Se $p \in M$ é ponto crítico de f e e $(Hess\, f)_p$ é negativa definida, então p é ponto de máximo local estrito para f*

Definição 2.3.41. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Definimos, $\Delta : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ o operador Laplaciano de M por*

$$\Delta f = tr(Hess\, f),$$

para todo $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$.

Observe que o Laplaciano também pode ser visto da seguinte maneira:

$$\Delta f = \sum_i \varepsilon_i \langle (Hess\, f)(E_i), E_i \rangle = \sum_i \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = div(\nabla f).$$

Proposição 2.3.42. *Se $f, g \in \mathcal{C}^2(M)$, temos*

(a) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$*;*

(b) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Demonstração. Observemos que o item (a) segue diretamente da Definição 2.3.41 e do primeiro item da Proposição 2.3.36 .

$$\Delta(f+g) = div(\nabla(f+g)) = div(\nabla f + \nabla g) = div(\nabla f) + div(\nabla g) = \Delta f + \Delta g$$

Para o item (b), faremos uso da Proposição 2.3.31 e da Proposição 2.3.36

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) = div(\nabla(fg)) &= div(f\nabla g + g\nabla f) \\
&= div(f\nabla g) + div(g\nabla f) \\
&= fdiv(\nabla g) + \nabla g(f) + gdiv(\nabla f) + \nabla f(g) \\
&= fdiv(\nabla g) + gdiv(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + \langle \nabla g, \nabla f \rangle \\
&= fdiv(\nabla g) + gdiv(\nabla f) + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle \\
&= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.
\end{aligned}$$

■

Finalizaremos com a seguinte definição:

Definição 2.3.43. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{C}^2(M)$. Dizemos que:*

(a) f é harmônica quando $\Delta f = 0$ em M^n;

(b) f é subharmônica quando $\Delta f \geq 0$ em M^n;

(c) f é superharmônica quando $\Delta f \leq 0$ em M^n.

2.3.4 O princípio do máximo de Omori-Yau

É bem conhecido que em qualquer ponto de máximo para uma função, o seu gradiente em tal ponto é nulo e o seu Hessiano, ou laplaciano, são não-positivos. Uma vez que as ferramentas analíticas empregadas na obtenção de resultados geométricos em variedades compactas nem sempre são aplicáveis ao contexto das variedades Riemannianas completas. Isso se deve ao fato de não podermos mais garantir a existência de pontos críticos de funções limitadas definidas sob tais variedades. No sentido de suprir tal carência, Omori introduziu uma importante ferramenta cuja idéia é considerarmos uma sequência maximizante que goze destas mesmas propriedades satisfeitas por um ponto de máximo, mais precisamente,

Teorema 2.3.44. (Omori) *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e conexa, com curvatura seccional limitada inferiormente. Se u é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ limitada superiormente em M^n, então existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M^n$ tal que:*

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \sup_M u, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \quad e \quad \limsup_{k\to\infty} Hess\, u(p_k)(X,X) \leq 0,$$

para todo $X \in T_pM$ com $|X| = 1$.

Claramente se u atinge o seu máximo em M^n (em particular, se M^n for compacta), o resultado é trivial: de fato, basta tomarmos $p_* \in M$ tal que $f(p_*) = \sup_M f$ e $p_k = p_*$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Contudo na abordagem apresentada por Omori havia um incoveniênte que era o de envolver apenas a forma Hessiana. Interessado pelo problema abordado por Omori (OMORI, 1967), em 1975, Yau (YAU, 1975) enfraqueceu a hipótese sobre a curvatura seccional passando esta para curvatura de Ricci limitada inferiormente e como consequência, reobteve o Teorema 2.3.44 para o laplaciano invés da forma Hessiana. Mais precisamente, Yau provou o seguinte resultado

Teorema 2.3.45. (Yau) *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Se $u \in \mathcal{C}^2(M)$ é limitada superiormente em M^n, então existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \sup_M u, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{k\to\infty} \Delta u(p_k) \leq 0.$$

Tal ferramenta é denominada de *princípio do máximo de Omori-Yau*. Destacamos que esta técnica vem permitindo abordar diversos problemas relevantes, como por exemplo, o problema de Calabi-Bernstein para hipersuperfícies no espaço de Lorentz-Minkowski e a versão de Yau do Lema de Schwarz para aplicações holomórficas entre variedades de Kähler (cf. (YAU, 1978)). Nas últimas décadas diversas generalizações e aplicações vem sendo propostas para este princípio, constituindo uma linha de pesquisa bastante frutífera (para maiores detalhes, indicamos (ALÍAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016)).

Quando a função $u \in \mathcal{C}^2(M)$ é limitada inferiormente, aplicando o Teorema acima para função $-u$, obtemos.

Corolário 2.3.46. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Se $u \in \mathcal{C}^2(M)$ é limitada inferiormente em M^n, então existe uma sequência de pontos $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = \inf_M u, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla u(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{k\to\infty} \Delta u(p_k) \geq 0.$$

3 ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE VARIEDADES DE LORENTZ

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos fundamentais e propriedades das variedades de Lorentz. Iniciaremos relembrando a seguinte definição:

Definição 3.0.1. *Uma variedade de Lorentz $(\overline{M}, \overline{g})$ é uma variedade semi-Riemanniana cuja métrica $\overline{g}$ possui índice igual a 1.*

O exemplo mais simples de variedade de Lorentz é o espaço de Lorentz-Minkowski que nada mais é que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com a métrica

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i - v_{n+1} w_{n+1},$$

em que $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$. O espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com esta métrica Lorentziana é conhecido como espaço de Lorentz-Minkowski e denotado por $\mathbb{L}^{n+1}$. Assim como o espaço Euclidiano, o Lorentz-Minkowski também possui curvatura seccional constante e igual a zero.

3.1 ORIENTAÇÃO TEMPORAL

Seja V um espaço vetorial Lorentziano, isto é, um espaço vetorial munido de um produto escalar de índice constante igual a 1. Considere o conjunto

$$\mathcal{T} = \{u \in V; \langle u, u \rangle < 0\}.$$

Para cada $u \in \mathcal{T}$ defina

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle < 0\}$$

chamado o *cone tipo-tempo* de V contendo u.

Como primeiro resultado, temos o seguinte lema.

Lema 3.1.1. *Sejam $v, w \in \mathcal{T}$. Então,*

1. *O subespaço $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço e*

$$V = span\{v\} \otimes \{v\}^{\perp}.$$

Consequentemente, $\mathcal{T}$ é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$, onde

$$C(-v) = -C(v) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle > 0\};$$

2. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa)*

$$|\langle v,w\rangle| \geq |v||w|,$$

onde $|v| = \sqrt{-\langle v,v\rangle}$, *valendo a igualdade se, e somente se,* v *e* w *são linearmente dependentes;*

3. *Se* $v \in C(u)$ *para algum* $u \in \mathcal{T}$, $w \in C(u)$ *se, e somente se,* $\langle v,w\rangle < 0$. *Consequentemente*

$$w \in C(v) \Longleftrightarrow v \in C(w) \Longleftrightarrow C(v) = C(w).$$

4. *Se* $v, w \in C(u)$, *existe um único número* $\phi \geq 0$, *chamado ângulo hiperbólico entre* v *e* w *tal que*

$$\langle v,w\rangle = -|v||w|\cosh\phi.$$

Demonstração. 1. Afirma-se que $span\{v\}$ é não degenerado com índice igual a 1.

De fato, sendo v um vetor tipo-tempo, temos que

$$ind(span\{v\}) = 1.$$

Agora suponha que $u = av \in span\{v\},\ a \in \mathbb{R}$. Então se $\langle u,v\rangle = 0$ e sendo v tipo-tempo, temos $\langle v,v\rangle = -\beta^2$, para algum $\beta \in \mathbb{R}^*$. Daí,

$$0 = \langle u,v\rangle = \langle av,v\rangle = -a\beta^2,$$

logo segue que, $a = 0$. Portanto $u = 0$ de concluímos que o subespaço $span\{v\}$ é não degenerado o que mostra a nossa afirmação.

Agora, sendo $span\{v\}$ subespaço não degenerado com índice 1, então pelo Lema (2.2.7)

$$V = span\{v\} \oplus span\{v\}^{\perp} = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$$

e

$$1 = ind(V) = ind(span\{v\}) + ind(v^{\perp}) = 1 + ind(v^{\perp}).$$

Assim, $ind(v^{\perp}) = 0$ e portanto $\{v\}^{\perp}$ é tipo-espaço.

Afirmemos agora que

$$\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v),$$

onde esta união é disjunta.

De fato, se $z \in \mathcal{T}$ então $z \in V$ e $\langle z, z\rangle < 0$. Como $V = span\{v\} \oplus \{v\}^{\perp}$ então $z = av + w$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $w \in \{v\}^{\perp}$. Logo,

$$\langle z, v\rangle = \langle av + w, v\rangle = \langle av, v\rangle + \langle w, v\rangle = -a\beta^2.$$

Se $a > 0$ então $\langle z, v\rangle < 0$, e neste caso, $z \in C(v)$. Agora se $a < 0$ então $\langle z, v\rangle > 0$. Equivalentemente $\langle z, -v\rangle < 0$ e neste caso, $z \in C(-v)$, ou seja,

$$z \in \mathcal{T} \Rightarrow z \in C(v) \;\; ou \;\; z \in C(-v).$$

Reciprocamente, se $z \in C(v) \cup C(-v)$ então $z \in C(v)$ ou $z \in C(-v)$. Se $z \in C(v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, v\rangle < 0$. Se $z \in C(-v)$ então $z \in \mathcal{T}$ e $\langle z, -v\rangle < 0$. Em qualquer caso, $z \in \mathcal{T}$ e portanto $\mathcal{T} = C(v) \cup C(-v)$.

2. Escreva $w = av + \widehat{w}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\widehat{w} \in \{v\}^{\perp}$. Sendo $\{v\}^{\perp}$ tipo-espaço então $\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle \geq 0$. Como $w \in \mathcal{T}$ então $\langle w, w\rangle < 0$. Assim

$$\langle w, w\rangle = \langle w = av + \widehat{w}, w = av + \widehat{w}\rangle = a^2\langle v, v\rangle + \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle,$$

$$\Rightarrow a^2\langle v, v\rangle = \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle - \langle w, w\rangle.$$

logo

$$\begin{aligned}
\langle v, w\rangle^2 = \langle v, av + \widehat{w}\rangle^2 &= a^2\langle v, v\rangle^2 + \langle v, \widehat{w}\rangle^2 \\
&= a^2\langle v, v\rangle\langle v, v\rangle = (\langle w, w\rangle - \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle)\langle v, v\rangle \\
&= \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle - \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle\langle v, v\rangle \\
&\geq \langle w, w\rangle\langle v, v\rangle = (-\langle w, w\rangle)(-\langle v, v\rangle) \\
&= |w|^2|v|^2,
\end{aligned}$$

uma vez que, $-\ \langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle\langle v, v\rangle \geq 0$.

Além disso a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle \widehat{w}, \widehat{w}\rangle = 0$, isto é $\widehat{w} = 0$. Assim, a igualdade acontece se, e somente se, $w = av$.

3. Queremos mostrar que se $v \in C(u)$ e w é tipo-tempo então $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$.

Como $C\left(\dfrac{u}{|u|}\right) = C(u)$, assumiremos que u é um vetor unitário tipo-tempo. Escreva $v = au + \widehat{v}$ e $w = bu + \widehat{w}$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $\widehat{v}, \widehat{w} \in \{u\}^{\perp}$. Como v e w são vetores tipo tempo, então $\langle v, v\rangle < 0$ e $\langle w, w\rangle < 0$. Daí,

$$\begin{aligned}0 > \langle v, v\rangle &= \langle au + \widehat{v}, au + \widehat{v}\rangle \\ &= a^2\langle u, u\rangle + \langle \widehat{v}, \widehat{v}\rangle \\ &= -a^2(-\langle u, u\rangle) + |\widehat{v}|^2 \\ &= -a^2|u|^2 + |\widehat{v}|^2 = -a^2 + |\widehat{v}|^2.\end{aligned}$$

Com um cálculo análogo encontramos que

$$0 > \langle w, w\rangle = -b^2 + |\widehat{w}|^2.$$

Então

$$|a| > |\widehat{v}| \quad \text{e} \quad |b| > |\widehat{w}|,$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= \langle au + \widehat{v}, bu + \widehat{w}\rangle \\ &= ab\langle u, u\rangle + a\langle u, \widehat{w}\rangle + b\langle \widehat{v}, u\rangle + \langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle \\ &= -ab + \langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle.\end{aligned}$$

Agora como $v \in C(u)$ temos

$$0 > \langle v, u\rangle = \langle au + \widehat{v}, u\rangle = a\langle u, u\rangle = -a,$$

e seque que $a > 0$.

Suponhamos que $w \in C(u)$, então

$$0 > \langle u, w\rangle = \langle u, bu + \widehat{w}\rangle = b\langle u, u\rangle = -\, b,$$

daí, $b > 0$ e assim, $ab > 0$. Agora usando a desigualdade de Cauchy-Scharwz clássica para $\widehat{v}, \widehat{w}$ temos

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle &= -ab + \langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle \leq -ab + |\langle \widehat{v}, \widehat{w}\rangle| \leq -ab + |\widehat{v}||\widehat{w}| \\ &< -\, ab + |a||b| = -\, ab + ab = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $w \in C(u)$ se, e somente se, $\langle v, w\rangle < 0$.

4. Se $v, w \in C(u)$ então $\langle v, w\rangle < 0$. Daí pelo item (ii) temos

$$-\frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|} \geq 1$$

Assim, pelas propriedades do cossen hiperbólico, onde $D = [1, +\infty)$ temos que existe um $\phi \geq 0$ tal que

$$-\frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|} = \cosh\phi,$$

ou seja,

$$\langle v, w\rangle = -|v||w|\cosh\phi.$$

■

Exemplo 3.1.2. (de Sitter) *Considere*

$$\mathbb{S}^n_1(r) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\, \langle x, x\rangle = r^2)\right\}.$$

Se $f : \mathbb{L}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \langle x, x\rangle$, então f é diferenciável e tal que $\mathbb{S}^n_1(r) = f^{-1}(r^2)$. Denotemos por ∇^o a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+1}$. Uma vez que o gradiente $\nabla^o f$ não se anula em nenhum ponto de $f^{-1}(r^2)$, temos que $\mathbb{S}^n_1(r)$ é uma hipersuperfície mergulhada em $\mathbb{L}^{n+1}$. De fato, como

$$\langle\nabla^o f, X\rangle = X(f) = X\langle x, x\rangle = 2\langle\nabla^o_X x, x\rangle = \langle 2X, x\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$. Dai $\nabla^o f(x) = 2x$ e portanto

$$\langle\nabla^o f(x), \nabla^o f(x)\rangle = 4r^2 > 0$$

para todo $x \in f^{-1}(r^2)$. Assim, o espaço gerado $span\{\nabla^o f(x)\}^{\perp}$ é tipo-espaço e consequentemente, $\mathbb{S}^n_1(r)$ é uma hipersuperfície Lorentziana de $\mathbb{L}^{n+1}$ chamada espaço-tempo de De Sitter.

Definição 3.1.3. *Seja $\overline{M}$ uma variedade de Lorentz e $\mathcal{T}$ uma função em $\overline{M}$ a qual corresponde a cada ponto $p \in \overline{M}$ um cone tipo-tempo $\mathcal{T}_p \in T_p\overline{M}$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é diferenciável quando para cada $p \in \overline{M}$ existem uma vizinhança U de p e $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ tais que $V(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U$.*

Uma tal função diferenciável é dita uma orientação temporal de $\overline{M}$. Se $\overline{M}$ admite uma orientação temporal então dizemos que $\overline{M}$ é temporalmente orientado.

Proposição 3.1.4. *Uma variedade Lorentziana $\overline{M}$ é temporalmente orientada se, e somente se, existe um campo $K \in \mathfrak{X}(M)$ tipo-tempo globalmente definido em $\overline{M}$.*

Demonstração. Se $K \in \mathfrak{X}(M)$ é tipo-tempo então, defina

$$\mathcal{T}_p = C(K(p)),$$

e observe que $\mathcal{T}_p$ é diferenciável e determina uma orientação temporal em $\overline{M}$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal em $\overline{M}$. Como $\mathcal{T}$ é diferenciável em ponto $p \in \overline{M}$, existe uma vizinhança U de $\overline{M}$ na qual o campo de vetores tipo-tempo K_U esta definido, tal que $K_U(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U$. Assim obtemos uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de $\overline{M}$ e campos de vetores tipo-tempo K_{U_α} tais que $K_{U_\alpha}(q) \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U_\alpha$. Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ e considere o campo

$$K = \sum_\alpha f_\alpha K_{U_\alpha}.$$

Temos que K esta bem definido pois em cada ponto de $\overline{M}$ a soma em α é finita. Além disso

$$\begin{aligned}\langle K(q), K(q)\rangle &= \left\langle \sum_\alpha f_\alpha(q) K_{U_\alpha}(q), \sum_\beta f_\beta(q) K_{U_\beta}(q)\right\rangle \\ &= \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha(q) f_\beta(q) \langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q)\rangle,\end{aligned}$$

como $K_{U_\alpha}, K_{U_\beta} \in \mathcal{T}_q$ então, pelo item (iii) do Lema 3.1.1, temos

$$\langle K_{U_\alpha}(q), K_{U_\beta}(q)\rangle < 0,$$

e como $0 \leq f_\alpha(q) \leq 1$ obtemos que

$$\langle K(q), K(q)\rangle < 0.$$

Uma vez que q é um ponto arbitrário de $\overline{M}$ temos que K é um campo de vetores em $\overline{M}$ tipo-tempo. ■

Sempre que uma variedade de Lorentz $\overline{M}$ for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação $\mathcal{T}$ como na Definição 3.1.4, ou de um campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ a ela correspondente, será denominada uma orientação temporal para $\overline{M}$.

Seja $\mathcal{T}$ uma orientação temporal para $\overline{M}$ e $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $K(q) \in \mathcal{T}_q$ (respectivamente, $-\,K(q) \in \mathcal{T}_q$) para todo $q \in \overline{M}$, dizemos que K aponta para o futuro (respectivamente, aponta para o passado). Sendo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ uma orientação temporal para $\overline{M}$, segue do item (iii) do Lema 3.1.1 que um campo vetorial tipo-tempo K sobre $\overline{M}$ aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se, $\langle K, X\rangle < 0$ (respectivamente, $\langle K, X\rangle > 0$).

Exemplo 3.1.5. *O espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ é temporalmente orientado, pois*

$$K = e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$$

é um campo de vetores tipo-tempo globalmente definido em $\mathbb{L}^{n+1}$.

3.2 IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Definição 3.2.1. *Sejam M^n e $\overline{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente com $m > n$. Dizemos que a aplicação $x : M \to \overline{M}$ é uma imersão se a aplicação diferencial $dx_p : T_pM \to T_{x(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$.*

O número $k = m - n$ é chamado *codimensão* de x.

Definição 3.2.2. *Uma imersão $x : M^n \to \overline{M}^m$ entre duas variedades semi-Riemannianas com métricas $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$, respectivamente é chamada imersão isométrica se*

$$\langle u, v \rangle_M = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle_{\overline{M}},$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Observamos que se $x : M^n \to \overline{M}^m$ é uma imersão e $\langle , \rangle_{\overline{M}}$ é a métrica em $\overline{M}^m$, podemos definir uma métrica $\langle , \rangle_M$ em M^n pelo *pullback*.

Seja $x : M^n \to \overline{M}^m$ uma imersão isométrica. Como ao redor de cada ponto $p \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M^n$ tal que $x\big|_U$ é um mergulho sobre $x(U)$, podemos identificar U com a sua imagem $x(U)$, isto é x é localmente a aplicação inclusão. Além disso, podemos considerar o espaço tangente de M^n em p com um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}^m$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Definição 3.2.3. *Sejam $\overline{M}^m$ uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e $x : M^n \to \overline{M}^m$ uma imersão isométrica. Então dados campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que*

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Com relação à $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$, pode-se mostrar que é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica de M. E segue da unicidade da conexão de Levi-Civita que $(\overline{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita de M e denotamos por ∇.

Assim obtemos a *Fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.1}$$

a qual define uma aplicação

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

chamada a *Segunda Forma Fundamental* da imersão x.

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, pelas propriedades das conexões de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ e ∇ temos que a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por $\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.

Consideremos os campos de vetores $X \in M$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, e denotemos por $A_\xi X$ a componente tangencial de $-\ \overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -\ (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Uma vez que para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} 0 = X\langle \xi, Y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle \\ &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp} + (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}, Y\rangle + \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X,Y)\rangle \\ &= \langle -A_\xi X, Y\rangle + \langle \xi, \alpha(X,Y)\rangle \end{aligned}$$

Daí,

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle. \tag{3.2}$$

Em particular, a aplicação $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $A(X,\xi) = A_\xi X$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$. Assim, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e, de (3.2) auto adjunta, isto é

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle A_\xi Y, X\rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A aplicação A_ξ é chamada *Operador de Forma* ou *Operador de Weingarten* da imersão x.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, que é denotada por $\nabla^{\perp}_X \xi$, define uma conexão compatível com o fibrado tangente normal $TM^{\perp}$ no seguinte sentido:

$$\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

é $C^\infty(M)$-linear em X, $\mathbb{R}$-linear em ξ e para todo $h \in C^\infty(M)$,

$$\nabla^\perp_X(h\xi) = h\nabla^\perp_X\xi + X(h)\xi.$$

Além disto, $\nabla^\perp$ é compatível com a métrica, ou seja,

$$X\langle\xi,\eta\rangle = \langle\nabla^\perp_X\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\nabla^\perp_X\eta\rangle, \quad \xi,\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp,$$

onde $\langle\,,\rangle$ é a métrica de $\overline{M}$. Dizemos que $\nabla^\perp$ é a conexão normal de x, e obtemos a fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi.$$

A partir da segunda forma fundamental, introduzimos a seguinte definição:

Definição 3.2.4. *Definimos o vetor curvatura média de M^n em $\overline{M}^m$ como o traço da segunda forma fundamental. Mais especificamente,*

$$H = \frac{1}{n}tr(\alpha). \tag{3.3}$$

Uma vez que o operador A_ξ é simétrico em cada direção $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ podemos definir a curvatura média em cada direção ξ. Isto é, se $e_1,\dots,e_n$ é um referencial ortonormal ao longo de M^n, de (3.2) e (3.2.4), escrevemos

$$\langle H,\xi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle\alpha(e_i,e_i),\xi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle A_\xi(e_i),e_i\rangle = \frac{1}{n}tr(A_\xi). \tag{3.4}$$

Definição 3.2.5. *Seja M^n uma subvariedade de $\overline{M}^m$. Dizemos que uma imersão isométrica M^n é mínima em $p \in M$ quando $H(p) = 0$ e que M^n é uma subvariedade mínima quando é mínima em todos os pontos de M.*

Definição 3.2.6. *A subvariedade M^n é dita ser totalmente geodésica quando a segunda forma fundamental de M^n em $\overline{M}^m$ é identicamente nula, isto é $\alpha \equiv 0$.*

Segue de (3.4) que se M^n é totalmente geodésica então ela é minima em todos os pontos.

Agora, usando a fórmula de Gauss e Weingarten, obtemos as equações básicas das imersões isométricas para o nosso interesse: a equação de Gauss e Codazzi.

Teorema 3.2.7. *Seja M^n uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}^m$. Sejam R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M^n e $\overline{M}^m$ respectivamente, e α a segunda forma fundamental. Então para $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

1. *(Equação de Gauss)*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle - \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle;$$

2. *(Equação de Codazzi)*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z) - (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z),$$

Demonstração. Veja (CARMO, 2008). ■

Como aplicação direta do Teorema 3.2.7, temos

Corolário 3.2.8. *(da Equação de Gauss) Se $\{X,Y\}$ é uma base para um plano tangente não degenerado de M^n gerado por $X,Y\in T_pM$, então*

$$\overline{K}(X,Y) = K(X,Y) + \frac{\langle \alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle - \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\overline{K}$ e K denotam as curvaturas seccionais de $\overline{M}^m$ e M^n respectivamente.

Demonstração. Observe que fazendo $X=Z$ e $W=Y$ na equação de Gauss (3.2.7), temos que

$$\langle \overline{R}(X,Y)X,Y\rangle = \langle R(X,Y)X,Y\rangle + \langle \alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle - \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle,$$

uma vez que $|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2\neq 0$ temos

$$\frac{\langle \overline{R}(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2} = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2} + \frac{\langle \alpha(X,Y),\alpha(Y,X)\rangle - \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2},$$

o que implica

$$\overline{K}(X,Y) = K(X,Y) + \frac{\langle \alpha(X,Y),\alpha(X,Y)\rangle - \langle \alpha(X,X),\alpha(Y,Y)\rangle}{|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2}.$$

■

Definição 3.2.9. *Uma variedade é dita flat quando a curvatura seccional é identicamente nula.*

O espaço Euclidiano n-dimensional é uma variedade *flat*, uma vez que em $\mathbb{R}^n$ os *Símbolos de Christoffel* são identicamente nulos pois são dados pelas derivadas da métrica que são nulas neste espaço.

Exemplo 3.2.10. *Mostremos que a esfera n-dimensional*

$$\mathbb{S}^n(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \langle p, p \rangle = r^2\}$$

tem curvatura seccional constante $K = \dfrac{1}{r^2}$, se $n \geq 2$.

Com efeito, seja $p = \sum_i u^i \partial_i$ o vetor posição de $\mathbb{R}^{n+1}$ para $p \in \mathbb{S}^n(r)$. Se $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{n+1}$ então

$$\overline{\nabla}_X p = \sum_i X(u^i)\partial_i = \sum_i X^i \partial_i = X, \tag{3.5}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. Daí,

$$\langle p, p \rangle = r^2 \Rightarrow 0 = X\langle p, p \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X p, p \rangle = 2\langle X, p \rangle$$

o que implica

$$0 = \langle X, p \rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$, isto é, o vetor posição p é ortogonal a $\mathbb{S}^n$.

Considere agora $U = \dfrac{p}{|p|} = \dfrac{p}{\sqrt{\langle p, p \rangle}} = \dfrac{p}{r}$ e afirmamos que

$$\alpha(V, W) = -\frac{1}{r}\langle V, W \rangle U,$$

para todo $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \alpha(V, W), U \rangle &= \langle (\overline{\nabla}_V W)^\perp, U \rangle = \frac{1}{r}\langle (\overline{\nabla}_V W)^\perp, p \rangle \\ &= \frac{1}{r}\langle \overline{\nabla}_V W, p \rangle = -\frac{1}{r}\langle W, \overline{\nabla}_V p \rangle \\ &= -\frac{1}{r}\langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^{n+1}$ é flat, pelo corolário (3.2.8)

$$\begin{aligned} K(V, W) &= \frac{\langle \alpha(V, V), \alpha(W, W) \rangle - \langle \alpha(V, W), \alpha(V, W) \rangle}{|V|^2|W|^2 - \langle V, W \rangle^2} \\ &= \frac{\frac{1}{r^2}\langle \langle V, V \rangle U, \langle W, W \rangle U \rangle - \frac{1}{r^2}\langle \langle V, W \rangle U, \langle V, W \rangle U \rangle}{|V|^2|W|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

Lembremos que pelo Corolário 2.3.28, se M possui curvatura seccional constante C podemos escrever o tensor curvatura como

$$R(X, X)Z = C(\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X).$$

Com isso, temos a seguinte consequência:

Corolário 3.2.11. *Se a variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^m$ tem curvatura seccional constante C, então para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos:*

1. *Equação de Gauss*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle = C(\langle Z,X\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Z,Y\rangle\langle X,W\rangle)\\ +\ \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle - \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle;\end{aligned}$$

2. *Equação de Codazzi*

$$(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z).$$

3.2.1 Hipersuperfícies tipo-espaço

Agora reescreveremos as equações básicas das imersões isométricas apresentadas na seção anterior para o caso em que o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Lorentziana $(n+1)$-dimensional e M é uma hipersuperfície tipo-espaço imersa.

Definição 3.2.12. *Uma imersão suave $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade n-dimensional conexa em uma variedade de Lorentz $(n+1)$-dimensional é dita uma hipersuperfície tipo-espaço quando a métrica induzida pela imersão x em M^n for Riemanniana. E neste caso denotemos a métrica de M e $\overline{M}$ por $\langle , \rangle$.*

O próximo resultado nos diz que se $\overline{M}^{n+1}$ for temporalmente orientada, então as suas hipersuperfícies tipo-espaço são orientadas.

Proposição 3.2.13. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço de uma variedade de Lorentz temporalmente orientada $\overline{M}^{n+1}$. Então M^n admite um campo de vetores normais e unitários (suave) $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, na mesma orientação temporal de $\overline{M}^{n+1}$. Em particular, M^n é orientável.*

Demonstração. Seja $K \in \mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ o campo de vetores tipo-tempo que dá a orientação temporal de $\overline{M}^{n+1}$. Observe que o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $K(p) \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(K(p))$ e $C(-K(p))$. Escolhemos então, em cada ponto $p \in M$ um vetor unitário $N(p) \in T_pM^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-\ N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(K(p))$. Esta receita define unicamente um campo de vetores normal e unitário N sobre M, na mesma orientação temporal de K. Agora, resta mostrar que N é suave. De fato, fixemos $p \in M$ e consideremos um referencial móvel

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ ao redor de p. Então

$$\widetilde{N} = K - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j$$

é normal e suave em M com,

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle &= \left\langle K - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j, K - \sum_{i=1}^{n} \langle K, e_i \rangle e_i \right\rangle \\
&= \langle K, K \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle \langle K, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle K, e_i \rangle \langle K, e_i \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle K, e_i \rangle \langle K, e_j \rangle \delta_{ij} \\
&= \langle K, K \rangle - 2 \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 \\
&= \langle K, K \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2,
\end{aligned}$$

mas

$$K = \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j - \langle K, N \rangle N,$$

e dai

$$\langle K, K \rangle = - \langle K, N \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2.$$

Logo

$$\langle \widetilde{N}, \widetilde{N} \rangle = - \langle K, N \rangle^2 + \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 < 0.$$

Além disso

$$\langle \widetilde{N}, K \rangle = \left\langle K - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle e_j, K \right\rangle = \langle K, K \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle K, e_j \rangle^2 < 0.$$

Assim, $\widetilde{N}(p) \in C(K(p))$ e portanto, $N = \dfrac{\widetilde{N}}{|\widetilde{N}|}$ é suave. ■

Observação 3.2.14. *Na ultima proposição, com K e N estão na mesma orientação temporal, temos que $\langle K, N \rangle < 0$. Com efeito, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores tipo-tempo,*

$$|\langle K, N \rangle| \geq |K||N| = |K|,$$

pois N é unitário em M^n. Assim $\langle K, N \rangle \leq -|K| < 0$ em M^n.

De agora em diante, $\overline{M}^{n+1}$ denotará uma variedade de Lorentz e $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\overline{M}^{n+1}$. Denotaremos por N a escolha de uma orientação temporal para a hipesuperfície tipo-espaço, onde N é um campo normal e unitário. Nos referiremos à N como sendo a *Aplicação Normal de Gauss* de M^n. Uma vez que há apenas uma direção normal, deixaremos de escrever o subíndice em no operador de Weingarten A para denotar a direção normal. Com exceção da métrica, denotaremos por $\overline{\nabla}$ e $\overline{R}$ a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente, e por ∇ e R a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura de M respectivamente.

Então dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, não é difícil ver que a fórmula de Gauss (3.1) se escreve como:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y\rangle N.$$

Por outro lado, uma vez que N é um campo unitário e normal, temos

$$0 = X\langle N, X\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim,

$$(\overline{\nabla}_X N)^{\perp} = -\langle \overline{\nabla}_X N, N\rangle N = 0.$$

Logo, podemos escrever a fórmula de Weingarten da seguinte forma

$$\overline{\nabla}_X N = (\overline{\nabla}_X N)^{\top} = -AX.$$

Usando o fato que

$$\alpha(X, Y) = - \langle AX, Y\rangle N,$$

podemos ver que a equação de Gauss pode ser escrita como

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z)^{\top} + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX,$$

e a equação de Codazzi por

$$(\overline{R}(X, Y)N)^{\top} = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y,$$

onde ∇A satisfaz

$$\nabla A(Y, X) = (\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

No caso em que a curvatura seccional de $\overline{M}^{n+1}$ é constante C, as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente

$$R(X, Y)Z = C(\langle Z, X\rangle Y - \langle Z, Y\rangle X) + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX$$

e

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y.$$

4 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção apresentaremos os resultados principais desta dissertação concernentes a hipersuperfícies tipo-espaço imersas no espaço de Lorentz-Minkowski.

4.1 HIPERSUPERFÍCIES TIPO-ESPAÇO COMPLETAS EM $\mathbb{L}^{n+1}$

Recordemos que o espaço de Lorentz-Minkowski nada mais é que o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ dotado com a métrica de Lorentz

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i - v_{n+1}w_{n+1},$$

para todo $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $\psi : M^n \longrightarrow \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço. Uma vez que o campo $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1)$ é tipo-tempo unitário globalmente definido por $\mathbb{L}^{n+1}$, sabemos que ele determina uma orientação temporal em $\mathbb{L}^{n+1}$. Assim, podemos escolher um único campo vetorial unitário tipo-tempo N ao longo de M^n apontando para o futuro em $\mathbb{L}^{n+1}$, isto é,

$$\langle N, e_{n+1}\rangle \leq -1 < 0.$$

Portanto, podemos assumir que M^n é orientada com orientação dada por N.

Sendo campo vetorial N unitário e tipo-tempo, podemos considera-lo como aplicação de Gauss $N : M^n \to \mathbb{H}^n$ em M^n, onde $\mathbb{H}^n$ denota o n-dimensional espaço hiperbólico tal que

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x\rangle = -1\,, x_{n+1} \geq 1\}.$$

Neste contexto, a imagem $N(M)$ é chamada de Imagem hiperbólica de M^n.

O próximo resultado nos mostra que $\mathbb{H}^n$ é uma variedade Riemanniana.

Exemplo 4.1.1. *O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ é uma subvariedade Riemanniana de codimensão 1 de $\mathbb{L}^{n+1}$. De fato, defina a aplicação suave $f : \mathbb{L}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(p) = \langle p, p\rangle + 1.$$

Basta verificar que 0 é um valor regular de f, pois $f^{-1}(0) = \mathbb{H}^n$. De fato, sejam $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ e $v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$. Considere uma curva diferenciável $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{L}^{n+1}$ tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = v$. Então,

$$\langle \overline{\nabla} f(p), v\rangle = v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \beta)(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\langle \beta(t), \beta(t)\rangle\Big|_{t=0} = \langle 2p, v\rangle. \tag{4.1}$$

Sendo $v \in T_p\mathbb{L}^{n+1}$ *é arbitrário e a métrica é não-degenerada segue que*

$$\overline{\nabla} f(p) = 2p,$$

para todo $p \in \mathbb{L}^{n+1}$. *Veja que*

$$\overline{\nabla} f(p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 0$$

o que não pode ocorrer para pontos $p \in \mathbb{H}^n$. *Assim* 0 *é o valor regular de* f, *e portanto,* $f^{-1}(0)$ *é uma subvariedade de* $\mathbb{L}^{n+1}$ *com dimensão*

$$dim(\Sigma_\lambda) = dim(\mathbb{L}^{n+1}) - dim(\mathbb{R}) = n.$$

Por outro lado, para todo $p \in \Sigma_\lambda^n$, *o núcleo da aplicação* $df_p : T_p\mathbb{L}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *é dado por*

$$Ker(df_p) = T_p\mathbb{H}^n.$$

Logo, se $v \in Ker(df_p)$ *temos de* (4.1),

$$0 = df_p(v) = \langle \overline{\nabla} f(p), v \rangle = \langle 2p, v \rangle,$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n$.

Daí,

$$T_p\mathbb{H}^n = \{v \in \mathbb{L}^{n+1} \,;\, \langle p, v \rangle = 0\}.$$

Tome agora $u \in T_p\mathbb{H}^n \cap span\{\overline{\nabla} f(p)\}$. *Desse modo,* $\langle u, p \rangle = 0$ *e* $u = a\overline{\nabla} f(p)$, *para algum* $a \in \mathbb{R}$. *Juntando os dois*

$$0 = \langle u, p \rangle = a\langle \overline{\nabla} f(p), p \rangle = 2a\langle p, p \rangle = -2a.$$

Sendo $\lambda \neq 0$, *segue que* $a = 0$ *e assim* $u = 0$. *Portanto*

$$T_p\mathbb{H}^n \cap span\{\overline{\nabla} f(p)\} = 0,$$

para todo $p \in \mathbb{H}^n$. *Assim,*

$$T_p\mathbb{L}^{n+1} = T_p\mathbb{H}^n \oplus span\{\overline{\nabla} f(p)\}.$$

Como $\langle p, p \rangle = -\lambda^2$ *e* $\overline{\nabla} f(p) = 2p$, *segue que*

$$\langle \overline{\nabla} f(p), \overline{\nabla} f(p) \rangle = 4\langle p, p \rangle = -4 < 0,$$

mostrando que $span\{\overline{\nabla} f(p)\}$ *tem índice igual a* 1.

Além disso, $span\{\overline{\nabla} f(p)\} = (T_p\mathbb{H}^n)^{\perp}$ *e dai,*

$$1 = ind(T_p\mathbb{L}^{n+1}) = ind(T_p\mathbb{H}^n) + ind(span\{\overline{\nabla} f(p)\}) = ind(T_p\mathbb{H}^n) + 1.$$

Assim, $ind(T_p\mathbb{H}^n) = 0$, *para todo* $p \in \mathbb{H}^n$. *Isto mostra que* $\mathbb{H}^n$ *é tipo-espaço, ou seja,uma variedade Riemanniana.*

Proposição 4.1.2. *Sejam* $a \in \mathbb{H}^n$ *e* $\rho > 0$. *A bola geodésica em* $\mathbb{H}^n$ *centrada em* a *de raio* ρ *é caracterizada por:*

$$B(a,\rho) = \{p \in \mathbb{H}^n\,;\, -\cosh(\rho) < \langle p, a\rangle \leq -1\}.$$

Demonstração. Primeiramente recordemos que uma bola geodésica centrada em um ponto $a \in \mathbb{H}^n$ e raio $\rho > 0$ é dada por:

$$B(a,\rho) = \{p \in \mathbb{H}^n\,;\, d(a,p) < \rho\}. \tag{4.2}$$

Por outro lado, a função distância em $\mathbb{H}^n$ de a para p é dada por (veja, por exemplo ())

$$d(a,p) = \cosh^{-1}(-\langle a,p\rangle). \tag{4.3}$$

Logo de (4.2) e (4.3), escrevemos

$$B(a,p) = \{p \in \mathbb{H}^n\,;\, \cosh^{-1}(-\langle a,p\rangle) < \rho\}. \tag{4.4}$$

Agora, dado $y = \cosh^{-1} x$ temos que $Im = [0,+\infty)$ e $D = [1,+\infty)$. Então,

$$-\langle a,p\rangle \geq 1 \qquad \text{implicando em} \qquad \langle a,p\rangle \leq -1.$$

Uma vez que a função cosseno hiperbólico é estritamente crescente, segue da desigualdade $\cosh^{-1}(-\langle a,p\rangle) < \rho$ que

$$\cosh\rho > -\langle a,p\rangle \geq 1.$$

Portanto,

$$-\cosh\rho < \langle a,p\rangle \leq -1,$$

mostrando o desejado. ■

Nesta configuração, se a imagem hiperbólica de M^n está contida no fecho de alguma bola geodésica $B(a,p)$ se, isto é, $N(M) \subset B(a,p)$, devemos ter

$$-\cosh\rho \leq \langle N(p),a\rangle \leq -1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \leq |\langle N(p),a\rangle| \leq \cosh\rho, \tag{4.5}$$

para todo p^n.

Assim como antes, denotaremos por A o operador forma (ou de Weingarten) de M^n em $\mathbb{L}^{n+1}$ associado a aplicação de Gauss N de M^n que aponta para o futuro em $\mathbb{L}^{n+1}$ e por $-nH = tr(A)$ a função curvatura média de M^n.

Como aplicação da equação de Gauss (3.2.7), obtemos a seguinte estimativa inferior para a curvatura de Ricci em termos da curvatura média de M^n.

Lema 4.1.3. *Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$. Então a sua curvatura de Ricci satisfaz:*

$$Ric(X,X) \geq -2H^2|X|^2, \qquad n = 2$$

e

$$Ric(X,X) \geq -\frac{n^2H^2}{4}|X|^2, \qquad n > 2, \tag{4.6}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n esta contido em um hiperplano tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$.

Demonstração. A ideia é mostrar que $A = 0$.

Com isso, basta aplicar o seguinte resultado clássico de imersões (veja (O'NEILL, 1983)):

Lema 4.1.4. *Se M^n é uma hipersuperfície tipo-espaço conexa e totalmente geodésica de $\mathbb{L}^{n+1}$, então ela esta contida em um hiperplano tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$.*

Seja $\{E_1, ..., E_i\}$ um referencial ortonormal de campos tangentes à M^n. Pela Definição 2.3.29, temos

$$Ric(X,X) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)X, E_i \rangle. \tag{4.7}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Uma vez que o espaço ambiente é o Lorentz-Minkowski, sabemos que $\overline{R} = 0$. Assim, da equação de Gauss, escrevemos

$$R(X,Y)X = -\langle A(X), X \rangle A(Y) + \langle A(Y), X \rangle A(X), \tag{4.8}$$

para todo campo de vetores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Agora dividiremos a prova em dois casos:

<u>Caso 1:</u> $n = 2$.

Como toda superfície é uma variedade de Einstein, temos

$$Ric(X,X) = K|X|^2,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, em que K denota a curvatura Gaussiana de M^2.

Tomando o traço duas vezes em (4.8), obtemos

$$K = -2H^2 + \frac{1}{2}|A|^2.$$

Portanto

$$Ric(X,X) = \left(-2H^2 + \frac{1}{2}|A|^2\right)|X|^2 \geq -2H^2|X|^2,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $A = 0$.

<u>Caso 1:</u> $n > 2$

De (4.5) e (4.7) temos,

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_{i=1}^{n}(\langle A(E_i), X\rangle\langle A(X), E_i\rangle - \langle A(X), X\rangle\langle A(E_i), E_i\rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\langle A(X), \langle A(X), E_i\rangle E_i\rangle - \langle A(X), X\rangle\langle A(E_i), E_i\rangle) \\ &= |A(X)|^2 + nH\langle A(X), X\rangle. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Por outro lado, um cálculo direto nos mostra que

$$\begin{aligned} \left|A(X) + \frac{nH}{2}X\right|^2 &= \langle A(X) + \frac{nH}{2}X, A(X) + \frac{nH}{2}X\rangle \\ &= \langle A(X), A(X)\rangle + nH\langle A(X), X\rangle + \frac{n^2H^2}{4}\langle X, X\rangle \\ &= |A(X)|^2 + nH\langle A(X), X\rangle + \frac{n^2H^2}{4}|X|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|A(X)|^2 + nH\langle A(X), X\rangle = \left|A(X) + \frac{nH}{2}X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2 \geq -\frac{n^2H^2}{4}|X|^2. \tag{4.10}$$

Portanto, substituindo (4.10) em (4.9), obtemos a estimativa (4.6).

Em particular se a igualdade ocorre, então a desigualdade em (4.10) se torna igualdade. Com isso,

$$A(X) = -\frac{nH}{2}X, \qquad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.11}$$

Tomando o traço na igualdade acima, obtemos

$$-nH = tr(A) = -\frac{nH}{2}tr(I) = -\frac{n^2H}{2}.$$

Consequentemente,

$$(n-2)H = 0.$$

Assim se $n > 2$ devemos ter que $H = 0$. Portanto retornando a (4.11) obtemos que $A = 0$.
■

Seja M^n hipersuperfície tipo-espaço com aplicação de Gauss N apontando para o futuro em $\mathbb{L}^{n+1}$. Pelo Lema 3.1.1, para todo $p \in M^n$, escrevemos

$$T_p\mathbb{L}^{n+1} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp} = T_pM \oplus span\{N\}$$

Uma vez que $e_{n+1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+1})$, temos

$$e_{n+1} = e_{n+1}^{\top} + e_{n+1}^{\perp}$$

onde $e_{n+1}^{\top}$ e $e_{n+1}^{\perp}$ denotam respectivamente, as componentes tangente e normal de e_{n+1} ao longo de M^n. Consequentemente, $e_{n+1}^{\perp} \in span\{N\}$ e, assim,

$$e_{n+1}^{\perp} = fN,$$

para alguma função suave $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$. Logo,

$$e_{n+1} = e_{n+1}^{\top} + fN. \tag{4.12}$$

Para descobrir a função f, basta tomar o produto escalar por N em ambos os lados de (4.12), isto é,

$$\langle e_{n+1}, N\rangle = \langle e_{n+1}^{\top}, N\rangle + f\langle N, N\rangle \quad \Longrightarrow \quad f = -\langle e_{n+1}, N\rangle. \tag{4.13}$$

Logo, substituindo (4.13) em (4.12) temos que:

$$e_{n+1} = e_{n+1}^{\top} - \langle e_{n+1}, N\rangle N, \tag{4.14}$$

e do teorema de Pitágoras,

$$-1 = \langle e_{n+1}, e_{n+1}\rangle = |e_{n+1}^{\top}|^2 - \langle e_{n+1}, N\rangle^2.$$

Com respeito a hipersuperfície tipo-espaço M^n, consideremos duas funções naturalmente associadas a imersão, a saber,

(i) a altura vertical: $h(p) = \langle \psi(p), e_{n+1}\rangle$,

(ii) a função ângulo: $\langle N(p), e_{n+1}\rangle$.

Para o nosso interesse, calcularemos o laplaciano da função altura h.

Proposição 4.1.5. *Se M^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$, então*

$$\Delta h = nH\langle N, e_{n+1}\rangle. \tag{4.15}$$

Demonstração. Seja h a função altura definida em 4.1. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, segue da Definição 2.3.30 que

$$\langle X, \nabla h\rangle = X(h) = X\langle \psi, e_{n+1}\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \psi(p), e_{n+1}\rangle + \langle \psi(p), \overline{\nabla}_X e_{n+1}\rangle$$

Pela equação (3.5), sabemos que, dado $p \in \mathbb{L}^{n+1}$

$$\overline{\nabla}_X \psi(p) = X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, como $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$, temos

$$\overline{\nabla}_X e_{n+1} = 0.$$

Assim,

$$\langle X, \nabla h\rangle = \langle X, e_{n+1}^{\top}\rangle, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Portanto,

$$\nabla h = e_{n+1}^{\top}.$$

Consequentemente de (4.14), escrevemos:

$$\nabla h = e_{n+1}^{\top} = e_{n+1} + \langle e_{n+1}, N\rangle N. \tag{4.16}$$

Em particular, de (4.16), vale a seguinte relação:

$$|\nabla h|^2 = -1 + \langle e_{n+1}, N\rangle^2 \tag{4.17}$$

Por um lado, tomando a derivada em (4.16), obtemos

$$0 = \overline{\nabla}_X e_{n+1} = \overline{\nabla}_X e_{n+1}^{\top} - X(\langle e_{n+1}, N\rangle)N - \langle e_{n+1}, N\rangle \overline{\nabla}_X N$$

Segue então das fórmulas de Gauss e Weingarten,

$$\nabla_X e_{n+1}^{\top} = -\langle e_{n+1}, N\rangle A(X) \quad \text{e} \quad \alpha(X, e_{n+1}^{\top}) = X(\langle e_{n+1}, N\rangle)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Por outro lado, da Definição 2.3.37, temos:

$$(Hess\, h)(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla h, Y\rangle = \langle \nabla_X e_{n+1}^{\top}, Y\rangle = -\langle e_{n+1}, N\rangle \langle A(X), Y\rangle$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Finalmente, obtemos

$$\Delta h = tr(Hess\, h) = -n\langle e_{n+1}, N\rangle tr(A) = nH\langle e_{n+1}, N\rangle.$$

■

Antes do resultado principal, a próxima definição será de suma importância.

Definição 4.1.6. *Seja M^n hipersuperfície tipo-espaço imersa em $\mathbb{L}^{n+1}$. Dizemos que:*

(a) M^n é limitada longe do infinito futuro se existe $\overline{\tau} > 0$ tal que

$$\psi(M) \subset \{x \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\, \langle x, e_{n+1}\rangle \leq \overline{\tau}\}.$$

(b) M^n é limitada longe do infinito passado se existe $\underline{\tau} > 0$ tal que

$$\psi(M) \subset \{x \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\, \langle x, e_{n+1}\rangle \geq \underline{\tau}\}.$$

Geometricamente, dizer que M^n é limitada longe do infinito futuro (resp. passado) significa que existe um hiperplano de $\mathbb{L}^{n+1}$ determinado por e_{n+1},

$$\mathcal{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\, \langle x, e_{n+1}\rangle = \tau\}$$

que limita M^n por cima (resp. por baixo). Uma vez que e_{n+1} é tipo-tempo, segue do Lema 3.1.1 que $\mathcal{H}^n$ é tipo-espaço.

Em termos da função altura, dizemos que M^n é limitada longe do infinito passado de $\mathbb{L}^{n+1}$ se a função altura h é limitada inferiormente em M^n.

Agora estamos em condições de provar o principal resultado dessa dissertação.

Teorema 4.1.7. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperficie tipo-espaço completa limitada longe do infinito passado de $\mathbb{L}^{n+1}$ com curvatura média limitada $H \geq 0$. Se a imagem hiperbólica de M^n está contida no fecho de uma bola geodésica centrada em $e_{n+1} \in \mathbb{H}^n$ cujo raio ρ satisfaz*

$$\cosh \rho \leq 1 + \inf_M H,$$

então M^n é um hiperplano tipo-espaço.

Demonstração. Pela Proposição 4.1.5, temos

$$\Delta h = nH\langle e_{n+1}, N\rangle. \tag{4.18}$$

Como $\langle e_{n+1}, N\rangle < 0$, segue de (4.17),

$$\langle e_{n+1}, N\rangle = -\sqrt{1-|\nabla h|^2}. \tag{4.19}$$

Substituindo (4.19) em (4.18) obtemos

$$\Delta h = -nH\sqrt{1-|\nabla h|^2}. \tag{4.20}$$

Nossa proposta agora é aplicar o Lema 2.3.45 à função h. Para este fim, precisamos saber se M^n satisfaz as condições do Lema 2.3.45. De fato, pelo Lema 4.1.3, temos que a curvatura de Ricci de M^n satisfaz

$$Ric(X,X) \geq -\frac{n^2H^2}{4}|X|^2.$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Uma vez que a curvatura média é não negativa e limitada superiormente, existe uma constante positiva $\alpha > 0$ tal que $0 \leq H \leq \alpha$. Daí,

$$Ric \geq -\frac{n^2\alpha^2}{4} > -\infty,$$

ou seja, a curvatura de Ricci é limitada por baixo em M^n.

Sendo M^n limitada longe do infinito passado de $\mathbb{L}^{n+1}$ determinado pelo vetor e_{n+1}, segue que a função altura h é limitada inferiormente. Logo, podemos aplicar o Colorário 2.3.46 a fim de obter uma sequência $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M^n$ satisfazendo:

$$\lim_{k\to\infty} h(p_k) = \inf_M h, \quad \lim_{k\to\infty} |\nabla h(p_k)| = 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{k\to\infty} \Delta h(p_k) \geq 0. \tag{4.21}$$

Avaliando a equação (4.20) em p_k temos

$$\Delta h(p_k) = -nH(p_k)\sqrt{1-|\nabla h(p_k)|^2}. \tag{4.22}$$

Consequentemente, como H é limitada, passando a uma subsequência se necessário, segue de (4.21), (4.22) e da continuidade da raiz quadrada, que

$$0 \leq \liminf_{k\to\infty} \Delta h(p_k) = -n\lim_{k\to\infty} H(p_k)\sqrt{1-\lim_{k\to\infty}|\nabla h(p_k)|^2} = -n\lim_{k\to\infty} H(p_k). \tag{4.23}$$

Uma vez que $H \geq 0$, devemos ter $\lim\limits_{k\to\infty} H(p_k) = 0$, e portanto, $\inf_M H = 0$.

Das hipóteses $N(M) \subset B(e_{n+1}, \rho)$ e $\cosh\rho \leq 1 + \inf_M H$, concluímos de (4.7) que

$$1 \leq |\langle N, e_{n+1}\rangle| \leq \cosh\rho + \inf_M H \leq 1,$$

isto é, $\langle N, e_{n+1}\rangle = -1$ em M^n. Substituindo este fato em (4.17) obtemos $\nabla h = 0$. Pela Proposição 2.3.34, devemos ter que a função altura h é constante em M^n, isto é, $h(p) = t_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Logo

$$M^n \subseteq \{x \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\,\langle x, e_{n+1}\rangle = t_0\}.$$

Como M^n é completa, segue do Lema 2.3.18 que M^n hiperplano tipo-espaço. ■

A hipótese sobre a imagem hiperbólica de M^n estar contida em uma bola geodésica de $\mathbb{H}^n$ suposta no Teorema 4.1.7 é inspirada na seguinte situação:

Exemplo 4.1.8. *Fixada uma constante positiva λ, seguindo as ideias desenvolvidas no Exemplo 4.1.1 é possivel mostrar que a calota hiperbólica*

$$M^n_\lambda = \left\{x \in \mathbb{L}^{n+1}\,;\,\langle x, x\rangle = -\lambda^2, \lambda \leq x_{n+1} \leq \sqrt{1+\lambda^2}\right\}$$

é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$, para isto basta definir a função suave $g : \mathbb{L}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por

$$g(p) = \langle p, p\rangle + \lambda^2.$$

e verificar que 0 é um valor regular de g, pois $g^{-1}(0) = M^n_\lambda$. De modo análogo ao feito no Exemplo 4.1.1 temos que

$$\overline{\nabla} g(p) = 2p,$$

para todo $p \in \mathbb{L}^{n+1}$ é um vetor tipo-tempo perpendicular à T_pM_λ para todo $p \in M_\lambda$.

Seja $N_\lambda : M^n_\lambda \to \mathbb{H}^n$ a aplicação normal de Gauss de M^n_λ dada por

$$N_\lambda(p) = \frac{\overline{\nabla} f(p)}{|\overline{\nabla} f(p)|}.$$

Note que,

$$|\overline{\nabla} f(p)| = \sqrt{-\langle \overline{\nabla} f(p), \overline{\nabla} f(p)\rangle} = \sqrt{-4\langle p, p\rangle} = \sqrt{-4(-\lambda^2)} = 2\lambda.$$

Logo,

$$N_\lambda(p) = \frac{\overline{\nabla} f(p)}{|\overline{\nabla} f(p)|} = \frac{2p}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}p,$$

para todo $p \in M^n_\lambda$. Veja também que N_λ é tal que

$$\langle N_\lambda(p), e_{n+1}\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle p, e_{n+1}\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle (x_1, \ldots, x_{n+1}), (0, \ldots, 0, 1)\rangle = -\frac{1}{\lambda}x_{n+1}. \qquad (4.24)$$

Como $\lambda \leq x_{n+1} \leq \sqrt{1+\lambda^2}$, segue que

$$-\lambda \geq -x_{n+1} \geq -\sqrt{1+\lambda^2}.$$

Daí,

$$\langle N_\lambda(p), e_{n+1}\rangle = -\frac{1}{\lambda}x_{n+1} \leq -1 < 0,$$

isto é, N_λ aponta na direção futura em $\mathbb{L}^{n+1}$.

Denotemos por $A_\lambda : \mathfrak{X}(M_\lambda) \to \mathfrak{X}(M_\lambda)$ o operador de Weingarten de M_λ^n com respeito ao campo de vetores normal e unitário N_λ. Segue da fórmula de Weingarten,

$$A_\lambda(X) = -\overline{\nabla}_X N_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\overline{\nabla}_X p = -\frac{1}{\lambda}X,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M_\lambda)$. Logo,

$$-nH_\lambda = tr(A_\lambda) = -\frac{1}{\lambda}tr(I) = -\frac{n}{\lambda},$$

e consequentemente,

$$H_\lambda = \frac{1}{\lambda} > 0.$$

Além disso, como $|N_\lambda| = |e_{n+1}| = 1$, segue do item (iv) da Proposição 3.1.1 que

$$\cosh\rho = -\langle N_\lambda(p), e_{n+1}\rangle.$$

então de (4.24)*,*

$$\langle N_\lambda(p), e_{n+1}\rangle = -\frac{1}{\lambda}x_{n+1}. \tag{4.25}$$

Assim, $N_\lambda(M_\lambda)$ esta contida no fecho da bola geodésica $B(e_{n+1}, \rho)$ centrada em e_{n+1} com raio satisfazendo

$$\cosh\rho = \frac{1}{\lambda}x_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda}\sqrt{1+\lambda^2} = \sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}} \leq 1 + H_\lambda. \tag{4.26}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluímos que, diante de toda a fundamentação teórica apresentada, conseguimos mostrar a importância das hipersuperficies tipo-espaço e o quanto O Princípio do Máximo de Omori-Yau é fundamental para obtenção do resultado principal: uma extensão do Teorema de Xin-Aiyama.

Alem disso, conseguimos mostrar também um exemplo que motiva a hipótese suposta no Teorema principal: a imagem hiperbólica da hipersuperficie estar contida no fecho de uma bola geodésica, Vemos que esse exemplo é uma motivação para a hipótese do Teorema mas ele não satisfaz todas as condições do Teorema, pois não temos a curvatura média limitada.

Por fim, podemos ver o quão importante é esse tema tanto na física quanto na matemática, com diversas aplicações.

REFERÊNCIAS

AIYAMA, R. On complete space-like surfaces with constant mean curvature in a lorentzian 3-space form. *Tsukuba Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 15, n. 1, p. 235–247, 1991.

ALÍAS, L. J.; MASTROLIA, P.; RIGOLI, M. *Maximum principles and geometric applications*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 700.

CALABI, E. Examples of bernstein problems for some non-linear equations. *Global Analysis*, Amer. Math. Soc., p. 223–230, 1970.

CARMO, M. do. Geometria riemanniana. *IMPA, Rio de Janeiro*, 2008.

CHENG, S.-Y.; YAU, S.-T. Maximal space-like hypersurfaces in the lorentz-minkowski spaces. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 407–419, 1976.

CHOQUET-BRUHAT, Y. Maximal submanifolds and submanifolds with constant mean extrinsic curvature of a lorentzian manifold. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, v. 3, n. 3, p. 361–376, 1976.

GODDARD, A. Foliations of space-times by spacelike hypersurfaces of constant mean curvature. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 54, n. 3, p. 279–282, 1977.

GODDARD, A. Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1977. v. 82, n. 3, p. 489–495.

LIMA, H. F. de. On the gauss map of complete spacelike hypersurfaces with bounded mean curvature in the minkowski space. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, The Belgian Mathematical Society, v. 18, n. 3, p. 537–541, 2011.

MARSDEN, J. E.; TIPLER, F. J. Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity. *Physics Reports*, Elsevier, v. 66, n. 3, p. 109–139, 1980.

OMORI, H. Isometric immersions of riemannian manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, The Mathematical Society of Japan, v. 19, n. 2, p. 205–214, 1967.

O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. [S.l.]: Academic press, 1983.

PALMER, B. The gauss map of a spacelike constant mean curvature hypersurface of minkowski space. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 65, n. 1, p. 52–57, 1990.

STUMBLES, S. M. Hypersurfaces of constant mean extrinsic curvature. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 133, n. 1, p. 28–56, 1981.

XIN, Y. On the gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in minkowski space. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 66, n. 1, p. 590–598, 1991.

YAU, S.-T. Harmonic functions on complete riemannian manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.

YAU, S.-T. A general schwarz lemma for kàthler manifolds. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 100, n. 1, p. 197–203, 1978.