

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JORDLLY REYDSON DE BARROS SILVA

ANÁLISE DE PILARES-PAREDE DE CONCRETO ARMADO
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Recife
2022

JORDLLY REYDSON DE BARROS SILVA

**ANÁLISE DE PILARES-PAREDE DE CONCRETO ARMADO
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.

**Recife
2022**

Catálogo na fonte
Bibliotecária Margareth Malta, CRB-4 / 1198

S586a Silva, Jordlly Reydson de Barros.
Análise de pilares-parede de concreto armado via método dos elementos finitos
/ Jordlly Reydson de Barros Silva. - 2022.
140 f. ils., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2022.
Inclui Referências e Anexos.

1. Engenharia Civil. 2. Pilares-parede. 3. Concreto armado. 4.
Método dos elementos finitos. 5. Análise não-linear. I. Horowitz,
Bernardo. (Orientador). II. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG/2020-75

JORDLLY REYDSON DE BARROS SILVA

**ANÁLISE DE PILARES-PAREDE DE CONCRETO ARMADO
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, Área de Concentração Estruturas.

Aprovada em 21/02/2022

BANCA EXAMINADORA

participação por videoconferência
Prof. Dr. Bernardo Horowitz (orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência
Prof. Dr. Luís Filipe Almeida Bernardo (examinador externo)
Universidade da Beira Interior

participação por videoconferência
Prof. Dr. Fernando Artur Nogueira Silva (examinador externo)
Universidade Católica de Pernambuco

participação por videoconferência
Prof. Dr. Tiago Ancelmo de Carvalho Pires e Oliveira (examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência
Prof. Dr. Renato de Siqueira Motta (examinador interno)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter proporcionado essa experiência.

Ao Professor Bernardo Horowitz, pela orientação e oportunidade.

A minha família e amigos, em especial, meus pais Josivaldo e Mônica, minha Irmã Jorllâny, e, Jéssyca, pela ajuda e incentivo.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

RESUMO

O presente trabalho trata de um tema fundamental para a segurança de edificações de altura elevada: a adequada avaliação do comportamento dos pilares-parede de concreto armado, que compõem a estrutura de contraventamento da construção. Inicialmente, para dois pilares-parede (simples e seção U), os resultados obtidos segundo o método aproximado (NBR-6118:2014) e o método da malha de barras (CAD/TQS), presentes na literatura, são comparados com análises não-lineares (física e geométrica) com elementos finitos de casca (MEF-NL), realizadas no software VecTor 4, o qual é baseado no modelo do campo de tensões perturbado. Além disso, é apresentado o desenvolvimento de um programa computacional dedicado à análise não-linear de cascas de concreto armado, utilizando o modelo do campo de tensões perturbado e a formulação Lagrangiana total, validado através de comparações com resultados experimentais, e, aplicado na análise dos dois pilares-parede estudados anteriormente. Com isso, ao longo do estudo, foi possível identificar a significativa influência do efeito da redistribuição dos esforços, e do princípio de Saint-Venant, o que contribuiu para a atenuação dos efeitos localizados de 2ª ordem nos pilares-parede, em relação ao discutido na literatura.

Palavras-chave: pilares-parede; concreto armado; método dos elementos finitos; análise não-linear.

ABSTRACT

This work deals with a fundamental issue for tall buildings safety: the structural analysis of reinforced concrete shear walls that resist lateral loads. For two shear walls (simple planar and U-shaped), the results determined according to the Brazilian design code approximate procedure (NBR-6118:2014) and the grid method (CAD/TQS), presented in the literature, are compared with material and geometrically nonlinear finite shell element analysis (NL-FEA), performed by the software VecTor 4, based on the Disturbed Stress Field Model (DSFM). Furthermore, it is present the development of a computer program dedicated to reinforced concrete shells nonlinear analysis, which is based on the DSFM and a Total Lagrangian Formulation. The program was validated through experimental results, and it was applied in the analysis of the two later shear walls. Thereby, it was possible to observe the significant influence that the stress redistribution and the Saint-Venant's principle have on the structure response, and the consequent smoothing of the shear walls second order localized effects, in relation to what is discussed in the literature.

Keywords: shear walls; reinforced concrete; finite elements; nonlinear analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geometria de um pilar-parede simples e aplicação em um edifício . . .	27
Figura 2 – Pilares-parede compostos: seções U, L e fechada	28
Figura 3 – Disposição dos pilares-parede em uma planta de um edifício	28
Figura 4 – Efeitos localizados de 2ª ordem e modos de flambagem em pilares-parede	30
Figura 5 – Possíveis vinculações das lâminas de um pilar-parede	31
Figura 6 – Método normativo para decomposição de uma lâmina em faixas verticais	32
Figura 7 – Geometria e carregamentos dos pilares-parede analisados	35
Figura 8 – Modelagem em elementos finitos dos pilares-parede analisados	37
Figura 9 – Armaduras longitudinais dos pilares-parede em estudo	40
Figura 10 – Análise do pilar-parede simples	42
Figura 11 – Análise do pilar-parede com seção U (Modo Simétrico)	45
Figura 12 – Análise do pilar-parede com seção U (Modo Antissimétrico)	46
Figura 13 – Análise do pilar-parede simples, $\lambda = 90$	48
Figura 14 – Análise do pilar-parede com seção U (modo simétrico), $\lambda_{abas} = 90$. . .	49
Figura 15 – Análise do pilar-parede com seção U (modo antissimétrico), $\lambda_{abas} = 90$	50
Figura 16 – Elemento finito de cascas planas QTFLS	56
Figura 17 – Lamelas de concreto e camadas de aço	61
Figura 18 – Esforços internos no elemento de casca	63
Figura 19 – Pseudocódigo do procedimento de solução do problema não-linear . . .	65
Figura 20 – Método de Newton-Raphson e variantes	66
Figura 21 – Modelo constitutivo do concreto em compressão	68
Figura 22 – Modelo constitutivo do concreto em tração	69
Figura 23 – Área de influência de uma barra no enrijecimento à tração	70
Figura 24 – Equilíbrio em um elemento de concreto armado	71
Figura 25 – Modelos constitutivos do aço	73
Figura 26 – Modelo do aumento do coeficiente de Poisson	75
Figura 27 – Deformações médias e deformações de escorregamento no concreto . . .	76
Figura 28 – Pseudocódigo do modelo constitutivo secante da lamela de concreto . .	80
Figura 29 – Pseudocódigo do modelo constitutivo secante da camada de aço	81
Figura 30 – Viga-parede de Cervenka (mm)	84
Figura 31 – Pilar-parede de Lefas (mm)	84
Figura 32 – Análise da viga-parede de Cervenka	85
Figura 33 – Análise do pilar-parede de Lefas	87
Figura 34 – Cascas de Polak (mm)	89
Figura 35 – Análise das cascas de Polak	90
Figura 36 – Análise não-linear geométrica de placas	91

Figura 37 – Pilar-parede seção H da NUPEC (mm)	93
Figura 38 – Pilar-parede seção H da NUPEC - Deslocamentos	94
Figura 39 – Pilar-parede seção H da NUPEC - Esforços Internos	95
Figura 40 – Pilar-parede simples - Deslocamentos (apenas NLF)	97
Figura 41 – Pilar-parede simples - Esforços Internos (apenas NLF)	98
Figura 42 – Pilar-parede simples - Deslocamentos (NLG + NLF)	99
Figura 43 – Pilar-parede simples - Esforços Internos (NLG + NLF)	100
Figura 44 – Pilar-parede simples - Deslocamentos (Arm. Uniforme)	101
Figura 45 – Pilar-parede simples - Esforços Internos (Arm. Uniforme)	102
Figura 46 – Pilar-parede simples - Deslocamentos ($\lambda = 90$)	103
Figura 47 – Pilar-parede simples - Esforços Internos ($\lambda = 90$)	104
Figura 48 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Deslocamentos	106
Figura 49 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Esforços Internos	107
Figura 50 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Deslocamentos	108
Figura 51 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Esforços Internos	109
Figura 52 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Deslocamentos (Arm. Uniforme) . .	110
Figura 53 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Esforços Internos (Arm. Uniforme) .	111
Figura 54 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Deslocamentos (Arm. Uniforme)	112
Figura 55 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Esforços Internos (Arm. Uniforme)	113
Figura 56 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Deslocamentos ($\lambda = 90$)	114
Figura 57 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Esforços Internos ($\lambda = 90$)	115
Figura 58 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Deslocamentos ($\lambda = 90$)	116
Figura 59 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Esforços Internos ($\lambda = 90$) . . .	117
Figura 60 – Pilar-parede U - cruvas carga-deslocamento (Arm. original)	118
Figura 61 – Interpolação dos campos de deslocamentos do elemento QLMD	131
Figura 62 – Graus de liberdade e geometria do elemento DKQ	137

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Comprimento equivalente de uma lâmina de um pilar-parede	31
Tabela 2	– Momentos fletores máximos no pilar-parede simples (kN.m/m)	42
Tabela 3	– Momentos fletores máximos no pilar-parede com seção U (kN.m/m) . .	47
Tabela 4	– Propriedades específicas do pilar-parede de Lefas	86
Tabela 5	– Propriedades específicas das cascas de Polak	89
Tabela 6	– Elementos da matriz das derivadas das funções de forma (QLMD) . . .	135

LISTA DE ABREVIATURAS

CANECA	CAsca Não-linear Em Concreto Armado (Programa desenvolvido)
CSMM	Cyclic Softened Membrane Model
DKQ	Discrete Kirchhoff Quadrilateral
DOF	Degree of Freedom
DSFM	Disturbed Stress Field Model
GL	Grau de liberdade
MCFT	Modified Compression Field Theory
MEF-NL	Método dos elementos finitos não-linear
NLF	Não-linearidade física
NLG	Não-linearidade geométrica
NUPEC	Nuclear Power Engineering Corporation
PTV	Princípio dos trabalhos virtuais
QLMD	Quadrilateral Layered Membrane Element with Drilling DOF
QTFLS	Quadrilateral Thin Flat Layered Shell Element

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Gregas

$[\Psi]_e$	Matriz das funções de forma do elemento e
$[\sigma]$	Matriz das tensões
α_b	Coeficiente necessário no cálculo dos efeitos locais de 2 ^a ordem
α_{ij}	Inclinação do bordo formado pelos nós i e j do elemento DKQ
α_x	Orientação da armadura em x (0°)
α_y	Orientação da armadura em y (90°)
β_d	Coeficiente de amolecimento
β_{nk}	Rotação nodal da normal na direção n no nó k
β_{sk}	Rotação nodal da normal na direção s no nó k
β_{xi}	Rotação nodal da normal na direção x no nó i
β_x	Rotação da normal na direção x
β_{yi}	Rotação nodal da normal na direção y no nó i
β_y	Rotação da normal na direção y
$\Delta\varepsilon_{1cr}$	Deformação incremental local na direção principal 1
δ_s	Deslocamento de escorregamento
γ_{cxy}	Deformação de cisalhamento do concreto
γ_s	Deformação média de escorregamento
γ_{xy}	Deformação de cisalhamento no plano $x - y$
λ_{abas}	Esbeltez das abas do pilar-parede com seção U
λ_j	Esbeltez normativa da lâmina j do pilar-parede
ϕ_x	Bitola da armadura em x
ϕ_y	Bitola da armadura em y
ρ_{sz}	Taxa de armadura na direção perpendicular ao plano do elemento (z)

ρ_x	Taxa de armadura em x
ρ_y	Taxa de armadura em y
σ_{c1}	Tensão média no concreto na direção principal 1
σ_{c2}	Tensão média no concreto na direção principal 2
σ_{cc}	Tensão principal média de compressão no concreto
σ_{ct}	Tensão principal média de tração no concreto
σ_{ct}^{max}	Tensão principal de tração máxima
σ_{cx}	Tensão axial em x na lamela de concreto
σ_{cy}	Tensão axial em y na lamela de concreto
σ_{sx}	Tensão axial em x na camada de aço
σ_{sy}	Tensão axial em y na camada de aço
σ_x	Tensão axial em x
σ_y	Tensão axial em y
τ_{cxy}	Tensão de cisalhamento no plano $x - y$ na lamela de concreto
τ_{sxy}	Tensão de cisalhamento no plano $x - y$ na camada de aço
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano $x - y$
θ	Ângulo da direção principal
θ_1	Ângulo entre os eixos cartesiano x e principal 1
θ_2	Ângulo entre os eixos cartesiano x e principal 2
θ_i^u	Rotação local no nó i associada ao campo u
θ_i^v	Rotação local no nó i associada ao campo v
θ_{xi}	Rotação em x do nó i do elemento
θ_x	Rotação fora do plano em x
θ_{yi}	Rotação em y do nó i do elemento
θ_y	Rotação fora do plano em y
θ_{zi}	Rotação em z do nó i do elemento

ε_0	Deformação de pico do concreto (aos 28 dias)
ε_{c01}	Deformação principal 1 no concreto devido ao coef. de Poisson
ε_{c02}	Deformação principal 2 no concreto devido ao coef. de Poisson
ε_{c1}	Primeira deformação principal no concreto
ε_{c2}	Segunda deformação principal no concreto
ε_{cc}	Deformação principal média de compressão no concreto
ε_{cr}	Deformação de fissuração do concreto
ε_{ct}	Deformação principal média de tração no concreto
ε_{cx}	Deformação do concreto em x
ε_{cy}	Deformação do concreto em y
ε_{cz}	Deformação do concreto em z
ε_{p1}	Deformação de compressão de pico do concreto na direção principal 1
ε_{p2}	Deformação de compressão de pico do concreto na direção principal 2
ε_p	Deformação de compressão de pico do concreto
ε_{scrx}	Deformações no aço x na região das fissuras
ε_{scry}	Deformações no aço y na região das fissuras
ε_{su}	Deformação última do aço
ε_{sy}	Deformação de escoamento da armadura
ε_s	Deformação média na armadura
ε_x	Deformação axial em x
ε_y	Deformação axial em y
φ_i	Função de forma Serendipity do nó i
$\xi-\nu$	Sistema de coordenadas natural
$\{\Delta d\}$	Vetor do incremento de deslocamento na estrutura
$\{\delta d_e\}$	Vetor dos deslocamentos virtuais nodais do elemento
$\{\delta U\}$	Vetor do campo de deslocamentos virtuais

$\{\delta\varepsilon\}$	Vetor das deformações virtuais
$\{\Psi_x\}$	Vetor com as funções de forma x do elemento DKQ
$\{\Psi_y\}$	Vetor com as funções de forma y do elemento DKQ
$\{\sigma\}$	Vetor das tensões
$\{\sigma'_{sj}\}$	Vetor das tensões no aço j (na direção do aço)
$\{\theta_b\}$	Vetor com as derivadas de w
$\{\varepsilon\}$	Vetor das deformações
$\{\varepsilon^L\}$	Componente não-linear do vetor das deformações
$\{\varepsilon^s\}$	Vetor das deformações de escorregamento
$\{\varepsilon_b^0\}$	Vetor das deformações lineares de placa
$\{\varepsilon_b^L\}$	Vetor das deformações não-lineares de placa
$\{\varepsilon_{c0}\}$	Vetor com as deformações de Poisson no concreto no sistema cartesiano
$\{\varepsilon_{c0}^{12}\}$	Vetor com as deformações principais de Poisson no concreto
$\{\varepsilon_c\}$	Vetor das deformações líquidas no concreto
$\{\varepsilon_m^0\}$	Vetor das deformações lineares de membrana

Letras Romanas

$[\ell]$	Matriz de rotação entre os sistemas global e local para 3 GL's
$[A_b]$	Matriz com as derivadas de w
$[B']_e$	Matriz cinemática do elemento e
$[B]_e$	Matriz cinemática incremental do elemento e
$[B_b^L]$	Matriz cinemática não-linear de placa
$[B_{DKQ}]$	Matriz cinemática do elemento DKQ
$[B_{QLMD}]$	Matriz cinemática do elemento QLMD
$[C]$	Matriz de adequação dos graus de liberdade
$[D]$	Matriz constitutiva tangente/secante
$[D_c]$	Matriz constitutiva tangente da lamela de concreto

$[D_c^{1-2}]$	Matriz constitutiva secante do concreto no sistema principal
$[D_s]$	Matriz constitutiva tangente da camada de aço
$[D'_s]$	Matriz constitutiva secante do aço (na direção do aço)
$[E]$	Matriz de rotação entre os sistemas global e local
$[G_b]$	Matriz de interpolação das derivadas de w
$[J]$	Matriz Jacobiana
$[k_{c.bb}^L]$	Contribuição da lamela de concreto para a matriz $[k_e^L]$
$[k_{c.bm}^L]$	Contribuição da lamela de concreto para a matriz $[k_e^L]$
$[k_{c.mb}^L]$	Contribuição da lamela de concreto para a matriz $[k_e^L]$
$[k_{c.mm}^L]$	Contribuição da lamela de concreto para a matriz $[k_e^L]$
$[k_e^\sigma]$	Matriz de rigidez do elemento referente as tensões atuantes
$[k_e^L]$	Matriz de rigidez do elemento para grandes deslocamentos
$[K_G]$	Matriz de rigidez global
$[K_G^\sigma]$	Matriz de rigidez global referente as tensões atuantes
$[K_G^L]$	Matriz de rigidez global para grandes deslocamentos
$[k_{s.bb}^L]$	Contribuição da camada de aço para a matriz $[k_e^L]$
$[k_{s.bm}^L]$	Contribuição da camada de aço para a matriz $[k_e^L]$
$[k_{s.mb}^L]$	Contribuição da camada de aço para a matriz $[k_e^L]$
$[k_{s.mm}^L]$	Contribuição da camada de aço para a matriz $[k_e^L]$
$[L]$	Matriz de rotação básica entre os sistemas global e local
$[MN]$	Matriz das funções de forma de membrana
$[S]_e$	Matriz de incidência e rotação do elemento e
$[T]$	Matriz de transformação de coordenadas
$[T_r]$	Matriz de compatibilidade de rotações
$[Z]_e$	Matriz de incidência do elemento e
$\{b\}$	Forças atuando no corpo da estrutura

$\{d\}$	Vetor dos deslocamentos nodais em toda a estrutura
$\{d_{em}^{uv}\}$	Vetor auxiliar dos deslocamentos de membrana
$\{d_{eb}\}$	Vetor dos deslocamentos nodais de placa do elemento
$\{d_{em}\}$	Vetor dos deslocamentos nodais de membrana do elemento
$\{d_e\}$	Vetor dos deslocamentos nodais do elemento
$\{d_e^S\}$	Vetor sequenciado dos deslocamentos nodais do elemento
$\{e_j\}$	Versor do eixo j do sistema local do elemento
$\{F_{ext}\}$	Vetor das forças externas
$\{F_{int}\}$	Vetor das forças internas
$\{M\}$	Vetor dos esforços internos do elemento de casca
$\{P_i\}$	Vetor com as coordenadas globais do nó i do elemento
$\{R\}$	Vetor do desequilíbrio das forças
$\{t\}$	Forças atuando na superfície da estrutura
$\{U\}$	Vetor do campo de deslocamentos
$\{V_i\}$	Vetor do eixo i do sistema local do elemento
A_e	Área do elemento finito
a_g	Tamanho médio do agregado
a_i	Largura da faixa vertical i de um pilar-parede
a_k	Parâmetro geométrico auxiliar do elemento DKQ
b	Maior dimensão da seção transversal do pilar-parede
b_k	Parâmetro geométrico auxiliar do elemento DKQ
C_d	Primeiro fator do cálculo do coeficiente de amolecimento β_d
c_k	Parâmetro geométrico auxiliar do elemento DKQ
C_s	Segundo fator do cálculo do coeficiente de amolecimento β_d
c_t	Coeficiente da influência da armação no enrijecimento à tração
d_k	Parâmetro geométrico auxiliar do elemento DKQ

$det([J]_k)$	Determinante da matriz Jacobiana no ponto de Gauss k
E	Módulo de elasticidade do material, subseção 5.4
E_{c1}^{sec}	Módulo secante do concreto na direção principal 1
E_{c2}^{sec}	Módulo secante do concreto na direção principal 2
E_{cn}	Módulo de elasticidade do concreto na direção z
E_c	Módulo de elasticidade do concreto
e_j^X, e_j^Y, e_j^Z	Componentes do versor do eixo j do sistema local do elemento
e_k	Parâmetro geométrico auxiliar do elemento DKQ
E_{sh}	Módulo de endurecimento do aço
E_{sz}	Módulo de elasticidade do aço na direção z
E_s	Módulo de elasticidade do aço
E_s^{sec}	Módulo secante do aço
$erro_{n+1}$	Parâmetro auxiliar do critério de convergência na iteração $n + 1$
f_{cc}	Resistência à compressão do concreto para um corpo de prova cúbico
f_{cr}	Tensão de fissuração do concreto
f_c	Resistência de compressão do concreto (aos 28 dias)
f_{p1}	Resistência de compressão de pico do concreto na direção principal 1
f_{p2}	Resistência de compressão de pico do concreto na direção principal 2
f_p	Resistência de compressão de pico do concreto
f_{scrx}	Tensão na armadura na região da fissura em x
f_{scry}	Tensão na armadura na região da fissura em y
f_{sx}	Tensão média na armação em x
f_{sy}	Tensão média na armação em y
f_{sz}	Tensão no aço na direção perpendicular ao plano do elemento (z)
f_s	Tensão média na armadura
f_u	Tensão última do aço

f_{yx}	Tensão de escoamento na armação em x
f_{yy}	Tensão de escoamento na armação em y
f_y	Tensão de escoamento na armadura
h	Menor dimensão da seção transversal do pilar-parede
h_j	Espessura da lâmina j do pilar-parede
K_{c1}	Fator de majoração 1 (efeito do confinamento no concreto)
K_{c2}	Fator de majoração 2 (efeito do confinamento no concreto)
K_{cz}	Fator de majoração devido à armação na direção z
L	Vão da placa, subseção 5.4
l	Comprimento vertical livre do pilar-parede
l_{ej}	Comprimento equivalente da lâmina j do pilar-parede
L_{ij}	Comprimento do bordo i - j do elemento DKQ
$M_{1d,min}$	Momento mínimo de primeira ordem
M_{1xd}	Momento solicitante no pilar-parede (excentricidade no eixo x)
m_{1zd}	Momento solicitante no pilar-parede (excentricidade no eixo z)
$M_i(x)$	Função de forma linear i
M_{xy}	Momento torsor
M_x	Momento fletor transversal (tração no sentido horizontal, x)
M_y	Momento fletor longitudinal (tração no sentido vertical, y)
M_{zdi}	Momento solicitante na faixa vertical i (excentricidade no eixo z)
n_c	Número de lamelas de concreto
N_{di}	Esforço normal solicitante na faixa vertical i
N_d	Esforço normal solicitante no pilar-parede
$n_d(x)$	Tensão axial resultante na lâmina do pilar-parede
n_e	Número de elementos finitos
$N_i(x)$	Função de forma cúbica de Hermite i

n_k	Número de pontos de Gauss
n_s	Número de camadas de aço
N_{xy}	Esforço cortante no plano $x - y$
N_x	Esforço normal no eixo x (sentido horizontal)
N_y	Esforço normal no eixo y (sentido vertical)
NGL	Número de grau de liberdade em toda a estrutura
NGL_e	Número de grau de liberdade no elemento
q	Carregamento uniforme aplicado na placa, subseção 5.4
qL^4/Et^4	Parâmetro de carga usado na subseção 5.4
r	Fator relação entre as deformações principais no concreto
$R1$	Elementos rígidos no pilar-parede simples (Figura 8)
$R2$	Elementos rígidos no pilar-parede com seção U (Figura 8)
$s-n$	Sistema de coordenadas auxiliar do bordo do elemento
S	Superfície do domínio
s_{cr}	Espaçamento médio entre fissuras
S_e	Superfície do elemento
s_x	Espaçamento nominal entre fissuras em x (50 mm)
s_y	Espaçamento nominal entre fissuras em y (50 mm)
t	Espessura do elemento finito
t_{sj}	Espessura da camada de aço j
tol	Tolerância admitida no critério de convergência
u	Translação em x
u_i	Deslocamento em x do nó i do elemento
V	Volume do domínio
v	Translação em y
v_0	Coefficiente de Poisson inicial

v_{12}	Coeficiente de Poisson na direção 1 devido a ações em 2
v_{21}	Coeficiente de Poisson na direção 2 devido a ações em 1
v_c	Tensão de cisalhamento local na superfície da fissura
v_c^{max}	Tensão de cisalhamento máxima na superfície da fissura
V_e	Volume do elemento
v_i	Deslocamento em y do nó i do elemento
$v_{m\acute{a}x}$	Coeficiente de Poisson máximo
w	Translação em z
w_{cr}	Abertura de fissura média
W_{ext}	Trabalho virtual externo
W_{int}	Trabalho virtual interno
w_i	Deslocamento em z do nó i do elemento
W_k	Peso de integração numérica de Gauss do ponto k
$X-Y-Z$	Sistema de coordenadas global
$x-y-z$	Sistema de coordenadas local
x_i, y_i	Coordenadas locais do nó i
z_{c1i}	Parâmetro auxiliar das contribuições da lamela de concreto i
z_{c2i}	Parâmetro auxiliar das contribuições da lamela de concreto i
z_{c3i}	Parâmetro auxiliar das contribuições da lamela de concreto i
z_{ci}^{bot}	Posição da base da lamela de concreto i
z_{ci}^{top}	Posição do topo da lamela de concreto i
z_{sj}	Posição do eixo da camada de aço j

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
1.1	OBJETIVOS	25
1.2	METODOLOGIA	25
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	25
2	PILARES-PAREDE DE CONCRETO ARMADO	27
2.1	PILARES-PAREDE	27
2.2	INFLUÊNCIA DE AÇÕES SÍSMICAS NOS PILARES-PAREDE . . .	29
2.3	EFEITOS LOCALIZADOS DE 2ª ORDEM	29
2.4	DESCONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS LOCALIZADOS	30
2.5	MÉTODO NORMATIVO DE ANÁLISE DOS EFEITOS LOCALIZADOS	32
2.6	MÉTODO DA MALHA DE BARRAS	33
3	ESTUDO COMPARATIVO INICIAL	35
3.1	PILARES-PAREDE ANALISADOS	35
3.2	SOFTWARE COMPUTACIONAL UTILIZADO	36
3.3	CRITÉRIOS ADOTADOS NA MODELAGEM	38
3.4	RESULTADOS PRELIMINARES	41
3.4.1	Resultados da análise do pilar-parede simples	41
3.4.2	Resultados da análise do pilar-parede com seção U	44
3.4.3	Pilares-parede com lâminas esbeltas	48
3.5	CONCLUSÕES PRELIMINARES	50
4	PROGRAMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO	52
4.1	FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS . . .	54
4.1.1	Equação não-linear de equilíbrio	54
4.1.2	Elemento finito de cascas planas	56
4.1.3	Não-linearidade geométrica	57

4.1.4	Matriz de rigidez	59
4.1.5	Vetor das forças internas	63
4.1.6	Procedimento de solução do problema não-linear	64
4.2	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	67
4.2.1	Concreto em compressão	67
4.2.2	Amolecimento do concreto em compressão	68
4.2.3	Concreto em tração	69
4.2.4	Aço em tração ou compressão	72
4.2.5	Efeito do confinamento no concreto	73
4.2.6	Coefficiente de Poisson e deformações transversais	75
4.2.7	Deformação de escorregamento	76
4.2.8	Matrizes constitutivas secantes	79
5	VALIDAÇÃO DO PROGRAMA E ANÁLISES ADICIONAIS	83
5.1	VIGA-PAREDE DE CERVENKA	83
5.2	PILAR-PAREDE DE LEFAS	86
5.3	CASCAS DE POLAK	88
5.4	ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE PLACAS	91
5.5	PILAR-PAREDE COM SEÇÃO H DA NUPEC	92
5.6	PILAR-PAREDE SIMPLES DE FRANÇA E KIMURA	96
5.7	PILAR-PAREDE COM SEÇÃO U DE FRANÇA E KIMURA	105
6	CONCLUSÕES	120
6.1	CONCLUSÕES	120
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	122
	REFERÊNCIAS	123
	ANEXO A – ROTAÇÃO SISTEMAS LOCAL-GLOBAL . . .	128
	ANEXO B – MATRIZ JACOBIANA	130
	ANEXO C – ELEMENTO QLMD	131

ANEXO D – ELEMENTO DKQ	136
----------------------------------	-----

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, tem se tornado evidente a construção de edificações, em concreto armado, com um número cada vez maior de pavimentos, e, conseqüentemente, alturas elevadas. Apesar desse fenômeno está associado com uma ocupação mais eficiente da área construída, e poder, naturalmente, gerar benefícios econômicos ao empreendimento, com ele surgem diversos desafios do ponto de vista técnico.

Dia após dia, esses obstáculos vêm sendo superados devido a avanços científicos em diversas áreas da engenharia, como na tecnologia dos materiais, onde os concretos produzidos são cada vez mais eficientes, e, nos métodos de análise estrutural, os quais permitem avaliações mais precisas e seguras do comportamento da construção.

Um dos pontos cruciais no projeto de um edifício de concreto armado, que vem sendo influenciado por esse processo de “verticalização” das construções, é a verificação da estabilidade global da estrutura. Esse parâmetro, por sua vez, está relacionado com as solicitações laterais atuantes na edificação, como a carga do vento e ações sísmicas.

Segundo Wight e MacGregor (2012), de forma geral, em edificações entre 8 e 10 pavimentos, a estabilidade global pode ser garantida utilizando-se um sistema de contraventamento com pórtico rígido. Por outro lado, quando a edificação supera esse limite, e, principalmente em zonas sujeitas a sismo, o sistema de pórtico rígido pode não ser o suficiente, podendo ser indicada a execução de um núcleo rígido de contraventamento, composto por pilares-parede.

De acordo com a ABNT NBR 6118 (2014), no projeto estrutural de pilares-parede, além da consideração dos efeitos globais e locais de 2ª ordem, prática usual no cálculo de pilares convencionais, conforme o caso, pode também ser necessário levar em conta na análise os chamados efeitos localizados de 2ª ordem. No item 15.9.3 da norma, é apresentado um método aproximado para a avaliação desses esforços. Apesar, desse procedimento de cálculo está vigente desde a ABNT NBR 6118 (2003), o mesmo não apresenta boa aceitação na comunidade técnica, entre outros motivos, por não fornecer, uma recomendação adequada para a armadura transversal do elemento. Esses e outros aspectos motivam o estudo do tema e o desenvolvimento de novos modelos de cálculo para esses elementos.

Segundo França e Kimura (2006), em relação às prescrições normativas internacionais, apesar da norma americana ACI 318 (2005) diferenciar pilares-parede de pilares comuns, ela desconsidera os efeitos localizados de 2ª ordem, para o dimensionamento das armaduras longitudinais dos pilares-parede, visto a considerável robustez que esses elementos apresentam nos projetos fora do país. Essa é uma característica decorrente das

ações sísmicas as quais essas construções estão sujeitas, diferentemente dos pilares-parede nacionais, como será discutido posteriormente.

1.1 OBJETIVOS

Os objetivos do presente trabalho podem ser classificados como global e específicos. Como objetivo global, é possível citar:

- Contribuir para o melhor entendimento do comportamento de pilares-parede de concreto armado, sendo discutidos aspectos da modelagem e análise dessas estruturas, dentro da realidade da engenharia nacional.

Em relação aos objetivos específicos, pode-se nomear:

- Realizar um estudo comparativo inicial entre as metodologias de análise usuais e o método dos elementos finitos não-linear (MEF-NL);
- Elaborar um programa computacional para análise não-linear física e geométrica de cascas planas de concreto armado, empregando modelos constitutivos apropriados para os materiais;
- Validar esse programa através de resultados experimentais, presentes na literatura;

1.2 METODOLOGIA

Apesar de seu indiscutível valor científico, ensaios experimentais envolvem custos consideráveis com materiais e equipamentos, além da necessidade do conhecimento técnico apropriado, para a obtenção de respostas adequadas, e, com isso, podem se tornar opções inviáveis, em certos momentos. Sendo assim, principalmente, após o advento da computação moderna, os métodos numéricos tem ganhado cada vez mais importância na análise de problemas de engenharia. Dessa forma, o presente trabalho é baseado na análise não-lineares de pilares-parede de concreto armado, através do método dos elementos finitos, utilizando softwares conhecidos no meio profissional, além de um programa computacional próprio detalhado no estudo.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Com o intuito de facilitar a compreensão das informações discutidas, o presente trabalho foi estruturado da seguinte forma:

- No capítulo 1 é feita uma apresentação geral do problema em estudo, assim como a motivação, a metodologia e os objetivos da pesquisa;

- O capítulo 2 descreve os principais fundamentos e práticas de projeto, na engenharia nacional, relacionados a análise e dimensionamento de pilares-parede de concreto armado. São discutidos a influência dos efeitos localizados de 2ª ordem no comportamento da estrutura (conforme a literatura técnica pertinente), e, quais métodos de cálculo estão disponíveis atualmente para a avaliação desses efeitos;
- O capítulo 3 retrata um estudo comparativo entre o método normativo aproximado, o método da malha de barras (ambos discutidos no capítulo 2), e, análises não-lineares com elementos finitos de casca, utilizando o software VecTor 4. São apresentados os resultados e conclusões preliminares obtidos;
- O capítulo 4 é dedicado à explanação do programa computacional desenvolvido, para a análise não-linear física e geométrica de cascas planas de concreto armado. São apresentados: a formulação de elementos finitos adotada e os modelos constitutivos empregados para o concreto e o aço;
- O capítulo 5 apresenta a validação do programa desenvolvido através de comparações com resultados experimentais presentes na literatura, além da reanálise dos pilares-parede apresentados no capítulo 3, até a carga última, utilizando o programa desenvolvido e o VecTor 4.
- Por fim, no capítulo 6, a tese é concluída com as considerações finais sobre os resultados apresentados, sendo também feitas indicações para futuros trabalhos científicos na área.

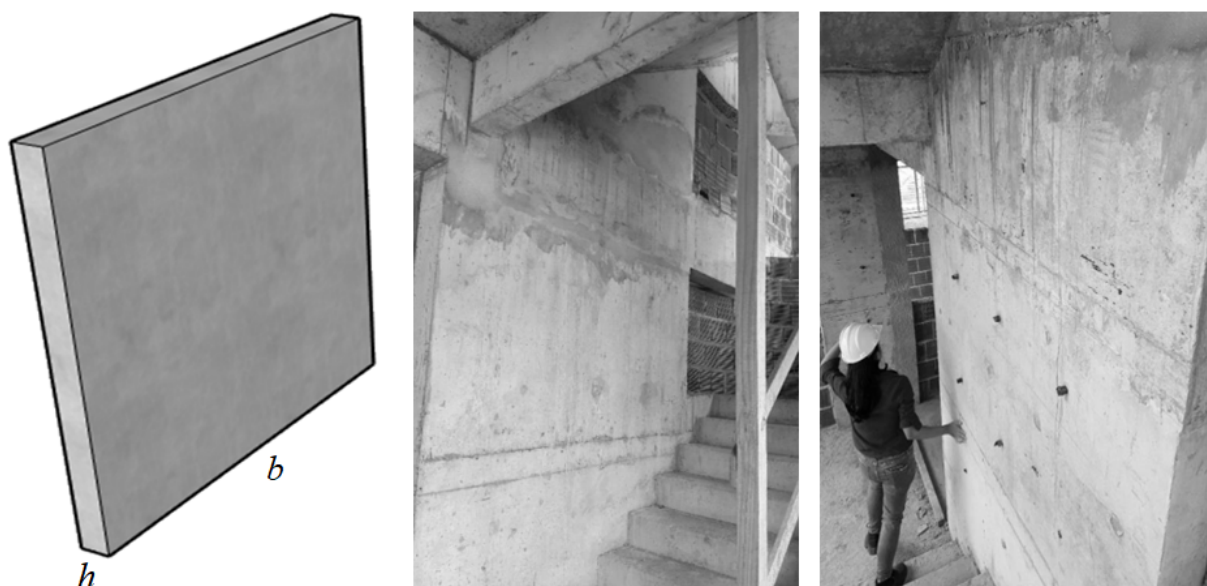
2 PILARES-PAREDE DE CONCRETO ARMADO

O presente capítulo é dedicado à apresentação dos principais fundamentos, e, práticas de projeto correntes, na engenharia nacional, relacionados a análise e dimensionamento de pilares-parede de concreto armado. São discutidos a influência dos efeitos localizados de 2ª ordem no comportamento da estrutura (conforme a literatura técnica pertinente), e, quais métodos de cálculo estão disponíveis atualmente para a avaliação desses efeitos.

2.1 PILARES-PAREDE

De acordo com a ABNT NBR 6118 (2014), um pilar-parede pode ser definido como um elemento de superfície vertical sujeito preponderantemente à compressão, tendo na sua seção transversal uma relação, entre a maior e a menor dimensão, respectivamente, b e h , superior a 5. A Figura 1, além de ilustrar a geometria desse elemento, exemplifica a sua utilização em um edifício de concreto armado.

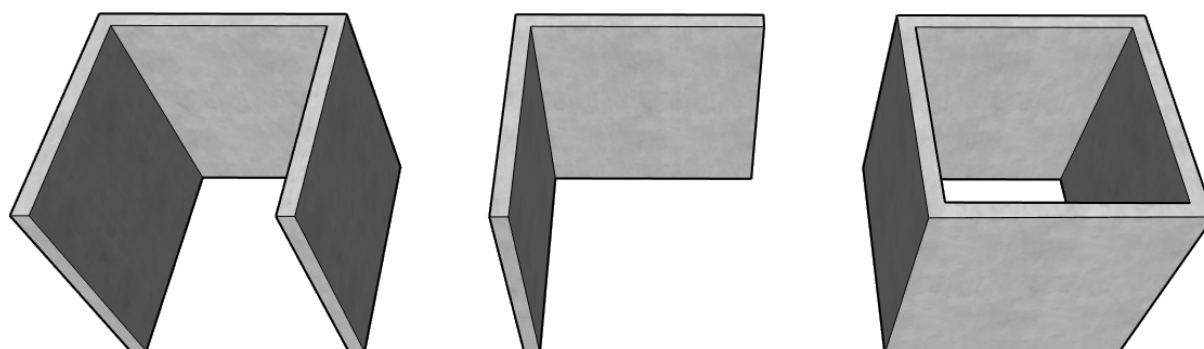
Figura 1 – Geometria de um pilar-parede simples e aplicação em um edifício



Fonte: Adaptado de Almeida (2018)

Conforme a situação em estudo, com objetivo de aumentar a capacidade resistente da estrutura, pode-se propor uma associação entre lâminas de pilares-parede simples, formando assim uma seção composta. A Figura 2 apresenta três casos de pilares-parede compostos, sendo duas seções abertas, respectivamente, em formato de U e L, e, uma seção fechada, geralmente aplicada em pilares de pontes.

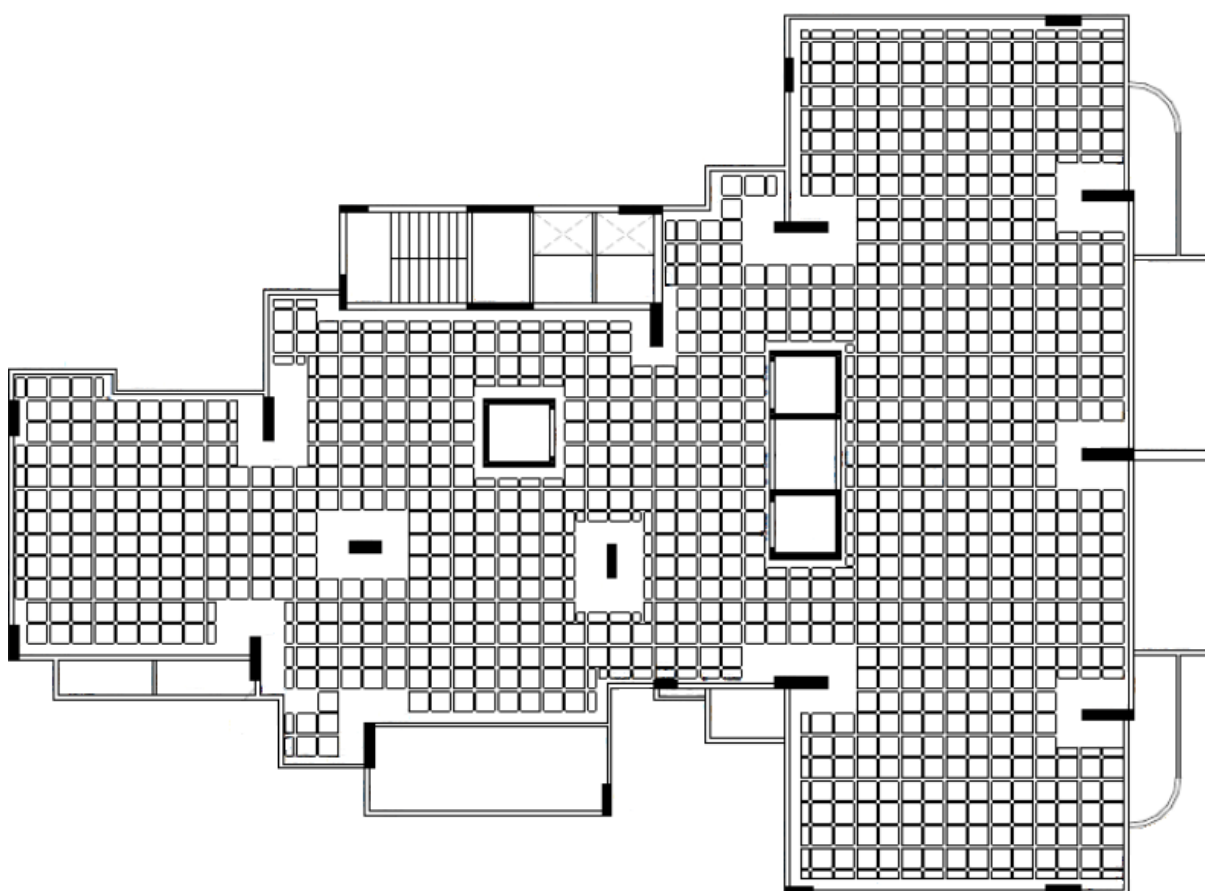
Figura 2 – Pilares-parede compostos: seções U, L e fechada



Fonte: Silva e Horowitz (2020)

Devido à dificuldade dos pilares-parede serem acomodados na planta da edificação sem comprometer o projeto arquitetônico, normalmente, eles podem ser encontrados envolvendo o poço dos elevadores ou as escadas (WIGHT; MACGREGOR, 2012). A Figura 3 ilustra a disposição desses elementos em uma planta de forma, do pavimento-tipo de um edifício, com núcleo rígido.

Figura 3 – Disposição dos pilares-parede em uma planta de um edifício



Fonte: Adaptado de Campos (2016)

2.2 INFLUÊNCIA DE AÇÕES SÍSMICAS NOS PILARES-PAREDE

Atualmente, a análise e projeto de pilares-parede em concreto armado vem se tornado um objeto de pesquisa científica cada vez mais recorrente ao redor do mundo, principalmente após os recentes terremotos que ocorreram no Chile (2010) e na Nova Zelândia (2011), os quais causaram vários danos estruturais nesses elementos (WALLACE, 2012).

Contudo, de acordo com prescrições normativas (ABNT NBR 15421, 2006), a maioria do território nacional, principalmente as regiões mais densamente povoadas, com um número maior de edificações potencialmente sujeitas a solicitações horizontais consideráveis, encontra-se em uma área onde risco sísmico é baixo (CAMPOS, 2016) (CAMPOS; RIBEIRO; OLIVEIRA, 2020). Dessa forma, ao contrário de outras regiões do mundo, o principal carregamento horizontal atuante nas construções nacionais é proveniente do vento, e não de abalos sísmicos.

Com isso, devido ao baixo risco de atividade sísmica na maioria do território nacional, em contraste com outras partes do mundo, existe a tendência dos pilares-parede nacionais serem dimensionados com espessuras menores que os estrangeiros, e, dessa forma, esses elementos ficam mais suscetíveis a instabilidades. Esse cenário se agrava ainda mais com a evolução da tecnologia do concreto, a qual, devido ao aprimoramento do material, permite a utilização de peças cada vez mais esbeltas. Portanto, fica evidente a necessidade do desenvolvimento de pesquisas que estejam mais bem alinhadas à realidade da engenharia brasileira.

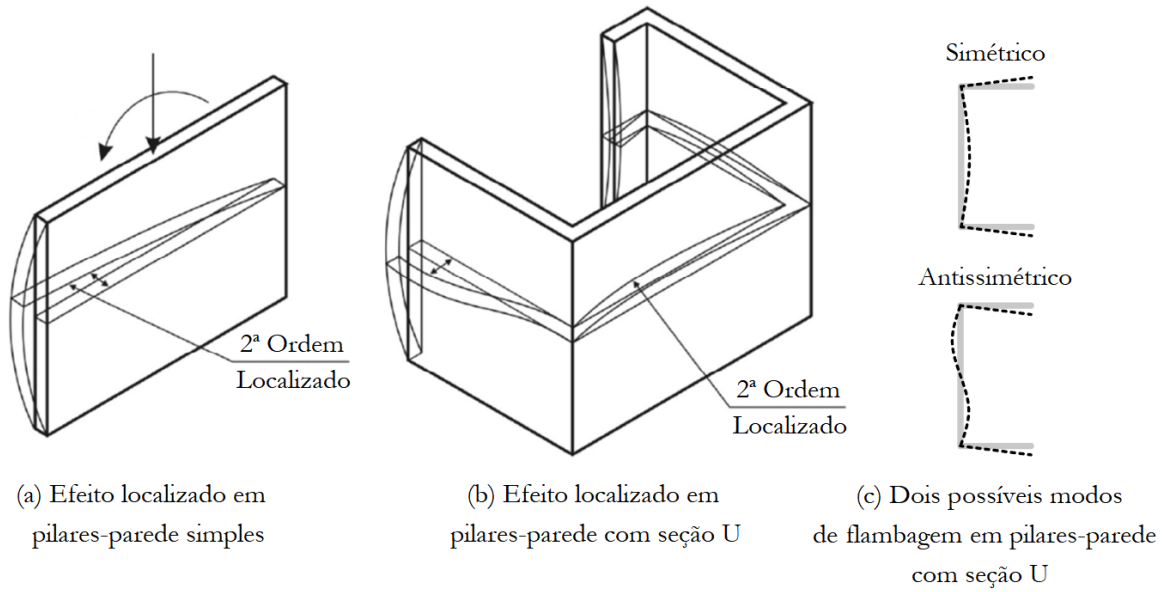
2.3 EFEITOS LOCALIZADOS DE 2ª ORDEM

No projeto estrutural de pilares-parede, além da consideração dos efeitos globais e locais de 2ª ordem, usuais na análise de pilares comuns, deve-se também avaliar os chamados efeitos localizados de 2ª ordem, Figura 4. Esse fenômeno consiste em uma instabilidade lateral, em determinadas regiões das lâminas dos pilares-parede, de forma que os deslocamentos resultantes ocasionam esforços de 2ª ordem adicionais na estrutura. Como se pode ver nas Figuras 4(a) e 4(b), ao contrário das análises globais e locais de 2ª ordem, que têm abrangência, respectivamente, em todo edifício e em um lance de pilar, o escopo da análise localizada gira entorno de cada lâmina da estrutura.

O efeito localizado de 2ª ordem, além de gerar um acréscimo de flexão na lâmina no sentido vertical, causa também uma curvatura na direção horizontal, havendo, portanto, a necessidade de um reforço na armação, nesse sentido, em determinadas regiões (armadura transversal).

Além disso, para a correta avaliação dos efeitos localizados de 2ª ordem em pilares-parede, é fundamental que sejam considerados no estudo os modos de flambagem apropri-

Figura 4 – Efeitos localizados de 2ª ordem e modos de flambagem em pilares-parede



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118 (2014)

ados da estrutura. Esse ponto tem particular importância na análise de estabilidade de seções abertas com espessura delgada, como é o caso de pilares-parede com seção U. A Figura 4(c) ilustra dois possíveis modos de flambagem desse tipo de problema.

2.4 DESCONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS LOCALIZADOS

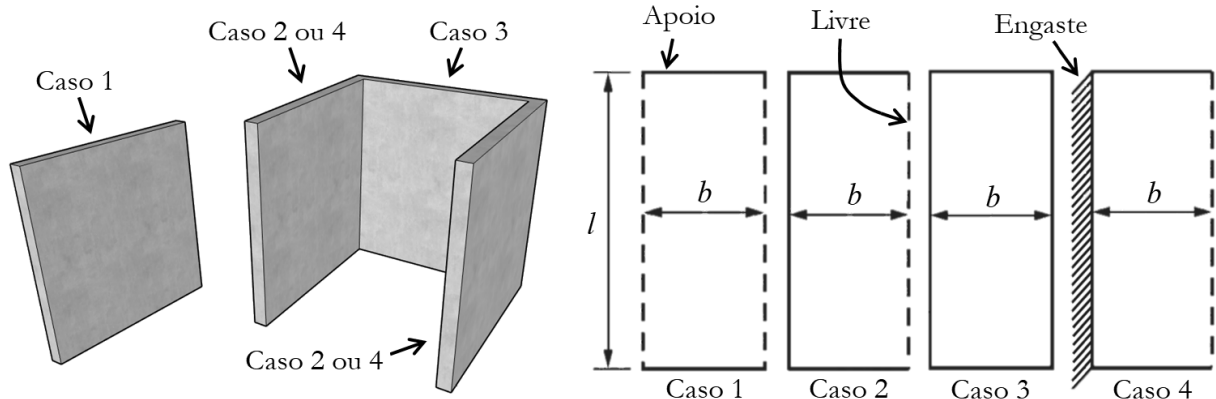
Segundo a ABNT NBR 6118 (2014), os efeitos localizados de 2ª ordem de pilares-parede podem ser desprezados se, para cada uma das lâminas componentes do pilar-parede, forem obedecidas as seguintes condições:

- A base e o topo de cada lâmina devem ser convenientemente fixados às lajes do edifício, que conferem ao todo o efeito de diafragma horizontal;
- A esbeltez normativa de cada lâmina λ_j deve satisfazer a equação Eq. (2.1),

$$\lambda_j = 3.46 \frac{l_{ej}}{h_j} < 35 \quad (2.1)$$

onde, h_j é a espessura da lâmina j , e, l_{ej} , o respectivo comprimento equivalente, o qual depende das condições de contorno associadas. A Figura 5 ilustra alguns casos possíveis para essas vinculações, onde l e b são, respectivamente, o comprimento vertical livre, e, a maior dimensão da seção transversal da lâmina. De acordo com a Figura 5 e a Tabela 1, pode-se determinar qual o comprimento equivalente l_{ej} em cada lâmina de um pilar-parede. Além disso, a norma permite que, se o topo e a base da estrutura forem engastados, e, l for menor que b , os valores de λ_j sejam reduzidos em 15%.

Figura 5 – Possíveis vinculações das lâminas de um pilar-parede



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118 (2014) e de França e Kimura (2006)

Tabela 1 – Comprimento equivalente de uma lâmina de um pilar-parede

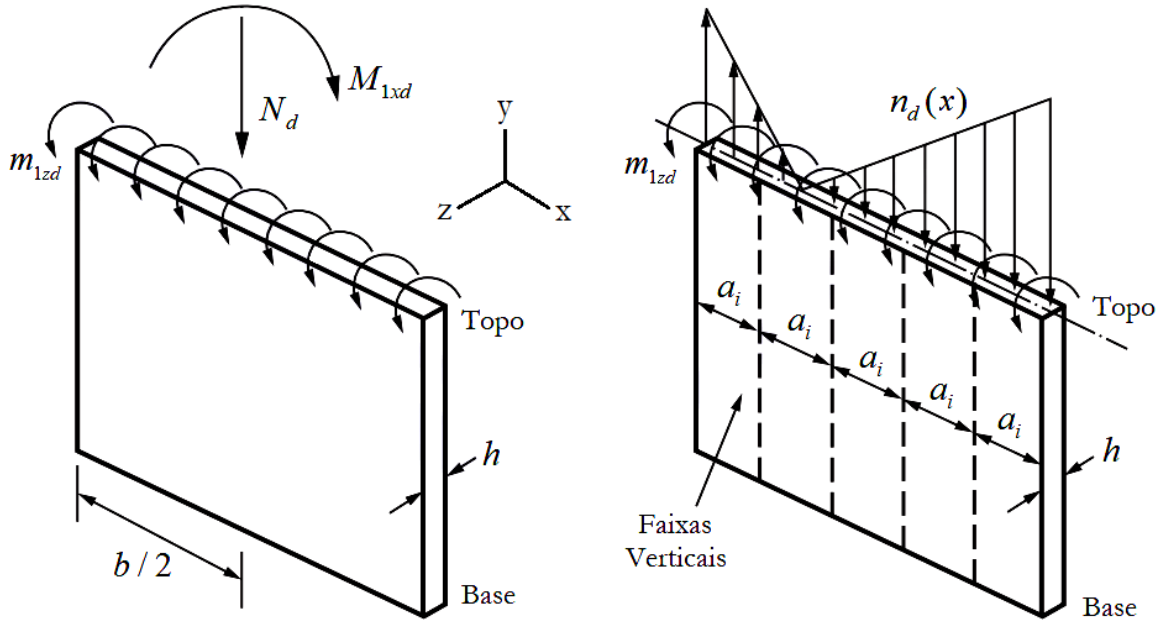
Caso de vinculação da lâmina	Comprimento equivalente da lâmina l_{ej}
Caso 1	$l_{ej} = l$
Caso 2	$l_{ej} = \frac{l}{1 + \left(\frac{l}{3b}\right)^2} \geq 0.3l$
Caso 3	$l_{ej} = \begin{cases} \frac{l}{1 + \left(\frac{l}{b}\right)^2}, & \text{se } l \leq b \\ b/2, & \text{se } l > b \end{cases}$
Caso 4	$l_{ej} = 2b \leq l$

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118 (2014)

2.5 MÉTODO NORMATIVO DE ANÁLISE DOS EFEITOS LOCALIZADOS

De acordo com a ABNT NBR 6118 (2014), pilares-parede com índice de esbeltez λ_j menor que 90, em todas as lâminas, podem ser analisados de acordo com um procedimento aproximado, Figura 6. Essa metodologia se baseia em decompor as lâminas em i faixas verticais de largura a_i , e analisá-las como pilares independentes sujeitos a esforços solicitantes equivalentes M_{zdi} e N_{di} .

Figura 6 – Método normativo para decomposição de uma lâmina em faixas verticais



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118 (2014) e França e Kimura (2006)

Nessa transformação, é admitido que a largura de cada faixa deve ser o triplo da espessura da lâmina, contanto que não ultrapasse o valor máximo de um metro, Eq. (2.2).

$$a_i = 3h < 100cm \quad (2.2)$$

A carga N_{di} é calculada a partir da tensão axial resultante ao longo da maior dimensão da lâmina $n_d(x)$, Figura 6, enquanto que o momento M_{zdi} pode ser obtido de acordo com a largura da faixa a_i , e, o momento distribuído m_{1zd} , Eq. (2.3).

$$M_{zdi} = m_{1zd}a_i \quad (2.3)$$

Além disso, deve-se garantir que o momento fletor equivalente aplicado em cada faixa deve ser maior que momento mínimo de primeira ordem, $M_{zdi} \geq M_{1d,min}$, quando esse último for adotado para consideração das imperfeições geométricas. Por outro lado, quando $M_{zdi} < M_{1d,min}$, é prescrito na norma que não é necessário adotar valores superiores a 0.6 para o coeficiente α_b , utilizado na análise local do pilar isolado equivalente.

Com base nesse procedimento aproximado, os efeitos localizados de 2ª ordem do pilar-parede são avaliados através da análise dos efeitos locais de 2ª ordem dos pilares isolados equivalentes, submetidos aos esforços apropriados.

O método normativo aproximado é baseado em um dos principais fundamentos da análise estrutural: tentar entender o comportamento de uma construção complexa com base na associação de elementos mais simples. Esse princípio é bastante conhecido e utilizado na comunidade técnica, e, serviu de base para o surgimento de vários procedimentos de análise.

Apesar disso, essa metodologia sofreu duras críticas no meio profissional e acadêmico, por exemplo, de acordo com Araújo (2006) apud Campos (2016), esse procedimento não apresenta justificativa experimental ou teorica consistente, e, conduz o projeto a grandes acréscimos de armadura longitudinal.

Outros dois pontos sujeitos a reflexões são:

- O fato da norma não fazer menção a situações onde as lâminas dos pilares-parede têm índices de esbeltez elevados, $\lambda_j > 90$, e;
- O segundo parágrafo do item 18.5, que recomenda que, caso a flexão horizontal da placa não seja calculada (como faz o modelo normativo), deve-se utilizar como armadura transversal mínima 25% da armadura longitudinal da lâmina considerada. Segundo França e Kimura (2006), em alguns casos, essa quantidade de armação pode ser uma demasia, enquanto que em outros é possível que seja insuficiente.

Dessa forma, fica evidente que o procedimento da ABNT NBR 6118 (2014), para análise dos efeitos localizados, em pilares-parede, é um ponto da norma que demanda futuras contribuições, para que seja possível o desenvolvimento de uma metodologia suficientemente precisa, e, de simples aplicação, ideal para o dia a dia em escritórios de projeto.

2.6 MÉTODO DA MALHA DE BARRAS

Com o objetivo de apresentar um procedimento alternativo para o cálculo dos efeitos localizados de 2ª ordem, França e Kimura (2006) propuseram um modelo, no qual o pilar-parede continua sendo discretizado em faixas verticais, porém, dessa vez, interligadas através de elementos horizontais, criando assim, uma malha de barras (geometricamente semelhante a uma grelha).

Nesse modelo, a representação da não-linearidade física é feita de acordo com as rigidezes secantes de cada faixa, obtidas por meio de diagramas N-M-1/r (esforços normal, momento fletor, curvatura), enquanto que, a não-linearidade geométrica é avaliada através de um procedimento iterativo, concluído com a convergência dos deslocamentos.

Uma das grandes vantagens do método das malhas em relação ao modelo aproximado normativo é que o primeiro, por apresentar barras no sentido horizontal, consegue capturar momentos fletores nesse sentido, os quais podem ser utilizados em um cálculo mais preciso da armadura horizontal, no lugar de simplesmente utilizar 25% da armadura vertical, como indica a norma.

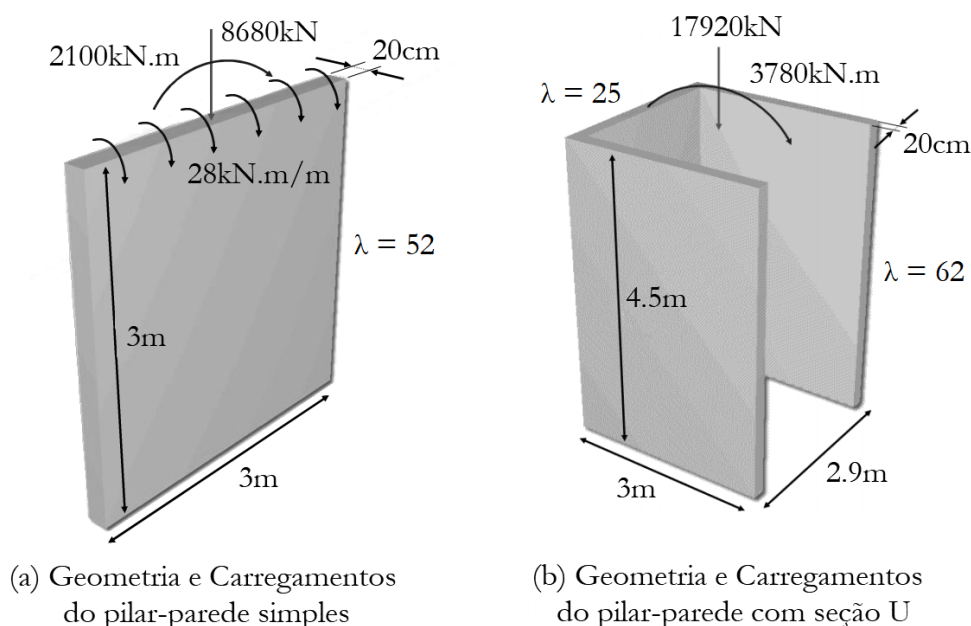
3 ESTUDO COMPARATIVO INICIAL

Nesse capítulo, é retratado um estudo comparativo entre o método normativo aproximado, o método da malha de barras (ambos discutidos no capítulo 2), e, análises não-lineares com elementos finitos de casca, utilizando o software VecTor 4, conforme Silva e Horowitz (2020). São apresentados: as características dos pilares-parede em estudo (geometria, carregamentos, condições de contorno, etc); algumas particularidades do software computacional utilizado na análise em elementos finitos; os critérios adotados na modelagem do problema, e, os resultados e conclusões preliminares.

3.1 PILARES-PAREDE ANALISADOS

Foram selecionados dois pilares-parede, com geometrias usuais, sendo um simples (seção retangular), e, outro com seção U, ambos obtidos na literatura (FRANÇA; KIMURA, 2006) (IBRACON, 2015) (KIMURA, 2016). A Figura 7 auxilia no entendimento tanto das características geométricas dessas estruturas como dos carregamentos solicitantes de projeto. Ambos os elementos apresentam concreto C30, cobrimento igual 30 mm, e armaduras com aço CA-50. Além disso, as lâminas dos pilares são consideradas articuladas nas suas extremidades (birotuladas).

Figura 7 – Geometria e carregamentos dos pilares-parede analisados



Fonte: Adaptado de França e Kimura (2006), IBRACON (2015) e Kimura (2016)

3.2 SOFTWARE COMPUTACIONAL UTILIZADO

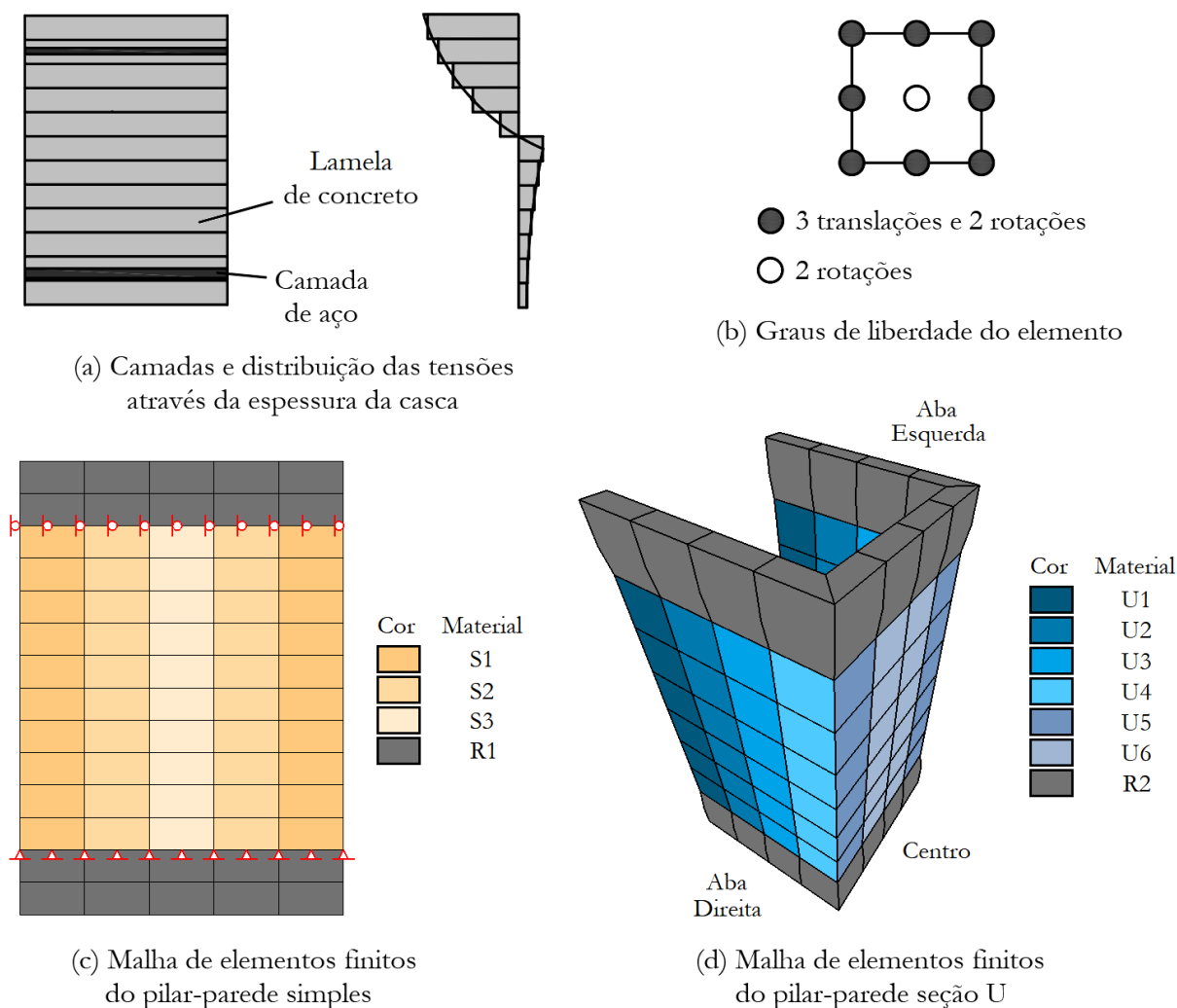
No presente estudo, para o desenvolvimento das análises dos pilares-parede, optou-se por utilizar o software VecTor 4 (versão 4.30, Jan. 2019). Esse programa computacional é direcionado a análise não-linear de elementos de superfície de concreto armado, como cascas e lajes, em problemas quasi-estáticos e dinâmicos, através do método dos elementos finitos. Essa ferramenta vem sendo desenvolvida na Universidade de Toronto, no Canadá, desde a década de 80, tendo recebido outros nomes durante esse processo (HRYNYK, 2013). O VecTor 4 pode ser utilizado em conjunto com os softwares FormWorks+ e Janus, respectivamente, pré e pós-processador da análise em elementos finitos, ambos também desenvolvidos na mesma universidade.

Segundo Hrynyk (2013), o VecTor 4 utiliza em sua formulação um elemento finito de casca classificado como degenerado, pois, é desenvolvido diretamente de equações da elasticidade tridimensional, ao invés de utilizar teorias de cascas, sendo essa uma das abordagens mais comuns na modelagem desse tipo de estrutura. Esse elemento finito apresenta geometria quadrangular, 9 nós e 42 graus de liberdade: 3 translações em cada nó, e, duas rotações, nos 8 nós dos bordos, Figura 8(b). Ele também é classificado como elemento heterose, pois utiliza na sua formulação uma combinação entre funções de forma de elementos Lagrangianos e Serendipity. Além disso, esse elemento é discretizado em lamelas de concreto e camadas de aço, de forma que seja possível considerar a variação dos esforços ao longo da espessura do mesmo, tanto em cascas finas como grossas, Figura 8(a). Maiores detalhes sobre a formulação do elemento de casca degenerado heterose de 9 nós, implementado no VecTor 4, podem ser obtidos na literatura (OWEN; FIGUEIRAS, 1984) (HUGHES; COHEN, 1978) (FIGUEIRAS, 1983).

Um dos fatores determinantes na escolha do software VecTor 4 como ferramenta de análise nesse estudo, foi a modelação constitutiva do concreto armado. Esse programa é fundamentado na bem conhecida teoria do campo de compressão modificada (*Modified Compression Field Theory* – MCFT), uma das formulações mais aceitas pela comunidade técnica para modelagem desse material. Segundo (HRYNYK, 2013), o MCFT é direcionado a análise do comportamento de peças em concreto armado sujeitas a carregamentos biaxiais, foi publicado por Vecchio e Collins (1986), e, vem sendo estudado desde então. O MCFT idealiza o concreto fissurado como um novo material ortotrópico, com armadura embutida, sujeito a suas próprias relações constitutivas, considerando, no concreto, os efeitos de amolecimento à compressão e de enrijecimento à tração. Além disso, alguns dos principais fundamentos desse modelo são:

- As armaduras, transversal e longitudinal, são consideradas distribuídas uniformemente ao longo do elemento em estudo;

Figura 8 – Modelagem em elementos finitos dos pilares-parede analisados



Fonte: Adaptado de Hrynyk (2013)

- Além das fissuras serem consideradas distribuídas na peça de concreto, a sua orientação é livre para rotacionar, de acordo com variações no carregamento aplicado e na resposta dos materiais;
- É utilizado o conceito de tensões e deformações médias, avaliadas em regiões contendo varias fissuras;
- São usadas relações constitutivas independentes para o aço e o concreto;
- Os sistemas principais para tensões e deformações são coincidentes.

O VecTor 4 também conta, em sua formulação, com o modelo do campo de tensões perturbado (*Disturbed Stress Field Model* – DSFM). De forma geral, o DSFM é uma extensão do MCFT, que admite discordâncias entre os sistemas principais de tensão e deformação através da consideração de deformação de escorregamento nas fissuras (subseção 4.2.7). O DSFM foi proposto por Vecchio (2000) com o objetivo de atenuar

algumas limitações do MCFT em determinar de forma apropriada a resistência e a rigidez de elementos, com altas e baixas taxas de armadura. Informações adicionais e pormenores desses dois modelos, MCFT e DSFM, e, sua implementação no VecTor 4 podem ser obtidos na literatura técnica pertinente (HRYNYK, 2013) (OWEN; FIGUEIRAS, 1984) (VECCHIO; COLLINS, 1986) (VECCHIO, 2001).

3.3 CRITÉRIOS ADOTADOS NA MODELAGEM

Essa seção é dedicada a detalhar as principais premissas empregadas na modelagem em elementos finitos dos dois pilares-parede em estudo, utilizando o software VecTor 4, e, o seu pré-processador FormWorks+.

Em relação aos carregamentos externos solicitantes, a aplicação dessas ações na estrutura foi modelada através de forças e momentos equivalentes concentrados nos nós, de forma semelhante ao indicado no método normativo. As magnitudes desses esforços nodais foram obtidas considerando os carregamentos indicados na Figura 7, a distribuição de tensões $n_d(x)$, Figura 6, e, a área de influência de cada faixa vertical.

Além desses carregamentos, no pilar-parede com seção U, de forma a induzir o comportamento da estrutura para o modo de flambagem em estudo, foram consideradas mais duas forças nodais, aplicadas nos pontos médios dos bordos livres, das duas abas laterais, com orientação perpendicular ao plano. No caso do modo de flambagem simétrico, as duas cargas tiveram a mesma direção e sentidos opostos, apontando para o centro da estrutura, enquanto que, no modo de flambagem antissimétrico, elas foram iguais. A magnitude dessas forças adicionais foi definida de forma que fosse suficiente para causar pequenos deslocamentos transversais nas lâminas, próximos a 1/20.000 da altura do pilar-parede. Nesse cálculo considerou-se uma faixa da aba, com largura de 60 cm (três vezes a espessura da lâmina, conforme recomenda o método normativo). Com isso, foi encontrado o valor de 1.5 kN para as cargas de indução, aproximadamente 0.3% da menor carga nodal, referente ao carregamento externo solicitante. É importante frisar que, caso esse, ou outro critério análogo, não tivessem sido adotados, no estudo de mais de um modo de flambagem, dependendo das condições do problema, o comportamento obtido poderia ser significativamente influenciado por resíduos decorrentes do procedimento de solução do sistema de equações não-lineares, tendo em mente que a configuração deformada equilibrada obtida é uma aproximação.

Com o objetivo de evitar concentrações de tensões, não condizentes com a realidade, devido à metodologia adotada na aplicação das cargas, optou-se por utilizar elementos rígidos nos bordos carregados ou com apoios, como um prolongamento dos pilares-parede, de modo a regularizar o comportamento das estruturas nessas regiões. A Figura 8 ilustra o posicionamento dos elementos rígidos ($R1$ e $R2$), nos bordos superior e inferior.

No que diz respeito à malha de elementos finitos, foram adotados elementos degenerados heterose, conforme mencionado anteriormente. A Figura 8(c) ilustra a geometria da malha do primeiro pilar-parede, que é composta por 5 x 14 elementos quadrangulares, com dimensões de 60 x 30 cm, sendo as duas fileiras superiores, e as duas inferiores, constituídas por elementos rígidos auxiliares ($R1$), com espessura de 50 cm. Em relação ao pilar-parede com seção U, de acordo com a Figura 8(d), é possível perceber que o pilar-parede foi discretizado no sentido vertical em 6 elementos, além de mais duas fileiras referentes a elementos rígidos ($R2$), com espessura de 30 cm, acima e abaixo da estrutura. Já no plano horizontal, foram aplicados 4 elementos nas regiões das abas e 4 no trecho central. Todos os elementos na aba (incluindo os rígidos) tiveram dimensão de 75 x 100 cm, enquanto que os do trecho central foram de 72.5 x 100 cm.

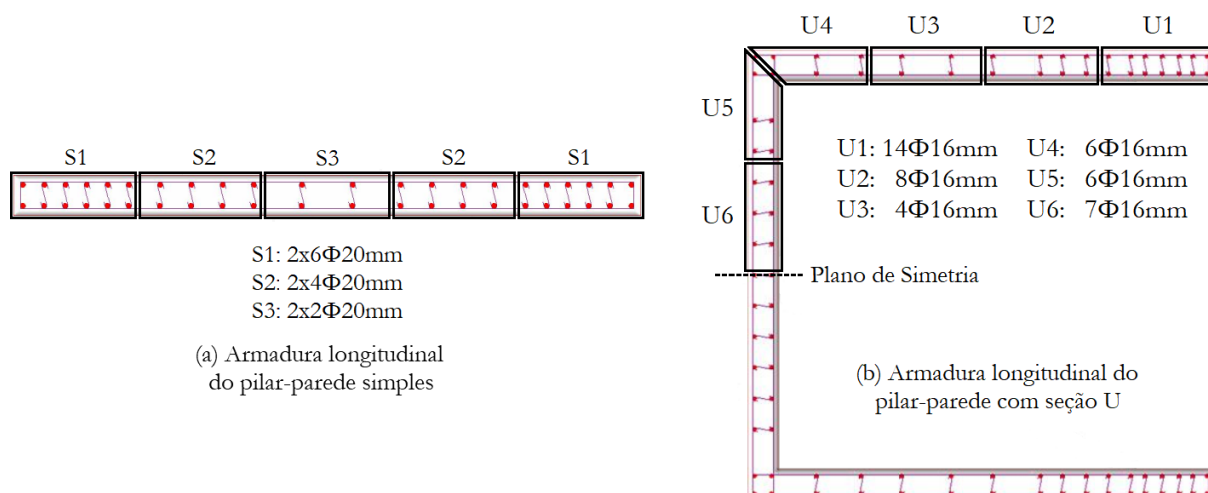
Além disso, devido ao fato dos nós do elemento finito adotado pelo VecTor 4 não possuírem o grau de liberdade (GL) de rotação normal (*drilling*), ao contrário de outros programas computacionais, para assegurar a compatibilização entre os GLs dos elementos que fazem a conexão em L entre a aba e o trecho central, no pilar-parede em U, foi necessário modelar essa ligação utilizando sistemas de coordenadas nodais, específicos para cada nó, resultando em uma configuração trapezoidal da seção dos elementos envolvidos, Figuras 8(d) e 9(b). Essa é uma particularidade do elemento finito de casca do VecTor 4, que apesar de dificultar um pouco a modelagem, consegue diminuir o número de graus de liberdade do problema e contribuir para uma maior eficiência computacional. No Capítulo 5, esse pilar-parede e suas ligações em L são modelados utilizando o programa computacional discutido no Capítulo 4, através de uma abordagem considerando 6 GLs por nó.

É importante frisar que, apesar do pilar-parede com seção U apresentar um plano de simetria, no que diz respeito à geometria e aos carregamentos aplicados, não é apropriado considerar essa característica do problema na análise, através da modelagem de apenas metade da estrutura. Ainda que isso significasse uma apreciável redução no custo computacional, o modelo ficaria induzido a desprezar os eventuais modos de flambagem antissimétricos, Figura 4(c), os quais podem apresentar considerável importância no comportamento da estrutura.

Conforme apresentado na seção 3.1, as lâminas de cada pilar-parede foram consideradas birotuladas. Dessa forma, tanto no primeiro como no segundo pilar-parede, foram aplicados apoios fixos nos nós do bordo inferior (restringindo todos os GL's de translação), e, apoios móveis no bordo superior (restringindo apenas os GL's de translação no plano horizontal), Figura 8(c).

Para levar em conta a não-linearidade física do problema, foi necessário considerar nas análises as armaduras empregadas em cada pilar-parede. Com isso, optou-se por adotar no presente estudo as armações obtidas na literatura (FRANÇA; KIMURA, 2006) (KIMURA, 2016), utilizando-se o método normativo (ABNT NBR 6118, 2014). De acordo

Figura 9 – Armaduras longitudinais dos pilares-parede em estudo



Fonte: Adaptado de França e Kimura (2006) e Kimura (2016)

com a armação longitudinal empregada, e sua posição na estrutura, foram definidas taxas de armadura equivalentes, para as camadas de aço, de cada elemento, Figura 9. Quanto à armação transversal, nos dois casos, optou-se por adotar 25% da área de aço longitudinal, conforme orienta a ABNT NBR 6118 (2014), respectivamente, 5.80 e 2.78 cm²/m/face, no primeiro e segundo pilar-parede.

É importante salientar que, devido à discretização da espessura do elemento, as armaduras puderam ser dispostas no modelo em suas posições apropriadas, de acordo com o cobrimento e a espessura de cada barra de aço. As espessuras dos elementos dos pilares-parede simples e com seção U foram discretizadas, respectivamente, em 15 e 10 lamelas de concreto. Nos dois exemplos em questão, foram consideradas 4 camadas de aço: duas para o aço longitudinal e outras duas para o transversal.

Em relação aos modelos constitutivos para o concreto e o aço, optou-se por adotar as configurações padrão do software (DSFM), conforme recomenda Hrynyk (2013), para a maioria das análises realizadas no VecTor 4. Dentre esses modelos, pode-se destacar:

- A parábola de Hognestad (subseção 4.2.1) e o modelo modificado de Park-Kent (PARK; PRIESTLEY; GILL, 1982), respectivamente, para o concreto à compressão pré e pós-pico;
- Para o amolecimento à compressão e o enrijecimento à tração do concreto são usados, nessa ordem, os modelos conhecidos como Vecchio 1992-A e Bentz modificado 2003, descritos em Wong, Trommels e Vecchio (2012), e, nas subseções 4.2.2 e 4.2.3, e;
- O modelo de Seckin (SECKIN, 1981), para o comportamento histerético do aço.

O desenvolvimento de modelos constitutivos apropriados para cada tipo de problema é um campo de pesquisa bastante relevante atualmente, visto a significativa influência

que os mesmos têm sobre a validade dos resultados obtidos. Dessa forma, são necessários estudos posteriores, para verificar quais seriam as relações constitutivas mais adequadas, na análise de pilares-parede análogos aos apresentados no presente trabalho.

Por fim, no procedimento iterativo-incremental utilizado para resolver o problema não-linear em elementos finitos, adotou-se, 100 estágios de carregamento, com um incremento de carga equivalente a 1% da solicitação total, em cada um deles. Além disso, o número máximo de iterações por incremento de carga e a tolerância para a convergência da análise foram definidos, respectivamente, como 100 e $10e-5$.

3.4 RESULTADOS PRELIMINARES

Essa seção apresenta os principais resultados obtidos nas análises estruturais dos pilares-parede em estudo, via MEF-NL, e, compara os esforços internos encontrados com os respectivos valores referentes ao procedimento normativo (ABNT NBR 6118, 2014) e o método da malha de barras (FRANÇA; KIMURA, 2006) (IBRACON, 2015).

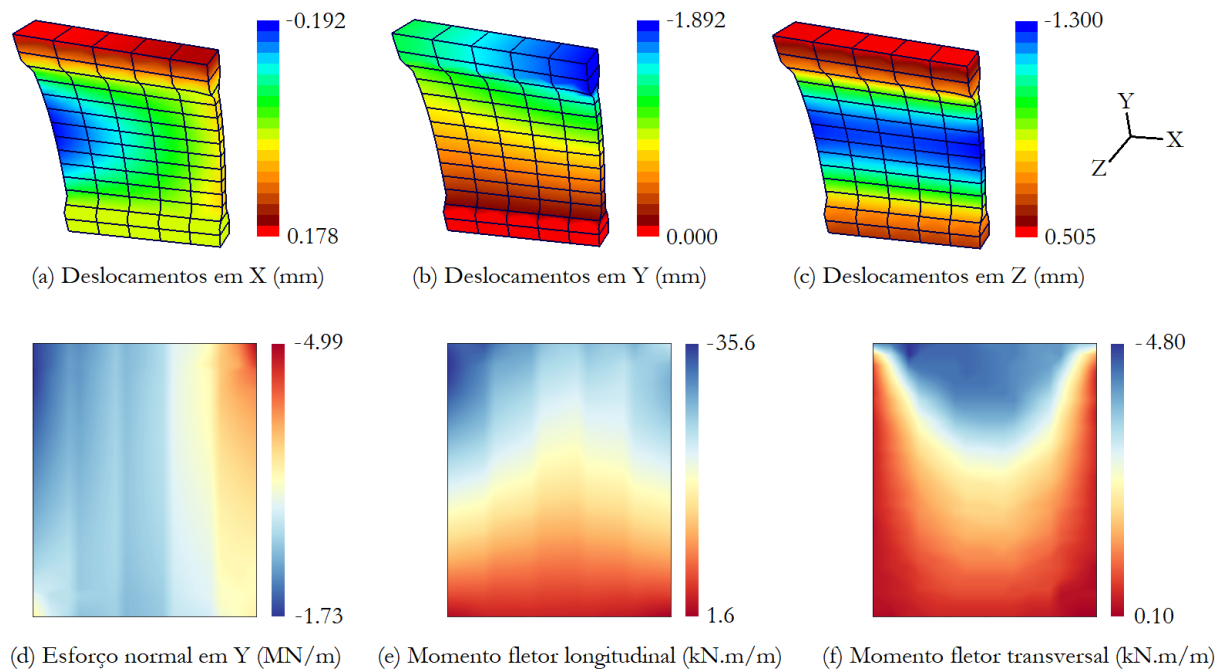
Nas Figuras 10, 11 e 12, pode-se observar os deslocamentos (com os elementos rígidos) e os diagramas dos esforços internos (sem os elementos rígidos) que retratam os comportamentos, respectivamente, do pilar-parede simples e dos dois modos de flambagem estudados no pilar-parede com seção U. Nessas ilustrações, os deslocamentos foram obtidos com base no pós-processador do VecTor 4, Janus, enquanto que os diagramas foram determinados de acordo com os esforços internos fornecidos pelo VecTor 4, nos pontos de Gauss de cada elemento finito, e, uma rotina de pós-processamento, escrita pelo autor em *Python*. Nessas ilustrações, é considerado como momento fletor positivo aquele que causa tração na face do pilar-parede simples com z positivo, e, nas faces internas do pilar-parede com seção U. Além disso, as Tabelas 2 e 3 comparam os máximos momentos fletores encontrados, nos dois problemas, segundo as três metodologias.

3.4.1 Resultados da análise do pilar-parede simples

Inicialmente, na análise do primeiro pilar-parede, foi possível observar que, próximo ao nível de aplicação das cargas (bordo superior), os esforços normais nos elementos, no sentido vertical N_y , são praticamente os mesmos valores encontrados segundo os métodos bibliográficos. Porém, conforme o ponto em estudo distancia-se dos carregamentos, a distribuição das tensões normais, na vertical, tende a ficar mais uniforme, conforme descreve o princípio de Saint-Venant, Figura 10(d), fato esse não observado no modelo da malha de barras, ou no procedimento normativo.

Em relação ao momento fletor longitudinal (tração no sentido vertical) M_y , o máximo valor desse esforço foi localizado em um elemento do bordo lateral menos comprimido pela tensão axial resultante $n_d(x)$ (lado esquerdo), Figuras 6 e 10(e). Esse comportamento

Figura 10 – Análise do pilar-parede simples



Fonte: Silva e Horowitz (2020)

Tabela 2 – Momentos fletores máximos no pilar-parede simples (kN.m/m)

	Momento fletor longitudinal M_y (bordo esquerdo)	Momento fletor longitudinal M_y (bordo direito)	Momento fletor transversal M_x
Método aproximado normativo	-	55.2*	-
Método da malha de barras	33.6*	48.8*	1.7
Análise MEF-NL via VecTor4	35.6	27.9	4.8

Fonte: Silva e Horowitz (2020)

*Valor obtido segundo aproximação quadrática dos momentos de 2ª ordem.

discorda dos modelos bibliográficos, que consideram o M_y máximo situado no bordo direito, devido ao maior esforço de compressão e o surgimento de efeitos localizados de 2ª ordem associados a ele, Tabela 2. Com isso, a primeira vista, o resultado obtido é contraintuitivo. Contudo, após investigações, pode-se chegar as seguintes possíveis justificativas:

- Com a aplicação do carregamento, o techo mais solicitado (bordo direito) tende a experimentar uma maior perda de rigidez, devido a não-linearidades dos materiais, como a fissuração do concreto, por exemplo, e, com isso, ocorre um efeito de redistribuição dos esforços para regiões menos carregadas, mais integras e com maior rigidez (bordo esquerdo);
- Na análise via MEF-NL do pilar-parede, pode-se observar que o deslocamento máximo, transversal ao plano da estrutura, Figura 10(a), foi localizado em um nó próximo ao centro do bordo mais carregado. Consequentemente, após essa translação, associada à instabilidade lateral da peça, é esperado que ocorra um efeito de redistribuição de esforços para o bordo da esquerda, relativo a não-linearidade geométrica;
- Além disso, conforme visto a pouco, a atuação do princípio de Saint-Venant tende a uniformizar a distribuição dos esforços de compressão, e, com isso, atenuar os efeitos localizados de 2ª ordem na estrutura.

O comportamento descrito acima pode ser observado, comparando-se os momentos máximos nos pontos médios dos dois bordos laterais, nos 100 estágios de carregamento analisados. Nas etapas iniciais, quando as não-linearidades são desprezíveis, os dois momentos fletores foram praticamente iguais, porém, com o aumento das solicitações, houve a tendência do momento fletor máximo do bordo da esquerda (menos carregado) ser 27.6% superior ao esforço no da direita. No último estágio de carga, o momento fletor M_y no bordo da esquerda foi igual a 35.6 kN.m/m, enquanto que o da direita foi 27.9 kN.m/m, Tabela 2.

Além disso, o efeito de redistribuição também é influenciado pela maior taxa de armadura nas laterais do pilar-parede, o que causa a tendência de migração dos esforços do centro para os extremos do elemento. No intuito de verificar esse comportamento, o pilar-parede simples foi reanalisado considerando uma taxa de armação longitudinal uniformemente distribuída (23 cm²/m/face). Com isso, foi possível observar que, mesmo nessa nova situação, ainda existe concentração de momentos no bordo esquerdo, com intensidade próxima ao problema original (+28.0%). Contudo, a magnitude dos esforços foi atenuada, sendo, no último estágio, M_y máximo igual a 33.8 kN.m/m no bordo esquerdo, e, 26.4 kN.m/m no direito.

Fora isso, de forma adicional, foi realizada uma análise linear-elástica, desse problema, em elementos finitos, usando o software SAP 2000 (COMPUTERS & STRUCTURES, Inc., 2019), sem considerar a não-linearidade geométrica da estrutura, e, admitindo-se malha

e outros critérios de modelagem análogos aos apresentados anteriormente. Nesse estudo, pode-se perceber que, ainda assim, existe certa tendência de acúmulo de momentos fletores em ambos os bordos laterais livres (de forma simétrica), sendo essa uma característica intrínseca do problema. Isso pode ser verificado também em análises de placas lineares uniformemente carregadas, e, de certa forma, concorda com o item 20.2 da ABNT NBR 6118 (2014), o qual, no detalhe da figura 20.1, recomenda o posicionamento de barras de aço nas extremidades de bordos livres, em lajes maciças.

Em relação ao momento fletor transversal (tração no sentido horizontal) M_x , pode-se observar uma concentração de esforços na região central do bordo superior, Figura 10(f), fenômeno esse também percebido na análise linear no SAP 2000. O valor máximo de M_x encontrado na análise via MEF-NL (4.8 kN.m/m) foi superior ao resultado fornecido pelo método da malha de barras (1.7 kN.m/m), Tabela 2. Contudo, ainda assim, M_x foi menor que 13.5% de M_y . Dessa forma, apesar dos dimensionamentos das armaduras transversal e longitudinal serem distintos, respectivamente, flexão simples e flexo-compressão reta, e, o esforço N_y ter papel crucial nesse último, a diferença obtida entre M_x e M_y reforça o pensamento que a recomendação normativa que considera a armação transversal como 25% da longitudinal pode ser exagerada em certas situações, conforme apresenta França e Kimura (2006).

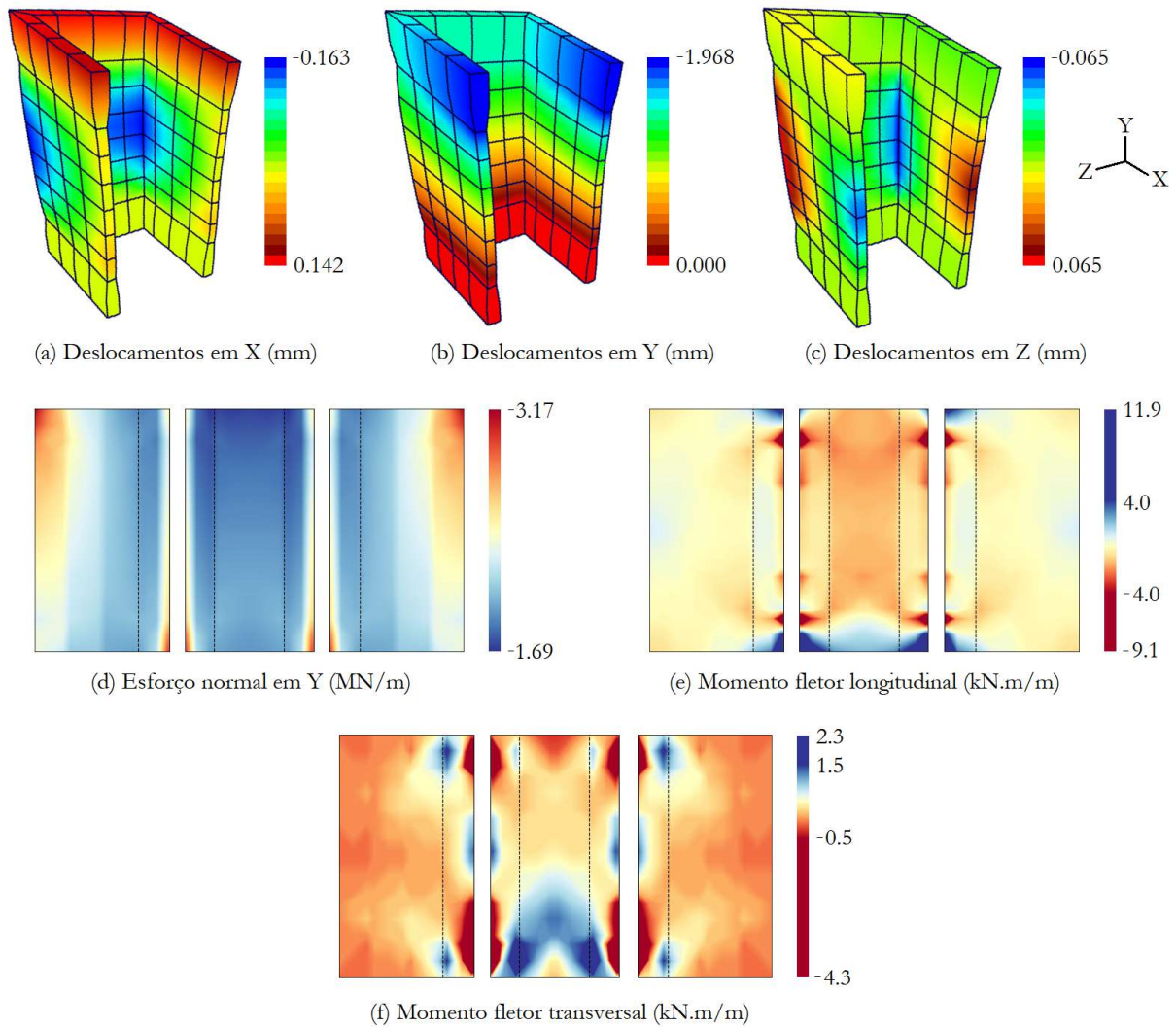
Por fim, no que diz respeito ao custo computacional da análise via MEF-NL do pilar-parede simples, de acordo com os critérios apresentados para o método iterativo-incremental, pode-se observar um tempo médio de processamento aproximadamente igual a 40 min. Foi utilizado um computador com processador Intel Core i7-5500U CPU @ 2.40GHz. O custo computacional observado pode ser considerado elevado, e, torna esse tipo análise menos atrativo para o dia a dia em escritórios de projeto. Contudo, ainda assim, a mesma permite outra perspectiva no que diz respeito ao comportamento da estrutura, tendo, portanto, fundamental importância para a profissão.

3.4.2 Resultados da análise do pilar-parede com seção U

Na análise do segundo pilar-parede, assim como no problema anterior, o efeito da redistribuição dos esforços, e o princípio de Saint-Venant, novamente se mostraram bastante relevantes, tanto no modo de flambagem simétrico como no antissimétrico. Como pode-se observar nas Figuras 11(d) e 12(d), apesar do carregamento máximo solicitante de compressão ser localizado nos elementos dos cantos superiores dos bordos livres das abas, o esforço normal, ao longo da altura do pilar-parede, tende a se concentrar próximo às ligações aba-centro, sendo essas as regiões com maior rigidez na estrutura.

Em relação ao momento fletor transversal M_x , de forma semelhante ao que consta na literatura (FRANÇA; KIMURA, 2006), nos dois modos de flambagem, o esforço é desprezível nos bordos, e, aumenta gradualemente conforme o ponto de estudo se aproxima

Figura 11 – Análise do pilar-parede com seção U (Modo Simétrico)

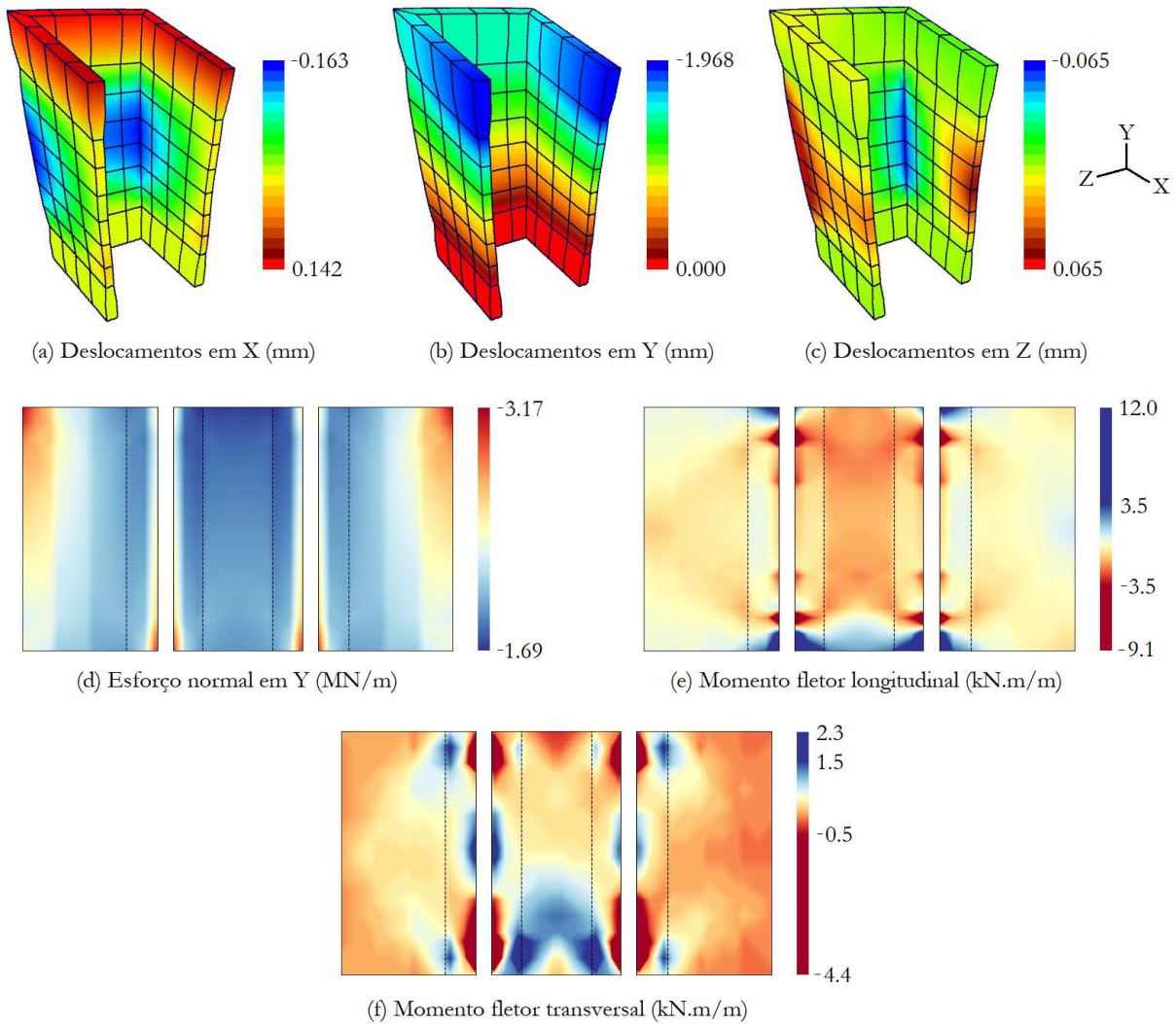


Fonte: Silva e Horowitz (2020)

da ligação aba-centro, Figuras 11(f) e 12(f). Contudo, os momentos encontrados, além de apresentarem magnitude inferior aos esforços calculados por França e Kimura (2006) (aproximadamente 22.9%), tiveram sentido contrário, em algumas regiões, Figuras 11(f) e 12(f). Essa inversão no comportamento também foi percebida nos deslocamentos da estrutura, Figuras 11(c) e 12(c). Com base nos momentos M_x encontrados, nos dois modos de flambagem, desconsiderando-se a armadura mínima de flexão, pode-se obter uma taxa de armação transversal pequena, da ordem de $0.7 \text{ cm}^2/\text{m}$, aproximadamente 6.3% da armadura longitudinal. Novamente, os resultados obtidos reforçam o pensamento que a recomendação normativa para a armação transversal de pilares-parede pode ser exagerada.

Com relação ao momento fletor longitudinal M_y , além de não ter sido observada concentração de esforços no bordo livre da aba, nos dois modos de flambagem, ao contrário do que consta em França e Kimura (2006), os momentos encontrados nessa região tiveram magnitude desprezível, Figuras 11(e) e 12(e), sendo o esforço máximo localizado próximo

Figura 12 – Análise do pilar-parede com seção U (Modo Antissimétrico)



Fonte: Silva e Horowitz (2020)

da ligação aba-centro, Tabela 3. Uma possível justificativa para a diferença entre esse resultado e a bibliografia vem do ínfimo deslocamento transversal ao plano da aba obtido nos dois modos de flambagem (0.064 mm), Figuras 11(c) e 12(c), que, por sua vez, resultou em efeitos localizados de 2ª ordem irrelevantes. Novamente, acredita-se que o efeito da redistribuição dos esforços e a ação do princípio de Saint-Venant tiveram papel preponderante na atenuação desses esforços não-lineares.

Além disso, tanto em M_x como em M_y , foram percebidas irregularidades na distribuição dos esforços, nos elementos que formam a conexão em L. Esse comportamento atípico pode estar associado com a forma como a ligação foi idealizada, sendo necessários estudos posteriores para verificar a alternativa mais apropriada para esse ponto da modelagem.

Com o objetivo de averiguar a validade desses resultados, foi desenvolvido, de forma análoga ao problema anterior, um modelo linear-elástico dessa estrutura, em elementos finitos, usando o software SAP 2000 (COMPUTERS & STRUCTURES, Inc., 2019),

Tabela 3 – Momentos fletores máximos no pilar-parede com seção U (kN.m/m)

	Momento fletor longitudinal M_y	Momento fletor transversal M_x
Método aproximado normativo	76.7*	-
Método da malha de barras	16.7*	19
Análise MEF-NL via VecTor4, modo de flambagem simétrico	11.9**	-4.3
Análise MEF-NL via VecTor4, modo de flambagem antissimétrico	12.0**	-4.4

Fonte: Silva e Horowitz (2020)

*Localizado no bordo livre a aba.

**Localizado na ligação aba-centro.

admitindo-se malha e outros critérios de modelagem semelhantes ao apresentado anteriormente. Com isso, novamente, apesar da simplicidade do modelo, foi possível observar um comportamento qualitativo próximo à análise via MEF-NL, não só no que diz respeito aos deslocamentos em z , Figuras 11(c) e 12(c), mas também aos outros graus de liberdade. Isso corrobora para a razoabilidade dos resultados obtidos na análise via MEF-NL.

Além disso, o modelo do SAP 2000 foi submetido a uma análise dos modos de flambagem, onde foi possível verificar que os dois modos estudados nesse trabalho são realmente os comportamentos mais prováveis da estrutura, sendo os fatores de flambagem (relação carga de flambagem/carga real), para os modos simétrico e antissimétrico, respectivamente, 24.87 e 25.37. Os demais modos de flambagem se mostraram de pouco interesse prático, tendo o terceiro modo (flambagem simétrica com dupla curvatura) um fator de flambagem bem maior que os dois primeiros, da ordem de 46.6. Os relativamente altos fatores de flambagem obtidos nas análises via SAP 2000 ajudam a justificar a ausência de grandes instabilidades estruturais nos resultados do VecTor 4.

De certa forma, a resposta observada na análise via MEF-NL do pilar-parede se assemelha a situação de perfis metálicos comprimidos, sujeitos a flambagem local (ABNT

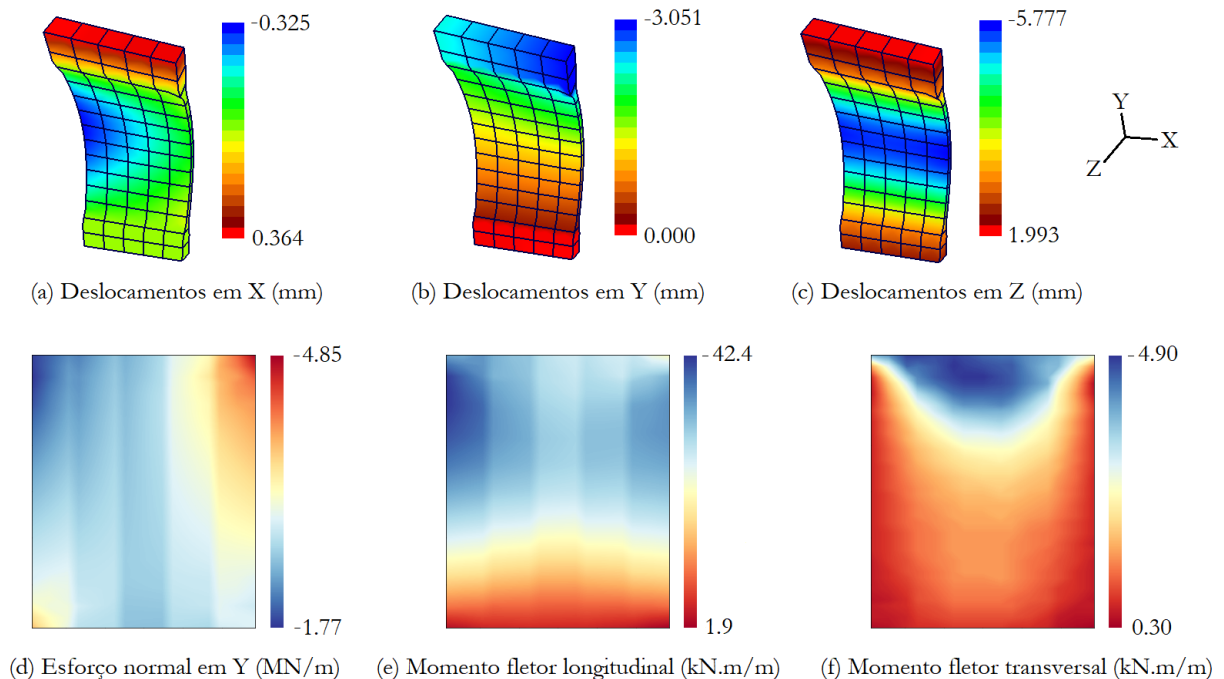
NBR 8800, 2008) (PFEIL; PFEIL, 2009). Segundo Yu e Laboube (2010), pode-se observar nesse tipo de problema a tendência de redistribuição de esforços para os bordos com relativa maior rigidez (ligação aba-centro). Essa aparente semelhança entre os comportamentos dos dois problemas se mostra uma oportunidade de investigação científica coerente.

Assim como no exemplo anterior, com base nos critérios apresentados para o método iterativo-incremental, pode-se observar um tempo de processamento elevado, nesse caso, aproximadamente igual a três horas. Foi utilizado, novamente, um computador com processador Intel Core i7-5500U CPU @ 2.40GHz. Apesar disso, esse tipo de análise mantém sua relevância devido ao fato de permitir a avaliação do comportamento da construção, considerando efeitos complexos e de primordial importância.

3.4.3 Pilares-parede com lâminas esbeltas

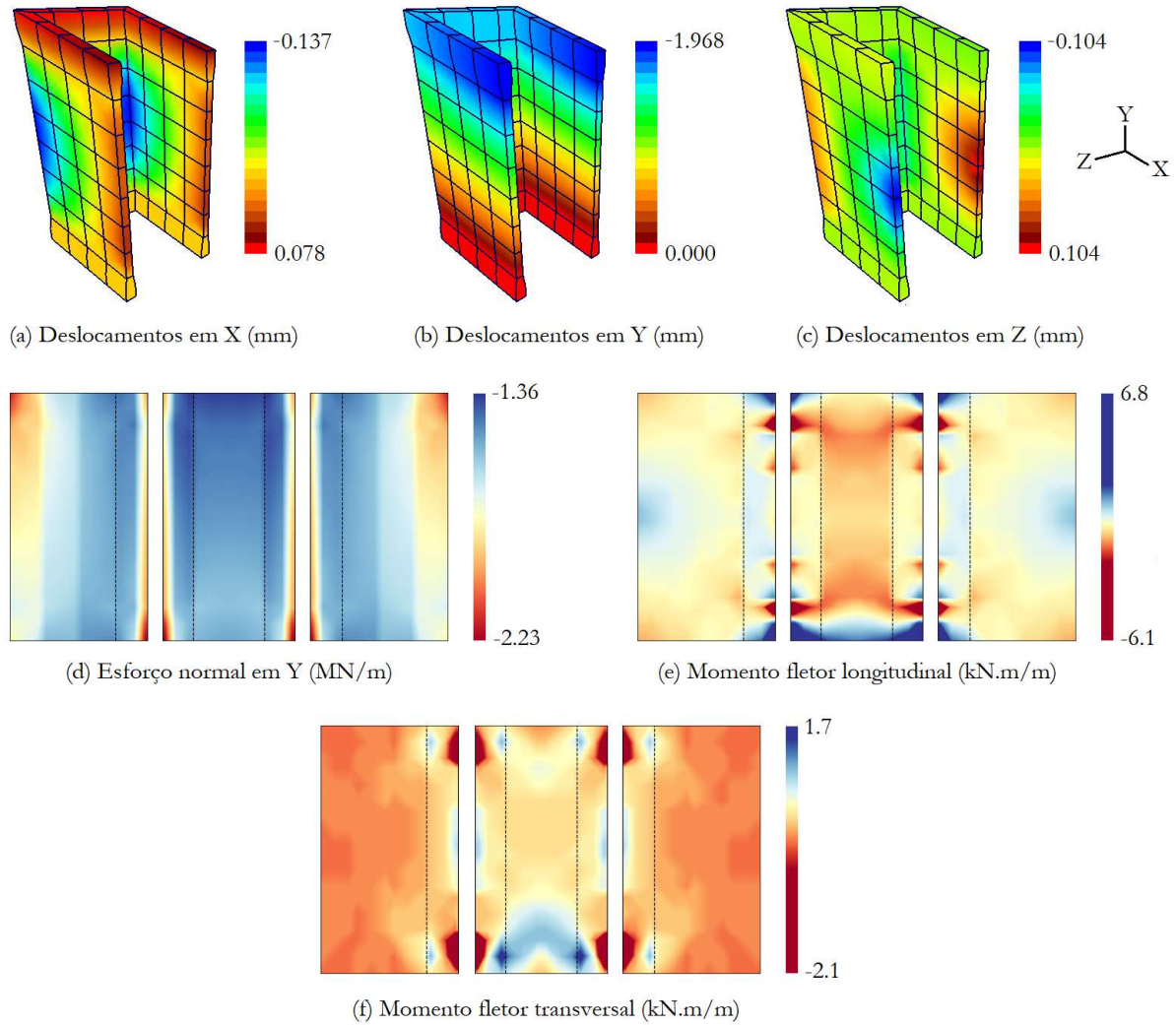
Com o intuito de avaliar o comportamento de pilares-parede com lâminas esbeltas, as duas estruturas em estudo tiveram algumas dimensões modificadas, de forma a obtermos lâminas com índices de esbeltez extremos ($\lambda = 90$), Figuras 13 a 15. A altura do pilar-parede simples foi modificada de 3 para 5.2 metros, enquanto que, no pilar-parede com seção U, além da altura ter sido aumentada de 4.5 para 6.5 m, a largura das abas foi ampliada de 3 para 4.3 m, criando, assim, abas mais esbeltas ($\lambda_{abas} = 90$), contudo, associadas a uma seção transversal mais rígida. Os demais parâmetros, taxas de armadura, carregamento, entre outros, permaneceram inalterados, com exceção da tolerância, nas

Figura 13 – Análise do pilar-parede simples, $\lambda = 90$



Fonte: Silva e Horowitz (2020)

Figura 14 – Análise do pilar-parede com seção U (modo simétrico), $\lambda_{abas} = 90$



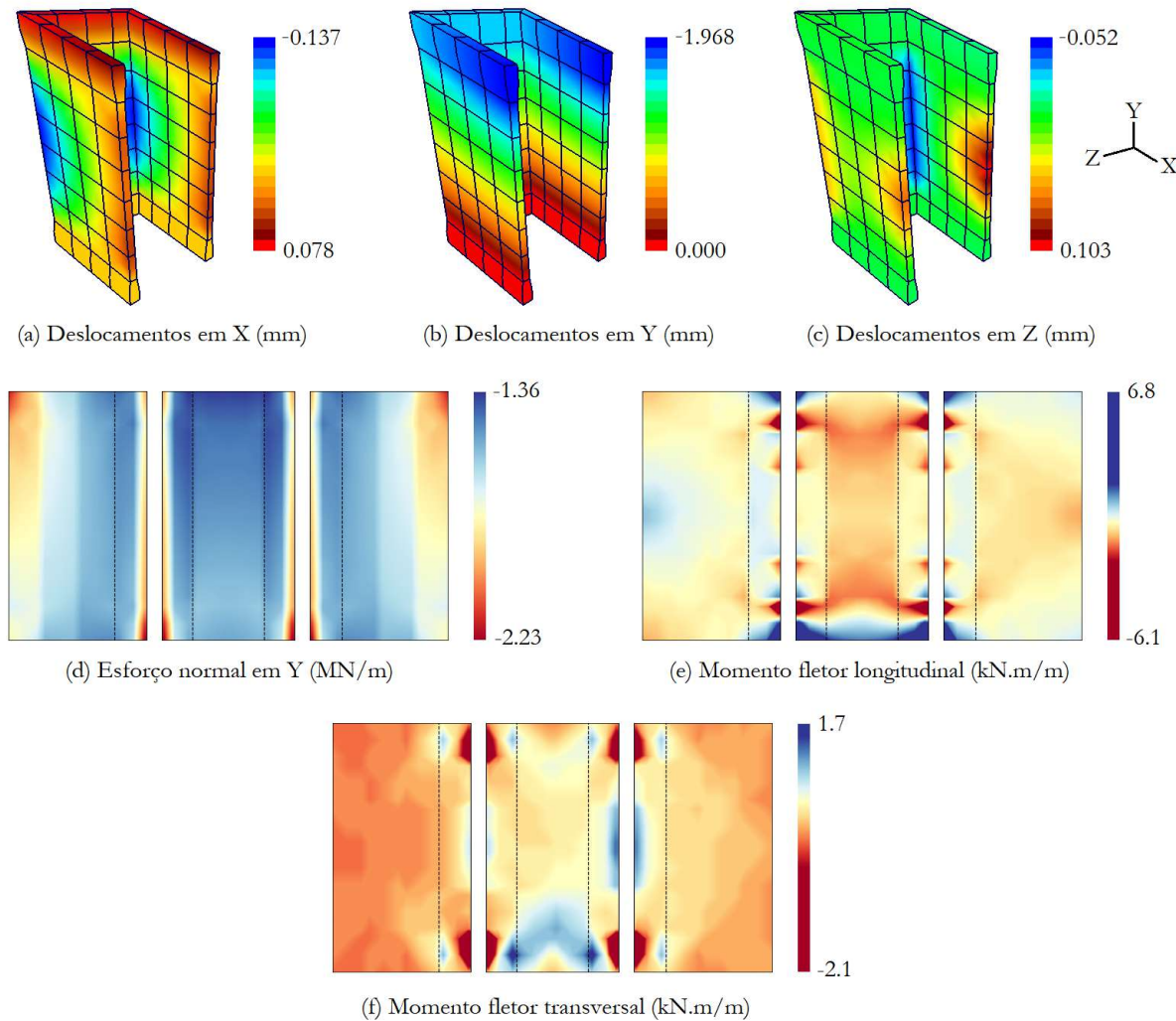
Fonte: O autor (2022)

análises do pilar-parede U, que foi aumentada para $10e-3$, com o intuito de diminuir o custo computacional, sendo obtido um tempo de processamento de 25 minutos.

Como pode-se observar, comparando as Figuras 10 e 13, de forma geral, no que diz respeito ao primeiro pilar-parede, o comportamento nas duas situações é bastante próximo. Contudo, com o aumento do comprimento do pilar-parede, e, conseqüentemente, da esbeltez do elemento, pode-se observar um crescimento tanto nos momentos fletores longitudinal e transversal, como nos deslocamentos, principalmente no sentido do eixo z , como já era esperado.

Em relação ao segundo pilar-parede, comparando-se, respectivamente, as Figuras 11 e 14, e, 12 e 15, assim como no primeiro pilar-parede, pode-se observar a semelhança entre as duas situações. Entretanto, apesar da altura do elemento ter sido acrescida, e, isso contribuir para aumento da esbeltez das abas, como a largura desses elementos também foi ampliada (mantendo-se os carregamentos externos constantes), pode-se observar uma

Figura 15 – Análise do pilar-parede com seção U (modo antissimétrico), $\lambda_{abas} = 90$



Fonte: O autor (2022)

considerável diminuição dos esforços internos na estrutura, embora a esbeltez das abas nessa nova situação seja maior que no caso anterior. Isso indica que apenas as esbeltezas das lâminas de um pilar-parede podem não ser suficientes para a caracterização do problema, evidenciando assim a necessidade do desenvolvimento de estudos paramétricos, variando-se dimensões, taxas de armadura, entre outras propriedades, de forma a verificar os limites práticos de projeto.

3.5 CONCLUSÕES PRELIMINARES

Para dois pilares-parede (simples e seção U), foi conduzido um estudo comparativo entre os esforços internos obtidos segundo métodos presentes na norma (ABNT NBR 6118, 2014), literatura técnica (FRANÇA; KIMURA, 2006), e análises não-lineares (física e geométrica) com elementos finitos de casca (MEF-NL), realizadas no software VecTor 4, o qual é baseado na teoria do campo de compressão modificada. Além disso, a avaliação

da resposta do pilar-parede com seção U, via MEF-NL, foi feita de forma a considerar os principais modos de flambagem da estrutura. Com isso, pode-se concluir:

- A atuação conjunta do efeito da redistribuição dos esforços e do princípio de Saint-Venant se mostrou um ponto fundamental na análise, sendo responsável por atenuar os efeitos localizados de 2ª ordem nos pilares-parede, fato esse não observado no modelo da malha de barras, ou no procedimento normativo;
- Nas análises realizadas, os momentos obtidos conduziram a relações entre as armaduras transversal e longitudinal inferiores a 25%, o que sugere que a recomendação normativa pode ser excessivamente conservadora em alguns casos, como consta na literatura;
- As diferenças observadas entre a análise pelo método da malha de barras e a solução via elementos finitos, como, por exemplo, a inversão do sentido dos momentos fletores transversais M_x nos pilares-parede seção U, indicam que estratégias baseadas na discretização da geometria como uma grelha podem não conseguir retratar precisamente os modos de flambagem da estrutura, em certos casos. Evidenciando-se assim, a oportunidade de investigação científica quanto a calibração do modelo da malha de barras;
- No que diz respeito ao custo computacional das análises via MEF-NL, de acordo com os critérios apresentados para o método iterativo-incremental, pode-se observar um tempo médio de processamento aproximadamente igual a 40 min, para o pilar-parede simples, e, três horas, para o pilar-parede com seção U. Dessa forma, apesar do custo elevado tornar essa metodologia menos atrativa para o dia a dia em escritórios de projeto, ainda assim, esse tipo de abordagem permite outra perspectiva no que diz respeito ao comportamento da estrutura, tendo, portanto, fundamental importância para a profissão;
- Por fim, a aparente semelhança entre o comportamento do pilar-parede com seção U e perfis metálicos análogos, sujeitos a flambagem local, pode representar uma oportunidade de investigação científica viável.

4 PROGRAMA COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO

No cálculo estrutural de construções de concreto armado, o engenheiro civil faz uso de hipóteses simplificadoras da situação real, de forma que os modelos estruturais utilizados na análise sejam suficientemente precisos e seguros, porém, ainda assim, tendo adequada simplicidade, para a utilização no dia a dia em escritório de projeto.

Em paralelo a isso, o desenvolvimento da tecnologia e materiais de construção vem permitindo o surgimento de estruturas cada vez mais audaciosas, com grandes vãos e elementos com elevada esbeltez. Isso faz com que, nesses casos, algumas dessas hipóteses simplificadoras possam não ser mais representativas do comportamento real, devido ao surgimento de efeitos relevantes associados à resposta dos materiais empregados, como a fissuração do concreto, não-linearidade física (NLF), ou aos deslocamentos sofridos pela estrutura, não-linearidade geométrica (NLG).

Felizmente, o advento do computador moderno vem permitindo que modelos estruturais, mais sofisticados, outrora considerados inviáveis para aplicações práticas, ganhassem cada vez mais espaço no mercado, entre eles, análises não-lineares via elementos finitos. Esse cenário leva a comunidade técnica a uma constante reavaliação dos modelos estruturais utilizados, buscando sempre associar a segurança do projeto com a produtividade decorrente do uso das tecnologias mais eficientes disponíveis.

Diversos tipos de construções podem ser analisadas através de modelos de casca, como: pilares-paredes, reservatórios de água, entre outras estruturas de armazenamento. A complexidade das análises e o desenvolvimento computacional têm estimulado a busca por ferramentas numéricas para a resolução do problema. O desafio torna-se maior para estruturas feitas de concreto armado, onde o comportamento do material desempenha um papel crucial na resposta estrutural. Consequentemente, os modelos constitutivos dos materiais são um ponto determinante para uma análise satisfatória. Dentre as abordagens mais comuns para a formulação de elementos de casca, destacam-se: elementos de casca degenerados, que são baseados em equações de equilíbrio tridimensionais, e elementos de casca desenvolvidos pela superposição de elementos de membrana e placa.

Seguindo a primeira opção, Luu, Mo e Hsu (2017) propuseram um elemento de casca baseado no modelo CSMM (*Cyclic Softened Membrane Model*) para análise NLF de estruturas de concreto armado. Este elemento de casca degenerado de 8 nós tem 40 graus de liberdade (GL): 3 translações e 2 rotações por nó, onde cada rotação segue um sistema de coordenadas nodal específico. O procedimento de análise não-linear utiliza o método de Newton-Raphson (rigidez tangencial).

Outra ferramenta notória que também faz uso de elementos de casca degenerado é o VecTor4, conforme discutido no Capítulo 3. Este software considera tanto a NLF quanto a NLG, através de uma Formulação Lagrangiana Total. O programa tem seu modelo constitutivo baseado no MCFT/DSFM. O elemento de casca quadrilateral de 9 nós do VecTor4 tem 42 GL: 3 translações (em cada nó) e duas rotações (somente nos nós das bordas). Novamente, as rotações seguem sistemas de coordenadas nodais específicos. O procedimento de análise não-linear difere de Luu, Mo e Hsu (2017) e utiliza uma abordagem de rigidez secante direta.

Seguindo a outra opção mencionada para o desenvolvimento de elementos de casca (sobreposição de elementos de membrana e placa), Barrales (2012) propôs um elemento quadrilateral simples e eficiente para cascas finas e planas, QTFLS (*Quadrilateral Layered Membrane Element with Drilling DOF*), para NLF. Este elemento de 4 nós tem 6 GL por nó (3 translações e 3 rotações). Seu procedimento de análise não-linear também usa o método de Newton-Raphson (rigidez tangencial). Um ponto interessante sobre esta formulação é que, ao contrário dos elementos degenerados, este elemento tem explicitamente o grau de liberdade de rotação no plano do elemento (*drilling*). Portanto, não é necessário utilizar sistemas de coordenadas nodais para a compatibilização dos graus de liberdade de rotação. Segundo Silva e Horowitz (2020), ao modelar pilares-parede com seção U, utilizando elementos degenerados, como no VecTor4, é necessária atenção especial na compatibilização dos graus de liberdade de rotações, nos elementos da conexão L, entre as abas (utilizando sistemas de coordenadas nodais). O QTFLS requer apenas sistemas de coordenadas locais e globais, uma característica atrativa. Como é usual nesse tipo de análise, todos os elementos discutidos têm sua espessura discretizada em lamelas de concreto e camadas de aço, a fim de considerar adequadamente a variação das tensões ao longo da espessura.

Esse capítulo apresenta o desenvolvimento de um programa computacional para a análise não-linear de estruturas de concreto armado, sujeitas a carregamentos monotônicos, utilizando o elemento finito de cascas finas e planas QTFLS. A ferramenta foi nomeada como CANECA (*CAsca Não-linear Em Concreto Armado*). É utilizado o método de Newton-Raphson para a resolução do problema, contudo, adotando, na consideração da NLF, a rigidez secante do material, no lugar da abordagem original, via rigidez tangente. Os modelos adotados para os materiais são baseados no MCFT/DSFM. A formulação original do elemento foi expandida para considerar também a NLG, através de uma formulação Lagrangiana total (VASILESCU, 2000), em associação com as hipóteses de Von Karman para grandes deslocamentos de placas (FIGUEIRAS, 1983). São apresentados: a formulação de elementos finitos adotada e os modelos constitutivos para o concreto e o aço.

4.1 FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE VIA ELEMENTOS FINITOS

Nessa seção, é detalhada a formulação de elementos finitos considerada, sendo os principais pontos discutidos: a dedução da equação não-linear de equilíbrio; a formulação do elemento finito de cascas planas adotada; a abordagem utilizada para a consideração da NLG; a obtenção da matriz de rigidez e do vetor das forças internas e o procedimento numérico de solução empregado no problema não-linear. O desenvolvimento a seguir foi conduzido com base nos trabalhos de De Borst et al. (2012), Hjelmstad (2005), Vasilescu (2000), e, principalmente, Barrales (2012) e Figueiras (1983).

4.1.1 Equação não-linear de equilíbrio

Considerando-se o princípio dos trabalhos virtuais (PTV), é possível definir as equações Eq. (4.1), (4.2) e (4.3):

$$W_{int} = W_{ext} \quad (4.1)$$

$$W_{int} = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (4.2)$$

$$W_{ext} = \int_V \{\delta U\}^T \{b\} dV + \int_S \{\delta U\}^T \{t\} dS \quad (4.3)$$

onde W_{int} e W_{ext} são os trabalhos virtuais interno e externo. As variáveis V e S se referem, respectivamente, ao volume e à superfície do domínio em estudo, enquanto que, $\{b\}$ e $\{t\}$ simbolizam as forças atuando no corpo e na superfície da estrutura. Por fim, $\{\sigma\}$, $\{\delta\varepsilon\}$ e $\{\delta U\}$ representam os vetores das tensões, deformações virtuais e campo de deslocamentos virtuais.

Discretizando o corpo em elementos finitos, pode-se calcular o vetor das deformações em um ponto $\{\varepsilon\}$ a partir do vetor dos deslocamentos nodais no respectivo elemento $\{d_e\}$ e sua matriz cinemática $[B]_e$, Eq. (4.4). É possível obter uma equação análoga para o vetor transposto das deformações virtuais $\{\delta\varepsilon\}^T$, Eq. (4.5).

$$\{\varepsilon\} = [B']_e \{d_e\} \quad (4.4)$$

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta d_e\}^T [B]_e^T \quad (4.5)$$

Note que, nas equações Eq. (4.4) e (4.5), existe uma diferença entre as matrizes $[B']$ e $[B]$. A primeira matriz representa a relação não-linear entre as deformações e os deslocamentos totais, própria da consideração da NLG do problema, sendo esse parâmetro dependente da configuração da estrutura e recalculado continuamente durante a análise. A matriz $[B]$, por sua vez, relaciona os incrementos de deformação $\{\delta\varepsilon\}$ e deslocamentos $\{\delta d_e\}$, também atualizada ao longo do estudo, podendo ser avaliada através de um processo de linearização, subseção 4.1.3. Em análises lineares, esses dois elementos são coincidentes.

O vetor do campo de deslocamentos $\{U\}$ pode ser obtido com base no vetor $\{d_e\}$ e na matriz das funções de forma do elemento $[\Psi]_e$, Eq. (4.6). A equação equivalente para o vetor transposto do campo de deslocamentos virtuais $\{\delta U\}^T$ é dada por Eq. (4.7).

$$\{U\} = [\Psi]_e \{d_e\} \quad (4.6)$$

$$\{\delta U\}^T = \{\delta d_e\}^T [\Psi]_e^T \quad (4.7)$$

O vetor dos deslocamentos nodais em um elemento $\{d_e\}$ (nas coordenadas locais) é calculado a partir do vetor dos deslocamentos nodais em toda a estrutura $\{d\}$ através das matrizes de incidência $[Z]_e$ e de rotação entre os sistemas local e global $[E]_e$, ou ainda, definindo a matriz de incidência e rotação $[S]_e$, Eq. (4.8). A equação relativa para o vetor transposto dos deslocamentos virtuais nodais no elemento $\{\delta d_e\}^T$ é indicada em Eq. (4.9).

$$\{d_e\} = [E]_e [Z]_e \{d\} = [S]_e \{d\} \quad (4.8)$$

$$\{\delta d_e\}^T = \{\delta d\}^T [Z]_e^T [E]_e^T = \{\delta d\}^T [S]_e^T \quad (4.9)$$

Segundo De Borst et al. (2012), $[Z]_e$ é uma matriz com NGL_e linhas e NGL colunas, onde NGL_e e NGL são, respectivamente, os números de graus de liberdade do elemento, e, de toda a estrutura. Além disso, quando os sistemas de coordenadas global e local do elemento são coincidentes, $[Z]_e$ contém apenas zeros e uns. Foram implementadas duas versões da ferramenta de análise, uma própria para estruturas planas com malha retangulares (subseções 5.1 a 5.4), e outra, mais genérica, para cascas tridimensionais (subseções 5.5 a 5.7). Na primeira situação, a matriz $[E]_e$ pode ser computada como uma matriz identidade de ordem $NGL_e \times NGL_e$. Já no segundo caso, onde existem diferenças pertinentes entre os dois sistemas de coordenadas, essa matriz é avaliada conforme o Anexo A. Usando as equações Eq. (4.4) e (4.8), é possível obter:

$$\{\varepsilon\} = [B']_e [S]_e \{d\} \quad (4.10)$$

Com base nas equações Eq. (4.1) a (4.9), obtêm-se a Eq. (4.11). Note que, como o domínio está sendo discretizado em elementos, as integrais no volume V e na superfície S , agora são representadas como somatórias de integrais no volume V_e e na superfície S_e de cada um dos n_e elementos finitos:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \{\delta d\}^T [S]_e^T [B]_e^T \{\sigma\} dV_e = \\ \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \{\delta d\}^T [S]_e^T [\Psi]_e^T \{b\} dV_e + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{S_e} \{\delta d\}^T [S]_e^T [\Psi]_e^T \{t\} dS_e \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sabendo que, a Eq. (4.11) deve ser válida para qualquer campo de deslocamentos virtuais e que a matriz de incidência $[S]_e$ é constante para cada elemento (pode ser retirado do integrando, mas não das somatórias), obtêm-se:

$$\sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T \{\sigma\} dV_e = \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [\Psi]_e^T \{b\} dV_e + \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{S_e} [\Psi]_e^T \{t\} dS_e \quad (4.12)$$

Definindo o vetor das forças externas aplicadas na estrutura $\{F_{ext}\}$, Eq. (4.13), e, o vetor das forças internas $\{F_{int}(d)\}$, função dos deslocamentos nodais $\{d\}$, Eq. (4.14):

$$\{F_{ext}\} = \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [\Psi]_e^T \{b\} dV_e + \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{S_e} [\Psi]_e^T \{t\} dS_e \quad (4.13)$$

$$\{F_{int}(d)\} = \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T \{\sigma\} dV_e \quad (4.14)$$

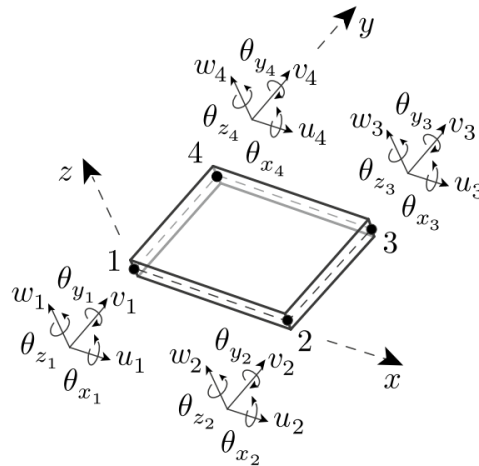
Dessa forma, aplicando as equações Eq. (4.13) e (4.14) em Eq. (4.12), o problema fica resumido ao vetor do desequilíbrio das forças $\{R(d)\}$, também dependente dos deslocamentos nodais do sistema $\{d\}$, o qual é nulo em estruturas equilibradas:

$$\{R(d)\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}(d)\} \quad (4.15)$$

4.1.2 Elemento finito de cascas planas

Nesse trabalho, foi adotado o elemento finito de cascas planas QTFLS (*Quadrilateral Thin Flat Layered Shell Element*), proposto por Rojas, Anderson e Massone (2019), sendo uma combinação do elemento de membrana QLMD (*Quadrilateral Layered Membrane Element with Drilling Degree of Freedom*) (ROJAS; ANDERSON; MASSONE, 2016), e, do elemento de placa DKQ (*Discrete Kirchhoff Quadrilateral*), (BATOZ; TAHAR, 1982) apud (FRAGA, 2015). Dessa forma, são seguidas as hipóteses cinemáticas da teoria de Kirchhoff para placas finas. A Figura 16 representa esse elemento finito, no sistema de coordenadas local ($x-y-z$), juntamente com seus 4 nós e 24 graus de liberdade.

Figura 16 – Elemento finito de cascas planas QTFLS



Fonte: Adaptado de Rojas, Anderson e Massone (2019)

A Equação Eq. (4.16) expande a relação entre o vetor das deformações em um ponto $\{\varepsilon\}$ e o vetor dos deslocamentos nodais do elemento $\{d_e\}$, Eq. (4.4), para a sobreposição das componentes lineares de membrana $\{\varepsilon_m\}$ e placa $\{\varepsilon_b^0\}$ e não-linear de placa $\{\varepsilon_b^L\}$:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_b^0\} + \{\varepsilon_b^L\} = [B_{QMLD}] \{d_{em}\} + z [B_{DKQ}] \{d_{eb}\} + \frac{1}{2} [B_b^L] \{d_{eb}\} \quad (4.16)$$

onde, $[B_{QMLD}]$ e $[B_{DKQ}]$ são as matrizes cinemáticas que representam, respectivamente, a relação linear entre os deslocamentos nodais de membrana $\{d_{em}\}$, Eq. (4.17), e de placa $\{d_{eb}\}$, Eq. (4.18), e as deformações $\{\varepsilon_m\}$ e $\{\varepsilon_b^0\}$. Por outro lado, a matriz $[B_b^L]$ está relacionada com a consideração da não-linearidade geométrica do problema, através do vetor de deformações não-lineares de placa $\{\varepsilon_b^L\}$, discutido na subseção 4.1.3. Por fim, o parâmetro z é a coordenada local, transversal ao plano do elemento, do ponto em estudo.

$$\{d_{em}\} = \left\{ u_1 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_{z2} \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta_{z3} \quad u_4 \quad v_4 \quad \theta_{z4} \right\}^T \quad (4.17)$$

$$\{d_{eb}\} = \left\{ w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \right\}^T \quad (4.18)$$

Segundo Rojas, Anderson e Massone (2019), definir o vetor das deformações $\{\varepsilon\}$ através da separação entre componentes de membrana e placa tem a vantagem de permitir conjuntos de funções de forma distintos, para cada comportamento.

Por se tratarem de elementos conhecidos na comunidade técnica, os desenvolvimentos das matrizes $[B_{Q4}]$ e $[B_{DKQ}]$ podem ser prontamente encontrados em bibliografias apropriadas, (ROJAS; ANDERSON; MASSONE, 2016), (BARRALES, 2012), (FRAGA, 2015). Contudo, com o intuito de contribuir com a plenitude da formulação exposta nesse trabalho, as deduções correspondentes são apresentadas nos Anexos C e D.

4.1.3 Não-linearidade geométrica

A consideração da não-linearidade geométrica da estrutura foi feita através de uma formulação lagrangiana total, onde todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas a configuração inicial da estrutura (FIGUEIRAS, 1983), e a componente não-linear do vetor das deformações (de Green-Lagrange) $\{\varepsilon^L\}$ é dada por:

$$\{\varepsilon^L\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Além disso, são consideradas as hipóteses de Von Karman, para grandes deslocamentos de placas, conforme apresentado por Figueiras (1983):

- A espessura da casca é pequena em relação as demais dimensões;
- A deflexão transversal da casca w é da mesma ordem de grandeza que a espessura;
- As rotações são pequenas, $|\partial w / \partial x| \ll 1$ e $|\partial w / \partial y| \ll 1$;
- Os deslocamentos tangenciais ao plano u e v são pequenos, de forma que, os termos não-lineares associados a esses campos podem ser desprezados;
- Todas as componentes do vetor das deformações são pequenas.

Com base nesse conjunto de hipóteses, os dois primeiros termos de cada elemento do vetor $\{\varepsilon^L\}$ podem ser desprezados, e, o vetor resultante $\{\varepsilon_b^L\}$ é escrito como:

$$\{\varepsilon_b^L\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A_b] \{\theta_b\} \quad (4.20)$$

onde, o vetor $\{\theta_b\}$ com as derivadas de w pode ser avaliado com base no vetor $\{d_{eb}\}$, considerando uma interpolação bilinear dos deslocamentos nodais w_i , no sistema de coordenadas natural $(\xi-\eta)$, de forma análoga à matriz Jacobiana $[J]$, Anexo B, (BATOZ; TAHAR, 1982) apud (ROJAS; ANDERSON; MASSONE, 2019), Eq. (4.21). A matriz de interpolação das derivadas $[G_b]$ é dada por Eq. (4.22).

$$\{\theta_b\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [G_b] \{d_{eb}\} \quad (4.21)$$

$$[G_b] = [J]^{-1} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & -(1-\xi) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ +(1-\eta) & -(1+\xi) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ +(1+\eta) & +(1+\xi) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -(1+\eta) & +(1-\xi) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.22)$$

Com os elementos do vetor $\{\theta_b\}$, é possível montarmos a matriz $[A_b]$. Assim, percebe-se que esses dois elementos dependem dos deslocamentos nodais $\{d_{eb}\}$, e a multiplicação entre eles garante uma relação não-linear entre o vetor deformação $\{\varepsilon_b^L\}$ e os deslocamentos. Calculando a variação de $\{\varepsilon_b^L\}$ em relação a $\{d_{eb}\}$, considerando a regra do produto, obtemos a matriz $[B_b^L]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{\varepsilon_b^L\}}{\partial\{d_{eb}\}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\{d_{eb}\}} ([A_b] \{\theta_b\}) = \frac{1}{2} \frac{\partial [A_b]}{\partial\{d_{eb}\}} \{\theta_b\} + \frac{1}{2} [A_b] \frac{\partial\{\theta_b\}}{\partial\{d_{eb}\}} = \\ \frac{1}{2} [A_b] \frac{\partial\{\theta_b\}}{\partial\{d_{eb}\}} + \frac{1}{2} [A_b] \frac{\partial\{\theta_b\}}{\partial\{d_{eb}\}} &= [A_b] \frac{\partial\{\theta_b\}}{\partial\{d_{eb}\}} = [A_b] [G_b] = [B_b^L] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dessa forma, ao contrário das matrizes $[B_{QLMD}]$, $[B_{DKQ}]$ e $[G_b]$ que são constantes, a matriz $[B_b^L]$, por depender dos deslocamentos nodais, varia e precisa ser atualizada ao longo da análise. Assim, tanto a matriz cinemática incremental $[B]$, quando a matriz cinemática $[B']$, as quais diferem devido ao processo de linearização do problema, podem ser avaliadas como:

$$[B]_{(3 \times 24)} = \begin{bmatrix} [B_{QLMD}]_{(3 \times 12)} & z [B_{DKQ}]_{(3 \times 12)} + [B_b^L]_{(3 \times 12)} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$[B']_{(3 \times 24)} = \begin{bmatrix} [B_{QLMD}]_{(3 \times 12)} & z [B_{DKQ}]_{(3 \times 12)} + \frac{1}{2} [B_b^L]_{(3 \times 12)} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

4.1.4 Matriz de rigidez

Voltando ao vetor do desequilíbrio das forças $\{R(d)\}$, Eq. (4.15), podemos representá-lo através de uma série de Taylor de 1ª ordem, para o incremento de deslocamento $\{\Delta d\}$:

$$\{R(d + \Delta d)\} = \{R(d)\} + \frac{\partial\{R(d)\}}{\partial\{d\}} \{\Delta d\} \quad (4.26)$$

Agora, calculando a derivada parcial de $\{R(d)\}$ e percebendo que apenas $\{F_{int}(d)\}$ é dependente dos deslocamentos nodais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{R(d)\}}{\partial\{d\}} &= \frac{\partial}{\partial\{d\}} (\{F_{ext}\} - \{F_{int}(d)\}) = -\frac{\partial\{F_{int}(d)\}}{\partial\{d\}} = \\ -\frac{\partial}{\partial\{d\}} \left(\sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T \{\sigma\} dV_e \right) &= -\sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} \frac{\partial [B]_e^T}{\partial\{d\}} \{\sigma\} + [B]_e^T \frac{\partial\{\sigma\}}{\partial\{d\}} dV_e \end{aligned} \quad (4.27)$$

Inicialmente, a integral de Eq. (4.27), será avaliada apenas para o segundo componente. Considerando a técnica de derivada por partes, e, definindo a matriz constitutiva tangente para estados planos de tensões $[D]$ obtemos a Eq. (4.28).

$$-\sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T \frac{\partial\{\sigma\}}{\partial\{\varepsilon\}} [B]_e [S]_e dV_e = -\sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T [D] [B]_e [S]_e dV_e \quad (4.28)$$

Vale destacar que, no presente trabalho, optou-se por considerar o conceito de rigidez secante, no lugar de rigidez tangente. Os benefícios e justificativas dessa escolha serão detalhados posteriormente na subseção 4.1.6.

Retirando a matriz $[S]_e$ da integral, podemos definir as componentes da matriz de rigidez global $[K_G^L]$ e do elemento $[k_e^L]$ para grandes deslocamentos:

$$[k_e^L] = \int_{V_e} [B]_e^T [D] [B]_e dV_e \quad (4.29)$$

$$[K_G^L] = \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T [k_e^L] [S]_e \quad (4.30)$$

Agora, avaliando o primeiro integrando de Eq. (4.27), considerando Eq. (4.23), e, percebendo que apenas a parcela não-linear da matriz cinemática incremental $[B]$ apresenta derivada não nula, e que a matriz $[G_b]$ é constante:

$$\begin{aligned} - \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} \frac{\partial [B]_e^T}{\partial \{d\}} \{\sigma\} dV_e &= - \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} \frac{\partial [B_b^L]_e^T}{\partial \{d\}} \{\sigma\} dV_e = \\ - \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} \frac{\partial [G_b]_e^T [A_b]_e^T}{\partial \{d\}} \{\sigma\} dV_e &= - \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [G_b]_e^T \frac{\partial [A_b]_e^T}{\partial \{d\}} \{\sigma\} dV_e \end{aligned} \quad (4.31)$$

Contudo, note que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [A_b]_e^T}{\partial \{d\}} \{\sigma\} &= \frac{\partial}{\partial \{d\}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \\ \frac{\partial}{\partial \{d\}} \left(\begin{bmatrix} \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \{d\}} \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \right) = [\sigma] \frac{\partial \{\theta_b\}}{\partial \{d\}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dessa forma, conhecendo a matriz das tensões $[\sigma]$ e suas componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} , e, novamente utilizando derivação por partes, é possível obter:

$$- \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [G_b]_e^T [\sigma] \frac{\partial \{\theta_b\}}{\partial \{d\}} dV_e = - \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [G_b]_e^T [\sigma] \frac{\partial \{\theta_b\}}{\partial \{d\}} [S]_e dV_e \quad (4.33)$$

Retirando a matriz $[S]_e$ da integral, e, considerando Eq. (4.21), definimos as componentes da matriz de rigidez global $[K_G^\sigma]$ e do elemento $[k_e^\sigma]$ relativas as tensões atuantes na estrutura:

$$[k_e^\sigma] = \int_{V_e} [G_b]_e^T [\sigma] [G_b]_e dV_e \quad (4.34)$$

$$[K_G^\sigma] = \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T [k_e^\sigma] [S]_e \quad (4.35)$$

Assim, a matriz de rigidez global total é obtida como:

$$[K_G] = [K_G^L] + [K_G^\sigma] \quad (4.36)$$

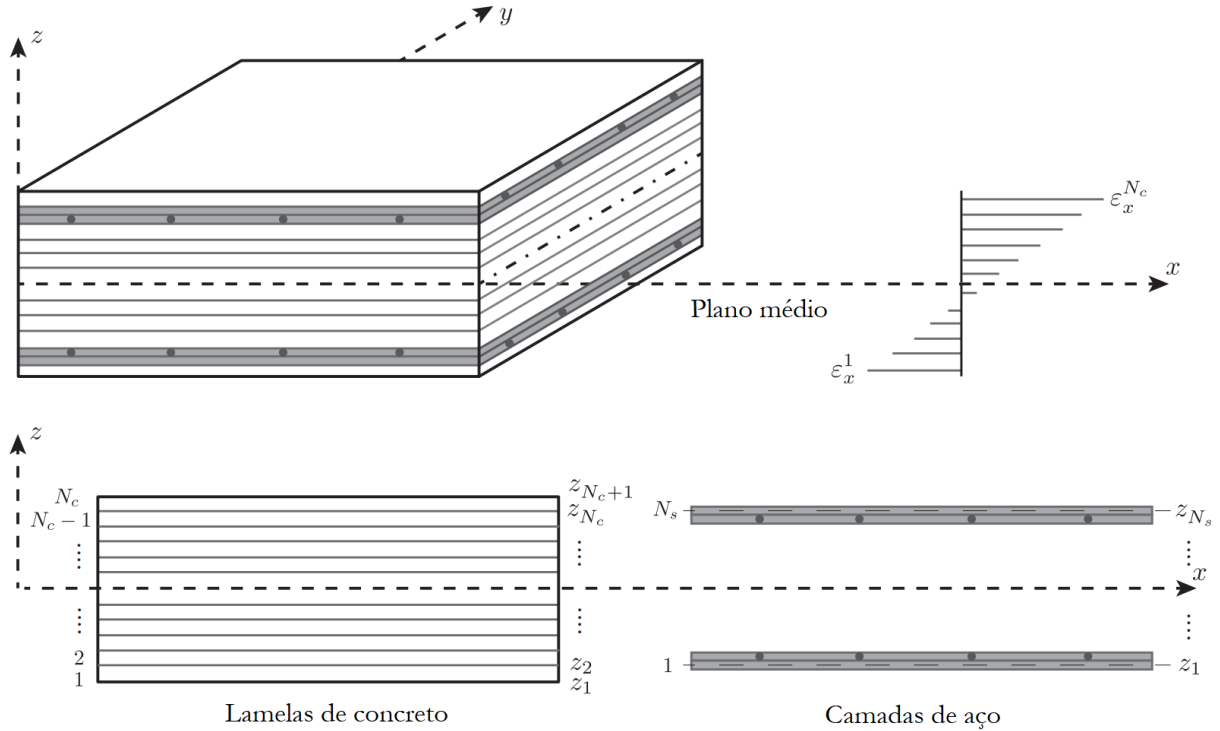
As integrais das equações Eq. (4.29) e (4.34), no volume do elemento V_e são realizadas numericamente, no plano do mesmo, pela quadratura de Gauss, utilizando 4 pontos, (VAZ, 2011), e, ao longo da espessura da casca, devido a sua discretização em n_c lamelas de concreto e n_s camadas de aço, através de uma abordagem discreta baseada nos trabalhos de Vasilescu (2000), Zhang, Bradford e Gilbert (2007a) e Zhang, Bradford e Gilbert (2007b) apud Barrales (2012), a qual considera a somatória das contribuições individuais de cada lamela, Figura 17.

Dessa forma, tendo em mente Eq. (4.24), a equação Eq. (4.29) é avaliada como:

$$[k_e^L] = \sum_{k=1}^{n_k} W_k \det([J]_{e,k}) \left(\sum_{i=1}^{n_c} \begin{bmatrix} [k_{c.mm}^L] & [k_{c.mb}^L] \\ [k_{c.bm}^L] & [k_{c.bb}^L] \end{bmatrix}_{e,k,i} + \sum_{j=1}^{n_s} \begin{bmatrix} [k_{s.mm}^L] & [k_{s.mb}^L] \\ [k_{s.bm}^L] & [k_{s.bb}^L] \end{bmatrix}_{e,k,j} \right) \quad (4.37)$$

Os parâmetros W_k e $\det([J])$ representam, respectivamente, os pesos de integração dos n_k pontos de Gauss, e, o determinante da matriz Jacobiana correspondente. As

Figura 17 – Lamelas de concreto e camadas de aço



Fonte: Adaptado de Barrales (2012)

contribuições do concreto para a matriz $[k_e^L]$ do elemento e , que devem ser avaliadas para cada ponto de Gauss k e cada lamela de concreto i , são dadas por:

$$[k_{c.mm}^L] = z_{c1i} [B_{QLMD}]_k^T [D_c]_{k,i} [B_{QLMD}]_k \quad (4.38)$$

$$[k_{c.mb}^L] = z_{c2i} [B_{QLMD}]_k^T [D_c]_{k,i} [B_{DKQ}]_k + z_{c1i} [B_{QLMD}]_k^T [D_c]_{k,i} [B_b^L]_k \quad (4.39)$$

$$[k_{c.bm}^L] = z_{c2i} [B_{DKQ}]_k^T [D_c]_{k,i} [B_{QLMD}]_k + z_{c1i} [B_b^L]_i^T [D_c]_{k,i} [B_{QLMD}]_k \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} [k_{c.bb}^L] &= z_{c3i} [B_{DKQ}]_k^T [D_c]_{k,i} [B_{DKQ}]_k + z_{c2i} [B_{DKQ}]_k^T [D_c]_{k,i} [B_b^L]_k \\ &+ z_{c2i} [B_b^L]_k^T [D_c]_{k,i} [B_{DKQ}]_k + z_{c1i} [B_b^L]_k^T [D_c]_{k,i} [B_b^L]_k \end{aligned} \quad (4.41)$$

O parâmetro $[D_c]_{k,i}$ é a matriz constitutiva secante da lamela de concreto i na posição do pontos de Gauss k , discutida subseção 4.2.8. Os termos z_{c1i} , z_{c2i} e z_{c3i} surgem da integração numérica dos parâmetros z da matriz $[B_{DKQ}]$, que compõe $[B]$, e são calculados de forma discreta, para cada camada de concreto i , como mostram as equações Eq. (4.42) a (4.44), onde z_{ci}^{top} e z_{ci}^{bot} representam, respectivamente, as coordenadas do topo e da base da lamela em análise.

$$z_{c1i} = z_{ci}^{top} - z_{ci}^{bot} \quad (4.42)$$

$$z_{c2i} = \frac{1}{2} [(z_{ci}^{top})^2 - (z_{ci}^{bot})^2] \quad (4.43)$$

$$z_{c3i} = \frac{1}{3} [(z_{ci}^{top})^3 - (z_{ci}^{bot})^3] \quad (4.44)$$

As contribuições do aço para a matriz $[k_e^L]$, que devem ser avaliadas para cada ponto de Gauss k e cada camada de aço j , são dadas por:

$$[k_{s.mm}^L] = \rho_{sj} t_{sj} [B_{QLMD}]_k^T [D_s]_{k,j} [B_{QLMD}]_k \quad (4.45)$$

$$[k_{s.mb}^L] = \rho_{sj} t_{sj} z_{sj} [B_{QLMD}]_k^T [D_s]_{k,j} [B_{DKQ}]_k + \rho_{sj} t_{sj} [B_{QLMD}]_k^T [D_s]_{k,j} [B_b^L]_k \quad (4.46)$$

$$[k_{s.bm}^L] = \rho_{sj} t_{sj} z_{sj} [B_{DKQ}]_k^T [D_s]_{k,j} [B_{QLMD}]_k + \rho_{sj} t_{sj} [B_b^L]_k^T [D_s]_{k,j} [B_{QLMD}]_k \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} [k_{s.bb}^L] &= \rho_{sj} t_{sj} z_{sj}^2 [B_{DKQ}]_k^T [D_s]_{k,j} [B_{DKQ}]_k + \rho_{sj} t_{sj} z_{sj} [B_{DKQ}]_k^T [D_s]_{k,j} [B_b^L]_k \\ &+ \rho_{sj} t_{sj} z_{sj} [B_b^L]_k^T [D_s]_{k,j} [B_{DKQ}]_k + \rho_{sj} t_{sj} [B_b^L]_k^T [D_s]_{k,j} [B_b^L]_k \end{aligned} \quad (4.48)$$

O parâmetro $[D_s]_{k,j}$ é a matriz constitutiva secante da camada de aço j na posição do pontos de Gauss k , também discutida na seção 4.2.8. A variável z_{sj} corresponde a posição do eixo da camada j de aço, a qual tem espessura t_{sj} e taxa de armadura ρ_{sj} .

De maneira análoga, a matriz $[k_e^\sigma]$, Eq. (4.34), é calculada numericamente como:

$$[k_e^\sigma] = \begin{bmatrix} [0]_{(12 \times 12)} & [0]_{(12 \times 12)} \\ [0]_{(12 \times 12)} & \sum_{k=1}^{n_k} W_k \det([J]_{e,k}) [G_b]_k^T [\sigma_{cs}]_k [G_b]_k \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$[\sigma_{cs}]_k = \sum_{i=1}^{n_c} \left(z_{c1i} \begin{bmatrix} \sigma_{cx} & \tau_{cxy} \\ \tau_{cxy} & \sigma_{cy} \end{bmatrix}_{k,i} \right) + \sum_{j=1}^{n_s} \left(\rho_{sj} t_{sj} \begin{bmatrix} \sigma_{sx} & \tau_{sxy} \\ \tau_{sxy} & \sigma_{sy} \end{bmatrix}_{k,j} \right) \quad (4.50)$$

onde, σ_{cx} , σ_{cy} e τ_{cxy} , e, σ_{sx} , σ_{sy} e τ_{sxy} representam, respectivamente, as tensões atuantes nas lamelas de concreto e camadas de aço, no sistema local. Note que a matriz $[k_e^\sigma]$ contribue para a rigidez apenas na região associada aos graus de liberdade de placas, consequência da consideração de deformações não-lineares unicamente de placa $\{\varepsilon_b^L\}$.

4.1.5 Vetor das forças internas

Avaliando a integral do vetor das forças internas $\{F_{int}\}$, Eq. (4.14), onde σ_x , σ_y e τ_{xy} descrevem as componentes cartesianas do vetor das tensões $\{\sigma\}$:

$$\{F_{int}\} = \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T \{\sigma\} dV_e = \sum_{i=1}^{n_e} [S]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dV_e \quad (4.51)$$

Resolvendo essa integral numericamente, obtemos:

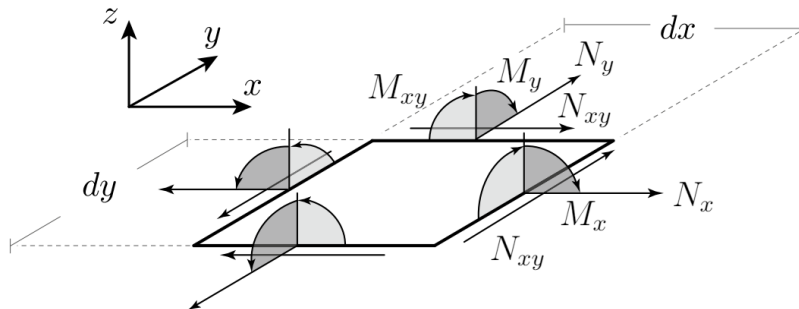
$$\{F_{int}\} = \sum_{e=1}^{n_e} [S]_e^T \left(\sum_{k=1}^{n_k} W_k \det([J]_{e,k}) \left(\sum_{i=1}^{n_c} [B_c]_{k,i}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{cx} \\ \sigma_{cy} \\ \tau_{cxy} \end{Bmatrix}_{k,i} + \sum_{j=1}^{n_s} [B_s]_{k,j}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{sx} \\ \sigma_{sy} \\ \tau_{sxy} \end{Bmatrix}_{k,j} \right) \right) \quad (4.52)$$

onde, as matrizes $[B_c]_{k,i}$ e $[B_s]_{k,j}$ podem ser calculadas como:

$$[B_c]_{k,i} = \begin{bmatrix} z_{c1i} [B_{QLMD}]_k & z_{c2i} [B_{DKQ}]_k + z_{c1i} [B_b^L]_k \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$[B_s]_{k,j} = \begin{bmatrix} \rho_{sj} t_{sj} [B_{QLMD}]_k & \rho_{sj} t_{sj} z_{sj} [B_{DKQ}]_k + \rho_{sj} t_{sj} [B_b^L]_k \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Figura 18 – Esforços internos no elemento de casca



Fonte: Adaptado de Rojas, Anderson e Massone (2019)

Pode-se definir o vetor dos esforços internos, em um ponto de Gauss $\{M\}_k$, onde, suas componentes são: os esforços normais N_x e N_y , o esforço cortante N_{xy} , os momentos fletores M_x e M_y , e, o momento torsor M_{xy} , Figura 18.

$$\{M\}_k = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_k = \sum_{i=1}^{n_s} \begin{Bmatrix} \sigma_{cx}(z_{ci}^{top} - z_{ci}^{bot}) \\ \sigma_{cy}(z_{ci}^{top} - z_{ci}^{bot}) \\ \tau_{cxy}(z_{ci}^{top} - z_{ci}^{bot}) \\ \frac{1}{2}\sigma_{cx}[(z_{ci}^{top})^2 - (z_{ci}^{bot})^2] \\ \frac{1}{2}\sigma_{cy}[(z_{ci}^{top})^2 - (z_{ci}^{bot})^2] \\ \frac{1}{2}\tau_{cxy}[(z_{ci}^{top})^2 - (z_{ci}^{bot})^2] \end{Bmatrix}_{k,i} + \sum_{j=1}^{n_c} \begin{Bmatrix} \rho_{sj}t_{sj}\sigma_{sx} \\ \rho_{sj}t_{sj}\sigma_{sy} \\ \rho_{sj}t_{sj}\tau_{sxy} \\ \rho_{sj}t_{sj}z_{sj}\sigma_{sx} \\ \rho_{sj}t_{sj}z_{sj}\sigma_{sy} \\ \rho_{sj}t_{sj}z_{sj}\tau_{sy} \end{Bmatrix}_{k,j} \quad (4.55)$$

4.1.6 Procedimento de solução do problema não-linear

Uma vez definidos a matriz de rigidez $[K_G]$ e o vetor das forças internas $\{F_{int}\}$, combinando as equações Eq. (4.15), (4.27) a (4.30) e (4.33) a (4.36), obtemos:

$$\{R(d + \Delta d)\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}(d)\} - [K_G] \{\Delta d\} \quad (4.56)$$

Visando anular o novo vetor das forças desequilibradas $\{R(d + \Delta d)\}$, o problema não-linear expresso na equação Eq. (4.56) pode ser resolvido numericamente, através de iterações sucessivas, usando o método de Newton-Raphson:

$$\{\Delta d\}_{n+1} = [K_G]_n^{-1} (\{F_{ext}\} - \{F_{int}(d_n)\}) \quad (4.57)$$

$$\{d\}_{n+1} = \{d\}_n + \{\Delta d\}_{n+1} \quad (4.58)$$

O critério de convergência adotado no presente estudo, para esse processo iterativo, está ilustrado na equação Eq. (4.59), onde: $erro_{n+1}$ é o parâmetro auxiliar do critério de convergência, avaliado na iteração $n + 1$, e, tol é a tolerância admitida.

$$erro_{n+1} = \frac{\|\{\Delta d\}_{n+1}\|}{\|\{d\}_{n+1}\|} \leq tol \quad (4.59)$$

Segundo De Borst et al. (2012), durante a análise do problema, é importante aplicar o carregamento externo na estrutura $\{F_{ext}\}$ de forma incremental, caso contrário, devido ao comportamento não-linear do material e características numéricas do procedimento de solução, em passos de carga muito grandes, é possível encontrar problemas sérios de convergência, ou ainda, respostas inapropriadas. Dessa forma, o procedimento de solução adotado nesse trabalho é dito iterativo-incremental, utilizando uma abordagem de controle das forças (*Load-Control*), Figura 19.

Figura 19 – Pseudocódigo do procedimento de solução do problema não-linear

Algoritmo 1:

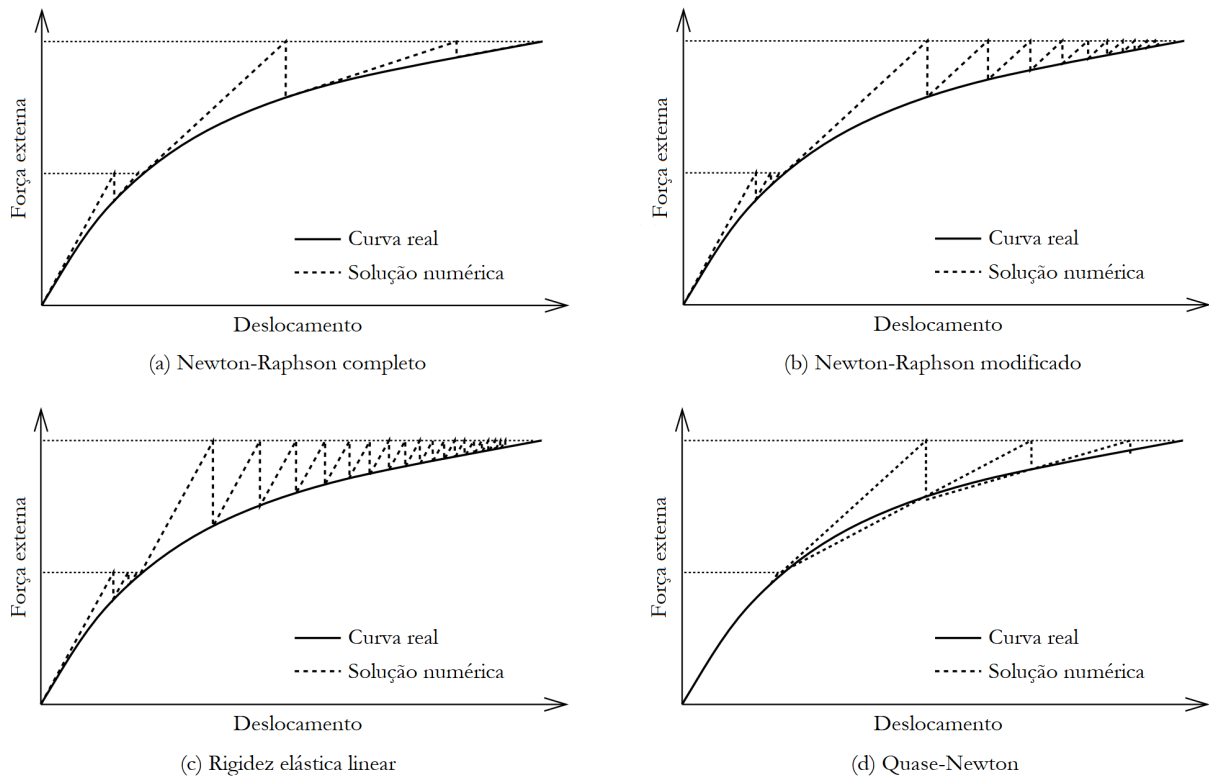
Entrada: Malha de elementos finitos, propriedades dos materiais, condições de contorno, carregamentos aplicados e critérios da análise.

- 1 Inicializar o vetor dos deslocamentos nodais: $\{d\} \leftarrow \{0\}$;
- 2 Inicializar os vetores das forças internas e externas: $\{F_{int}\} \leftarrow \{0\}$ e $\{F_{ext}\} \leftarrow \{0\}$;
- 3 **para** todos os elementos, e , todos os k pontos de Gauss **faça**
- 4 **para** todas as i lamelas de concreto **faça**
- 5 Inicializar a matriz constitutiva: $[D_c]_{k,i} \leftarrow [D_{linear}]$, Eq. (4.111);
- 6 **fim**
- 7 **para** todas as j camadas de aço **faça**
- 8 Inicializar a matriz constitutiva: $[D_s]_{k,j} \leftarrow [0]_{3 \times 3}$, subseção 4.2.8;
- 9 **fim**
- 10 **fim**
- 11 **repita**
- 12 Incrementar o vetor das forças externas $\{F_{ext}\}$;
- 13 Inicializar do parâmetro do critério de convergência: $erro \leftarrow 1$;
- 14 **enquanto** $erro > tol$ **faça**
- 15 **para** todos os e elementos **faça**
- 16 **para** todos os k pontos de Gauss **faça**
- 17 Calcular a matriz Jacobiana $[J]_{e,k}$, Anexo B;
- 18 Calcular as contribuições para a matriz $[k_e^L]$, Eq. (4.38) a (4.48);
- 19 Calcular a matriz das tensões $[\sigma_{cs}]$, Eq. (4.50);
- 20 **fim**
- 21 Calcular as matrizes $[k_e^L]$ e $[k_e^\sigma]$, Eq. (4.37) e (4.49);
- 22 **fim**
- 23 Montagem da matriz de rigidez global $[K_G]$, Eq. (4.30), (4.35) e (4.36);
- 24 Resolução do sistema linear de equações, Eq. (4.57);
- 25 Cálculo do vetor dos deslocamentos totais $\{d\}$, Eq. (4.58);
- 26 **para** todos os e elementos **faça**
- 27 **para** todos os k pontos de Gauss **faça**
- 28 **para** todas as lamelas de concreto **faça**
- 29 Recalcular a matriz $[D_c]$ e o vetor $\{\sigma_c\}$, Figura 28;
- 30 **fim**
- 31 **para** todas as camadas de aço **faça**
- 32 Recalcular a matriz $[D_s]$ e o vetor $\{\sigma_s\}$, Figura 29;
- 33 **fim**
- 34 Calcular o vetor dos esforços internos $\{M\}_k$, Eq. (4.55);
- 35 **fim**
- 36 **fim**
- 37 Calcular o novo vetor das forças internas $\{F_{int}\}$, Eq. (4.52);
- 38 Calcular o parâmetro auxiliar do critério de convergência: $erro$;
- 39 **fim**
- 40 Salvar solução do processo iterativo;
- 41 **até** a carga máxima ser atingida;

Ainda segundo De Borst et al. (2012), uma vez que o procedimento de solução tenda a atingir uma configuração de equilíbrio, ou seja, satisfazer a equação Eq. (4.15), na maioria dos casos, a matriz de rigidez adotada no processo iterativo é uma questão importante apenas para a eficiência computacional. Tendo isso em mente, e, sabendo do custo computacional inerente da avaliação da matriz de rigidez tangente $[K_G]$, em cada iteração, de cada passo de carregamento (método de Newton-Raphson completo), Figura 20(a), com o intuito de apresentar opções a esse problema, outras alternativas foram desenvolvidas, como:

- O método de Newton-Raphson modificado, Figura 20(b), onde a matriz de rigidez tangente é avaliada apenas na primeira iteração de cada passo de carga;
- O método da rigidez elástica linear, Figura 20(c), que, como o próprio nome já diz, utiliza a matriz de rigidez elástica linear da estrutura para todos os passos, e, conforme o avanço da análise, pode se tornar uma aproximação grosseira da rigidez tangente e necessitar de muito mais iterações para atingir a convergência, e;
- Os métodos Quase-Newton, Figura 20(d), os quais, aproximam a rigidez tangente através de uma abordagem por rigidez secante.

Figura 20 – Método de Newton-Raphson e variantes



Fonte: Adaptado de De Borst et al. (2012)

De acordo com Goudarzi (2009), métodos baseados na rigidez tangente tendem a apresentar uma melhor taxa de convergência em comparação com os de rigidez secante. Entretanto, a maior estabilidade numérica, que muitas vezes é vista na utilização da rigidez secante, torna essa uma opção atrativa, principalmente em problema onde a velocidade de convergência não é um ponto dominante na construção do algoritmo a ser utilizado.

Dessa forma, no presente estudo, optou-se por utilizar uma estratégia envolvendo a rigidez secante, ao contrário do apresentado por Barrales (2012), que adotou a rigidez tangente. Assim, as matrizes constitutivas das lamelas de concreto e camadas de aço, $[D_c]_i$ e $[D_s]_j$, são calculadas utilizando a rigidez secante dos materiais, conforme apresentado na subseção 4.2.8.

4.2 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

Essa seção é dedicada a apresentar, de forma concisa, os modelos constitutivos implementados no programa computacional desenvolvido, visto que trata-se de formulações conhecidas e amplamente discutidas na literatura. Maiores detalhes desses e outros modelos utilizados na análise de estruturas de concreto armado podem ser encontrados em Wong, Trommels e Vecchio (2012). Além disso, também é discutido nessa seção o cálculo das matrizes constitutivas secantes das lamelas de concreto $[D_c]$ e das camadas de aço $[D_s]$.

4.2.1 Concreto em compressão

Para a curva tensão-deformação do concreto submetido à compressão, optou-se por empregar a conhecida parábola de Hognestad, Eq. (4.60), tanto para o comportamento pré-pico como o pós-pico, Figura 21:

$$\sigma_{cc}(\varepsilon_{cc}) = \begin{cases} -f_p \left[2 \left(\frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_p} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_p} \right)^2 \right], & \text{se } |\varepsilon_{cc}| < 2|\varepsilon_p| \\ 0, & \text{se } |\varepsilon_{cc}| \geq 2|\varepsilon_p| \end{cases} \quad (4.60)$$

onde f_p e ε_p representam a resistência e a deformação de compressão de pico, do concreto fissurado, enquanto que, as variáveis σ_{cc} e ε_{cc} são, respectivamente, a tensão e a deformação médias principais de compressão no material.

No presente estudo, de forma semelhante ao que é feito no VecTor 4 (subseção 3.2), o concreto fissurado, apesar da sua evidente natureza discreta, é idealizado como um material homogêneo ortotrópico, através do conceito de tensão e deformações média, avaliadas em regiões contendo várias fissuras.

De acordo com a convenção de sinais adotada, tensões e deformações relativas à tração são consideradas positivas. Dessa forma, na equação Eq. (4.60), os parâmetros σ_{cc} , ε_{cc} e ε_p são quantidades negativas.

4.2.2 Amolecimento do concreto em compressão

O concreto tende a sofrer uma perda de resistência e rigidez devido a existência de tração no sentido transversal. Esse comportamento é conhecido como amolecimento à compressão, e, foi modelado no presente estudo através do coeficiente de amolecimento β_d , empregado no cálculo de f_p e ε_p (amolecimento da resistência e da deformação), Figura 21:

$$f_p = -\beta_d f_c \quad (4.61)$$

$$\varepsilon_p = \beta_d \varepsilon_0 \quad (4.62)$$

onde, f_c e ε_0 são a resistência à compressão de um corpo de prova cilindro (aos 28 dias), e, a respectiva deformação de pico. Da mesma forma que ε_p , por se tratar de um parâmetro relacionado à compressão, ε_0 é considerado, no presente estudo, como uma grandeza negativa.

No cálculo do coeficiente de amolecimento β_d utilizou-se o modelo denominado Vecchio 1992-A (e1/e2-Form), ilustrado abaixo:

$$\beta_d = \frac{1}{1 + C_s C_d} \leq 1 \quad (4.63)$$

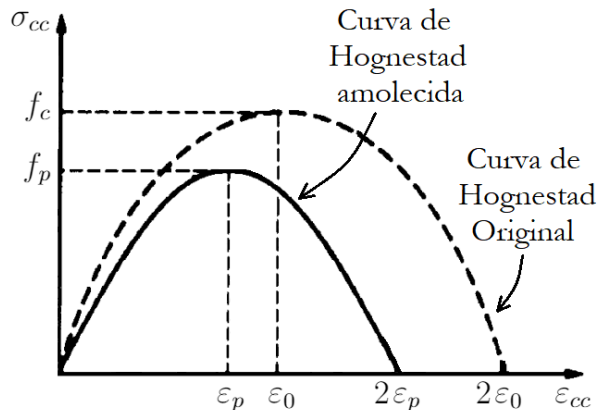
$$C_d = \begin{cases} 0, & \text{se } r < 0.28 \\ 0.35(r - 0.28)^{0.80}, & \text{se } r \geq 0.28 \end{cases} \quad (4.64)$$

$$r = \frac{-\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c2}} \leq 400 \quad (4.65)$$

$$C_s = \begin{cases} 1, & \text{sem deformações de escorregamento} \\ 0.55, & \text{com deformações de escorregamento} \end{cases} \quad (4.66)$$

onde, os fatores C_d e C_s representam, respectivamente, a influência do coeficiente r (relação entre as deformações principais de tração ε_{c1} e compressão ε_{c2} no concreto, Figura 24), e, a

Figura 21 – Modelo constitutivo do concreto em compressão



Fonte: Adaptado de Vecchio (1992)

consideração, na análise, das deformações de escorregamento nas fissuras. Segundo Vecchio (2000), as deformações de escorregamento, por si só, já induzem um efeito de amolecimento no comportamento do concreto, e, dessa forma, menos diminuição de rigidez pode ser atribuída à tração no sentido transversal. Na subseção 4.2.7 é feita uma explanação sobre o conceito de deformações de escorregamento, e, a teoria implementada nesse trabalho.

4.2.3 Concreto em tração

Para o modelo constitutivo do concreto submetido à tração, considerou-se uma curva tensão-deformação formada por dois regimes distintos: pré-fissuração e pós-fissuração. Segundo Wong, Trommels e Vecchio (2012), após a fissuração, o concreto armado não apresenta mais o comportamento linear-elástico que caracteriza o regime pré-fissuração, e, as tensões de tração do concreto tendem a zero, na superfície das fissuras, enquanto que, podem apresentar valores consideráveis, na região entre fissuras, devido a interação com a armação. Esse fenômeno é denominado enrijecimento à tração.

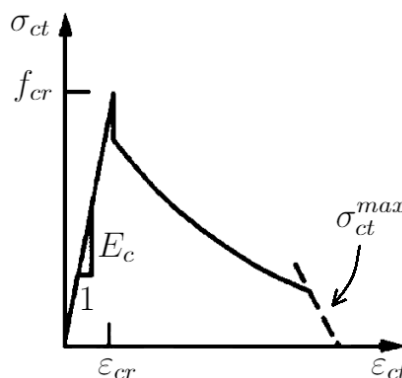
Dessa forma, a curva adotada para o concreto em tração consiste em uma combinação entre uma resposta elástico-linear (pré-fissuração) e o chamado modelo de enrijecimento à tração Modified Bentz 2003 (pós-fissuração), equação Eq. (4.67) e Figura 22.

$$\sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}) = \begin{cases} E_c \varepsilon_{ct}, & \text{se } \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{cr} \text{ (pré-fissuração)} \\ \frac{f_{cr}}{1 + c_t \varepsilon_{ct}}, & \text{se } \varepsilon_{ct} \geq \varepsilon_{cr} \text{ (pós-fissuração)} \end{cases} \quad (4.67)$$

onde, as variáveis σ_{ct} e ε_{ct} são a tensão e a deformação médias principais de tração no concreto. O módulo de elasticidade do concreto E_c estabelece a relação entre a tensão f_{cr} e a deformação ε_{cr} de fissuração. A tensão f_{cr} pode ser estimada como $\sqrt{f_c}/3$, enquanto que, o módulo de elasticidade E_c , conforme a equação Eq. (4.68).

$$E_c = \frac{2f_c}{|\varepsilon_0|} \quad (4.68)$$

Figura 22 – Modelo constitutivo do concreto em tração



Fonte: Adaptado de Vecchio (2000)

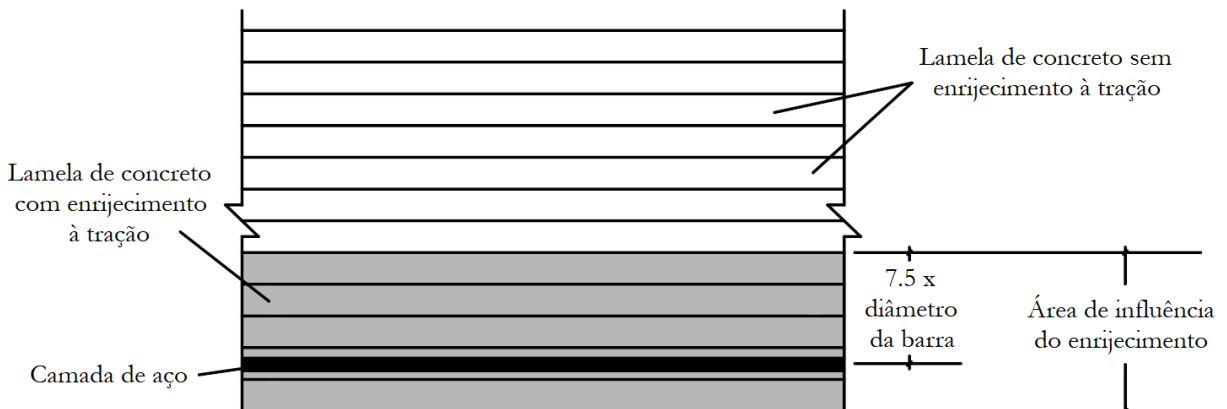
O coeficiente c_t retrata a influência da armadura no enrijecimento à tração do concreto, e, para o escopo desse estudo, pode ser obtido com base na equação Eq. (4.69):

$$c_t = \frac{2.2}{4 \frac{\rho_x}{\phi_x} |\cos(\theta - \alpha_x)| + 4 \frac{\rho_y}{\phi_y} |\cos(\theta - \alpha_y)|} \quad (4.69)$$

onde, ρ_x e ρ_y representam as taxas de aço, em x e y , enquanto que, ϕ_x e ϕ_y são as respectivas bitolas dessas armações. Os ângulos θ , α_x e α_y ilustram a inclinação da direção principal apropriada (1 ou 2), e, as orientações das armaduras ($\alpha_x = 0^\circ$ e $\alpha_y = 90^\circ$). O cálculo da direção principal θ será demonstrada na subseção 4.2.8, contudo, é importante frisar nesse momento que, caso a estrutura analisada estiver submetida a um estado de tração biaxial, o modelo constitutivo de tração no concreto precisará ser aplicado, separadamente, nas duas direções, o que resulta em dois valores distintos de θ , um para cada situação: θ_1 (ângulo entre os eixos x e principal 1) e θ_2 (ângulo entre os eixos x e principal 2). Fazendo os cálculos trigonométricos necessários, e, valendo-se dos módulos aplicados nas funções cossenos da equação Eq. (4.69), é possível definir esses ângulos como: $\theta_1 = \theta$ e $\theta_2 = \theta - 90^\circ$.

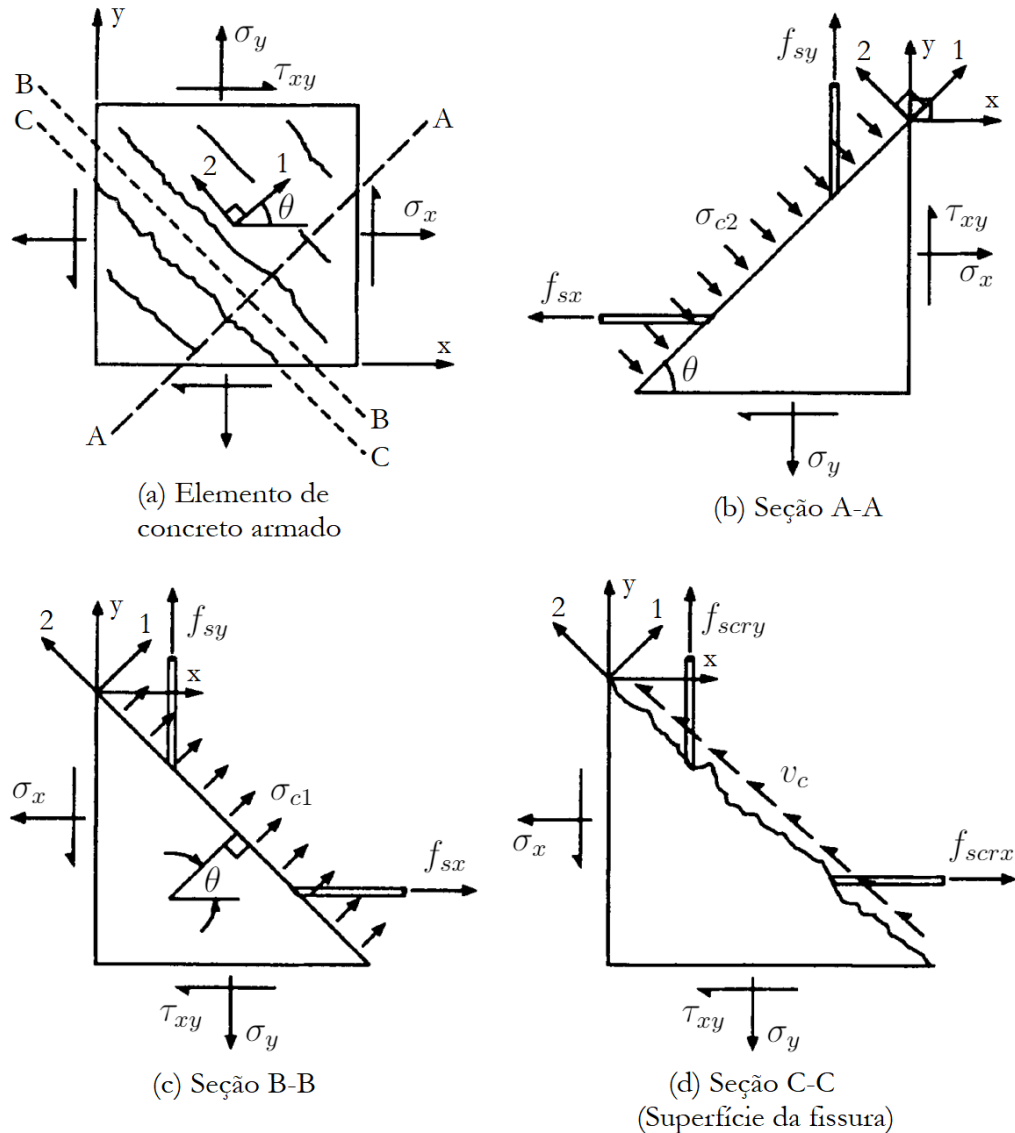
Quando as propriedades da armadura são atribuídas diretamente no elemento finito, como fazem alguns programas de análise de membranas de concreto armado (SILVA, 2019), por exemplo, a aplicação da equação Eq. (4.69) é imediata. Contudo, como, no presente estudo, a espessura do elemento de casca é discretizada, e, sabendo que o modelo constitutivo é aplicado separadamente em cada lamela de concreto, surge a questão no que diz respeito a quais parâmetros da armadura devem ser considerados em cada lamela. Hrynyk (2013) apresentou uma solução para esse problema, com base no CEB-FIP (1990), que consiste em definir uma área de influência da barra no enrijecimento à tração de uma lamela de concreto igual a 7.5 vezes a sua bitola, Figura 23. Dessa forma, as camadas de concreto localizadas dentro da área de influência de uma barra são consideradas enrijecidas por essa armadura. Todavia, é importante notar que essa avaliação deve ser feita para

Figura 23 – Área de influência de uma barra no enrijecimento à tração



Fonte: Adaptado de Hrynyk (2013)

Figura 24 – Equilíbrio em um elemento de concreto armado



Fonte: Adaptado de Vecchio (2000)

todas as combinações lamela-camada, podendo uma lamela de concreto ser enrijecida por mais de uma camada de aço (ou mesmo nenhuma). Portanto, é possível perceber que a consideração desse critério na modelagem do enrijecimento à tração, ao longo da espessura de concreto, tende a obter uma resposta mais realista da estrutura.

Por fim, segundo Vecchio (2000), a magnitude da tensão principal média de tração σ_{ct} deve ser limitada pela reserva de capacidade resistente da armadura, conforme será discutido a seguir. A Figura 24 detalha o equilíbrio de um elemento bidimensional de concreto armado sujeito a um estado plano de tensões, onde as tensões no concreto no sistema principal (1-2) podem ser obtidas utilizando os modelos constitutivos apresentados para compressão e tração: $\sigma_{c2} = \sigma_{cc}(\varepsilon_{c2})$ e $\sigma_{c1} = \sigma_{ct}(\varepsilon_{c1})$. A necessidade de limitar a tensão principal de tração no concreto pode ser observada comparando-se as Figuras 24(c) (equilíbrio fora da fissura) e 24(d) (equilíbrio na fissura). Na primeira situação, as solitações

externas (σ_x , σ_y e τ_{xy}) são equilibradas (na direção principal 1) pelas tensões de tração no concreto (σ_{c1}) e nos aços (f_{sx} e f_{sy}), (subseção 4.2.4), enquanto que, na fissura, as mesmas solicitações são equilibradas apenas pelas tensões nos aços nessa região (f_{scrx} e f_{scry}), consequentemente, maiores que f_{sx} e f_{sy} . Para que os dois casos sejam equivalentes, e, após algumas transformações de coordenadas do sistema cartesiano $x - y$ para o principal 1 – 2, é possível concluir que:

$$\sigma_{c1} = \rho_x(f_{scrx} - f_{sx})\cos(\theta - \alpha_x)^2 + \rho_y(f_{scry} - f_{sy})\cos(\theta - \alpha_y)^2 \quad (4.70)$$

Considerando que, no máximo, as tensões nos aços, na região das fissuras, podem ser iguais às respectivas tensões de escoamento do material (f_{yx} e f_{yy}), como ocorre quando consideramos um modelo constitutivo elasto-plástico para o aço, e, estendendo para qualquer direção obtemos a expressão da tensão principal de tração máxima (σ_{ct}^{max}):

$$\sigma_{ct} \leq \sigma_{ct}^{max} = \rho_x(f_{yx} - f_{sx})\cos(\theta - \alpha_x)^2 + \rho_y(f_{yy} - f_{sy})\cos(\theta - \alpha_y)^2 \quad (4.71)$$

Contudo, vale frisar que, caso seja utilizada uma curva tensão-deformação mais sofisticada para o aço, que retrate um ganho de resistência pós-escoamento (endurecimento), a consideração da tensão no aço na região da fissura igual à tensão de escoamento, como faz a equação Eq. (4.71), apesar de simplificar bastante esse cálculo, por evitar não-linearidades adicionais na avaliação de f_{scrx} e f_{scry} , estima σ_{ct}^{max} de forma conservadora. As tensões f_{scrx} e f_{scry} são avaliadas na subseção 4.2.7, onde mais detalhes desse problema são apresentados.

Além disso, de forma semelhante ao desenvolvido para σ_{c1} , Eq. (4.70), é possível obter a tensão de cisalhamento local na superfície da fissura v_c com base na equação Eq. (4.72), Figura 24, parâmetro esse que será empregado no cálculo das deformações de escorregamento na subseção 4.2.7.

$$v_c = \rho_x(f_{scrx} - f_{sx})\cos(\theta - \alpha_x)\sin(\theta - \alpha_x) + \rho_y(f_{scry} - f_{sy})\cos(\theta - \alpha_y)\sin(\theta - \alpha_y) \quad (4.72)$$

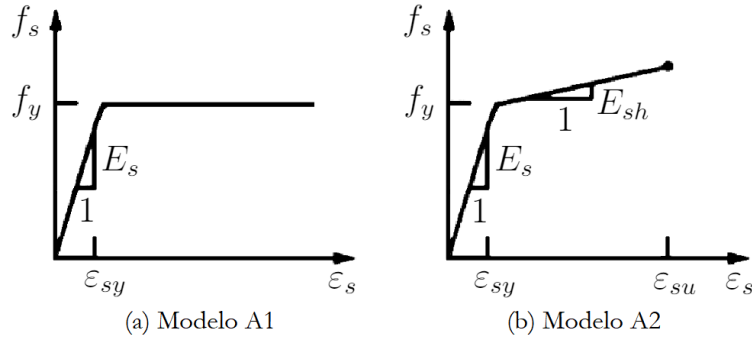
4.2.4 Aço em tração ou compressão

Na maioria dos problemas estudados no presente trabalho, adotou-se uma curva elasto-plástica perfeita para a resposta do aço, tanto para tração como compressão (denominado Modelo A1), Eq. (4.73), onde, a deformação de escoamento ε_{sy} pode ser obtida através da razão entre a sua tensão de escoamento f_y e o respectivo módulo de elasticidade E_s . As variáveis f_s e ε_s são a tensão e deformação médias na armadura, Figura 25.

$$f_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} E_s \varepsilon_s, & \text{se } |\varepsilon_s| < \varepsilon_{sy} \\ f_y \text{ sinal}(\varepsilon_s), & \text{se } |\varepsilon_s| \geq \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (4.73)$$

Contudo, como será mostrado na subseção 5.3, durante a validação do programa desenvolvido, através da comparação com dados de ensaios experimentais de cascas, o Modelo A1 apresentou dificuldades em capturar o comportamento pós-escoamento da

Figura 25 – Modelos constitutivos do aço



Fonte: Adaptado de Vecchio (2000)

estrutura. Com isso, optou-se por implementar um segundo modelo, semelhante ao primeiro, porém, considerando, no lugar do patamar de escoamento, o endurecimento do material (Modelo A2):

$$f_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} E_s \varepsilon_s, & \text{se } |\varepsilon_s| < \varepsilon_{sy} \\ [f_y + E_{sh}(\varepsilon_s - \varepsilon_{sy})] \text{sign}(\varepsilon_s), & \text{se } |\varepsilon_s| \geq \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (4.74)$$

onde, o módulo de endurecimento do aço E_{sh} é calculado através da equação abaixo, utilizando a tensão f_u e a deformação ε_{su} últimas correspondentes do material:

$$E_{sh}(\varepsilon_s) = \frac{f_u - f_y}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}} \quad (4.75)$$

4.2.5 Efeito do confinamento no concreto

De forma antagônica ao efeito de amolecimento do concreto, quando esse material está submetido a um estado biaxial (ou triaxial) de compressão, ocorre um efeito de confinamento que tende a aumentar a sua capacidade resistente. No presente estudo, isso foi modelado de forma semelhante ao que foi apresentado por Silva (2019), com base nos trabalhos de Vecchio (1992) e Kupfer, Hilsdorf e Rusch (1969), utilizando os fatores de majoração K_{c1} e K_{c2} :

$$K_{c1}(\sigma_{c2}) = 1 + 0.92 \left(-\frac{\sigma_{c2}}{f_c} \right) - 0.76 \left(-\frac{\sigma_{c2}}{f_c} \right)^2 + K_{cz} \quad (4.76)$$

$$K_{c2}(\sigma_{c1}) = 1 + 0.92 \left(-\frac{\sigma_{c1}}{f_c} \right) - 0.76 \left(-\frac{\sigma_{c1}}{f_c} \right)^2 + K_{cz} \quad (4.77)$$

Segundo Vecchio (1992), mesmo elementos de membrana, submetidos a solicitações apenas no plano, podem estar sujeitos a estados triaxiais de tensão, devido a expansão do concreto na direção perpendicular, restringida pela armação nesse sentido (z). Esse efeito é modelado através do fator K_{cz} , o qual é calculado nesse trabalho através da

expressão aproximada abaixo, baseada em Richart, Brandtzaeg e Brown (1928) apud Wong, Trommels e Vecchio (2012):

$$K_{cz} = 4.1 \left(\frac{\rho_{sz} f_{sz}}{f_c} \right) \quad (4.78)$$

onde, ρ_{sz} e f_{sz} são as taxas de armadura e tensão do aço na direção perpendicular ao plano do elemento. A tensão f_{sz} pode ser avaliada aplicando a deformação do concreto na direção perpendicular ao plano ε_{cz} no modelo constitutivo apresentado na subseção 4.2.4. Essa deformação, por sua vez, é calculada de forma simplificada nesse trabalho, independente se a armadura em z escoou ou não, como:

$$\varepsilon_{cz} = \frac{E_{cn}}{E_{cn} + \rho_{sz} E_{sz}} (-v_{12} \varepsilon_{c2} - v_{21} \varepsilon_{c1}) \quad (4.79)$$

onde, E_{cn} e E_{sz} são os módulos de elasticidade, na direção perpendicular ao plano do elemento, respectivamente, do concreto e do aço, sendo E_{cn} considerado igual a $|2f_c/\varepsilon_0|$. O parâmetro v_{12} representa o coeficiente de Poisson relativo a deformação na direção principal 1 devido a ações na direção 2. O parâmetro v_{21} é definido de forma similar. O modelo adotado para o cálculo dos coeficientes de Poisson v_{12} e v_{21} é detalhado na subseção 4.2.6.

Os fatores K_{c1} e K_{c2} são usados na determinação das tensões e deformações de pico nas duas direções do sistema de coordenadas principal (1-2):

$$f_{p1} = K_{c1} f_c \quad (4.80)$$

$$f_{p2} = K_{c2} f_c \quad (4.81)$$

$$\varepsilon_{p1} = (3K_{c1} - 2)\varepsilon_0 \quad (4.82)$$

$$\varepsilon_{p2} = (3K_{c2} - 2)\varepsilon_0 \quad (4.83)$$

Por sua vez, as tensões e deformações de pico podem ser utilizadas no cálculo das tensões principais médias de compressão no concreto, com base no modelo apresentado na subseção 4.2.1, $\sigma_{c1} = \sigma_{cc}(f_{p1}, \varepsilon_{p1}, \varepsilon_{c1})$ e $\sigma_{c2} = \sigma_{cc}(f_{p2}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{c2})$. Ao estudar o conjunto de equações descrito nessa subseção, é possível enxergar a avaliação do comportamento do concreto submetido a um estado plano biaxial de compressão como um sistema de equações não-linear com duas equações e duas incógnitas:

$$f(\sigma_{c1}, \sigma_{c2}) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{c1} - \sigma_{cc}(f_{p1}, \varepsilon_{p1}, \varepsilon_{c1}) \\ \sigma_{c2} - \sigma_{cc}(f_{p2}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{c2}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (4.84)$$

Essa estratégia de solução foi implementada no programa desenvolvido, onde foram aplicadas função de otimização da biblioteca de computação científica *SciPy*, escritas em

Python. Foram observados bons resultados, além de rápida convergência, mesmo aplicando-se uma estimativa inicial simplória para a solução (origem do sistema de coordenadas).

4.2.6 Coeficiente de Poisson e deformações transversais

Deformações transversais relacionadas com o coeficiente de poisson podem tomar magnitudes relevantes para o comportamento de estruturas de concreto armado, principalmente, quando as tensões de compressão se aproximam da falha, e, ocorre um aumento progressivo do coeficiente de Poisson do material (VECCHIO, 1992). Esse comportamento foi modelado no presente trabalho através da equação Eq. (4.85).

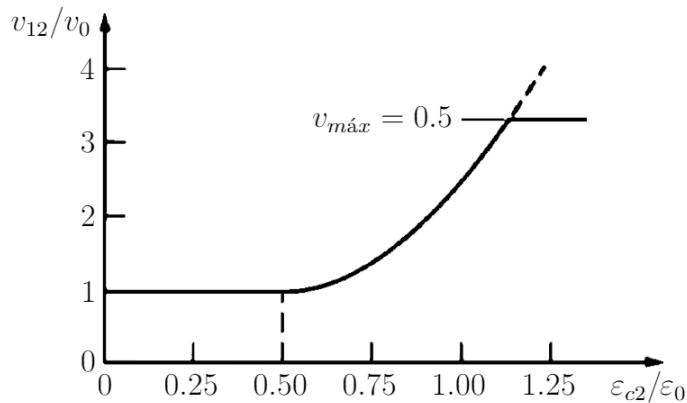
Esse modelo além de considerar o crescimento do coeficiente de Poisson inicial v_0 , como ilustra a Figura 26, também desconsidera esse parâmetro quando a deformação principal no concreto, na direção transversal, é de tração e superior à deformação de fissuração ε_{cr} .

$$v_{12} = \begin{cases} 0, & \text{se } \varepsilon_{c2} \geq 0 \text{ e } \varepsilon_{c2} > \varepsilon_{cr} \\ v_0, & \text{se } \varepsilon_{c2} \geq 0 \text{ e } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_{cr} \\ v_0, & \text{se } \varepsilon_{c2} < 0 \text{ e } |\varepsilon_{c2}| < |\varepsilon_0|/2 \\ v_0 \left[1 + 1.5 \left(\frac{2\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_0} - 1 \right)^2 \right] \not\geq 0.5, & \text{se } \varepsilon_{c2} < 0 \text{ e } |\varepsilon_{c2}| \geq |\varepsilon_0|/2 \end{cases} \quad (4.85)$$

Dessa forma, a deformação no concreto na direção principal 1, ε_{c01} , referente ao coeficiente de Poisson é dada pela equação Eq. (4.86). Vale destacar que, a deformação correspondente na direção principal 2, ε_{c02} , e seu coeficiente de Poisson, v_{21} , podem ser obtidos através das equações Eq. (4.85) e (4.86), trocando as posições dos índices 1 e 2.

$$\varepsilon_{c01} = -v_{12}\varepsilon_{c2} \quad (4.86)$$

Figura 26 – Modelo do aumento do coeficiente de Poisson



Fonte: Adaptado de Vecchio (1992)

O vetor com as deformações principais no concreto devido ao coeficiente de Poisson $\{\varepsilon_{c0}^{1-2}\}$ é representado segundo a equação Eq. (4.87). Esse vetor pode ser convertido para o sistema cartesiano $\{\varepsilon_{c0}\}$, de forma eficiente, com base na matriz de transformações de coordenadas $[T]$, Eq. (4.88), conforme apresenta a equação Eq. (4.89).

$$\{\varepsilon_{c0}^{1-2}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{c01} & \varepsilon_{c02} & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (4.87)$$

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta)^2 & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)^2 & \cos(\theta)^2 & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -2\cos(\theta)\sin(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

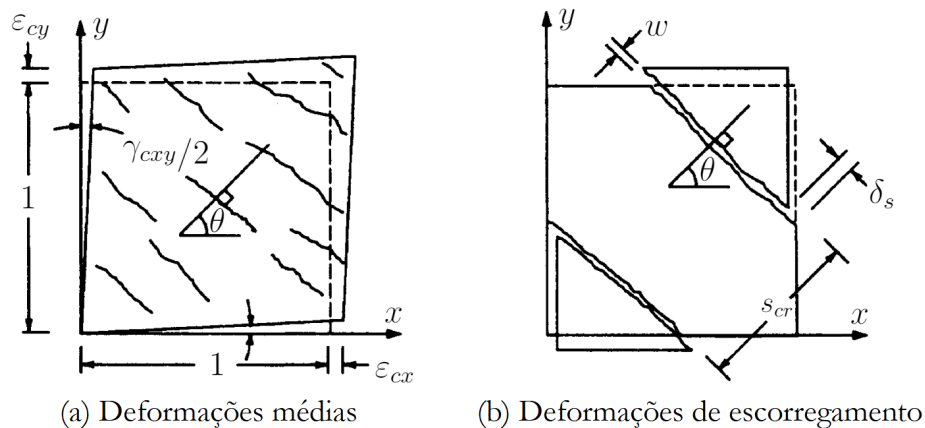
$$\{\varepsilon_{c0}\} = [T(-\theta)]\{\varepsilon_{c0}^{1-2}\} \quad (4.89)$$

4.2.7 Deformação de escorregamento

Conforme discutido na subseção 3.2, o modelo do campo de tensões perturbado (*Disturbed Stress Field Model* – DSFM) pode ser entendido como uma extensão do modelo do campo de compressão modificado (*Modified Compression Field Theory* – MCFT), que admite discordâncias entre os sistemas principais de tensão e deformação, através da consideração de deformação de escorregamento nas fissuras. O DSFM foi proposto por Vecchio (2000) com o objetivo de atenuar algumas limitações do MCFT em determinar de forma apropriada a resistência e a rigidez de elementos, com altas ou baixas taxas de armadura. Essa subseção apresenta, de forma sucinta, a teoria empregada na avaliação das deformações de escorregamento, segundo o DSFM, e, os critérios adotados na implementação da mesma no programa desenvolvido.

Conforme discutido na subseção 4.2.3, após a avaliação do equilíbrio na região da fissura de um elemento de concreto armado, é possível obtermos a tensão de cisalhamento

Figura 27 – Deformações médias e deformações de escorregamento no concreto



Fonte: Adaptado de Vecchio (2000)

local na superfície da fissura v_c , Eq. (4.72). Segundo Vecchio (2000), devido a essa tensão de cisalhamento, ocorre um escorregamento local de corpo rígido, ao longo da fissura (deslocamento de escorregamento δ_s), Figura 27, o qual, por sua vez, causa deformações de escorregamento $\{\varepsilon^s\}$, que devem ser consideradas no modelo de forma adicional as deformações médias relacionadas à resposta constitutiva do concreto. Segundo Walraven (1981) apud Vecchio (2000), o deslocamento δ_s pode ser dado por:

$$\delta_s = \frac{v_c}{1.8w_{cr}^{-0.8} + (0.234w_{cr}^{-0.707} - 0.20)f_{cc}} \quad (4.90)$$

onde, w_{cr} representa a abertura de fissura média, estimada a partir do espaçamento médio entre fissuras s_{cr} , Eq. (4.91), que, por sua vez, pode ser calculado com base nos espaçamentos nominais entre fissuras em x e y ($s_x = s_y = 50mm$), Eq. (4.92).

$$w_{cr} = \varepsilon_{c1} s_{cr} \quad (4.91)$$

$$s_{cr} = \frac{1}{\frac{\sin(\theta)}{s_x} + \frac{\cos(\theta)}{s_y}} \quad (4.92)$$

De forma semelhante ao apresentado por Vecchio (2000), foi considerado que a resistência à compressão do concreto σ_{c2} tende a zero, quando a abertura de fissura atinge 5 mm. A Figura 28 ilustra a aplicação dessa condição no programa desenvolvido.

O parâmetro f_{cc} , na equação Eq. (4.90), é a resistência à compressão do concreto para um corpo de prova cúbico, podendo ser calculada como: $f_{cc} = f_c/0.85$. A deformação média de escorregamento γ_s é calculada a partir de δ_s como:

$$\gamma_s = \frac{\delta_s}{s_{cr}} \quad (4.93)$$

Com base em algumas transformações de coordenadas, relacionadas ao círculo de Mohr, o vetor que representa as deformações de escorregamento, no sistema cartesiano $\{\varepsilon^s\}$ pode ser escrito como:

$$\{\varepsilon^s\} = \begin{Bmatrix} -\gamma_s/2 \sin(2\theta) \\ \gamma_s/2 \sin(2\theta) \\ \gamma_s \cos(2\theta) \end{Bmatrix} \quad (4.94)$$

A formulação descrita acima apresenta uma visão geral sobre o cálculo do vetor das deformações de escorregamento $\{\varepsilon^s\}$. Contudo, falta apresentar alguns detalhes adicionais importantes dessa teoria, no que diz respeito à avaliação da tensão v_c . Como foi visto anteriormente, esse parâmetro pode ser obtido pela equação Eq. (4.72). Todavia optou-se por limitar essa tensão mediante o modelo de engranamento dos agregados, utilizado por

Silva (2019), com base nos trabalhos de Vecchio e Collins (1986) e Walraven (1981), o qual depende do tamanho médio do agregado ($a_g = 25mm$):

$$v_c \leq v_c^{max} = \frac{0.18\sqrt{f_c}}{0.31 + 24w_{cr}/(a_g + 26)} \quad (4.95)$$

Além disso, de acordo com equação Eq. (4.72), para o cálculo da tensão v_c é necessário, anteriormente, calcular as tensões nas armaduras na região da fissura, f_{scrx} e f_{scry} . Embora esses parâmetros possam ser obtidos utilizando os modelos constitutivos apresentados na subseção 4.2.4, a determinação das deformações correspondentes, nos aços, na região da fissura, ε_{scrx} e ε_{scry} , necessárias ao cálculo dessas tensões, não é imediata. Conforme discutido anteriormente, ao examinarmos o equilíbrio do elemento de concreto, ilustrado na Figura 24, percebemos que, na região da fissura, existe um incremento de tensão (e deformação) nas armações, devido a anulação da tensão de tração no concreto. Dessa forma, Vecchio (2000) propõe que as deformações nos aços, nas fissuras ε_{scrx} e ε_{scry} , podem ser determinadas através da soma das deformações médias correspondentes ε_{sx} e ε_{sy} e a contribuição de uma deformação incremental local, na direção principal 1 $\Delta\varepsilon_{1cr}$:

$$\varepsilon_{scrx} = \varepsilon_{sx} + \Delta\varepsilon_{1cr}\cos(\theta - \alpha_x)^2 \quad (4.96)$$

$$\varepsilon_{scry} = \varepsilon_{sy} + \Delta\varepsilon_{1cr}\cos(\theta - \alpha_y)^2 \quad (4.97)$$

Uma vez calculada a tensão σ_{c1} através do modelo constitutivo da subseção 4.2.3, Eq. (4.67) e (4.71), e, considerando as equações Eq. (4.70), (4.96) e (4.97), e a curva tensão-deformação apropriada para o aço, é possível formular uma equação não-linear, cuja solução é a deformação incremental $\Delta\varepsilon_{1cr}$:

$$f(\Delta\varepsilon_{1cr}) = \sigma_{c1} - \rho_x(f_{scrx} - f_{sx})\cos(\theta - \alpha_x)^2 - \rho_y(f_{scry} - f_{sy})\cos(\theta - \alpha_y)^2 = 0 \quad (4.98)$$

Novamente, foi feito uso de funções de otimização da biblioteca de computação científica *SciPy*. Note que, na concepção da equação não-linear acima, foi considerada a equação Eq. (4.70), onde a tensão máxima do aço não é necessariamente a de escoamento (f_{yx} e f_{yy}), e não a Eq. (4.71), a qual aplica esse limite. Acredita-se que essa mesma generalização poderia ser aplicada também no modelo constitutivo do concreto, subseção 4.2.3. Contudo, percebe-se que isso aumentaria o grau de complexidade da análise, não apenas na avaliação de σ_{c1} , como também no sistema da equação Eq. (4.98), visto que ele depende do cálculo prévio de σ_{c1} . De qualquer forma, esse pormenor da formulação se mostra uma oportunidade de investigação cinetífica intrigante e merece atenção em futuros trabalhos.

Por fim, vale frisar que a teoria de escorregamento apresentada é, claramente, aplicada apenas em situações onde o concreto está, de fato, fissurado. Dessa forma, antes que essa teoria seja aplicada na avaliação do comportamento da peça, deve ser feita a verificação se a deformação principal de tração do concreto ε_{c1} é superior a deformação de fissuração ε_{cr} .

Caso contrário, o elemento ainda não fissurou e $\{\varepsilon^s\}$ pode ser computado como um vetor nulo.

4.2.8 Matrizes constitutivas secantes

Nas subseções 4.2.6 e 4.2.7 foram apresentadas as metodologias para o cálculo dos vetores das deformações associadas ao coeficiente de Poisson $\{\varepsilon_{c0}\}$ e as deformações de escorregamento $\{\varepsilon^s\}$. Com o intuito de garantir a simetria da matriz constitutiva do concreto, e obter os benefícios da estabilidade numérica proveniente disso, assim como em Vecchio (2000), e, Selby e Vecchio (1997) apud Silva (2019), optou-se por separar o vetor das deformações totais $\{\varepsilon\}$ em três componenets distintas: $\{\varepsilon_c\}$, $\{\varepsilon_{c0}\}$ e $\{\varepsilon^s\}$, Eq. (4.99).

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_c\} + \{\varepsilon_{c0}\} + \{\varepsilon^s\} \quad (4.99)$$

onde, $\{\varepsilon_c\}$ ilustra o vetor das deformações líquidas no concreto, o qual pode ser avaliado, juntamente com suas componentes, reorganizando a equação Eq. (4.99):

$$\{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{c0}\} - \{\varepsilon^s\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{cx} & \varepsilon_{cy} & \gamma_{cxy} \end{Bmatrix}^T \quad (4.100)$$

Uma vez obtidas as componentes do vetor $\{\varepsilon_c\}$ é possível estimar a inclinação do sistema principal θ com base na equação Eq. (4.101). No programa desenvolvido, essa equação foi implementada utilizando a função **atan2()**, disponível na biblioteca de computação científica *NumPy*, do *Python*.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{cxy}}{\varepsilon_{cx} - \varepsilon_{cy}} \right) \quad (4.101)$$

Novamente utilizando as componentes do vetor $\{\varepsilon_c\}$, é possível determinar as deformações principais no concreto, com base no círculo de Mohr:

$$\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2} = \frac{\varepsilon_{cx} + \varepsilon_{cy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{cx} - \varepsilon_{cy})^2 + \gamma_{cxy}^2} \quad (4.102)$$

Estudando-se as equações Eq. (4.100) e (4.102), e os modelos apresentados nas subseções 4.2.6 e 4.2.7, é possível perceber a relação não-linear entre os vetores $\{\varepsilon_c\}$, $\{\varepsilon_{c0}\}$ e $\{\varepsilon^s\}$. No presente trabalho, esse problema foi resolvido iterativamente, conforme ilustra a Figura 28.

Considerando um elemento de concreto armado fissurado, o vetor das tensões no concreto $\{\sigma_c\}$ pode ser relacionado com respectivo vetor das deformações $\{\varepsilon_c\}$ como:

$$\{\sigma_c\} = [D_c] \{\varepsilon_c\} \quad (4.103)$$

onde, a matriz constitutiva secante em uma lamela concreto $[D_c]$, no sistema cartesiano, Eq. (4.104), é obtida através da rotação da respectiva matriz no sistema principal $[D_c^{1-2}]$, Eq. (4.105), a qual é calculada com base nos módulos secantes do concreto E_{c1}^{sec} e E_{c2}^{sec} .

Figura 28 – Pseudocódigo do modelo constitutivo secante da lamela de concreto

Algoritmo 2:

```

1 se número do incremento de carga = 1 e número da iteração = 1 então
2   | Inicialize os vetores  $\{\varepsilon_{c0}\} \leftarrow \{0\}$  e  $\{\varepsilon^s\} \leftarrow \{0\}$ ;
3 senão
4   | Considere os vetores  $\{\varepsilon_{c0}\}$  e  $\{\varepsilon^s\}$  calculados na última iteração;
5 fim
6 Calcule o vetor das deformações no concreto  $\{\varepsilon_c\}$ , Eq. (4.100);
7 Calcule as deformações principais no concreto  $\varepsilon_{c1}$  e  $\varepsilon_{c2}$ , Eq. (4.102);
8 Calcule a inclinação do sistema principal  $\theta$ , Eq. (4.101);
9 Calcule as propriedades do aço equivalentes na lamela de concreto, subseção 4.2.3;
10 Calcule as tensões nos aços equivalentes na lamela  $f_{sx}$  e  $f_{sy}$ , Eq. (4.73) ou (4.74);
11 Calcule as deformações relacionadas ao coeficiente de Poisson  $\varepsilon_{c01}$  e  $\varepsilon_{c02}$ , Eq. (4.86);
12 Calcule o vetor das deformações do coeficiente de Poisson  $\{\varepsilon_{c0}\}$ , Eq. (4.89);
13 se  $\varepsilon_{c1} < 0$  e  $\varepsilon_{c2} < 0$  (Estado Biaxial de Compressão) então
14   | Calcule as tensões principais  $\sigma_{c1}$  e  $\sigma_{c2}$  resolvendo o sistema da Eq. (4.84);
15 senão
16   | se  $\varepsilon_{c1} < 0$  então
17     | Calcule  $\sigma_{c1}$  pelo modelo de compressão, Eq. (4.60), (4.61), (4.62) e (4.63);
18   | senão
19     | Calcule  $\sigma_{c1}$  pelo modelo de tração, Eq. (4.67), (4.69) e (4.71);
20   | fim
21   | se  $\varepsilon_{c2} < 0$  então
22     | Calcule  $\sigma_{c2}$  pelo modelo de compressão, Eq. (4.60), (4.61), (4.62) e (4.63);
23   | senão
24     | Calcule  $\sigma_{c2}$  pelo modelo de tração, Eq. (4.67), (4.69) e (4.71);
25   | fim
26 fim
27 se  $\varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr}$  (Fissurou) então
28   | Calcule o espaçamento médio entre as fissuras  $s_{cr}$ , Eq. (4.91);
29   | Calcule a abertura de fissura média  $w$ , Eq. (4.91);
30   | se  $\varepsilon_{c2} < 0$  e  $w > 5mm$  então  $\sigma_{c2} \leftarrow 0$ ;
31   | Calcule o incremento de deformação  $\Delta\varepsilon_{1cr}$  resolvendo a Eq. (4.91);
32   | Calcule as deformações nos aços na fissura  $\varepsilon_{sxcr}$  e  $\varepsilon_{sy cr}$ , Eq. (4.91);
33   | Calcule as tensões nos aços na fissura  $f_{sxcr}$  e  $f_{sy cr}$ , Eq. (4.73) ou (4.74);
34   | Calcule a tensão de cisalhamento na superfície da fissura  $v_c$ , Eq. (4.72) e (4.72);
35   | Calcule o deslocamento de escorregamento  $\delta_s$ , Eq. (4.90);
36   | Calcule a deformação de escorregamento média  $\gamma_s$ , Eq. (4.93);
37   | Calcule o vetor das deformações de escorregamento  $\{\varepsilon^s\}$ , Eq. (4.94);
38 senão
39   | Defina o vetor das deformações de escorregamento como nulo  $\{\varepsilon^s\} \leftarrow 0$ ;
40 fim
41 Calcule os módulos secantes do concreto  $E_{c1}^{sec}$  e  $E_{c2}^{sec}$ , Eq. (4.106);
42 Calcule a matriz constitutiva secante da lamela  $[D_c]$ , Eq. (4.104) e (4.105);
43 Calcule o vetor da tensão na lamela de concreto  $\{\sigma_c\}$ , Eq. (4.103);

```

Figura 29 – Pseudocódigo do modelo constitutivo secante da camada de aço

Algoritmo 3:

-
- 1 Calcule as tensões na camada de aço f_{sx} e f_{sy} , Eq. (4.73) ou (4.74);
 - 2 Calcule os módulos secantes da camada de aço E_s , Eq. (4.109);
 - 3 Calcule a matriz constitutiva secante da camada de aço $[D_s]$, Eq. (4.107) e (4.108);
 - 4 Calcule o vetor da tensão na camada de aço $\{\sigma_s\}$, Eq. (4.110);
-

Fonte: O autor (2022)

$$[D_c] = [T(\theta)]^T [D_c^{1-2}] [T(\theta)] \quad (4.104)$$

$$[D_c^{1-2}] = \begin{bmatrix} E_{c1}^{sec} & 0 & 0 \\ 0 & E_{c2}^{sec} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{c1}^{sec} E_{c2}^{sec}}{E_{c1}^{sec} + E_{c2}^{sec}} \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

A matriz de transformação $[T]$ foi definida previamente através da equação Eq. (4.88). Os módulos secantes do concreto são obtidos através da razão entre a tensão e deformação principais correspondentes:

$$E_{c1}^{sec} = \frac{\sigma_{c1}}{\varepsilon_{c1}} \quad E_{c2}^{sec} = \frac{\sigma_{c2}}{\varepsilon_{c2}} \quad (4.106)$$

De forma semelhante a equação Eq. (4.104), a matriz constitutiva secante de uma camada de aço, $[D_s]$ (em x ou y), Figura 29, pode ser calculada como:

$$[D_s] = [T(\alpha_s)]^T [D'_s] [T(\alpha_s)] \quad (4.107)$$

$$[D'_s] = \begin{bmatrix} E_s^{sec} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

$$E_s^{sec} = \frac{f_s}{\varepsilon_s} \quad (4.109)$$

onde, o ângulo α_s representa a orientação da armadura, enquanto que, o módulo secante do aço E_s^{sec} é obtido pela razão entre a tensão f_s e a deformação ε_s apropriadas. Por fim, o vetor das tensões em uma camada de aço j $\{\sigma_{sj}\}$ é calculado por:

$$\{\sigma_{sj}\} = [T(\alpha_j)] \{\sigma'_{sj}\} = [T(\alpha_j)] \begin{Bmatrix} f_{sj} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.110)$$

Na primeira iteração, do primeiro passo de carga, a matriz constitutiva do concreto pode ser inicializada com base em uma estimativa elástica-linear, Eq. (4.111), enquanto que a matriz correspondente para o aço pode ser tida como nula, Figura 19.

$$[D_{linear}] = \frac{E_c}{1 - \nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_0}{2} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

As Figuras 28 e 29 detalham a implementação dos modelos constitutivos, discutidos nessa seção, no programa computacional desenvolvido, de forma a obtermos as matrizes constitutivas secantes $[D_c]$ e $[D_s]$, e, os vetores das tensões $\{\sigma_c\}$ e $\{\sigma_s\}$, em cada lamela de concreto e camada de aço.

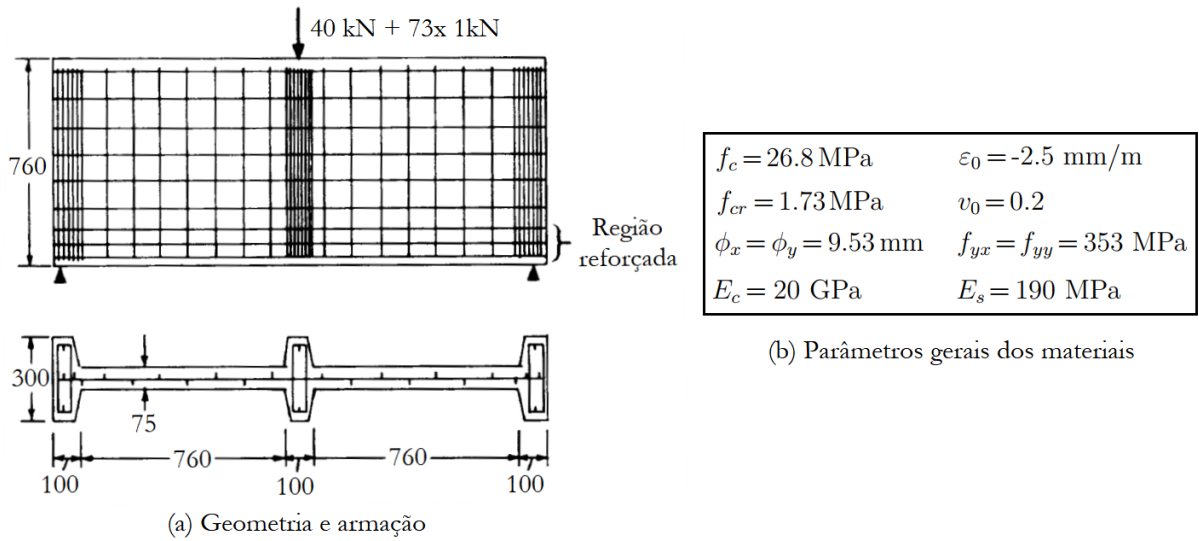
5 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA E ANÁLISES ADICIONAIS

Essa seção visa realizar a validação do programa computacional CANECA, discutido no Capítulo 4, através da comparação do mesmo com resultados de ensaios disponíveis na literatura, como, por exemplo, a viga-parede W2 de Cervenka, Figura 30, e, o pilar-parede SW16 de Lefas, Figura 31. Além disso, os pilares-parede discutidos no Capítulo 3 são reanalisados, utilizando a ferramenta criada. As curvas carga-deslocamento apresentadas foram geradas pelo referido programa, enquanto que, as ilustrações com deslocamentos e esforços internos médios nos pontos de Gauss foram obtidos no software *Paraview* através de um módulo *Python* denominado *PyEVTk* (HERRERA, 2021), e, códigos adicionais escritos pelo autor, na mesma linguagem.

5.1 VIGA-PAREDE DE CERVENKA

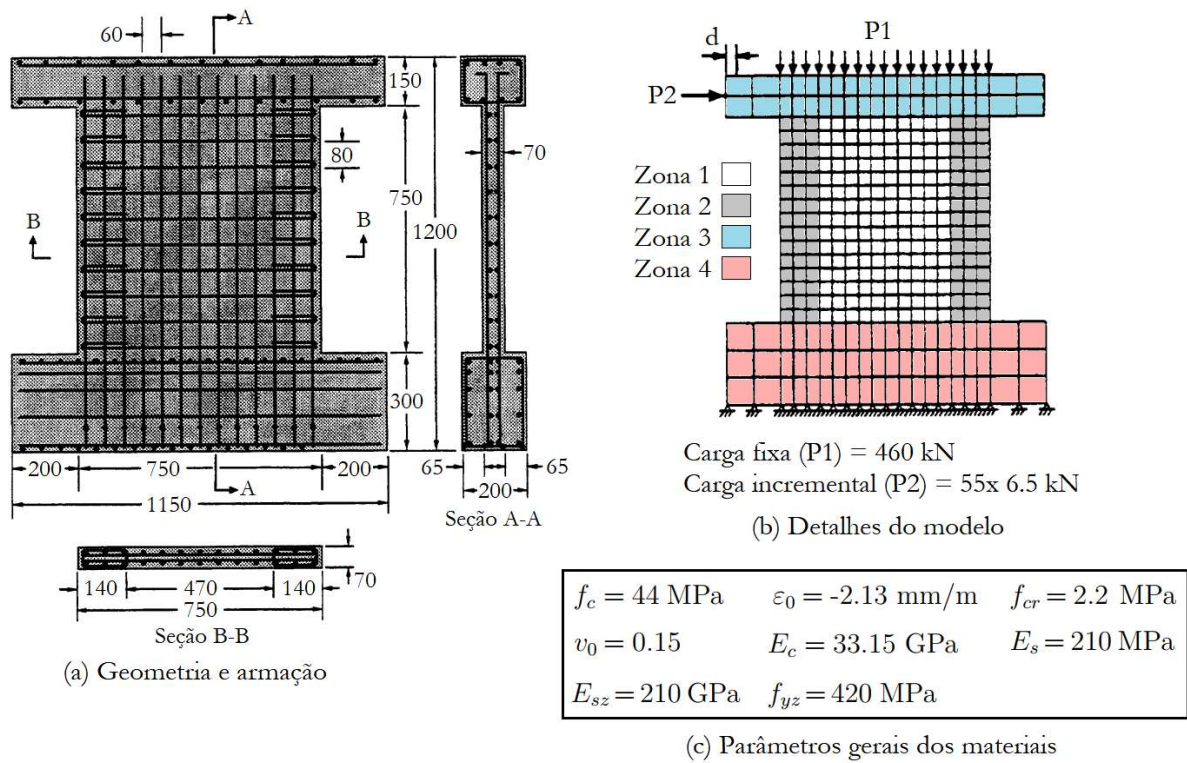
Inicialmente, foi analisada a viga-parede biapoiada W2 de Cervenka (1970) apud Vecchio (1990), considerada um *benchmark* na validação de modelos em elementos finitos de estruturas de concreto armado. A Figura 30 ilustra os dados geométricos, cargas, apoios e os parâmetros gerais dos materiais do problema. A taxa de armadura vertical total ρ_y foi adotada como 0.92%, na estrutura inteira, enquanto que, a horizontal ρ_x foi 0.92% em quase toda a viga-parede, com exceção de uma região reforçada no bordo inferior, onde foi usado 1.83%, Figura 30. Não foi considerada na análise armação perpendicular ao plano da viga-parede (orientada em z). A armadura foi modelada em 3 camadas de aço (2 horizontais e 1 vertical), com posições definidas segundo a disposição original do experimento. Vale destacar que, como o aço vertical foi dividido em duas camadas, cada uma correspondeu a 0.46% de taxa de armadura. Foi considerado o Modelo A1, subseção 4.2.4, como curva tensão-deformação para a armadura. O carregamento foi aplicado em 82 incrementos de carga iguais 0.88 kN, além de uma carga inicial de 40 kN. Foi admitida uma tolerância 10^{-2} no critério de convergência. Com o intuito de avaliar apenas o comportamento de membrana do problema, todos os graus de liberdade de placa foram restringidos. Devido a simetria do problema, apenas metade da estrutura foi modelada, tendo sido impostas as condições de contorno apropriadas. A Figura 32 ilustra os resultados obtidos durante a análise, em comparação com a resposta experimental, e, a encontrada por Vecchio (1990), utilizando o MCFT. Na Figura 32(a) está representada a curva carga aplicada - deslocamento (translação em Y no bordo inferior do centro da viga-parede). De forma geral, foi observado um comportamento fisicamente coerente, além de um boa aderência aos dados experimentais, tanto na pré-fissuração e no pré-escoamento como no pós-escoamento. O tempo total de processamento do programa foi 6 minutos.

Figura 30 – Viga-parede de Cervenka (mm)



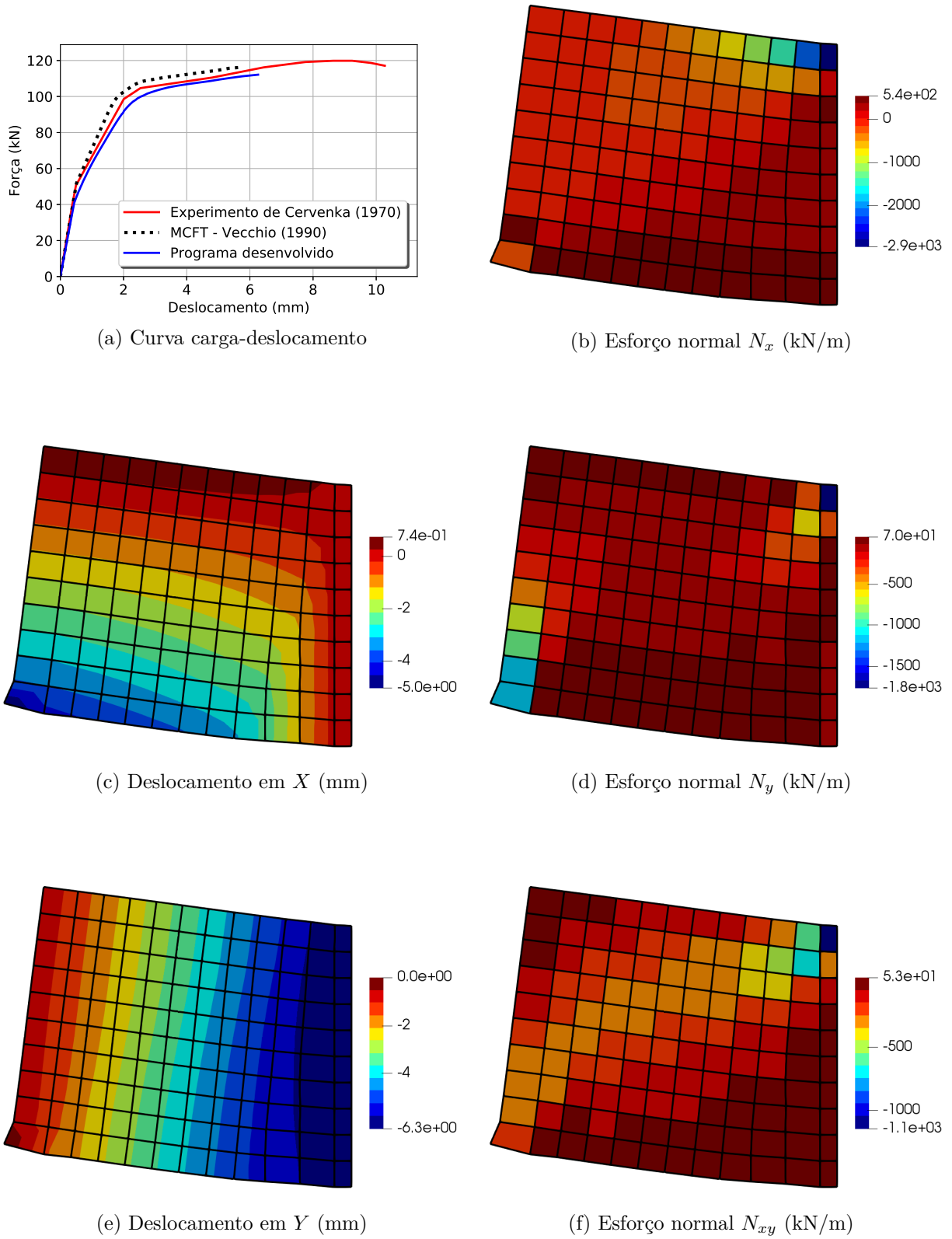
Fonte: Adaptado de Vecchio (1990)

Figura 31 – Pilar-parede de Lefas (mm)



Fonte: Adaptado de Vecchio (2001)

Figura 32 – Análise da viga-parede de Cervenka



Fonte: Adaptado de Silva e Horowitz (2022)

5.2 PILAR-PAREDE DE LEFAS

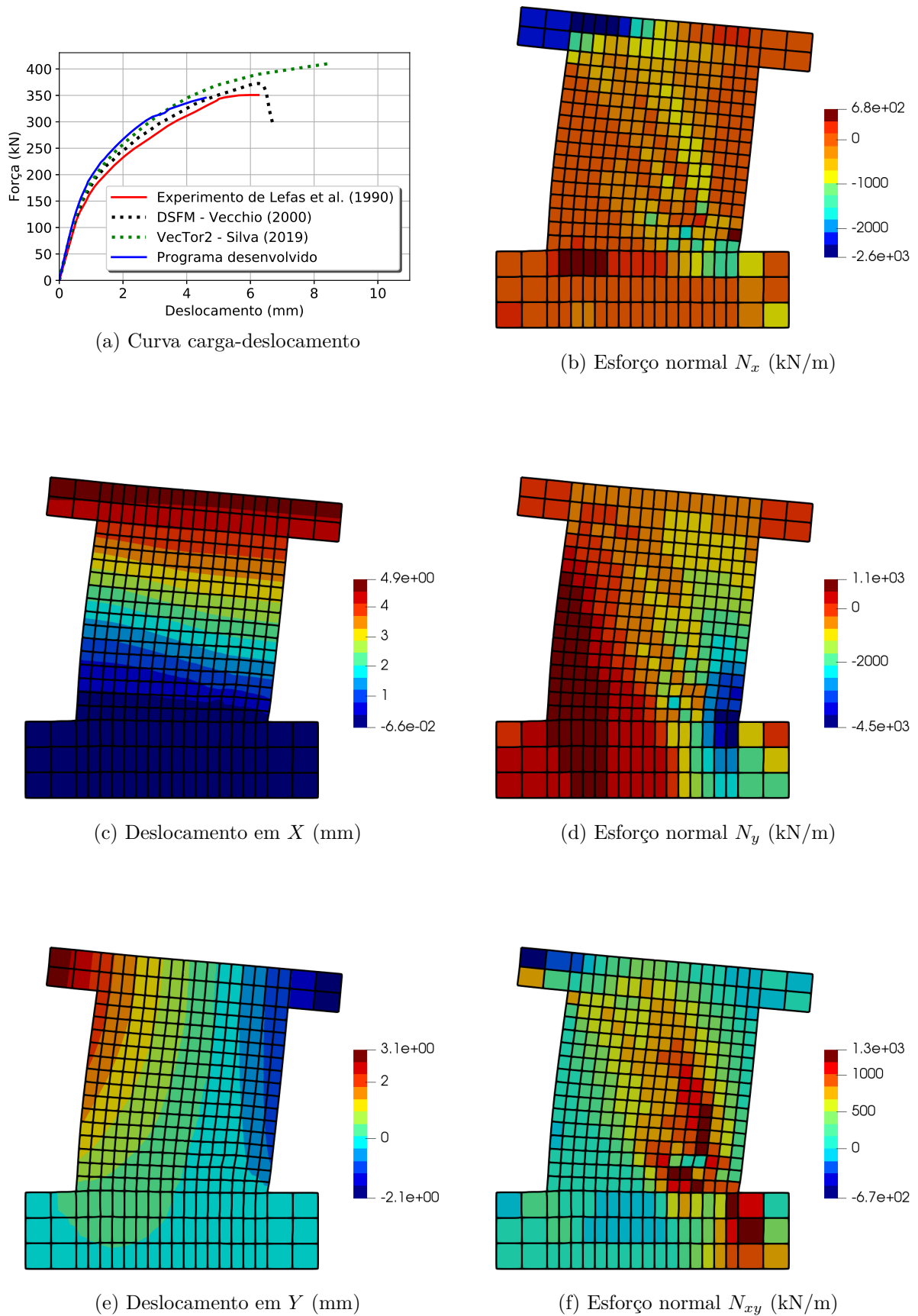
A segunda estrutura modelada foi a pilar-parede SW16 de Lefas, Kotsovos e Ambroseys (1990) apud Vecchio (2001). A Figura 31 ilustra os dados geométricos, cargas, apoios e os parâmetros gerais dos materiais do problema. Como mostra essa ilustração, é possível separar a estrutura em 4 zonas, as quais foram atribuídas propriedades específicas, Tabela 4. A armadura foi modelada em 4 camadas de aço (2 horizontais e 2 vertical), além da armação em z , com posições definidas segundo a disposição original do experimento. O carregamento aplicado foi composto por duas parcelas: uma fixa, distribuída na face superior, com resultante igual a 460 kN (constante durante toda a análise), e, outra, lateral, aplicada através de 48 incrementos iguais a $7.2kN$, Figura 31(b). Novamente, com o intuito de avaliar apenas o comportamento de membrana do problema, todos os graus de liberdade de placa foram restringidos. Foi admitida uma tolerância de 10^{-2} no critério de convergência. A Figura 33 ilustra os resultados obtidos durante a análise, em comparação com a curva experimental, e, as respostas encontrada por Vecchio (2000) e Silva (2019), utilizando o DSFM. Mais uma vez, foi observada uma resposta fisicamente coerente, além de uma boa aderência aos dados experimentais. O tempo total de processamento foi 12 minutos.

Tabela 4 – Propriedades específicas do pilar-parede de Lefas

Zona	ρ_x (%)	ρ_y (%)	ρ_z (%)	f_{yx} (MPa)	f_{yy} (MPa)	ϕ_x (mm)	ϕ_y (mm)
1	0.818	1.046	0.279	520	460	6.25	7.20
2	1.543	3.076	1.200	491	470	5.60	8.00
3	0.818	1.046	0.279	520	460	6.25	7.20
4	1.675	1.046	0.140	520	460	6.25	7.20

Fonte: O autor (2022)

Figura 33 – Análise do pilar-parede de Lefas

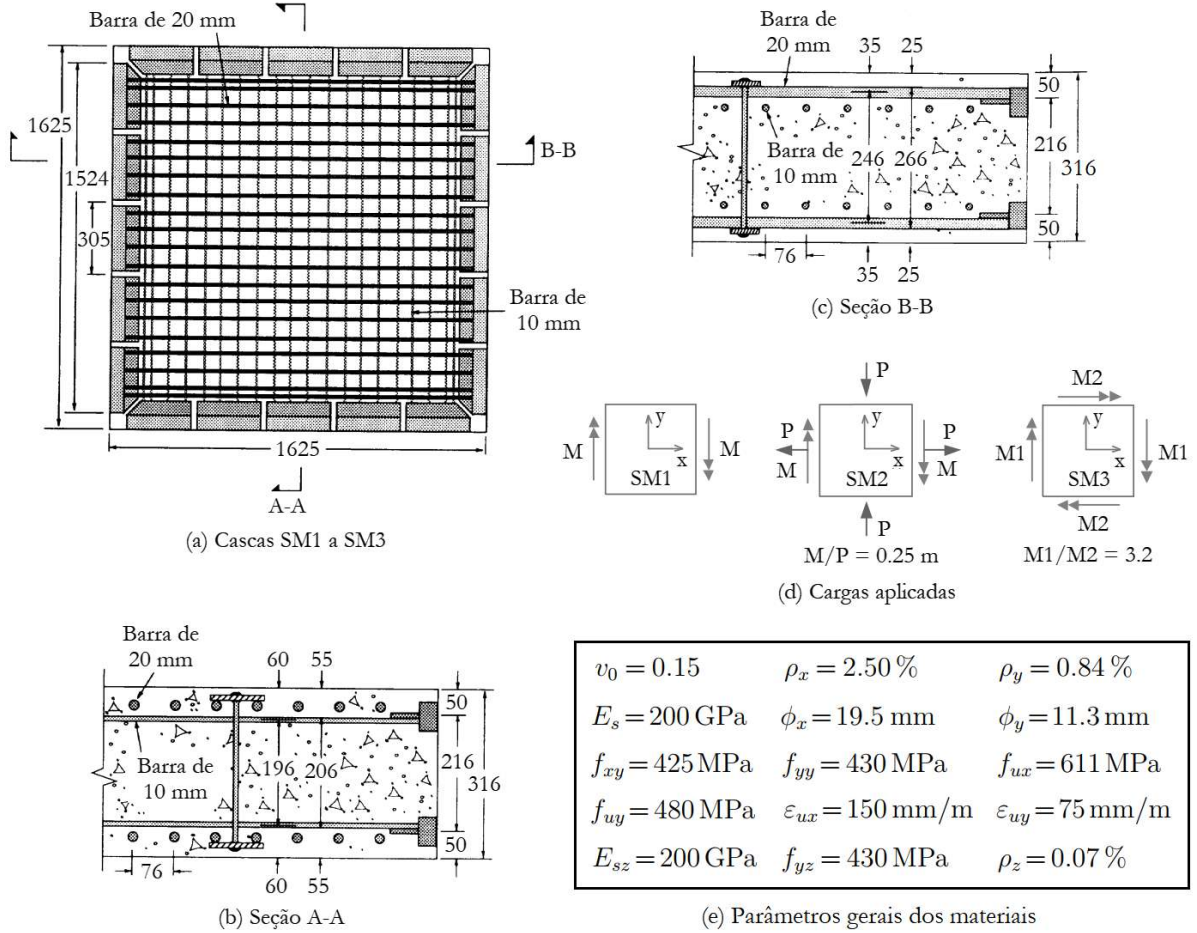


Fonte: O autor (2022)

5.3 CASCAS DE POLAK

Polak e Vecchio (1994) apresentaram os resultados de ensaios experimentais de quatro cascas de concreto armado, submetidas a várias combinações entre esforços de flexão e membrana, (HRYNYK, 2013), Figura 34. Três dessas quatro cascas (SM1, SM2 e SM3) foram selecionadas para avaliar o desempenho do programa desenvolvido. O espécime SM4 não foi escolhido por apresentar uma armadura, ainda que ortogonal, com orientação defasada em 45° , em relação ao bordo das cascas, e, essa característica não está exatamente alinhada com o escopo do estudo, além de demandar algumas generalizações no algoritmo implementado. A Tabela 5 apresenta as propriedades específicas de cada casca ensaiada. A armadura, novamente, foi modelada em 4 camadas de aço (2 horizontais e 2 vertical), além da armação em z , com posições definidas segundo a disposição original do experimento, Figura 34. O carregamento aplicado em cada casca pode ser observado na Figura 34(d), sendo considerado nos três casos um número de incrementos de carga próximo de 90. Foi admitida uma tolerância de 10^{-2} no critério de convergência. Durante a análise foi observado que o programa, de forma geral, para o conjunto padrão de modelos constitutivos, não foi capaz de encontrar uma configuração equilibrada, no pós-escoamento da armadura. Essa limitação foi contornada através da desconsideração dos modelos de confinamento do concreto (subseção 4.2.5) e deformações de escorregamento (subseção 4.2.7), além da adoção do Modelo A2 para a curva tensão-deformação do aço (subseção 4.2.4). A malha de elementos finitos usada contém 8×8 elementos, discretizados, ao longo da espessura, em 10 lamelas de concreto. A Figura 35 ilustra as curvas momento-curvatura obtidas durante a análise, em comparação com as respostas encontradas por Hrynyk (2013) (VecTor4) e Luu, Mo e Hsu (2017) (*Cyclic Softened Membrane Model* - CSMM). Novamente, foi observada uma boa concordância entre o programa desenvolvido e os dados numéricos e experimentais. O tempo total de processamento foi 18 minutos, sendo uma parte considerável do custo computacional referente ao trecho pós-escoamento.

Figura 34 – Cascas de Polak (mm)



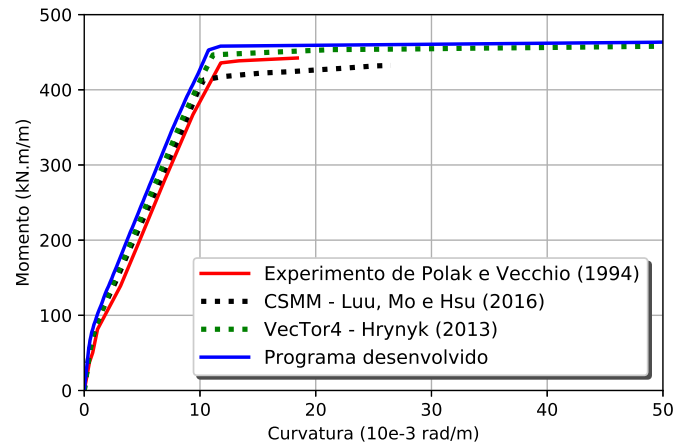
Fonte: Adaptado de Polak e Vecchio (1994) e Luu, Mo e Hsu (2017)

Tabela 5 – Propriedades específicas das cascas de Polak

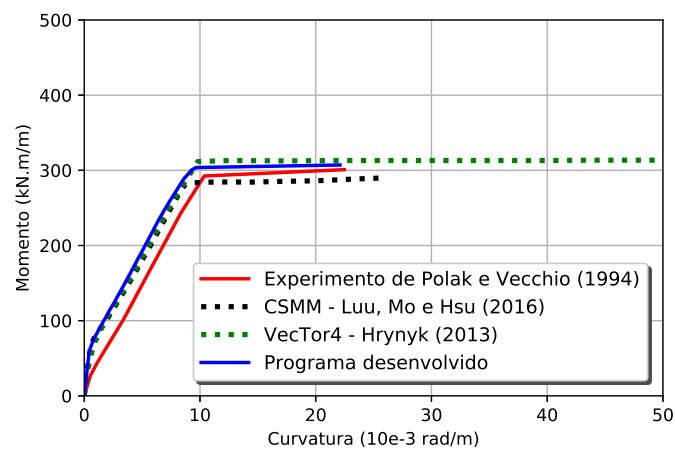
Espécime	f_c (MPa)	ε_{c0} (mm/m)	f_{cr} (MPa)
SM1	47	2.00	2.78
SM2	62	2.60	3.16
SM3	56	2.65	2.60

Fonte: O autor (2022)

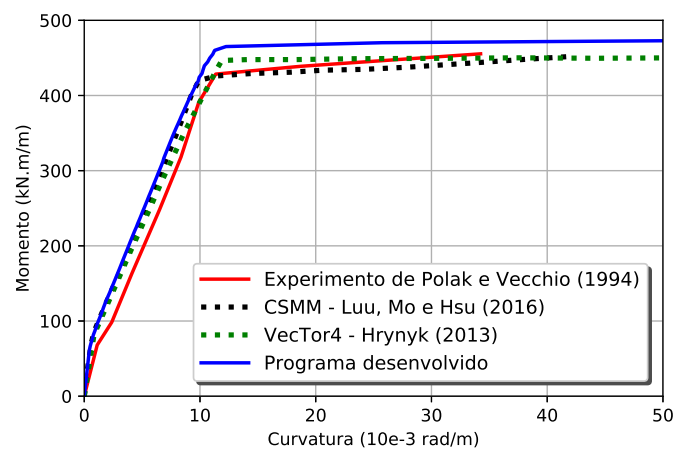
Figura 35 – Análise das cascas de Polak



(a) Curva momento-curvatura da casca SM1



(b) Curva momento-curvatura da casca SM2



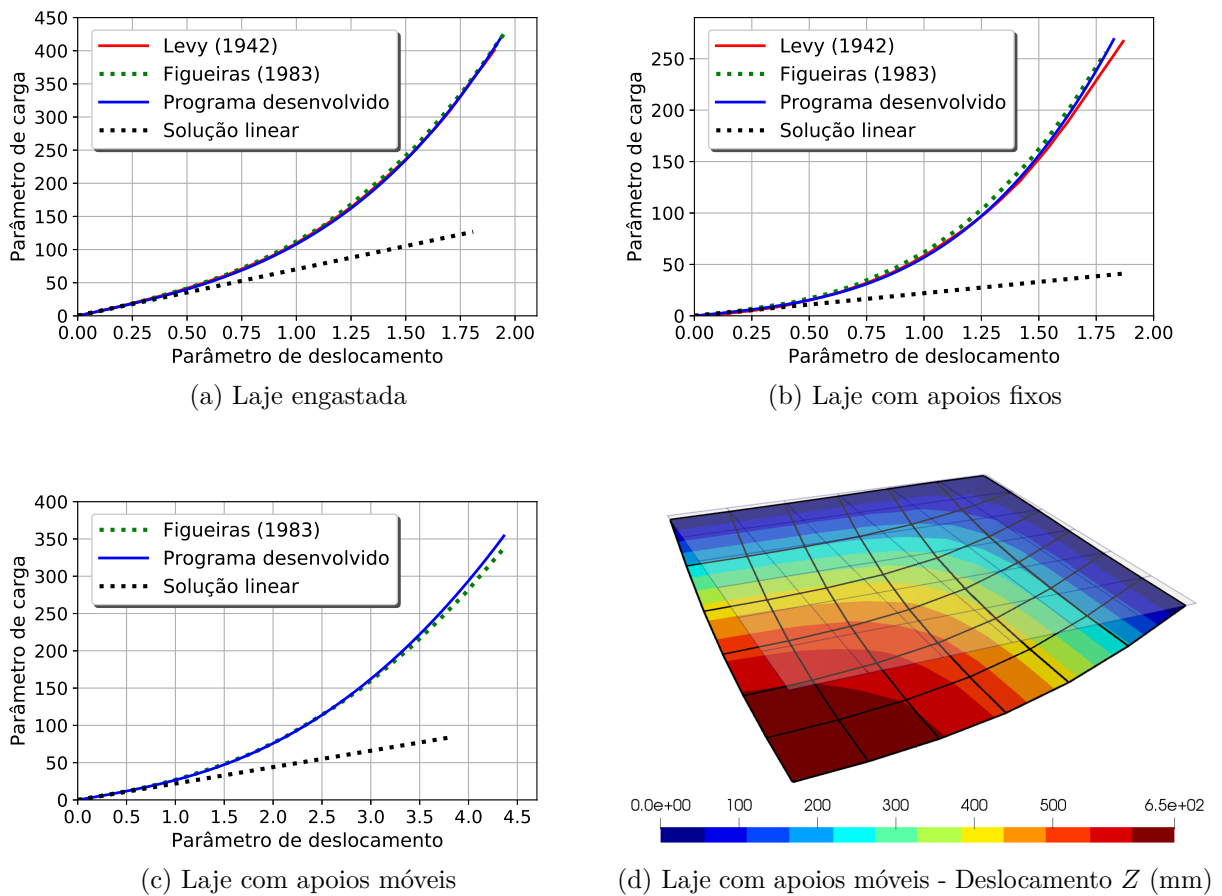
(c) Curva momento-curvatura da casca SM3

Fonte: O autor (2022)

5.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE PLACAS

Três placas quadradas com vão L igual a 6m, apresentadas por Figueiras (1983), submetidas a um carregamento uniforme q foram estudadas, considerando apenas a NLG (material elástico-linear). A espessura das placas t foi admitida como 0.15m, enquanto que o módulo de elasticidade do material E e o coeficiente de Poisson ν foram, respectivamente, 30 kN/m² e 0.316. A diferença entre as três estruturas consistiu nas condições de contorno aplicadas nos bordos: engastada; apoios fixos e apoios móveis (permitindo a translação no plano da placa). Foi adotada uma malha com 6x6 elementos, sendo a espessura discretizada em 10 lamelas de concreto. Nos três casos o número de incrementos de carga foi igual a 100. No critério de convergência, foi admitido uma tolerância tol mais rígida igual a 10^{-5} . A Figura 36 ilustra a comparação entre as curvas parâmetro de carga (qL^4/Et^4) versus parâmetro de deslocamento (w/t), obtidas analiticamente por Levy (1942) e numericamente por Figueiras (1983), utilizando um elemento de casca degenerado e uma formulação Lagrangiana total, e, através da ferramenta desenvolvida, onde pode ser observada boa concordância entre as distintas soluções.

Figura 36 – Análise não-linear geométrica de placas



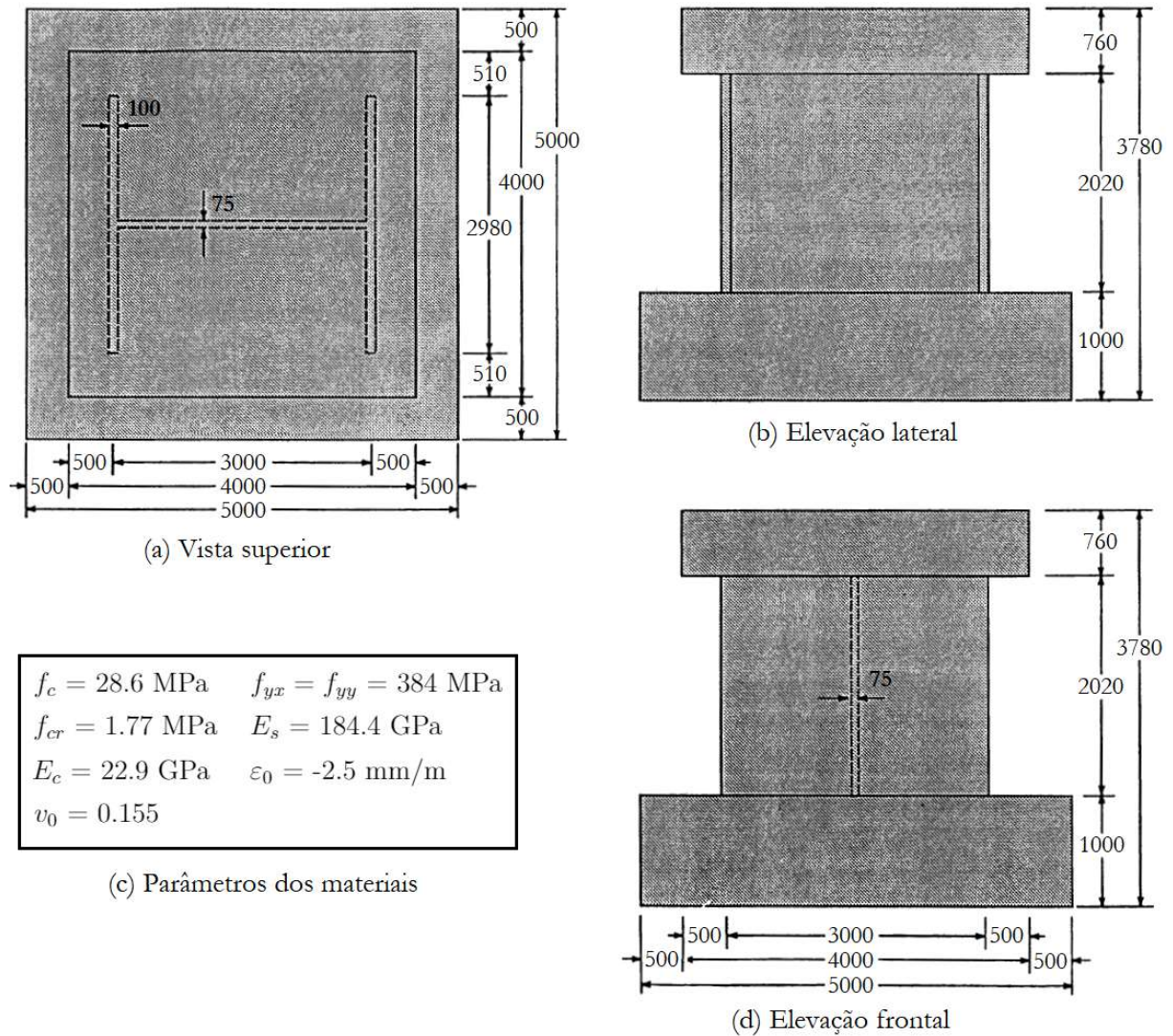
Fonte: Adaptado de Silva e Horowitz (2022)

5.5 PILAR-PAREDE COM SEÇÃO H DA NUPEC

A corporação de engenharia de energia nuclear (*Nuclear Power Engineering Corporation* - NUPEC) realizou o ensaio de pilares-parede seção H, sujeitos a carregamentos dinâmicos (VECCHIO, 1998). Nessa seção, é apresentada a análise de uma dessas construções, a qual tem seus dados geométricos e parâmetros dos materiais ilustrados na Figura 37. Conforme pode-se observar, a estrutura é associada monoloticamente, tanto na extremidade superior quanto na inferior, a lajes espessas. A armação do pilar-parede H variou de acordo com a região. Na alma, tanto a taxa de armadura vertical como a horizontal foram iguais a 1.219%. Nas mesas, até uma distância máxima de 250 mm do encontro mesa-alma, a taxa vertical foi igual a 0.760% enquanto que a horizontal foi 1.371%. Nas demais regiões das mesas as taxas vertical e horizontal foram, respectivamente, 0.366% e 0.914%. O carregamento aplicado foi composto por duas parcelas: uma carga de compressão vertical fixa, distribuída no plano médio da laje superior, com resultante igual a 1200 kN (constante durante toda a análise), e, outra, horizontal, aplicada através de 10 incrementos iguais a 170 kN. No presente estudo, se mostrou adequado, no lugar de modelar a laje inferior e aplicar as condições de contorno na mesma, apenas restringir todos dos graus de liberdade dos nós, na base das mesas e da alma. Foi admitida uma tolerância de 10^{-2} no critério de convergência. Durante a análise do problema, foi observado que o programa desenvolvido não foi capaz de encontrar uma configuração equilibrada, no décimo e último incremento de carga. Essa desvantagem pode ser superada desconsiderando na análise o modelo de escorregamento (subseção 4.2.7). Assim, são apresentados nessa seção os resultados referentes a essa última situação.

A Figura 38(a) ilustra as curvas carga-deslocamento obtidas, considerando apenas a NLF e a NLF combinada com a NLG, em comparação com o ensaio experimental, e, a resposta reportada por Vecchio (1998), através de um modelo tridimensional com elementos sólidos hexaédricos (*brick*) de 8 nós. O grau de liberdade avaliado nessa curva foi a translação horizontal no nó central do plano médio da laje superior. O programa desenvolvido obteve uma carga última inferior a solução com sólidos hexaédricos, contudo, mais próxima do experimento. Também foi visto que o efeito da NLG foi imperceptível na curva carga-deslocamento, sendo identificadas apenas diferenças mínimas no escoamento da armadura vertical, em poucos elementos. Semelhante a Vecchio (1998), o modo de ruptura foi associado com o esmagamento do concreto devido ao cisalhamento, na região inferior do bordo comprimido da alma, após o escoamento da mesa tracionada, Figuras 38 e 39. O tempo de processamento foi 12 minutos. Vale destacar que ambas as ferramentas obtiveram respostas mais rígidas que o ensaio. Segundo Vecchio (1998), isso está relacionado com a diferença própria entre as análises monotônicas e o ensaio dinâmico, com carga ciclicamente reversíveis, onde, estruturas submetidas a esse último tipo de carregamento podem ter deterioração do efeito de enrijecimento à tração (*tension stiffening*), da ancoragem e da

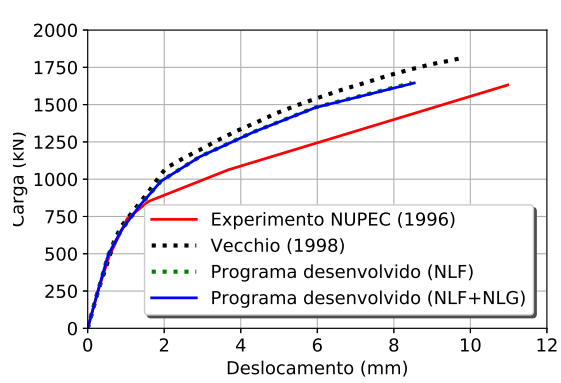
Figura 37 – Pilar-parede seção H da NUPEC (mm)



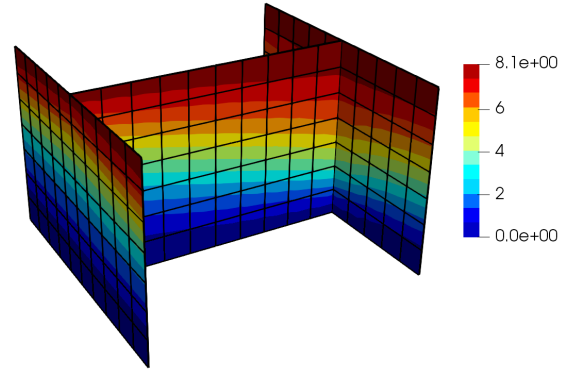
Fonte: Adaptado de Vecchio (1998)

aderência da armadura, acarretando, assim, na diminuição da sua capacidade resistente. Na comunidade técnica internacional, o estudo de pilares-parede submetidos a cargas cíclicas muitas vezes tem como motivação a segurança contra ações sísmicas. Conforme visto no capítulo 2, devido ao baixo risco de atividade sísmica na maioria do país, normalmente, o carregamento horizontal principal nas construções nacionais é proveniente do vento. Nesse contexto, é usual observarmos análises monotônicas (capítulo 3 e subseções 5.6 e 5.7). Contudo, a carga do vento é uma ação variável que pode também está sujeita a reversões. Dessa forma, se mostra uma oportunidade de investigação científica legítima, aprimorar a formulação apresentada nessa tese, para admitir cargas cíclicas, e, expandir o estudo comparativo das técnicas monotônicas do capítulo 3 (método normativo, malha de barras e MEF-NL) para também considerar cargas cíclicas.

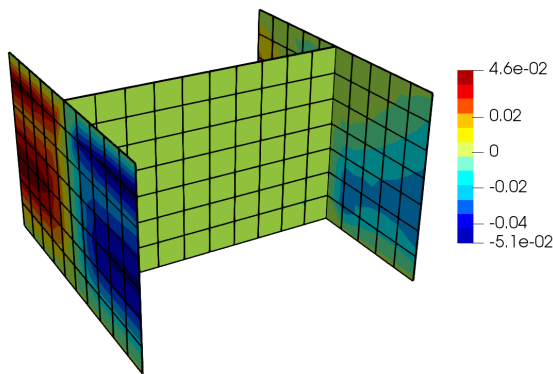
Figura 38 – Pilar-parede seção H da NUPEC - Deslocamentos



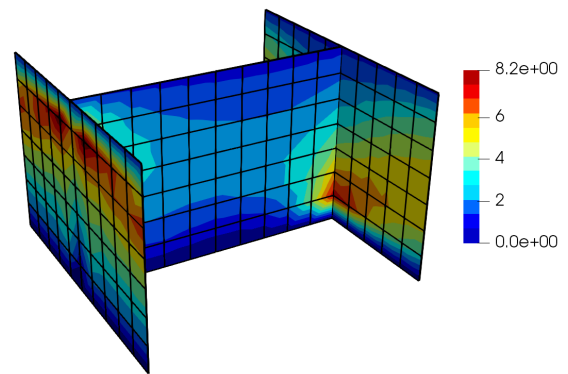
(a) Curva carga-deslocamento



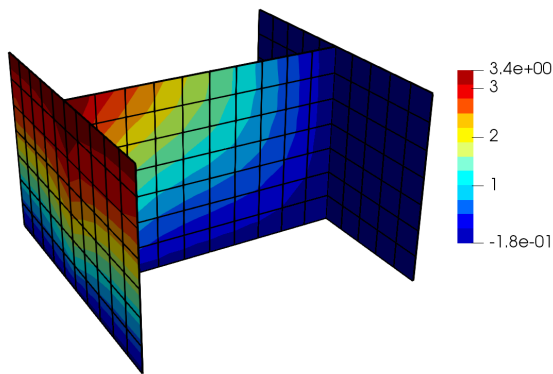
(b) Deslocamento Z (mm)



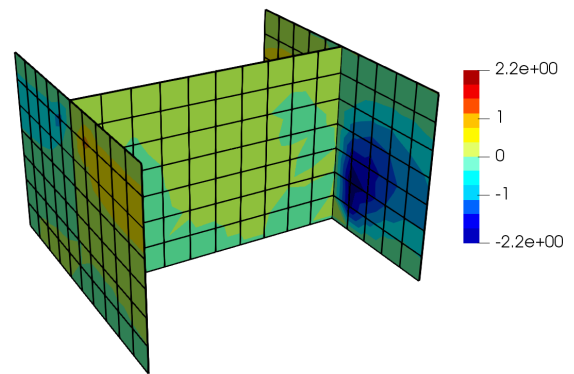
(c) Deslocamento em X (mm)



(d) Rotação em X (10^{-3} rad)



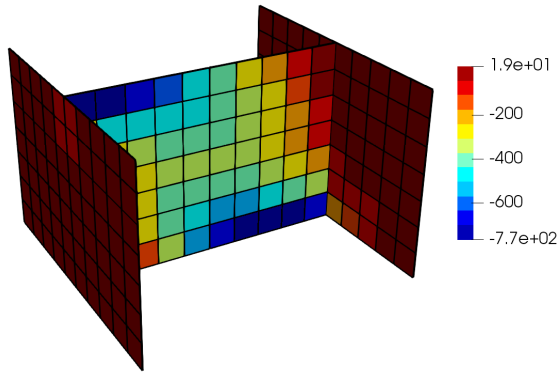
(e) Deslocamento em Y (mm)



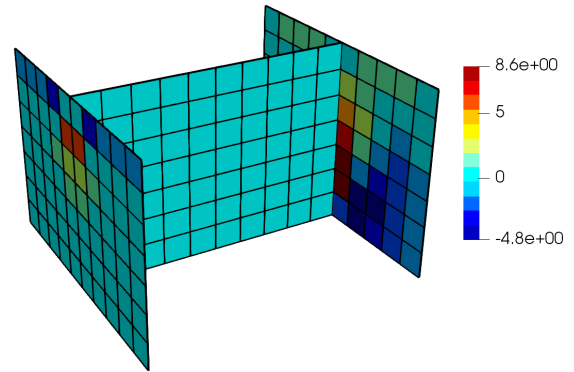
(f) Rotação em Y (10^{-3} rad)

Fonte: O autor (2022)

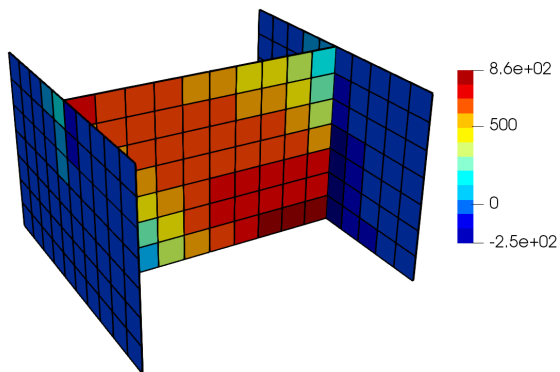
Figura 39 – Pilar-parede seção H da NUPEC - Esforços Internos



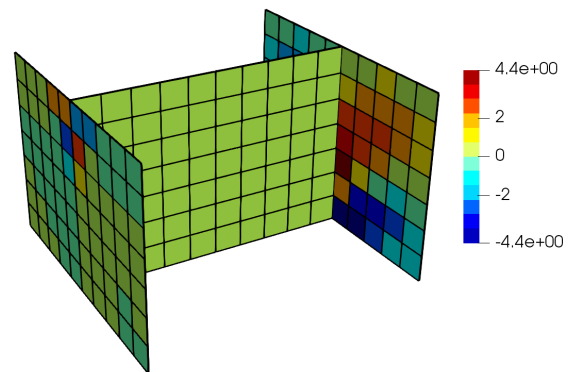
(a) Esforço normal N_x (kN/m)



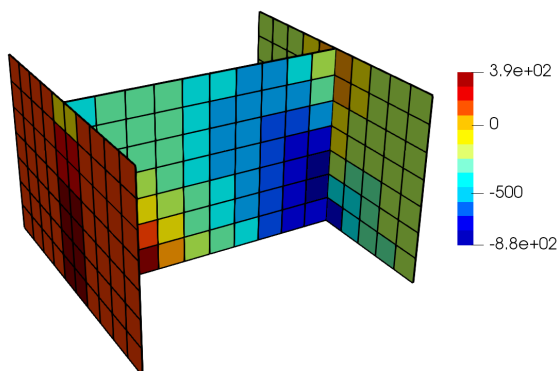
(b) Momento fletor M_x (kN.m/m)



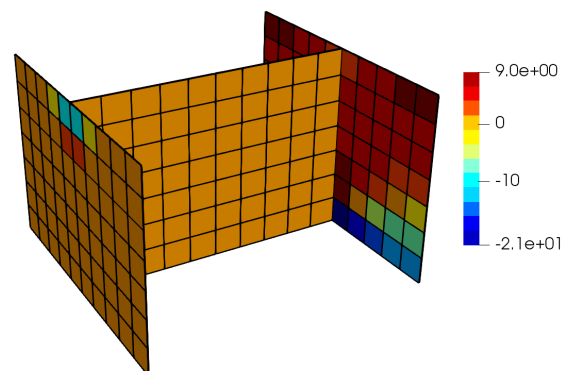
(c) Esforço cortante N_{xy} (kN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (kN.m/m)



(e) Esforço normal N_y (kN/m)



(f) Momento fletor M_y (kN.m/m)

Fonte: O autor (2022)

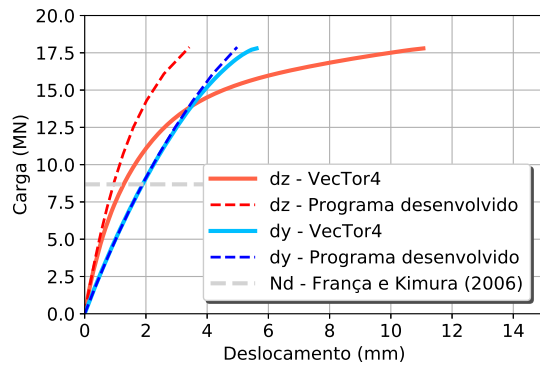
5.6 PILAR-PAREDE SIMPLES DE FRANÇA E KIMURA

O próximo problema avaliado consistiu na reanálise do pilar-parede simples de França e Kimura (2006) e Kimura (2016), discutido no capítulo 3. De forma geral, foram considerados no modelo os mesmos parâmetros e premissas apresentados anteriormente, sendo feitas apenas mudanças pontuais, como, por exemplo, o carregamento externo aplicado em 10 incrementos, tolerância do erro igual a 10^{-2} e a espessura da casca é discretizada em 10 lamelas de concreto. A estratégia adotada na modelagem dos elementos rígidos considerou o mesmo modelo constitutivo dos outros elementos, contudo, majorando f_{cr} por um fator de 10^3 , de forma a evitar a fissuração. Na análise dos resultados, foram usadas duas curvas carga-deslocamento, sendo a diferença entre elas o grau de liberdade aferido: translação vertical, no nó na extremidade superior direita (dy), e, translação transversal ao plano do pilar-parede, no ponto central do bordo direito (dz).

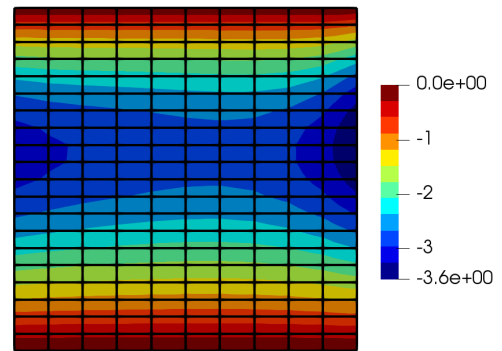
Nas Figuras 40 a 43 consta a comparação entre as curvas carga-deformação obtidas no programa desenvolvido e no VecTor 4 (capítulo 3), admitindo na análise apenas a NLF, e, a combinação da NLF e NLG. Pode-se perceber que, em relação da curva carga - dz , a consideração da NLG no cálculo tende a aproximar a resposta do programa desenvolvido da solução via VecTor 4 (NLF e NLG), ainda que seja encontrada uma resposta mais rígida, Figura 42(a). Em ambas as situações a curva carga - dy , foi bastante próxima nas duas ferramentas. Além disso, nos dois casos, a carga última obtida pelo programa é muito próxima do VecTor 4. É possível observar que até o nível de carregamento N_d aplicado originalmente por França e Kimura (2006) (marcado em cinza no gráfico), a diferença entre os programas é desprezível, apesar da análise ter sido feita usando a armadura proposta originalmente. Isso reforça os argumentos que: a carga última desses elementos é comumente subestimada pelos métodos tradicionais, e, que existem outras características do seu comportamento que precisam ser estudadas com cautela.

As Figuras 44 a 47 apresentam os resultados de duas análises adicionais desse problema: considerando a armadura vertical uniformemente distribuída, e, modificando a geometria do pilares-parede de forma a obter um índice de esbeltez igual a 90 (SILVA; HOROWITZ, 2020), subseção 3.4.3. Nos dois modelos, pode-se observar a diminuição da capacidade resistente da peça, tendo o programa desenvolvido apresentado, no caso do pilar-parede esbelto uma boa proximidade com a resposta do VecTor 4. Contudo, é importante frisar que uma validação apropriada desse tipo de ferramenta deve ser conduzida utilizando resultados de experimentos. A consideração das respostas numéricas do VecTor4 como referência foi a opção adotada, visto a falta de dados experimentais de pilares-paredes em condições análogas a apresentada. Assim, fica evidente a necessidade de investigações experimentais, de forma a não só obter um melhor entendimento do comportamento da construção, mas também produzir dados que viabilizem o desenvolvimento de ferramentas computacionais mais adequadas. O tempo de processamento foi próximo de 6 minutos.

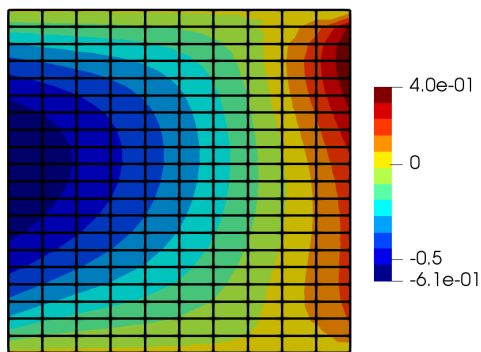
Figura 40 – Pilar-parede simples - Deslocamentos (apenas NLF)



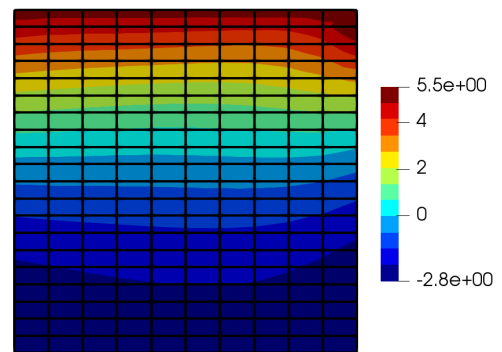
(a) Curva carga-deslocamento



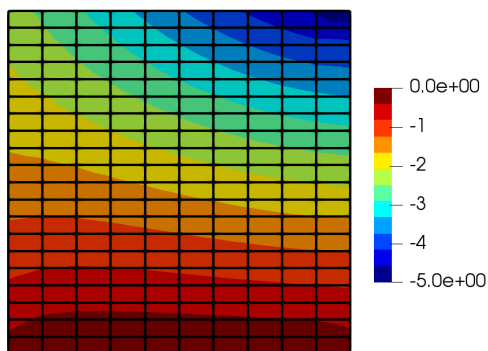
(b) Deslocamento Z (mm)



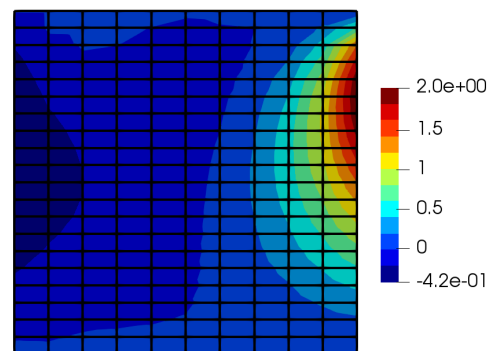
(c) Deslocamento em X (mm)



(d) Rotação em X (10^{-3} rad)



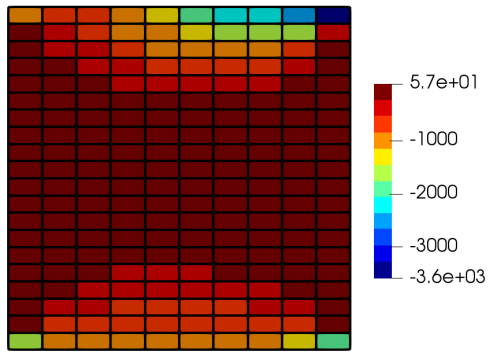
(e) Deslocamento em Y (mm)



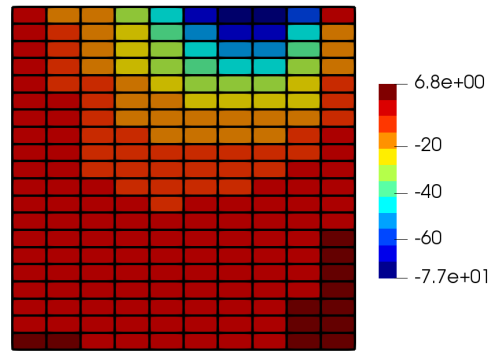
(f) Rotação em Y (10^{-3} rad)

Fonte: O autor (2022)

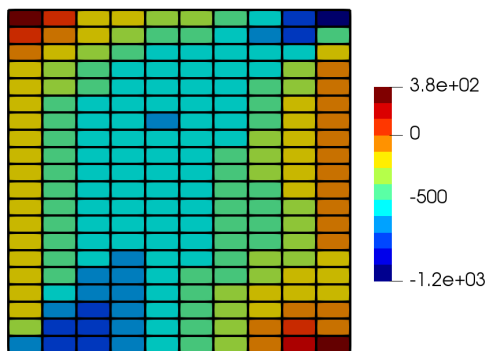
Figura 41 – Pilar-parede simples - Esforços Internos (apenas NLF)



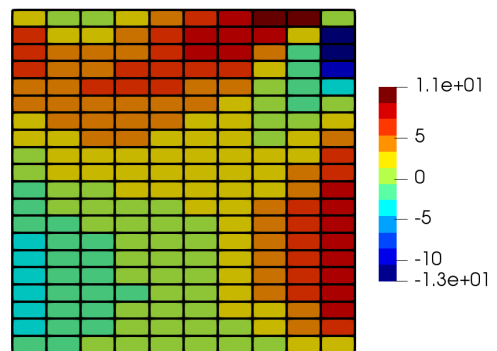
(a) Esforço normal N_x (kN/m)



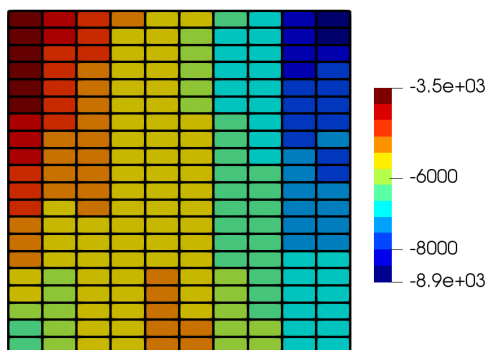
(b) Momento fletor M_x (kN.m/m)



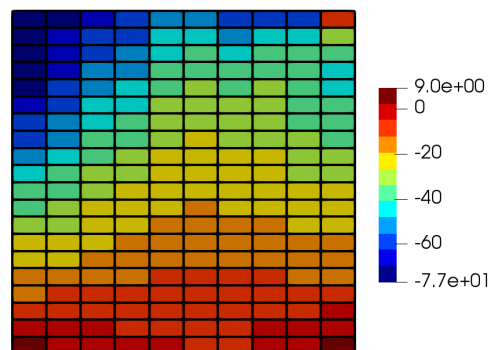
(c) Esforço cortante N_{xy} (kN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (kN.m/m)



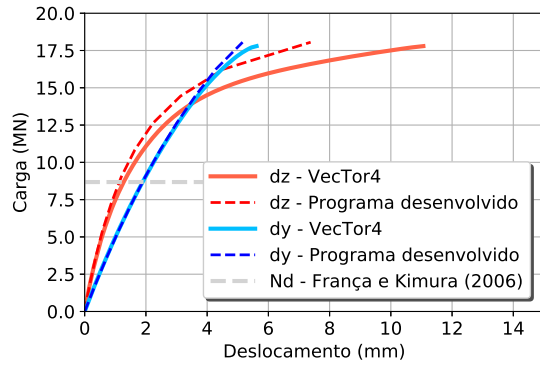
(e) Esforço normal N_y (kN/m)



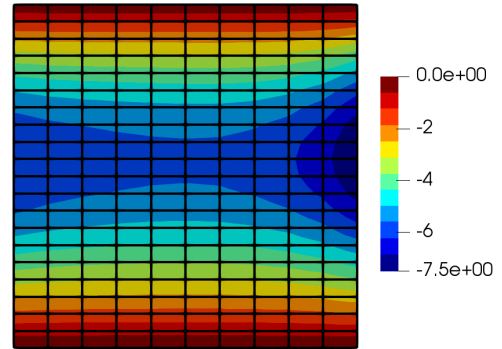
(f) Momento fletor M_y (kN.m/m)

Fonte: O autor (2022)

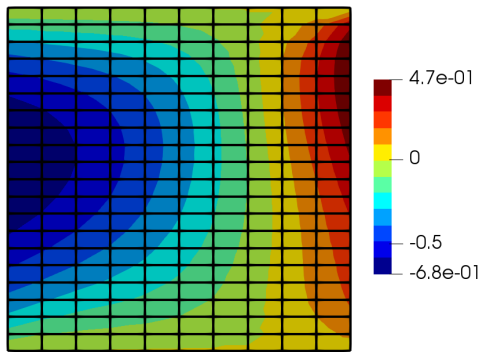
Figura 42 – Pilar-parede simples - Deslocamentos (NLG + NLF)



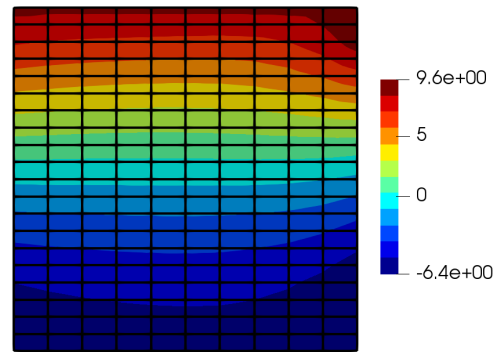
(a) Curva carga-deslocamento



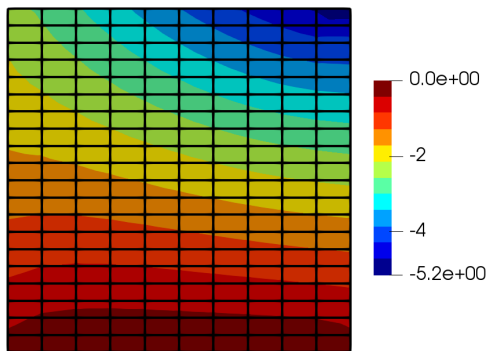
(b) Deslocamento Z (mm)



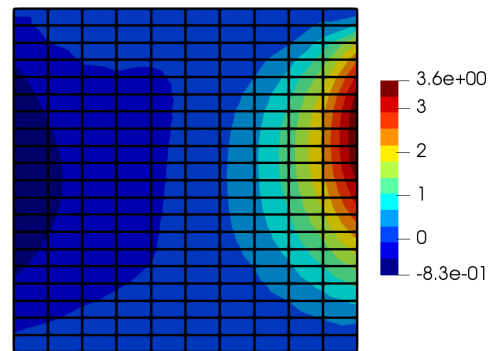
(c) Deslocamento em X (mm)



(d) Rotação em X (10^{-3} rad)



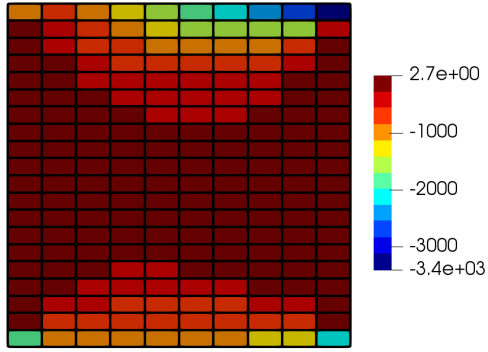
(e) Deslocamento em Y (mm)



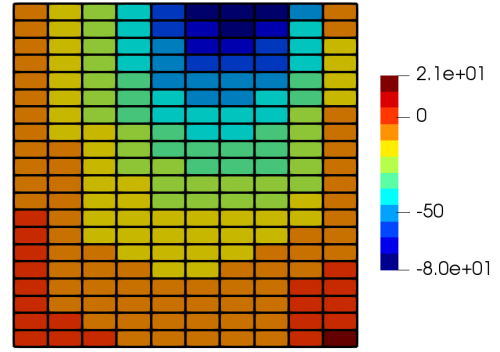
(f) Rotação em Y (10^{-3} rad)

Fonte: O autor (2022)

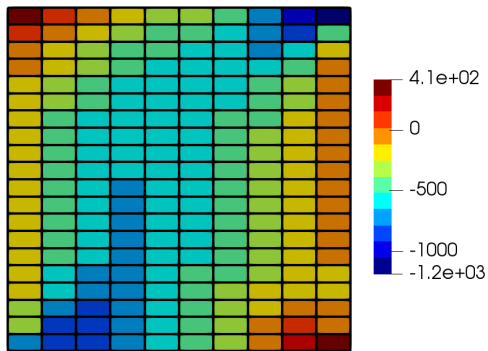
Figura 43 – Pilar-parede simples - Esforços Internos (NLG + NLF)



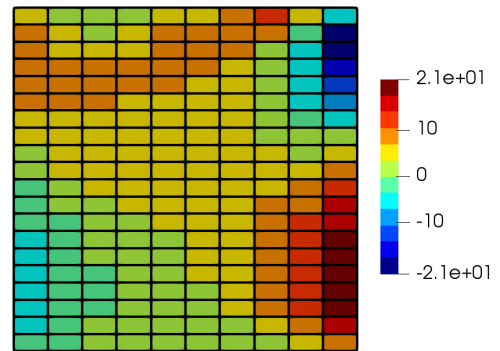
(a) Esforço normal N_x (kN/m)



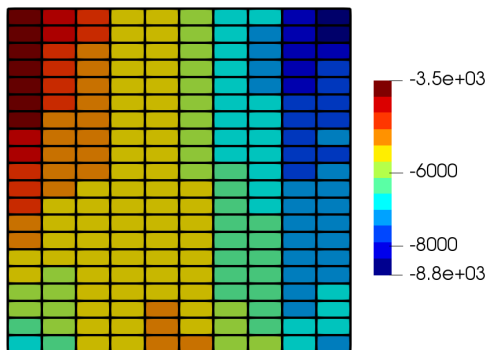
(b) Momento fletor M_x (kN.m/m)



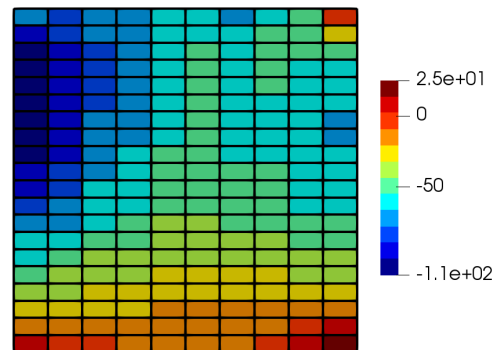
(c) Esforço cortante N_{xy} (kN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (kN.m/m)



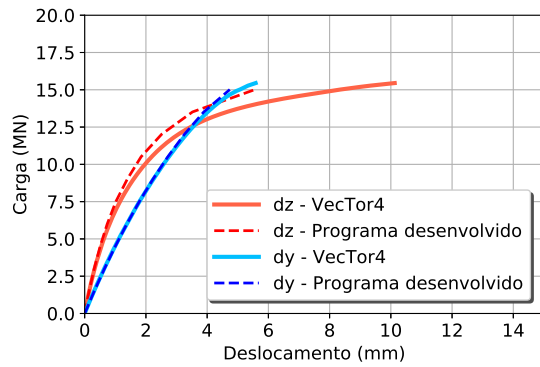
(e) Esforço normal N_y (kN/m)



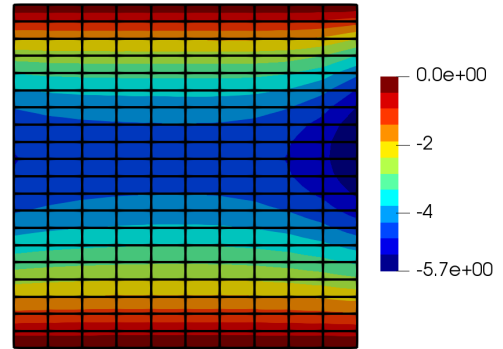
(f) Momento fletor M_y (kN.m/m)

Fonte: O autor (2022)

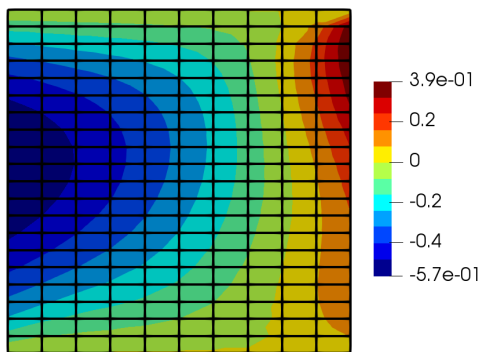
Figura 44 – Pilar-parede simples - Deslocamentos (Arm. Uniforme)



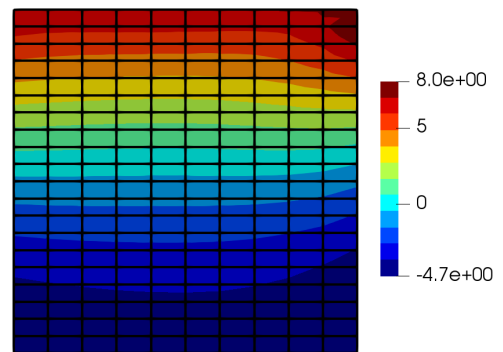
(a) Curva carga-deslocamento



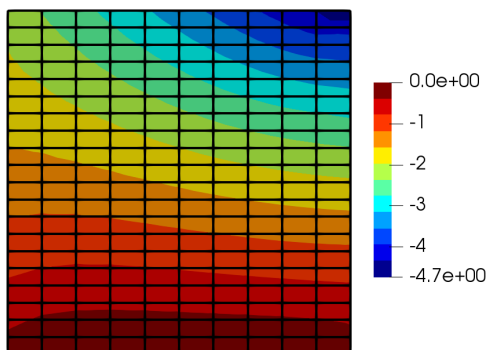
(b) Deslocamento Z (mm)



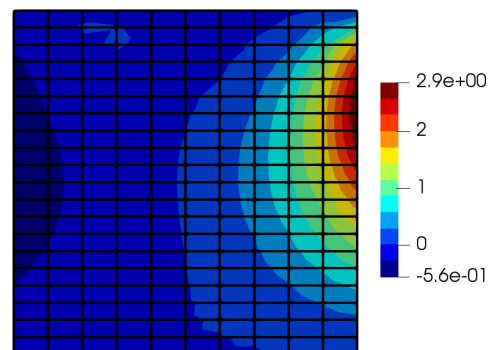
(c) Deslocamento em X (mm)



(d) Rotação em X (10^{-3} rad)



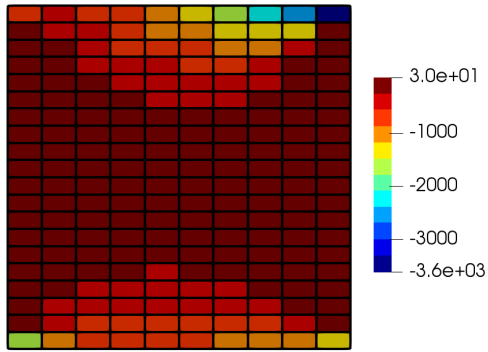
(e) Deslocamento em Y (mm)



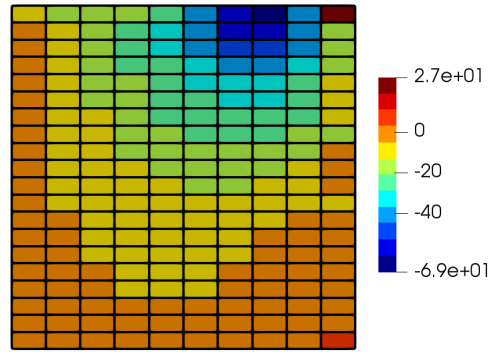
(f) Rotação em Y (10^{-3} rad)

Fonte: O autor (2022)

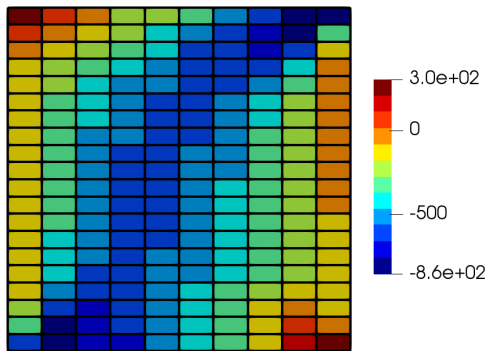
Figura 45 – Pilar-parede simples - Esforços Internos (Arm. Uniforme)



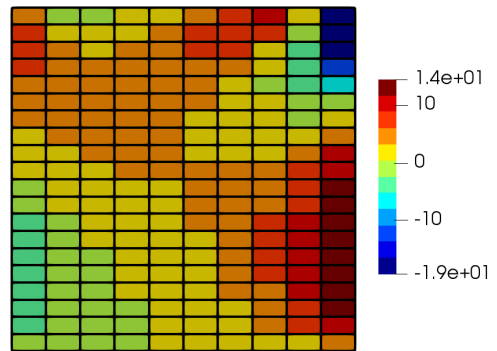
(a) Esforço normal N_x (kN/m)



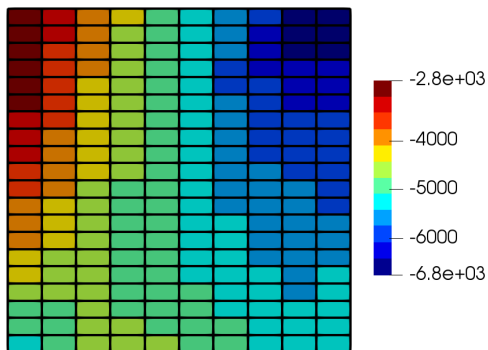
(b) Momento fletor M_x (kN.m/m)



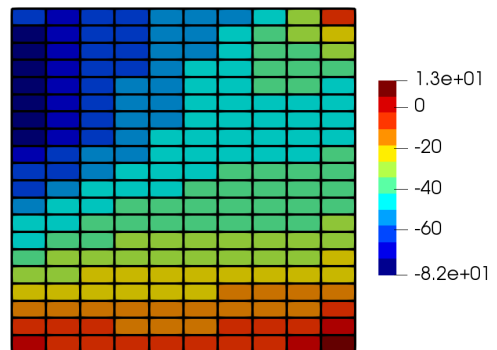
(c) Esforço cortante N_{xy} (kN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (kN.m/m)



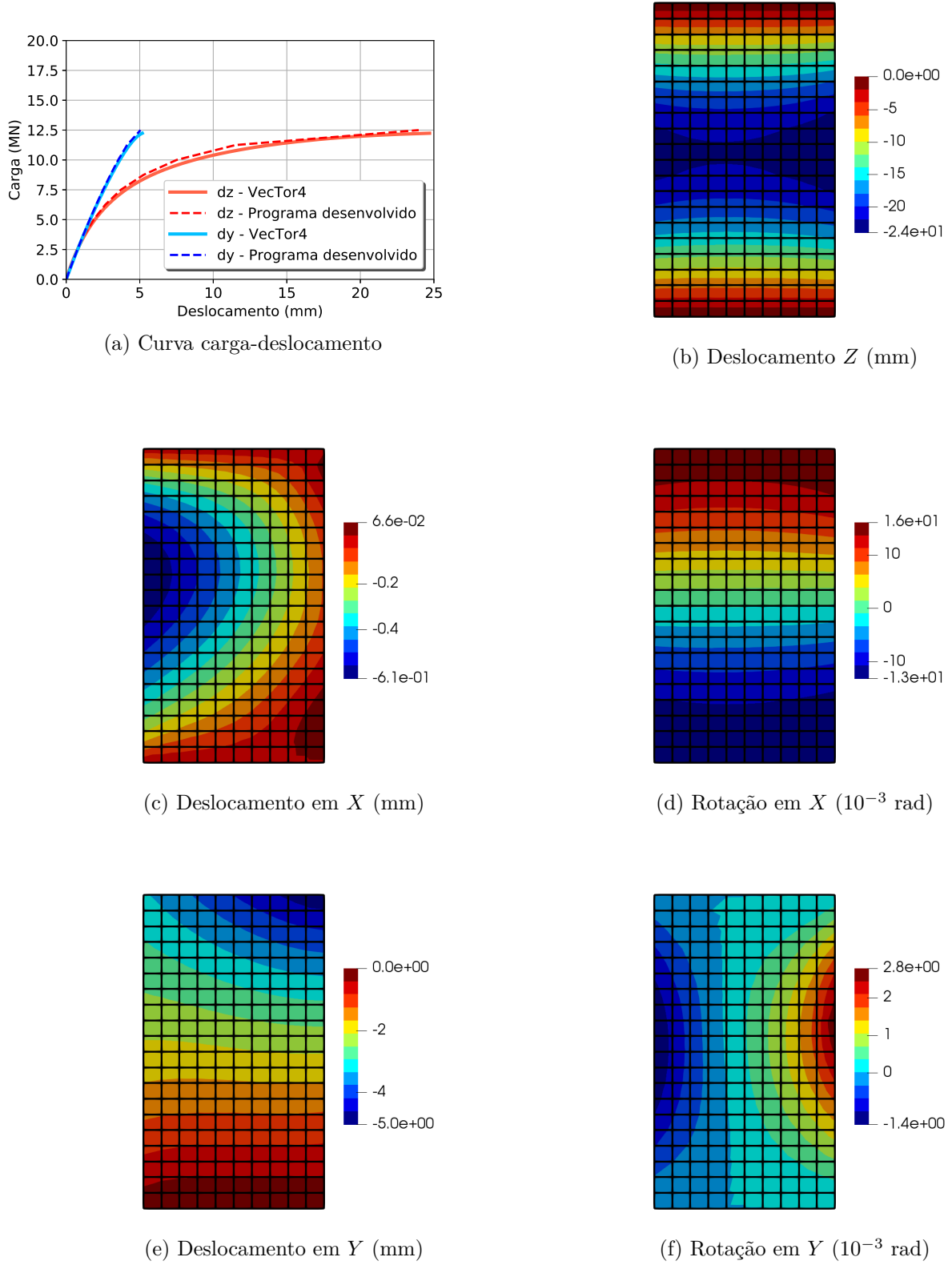
(e) Esforço normal N_y (kN/m)



(f) Momento fletor M_y (kN.m/m)

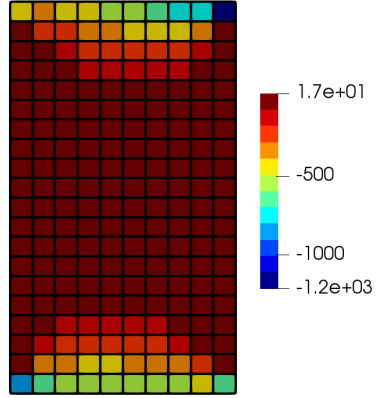
Fonte: O autor (2022)

Figura 46 – Pilar-parede simples - Deslocamentos ($\lambda = 90$)

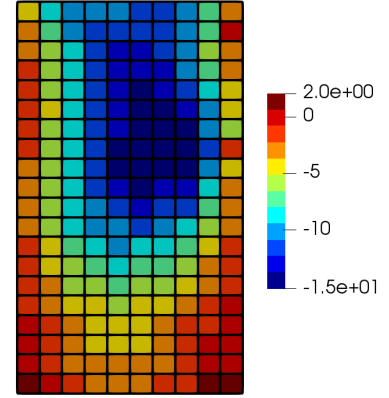


Fonte: Adaptado de Silva e Horowitz (2022)

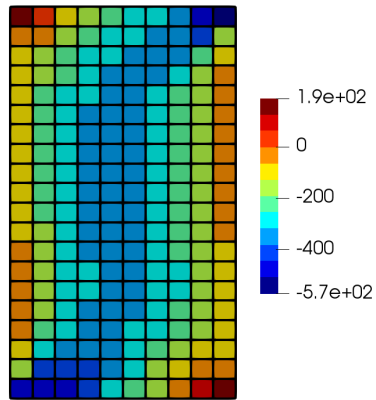
Figura 47 – Pilar-parede simples - Esforços Internos ($\lambda = 90$)



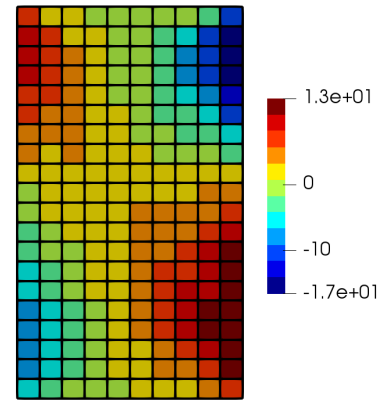
(a) Esforço normal N_x (KN/m)



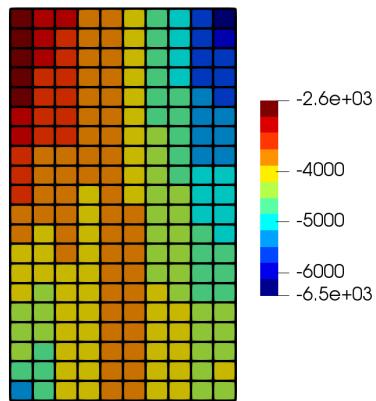
(b) Momento fletor M_x (KN.m/m)



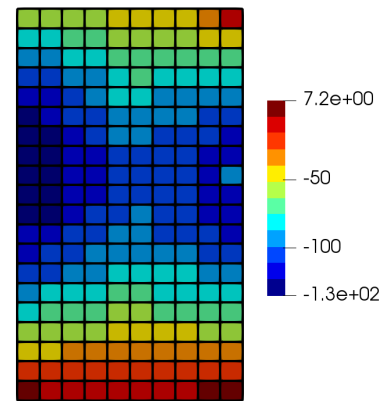
(c) Esforço cortante N_{xy} (KN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (KN.m/m)



(e) Esforço normal N_y (KN/m)



(f) Momento fletor M_y (KN.m/m)

Fonte: O autor (2022)

5.7 PILAR-PAREDE COM SEÇÃO U DE FRANÇA E KIMURA

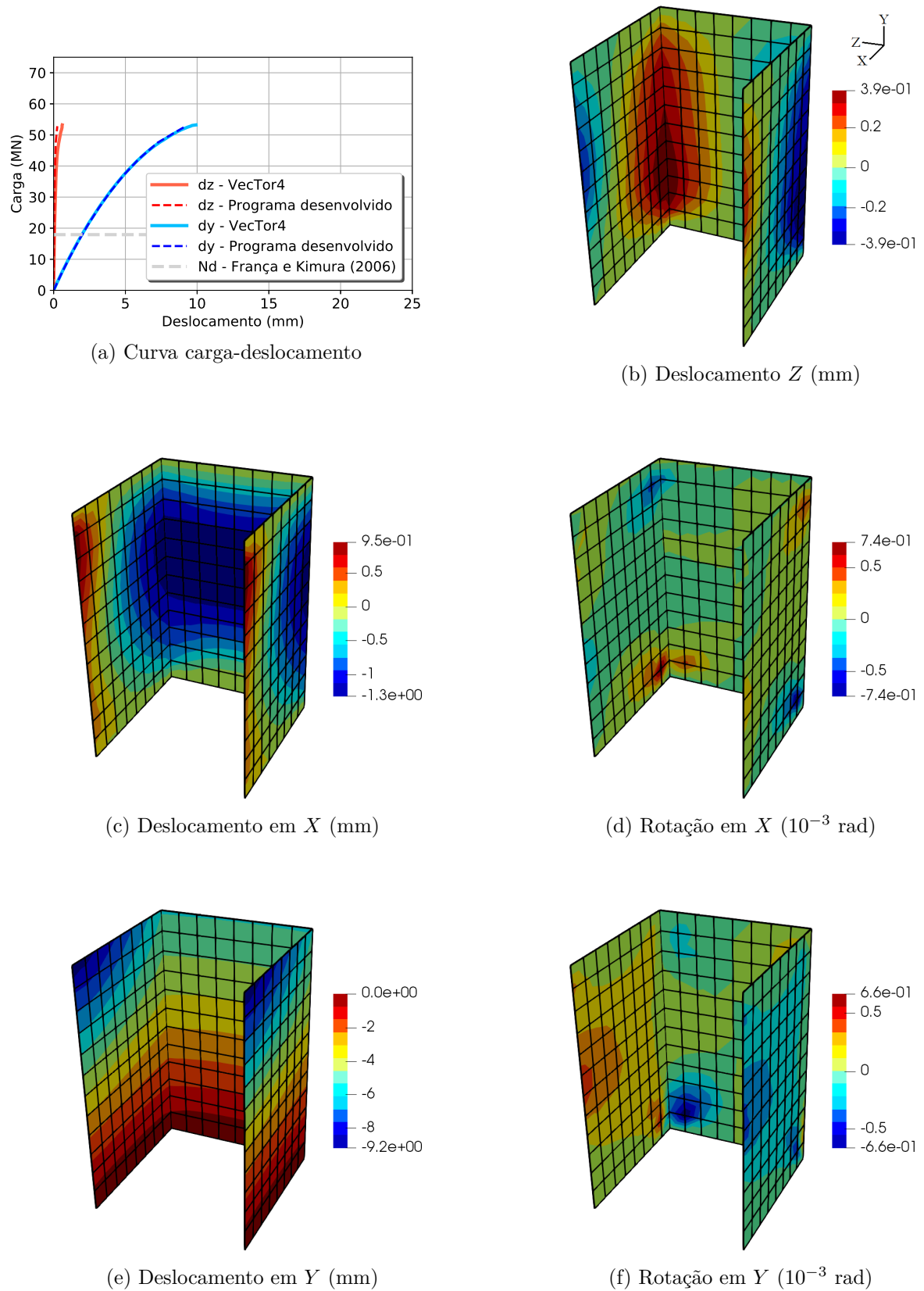
Essa subseção apresenta os resultados obtidos na reanálise do pilar-parede seção U, discutido no capítulo 3, utilizando a ferramenta desenvolvida, em comparação com o comportamento encontrado via VecTor 4. Na modelagem do problema, foram considerados os mesmos parâmetros e premissas apresentados anteriormente, sendo feitas apenas mudanças pontuais, semelhante a subseção 5.6, como, por exemplo, o carregamento externo aplicado apenas em 10 incrementos, tolerância do erro igual a 10^{-2} e a modelagem dos elementos rígidos. Na análise dos resultados, foram consideradas duas curvas carga-deslocamento, sendo a diferença entre elas o grau de liberdade aferido: translação vertical, no nó na extremidade superior, do bordo livre, de uma aba (dy), e, translação transversal do ponto médio do bordo livre de uma aba (dz), sendo esse último grau de liberdade associado ao efeito localizado de 2ª ordem.

Nas Figuras 48 a 51 consta a comparação entre as respostas estruturais, próximo à ruptura, obtidas no programa desenvolvido e no VecTor 4, considerando a NLF e a NLG, tanto para o modo de flambagem simétrico como o antissimétrico. Pode-se perceber uma grande proximidade entre as soluções dos dois programas, tanto nas cargas últimas como na curva carga-deslocamento referente ao grau de liberdade dy . O programa desenvolvido apresentou um comportamento mais rígido em relação ao deslocamento transversal ao plano (dz). Apesar disso, esse grau de liberdade, nos dois modos de flambagem, próximo à ruptura, nas duas ferramentas, não ultrapassou o valor de 1 mm. Novamente, foi visto que, até o nível de carregamento N_d , aplicado originalmente por França e Kimura (2006) (marcado em cinza no gráfico), a diferença entre os dois programas é desprezível, embora a análise tenha sido feita usando a armadura proposta pelos autores originais.

As Figuras 52 a 55 apresentam os resultados das análises da estrutura, considerando uma distribuição uniforme da armadura longitudinal, para os dois modos de flambagem. Além de terem sido observados os mesmos pontos discutidos anteriormente: carga de ruptura próxima, boa aderência entre os dois programas na curva carga-deslocamento dy , e, comportamento mais rígido no programa desenvolvido no que diz respeito a curva carga-deslocamento dz , foi possível detectar uma diminuição da carga última, como era esperado, em cerca de 4%, devido ao fato de não existir mais uma concentração da armadura nos bordos livres das abas, Figura 9, e, essa região da estrutura apresentar valores elevados para o esforço normal N_y , Figuras 53(e) e 55(e).

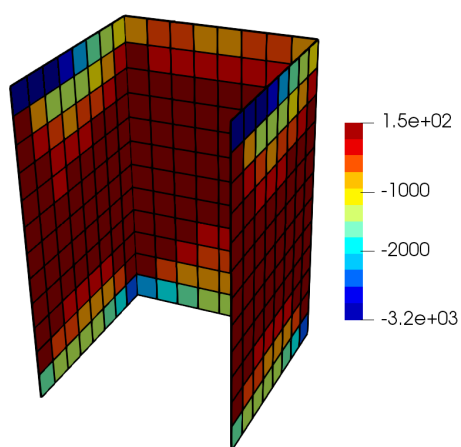
As Figuras 56 a 59 apresentam os resultados de análises adicionais onde a geometria do pilares-parede foi modificada de forma a obter um índice de esbeltez igual a 90, subseção 3.4.3 (SILVA; HOROWITZ, 2020). Novamente, foram observados os mesmos comportamentos referentes à análise inicial.

Figura 48 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Deslocamentos

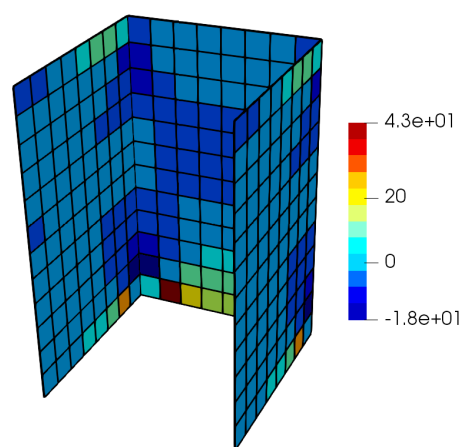


Fonte: O autor (2022)

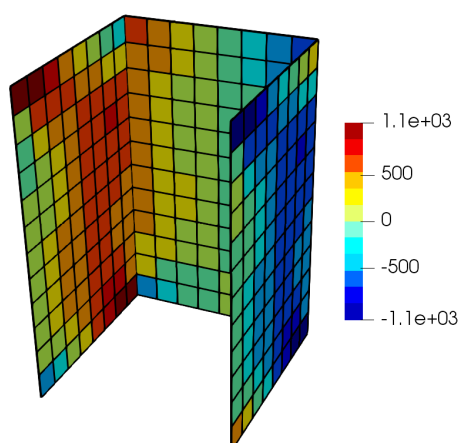
Figura 49 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Esforços Internos



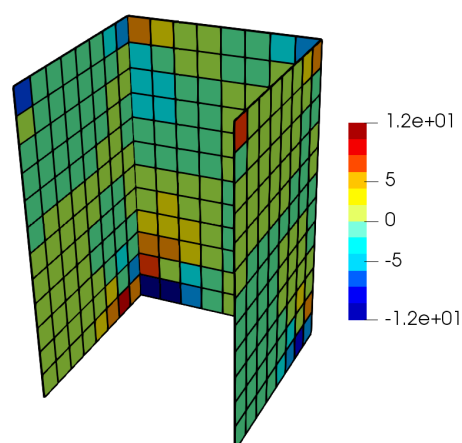
(a) Esforço normal N_x (KN/m)



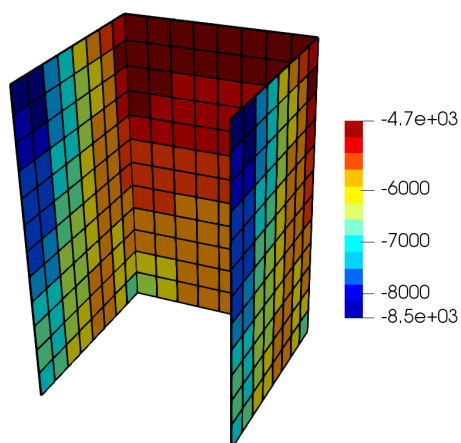
(b) Momento fletor M_x (KN.m/m)



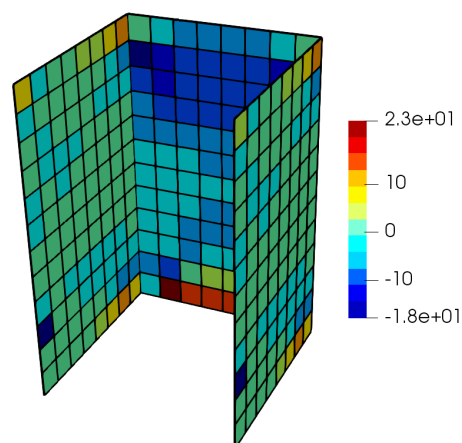
(c) Esforço cortante N_{xy} (KN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (KN.m/m)



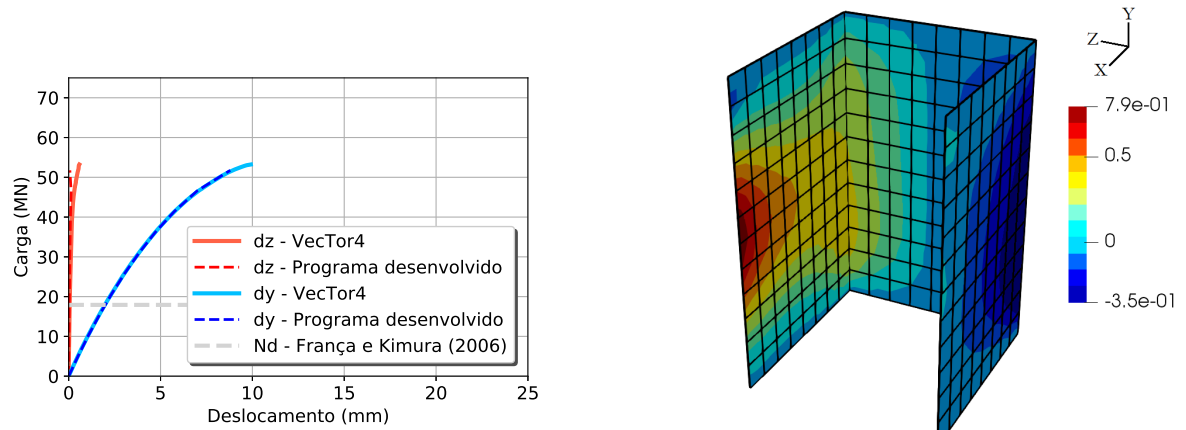
(e) Esforço normal N_y (KN/m)



(f) Momento fletor M_y (KN.m/m)

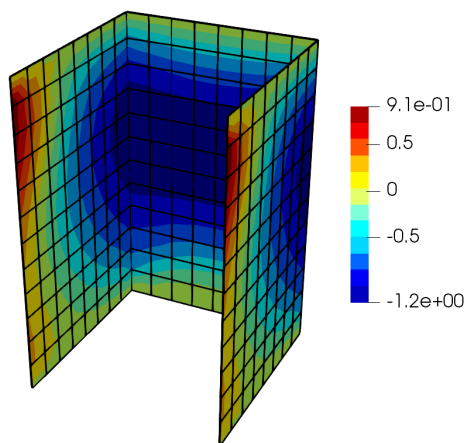
Fonte: O autor (2022)

Figura 50 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Deslocamentos

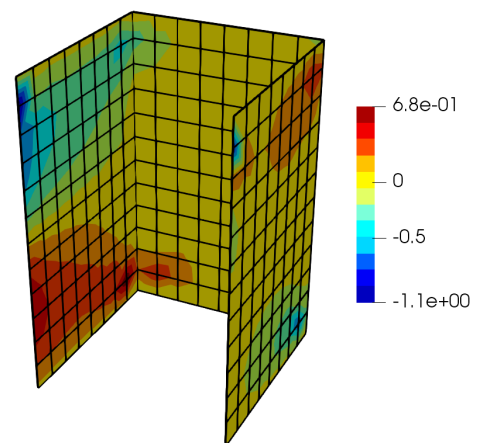


(a) Curva carga-deslocamento

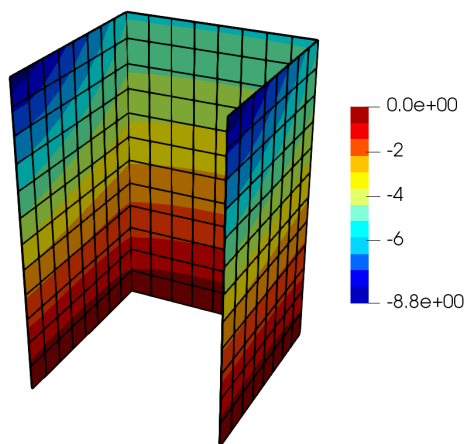
(b) Deslocamento Z (mm)



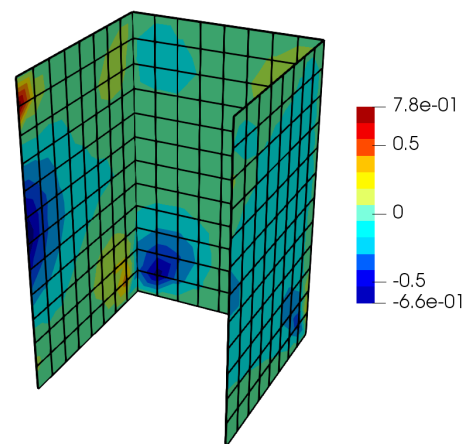
(c) Deslocamento em X (mm)



(d) Rotação em X (10^{-3} rad)



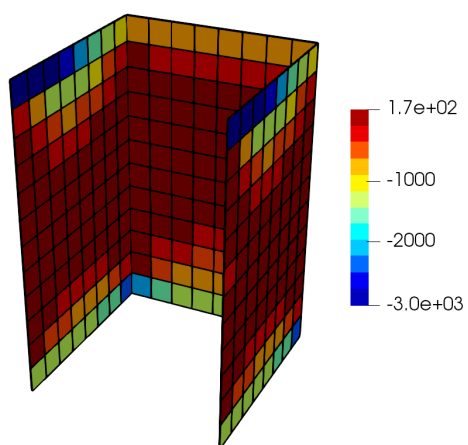
(e) Deslocamento em Y (mm)



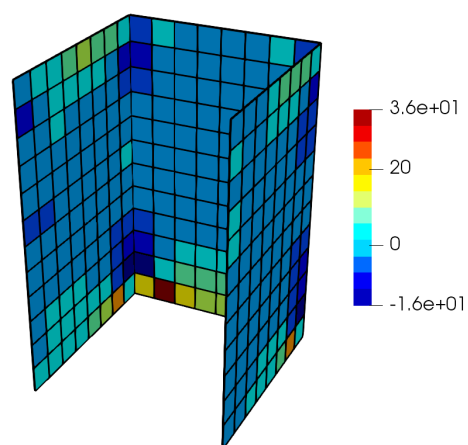
(f) Rotação em Y (10^{-3} rad)

Fonte: O autor (2022)

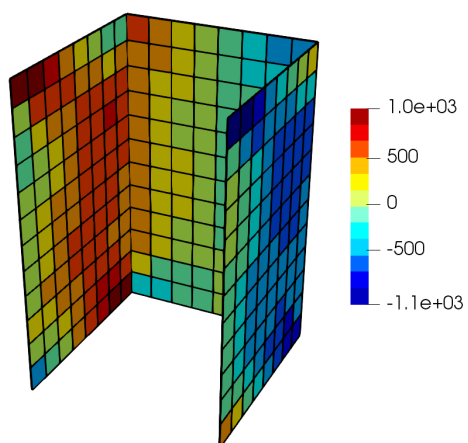
Figura 51 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Esforços Internos



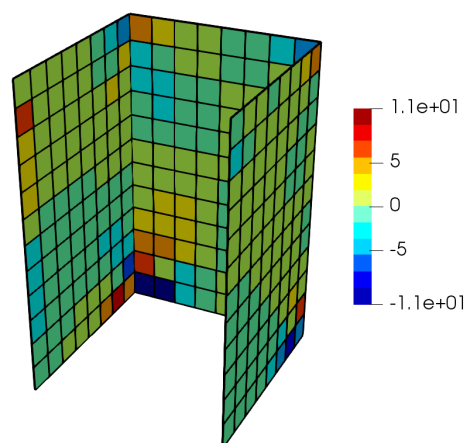
(a) Esforço normal N_x (KN/m)



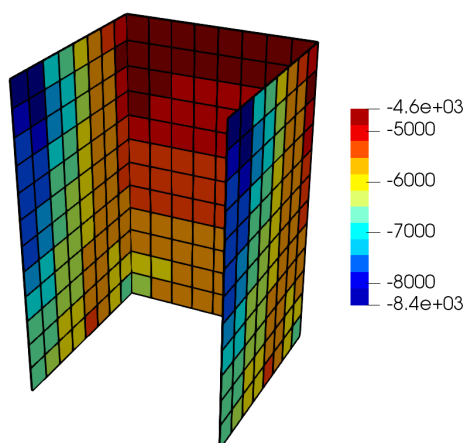
(b) Momento fletor M_x (KN.m/m)



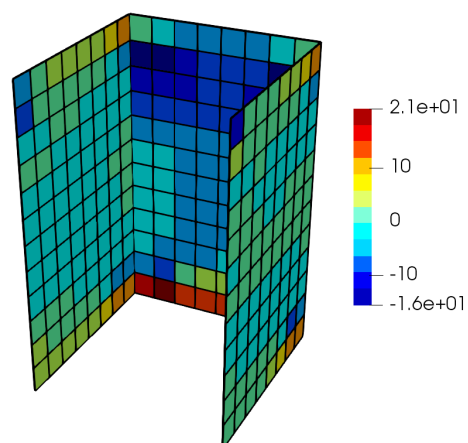
(c) Esforço cortante N_{xy} (KN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (KN.m/m)



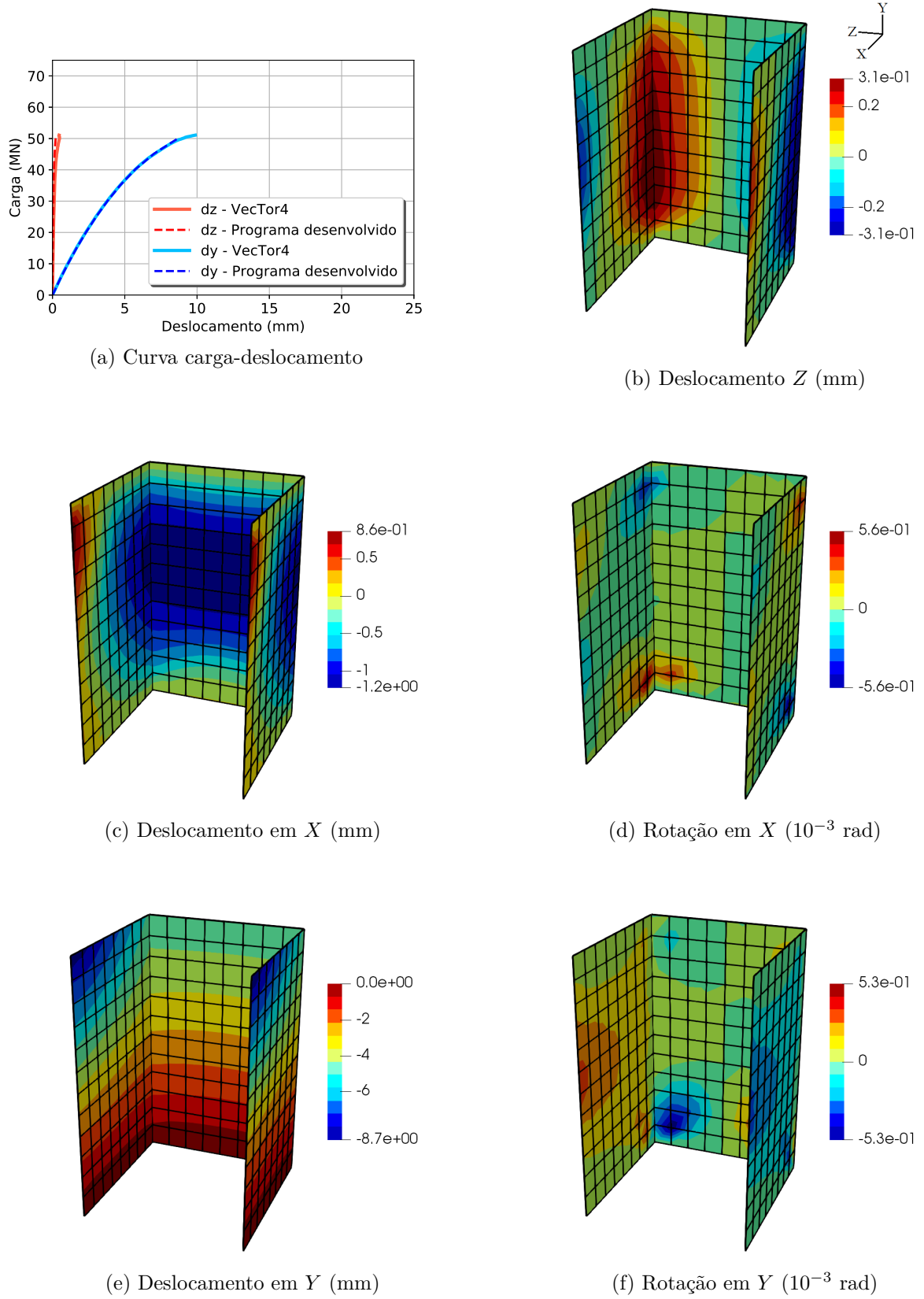
(e) Esforço normal N_y (KN/m)



(f) Momento fletor M_y (KN.m/m)

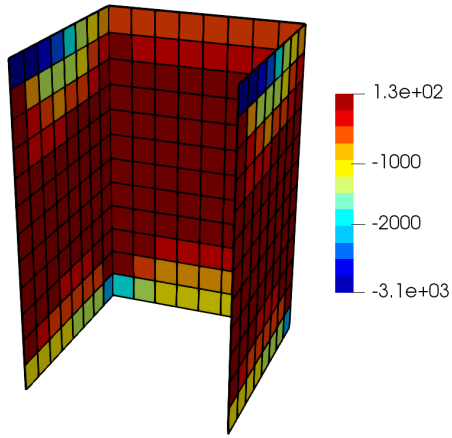
Fonte: O autor (2022)

Figura 52 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Deslocamentos (Arm. Uniforme)

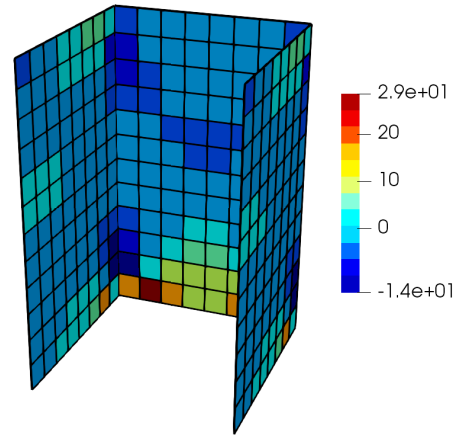


Fonte: O autor (2022)

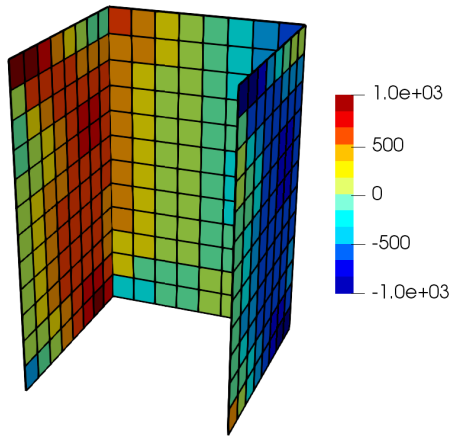
Figura 53 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Esforços Internos (Arm. Uniforme)



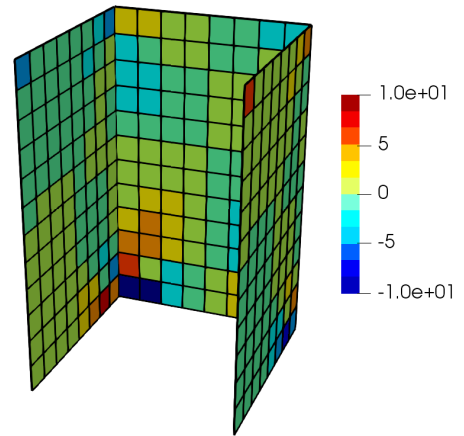
(a) Esforço normal N_x (KN/m)



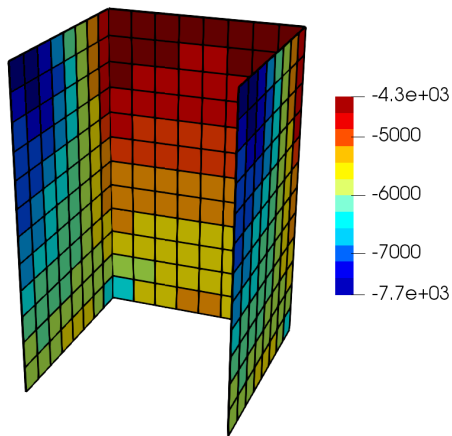
(b) Momento fletor M_x (KN.m/m)



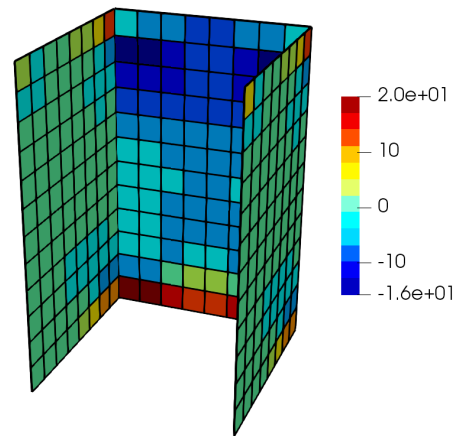
(c) Esforço cortante N_{xy} (KN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (KN.m/m)



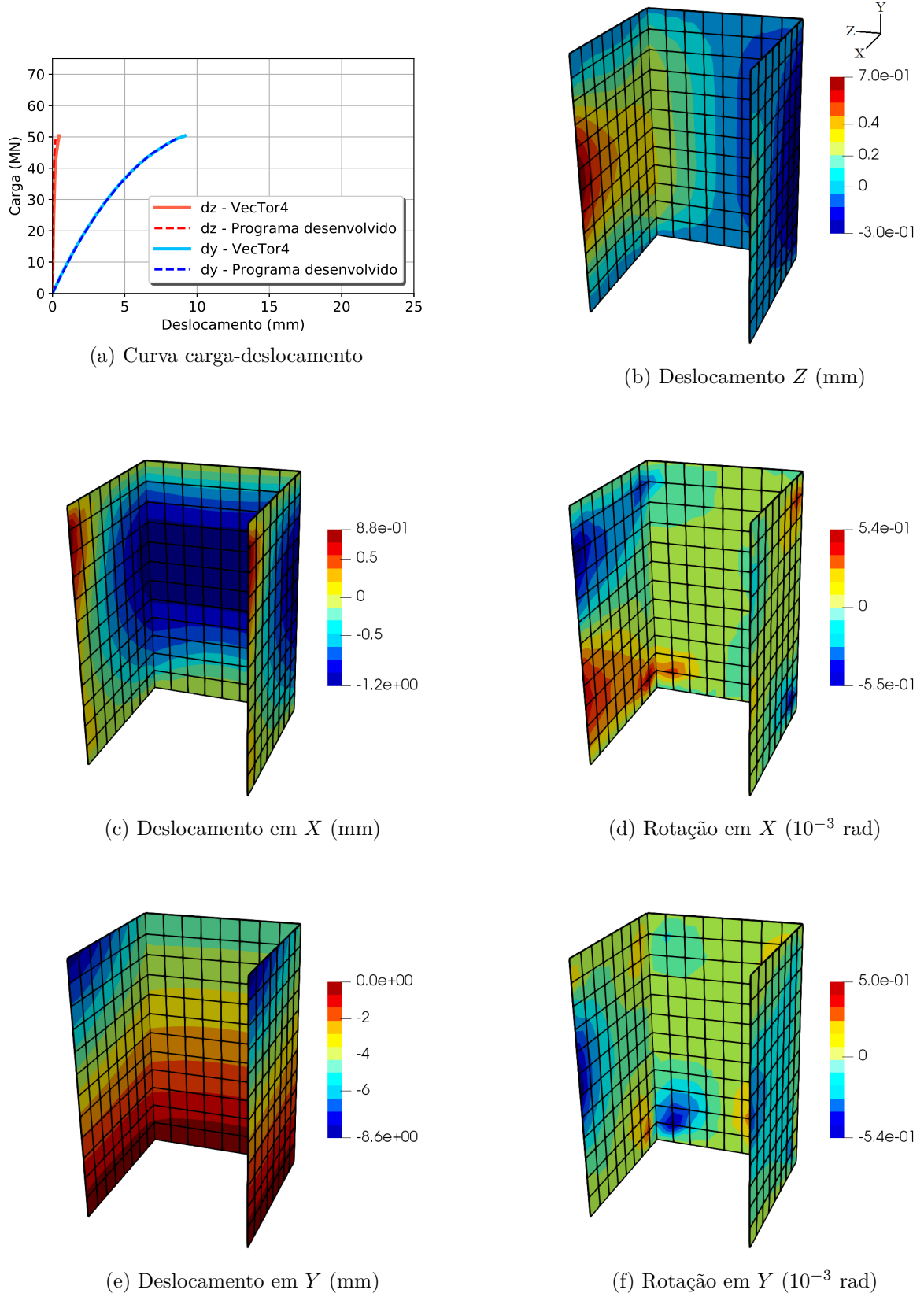
(e) Esforço normal N_y (KN/m)



(f) Momento fletor M_y (KN.m/m)

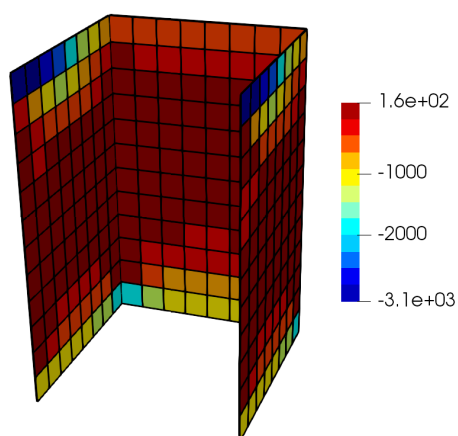
Fonte: O autor (2022)

Figura 54 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Deslocamentos (Arm. Uniforme)

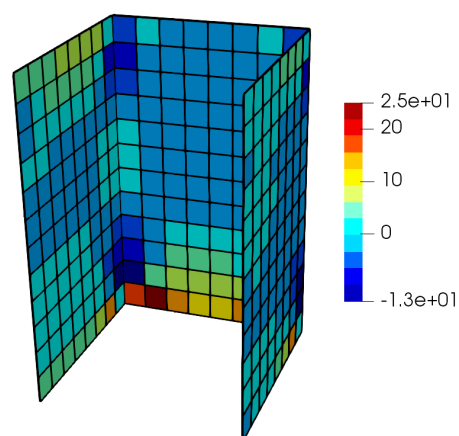


Fonte: O autor (2022)

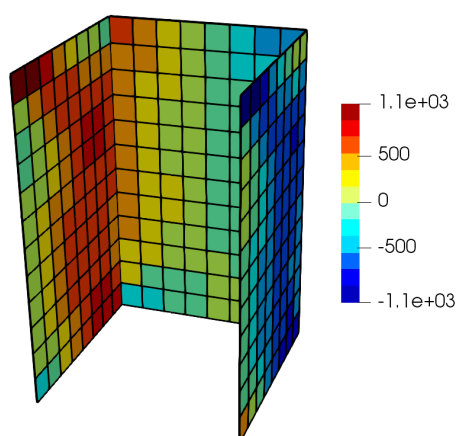
Figura 55 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Esforços Internos (Arm. Uniforme)



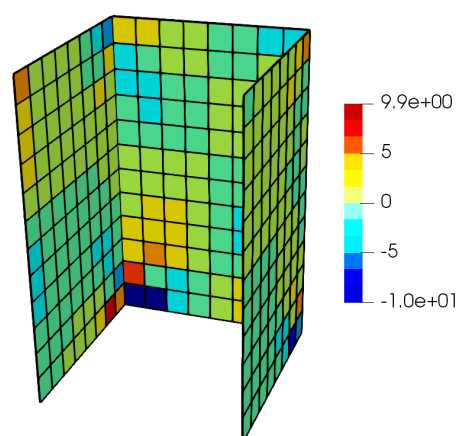
(a) Esforço normal N_x (KN/m)



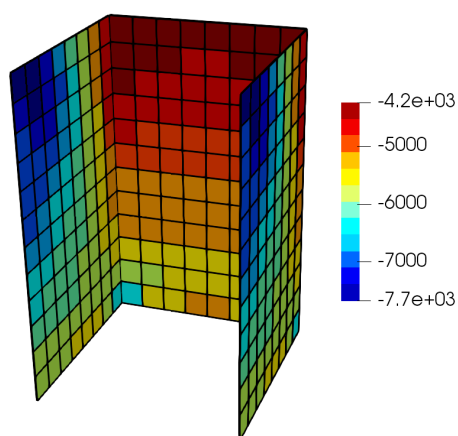
(b) Momento fletor M_x (KN.m/m)



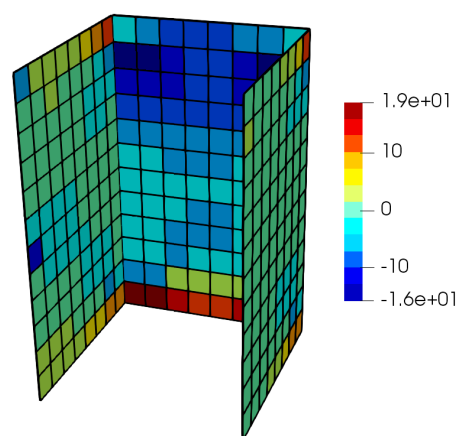
(c) Esforço cortante N_{xy} (KN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (KN.m/m)



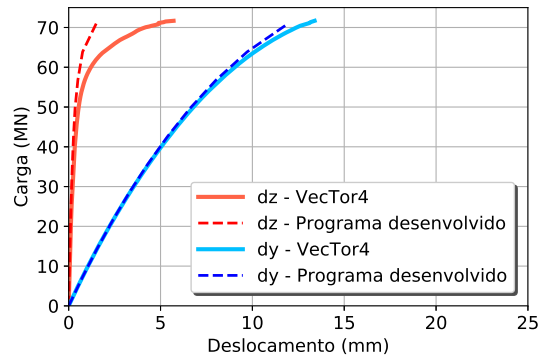
(e) Esforço normal N_y (KN/m)



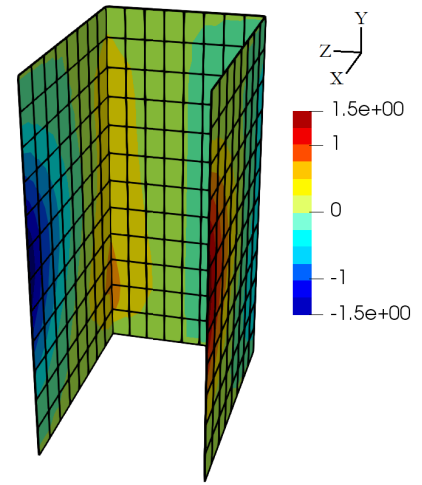
(f) Momento fletor M_y (KN.m/m)

Fonte: O autor (2022)

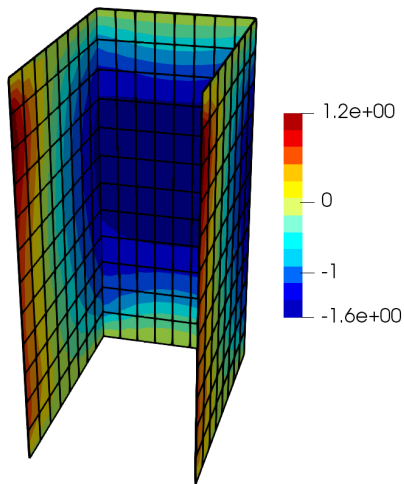
Figura 56 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Deslocamentos ($\lambda = 90$)



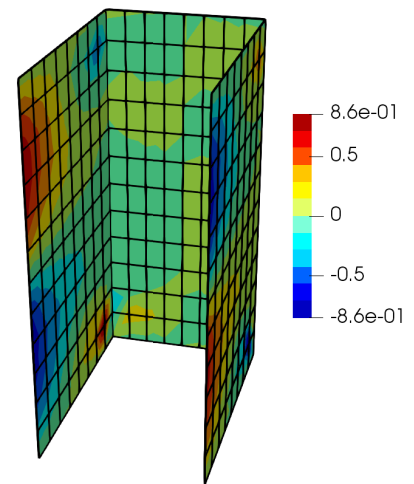
(a) Curva carga-deslocamento



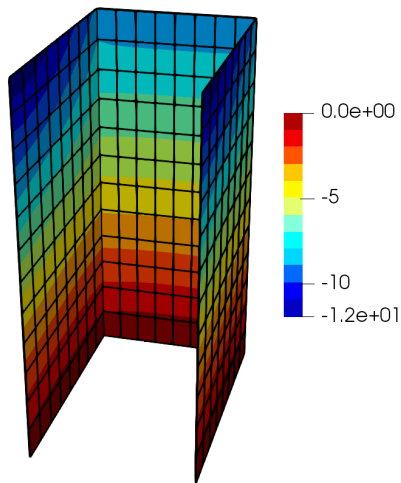
(b) Deslocamento Z (mm)



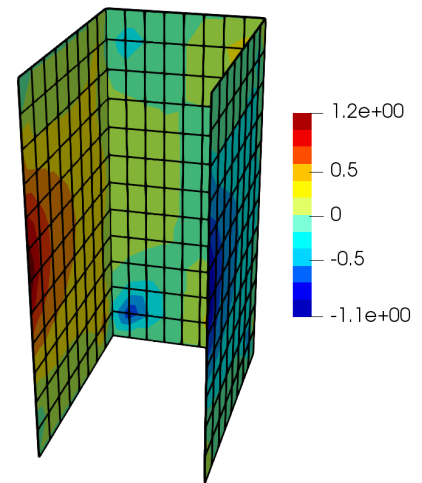
(c) Deslocamento em X (mm)



(d) Rotação em X (10^{-3} rad)



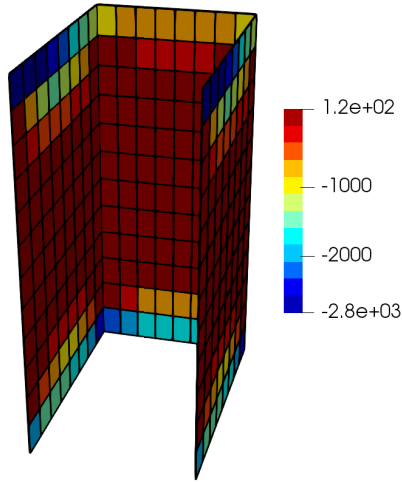
(e) Deslocamento em Y (mm)



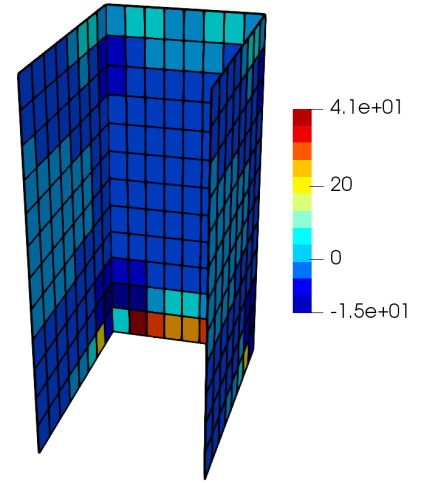
(f) Rotação em Y (10^{-3} rad)

Fonte: O autor (2022)

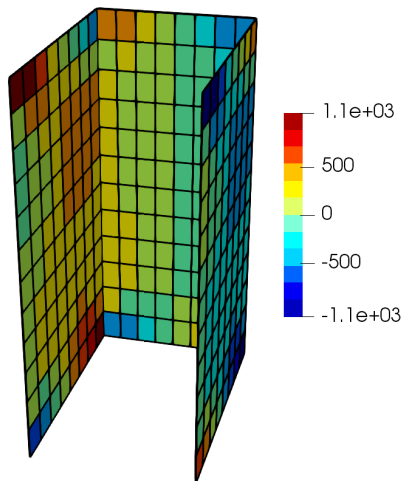
Figura 57 – Pilar-parede U - Modo simétrico - Esforços Internos ($\lambda = 90$)



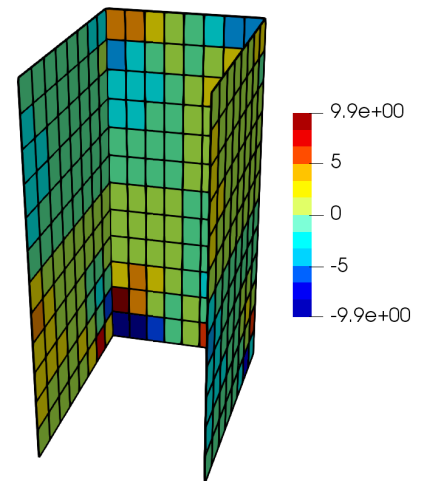
(a) Esforço normal N_x (KN/m)



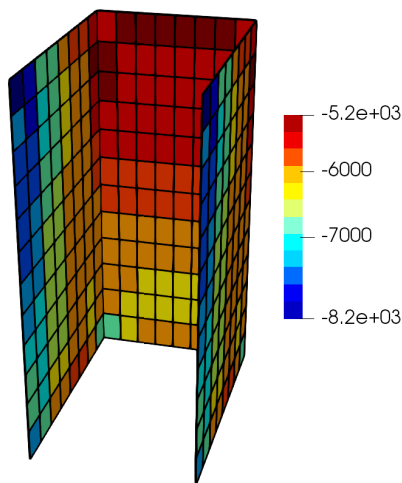
(b) Momento fletor M_x (KN.m/m)



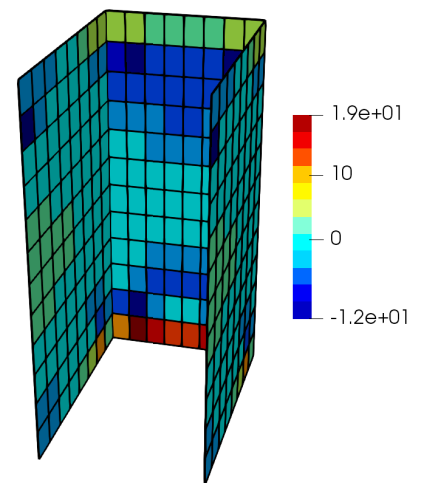
(c) Esforço cortante N_{xy} (KN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (KN.m/m)



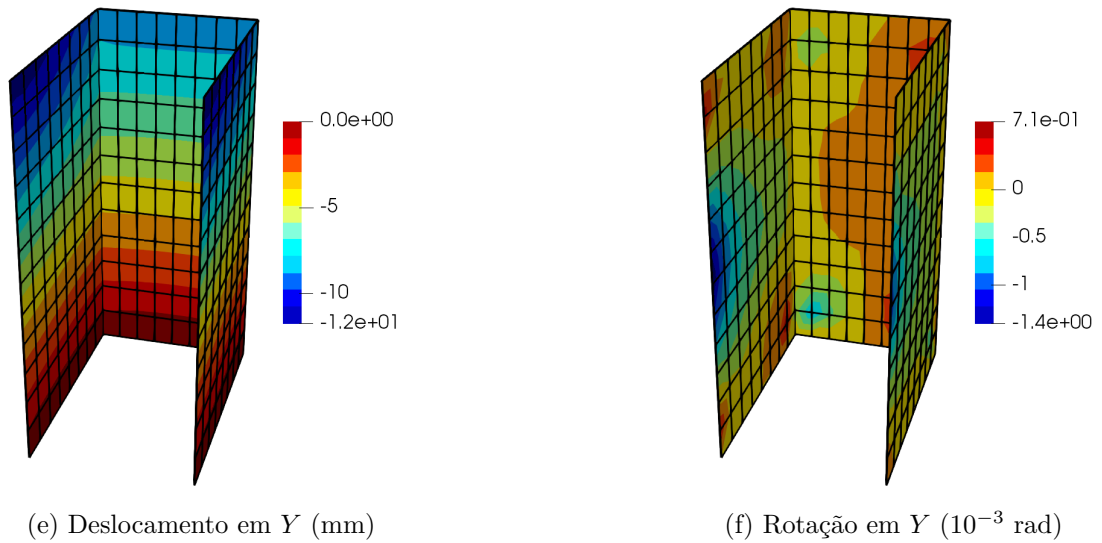
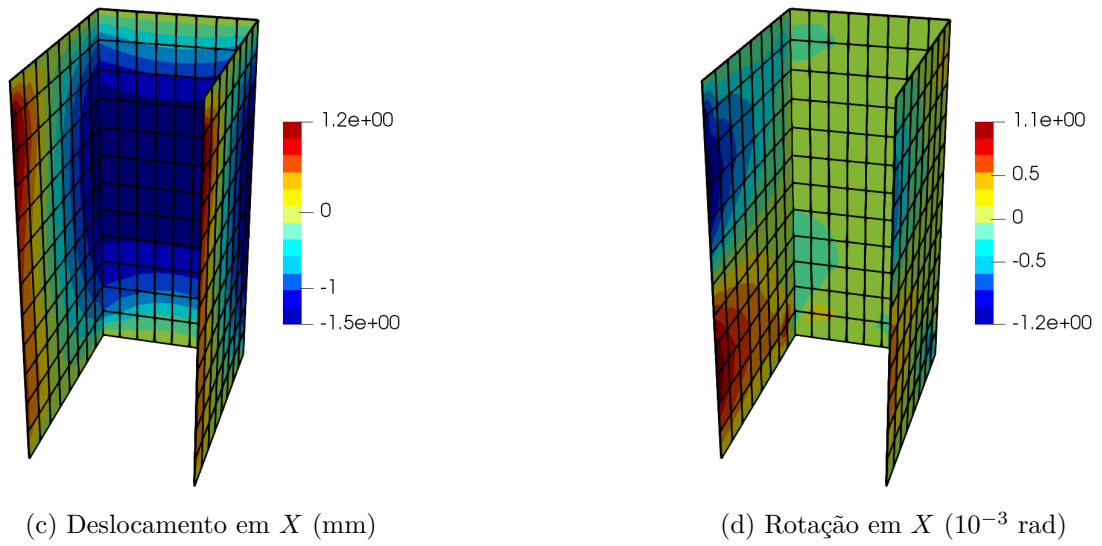
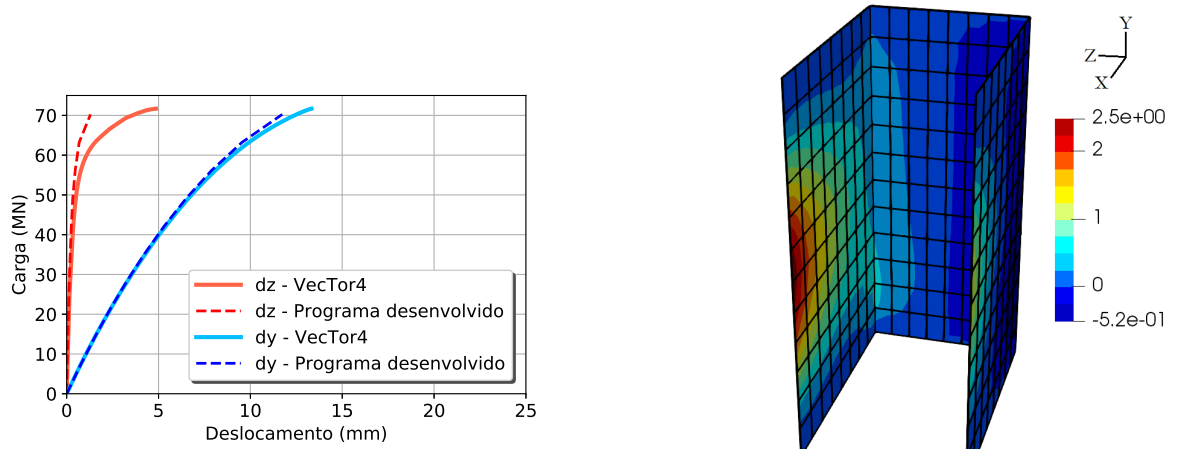
(e) Esforço normal N_y (KN/m)



(f) Momento fletor M_y (KN.m/m)

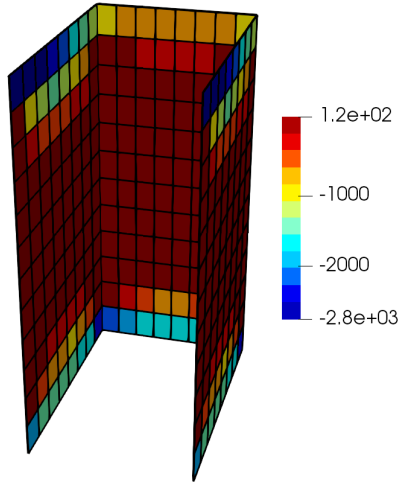
Fonte: O autor (2022)

Figura 58 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Deslocamentos ($\lambda = 90$)

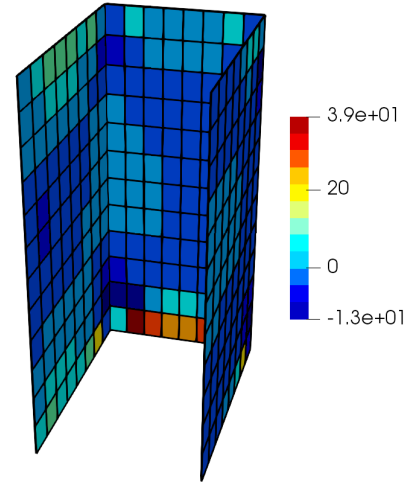


Fonte: O autor (2022)

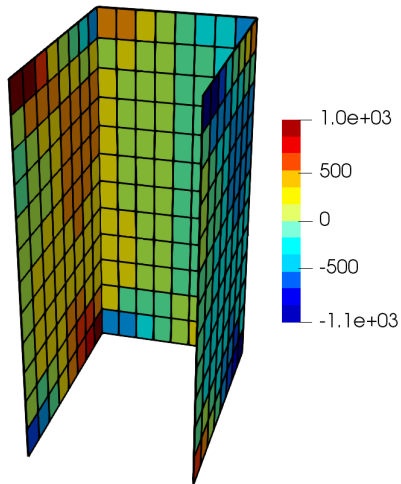
Figura 59 – Pilar-parede U - Modo antissimétrico - Esforços Internos ($\lambda = 90$)



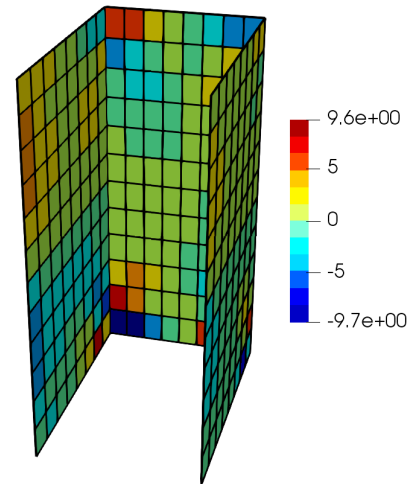
(a) Esforço normal N_x (KN/m)



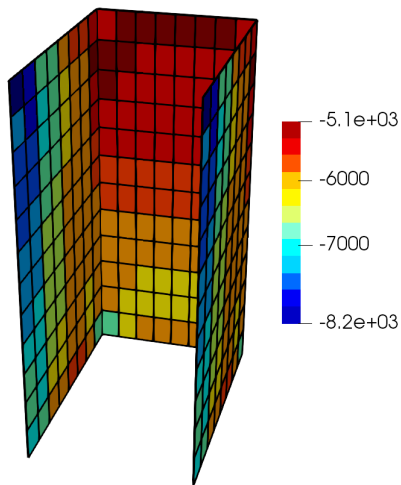
(b) Momento fletor M_x (KN.m/m)



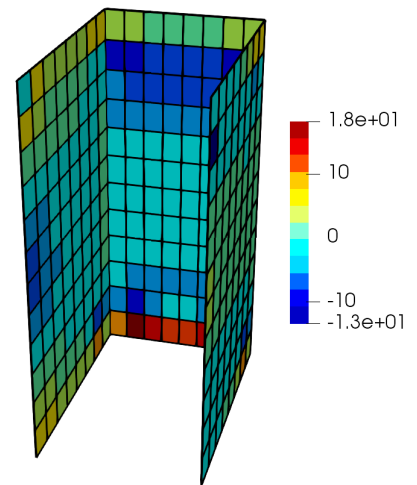
(c) Esforço cortante N_{xy} (KN/m)



(d) Momento torsor M_{xy} (KN.m/m)



(e) Esforço normal N_y (KN/m)



(f) Momento fletor M_y (KN.m/m)

Fonte: O autor (2022)

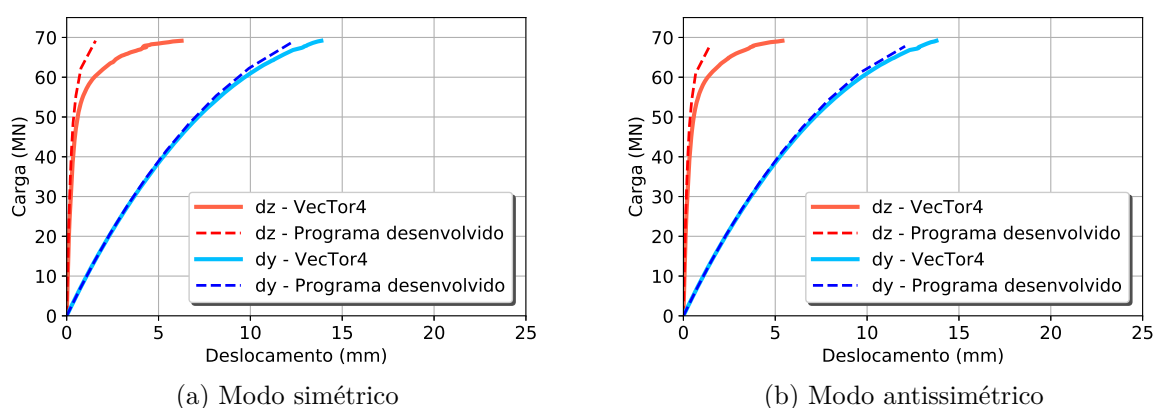
Além disso, pode-se observar que a capacidade resistente da peça aumentou em aproximadamente 35%, apesar do índice de esbelteza ter sido elevado, comportamento contrário ao visto na subseção 5.6. Dois efeitos podem justificar esse resultado:

- O aumento do comprimento das abas de 3 para 4.3 m resultou na diminuição da tensão axial $n_d(x)$, subseção 2.5, associada aos esforços solicitantes;
- Na modificação da geometria, de forma a elevarmos o índice de esbelteza das abas, a taxa de armadura longitudinal em cada elemento foi mantida inalterada em relação a análise inicial, assim, com o aumento de comprimento, de 3 para 4.3 m, ocorreu também um aumento da área de aço longitudinal total considerada na estrutura.

Com o intuito de avaliar a influência desse aumento da armadura, a estrutura foi reanalisada modificando a taxa de aço longitudinal de forma a manter exatamente a mesma armação do problema original. A Figura 60 apresenta as curvas carga-deslocamento dessa situação. Como pode-se observar, a capacidade resistente diminuiu em cerca de 4%, o que mostra que de fato o aumento da armadura teve uma influência secundária no comportamento. Isso demonstra que a modificação da geometria, mantendo às solicitações, apesar de aumentar a esbelteza da peça, apresentou a tendência de elevar a capacidade resistente, comportamento esse que guarda relação com o princípio de Saint-Venant, discutido no capítulo 3. Em relação aos deslocamentos e diagramas dos esforços internos foi observado uma resposta próxima às Figuras 56 a 59.

Em todas as análises feitas, a diferença entre os comportamentos dos dois modos de flambagem, apesar de visível, foi de importância secundária, frente a capacidade última da peça. Além disso, mesmo nos casos onde foi observada uma discordância entre os deslocamentos transversais (dz) nos dois programas, Figura 60, esse grau de liberdade aparenta não ter grande influência sobre a capacidade resistente da estrutura. De forma geral, não foi detectada concentração de momentos relevantes, nos bordos livres das abas, com exceção das Figuras 59(f) e 57(f). Essas observações indicam que os efeitos

Figura 60 – Pilar-parede U - cruvas carga-deslocamento (Arm. original)



Fonte: O autor (2022)

localizados de 2º ordem podem não ser necessariamente cruciais para a resistência limite de pilares-parede com lâminas com índice de esbeltez λ maior que 35, ao contrário do que é encontrado na literatura, capítulo 2. Na maioria dos casos estudados, utilizando o programa CANECA, foi identificado um modo de ruptura preponderante associado ao esmagamento do concreto e escoamento do aço longitudinal, na metade superior da extremidade livre das abas (Esforço normal N_y elevado), sendo a exceção a análise referente a Figura 60(a), onde o esmagamento do concreto foi próximo ao ponto médio do bordo livre da aba.

Novamente, vale ressaltar a indispensabilidade de dados de experimentos para a validação adequada dos modelos e resultados apresentados. Assim, mesmo o VecTor4 sendo uma ferramenta com notoriedade na área, utilizada como referência para a avaliação do programa desenvolvido, o mesmo não permite a dispensa de comprovações experimentais para o correto entendimento do comportamento da estrutura em estudo. O tempo de processamento das análises presentes nessa subseção foi próximo de 10 minutos.

6 CONCLUSÕES

Esse capítulo é responsável por apresentar as conclusões obtidas ao longo do trabalho, além de propor potenciais temas de pesquisa, para futuras investigações científicas, relacionadas a análise não-linear de estruturas/cascas de concreto armado, em especial, pilares-parede.

6.1 CONCLUSÕES

No Capítulo 3 da tese, para dois pilares-parede (simples e seção U), foi conduzido um estudo comparativo inicial entre os esforços internos obtidos segundo métodos presentes na norma (ABNT NBR 6118, 2014), literatura técnica (FRANÇA; KIMURA, 2006), e análises não-lineares (física e geométrica) com elementos finitos de casca (MEF-NL), realizadas no software VecTor 4, o qual é baseado na teoria do campo de compressão modificada. Além disso, a avaliação da resposta do pilar-parede com seção U, via MEF-NL, foi feita de forma a considerar os principais modos de flambagem da estrutura. Com base nesse estudo, pode-se concluir:

- A atuação conjunta do efeito da redistribuição dos esforços e do princípio de Saint-Venant se mostrou um ponto fundamental na análise, sendo responsável por atenuar os efeitos localizados de 2ª ordem nos pilares-parede, fato esse não observado no modelo da malha de barras, ou no procedimento normativo;
- Nas análises realizadas, os momentos obtidos conduziram a relações entre as armaduras transversal e longitudinal inferiores a 25%, o que sugere que a recomendação normativa pode ser excessivamente conservadora em alguns casos, como consta na literatura;
- As diferenças observadas entre a análise pelo método da malha de barras e a solução via elementos finitos, como, por exemplo, a inversão do sentido dos momentos fletores transversais M_x nos pilares-parede seção U, indicam que estratégias baseadas na discretização da geometria como uma grelha podem não conseguir retratar precisamente os modos de flambagem da estrutura, em certos casos. Evidenciando-se assim, a oportunidade de investigação científica quanto a calibração do modelo da malha de barras;
- No que diz respeito ao custo computacional das análises via MEF-NL, de acordo com os critérios apresentados para o método iterativo-incremental, pode-se observar um tempo médio de processamento aproximadamente igual a 40 min, para o pilar-parede simples, e, três horas, para o pilar-parede com seção U. Dessa forma, apesar do custo

elevado tornar essa metodologia menos atrativa para o dia a dia em escritórios de projeto, ainda assim, esse tipo de abordagem permite outra perspectiva no que diz respeito ao comportamento da estrutura, tendo, portanto, fundamental importância para a profissão;

- Por fim, a aparente semelhança entre o comportamento do pilar-parede com seção U e perfis metálicos análogos, sujeitos a flambagem local, pode representar uma oportunidade viável para contribuições científicas.

No Capítulo 4, é apresentado o desenvolvimento de um programa computacional, denominado CANECA, para a análise não-linear de estruturas de concreto armado, sujeitas a carregamentos monotônicos, utilizando o elemento finito de cascas finas e planas QTFLS (BARRALES, 2012). Na análise NLF, é considerada a rigidez secante do material, baseada nos modelos constitutivos MCFT (VECCHIO; COLLINS, 1986) e DSFM (VECCHIO, 2000) (VECCHIO, 2001). A formulação original do elemento foi expandida para considerar também a NLG, através de uma formulação Lagrangiana total (VASILESCU, 2000) (FIGUEIRAS, 1983). Com o desenvolvimento dessa ferramenta e sua validação, Capítulo 5, pode-se concluir que:

- A utilização de ferramentas de análise não-linear de estruturas de concreto armado via método de Newton-Raphson em associação com a rigidez secante do material e a formulação Lagrangiana total pode ser considerada uma abordagem atrativa, tanto quanto a precisão em relação a dados experimentais quanto ao custo computacional;
- Contudo, o fato de parte da formulação precisar ter sido ajustada para a ferramenta conseguir obter uma solução equilibrada em determinados passos de carga, em alguns problemas (subseções 5.3 e 5.5) evidencia a dificuldade do desenvolvimento de ferramentas desse tipo, com ampla gama de potenciais aplicações, conforme exposto por Figueiras (1983).
- As integrais das matrizes de rigidez do elemento $[k_e^L]$ e $[k_e^\sigma]$, ao longo da espessura da casca, devido a sua discretização em n_c lamelas de concreto e n_s camadas de aço, foram feitas através de uma abordagem discreta baseada nos trabalhos de Vasilescu (2000), Zhang, Bradford e Gilbert (2007a) e Zhang, Bradford e Gilbert (2007b) apud Barrales (2012), a qual considera a somatória das contribuições individuais de cada lamela. Essa estratégia se mostrou viável para a análise de elementos de casca de concreto armado, sendo uma alternativa coerente e de fácil implementação;
- Além disso, em concordância com o observado no capítulo 3, os comportamentos de alguns pilares-parede, obtidos nas subseções 5.6 e 5.7, indicam que os efeitos localizados de 2ª ordem podem não ser necessariamente vitais para a resistência

limite de pilares-parede com lâminas com índice de esbeltez λ maior que 35, ao contrário do que é visto na literatura.

- A utilização da ferramenta para a análise de pilares-parede, subseções 5.6 e 5.7, aponta a necessidade da condução de programas experimentais para esse tipo de estruturas, de forma não só a se obter um melhor entendimento do comportamento da construção, mas também produzir dados que viabilizem o desenvolvimento de programas computacionais mais adequados, contanto com modelos constitutivos e cinemáticos compatíveis para o problema.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

De forma adicional a esse texto, pode-se propor as seguintes linhas de investigação científica sobre o objeto de estudo:

- Conforme já mencionado, para o avanço do conhecimento do comportamento estrutural de pilares-parede, além do desenvolvimento de ferramentas apropriadas para a análise dessas construções, é indispensável a realização de campanhas de investigações experimentais de estruturas com geometria, armação e carregamentos em condições análogas ao encontrado na prática da engenharia nacional;
- Um vez desenvolvida e validada uma ferramenta computacional, calibrada com experimentos, com as características descritas acima, é possível realizar uma série de análises de pilares-parede, com seção retangular, ou outras topologias, variando sistematicamente alguns parâmetros chave de projeto, como: a relação entre as taxas de armadura transversal e longitudinal, a resistência do concreto e a esbeltez das lâminas do pilar-parede. Dessa forma, é elaborado um banco de dados numérico consistente, o qual contribuiria para a criação de novos modelos para o projeto de pilares-parede, além da calibração de ferramentas já existentes (como o modelo da malha de barras);
- Aprimorar a formulação apresentada nessa tese, para admitir cargas cíclicas, e, expandir o estudo comparativo das técnicas monotônicas do capítulo 3 (método normativo, malha de barras e MEF-NL) para também considerar cargas cíclicas.

REFERÊNCIAS

- ABNT NBR 15421. *Projeto de estruturas resistentes a sismos - Procedimento*. Rio de Janeiro: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2006. Citado na página 29.
- ABNT NBR 6118. *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003. Citado na página 24.
- ABNT NBR 6118. *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014. Citado 15 vezes nas páginas 24, 27, 30, 31, 32, 33, 39, 40, 41, 44, 50 e 120.
- ABNT NBR 8800. *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Rio de Janeiro: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2008. Citado na página 48.
- ACI 318. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) and Commentary (ACI 318R-2019)*. Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 2005. Citado na página 24.
- ALMEIDA, V. B. *Dimensionamento, detalhamento e execução de pilares-parede*. 2018. 71 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife. Citado na página 27.
- ARAÚJO, J. M. Flambagem local dos pilares-parede de concreto armado. *Revista teoria e prática na Engenharia civil*, n. 9, p. 29–37, 2006. Citado na página 33.
- BARRALES, F. R. *Development of a Nonlinear Quadrilateral Layered Membrane Element with Drilling Degrees of Freedom and a Nonlinear Quadrilateral Thin Flat Layered Shell Element for the Modeling of Reinforced Concrete Walls*. 2012. 218 p. Tese (Doutorado) — Faculty of the USC Graduate School, University of Southern California, EUA, 2012. Citado 14 vezes nas páginas 53, 54, 57, 61, 67, 121, 130, 131, 136 e 137.
- BATOZ, J. L.; TAHAR, M. B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, p. 1655–1677, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 56, 58 e 136.
- CAMPOS, M. C. B. de N.; RIBEIRO, P. M. V.; OLIVEIRA, R. A. de. Numerical analysis of reinforced concrete shear walls with rectangular cross section. *Rev. IBRACON Estrut. Mater.*, vol.13, No.6, p. e13614, 2020. Citado na página 29.
- CAMPOS, M. C. B. N. *Análise numérica de pilares-parede de concreto armado com seção retangular*. 2016. 238 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 33.
- CEB-FIP. *Model Code for Concrete Structures*. [S.l.]: Design Code, Comité EURO-International du Béton, 1990. Citado na página 70.

CERVENKA, V. *Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels*. 1970. Tese (Doutorado) — University of Colorado, Colorado, EUA, 1970. Citado na página 83.

COMPUTERS & STRUCTURES, Inc. Sap 2000 v21. *Disponível em: <csiamerica.com/products/sap2000>*, Acesso em: 28/10/2019, Walnut Creek, California, USA, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 46.

DE BORST, R. et al. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. [S.l.]: Wiley, 2012. 516 p. Citado 5 vezes nas páginas 54, 55, 64 e 66.

FIGUEIRAS, J. A. *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*. 1983. Tese (Doutorado) — Department of Civil Engineering, University College of Swansea, Swansea, 1983. Citado 9 vezes nas páginas 36, 53, 54, 57, 91 e 121.

FRAGA, P. T. *EFFECT – Efficient Finite Element Code*. 2015. 160 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

FRANÇA, R. L. S.; KIMURA, A. E. Resultados de recentes pesquisas para o dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal em pilares-parede. *Encontro Nacional de Engenharia e Consultoria Estrutural*, São Paulo, 2006. Citado 19 vezes nas páginas 24, 31, 32, 33, 35, 39, 40, 41, 44, 45, 50, 96, 105 e 120.

GOUDARZI, H. R. V. pour. *Nonlinear Dynamic Analysis of Reinforced Concrete Frames Under Extreme Loadings*. 2009. 347 p. Tese (Doutorado) — School of Civil and Environmental Engineering, The University of New South Wales, Sydney, Australia, 2009. Citado na página 67.

HERRERA, P. Evtk - export vtk. *Disponível em: <https://pypi.org/project/pyevtk/>*, Acesso em: 26/02/2021, 2021. Citado na página 83.

HJELMSTAD, K. D. *Fundamentals of Structural Mechanics*. [S.l.]: Springer, 2ed., 2005. 480 p. Citado na página 54.

HRNYNYK, T. D. *Behaviour and modelling of reinforced concrete slabs and shells under static and dynamic loads*. 2013. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Toronto, Toronto, Canadá, 2013. Citado 10 vezes nas páginas 36, 37, 38, 40, 70 e 88.

HUGHES, T. J. R.; COHEN, M. The “heterosis” finite element for plate bending. *Computers and Structures*, vol. 9, p. 445–450, 1978. Citado na página 36.

IBRACON. *Comentários e Exemplos de Aplicação da ABNT NBR 6118-2014*. [S.l.]: INSTITUTO BRASILEIRO DO CONCRETO, 2015. v. 1ed. 480 p. Citado 3 vezes nas páginas 35 e 41.

KIMURA, A. E. *Cálculo de pilares de concreto armado – Introdução, visão geral e exemplos*. [S.l.]: Associação Brasileira de Engenharia e Consultoria Estrutural, 2016. 240 p. Citado 5 vezes nas páginas 35, 39, 40 e 96.

KUPFER, H.; HILSDORF, H. K.; RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal Proceedings*, vol.66, No.8, p. 656–666, 1969. Citado na página 73.

LEFAS, I. D.; KOTSOVOS, M. D.; AMBRASEYS, N. N. Behaviour of reinforced concrete structural walls: Strength, deformation characteristics and failure mechanism. *ACI Struct. J.*, vol.87, No.1, p. 23–31, 1990. Citado na página 86.

LEVY, S. Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections. *DACA, Tech. Note 847*, 1942. Citado na página 91.

LUU, C.; MO, Y.; HSU, T. T. Development of CSMM-based shell element for reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 52, 53, 88 e 89.

OWEN, D. R. J.; FIGUEIRAS, J. A. *Ultimate load analysis of reinforced concrete plates and shells*. Swansea, U.K.: presente em Hilton, E., Owen, D. R. J., Finite element software for plates and shells, Pineridge Press Limited, 1984. 403 p. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.

PARK, R.; PRIESTLEY, M. J. N.; GILL, W. D. Ductility of square-confined concrete columns. *J. Struc. Division*, vol. 108, p. 929–950, 1982. Citado na página 40.

PFEIL, W.; PFEIL, M. *Estruturas de aço – Dimensionamento Prático de Acordo com a NBR 8800:2008*. [S.l.]: LTC, 8ed., 2009. 357 p. Citado na página 48.

POLAK, M. A.; VECCHIO, F. J. Reinforced concrete shell elements subjected to bending and membrane loads. *ACI Struct. J.*, vol.91, No.3, p. 261–268, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 89.

RICHART, F.; BRANDTZAEG, A.; BROWN, R. A study of the failure of concrete under combined compressive stresses. *Bulletin No.185, University of Illinois Engineering Experimental Station*, p. 104, 1928. Citado na página 74.

ROJAS, F.; ANDERSON, J.; MASSONE, L. A nonlinear quadrilateral layered membrane element with drilling degrees of freedom for the modeling of reinforced concrete walls. *Engineering Structures*, vol. 124, p. 521–538, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 56, 57, 131 e 133.

ROJAS, F.; ANDERSON, J. C.; MASSONE, L. M. A nonlinear quadrilateral thin flat layered shell element for the modeling of reinforced concrete wall structures. *Bulletin of Earthquake Engineering*, p. 6491–6513, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 56, 57, 58, 63 e 136.

SECKIN, M. *Hysteretic behaviour of cast-in-place exterior beam-column-slab subassemblies*. 1981. 266 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Toronto, Toronto, Canadá, 1981. Citado na página 40.

SELBY, R. G.; VECCHIO, F. J. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol.24, No.3, p. 460–470, 1997. Citado na página 79.

SILVA, J. R. de B.; HOROWITZ, B. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete shear walls. *Rev. IBRACON Estrut. Mater.*, vol.13, No.6, p. e13603, 2020. Citado 11 vezes nas páginas 28, 35, 42, 45, 46, 47, 48, 53, 96 e 105.

SILVA, J. R. de B.; HOROWITZ, B. Nonlinear analysis of reinforced concrete structures using thin flat shell elements. *Rev. IBRACON Estrut. Mater.*, vol.15, No.4, p. e15407, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 85, 91 e 103.

SILVA, L. M. T. da. *Análise não-linear de estruturas de concreto armado submetido ao estado plano de tensões*. 2019. 81 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 70, 73, 78, 79 e 86.

SOUSA, P. F. S. Otimização com análise de confiabilidade – aplicação a problema de cascas. *61º Congresso Brasileiro do Concreto*, 2019. Citado na página 128.

VASILESCU, A. *Analysis of geometrically Nonlinear and Softening Response of Thin Structures by a new Facet Shell Element*. 2000. 207 p. Dissertação (Mestrado) — Faculty of Graduate Studies and Research, Department of Civil and Environmental Engineering, Carleton University, Ottawa, Ontario, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 53, 54, 61 e 121.

VAZ, L. E. *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. [S.l.]: Elsevier, 2011. 273 p. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 130.

VECCHIO, F. J. Reinforced concrete membrane element formulations. *Journal of Structural Engineering*, vol.116, No.3, p. 730–750, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 83 e 84.

VECCHIO, F. J. Finite element modeling of concrete expansion and confinement. *Journal of Structural Engineering*, vol.126, No.9, p. 1070–1077, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 68, 73 e 75.

VECCHIO, F. J. Lessons from the analysis of a 3d concrete shear wall. *Structural Engineering and Mechanics*, vol.6, No.4, p. 439–455, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 92 e 93.

VECCHIO, F. J. Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 126, No. 9, p. 1070–1077, 2000. Citado 15 vezes nas páginas 37, 69, 71, 73, 76, 77, 78, 79, 86 e 121.

VECCHIO, F. J. Disturbed stress field model for reinforced concrete: implementation. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 127, No. 1, p. 12–20, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 38, 84, 86 e 121.

VECCHIO, F. J.; COLLINS, M. P. The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Structural Journal*, vol. 83, No. 6, p. 925–933, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 36, 38, 78 e 121.

WALLACE, J. W. Behavior, design, and modeling of structural walls and coupling beams – Lessons from recent laboratory tests and earthquakes. *International Journal of Concrete Structures and Materials*, vol.6, No.1, p. 3–18, 2012. Citado na página 29.

WALRAVEN, J. C. Fundamental analysis of aggregate interlock. *J. Struct. Div. ASCE*, vol.107, No.11, p. 2245–2270, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J. G. *Reinforced Concrete: Mechanics & Design*. [S.l.]: Pearson, 2012. 1157 p. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 28.

WONG, P. S.; TROMMELS, H.; VECCHIO, F. J. VecTor2 and formworks user's manual. *Technical Report, Department of Civil Engineering, University of Toronto*, vol. 108, 2ed, p. 311, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 40, 67, 69 e 74.

XIA, G.; YU, C. L. M.; ZHANG, J. Rectangular membrane element with rotational degree of freedom. *Computational Structural Engineering, Proceedings of the International Symposium on Computational Structural Engineering, Shanghai, China*, p. 1051–1058, 2009. Citado na página 131.

YU, W.; LABOUBE, H. *Cold-formed Steel Design*. [S.l.]: Wiley, 4ed., 2010. 491 p. Citado na página 48.

ZHANG, Y. X.; BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. A layered cylindrical quadrilateral shell element for nonlinear analysis of RC plate structures. *Advances in Engineering Software*, vol. 38, p. 488 – 500, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 121.

ZHANG, Y. X.; BRADFORD, M. A.; GILBERT, R. I. A layered shear-flexural plate/shell element using timoshenko beam functions for nonlinear analysis of reinforced concrete plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, p. 888 – 900, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 121.

ANEXO A – ROTAÇÃO SISTEMAS LOCAL-GLOBAL

Esse anexo apresenta o desenvolvimento da matriz de rotação entre os sistemas local $(x - y - z)$ e global $(X - Y - Z)$ [E], adaptado de Sousa (2019). Apesar desse procedimento ser usual em análises com elementos finitos, existem alguns pontos que precisam ser explicitados, devido a particularidades relacionadas ao elemento QTFLS, como, por exemplo, a matriz de adequação dos graus de liberdade [C].

A.1 MATRIZ DE ROTAÇÃO BÁSICA

Os vetores representativos do sistema local de um elemento podem ser obtidos de acordo com as equações Eq. (A.1) a (A.3), onde $\{P_i\}$ é o vetor com as coordenadas globais do nó i do elemento em estudo.

$$\{V_1\} = \{P_2\} - \{P_1\} \quad (\text{A.1})$$

$$\{V_3\} = \{V_1\} \times (\{P_3\} - \{P_1\}) \quad (\text{A.2})$$

$$\{V_2\} = \{V_3\} \times \{V_1\} \quad (\text{A.3})$$

O versor do eixo j do sistema local $\{e_j\}$ e suas componentes são dados por:

$$\{e_j\} = \frac{\{V_j\}}{\|\{V_j\}\|} = \{e_j^X \quad e_j^Y \quad e_j^Z\}^T \quad (\text{A.4})$$

A matriz de rotação do sistema global para o local, correspondente ao caso com 3 graus de liberdade (1 triedro) $[\ell]$ é ilustrada na equação Eq. (A.5), enquanto que a matriz correspondente à situação com 24 graus de liberdade (8 triedros) $[L]$, matriz de rotação básica, é indicada na Eq. (A.6), onde $[0]$ é uma matriz nula de ordem 3×3 .

$$[\ell] = \begin{bmatrix} e_1^X & e_1^Y & e_1^Z \\ e_2^X & e_2^Y & e_2^Z \\ e_3^X & e_3^Y & e_3^Z \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [\ell] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\ell] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\ell] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\ell] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\ell] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [\ell] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [\ell] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [\ell] \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

A.2 MATRIZ DE ADEQUAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE

A matriz $[L]$ foi desenvolvida para a rotação de um vetor contendo 24 graus de liberdade sequenciados em 8 triedros $\{d_e^S\}$. Contudo, devido a forma como as matrizes cinemática $[B']$ e cinemática incremental $[B]$ são montadas, subseção 4.1.3, o vetor dos deslocamento do elemento $\{d_e\}$ apresenta outra configuração. Contudo, os dois vetores podem ser relacionados pela matriz de adequação dos graus de liberdade $[C]$, como mostra a equação Eq. (A.7), a qual é expandida em Eq. (A.8), de forma a detalhar a organização dos graus de liberdade em $\{d_e^S\}$ e $\{d_e\}$ e os elementos da matriz $[C]$.

$$\{d_e^S\} = [C] \{d_e\} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{z3} \\ u_1 \\ v_4 \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{z4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Assim, é possível definir a matriz de rotação entre os sistemas local e global $[E]$, através da associação entre as matrizes de rotação básica $[L]$ e a de adequação dos graus de liberdade $[C]$, como ilustra a equação Eq. (A.9).

$$[E] = [C]^T [L] [C] \quad (\text{A.9})$$

ANEXO B – MATRIZ JACOBIANA

Esse anexo apresenta a formulação da geometria de um elemento quadrilateral, através de coordenadas naturais, e, define a matriz Jacobinana $[J]$ que relaciona as derivadas nos sistemas local $(x - y)$ e natural $(\xi - \eta)$, segundo Barrales (2012).

B.1 REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA DO ELEMENTO

As coordenadas de um ponto do elemento podem ser representadas, no sistema natural, através de uma interpolação bilinear dos respectivos valores nodais (x_i, y_i) :

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

B.2 RELAÇÃO ENTRE DERIVADAS NOS SISTEMAS LOCAL E NATURAL

Segundo Vaz (2011), a relação entre as derivadas de uma determinada função, com respeito às coordenadas local e natural, é obtida através da regra da cadeia, como mostra a equação Eq. (B.3), onde $[J]$ é a matriz Jacobiana correspondente.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

A relação contrária a Eq. (B.3) pode ser obtida através da inversa da matriz Jacobiana. Com base nas equações Eq. (B.1), (B.2) e (B.3), é possível definir a matriz Jacobiana, em coordenadas naturais, como:

$$[J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \eta) & +(1 - \eta) & +(1 + \eta) & -(1 + \eta) \\ -(1 - \xi) & -(1 + \xi) & +(1 + \xi) & +(1 - \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

ANEXO C – ELEMENTO QLMD

O presente anexo é dedicado à apresentação do desenvolvimento da matriz cinemática do elemento de membrana QLMD (*Quadrilateral Membrane Element with Drilling Degrees of Freedom*) [B_{QLMD}], conforme originalmente proposto por Barrales (2012).

C.1 INTERPOLAÇÃO DOS CAMPOS DE DESLOCAMENTOS

Segundo Rojas, Anderson e Massone (2016), esse elemento utiliza uma generalização da estratégia de interpolação dos campos de deslocamentos apresentada por Xia, Yu e Zhang (2009), usando coordenadas naturais ($\xi - \eta$). São adotadas função de forma cúbicas (polinômios de Hermite), Eq. (C.1) e (C.2), no sentido transversal à translação, e, funções lineares, Eq. (C.3), na direção do deslocamento em questão, Figura 61.

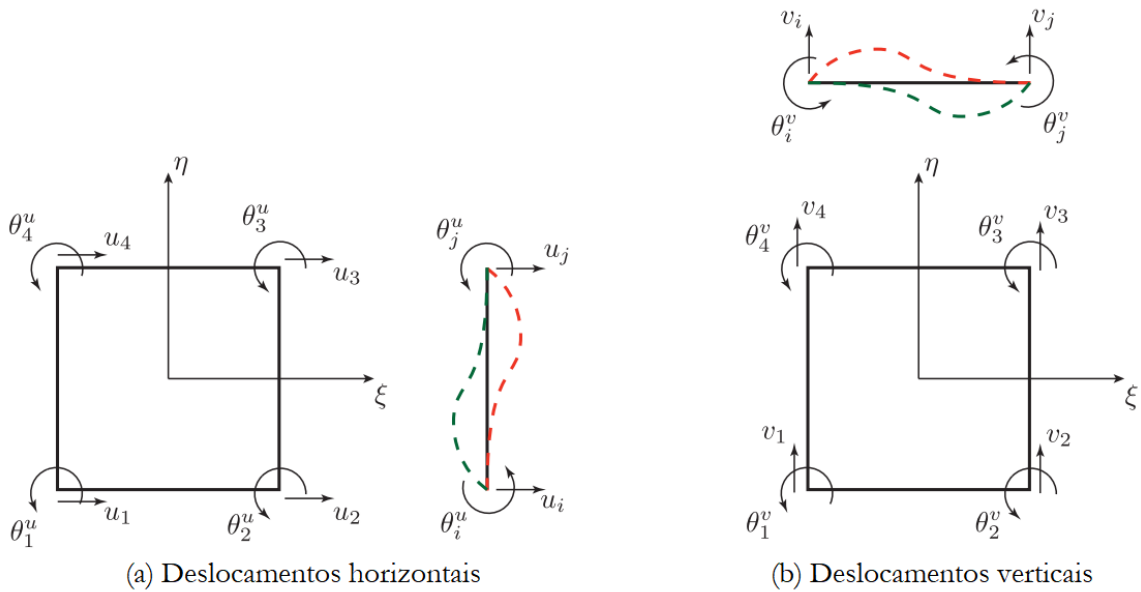
$$N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 \quad N_2(x) = +\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (C.1)$$

$$N_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 \quad N_4(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (C.2)$$

$$M_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x) \quad M_2(x) = \frac{1}{2}(1 + x) \quad (C.3)$$

A interpolação do campo de deslocamento $u(\xi, \eta)$ pode ser definida, em coordenadas naturais, usando os deslocamentos nodais auxiliares da Figura 61, Eq. (C.4).

Figura 61 – Interpolação dos campos de deslocamentos do elemento QLMD



Fonte: Adaptado de Barrales (2012)

$$u(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} M_1(\xi) \\ M_2(\xi) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} +N_1(\eta) & 0 \\ -N_2(\eta) & 0 \\ 0 & +N_1(\eta) \\ 0 & -N_2(\eta) \\ 0 & +N_3(\eta) \\ 0 & -N_4(\eta) \\ +N_3(\eta) & 0 \\ -N_4(\eta) & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1^u \\ u_2 \\ \theta_2^u \\ u_3 \\ \theta_3^u \\ u_4 \\ \theta_4^u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} +M_1(\xi)N_1(\eta) \\ +M_1(\xi)N_2(\eta) \\ +M_2(\xi)N_1(\eta) \\ -M_2(\xi)N_2(\eta) \\ +M_2(\xi)N_3(\eta) \\ -M_2(\xi)N_4(\eta) \\ +M_1(\xi)N_3(\eta) \\ +M_1(\xi)N_4(\eta) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1^u \\ u_2 \\ \theta_2^u \\ u_3 \\ \theta_3^u \\ u_4 \\ \theta_4^u \end{Bmatrix} \quad (C.4)$$

De forma análoga, a interpolação do campo de deslocamento $v(\xi, \eta)$ é definida, em coordenadas naturais, como:

$$v(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} M_1(\eta) \\ M_2(\eta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} +N_1(\xi) & 0 \\ +N_2(\xi) & 0 \\ +N_3(\xi) & 0 \\ +N_4(\xi) & 0 \\ 0 & +N_3(\xi) \\ 0 & +N_4(\xi) \\ 0 & +N_1(\xi) \\ 0 & +N_2(\xi) \end{bmatrix}^T \{d_{em}^v\} = \begin{bmatrix} +M_1(\eta)N_1(\xi) \\ +M_1(\eta)N_2(\xi) \\ +M_1(\eta)N_3(\xi) \\ +M_1(\eta)N_4(\xi) \\ +M_2(\eta)N_3(\xi) \\ +M_2(\eta)N_4(\xi) \\ +M_2(\eta)N_1(\xi) \\ +M_2(\eta)N_2(\xi) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1^v \\ v_2 \\ \theta_2^v \\ v_3 \\ \theta_3^v \\ v_4 \\ \theta_4^v \end{Bmatrix} \quad (C.5)$$

Combinando as equações Eq. (C.4) e Eq. (C.5), definimos os dois campos de deslocamentos através da matriz das funções de forma $[MN]$ e do vetor auxiliar $\{d_{em}^{uv}\}$:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [MN] \{d_{em}^{uv}\} = \begin{bmatrix} +M_1(\xi)N_1(\eta) & 0 \\ 0 & +M_1(\eta)N_1(\xi) \\ -M_1(\xi)N_2(\eta) & 0 \\ 0 & +M_1(\eta)N_2(\xi) \\ +M_2(\xi)N_1(\eta) & 0 \\ 0 & +M_1(\eta)N_3(\xi) \\ -M_2(\xi)N_2(\eta) & 0 \\ 0 & +M_1(\eta)N_4(\xi) \\ +M_2(\xi)N_3(\eta) & 0 \\ 0 & +M_2(\eta)N_3(\xi) \\ -M_2(\xi)N_4(\eta) & 0 \\ 0 & +M_2(\eta)N_4(\xi) \\ +M_1(\xi)N_3(\eta) & 0 \\ 0 & +M_2(\eta)N_1(\xi) \\ -M_1(\xi)N_4(\eta) & 0 \\ 0 & +M_2(\eta)N_2(\xi) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1^u \\ \theta_1^v \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2^u \\ \theta_2^v \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3^u \\ \theta_3^v \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4^u \\ \theta_4^v \end{Bmatrix} \quad (C.6)$$

Segundo Rojas, Anderson e Massone (2016), é possível garantir a compatibilidade entre as rotações locais θ_i^u e θ_i^v e os graus de liberdade de rotação normal θ_{zi} (*drilling*), contidos no vetor dos deslocamentos nodais de membrana $\{d_{em}\}$, Eq. (4.17), através da matriz de compatibilidade $[T_r]$, formada pelas coordenadas locais de cada nó do elemento (x_i, y_i) :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1^u \\ \theta_1^v \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4^u \\ \theta_4^v \end{Bmatrix} = [T_r] \{d_{em}\} = [T_r] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} \quad (C.7)$$

$$[T_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_4 - y_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_2 - x_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_3 - y_2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_2 - x_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_3 - y_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_3 - x_4}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_4 - y_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_3 - x_4}{2} \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

Combinando as equações Eq. (C.6) e (C.7), obtemos:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [MN] [T_r] \{d_{em}\} \quad (C.9)$$

C.2 MATRIZ CINEMÁTICA

Tendo em mente a parcela linear do vetor das deformações $\{\varepsilon_m\}$, referente ao comportamento de membrana, e, suas componentes ε_x , ε_y e γ_{xy} :

$$\{\varepsilon_m\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

pode-se modificar essa equação e fazer uma transformação de coordenadas entre os sistemas local e natural, através da inversa da matriz Jacobina $[J]$, Anexo B:

$$\{\varepsilon_m\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]_{(2 \times 2)}^{-1} & [0]_{(2 \times 2)} \\ [0]_{(2 \times 2)} & [J]_{(2 \times 2)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Aplicando a equação Eq. (C.9) em Eq. (C.11), obtemos:

$$\{\varepsilon_m\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]_{(2 \times 2)}^{-1} & [0]_{(2 \times 2)} \\ [0]_{(2 \times 2)} & [J]_{(2 \times 2)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial [MN]_{1,1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial [MN]_{1,16}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial [MN]_{1,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial [MN]_{1,16}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial [MN]_{2,1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial [MN]_{2,16}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial [MN]_{2,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial [MN]_{2,16}}{\partial \eta} \end{bmatrix} [T_r] \{d_{em}\} \quad (\text{C.12})$$

Dessa forma, a matriz cinemática do elemento de membrana QLMD $[B_{QLMD}]$, que relaciona o vetor das deformações $\{\varepsilon_m\}$ com o vetor dos deslocamentos nodais de membrana $\{d_{em}\}$, é avaliada como mostra a Eq. (C.13). Os elementos não nulos da matriz que contém as derivadas das funções de forma, podem ser obtidos de acordo com a Tabela 6.

$$[B_{QLMD}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]_{(2 \times 2)}^{-1} & [0]_{(2 \times 2)} \\ [0]_{(2 \times 2)} & [J]_{(2 \times 2)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial [MN]_{1,1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial [MN]_{1,16}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial [MN]_{1,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial [MN]_{1,16}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial [MN]_{2,1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial [MN]_{2,16}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial [MN]_{2,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial [MN]_{2,16}}{\partial \eta} \end{bmatrix} [T_r] \quad (\text{C.13})$$

Tabela 6 – Elementos da matriz das derivadas das funções de forma (QLMD)

Elemento (i, j)	$\partial [MN]_{i,j} / \partial \xi$	$\partial [MN]_{i,j} / \partial \eta$
(1,1)	$-\frac{\eta^3}{8} + \frac{3\eta}{8} - \frac{1}{4}$	$-\left(\frac{3\eta^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\right)$
(1,5)	$+\frac{\eta^3}{8} - \frac{3\eta}{8} + \frac{1}{4}$	$+\left(\frac{3\eta^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)$
(1,9)	$-\frac{\eta^3}{8} + \frac{3\eta}{8} + \frac{1}{4}$	$-\left(\frac{3\eta^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)$
(1,13)	$+\frac{\eta^3}{8} - \frac{3\eta}{8} - \frac{1}{4}$	$+\left(\frac{3\eta^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\right)$
(1,3)	$+\frac{\eta^3}{8} - \frac{\eta^2}{8} - \frac{\eta}{8} + \frac{1}{8}$	$-\left(-\frac{3\eta^2}{4} + \frac{\eta}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\right)$
(1,7)	$-\frac{\eta^3}{8} + \frac{\eta^2}{8} + \frac{\eta}{8} - \frac{1}{8}$	$+\left(-\frac{3\eta^2}{4} + \frac{\eta}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)$
(1,11)	$-\frac{\eta^3}{8} - \frac{\eta^2}{8} + \frac{\eta}{8} + \frac{1}{8}$	$-\left(+\frac{3\eta^2}{4} + \frac{\eta}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)$
(1,15)	$+\frac{\eta^3}{8} + \frac{\eta^2}{8} - \frac{\eta}{8} - \frac{1}{8}$	$+\left(+\frac{3\eta^2}{4} + \frac{\eta}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\right)$
(2,2)	$-\left(\frac{3\xi^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{3\xi^3}{8} + \frac{3\xi}{8} - \frac{1}{4}$
(2,6)	$+\left(\frac{3\xi^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)$	$+\frac{3\xi^3}{8} - \frac{3\xi}{8} - \frac{1}{4}$
(2,10)	$-\left(\frac{3\xi^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{3\xi^3}{8} + \frac{3\xi}{8} + \frac{1}{4}$
(2,14)	$+\left(\frac{3\xi^2}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}\right)$	$+\frac{3\xi^3}{8} - \frac{3\xi}{8} + \frac{1}{4}$
(2,4)	$+\left(-\frac{3\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\xi^3}{8} + \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi}{8} - \frac{1}{8}$
(2,8)	$-\left(+\frac{3\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\xi^3}{8} - \frac{\xi^2}{8} + \frac{\xi}{8} + \frac{1}{8}$
(2,12)	$+\left(+\frac{3\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}\right)$	$+\frac{\xi^3}{8} + \frac{\xi^2}{8} - \frac{\xi}{8} - \frac{1}{8}$
(2,16)	$-\left(-\frac{3\xi^2}{4} + \frac{\xi}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}\right)$	$+\frac{\xi^3}{8} - \frac{\xi^2}{8} - \frac{\xi}{8} + \frac{1}{8}$

Fonte: O autor (2022)

ANEXO D – ELEMENTO DKQ

Esse anexo apresenta o desenvolvimento da matriz cinemática do elemento de placa DKQ (*Discrete Kirchhoff Quadrilateral*) [B_{DKQ}], proposto originalmente por Batoz e Tahar (1982), conforme Barrales (2012).

D.1 INTERPOLAÇÃO DOS CAMPOS DE ROTAÇÕES

Segundo Rojas, Anderson e Massone (2019), nesse elemento, inicialmente, os campos de deflexões e rotações são estabelecidos de forma independente, e, posteriormente, são relacionados ao aplicar as hipóteses de Kirchhoff de forma discreta nos bordos. Para tanto, são utilizadas funções de forma de um elemento isoparamétrico Serendipity quadrangular de 8 nós, Eq. (D.1) a (D.4), para os campos de rotações da normal $\beta_x(\xi, \eta)$ e $\beta_y(\xi, \eta)$.

$$\varphi_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta) \quad \varphi_5(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (D.1)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta) \quad \varphi_6(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (D.2)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \xi - \eta) \quad \varphi_7(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (D.3)$$

$$\varphi_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \xi - \eta) \quad \varphi_8(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (D.4)$$

Assim, os campos de rotações $\beta_x(\xi, \eta)$ e $\beta_y(\xi, \eta)$ são definidos, com base nas rotações nodais da normal β_{xi} e β_{yi} , como:

$$\beta_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \varphi_i(\xi, \eta) \beta_{xi} \quad (D.5)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \varphi_i(\xi, \eta) \beta_{yi} \quad (D.6)$$

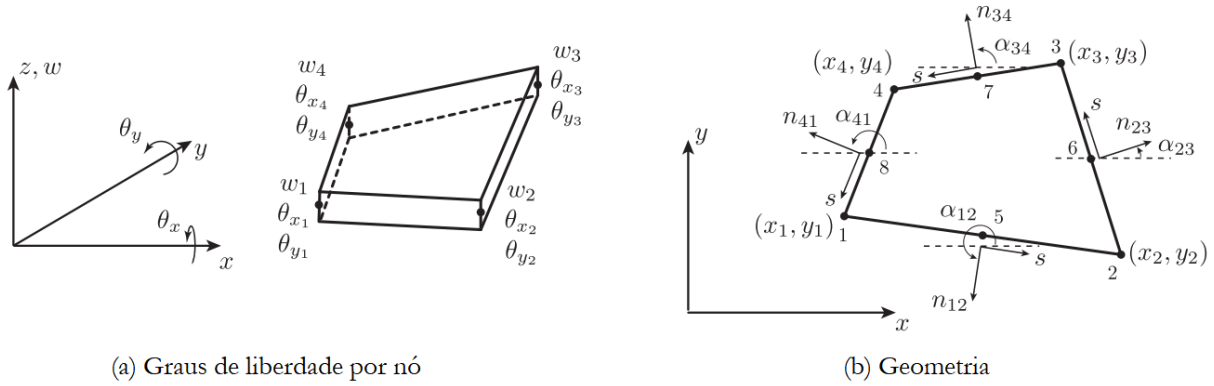
Aplicando as hipóteses de Kirchhoff $\beta_{xi} + \partial_x w|_i = 0$ e $\beta_{yi} + \partial_y w|_i = 0$, de forma discreta, nos nós 1 a 4, onde $\partial_x w|_i$ e $\partial_y w|_i$ são as derivadas parciais do campo deslocamento transversal de placa w , nas direções x e y , no ponto i , obtemos:

$$\beta_x(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) \partial_x w|_i + \sum_{k=5}^8 \varphi_k(\xi, \eta) \beta_{xk} \quad (D.7)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi, \eta) \partial_y w|_i + \sum_{k=5}^8 \varphi_k(\xi, \eta) \beta_{yk} \quad (D.8)$$

É possível definir transformações de coordenadas entre as rotações nodais no sistema local, β_{xk} e β_{yk} , e no sistema auxiliar ($s - n$) do bordo do elemento, β_{nk} e β_{sk} , como: $\beta_{xk} = \beta_{nk} \cos(\alpha_{ij}) - \beta_{sk} \sin(\alpha_{ij})$ e $\beta_{yk} = \beta_{nk} \sin(\alpha_{ij}) + \beta_{sk} \cos(\alpha_{ij})$, onde α_{ij} é a inclinação

Figura 62 – Graus de liberdade e geometria do elemento DKQ



(a) Graus de liberdade por nó

(b) Geometria

Fonte: Adaptado de Barrales (2012)

do bordo formado pelos nós i e j , Figura 62. Aplicando essas transformações nas equações Eq. (D.7) e (D.8), e, omitindo os argumentos das funções de forma, definimos as equações Eq. (D.9) e (D.10). Note que, de acordo com a Figura 62, a relação entre os índices $(i-j-k)$ pode ser estabelecida, para cada bordo, como: (1-2-5), (2-3-6), (3-4-7) e (4-1-8).

$$\beta_x(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^4 \varphi_i \partial_x w|_i + \sum_{k=5}^8 \varphi_k [\beta_{nk} \cos(\alpha_{ij}) - \beta_{sk} \sin(\alpha_{ij})] \quad (D.9)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^4 \varphi_i \partial_y w|_i + \sum_{k=5}^8 \varphi_k [\beta_{nk} \sin(\alpha_{ij}) + \beta_{sk} \cos(\alpha_{ij})] \quad (D.10)$$

Aplicando a hipótese de Kirchhoff $\beta_{sk} + \partial_s w|_k = 0$, de forma discreta, nos nós 5 a 8:

$$\beta_x(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^4 \varphi_i \partial_x w|_i + \sum_{k=5}^8 \varphi_k [\beta_{nk} \cos(\alpha_{ij}) + \partial_s w|_k \sin(\alpha_{ij})] \quad (D.11)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^4 \varphi_i \partial_y w|_i + \sum_{k=5}^8 \varphi_k [\beta_{nk} \sin(\alpha_{ij}) - \partial_s w|_k \cos(\alpha_{ij})] \quad (D.12)$$

Segundo Barrales (2012), o deslocamento w é interpolado, ao longo do bordo do elemento, através de uma função cúbica, e, aplicando as condições de contorno apropriadas (deslocamentos e suas derivadas em relação a s), é possível avaliar a variação de w em relação a s , no nó intermediário k , como: $\partial_s w|_k = -3/2(w_i - w_j)/L_{ij} - 1/4(\partial_s w|_i + \partial_s w|_j)$, onde L_{ij} é o comprimento do bordo em análise e w_i a deflexão no nó i . Aplicando essa interpolação, juntamente com a consideração de uma variação linear da rotação, no sentido normal ao bordo: $\beta_{nk} = 1/2(\beta_{ni} + \beta_{nj}) = -1/2(\partial_n w|_i + \partial_n w|_j)$, obtemos as equações Eq. (D.13) e (D.14).

$$\begin{aligned} \beta_x(\xi, \eta) = & - \sum_{i=1}^4 \varphi_i \partial_x w|_i - \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \cos(\alpha_{ij}) (\partial_n w|_i + \partial_n w|_j) \\ & - \frac{3}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \sin(\alpha_{ij}) (w_i - w_j)/L_{ij} - \frac{1}{4} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \sin(\alpha_{ij}) (\partial_s w|_i + \partial_s w|_j) \end{aligned} \quad (D.13)$$

$$\begin{aligned}\beta_y(\xi, \eta) = & -\sum_{i=1}^4 \varphi_i \partial_y w|_i - \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \text{sen}(\alpha_{ij})(\partial_n w|_i + \partial_n w|_j) \\ & + \frac{3}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \cos(\alpha_{ij})(w_i - w_j)/L_{ij} + \frac{1}{4} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \cos(\alpha_{ij})(\partial_s w|_i + \partial_s w|_j)\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

Agora, considerando as transformações: $\partial_s w|_i = \theta_{xi} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{yi} \text{sen}(\alpha_{ij})$ e $\partial_n w|_i = \theta_{xi} \text{sen}(\alpha_{ij}) - \theta_{yi} \cos(\alpha_{ij})$, e, as relações: $\partial_x w|_i = -\theta_{yi}$ e $\partial_y w|_i = \theta_{xi}$, onde θ_{xi} e θ_{yi} são as rotações nodais, podemos encontrar:

$$\begin{aligned}\beta_x(\xi, \eta) = & +\sum_{i=1}^4 \varphi_i \theta_{yi} - \frac{3}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \text{sen}(\alpha_{ij})(w_i - w_j)/L_{ij} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \cos(\alpha_{ij})(\theta_{xi} \text{sen}(\alpha_{ij}) - \theta_{yi} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{xj} \text{sen}(\alpha_{ij}) - \theta_{yj} \cos(\alpha_{ij})) \\ & - \frac{1}{4} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \text{sen}(\alpha_{ij})(\theta_{xi} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{yi} \text{sen}(\alpha_{ij}) + \theta_{xj} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{yj} \text{sen}(\alpha_{ij}))\end{aligned}\quad (\text{D.15})$$

$$\begin{aligned}\beta_y(\xi, \eta) = & -\sum_{i=1}^4 \varphi_i \theta_{xi} + \frac{3}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \cos(\alpha_{ij})(w_i - w_j)/L_{ij} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \text{sen}(\alpha_{ij})(\theta_{xi} \text{sen}(\alpha_{ij}) - \theta_{yi} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{xj} \text{sen}(\alpha_{ij}) - \theta_{yj} \cos(\alpha_{ij})) \\ & + \frac{1}{4} \sum_{k=5}^8 \varphi_k \cos(\alpha_{ij})(\theta_{xi} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{yi} \text{sen}(\alpha_{ij}) + \theta_{xj} \cos(\alpha_{ij}) + \theta_{yj} \text{sen}(\alpha_{ij}))\end{aligned}\quad (\text{D.16})$$

Note que, agora, os campos de rotação $\beta_x(\xi, \eta)$ e $\beta_y(\xi, \eta)$ estão definidos, basicamente, apenas pelos graus de liberdade nodais w_i , θ_{xi} , e θ_{yi} , as funções de forma serendipity φ_i , e, por constantes que dependem das coordenadas nodais dos nós do elemento x_i e y_i . É possível definir os parâmetros auxiliares abaixo:

$$a_k = -\frac{\text{sen}(\alpha_{ij})}{L_{ij}} = -\frac{x_i - x_j}{L_{ij}^2} = -\frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\quad (\text{D.17})$$

$$b_k = \frac{3}{4} \frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{L_{ij}^2} \quad c_k = \frac{(x_i - x_j)^2/4 - (y_i - y_j)^2/2}{L_{ij}^2}\quad (\text{D.18})$$

$$d_k = \frac{\cos(\alpha_{ij})}{L_{ij}} = -\frac{y_i - y_j}{L_{ij}^2} \quad e_k = \frac{-(x_i - x_j)^2/2 + (y_i - y_j)^2/4}{L_{ij}^2}\quad (\text{D.19})$$

Aplicando as equações Eq. (D.17) a (D.19) em Eq. (D.15) a (D.16):

$$\beta_x(\xi, \eta) = +\sum_{i=1}^4 \varphi_i \theta_{yi} + \sum_{k=5}^8 \varphi_k \left(\frac{3}{2} a_k (w_i - w_j) + b_k (\theta_{xi} - \theta_{xj}) - c_k (\theta_{yi} - \theta_{yj}) \right)\quad (\text{D.20})$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^4 \varphi_i \theta_{xi} + \sum_{k=5}^8 \varphi_k \left(\frac{3}{2} d_k (w_i - w_j) + e_k (\theta_{xi} - \theta_{xj}) - b_k (\theta_{yi} - \theta_{yj}) \right)\quad (\text{D.21})$$

Resolvendo as somatórias das equações Eq. (D.20) e (D.21), e, aplicando os valores apropriados para os índices (i - j - k): (1-2-5), (2-3-6), (3-4-7) e (4-1-8), obtemos Eq. (D.22) e (D.23), onde $\{\Psi_x\}$ e $\{\Psi_y\}$ são os vetores com as funções de forma, e, $\{d_{eb}\}$ o vetor com os deslocamentos nodais de placa.

$$\beta_x(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} 3/2(\varphi_5 a_5 - \varphi_8 a_8) \\ \varphi_5 b_5 + \varphi_8 b_8 \\ -\varphi_5 c_5 - \varphi_8 c_8 + \varphi_1 \\ 3/2(\varphi_6 a_6 - \varphi_5 a_5) \\ \varphi_6 b_6 + \varphi_5 b_5 \\ -\varphi_6 c_6 - \varphi_5 c_5 + \varphi_2 \\ 3/2(\varphi_7 a_7 - \varphi_6 a_6) \\ \varphi_7 b_7 + \varphi_6 b_6 \\ -\varphi_7 c_7 - \varphi_6 c_6 + \varphi_3 \\ 3/2(\varphi_8 a_8 - \varphi_7 a_7) \\ \varphi_8 b_8 + \varphi_7 b_7 \\ -\varphi_8 c_8 - \varphi_7 c_7 + \varphi_4 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} = \{\Psi_x\}\{d_{eb}\} \quad (D.22)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} 3/2(\varphi_5 d_5 - \varphi_8 d_8) \\ \varphi_5 e_5 + \varphi_8 e_8 - \varphi_1 \\ -\varphi_5 b_5 - \varphi_8 b_8 \\ 3/2(\varphi_6 d_6 - \varphi_5 d_5) \\ \varphi_6 e_6 + \varphi_5 e_5 - \varphi_2 \\ -\varphi_6 b_6 - \varphi_5 b_5 \\ 3/2(\varphi_7 d_7 - \varphi_6 d_6) \\ \varphi_7 e_7 + \varphi_6 e_6 - \varphi_3 \\ -\varphi_7 b_7 - \varphi_6 b_6 \\ 3/2(\varphi_8 d_8 - \varphi_7 d_7) \\ \varphi_8 e_8 + \varphi_7 e_7 - \varphi_4 \\ -\varphi_8 b_8 - \varphi_7 b_7 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} = \{\Psi_y\}\{d_{eb}\} \quad (D.23)$$

D.2 MATRIZ CINEMÁTICA

Uma vez conhecidas as equações Eq. (D.22) e (D.23), é possível estabelecer o vetor da curvatura do elemento de placa $\{\varepsilon_b^0\}$, de acordo com o vetor dos deslocamentos nodais $\{d_{eb}\}$, e, a coordenada local transversal ao plano do elemento z , conforme ilustram as equações Eq. (D.24), (D.25) e (D.26).

$$\{\varepsilon_b^0\} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.24})$$

$$\{\varepsilon_b^0\} = z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]_{(2 \times 2)}^{-1} & [0]_{(2 \times 2)} \\ [0]_{(2 \times 2)} & [J]_{(2 \times 2)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.25})$$

$$\{\varepsilon_b^0\} = z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]_{(2 \times 2)}^{-1} & [0]_{(2 \times 2)} \\ [0]_{(2 \times 2)} & [J]_{(2 \times 2)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\Psi_x\}_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_x\}_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \{\Psi_x\}_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_x\}_{12}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \{\Psi_y\}_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_y\}_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \{\Psi_y\}_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_y\}_{12}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \{d_{eb}\} \quad (\text{D.26})$$

Assim, a matriz cinemática do elemento de placa DKQ $[B_{DKQ}]$, que relaciona o vetor das deformações lineares de placa $\{\varepsilon_b^0\}$ com o vetor dos deslocamentos nodais correspondentes $\{d_{eb}\}$, Eq. (4.16), é avaliada como mostra a Eq. (D.27).

$$[B_{DKQ}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]_{(2 \times 2)}^{-1} & [0]_{(2 \times 2)} \\ [0]_{(2 \times 2)} & [J]_{(2 \times 2)}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\Psi_x\}_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_x\}_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \{\Psi_x\}_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_x\}_{12}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \{\Psi_y\}_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_y\}_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \{\Psi_y\}_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \{\Psi_y\}_{12}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{D.27})$$

Os elementos da matriz que contém as derivadas das funções de forma, com respeito as coordenadas naturais, podem ser obtidos, com base nos vetores $\{\Psi_x\}$ e $\{\Psi_y\}$, onde, uma vez consideradas as constantes a_k , b_k , c_k , d_k e e_k , o processo se resume a derivação das funções de forma Serendipity, ilustradas nas equações Eq. (D.1) a (D.4).