



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL



IGOR VASCONCELOS DE LACERDA

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE E MODAL DE TORRES TUBULARES DE AÇO
PARA AEROGERADORES DE EIXO HORIZONTAL**

Caruaru

2018

IGOR VASCONCELOS DE LACERDA

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE E MODAL DE TORRES TUBULARES DE AÇO
PARA AEROGERADORES DE EIXO HORIZONTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Centro
Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, em cumprimento às exigências
para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Sob a orientação do Prof. Dr. Douglas Mateus de Lima

Caruaru

2018

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

L131a Lacerda, Igor Vasconcelos de.
Análise de estabilidade e modal de torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal. / Igor Vasconcelos de Lacerda. - 2018.
105f.; il.: 30 cm.

Orientador: Douglas Mateus de Lima.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Engenharia Civil, 2018.
Inclui Referências.

1. Energia eólica. 2. Aerogeradores. 3. Análise elástica (Engenharia). 4. Vibrações (Engenharia). I. Lima, Douglas Mateus de (Orientador). II. Título.

620 CDD (23. ed.) UFPE (CAA 2018-072)

IGOR VASCONCELOS DE LACERDA

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE E MODAL DE TORRES TUBULARES
DE AÇO PARA AEROGERADORES DE EIXO HORIZONTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Engenharia Civil do Centro Acadêmico do Agreste - CAA, da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Área de concentração: **Estruturas**.

A banca examinadora, composta pelos professores abaixo, considera o candidato **APROVADO** com nota _____.

Caruaru, 12 de julho de 2018.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Douglas Mateus de Lima: _____

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Orientador)

Prof. Dr. Humberto Correia Lima Júnior: _____

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Avaliador)

Prof. Dr. Flávio Eduardo Gomes Diniz: _____

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Avaliador)

Prof. Dr. Elder Alpes de Vasconcelos: _____

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (Coordenador da disciplina de TCC)

AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente aos meus pais, Gisoneide Bezerra e Severino Lacerda, por me darem todo o suporte durante a realização deste curso, e por não medirem esforços para que eu alcançasse meus objetivos. Pelo exemplo de amor, caráter, honestidade e perseverança, mostrando-me que sou capaz de atingir meus sonhos com base no trabalho duro, fé e determinação.

À minha irmã Jéssica Lacerda, por todo o seu apoio e momentos de descontração nos meus finais de semana, além do exemplo de dedicação e perseverança, sempre me motivando a buscar o melhor de mim.

Ao meu sobrinho, Levi Macêdo, por me mostrar o amor e a alegria que é ser tio, e que mesmo nos momentos mais difíceis e desafiadores, sempre esteve por perto para me fazer sorrir.

À minha amiga e irmã de consideração, Alanna Bezerra, pelo seu companheirismo ao longo do curso, sempre me auxiliando e me incentivando diante as dificuldades enfrentadas, e pela sua amizade sincera.

À minha amiga, Thais Silva, por todo o suporte e solidariedade durante nossa jornada na universidade, além de sua amizade verdadeira e compartilhamento de muitos momentos de felicidade.

À minha amiga, Raiane Alice, por todos os momentos de descontração, conversas motivadoras, e por seu exemplo de força e coragem para encarar as batalhas que a vida nos proporciona.

Ao meu amigo, Handerson Moreira, que mesmo estando distante fisicamente, sempre esteve presente para me apoiar e me motivar ao longo do curso.

Aos meus amigos Paulo Henrique e Waltner Wagner, por quem eu tenho uma profunda admiração dos seus esforços e paixão para a conquista de seus objetivos, tanto pessoais quanto profissionais.

Ao meu amigo, Tiago Francisco, pelo exemplo de empenho e comprometimento, se tornando um profissional que eu admiro e respeito enormemente.

Aos demais amigos e amigas que fiz ao longo da graduação, e a todos os professores que contribuíram direta e indiretamente para a minha formação profissional e pessoal.

Ao meu orientador e professor, Dr. Douglas Mateus de Lima, pelo exemplo de profissional ético e dedicado ao trabalho. Agradeço imensamente por toda a orientação, pelas conversas descontraídas, e principalmente pela paciência na realização deste trabalho, sendo um profissional que eu admiro e me inspiro profundamente.

Ao meu avô, Ademir Bezerra (*in memoriam*), por todos o seu amor, cuidados, e inúmeros momentos de alegria, e pela lição de força, dedicação e carisma, me motivando sempre a ser uma pessoa melhor.

RESUMO

Visando atender a demanda por energia elétrica da população e das indústrias em geral, aliada a atual preocupação com os impactos ambientais provocados por diversas matrizes energéticas, o uso de fontes renováveis vem ganhando força nos últimos anos, como é o caso da energia eólica. No cenário nacional, houve um desenvolvimento notável na geração de energia eólica no Brasil, que em 2017 figurou entre os 10 países com maior capacidade acumulada de geração elétrica a partir de aerogeradores. Em Pernambuco, surgindo como alternativa para às usinas hidroelétricas que operam abaixo do esperado nos períodos de estiagem, a produção de energia eólica obteve grande relevância nos últimos anos. Na busca de equipamentos cada vez mais eficientes e sujeitos a ventos mais intensos, o porte das torres tem aumentado, ampliando a importância dos estudos a respeito dos efeitos de 2ª ordem geométrico e de vibrações livre da estrutura. Deste modo, este trabalho tem como objetivo a realização de uma análise da estabilidade elástica e a determinação das frequências e dos modos de vibração de uma torre tubular de aço, com 120 m de altura, para a sustentação de um aerogerador de eixo horizontal. Inicialmente, realizou-se uma introdução sobre os tipos de aerogeradores existentes, suas características, e os tipos de torres utilizadas para sustentação. Em seguida, é apresentado um resumo com alguns dos principais trabalhos desenvolvidos a respeito desse tema abordado. Posteriormente, são apresentados os conceitos teóricos necessários para a compreensão e realização das análises de estabilidade e modal da estrutura. A torre foi modelada utilizando elementos finitos de barra, no qual a não linearidade geométrica foi considerada mediante a implantação da matriz de rigidez geométrica consistente. Na modelagem dinâmica da torre, foi implementado um código próprio para a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração (análise de autovalores e autovetores). Verificou-se que os deslocamentos detectados no topo da torre encontram-se abaixo do limite estabelecido por norma europeia, e a respeito a resposta dinâmica da torre, pode-se concluir que a influência do primeiro modo de vibração é predominante em relação aos demais, destacando-se a relevância do estudo das propriedades dinâmicas deste tipo de estrutura, principalmente quanto a possibilidade de ocorrência de problemas de ressonância.

Palavras-chave: Energia Eólica. Torre do Aerogerador. Estabilidade Elástica. Análise Dinâmica. Análise Modal. Frequências de Vibração.

ABSTRACT

Aiming to meet the demand for electricity from the population and industries in general, together with the current concern about the environmental impacts caused by several energy matrixes, the use of renewable sources has been gaining strength in recent years, as is the case with wind energy. In the national scenario, there was a notable development in the generation of wind energy in Brazil, which in 2017 was among the 10 countries with the highest accumulated generation capacity from wind turbines. In Pernambuco, appearing as an alternative to hydroelectric plants that operate below expectations during periods of drought, wind power production has gained great relevance in recent years. In the search for more and more efficient equipment and subject to more intense winds, the size of the towers has increased, increasing the importance of the studies regarding the effects of 2nd geometric order and free vibrations of the structure. Thus, this work has the objective of performing an elastic stability analysis and determining the frequencies and vibration modes of a 120 m high steel tubular tower for the support of a horizontal axis aerogenerator. Initially, an introduction was made on the types of existing aerogenerators, their characteristics, and the types of towers used for support. Then, a summary is presented with some of the main works developed on this topic. Subsequently, the theoretical concepts necessary for the understanding and realization of stability and modal analysis of the structure are presented. The tower was modeled using finite elements of bar, in which geometric nonlinearity was considered by the implantation of the matrix of consistent geometric stiffness. In the dynamic modeling of the tower, a code was implemented to obtain natural frequencies and vibration modes (eigenvalues and eigenvectors analysis). It was verified that the displacements detected at the top of the tower are below the limit established by European norm, and regarding the dynamic response of the tower, it can be concluded that the influence of the first mode of vibration is predominant in relation to the others, highlighting the relevance of the study of the dynamic properties of this type of structure, mainly regarding the possibility of occurrence of resonance problems.

Keywords: Wind Energy. Wind Turbine Tower. Elastic Stability. Dynamic Analysis. Modal Analysis. Vibration Frequencies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico de distribuição da matriz energética brasileira em 2017.	19
Figura 2 - Top 10 de Capacidade Instalada em 2017.	20
Figura 3 - Top 10 de Capacidade Acumulada de geração eólica em 2017.	21
Figura 4 - Localização das usinas geradoras de energia elétrica em Pernambuco.	23
Figura 5 - Aerogerador de eixo vertical.	26
Figura 6 - Aerogerador de eixo horizontal.	26
Figura 7 - Componentes de um aerogerador de eixo horizontal.	27
Figura 8 - Componentes de um gerador convencional de eixo horizontal.	28
Figura 9 - Histórico da evolução da altura das turbinas eólicas.	30
Figura 10 - Torre eólica treliçada.	31
Figura 11 - Torre eólica estaiada.	31
Figura 12 - Torre eólica híbrida de concreto e aço.	32
Figura 13 - Torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal.	32
Figura 14 - Conformação e soldagem da chapa de aço para uma seção da torre.	33
Figura 15 - Conexão parafusada dos flanges entre seções da torre.	33
Figura 16 - Sistema interno de torre tubular de aço para turbina eólica de grande porte.	34
Figura 17 - Quatro primeiros modos e frequências de vibração da torre analisada.	35
Figura 18 - Configuração geométrica e modelagem da torre do aerogerador.	36
Figura 19 - Esquema da torre da turbina eólica MM92.	37
Figura 20 - Exemplo de um pórtico hiperestático com sua configuração deformada, reações de apoio e diagramas de momentos fletores.	42
Figura 21 - Combinação linear de duas forças e os correspondentes deslocamentos.	43
Figura 22 - Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo método dos deslocamentos.	44
Figura 23 - Superposição de soluções básicas no método dos deslocamentos.	45
Figura 24 - Elemento de estrutura reticulada espacial com seus respectivos graus de liberdade.	46
Figura 25 - Sistemas de coordenadas adotados no método da rigidez direta para pórticos planos.	48
Figura 26 - Representação das deslocabilidades de uma barra no sistema local e no sistema global.	48
Figura 27 - Sistema de referência local de uma barra.	49

Figura 28 - Deformação axial relativa a um elemento infinitesimal de barra.....	50
Figura 29 - Rotação de flexão em um elemento infinitesimal de barra.	51
Figura 30 - Deformação transversal devido esforço cortante em um elemento infinitesimal de barra.....	52
Figura 31 - Deformação por torção em elemento infinitesimal de barra de seção circular.....	53
Figura 32 - Graus de liberdade do elemento finito de barra.....	56
Figura 33 - Reações elásticas no elemento finito de barra.	57
Figura 34 - Coeficiente de cisalhamento α_s e fator de forma χ	58
Figura 35 - Sistema auxiliar para o cálculo das flexibilidades.....	58
Figura 36 - Seção transversal da torre.	64
Figura 37 - Espessura das chapas ao longo da altura da torre.	65
Figura 38 - Carregamento adotado na torre.....	66
Figura 39 - Detalhamento das ligações.	67
Figura 40 - Subdivisão da torre em n elementos finitos.....	68
Figura 41 - Representação geométrica do flange de ligação.....	71
Figura 42 - Convergência da frequência em Hz do 1º modo de vibração.....	78
Figura 43 - Convergência da frequência em Hz do 2º modo de vibração.....	78
Figura 44 - Convergência da frequência em Hz do 3º modo de vibração.....	78
Figura 45 - Convergência da frequência em Hz do 4º modo de vibração.....	79
Figura 46 - Convergência da frequência em Hz do 5º modo de vibração.....	79
Figura 47 - Convergência da frequência em Hz do 6º modo de vibração.....	79
Figura 48 - Deslocamentos transversais à torre dos primeiros modos flexionais de vibração.....	81
Figura 49 - Rotações torcionais à torre dos dois primeiros modos torcionais de vibração.....	82
Figura 50 - Deslocamentos transversais à torre no 1º e 2º modo de vibração.....	83
Figura 51 - Deslocamentos transversais à torre no 4º e 5º modo de vibração.....	83
Figura 52 - Rotações torcionais à torre no 3º e 6º modo de vibração.....	84
Figura 53 - Frequências na faixa de trabalho.....	87

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Deslocamentos e rotações de flexão da torre para análises de 1ª e 2ª Ordem.	74
Tabela 2 - Dados de vibração livre da torre para $n = 8$	76
Tabela 3 - Dados de vibração livre da torre para $n = 16$	76
Tabela 4 - Dados de vibração livre da torre para $n = 32$	77
Tabela 5 - Dados de vibração livre da torre para $n = 64$	77
Tabela 6 - Dados de vibração livre da torre para $n = 128$	77
Tabela 7 - Comparativo entre as frequências para $n=8$ e $n=128$	80

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Norma Técnicas
AMA	Amortecedor de Massa Ativo
AMH	Amortecedor de Massa Híbrido
AMS	Amortecedor de Massa Sintonizado
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
ANSYS	<i>Swason Analysis Systems</i>
CAA	Centro Acadêmico do Agreste
DWIA	<i>Danish Wind Industry Association</i>
GWEC	<i>Global Wind Energy Council</i>
HAWT	<i>Horizontal Axis Wind Turbines</i>
IEC	<i>International Electrotechnical Commission</i>
NBR	Norma Brasileira
SGC	Sistema Global de Coordenadas
SLC	Sistema Local de Coordenadas
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
VAWT	<i>Vertical Axis Wind Turbines</i>
DEC	Diagrama de Esforço Cortante
DMF	Diagrama de Momento Fletor

LISTA DE SÍMBOLOS

x	coordenada ao longo da altura da torre
M_H	momento de flexão aplicado ao topo da torre
F_H	força transversal aplicada ao topo da torre
F_V	força vertical aplicada ao topo da torre
dx	comprimento do elemento infinitesimal de torre na direção x
E	módulo de elasticidade longitudinal do material
$I(x)$	função de momento de inércia da seção transversal da torre
I	subíndice utilizado para os nós do modelo da torre
l	comprimento do trecho de torre analisado
L	comprimento da torre
R_{ext}	raio externo do flange
R_{int}	raio interno do flange
rpm	rotações por minuto
n	designação do nó relativo ao topo da torre; ou representa o número de graus de liberdade da estrutura sem absorvedor
$d(x)$	função de diâmetros (distância de eixo a eixo de parede do tubo da torre) variáveis ao longo da altura da torre
$A(x)$	vetor de funções de áreas de seção transversal da torre
$I(x)$	vetor de funções de momentos de inércia à flexão das seções transversais da torre
$J(x)$	vetor de funções de momentos de inércia à torção das seções transversais da torre
esp_i	vetor de espessuras da parede do tubo da seção transversal da torre
d_{base}	diâmetro (distância de eixo a eixo de parede) do tubo na base da torre
d_{topo}	diâmetro (distância de eixo a eixo de parede) do tubo no topo da torre
X_L	coordenada axial local do elemento finito de torre
Y_L	coordenada transversal local do elemento finito de torre
Y_L	coordenada transversal local do elemento finito de torre
u_i, u_f	deslocamentos nodais axiais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC
v_i, v_f	deslocamentos nodais transversais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC

θ_i, θ_f	rotações nodais flexionais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC
φ_i, φ_f	rotações nodais torcionais dos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC
$\{\mathbf{d}\}$	vetor de deslocamentos nodais do elemento finito de torre no SLC
$\{\mathbf{R}_E\}$	vetor de reações elásticas do elemento finito de torre no SLC
$\{\mathbf{R}_E^F\}$	vetor de reações de engaste perfeito do elemento finito de torre no SLC
$[\mathbf{K}_E]$	matriz de rigidez linear do elemento finito de torre no SLC
N_i, N_f	reações elásticas de forças axiais nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC
V_i, V_f	reações elásticas de forças transversais nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC
M_i, M_f	reações elásticas de momentos de flexão nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC
T_i, T_f	reações elásticas de momentos de torção nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre no SLC
r	rigidez linear translacional axial do elemento finito de torre; ou representa o número de forças/momentos de controle dos atuadores
\hat{s}	rigidez linear rotacional torcional do elemento finito de torre
t	rigidez linear translacional transversal do elemento finito de torre
b_i, b_f	rigidezes lineares translacional/rotacional flexional, em relação a um estado de deformação unitário de rotação/deslocamento flexional/transversal, para os nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre
k_i, k_f	rigidez linear rotacional flexional nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre
a	rigidez linear rotacional flexional nos nós inicial e final, em relação a um estado de deformação unitário de rotação flexional nos nós final e inicial, respectivamente, do elemento finito de torre
$[\mathbf{K}_{e,g}]$	matriz de rigidez geométrica do elemento finito de torre no SLC
$NN(x)$	função de esforço normal no elemento finito de torre
$\psi_i(x)$	i-ésima função de forma
r_g, r_T	rigidezes geométrica e tangencial translacionais axiais, respectivamente, do elemento finito de torre
t_g, t_T	rigidezes geométrica e tangencial translacionais transversais, respectivamente, do elemento finito de torre
$b_{i,g}, b_{f,g}$	rigidezes geométricas translacional/rotacional flexional, em relação a um estado de deformação unitário de rotação/deslocamento

$b_{i,T}, b_{f,T}$	flexional/transversal, para os nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre rigidezes tangenciais translacional/rotacional flexional, em relação a um estado de deformação unitário de rotação/deslocamento flexional/transversal, para os nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre
$k_{i,g}, k_{f,g}$	rigidezes geométricas rotacional flexional nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre
$k_{i,T}, k_{f,T}$	rigidezes tangenciais rotacional flexional nos nós inicial e final, respectivamente, do elemento finito de torre
a_g	rigidez geométrica rotacional flexional nos nós inicial e final, em relação a um estado de deformação unitário de rotação flexional nos nós final e inicial, respectivamente, do elemento finito de torre
a_T	rigidez tangencial rotacional flexional nos nós inicial e final, em relação a um estado de deformação unitário de rotação flexional nos nós final e inicial, respectivamente, do elemento finito de torre
$[k_{e,T}]$	matriz de rigidez tangencial do elemento finito de torre no SLC
j	subíndice utilizado para enumerar os elementos finitos da torre
$\{F_e\}$	vetor de forças nodais da estrutura no SGC
$\{D\}$	vetor de deslocamentos nodais da estrutura no SGC coordenadas
$[K_E]$	matriz de rigidez tangencial da estrutura no SGC
$\{D(t)\}$	vetor de funções temporais de deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura no SGC
$[M_E]$	matriz de massa consistente da estrutura no SGC
$\{F_E(t)\}$	vetor de funções temporais das forças nodais da estrutura no SGC
$[M_e]$	matriz de massa do elemento finito no SLC
ρ	massa específica do material da estrutura
$[\varphi]$	matriz de autoversores da matriz de massa da estrutura $[M_E]$
$[M^*]$	matriz de massa diagonalizada da estrutura
$\{D^*\}, \{\ddot{D}^*\}$	vetor de deslocamentos e de acelerações, respectivamente, no referencial em que a matriz de massa da estrutura fica diagonalizada
$[K^*]$	matriz de rigidez da estrutura no referencial em que a matriz de massa da estrutura fica diagonalizada
$\{F^*\}$	vetor de forças no referencial em que a matriz de massa da estrutura fica diagonalizada
$[DI]$	matriz dinâmica inversa

$\{\mathbf{Y}\}, \{\ddot{\mathbf{Y}}\}$	vetor de deslocamentos e de acelerações, respectivamente, no referencial em que a matriz de massa é transformada em uma matriz identidade
$\{\mathbf{F}^I\}$	vetor de forças no referencial em que a matriz de massa é transformada em uma matriz identidade
$[\bar{\Psi}]$	matriz de autoversores da matriz dinâmica inversa $[\mathbf{DI}]$
$[\omega^2]$	matriz diagonal com o quadrado das frequências angulares
$[\Phi]$	matriz modal ponderada
$[\bar{\Phi}]$	matriz modal
ν_i, η, ν_f	termos relacionados aos graus de liberdade axiais da matriz de massa $[\mathbf{M}_e]$
μ_i, δ, μ_f	termos relacionados aos graus de liberdade torcionais da matriz de massa $[\mathbf{M}_e]$
$\alpha_i, \gamma_i, \sigma, \tau_i, \beta_i, \tau_f, \lambda, \alpha_f, \gamma_f, \beta_f$	termos relacionados aos graus de liberdade flexionais da matriz de massa $[\mathbf{M}_e]$
I_{nac}^{fl}	momento de inércia da nacele em relação ao eixo que passa pelo diâmetro da seção transversal de topo da torre (eixo em torno do qual tem-se a rotação θ_n)
$\theta_n, \ddot{\theta}_n$	rotação e aceleração angular flexionais do topo da torre, respectivamente
u_n, \ddot{u}_n	deslocamento e aceleração translacionais transversais do topo da torre, respectivamente
$a_{nac}, b_{nac}, h_{nac}$	dimensões do paralelepípedo equivalente à nacele
M_{nac}	massa da nacele, do rotor e das pás (todos equipamentos locados no topo da torre)
$\nu_n, \ddot{\nu}_n$	deslocamento e aceleração translacionais axiais do topo da torre, respectivamente
$\varphi_n, \ddot{\varphi}_n$	rotação e aceleração angular torcionais do topo da torre, respectivamente
I_{nac}^{tr}	momento de inércia da nacele em relação ao eixo vertical da torre (eixo em torno do qual têm-se as rotações φ_j)
u_n, \ddot{u}_n	vetor de deslocamentos e de acelerações translacionais horizontais da torre (graus de liberdade dinâmicos), respectivamente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Considerações Iniciais	18
1.2	Justificativa	21
1.3	Objetivos.....	24
1.3.1	Objetivo Geral	24
1.3.2	Objetivos Específicos	24
2	REFERENCIAL TEÓRICO	25
2.1	Turbinas eólicas	25
2.1.1	Características dos aerogeradores.....	25
2.1.2	Características das torres	29
2.2	Revisão da literatura	35
2.3	Conceitos básicos na análise matricial de estruturas	40
2.3.1	Sistemas de equações.....	41
2.3.2	Indeterminação cinemática	42
2.3.3	Princípio da superposição de efeitos	43
2.4	Discretização de estruturas e método dos deslocamentos.....	43
2.4.1	Método da rigidez direta.....	45
2.4.2	Graus de liberdade de um elemento	46
2.4.3	Discretização em elementos finitos	46
2.4.4	Sistemas de Referencias	47
2.5	Idealização do comportamento de barras	49
2.5.1	Deformações axiais.....	50
2.5.2	Deformações normais por flexão.....	51
2.5.3	Distorções por efeito cortante.....	52
2.5.4	Distorções por torção.....	53
2.6	Matriz de rigidez do elemento de barra	53
2.6.1	Princípio dos trabalhos virtuais	54
2.6.2	Matriz de rigidez linear.....	56
2.6.3	Cálculo dos elementos da matriz de rigidez linear	57
2.6.4	Matriz de rigidez geométrica.....	59
2.6.5	Matriz de rigidez tangencial	60
2.7	Caracterização dinâmica da torre.....	61
2.7.1	Matriz de massa.....	62

3	METODOLOGIA.....	64
3.1	Caracterização da torre	64
3.2	Ligações da torre	66
3.3	Matriz de rigidez global e equilíbrio dinâmico da torre	67
3.4	Cálculo dos deslocamentos da torre.....	71
3.5	Determinação das frequências e modos de vibração.....	72
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	74
4.1	Deslocamentos da torre.....	74
4.2	Análise dinâmica da estrutura	76
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	88
5.1	Síntese do trabalho e conclusões.....	88
5.2	Sugestões para trabalhos futuros	90
	REFERÊNCIAS	91
	APÊNDICE A – CÓDIGO IMPLEMENTADO.....	94

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Com as crescentes questões sobre o desenvolvimento sustentável, a utilização de recursos naturais para satisfazer as necessidades energéticas atuais, atendendo as leis ambientais cada vez mais exigentes e sem comprometer as imposições das gerações futuras, passou a ser amplamente discutido em todas as nações. Nesse cenário, obteve destaque o desenvolvimento de matrizes energéticas provenientes de fontes renováveis, nas quais destacam-se a energia fotovoltaica (solar), energia eólica, energia geotérmica e energia das marés, entre outras fontes. Dentre essas, a utilização de energia eólica vem crescendo com o passar dos anos, uma vez que se trata de uma fonte de energia limpa e amplamente disponível.

Segundo Hau (2006), a energia eólica vem sendo utilizada desde os primórdios da civilização, onde a primeira informação com fontes históricas confiáveis sobre a existência de moinhos de vento remete ao ano de 644 d.C., na região fronteira persa-afegã.

As primeiras tentativas de aproveitamento eólico para atender as demandas por energia elétrica ocorreram em circunstâncias onde já haviam se estabelecidos outras fontes geradoras, surgindo, portanto, como uma fonte energética adicional, trabalhando em conjunto com as demais. O primeiro desenvolvimento sistemático para utilizar a energia eólica para a geração de eletricidade ocorreu na Dinamarca, com evidência para o nome de Poul La Cour, grande responsável por aperfeiçoar a tecnologia tradicional de moinhos de vento para a geração de eletricidade no fim do século XIX. Contudo, a sua utilização para a geração de eletricidade, em escala comercial, teve início na década de 1970, proporcionado pelos avanços na indústria aeronáutica e pela crise mundial do petróleo, objetivando reduzir a dependência do petróleo como fonte primária energética. Dessa forma, os países europeus e os Estados Unidos sentiram a necessidade de desenvolver equipamentos alternativos para a geração de eletricidade, principalmente utilizando-se de fontes renováveis (HAU, 2006).

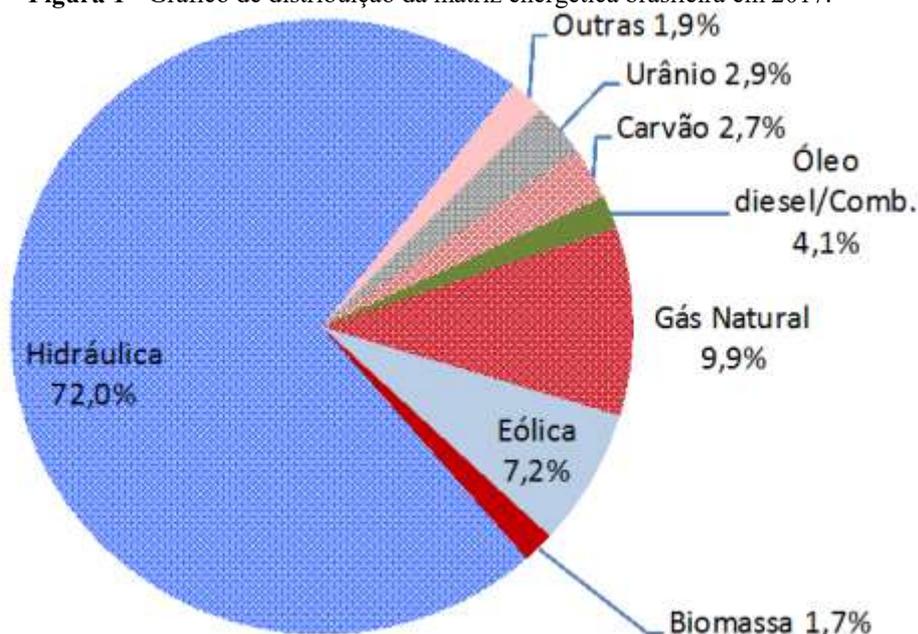
A energia eólica é uma fonte de energia renovável onde os efeitos causados no ambiente são significativamente menores quando comparada com a energia termoelétrica ou a hidroelétrica, por exemplo, além de se utilizar de uma fonte abundante e inesgotável. Dentre as vantagens da energia eólica, pode-se destacar a não emissão de gases de efeito de estufa e demais gases poluentes, e por também não gerar resíduos na sua operação, o que a torna uma fonte de energia de baixíssimo impacto ambiental. Entretanto, a implantação de parques eólicos pode acarretar em alguns impactos localizados, tais como poluição visual, a mortandade de

pássaros (se as usinas forem colocadas em rotas migratórias), a emissão de nível de ruídos de baixa frequência, que podem ser causadoras de algum incômodo e de interferência nos sinais de transmissão de TV locais.

Nessa busca por desenvolvimento na utilização de energia eólica, destacaram-se os países europeus como Alemanha, Dinamarca e Espanha, assim como Estados Unidos e China, elevando a participação dessa matriz nos recursos energéticos globais. Segundo dados estatísticos da *World Wind Energy Association* (2018), no ano de 2017, o potencial de geração eólica no mundo todo foram cerca de 539 GW, significando uma capacidade superior a capacidade total de geração elétrica de alguns dos maiores países do mundo.

No contexto nacional, a matriz energética brasileira é bem diversificada, no qual predomina a geração de energia através de hidrelétricas. Para compor o quadro desta matriz energética e atender as demandas, foram construídas várias termoeletricas, que têm como objetivo abastecer regiões desprovidas de redes de transmissão de energia elétrica geradas por fontes renováveis bem como atuar quando a geração de energia elétrica geradas por hidroelétricas não atendem a demanda. Visando proporcionar um desenvolvimento sustentável, reduzindo a participação de termoeletricas na composição das matrizes energéticas, a geração eólica vem sendo alvo de investimentos e de ampliação na participação energética brasileira. A Figura 1 apresenta o gráfico de distribuição da matriz energética no Brasil, onde a geração eólica foi responsável por 7,2 % do abastecimento nacional no ano de 2017.

Figura 1 - Gráfico de distribuição da matriz energética brasileira em 2017.

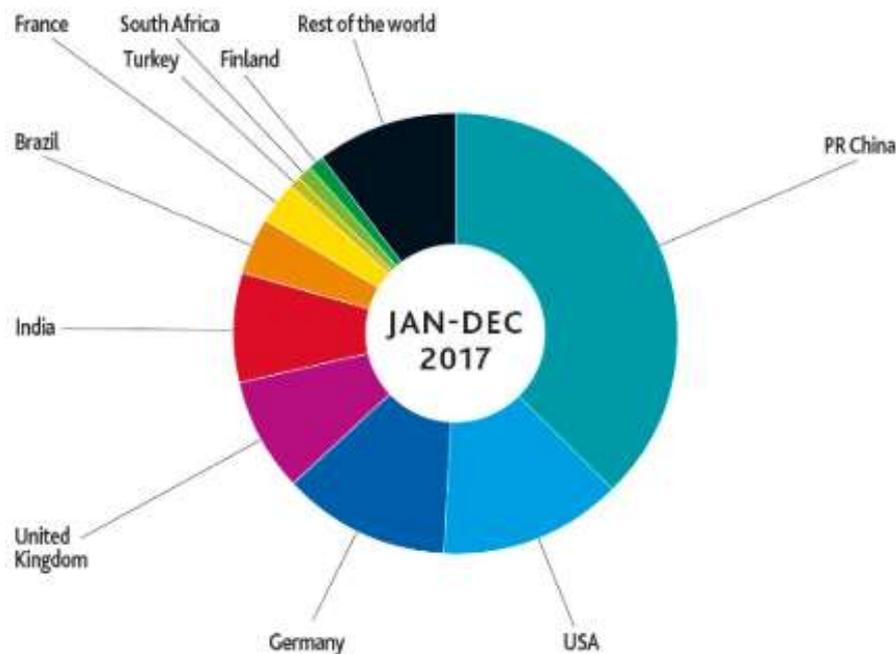


Fonte: ANEEL (2018).

Nesse contexto de ampliação de geração de energia através da força dos ventos, de 2009 a 2014 foram contratados mais de 12 GW em novos projetos, visando elevar o volume de instalações de energia eólica no País para mais de 14,3 GW até 2018. Esse desenvolvimento na geração teve um impulso com o Programa de Incentivo às Fontes Alternativas de Energia Elétrica (PROINFA), lançado em 2004. Tal política elevou o país a um patamar de destaque na produção de energia renovável (MELO, 2013).

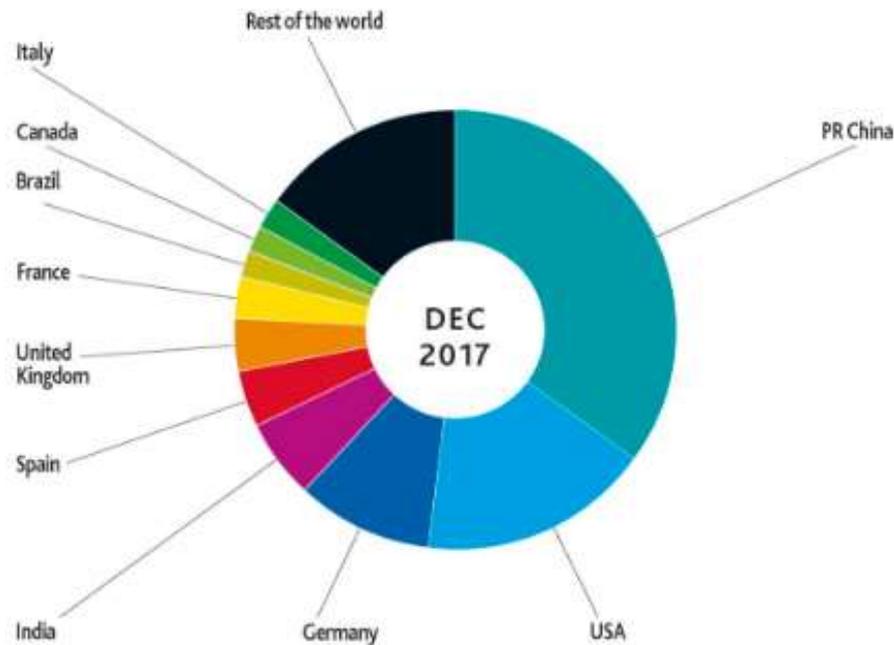
De acordo com o Relatório Global da *Wind Energy Council* (2018), houve uma expansão de 2022 MW na geração de energia eólica no Brasil em 2017, posicionando o país na sexta posição no ranking mundial de capacidade instalada em 2017 (Figura 2). O País também ocupou a oitava posição no ranking mundial de capacidade acumulada de geração eólica, com 12.763 MW (Figura 3).

Figura 2 - Top 10 de Capacidade Instalada em 2017.



Fonte: GWEC (2018).

Figura 3 - Top 10 de Capacidade Acumulada de geração eólica em 2017.



Fonte: GWEC (2018).

1.2 Justificativa

Depois de anos de exploração descontrolada de fontes de energia poluentes e agressivas ao meio ambiente, e com o risco eminente de esgotamento desses recursos, iniciou-se as buscas por fontes de energias limpas e inesgotáveis, entre elas a eólica. No cenário brasileiro, ocorreu um grande avanço na utilização dessa fonte energética nos últimos anos, com grande destaque para a região nordeste, proporcionado pela sua elevada incidência de ventos, transformando-a no polo da energia eólica do país. Em Pernambuco, diversos investimentos foram realizados, proporcionando o crescimento dos parques eólicos existentes, bem como projetos para a instalação futura de novos parques, estabelecendo em conjunto com a energia hidroelétrica, como as principais matrizes energéticas do estado, projetando a redução da dependência das termoelétricas, principalmente durante as crises hídricas na região, onde a produtividade das hidroelétricas encontra-se comprometidas.

Pernambuco se mostrou ser um local com elevado potencial para a geração de energia eólica. O estado possui mais de 90% da sua área inserida no chamado “Polígono das Secas”, região onde as estiagens são prolongadas e a precipitação é mal distribuída, mas é justamente nesta região que observamos potenciais energéticos eólico e solar altos (ATLAS...2017). Segundo a Agência Nacional de Energia Elétrica (2016), o estado de Pernambuco conta com 119 usinas geradoras de energia elétrica, com cerca de 4.097 MW de potência instalada, sendo que, possui 28 usinas eólicas em operação, gerando uma produção total de 14,5% de sua

energia. Em razão desse elevado crescimento na geração de energias renováveis, foi publicado em 2017 o atlas eólico e solar de Pernambuco, trazendo informações relevantes sobre as usinas em operação, para as que estão em fase de construção e para os aspectos gerais de relevo e infraestrutura do estado. Na Figura 4 é apresentado no mapa de Pernambuco a localização das usinas geradoras de eletricidade.

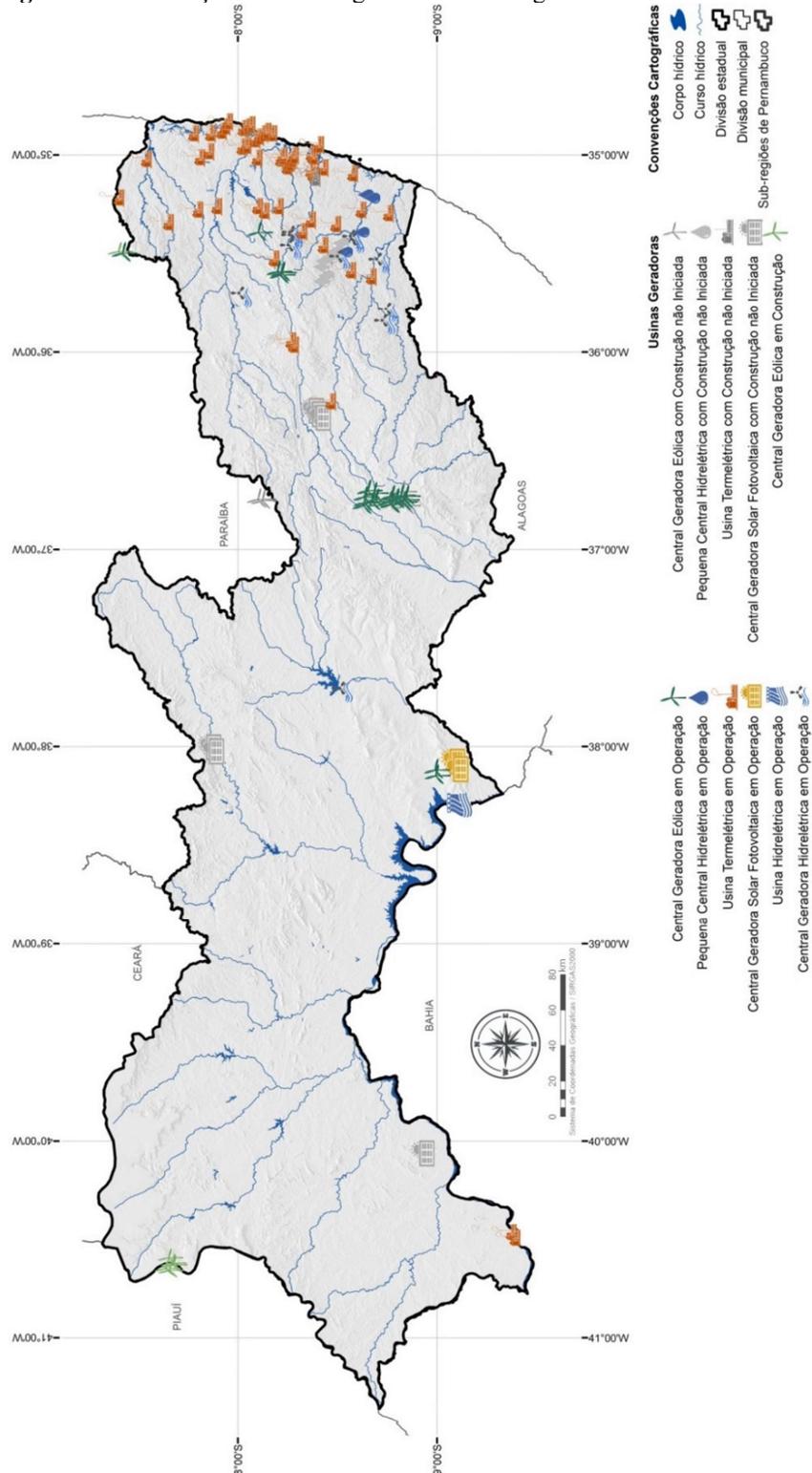
Tendo em vista toda essa crescente relevância no estudo dessa matriz energética, além do desenvolvimento e instalação dos aerogeradores, torna necessário um estudo mais detalhado na estrutura desses equipamentos, que se encontram submetidos a elevados esforços provenientes do peso próprio da estrutura e de ações externas intensas, como o vento e as cargas de funcionamento. Os equipamentos responsáveis pela produção de energia eólica podem ser divididos em aerogerador (rotor e nacele) e a torre de sustentação. As torres eólicas podem ser de variados sistemas estruturais, em que os principais tipos são: torres eólicas treliçadas, torres eólicas cilíndricas e as cônicas. Vários tipos de materiais podem ser empregados na fabricação das torres, em que os mais utilizados são o aço e o concreto. Referindo-se ao Brasil, principalmente nos grandes parques eólicos, predominam a utilização de torres tubulares circulares de aço e as torres circulares de concreto.

Com o grande aumento da produção mundial de energia eólica nos últimos anos, os aerogeradores vem se tornando cada vez maiores e com maior capacidade de geração de energia, tornando necessária a instalação destes equipamentos sob a ação de ventos mais intensos e contínuos, fazendo com que as dimensões das torres de sustentação desses aerogeradores sejam cada vez mais elevadas e robustas. Dos pontos de vista econômico e construtivo, torres com altura elevadas se tornam um obstáculo, por serem responsáveis por cerca de 20% do custo total do gerador eólico, assim como dificultar o transporte e a montagem dessas torres, e exigir análises estruturais de estabilidade e dinâmica cada vez mais elaboradas, resultando em projetos mais complexos (HAU, 2006).

Como já foi mencionado, o aerogerador é fixado em torres que, com altura cada vez maior, e devido à sua geometria, características de esbeltez e de flexibilidade dos materiais, podem apresentar vibrações excessivas causadas pelo próprio funcionamento do aerogerador, como também pela ação do vento. Essas vibrações excessivas podem causar danos permanentes, e comprometer a integridade estrutural dos componentes do aerogerador. Portanto, o objetivo desse trabalho é realizar análises de estabilidade e dinâmica de uma torre tubular de aço de formato cônico, com 120 metros de altura, com diâmetros e espessuras das chapas variáveis ao longo da altura, destinadas ao suporte de um aerogerador de eixo horizontal. Na realização dessa análise, utilizam-se de diversos conhecimentos da engenharia estrutural,

principalmente o método dos deslocamentos e o método da rigidez direta, elaborando as matrizes necessárias para a resolução dos sistemas de equilíbrio, almejando satisfazer todas as solicitações de maneira segura e econômica.

Figura 4 - Localização das usinas geradoras de energia elétrica em Pernambuco.



Fonte: Atlas... (2017).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Analisar a estabilidade elástica e determinar as frequências e os modos de vibração de uma torre tubular de aço, com diâmetro e espessura das chapas variáveis ao longo da altura, que serve para a sustentação de um aerogerador de eixo horizontal.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Discretizar as torres tubulares de aço utilizando elementos finitos;
- Montar o sistema de equações de equilíbrio da torre;
- Obter a matriz de rigidez tangencial da torre;
- Obter a matriz de rigidez geométrica da torre;
- Obter as matrizes de massa;
- Resolver o sistema de equações de equilíbrio dinâmico homogêneo (análise modal);

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste item é apresentado todo o referencial e conceitos teóricos essenciais para realização deste trabalho, bem como uma revisão geral da literatura, apresentando trabalhos recentes que abordaram temática semelhante à deste trabalho. Portanto, inicialmente são introduzidos os conceitos de turbina e aerogeradores eólicos, e as características das torres de suporte a turbina eólica. Em seguida, é apresentado um resumo geral dos principais trabalhos desenvolvidos a respeito do projeto e da análise dinâmica de torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal. Por fim, é dissertado sobre os principais conceitos necessários para a análise estrutural, o procedimento de discretização de elementos finitos, a idealização do comportamento de barras e o método da rigidez direta.

2.1 Turbinas eólicas

2.1.1 Características dos aerogeradores

Aerogeradores são equipamentos capazes de transformar a energia cinética dos ventos em energia mecânica ou em energia elétrica, para uso em diversas aplicações, como por exemplo, para acionamento de bombas d'água, moinhos, e para a geração de energia elétrica. O princípio de funcionamento baseia-se no movimento de rotação causada pela incidência do vento nas pás do aerogerador, que converte a energia cinética dos ventos em potência mecânica rotacional no eixo do rotor. Essa potência mecânica é então transmitida ao gerador, que através de um processo de conversão eletromecânica, produz uma potência elétrica de saída (CRESESB, 2017).

As turbinas eólicas podem ser classificadas conforme a direção do eixo de rotação das pás em: Turbinas Eólicas de Eixo Vertical (TEEV) ou *Vertical Axis Wind Turbine (VAWT)*, e as Turbinas Eólicas de Eixo Horizontal (TEEH) ou *Horizontal Axis Wind Turbine (HAWT)*.

Segundo o CRESESB (2017), em geral as TEEVs têm a vantagem de estarem permanentemente alinhadas com o vento (ao contrário das de eixo horizontal), onde nenhum ajuste é necessário quando a direção do vento muda. Outra vantagem é que, por possuírem uma altura menor que as TEEHs, os equipamentos próximos ao solo facilitam a instalação e a manutenção das mesmas. Contudo, por terem uma altura inferior que as TEEHs, a velocidade do vento é inferior, e conseqüentemente, as TEEVs tornam-se menos eficientes, além de

necessitarem de um impulso no sistema elétrico para dar partida. Na Figura 5 é ilustrado um exemplo de TEEV.

As TEEHs (Figura 6) são as mais utilizadas, e grande parte da experiência mundial está voltada para a sua utilização. Elas precisam estar alinhadas com o vento, e para isso, usam um mecanismo de ajuste. Tradicionalmente, o sistema de ajuste consiste em motores elétricos e caixas de engrenagens que movem todo o rotor para a esquerda ou direita em pequenos incrementos, por meio de um controlador eletrônico responsável por ler a posição de um dispositivo cata-vento e ajustar a posição do rotor para capturar o máximo de energia eólica disponível.

Figura 5 - Aerogerador de eixo vertical.



Fonte: CRESESB (2017).

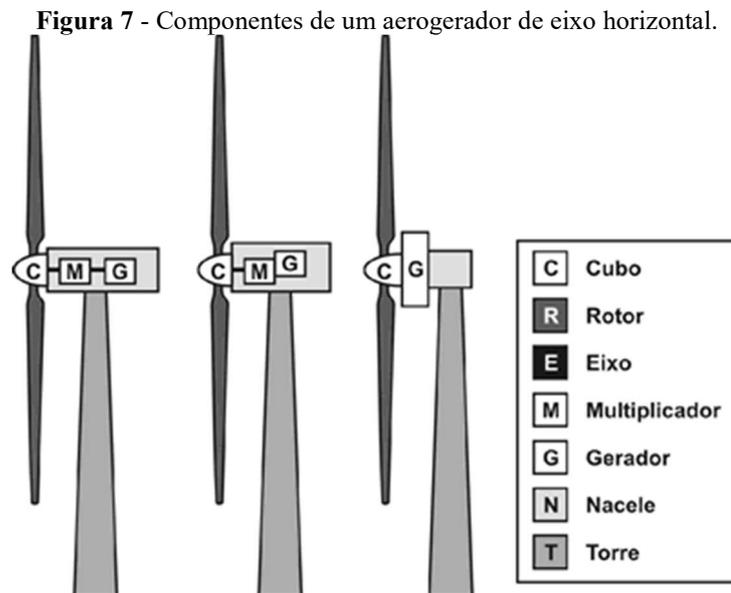
Figura 6 - Aerogerador de eixo horizontal.



Fonte: CRESESB (2017).

Sobre seu funcionamento, as TEEHs são movidas por forças aerodinâmicas chamadas de forças de sustentação (*lift*) e forças de arrasto (*drag*). Um corpo que obstrui o movimento do vento está sujeito a ação de forças que atuam perpendicularmente ao escoamento, ou seja, contra a direção do vento, (forças de sustentação) e de forças que atuam na direção do escoamento, a favor do vento (forças de arrasto). Para uma mesma velocidade de vento, as turbinas projetadas para operar por efeito de forças de sustentação permitem liberar muito mais potência do que aqueles que giram sob efeito de forças de arrasto (CRESESB, 2017).

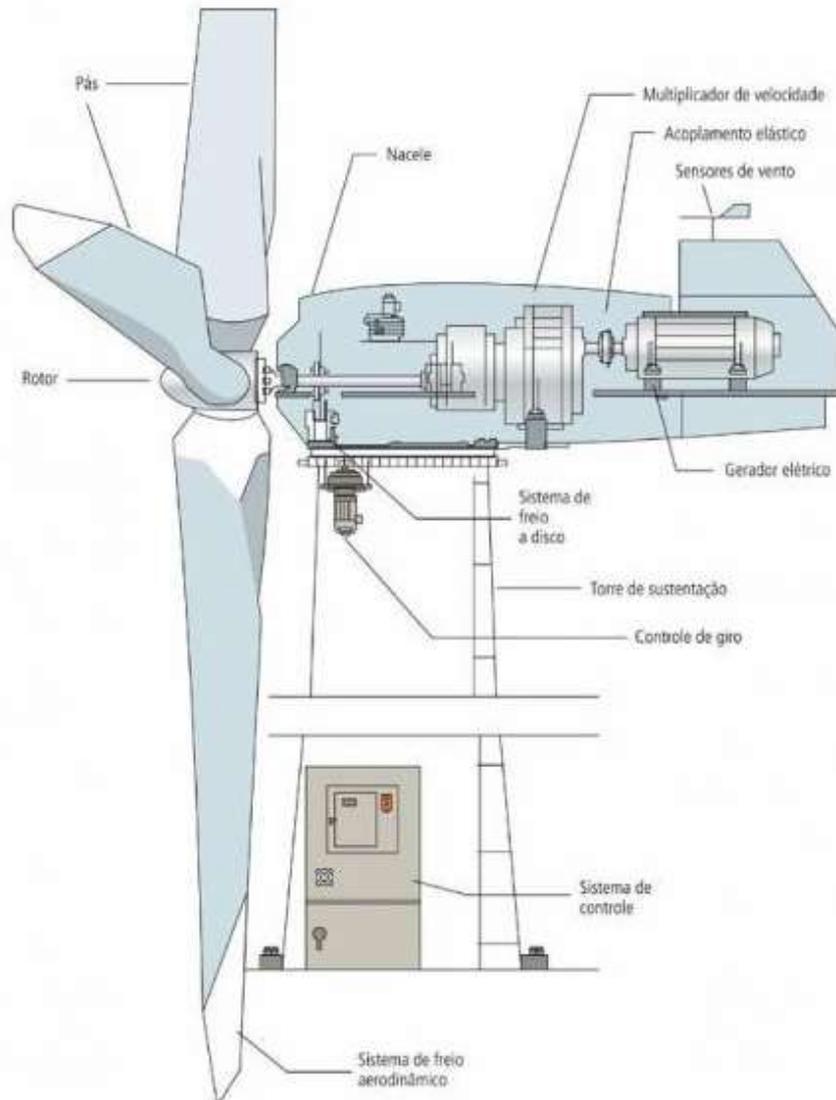
Basicamente, os aerogeradores de eixo horizontal são compostos por: um suporte estrutural, que é a torre; um rotor, para transformar a energia eólica em energia mecânica; um cubo para sustentar as pás; eixos para transferir a energia mecânica de um componente a outro; uma caixa multiplicadora, que pode ser utilizada ou não, para aumentar a velocidade angular do eixo; um gerador (convencional ou multipolos) para transformar energia mecânica em energia elétrica; e uma nacele, onde são armazenados ou acoplados os componentes. Na Figura 7 é apresentado de forma geral os principais componentes dos aerogeradores.



Fonte: CRESESB (2017).

A nacela é o compartimento situado sobre a torre, que protege o gerador, a caixa de engrenagens (quando utilizada), todo o sistema de controle, freio de estacionamento, sistema de medição do vento e motores para rotação do dispositivo, proporcionando o melhor posicionamento em relação ao vento. Em aerogeradores de grande porte, a nacela contém acessórios de manutenção e permite acesso de técnicos ao seu interior. Na Figura 8 são indicados os componentes de um gerador convencional de eixo horizontal, com destaque para os elementos no interior da nacela.

Figura 8 - Componentes de um gerador convencional de eixo horizontal.



Fonte: CRESESB (2017).

Segundo CRESESB (2017), as pás são perfis aerodinâmicos que interagem com o vento, convertendo parte da energia cinética em trabalho mecânico. Inicialmente fabricadas em alumínio, atualmente são fabricadas em fibra de vidro, reforçadas com epóxi. As pás são fixadas através em uma estrutura metálica a frente do aerogerador denominada cubo. O cubo é uma estrutura fabricada em aço ou liga de alta resistência, sendo montado de tal forma que, ao sair da fábrica, este apresenta-se como peça única e compacta, proporcionando que, mesmo para os aerogeradores de grande porte, seu transporte seja feito sem a necessidade de montagens no local da instalação. A transferência da energia mecânica da turbina é feita através do eixo, sendo o responsável pela conexão do cubo ao gerador. Já a transferência da energia mecânica proveniente do eixo do rotor até o gerador é feita pelo sistema de transmissão, que engloba a caixa multiplicadora. Em um projeto tradicional de uma turbina eólica, a caixa de transmissão

mecânica é colocada entre o rotor e o gerador, de forma a adaptar a baixa velocidade do rotor à velocidade de rotação mais elevada dos geradores convencionais. Recentemente, alguns fabricantes desenvolveram com sucesso aerogeradores sem a caixa multiplicadora e abandonaram a forma tradicional de construí-los.

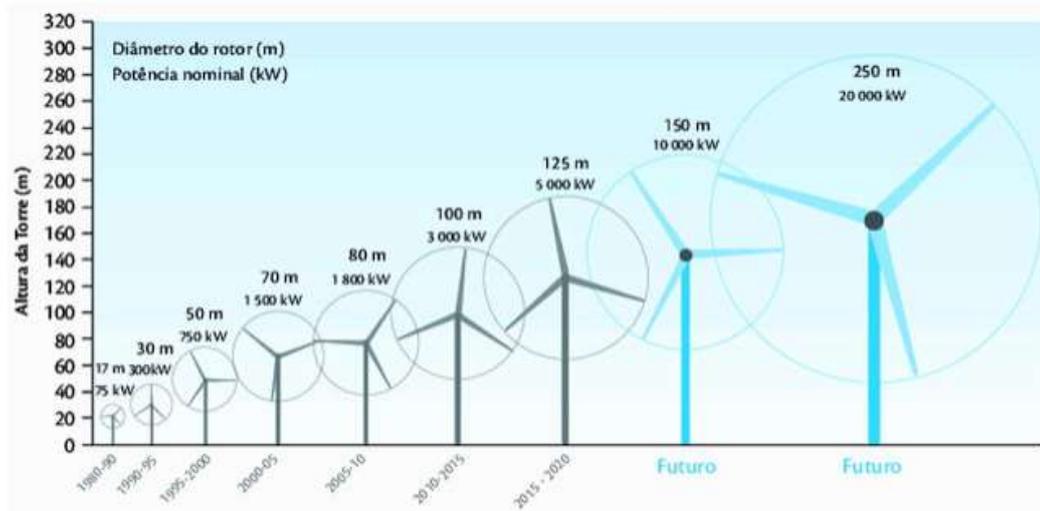
O gerador é responsável pela transformação da energia mecânica de rotação em energia elétrica. As turbinas eólicas começam a gerar energia quando a velocidade do vento atinge a velocidade de partida, e param de gerar quando a velocidade do vento supera a velocidade de desligamento estabelecida, pois se o aerogerador operar com velocidades de vento muito elevadas, pode comprometer os seus componentes e causar danos irreversíveis. O dispositivo responsável por realizar tal controle de acionamento com base na velocidade é o controlador. Por fim, as torres sustentam e posicionam o rotor a uma altura adequada para seu funcionamento. É um item estrutural de grande porte e de elevada contribuição no custo do sistema, e para promover maior equilíbrio e segurança na sustentação de toda a nacelle em alturas cada vez maiores, tem-se utilizado torres tubulares de metal (CRESESB, 2017).

2.1.2 Características das torres

Com a evolução que os aerogeradores vêm sofrendo, estando cada dia maiores e mais potentes, é necessário a busca de ventos com fluxos mais constantes e com elevada intensidade, fazendo com que os aerogeradores sejam instalados cada vez mais altos. Portanto, as torres que suportam esses aerogeradores estão com dimensões cada vez maiores nos últimos anos. Na Figura 9, pode-se observar esse aumento da altura das torres ao longo dos anos, bem como a previsão futura dessa característica.

Do ponto de vista financeiro, a altura da torre é um componente essencial. Segundo Hau (2006), o custo da torre pode chegar a aproximadamente 20% do custo total da turbina eólica, sendo, portanto, uma das desvantagens do aumento da altura das torres. Sendo assim, as etapas de análise e de projeto da torre ganharam ainda mais importância, já que uma redução no custo de projeto e execução da torre pode significar uma considerável redução do custo final na energia produzida. Outra desvantagem do aumento da altura das torres está no transporte, montagem e manutenção da torre, tornando todos esses procedimentos mais caros e trabalhosos. Por exemplo, em torres com mais de 100 m de altura e sujeitas a sustentação de centenas de toneladas em sua extremidade, que exigem bases com diâmetro superior a 5 m para sua sustentação, dificultam o transporte por meio de rodovias, elevando os custos de transporte no empreendimento.

Figura 9 - Histórico da evolução da altura das turbinas eólicas.



Fonte: Marcucci (2017).

Analisando do ponto de vista estrutural, uma falha na torre pode comprometer todo o sistema (diferente de uma falha em algum componente da nacela, por exemplo, pois é um equipamento em que a manutenção e até mesmo a substituição é simples de ser feita, e sua falha não compromete todos os demais componentes estruturais da torre), portanto, ela é um elemento cuja integridade é de suma importância. Por isso, mesmo que a torre possa ser analisada individualmente, para o seu projeto é necessário analisar o aerogerador como um todo, considerando as influências de todos os componentes na torre. Um dos parâmetros de maior importância é a rigidez da torre, que é essencial para determinar os deslocamentos os quais ela estará submetida, bem como as frequências e os modos de vibração, fundamental para a realização da análise dinâmica da torre.

Dentre os diversos tipos de materiais e forma de construção das torres, as principais são de formato tubular, que podem ser fabricadas tanto em aço como em concreto, ou até mesmo com ambos os materiais (torres híbridas), além das torres treliçadas e as estaiadas, ambas feitas de aço. As torres treliçadas são fabricadas usando perfis de aço soldados, apresentando cerca de metade do peso de uma torre tubular com rigidez similar, além da facilidade no processo de montagem. Suas principais desvantagens são a aparência visual, considerada não muito agradável, e a dificuldade de manutenção, devido a quantidade elevada de barras existentes. Atualmente, as torres treliçadas praticamente não são mais utilizadas (DWIA, 2003). Na Figura 10 é mostrado um exemplo de torre treliçada.

Figura 10 - Torre eólica treliçada.



Fonte: DWIA (2003).

Segundo o DWIA (2003), as torres estaiadas (Figura 11) são utilizadas apenas em pequenos aerogeradores. Suas principais vantagens são o baixo custo de fabricação e a redução de peso na estrutura. As desvantagens são o difícil acesso em torno das torres, prejudicando a manutenção, e a necessidade de uma grande área livre ao redor da torre para a fixação dos cabos.

Figura 11 - Torre eólica estaiada.



Fonte: DWIA (2003).

Outro tipo de torre são as de concreto moldado “in loco”. Entretanto, este tipo de construção implica em prazos excessivos, levando algumas empresas a se especializarem na fabricação de torre em concreto pré-fabricado, buscando à redução do tempo consumido. Mais recentemente, surgiram as torres do tipo híbrida (estruturas mistas de concreto e aço), podendo apresentar uma boa alternativa, considerando a maior capacidade do concreto para absorver o efeito das vibrações na estrutura, produzidas pelas cargas dinâmicas. O principal obstáculo é

por apresentar um custo elevado de fabricação, não sendo competitivo no mercado atual. Na Figura 12 é ilustrado um exemplo de torre híbrida.

Figura 12 - Torre eólica híbrida de concreto e aço.



Fonte: DWIA (2003).

O tipo mais comum de torre para aerogeradores são as torres tubulares de aço (Figura 13), que são fabricadas em segmentos cônicos tubulares, com comprimento que variam entre 20 a 30 m, com flange nas extremidades e aparafusadas internamente, possibilitando uma montagem simples e rápida dos componentes. Em geral, os comprimentos dos segmentos da torre são limitados nessa faixa de valores devido a dificuldade de se transportar elementos maiores em rodovias, bem como a dificuldade para a montagem e instalação (DWIA, 2003).

As torres de grande porte mais usuais são de formato cônico, com seu diâmetro aumentando do topo em direção a base, resultando assim em elementos com rigidez considerável, com uma economia muito grande de material, quando comparada com as torres de seção constante.

Figura 13 - Torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal.

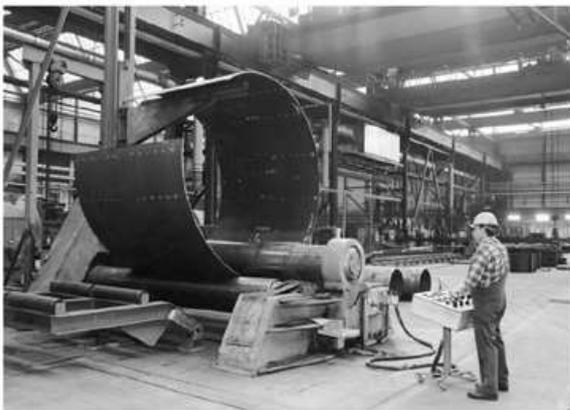


Fonte: DWIA (2003).

As torres são confeccionadas a partir de seções pré-fabricadas com um comprimento de até cerca de 30 m. As seções são produzidas a partir de chapas de aço com espessura de 10 a 50 mm, e com largura de aproximadamente 2 m, passando por um procedimento de calandragem e de soldagem, formando segmentos de formato cilíndrico. Na maioria dos casos, a solda é realizada por meio de soldadores automáticos, visto que essa ligação requer uma atenção especial em razão das situações de carregamento da torre. A qualidade das soldas é verificada por meio de métodos de ultrassom, raios-X e exames de rachaduras superficiais (HAU, 2006).

Na Figura 14 é exposto o processo de calandragem (a) e soldagem (b) da chapa de aço para a formação de um segmento de torre. Nas extremidades de cada segmento da torre são soldados os flanges, que serão aparafusados internamente, fazendo a ligação entre os segmentos que compõem a torre (Figura 15).

Figura 14 – Conformação e soldagem da chapa de aço para uma seção da torre.



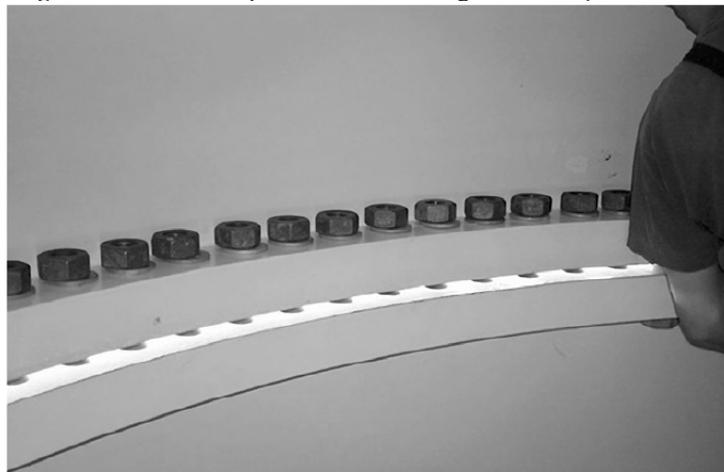
(a) Calandragem da chapa de aço.



(b) Soldagem da chapa conformada.

Fonte: Hau (2006).

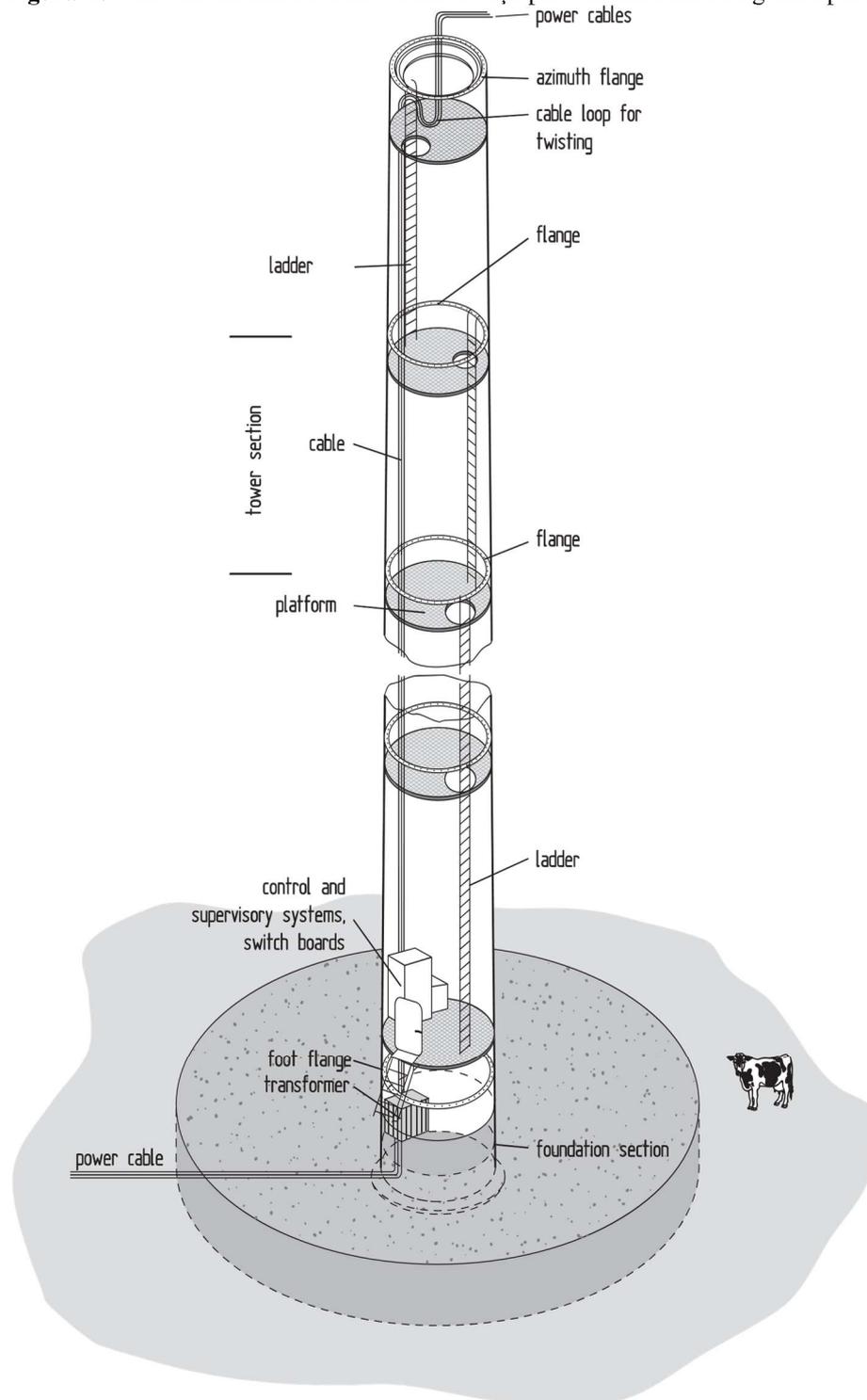
Figura 15 - Conexão parafusada dos flanges entre seções da torre.



Fonte: Hau (2006).

A torre deve proporcionar acesso seguro à nacelle por meio de plataformas intermediárias, porta de acesso na base da torre e sistema de escadas, além de abrigar uma série de dispositivos de instalações elétricas, como possibilitar a descida dos cabos de transmissão de energia para a base da torre e a iluminação interna obrigatória para o trabalho de manutenção na torre (Figura 16).

Figura 16 - Sistema interno de torre tubular de aço para turbina eólica de grande porte.

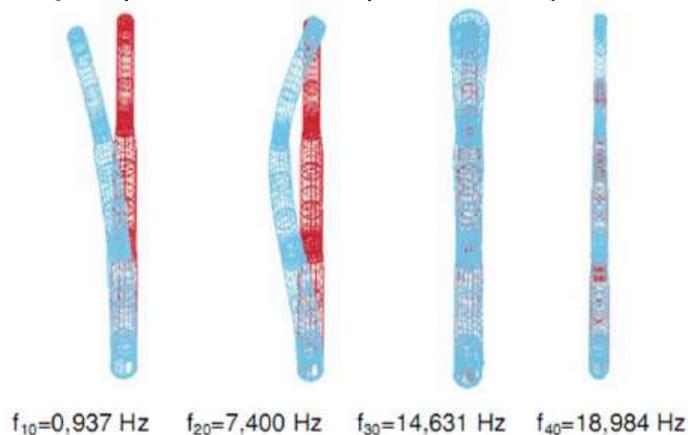


2.2 Revisão da literatura

Neste item são apresentados os principais trabalhos relacionados à análise estrutural e à análise dinâmica de torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal, considerando os objetivos deste trabalho.

Bazeos et al. (2002) analisaram um modelo em elementos finitos de uma torre eólica de 38 m de altura composta por três segmentos, com diâmetro da base de 2,80 m e do topo de 1,82 m. A ligação entre os segmentos da torre foi realizada por aparafusamento dos flanges. A deformação e a capacidade de carga foram decorrentes dos efeitos estático e dinâmico. Foram considerados na avaliação do carregamento, os efeitos da gravidade e das condições aerodinâmica na torre. Na Figura 17 é mostrado o comportamento da torre sob análise de vibração livre sem a consideração da influência da turbina, das pás e do rotor; na qual, f_{10} , f_{20} , f_{30} e f_{40} correspondem aos 1º e 2º modos de flexão, ao 1º modo torcional e ao 3º modo flexional, respectivamente.

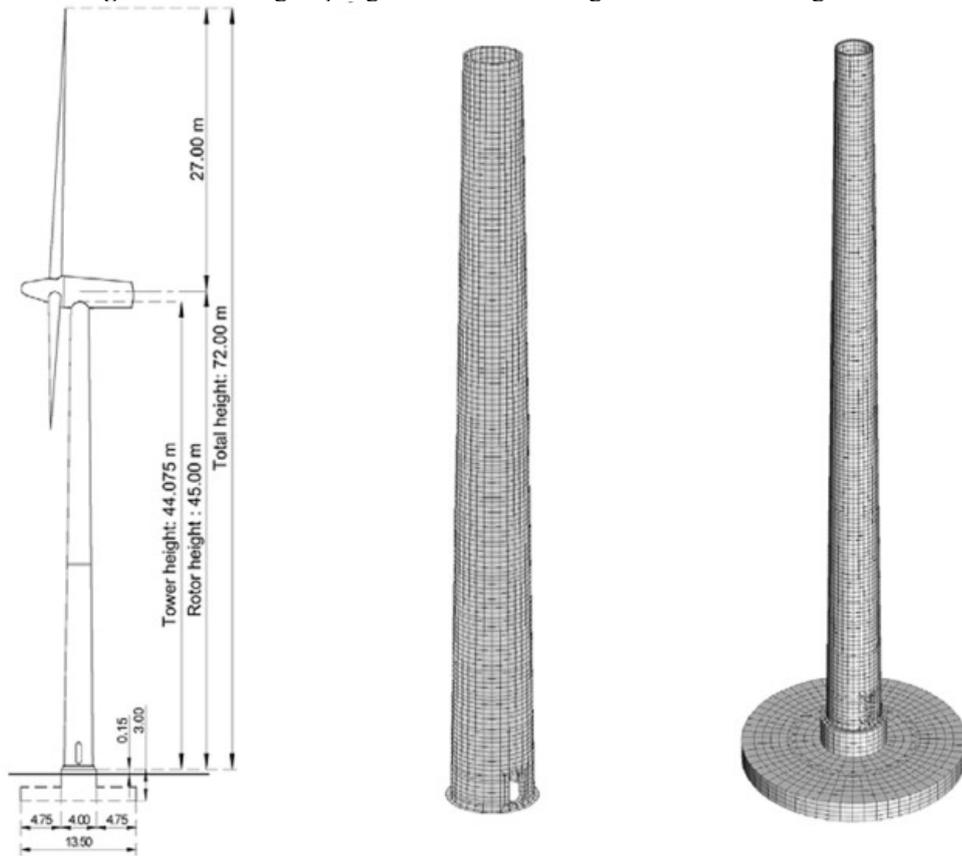
Figura 17 - Quatro primeiros modos e frequências de vibração da torre analisada.



Fonte: Bazeos et al. (2002).

Lavassas et al. (2003) analisaram e projetaram um protótipo de torre metálica de aerogerador com três pás, com 44,075 m de altura (Figura 18a), formato tronco-cônico (3,30 m de diâmetro externo na base e 2,10 m de diâmetro externo no topo), e espessura variável da parede (18 mm e 10 mm de espessuras na base e no topo, respectivamente). O aço utilizado para a fabricação da torre foi o S355J2G3 (EN 10025-2, 2004). Para a simulação da resposta estrutural, dois modelos de elementos finitos distintos foram desenvolvidos.

Figura 18 - Configuração geométrica e modelagem da torre do aerogerador.



(a) Características geométricas do aerogerador. (b) Modelo da torre em elementos finitos. (c) Modelo da torre/fundação em elementos finitos.

Fonte: Lavassas et al. (2003).

Lavassas et al. (2003) analisaram a torre pelo método dos elementos finitos, empregando a linearidade e não linearidade física e geométrica, utilizando-se dos *softwares* Strand7 e STATIK-3, com avaliações dos efeitos da interação solo-estrutura quanto aos comportamentos estático e dinâmico da torre para dois modelos distintos de elementos finitos. Para ambos os modelos, foi investigado as condições de não linearidade geométrica com vistas a avaliar os efeitos de segunda ordem. Entretanto, devido à adequada rigidez do elemento de casca e à rigidez do solo rochoso de apoio, a participação da não linearidade e da interação solo-estrutura no estado de deformação da torre foi calculada como menor que 2%, não sendo significativo nas respostas estruturais da torre.

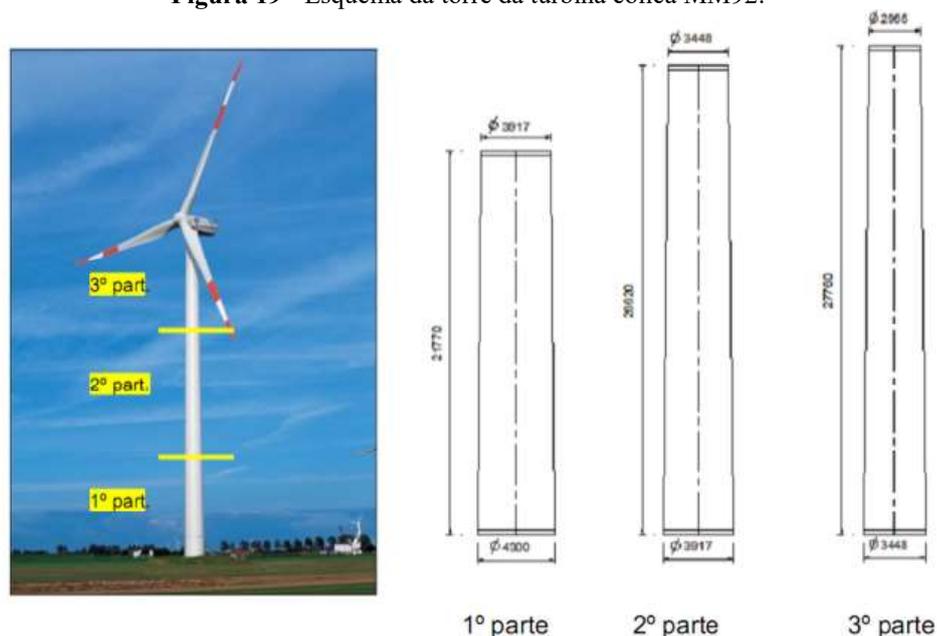
Lavassas et al. (2003) analisaram uma série de situações de carregamentos na torre, chegando a conclusão que o carregamento de vento é dominante na combinação de ações para o projeto da torre, e devido a esbeltez da estrutura, devem ser checados os seguintes fenômenos: vibração por desprendimento de vórtices, *ovalling*, galope e martelamento. Segundo os produtores desse tipo de turbina eólica, a frequência natural da torre é da ordem de 0,60 Hz. Lavassas et al. (2003) relatam que a frequência natural da torre (0,60 Hz) em relação às

frequências de excitação do rotor da turbina eólica (0,37 Hz e 0,73 Hz) é um critério importante de investigação a ressonância da estrutura.

Hansen et al. (2006) fizeram uma ampla revisão bibliográfica, abordando os modelos da aerodinâmica e da aeroelasticidade das turbinas eólicas. Eles alegam que os aerogeradores modernos são projetados para atender aos requisitos da norma internacional IEC61400-1. Em algum momento durante o desenvolvimento de turbinas eólicas comerciais cada vez maiores, tornou-se necessária a aplicação de modelos aeroelásticos precisos para avaliar estruturas esbeltas e altas sob a ação de cargas dinâmicas (vento, por exemplo). As ferramentas aeroelásticas foram desenvolvidas principalmente nas universidades e os laboratórios de pesquisa em paralelo com a evolução de turbinas eólicas comerciais.

Sirqueira (2008) analisou uma torre de aerogerador modelo MM92 da empresa Repower. A análise numérica foi realizada em um modelo de elementos finitos no *software* ANSYS empregando-se: análise estática linear, análise dinâmica linear e análise estática não linear geométrica e física. O modelo MM92 tem 76,20 m de altura e possui um formato tronco-cônico vazado formado por três segmentos, facilitando o transporte e a montagem da torre. O primeiro segmento possui uma altura de 21,77 m, diâmetro na base de 4,30 m e no topo de 3,917 m; o segundo segmento possui uma altura de 26,62 m, diâmetro na base de 3,917 m e no topo de 3,45 m; e o terceiro segmento com altura de 27,81 m, diâmetros na base de 3,45 m e no topo de 2,96 m (Figura 19). A espessura da parede da torre varia ao longo de sua altura entre 30 mm na base e 12 mm no topo.

Figura 19 - Esquema da torre da turbina eólica MM92.



Fonte: Sirqueira (2008).

Para o cálculo da resposta dinâmica do vento na direção do fluxo eólico foi utilizado o método simplificado conforme estabelecido na ABNT NBR 6123 (1988). Além desse carregamento, considerou-se o peso próprio da torre distribuído ao longo da altura. Sirqueira (2008) modelou numericamente a torre com base no Método dos Elementos Finitos utilizando elementos finitos de casca (*SHELL* 181 da biblioteca do *software* ANSYS). O elemento *SHELL* 181 é composto por quatro nós com seis graus de liberdade por nó (três translações e três rotações) e é apropriado para estruturas formadas por cascas de espessuras médias e finas e para análise linear e não linear física e geométrica.

Sirqueira (2008) obteve da análise de autovalores e autovetores da torre que: no primeiro modo de vibração, predominou a flexão no plano XY (0,36 Hz); no segundo modo de vibração, predominou a flexão no plano YZ (0,36 Hz); no terceiro modo de vibração, predominou a torção em torno do eixo vertical global Y (2,59 Hz); no quarto modo de vibração, predominou novamente a flexão no plano XY (2,64 Hz); no quinto e no sexto modo, predominaram as flexões no plano YZ (2,89 Hz e 7,90 Hz, respectivamente). Na análise harmônica considerou-se uma carga determinística senoidal com valor máximo de 308,45 kN correspondente a ação do vento atuando sobre as pás da torre eólica. As frequências de excitação foram variadas considerando uma faixa de 0 a 20 Hz. É concluído que a influência do primeiro modo de vibração na resposta do modelo da torre é preponderante, ou seja, a torre comporta-se como uma viga engastada e livre.

Wang, Qin e Lim (2010) aplicaram um modelo matemático para analisar dinamicamente uma turbina eólica de eixo horizontal via teoria de viga de parede fina. Eles obtiveram as frequências e modos de vibração livre para um exemplo numérico de um aerogerador com torre de 34,862 m de altura; enquanto que as distribuições de tensões e de deslocamentos dinâmicos da torre e do rotor foram computadas por meio de uma análise de vibração forçada não amortecida. Além disso, a influência da rigidez da torre sobre as deformações das extremidades das pás do rotor foi estudada. Objetivou-se, portanto, aplicar um modelo mais sofisticado que o tradicional elemento de viga unidimensional, capaz de fornecer informações detalhadas sobre a resposta da torre e do rotor.

Lima (2011) estudou a otimização de torres tubulares metálicas de aerogeradores. A modelagem da torre foi feita por meio do elemento finito de pórtico plano com seis graus de liberdade, admitindo-se o elemento com seção transversal constante e desprezando-se os efeitos devidos à torção decorrente da ação da força do vento sobre as pás da turbina eólica. As cargas consideradas atuando sobre a torre foram: peso do conjunto cubo/pás/nacele; peso próprio da torre; força resultante do vento que incide perpendicularmente ao plano formado pela rotação

das pás; e momento resultante no topo da torre, devido à ação do vento com a excentricidade formada pela distância entre o eixo do rotor e o topo da torre.

O objetivo do modelo de otimização proposto por Lima (2011) corresponde à minimização do peso da torre, com imposição de restrições referentes à resistência, à rigidez, à estabilidade, ao deslocamento no topo da torre ($L/400$), à geometria, à frequência natural fundamental (mínimo de 0,5 Hz) e ao limite de diâmetro da torre para transporte (adotado um máximo de 4,20 m). As soluções ótimas obtidas foram modeladas no software ABAQUS por meio de elementos finitos de casca.

Dellezzopolles Jr. (2011) estudou o comportamento dinâmico de torres de aerogeradores utilizando a teoria de Euler-Bernoulli (teoria que considera que o diâmetro da torre é pequeno quando comparado com o seu comprimento e que as deformações por cisalhamento e rotacionais são desprezíveis) com acoplamento torre-aerogerador. Considerou-se a torre como uma estrutura metálica uniforme de seção transversal circular constante ao longo do seu comprimento, e aproximou-se os elementos do aerogerador (pás, rotor e nacele) para uma massa sujeita a carregamentos dinâmicos situada na extremidade da torre.

A análise não linear geométrica foi feita deduzindo uma equação não linear para modelar o comportamento da torre eólica baseada no método variacional de Hamilton (analiticamente) e aplicando carregamentos periódicos na extremidade da torre eólica, além de considerar o acoplamento da torre eólica e do aerogerador. Obteve-se os modos de vibração e as respectivas frequências para a equação linear da vibração livre sem massa na nacele.

Oliveira (2012), analisa o comportamento dinâmico de torres de geradores eólicos, obtendo um modelo numérico que represente a estrutura real com a máxima precisão. Para tal, modelaram-se uma torre de aerogerador de 1 MW e uma torre de aerogerador de 2 MW, para as quais determinaram-se os modos de vibração e as respectivas frequências naturais, para três modelos: torre modelada com elementos finitos de barra e engastada na base; torre modelada com elementos de casca e engastada na base; e, por fim, torre modelada com elementos finitos de casca, sapata de concreto armado modelada com elementos finitos sólidos e o solo representado por molas lineares.

Santos (2013) formulou um modelo de otimização de torres tubulares de aço para aerogeradores eólicos visando minimizar o volume total da torre, alterando-se as espessuras da parede da torre. A estrutura da torre foi modelada com base no Método dos Elementos Finitos e o carregamento atuante na estrutura incluiu os pesos da torre, do conjunto de equipamentos instalados no topo (cubo/pás/nacele), e o efeito estático da ação do vento sobre a torre. Foi

realizada uma análise estática linear física e geométrica e uma análise de vibração livre como fase inicial do estudo.

Santos (2013) obteve, na análise de vibração livre da torre, que: no primeiro modo de vibração predominou a flexão no plano XY (0,36 Hz); no segundo modo de vibração predominou a flexão no plano YZ (0,36 Hz); no terceiro modo de vibração predominou a torção em torno do eixo vertical global Y (2,59 Hz); no quarto modo de vibração predominou novamente a flexão no plano XY (2,64 Hz); no quinto e no sexto modo predominaram as flexões no plano YZ (2,88 Hz e 5,93 Hz, respectivamente).

Por último, destaca-se o trabalho de Lima (2018), que realizou a análise da estabilidade elástica e o projeto de um dispositivo para controle de vibração de uma torre tubular de aço, com 120 m de altura, com diâmetro e espessura das chapas variáveis ao longo da altura, para o suporte de um aerogerador de eixo horizontal. A torre foi modelada utilizando elementos finitos de barra, e também desenvolveu o projeto estrutural da torre e de sua fundação (sapata), que foram modeladas em elementos finitos com o auxílio do *software* ANSYS.

Como resultado da análise modal da torre e da solução do problema de autovalores e autovetores, obteve as frequências naturais e os modos de vibração não amortecidos da torre, em que: no primeiro modo de vibração (0,297 Hz) e no segundo modo de vibração (1,728 Hz) predominaram as flexões nos planos (considerou-se os planos XY e YZ como simétricos); no terceiro modo de vibração (3,980 Hz) predominou a torção em torno do eixo vertical global Y; no quarto (4,530 Hz) e no quinto (8,057 Hz) modo de vibração predominaram as flexões nos planos novamente; e no sexto modo (8,750 Hz) predominou a torção em torno do eixo vertical. Com destaque para a frequência fundamental da torre (0,297 Hz), por ser a mais preocupante quanto à possibilidade de haver ressonância provocada pelo fenômeno de desprendimento cadenciado de vórtices. Por fim, Lima (2018) projetou um absorvedor dinâmico de vibração para ser acoplado ao topo da torre, investigando um amortecedor de massa sintonizado (AMS), um amortecedor de massa ativo (AMA) e um amortecedor de massa híbrido (AMH).

2.3 Conceitos básicos na análise matricial de estruturas

A análise de uma estrutura consiste fundamentalmente na determinação dos deslocamentos e das tensões produzidas por um conjunto de ações exteriores, implicando certas condições de contorno. Para efetuar essa análise, é necessário constituir um modelo matemático da estrutura, permitindo a implementação computacional do problema (VANDERBILT, 1974).

Segundo Martha (2010), uma vez feitas considerações sobre a geometria da estrutura, sobre os esforços e solicitações, sobre as condições de suporte ou vinculação com outros sistemas, e sobre as leis constitutivas dos materiais, a análise estrutural passa a ser um procedimento matemático de cálculo, que só é alterado se houver mudanças nas hipóteses e simplificações adotadas.

Dessa forma, inicialmente são apresentados alguns conceitos fundamentais relacionados à análise matricial de estruturas reticuladas, que serão aplicados durante a apresentação do método da rigidez, sendo este o método utilizado para a realização da análise de estabilidade e modal da torre eólica proposta neste trabalho.

2.3.1 Sistemas de equações

Segundo Vanderbilt (1974), as condições matemáticas que o modelo estrutural tem que satisfazer para representar adequadamente o comportamento da estrutura real podem ser divididas nos seguintes grupos:

- a) De **compatibilidade** de deslocamentos, onde as barras que constituem a estrutura não podem se deformar livremente, dado que a continuidade da estrutura (sem vazios ou sobreposição de pontos) deve ser mantida ao longo de todo o processo de deformação;
- b) **Constitutivas**, que relacionam as grandezas de tensão e deformação e dependem do material. A Teoria da Elasticidade afirma que as relações da lei constitutiva são equações lineares com parâmetros constantes, e é dito que o material trabalha em regime elástico-linear, em que tensões e deformações são proporcionais. Esse é o princípio da Lei de Hooke, da relação de proporcionalidade entre tensões e deformações;
- c) De **equilíbrio**, que é uma condição fundamental em análise estrutural, e garante o equilíbrio estático de qualquer porção isolada de uma estrutura ou da estrutura como um todo. Essas equações de equilíbrio expressam as condições de somatório das forças horizontais nulo, somatório das forças verticais nulo e somatório dos momentos em relação a um ponto do plano nulo.

As equações de compatibilidade relacionam as deformações da barra com os deslocamentos nodais. Introduzindo essas relações nas equações constitutivas, se relacionam as forças nos extremos das barras com os deslocamentos nodais. E, quando essas últimas são inseridas nas equações de equilíbrio, obtém-se um conjunto de equações da estrutura em termos

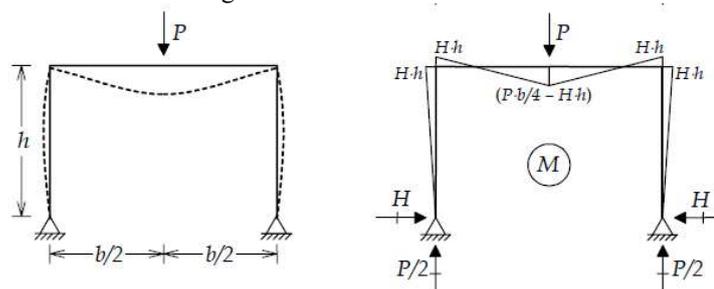
dos deslocamentos (VANDERBILT, 1974). A partir dos deslocamentos, é possível determinar os esforços internos nos nós (extremidades) das barras, e também as reações de apoio da estrutura.

2.3.2 Indeterminação cinemática

Ao estudar o comportamento de uma estrutural sujeita a um determinado carregamento externo, os deslocamentos que se verificam nos nós da estrutura e nos pontos de descontinuidade são as chamadas incógnitas de natureza cinemática (GERE; WEAVER JR., 1990). Desse modo, segundo Vanderbilt (1974), se o número de ações (reações) externas e internas for maior que o número de equações de equilíbrio, a estrutura é estaticamente indeterminada, ou hiperestática.

Uma das características das estruturas hiperestáticas é que existem infinitas soluções que satisfazem as condições de equilíbrio, sendo necessário levar em consideração as condições de compatibilidade e as leis constitutivas dos materiais para encontrar a solução do sistema. Com isso, é perceptível que a resolução de estruturas hiperestáticas é mais complexa que as de estruturas isostáticas, em que o número de ações externas e internas são iguais ao número de equações de equilíbrio. Apesar dessa desvantagem, a maioria das estruturas existentes são estaticamente indeterminadas. Isto se deve a vários motivos, dentre eles: algumas formas estruturais são intrinsecamente hiperestáticas, como o esqueleto de um edifício (conjunto de lajes, vigas e pilares); proporcionam uma distribuição de esforços internos mais otimizada ao longo da estrutura, levando a menores valores para os esforços máximos; a existência de vínculos excedentes pode gerar uma segurança adicional na estrutura, pois se algum elemento da estrutura perder sua capacidade resistiva, a estrutura como um todo ainda pode ter estabilidade (MARTHA, 2010). Na Figura 20 é ilustrado um exemplo de pórtico hiperestático, assim como sua configuração deformada e seus esforços atuantes.

Figura 20 - Exemplo de um pórtico hiperestático com sua configuração deformada, reações de apoio e diagramas de momentos fletores.



Fonte: Adaptado de Martha (2010).

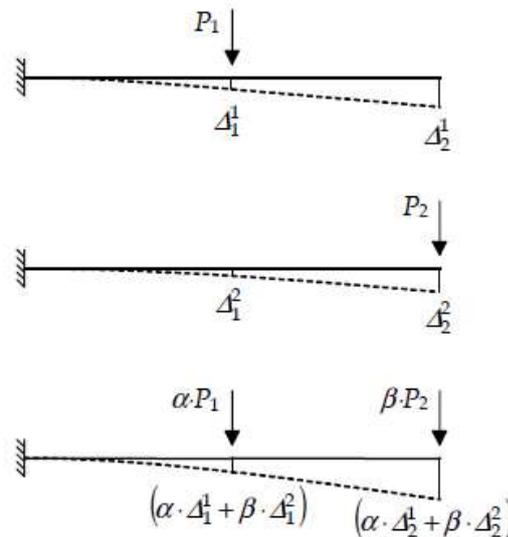
2.3.3 Princípio da superposição de efeitos

O princípio da superposição de efeitos é um dos mais importantes conceitos da análise de estruturas, e segundo este princípio, os efeitos de uma estrutura submetida a diversas cargas ou deslocamentos podem ser considerados separadamente, e depois, somados ou considerados atuando em conjunto (MARTHA, 2010).

O princípio da superposição é válido enquanto as estruturas mantiverem relações lineares entre os esforços e as deflexões. O comportamento linear de uma estrutura está baseado em duas condições: o material trabalhe no regime elástico-linear, e que seja verdadeira a hipótese de pequenos deslocamentos. Essa hipótese de pequenos deslocamentos pode ser considerada quando as equações de equilíbrio escritas para a geometria indeformada da estrutura fornecem resultados praticamente iguais aos obtidos pelas mesmas equações de equilíbrio escritas para a geometria deformada da estrutura (MARTHA, 2010).

Na Figura 21 é exemplificado o princípio da superposição de efeitos, mostrando que a combinação linear de duas forças resulta nos mesmos deslocamentos da combinação linear dos deslocamentos provocados pelas forças atuando isoladamente.

Figura 21 - Combinação linear de duas forças e os correspondentes deslocamentos.



Fonte: Martha (2010).

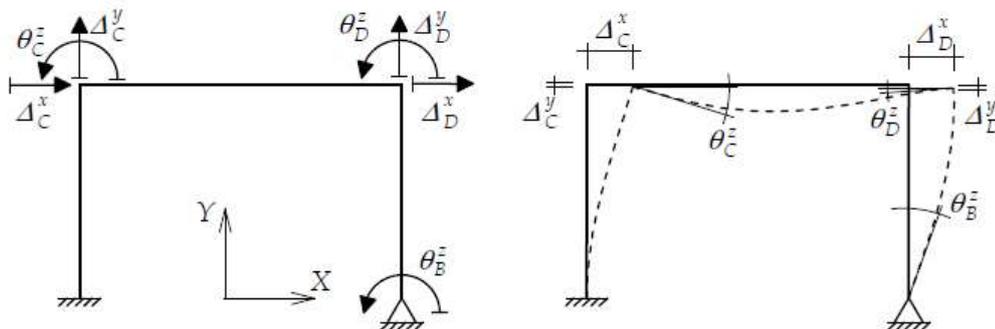
2.4 Discretização de estruturas e método dos deslocamentos

Para a implementação dos métodos de análise de estruturas, é necessário realizar uma representação discreta do comportamento contínuo dos elementos, separando-os em elementos de menor complexidade e facilitando os cálculos. Dessa maneira, a solução do problema

estrutural, que essencialmente busca a determinação dos deslocamentos, das tensões e dos esforços ao longo da estrutura, é alcançada através da determinação dos parâmetros que representam o comportamento do modelo estrutural de forma discreta (MARTHA, 2010).

De forma geral, os métodos de análise utilizam um conjunto de variáveis ou parâmetros para representar o comportamento de uma estrutura, e os tipos de parâmetros adotados no modelo discreto dependem do método utilizado. No método das forças, os parâmetros são forças ou momentos e, no método dos deslocamentos, são deslocamentos ou rotações. Segundo Martha (2010), a metodologia de criação do modelo discreto no contexto do método dos deslocamentos leva em consideração que os parâmetros de discretização são os deslocamentos e as rotações livres, ou seja, que não possuem restrições por apoios e que definem o comportamento cinemático de um modelo estrutural discretizado, e dos nós do modelo estrutural. Gere e Weaver Jr. (1990) definem nós de um modelo estrutural reticulado sendo os pontos de encontro das barras, assim como os pontos de apoio e de extremidades livres das barras (não conectadas a outras barras).

Figura 22 - Parâmetros nodais utilizados na discretização pelo método dos deslocamentos.

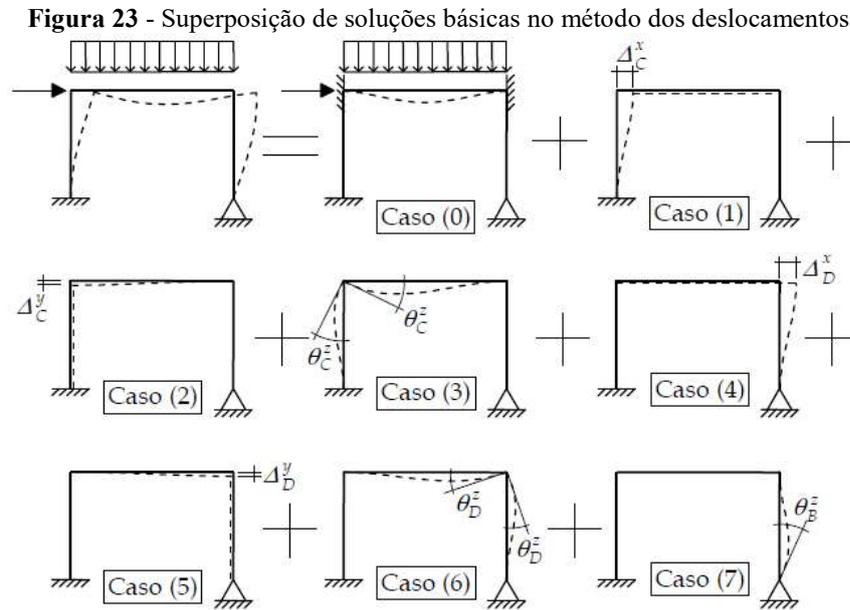


Fonte: Martha (2010).

Na Figura 22 é indicado os deslocamentos e rotações nos nós (pontos de encontro das barras ou extremidades de barras), atribuídas para a solução discreta pelo método dos deslocamentos para estruturas reticuladas. Esses parâmetros são denominados deslocabilidades. No exemplo dessa figura, as deslocabilidades são os deslocamentos horizontais dos nós superiores (Δ_C^x e Δ_D^x), os deslocamentos verticais desses nós (Δ_C^y e Δ_D^y), e as rotações dos nós livres ao giro (θ_B^z , θ_C^z e θ_D^z).

Na Figura 23, é mostrada a discretização utilizada na solução do pórtico da Figura 22 pelo método dos deslocamentos. Para a solução, aplica-se o princípio superposição de configurações deformadas elementares das soluções básicas dos casos (0) a (7) mostrados na figura. Cada solução básica isola os efeitos das cargas externas – caso (0) – e de cada uma das deslocabilidades – casos (1) a (7). As configurações deformadas elementares de cada caso

básico são denominadas cinematicamente determinadas porque são funções conhecidas que multiplicam, isoladamente, cada uma das deslocabilidades.



Fonte: Martha (2010).

2.4.1 Método da rigidez direta

Do ponto de vista prático, onde há uma grande complexidade nas estruturas reais, de nada adianta conceber modelos discretos se não é possível resolvê-los manualmente. Para contornar esse cenário, não se concebe mais realizar tal análise sem o uso de programas de computador, tornando o modelo computacional fundamental para o problema que se deseja resolver. Com isso em mente, o método dos deslocamentos é o que está mais direcionado para uma implementação computacional. A formalização matricial do método dos deslocamentos, que tem por objetivo aproximar a sua metodologia aos procedimentos adotados usualmente nos programas de computador, é intitulada como método da rigidez direta, conhecida também como análise matricial das estruturas ou cálculo matricial das estruturas (MARTHA, 2010).

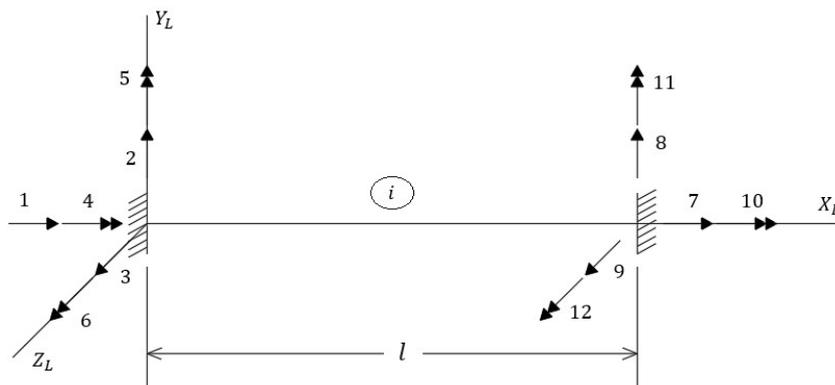
Um programa de computador para a análise de uma estrutura pelo método da rigidez divide-se em várias fases. Nas fases iniciais do programa, é desejável trabalhar apenas com os dados pertencentes à estrutura. Esta parte do programa inclui a formação da matriz de rigidez, que é uma propriedade da estrutura. Posteriormente, os dados sobre carregamento são manipulados, para então serem computados os resultados finais da análise. Essa sequência é bastante eficiente para uma estrutura com vários tipos de carregamentos, pois as etapas iniciais dos cálculos não precisam ser repetidas (GERE; WEAVER JR., 1990).

2.4.2 Graus de liberdade de um elemento

No método da rigidez direta, que é a formulação matricial do método dos deslocamentos, todos os componentes de deslocamento ou rotação nodal é denominado de grau de liberdade.

Cada elemento de uma estrutura reticulada espacial pode sofrer até doze deslocamentos nodais, como está sendo representado na Figura 24, onde as flechas com uma seta única indicam os deslocamentos transversais e longitudinais, enquanto que as flechas com seta dupla representam as rotações. Os sentidos adotados na figura representam os sentidos positivos, bem como o sistema de referência das coordenadas cartesianas indicam o sistema local de referência (GERE; WEAVER JR., 1990).

Figura 24 - Elemento de estrutura reticulada espacial com seus respectivos graus de liberdade.



Fonte: Autor (2018).

O exemplo citado refere-se a um caso geral de estruturas reticuladas. Em estruturas mais simples, como em treliças e pórticos planos, vigas, e demais elementos planos, alguns dos graus de liberdade considerados para o elemento geral da Figura 24 podem ser desprezados. Em um pórtico plano, por exemplo, existem apenas os deslocamentos no plano analisado (deslocamentos transversais e axiais), e as rotações perpendiculares ao plano, onde em alguns casos, os deslocamentos axiais dos nós podem ser desprezados (GERE; WEAVER JR., 1990).

2.4.3 Discretização em elementos finitos

Em uma análise estrutural, um nó deve ser entendido como ponto de discretização, permitindo uma generalização da ideia de barra para elemento de barra. A ideia é a possibilidade de inserir um nó (ponto de discretização) no interior de uma barra, dividindo-a em dois

elementos de barra. Essa subdivisão pode ser ilimitada, ou seja, pode-se recursivamente dividir elementos de barra em mais elementos (MARTHA, 2010).

A medida que aumenta o número de subdivisão, vão surgindo mais elementos de barra. A divisão em elementos, ou discretização, e adotar funções que representem aproximadamente as deflexões causadas ao longo de cada elemento, é o conceito do método dos elementos finitos. Quando se tratam de barras com seção transversal constante ao longo do comprimento da estrutura, a discretização de uma barra com vários nós no seu interior não altera os resultados da estrutura. Entretanto, em barras com seção transversal variável, a discretização pode ser um artifício de modelagem que melhora a qualidade dos resultados. Utilizando esse artifício, pode-se aproximar essa barra de seção variável, que é um problema de difícil implementação matemática, em diversos segmentos com seção transversal aproximadamente constante, possibilitando obter o efeito global da barra original, através de uma boa aproximação dos resultados. Quanto mais elementos são discretizados, mais precisos são os resultados (MARTHA, 2010).

2.4.4 Sistemas de Referencias

Os sistemas de referências de uma estrutura são definidos em dois níveis: global e local. No global, o sistema aborda a estrutura como um todo, e a esses eixos, ficam referenciadas as grandezas vinculadas aos nós, tais como (SORIANO, 2005):

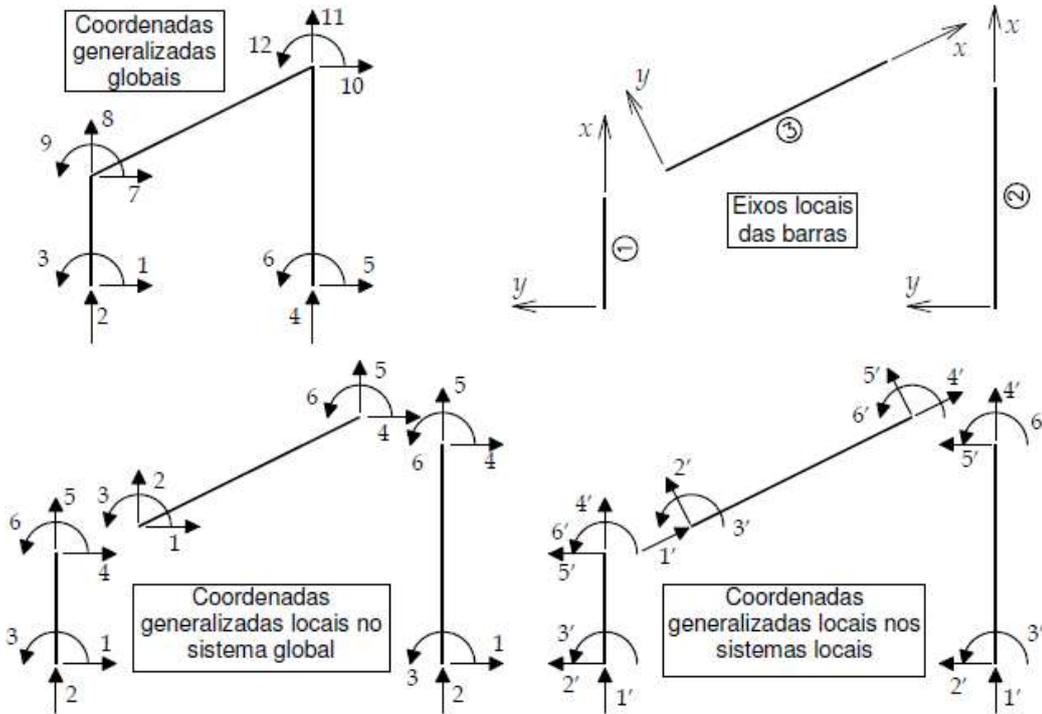
1. Coordenadas
2. Deslocamentos
3. Cargas nodais
4. Reações nodais

Quanto ao sistema de referência local, é abordado cada elemento de barra individualmente, onde a origem situa-se no nó inicial, com um dos eixos de referência coincidindo com o eixo baricêntrico da barra, na orientação do nó inicial para o nó final. Ficam associadas ao sistema local as grandezas inerentes à barra, tais como: momentos de inércia, carregamentos distribuídos e solicitações.

Analisando as coordenadas aplicadas ao método da rigidez direta, segundo Martha (2010), para ser possível efetuar a soma dos coeficientes de rigidez locais das várias barras que compõem a estrutura, é preciso que esses coeficientes estejam definidos no mesmo sistema de coordenadas. Uma vez que esses coeficientes se encontram referenciados nos eixos locais de cada barra, é necessário projetá-los previamente para um sistema de eixos únicos (em geral,

para o sistema de eixos globais). Na Figura 25 é exemplificado os tipos de sistemas de coordenadas para um pórtico simples.

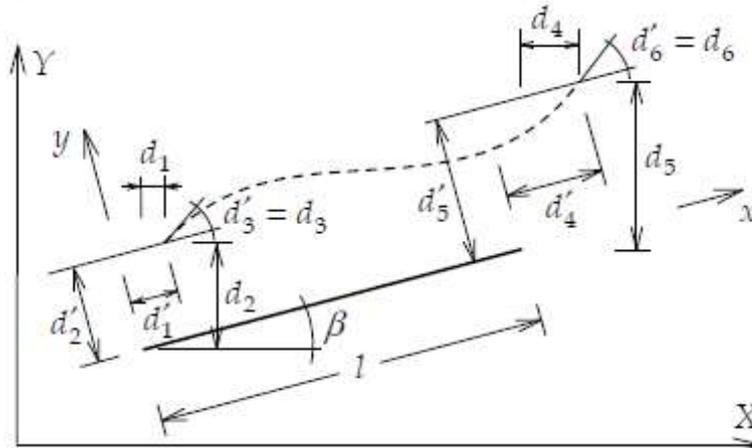
Figura 25 - Sistemas de coordenadas adotados no método da rigidez direta para pórticos planos.



Fonte: Martha (2010).

Para somar as contribuições vindas das diversas barras para compor um efeito global no método da rigidez direta, são utilizadas as coordenadas generalizadas locais nas direções dos eixos globais. Em casos de barras inclinadas, é possível relacionar as deslocabilidades e forças generalizadas no sistema local com as deslocabilidades e forças generalizadas no Sistema Global de Coordenadas (SGC). Na Figura 26 é mostrado representações das deslocabilidades locais nos dois sistemas.

Figura 26 - Representações das deslocabilidades de uma barra no sistema local e no sistema global.



Fonte: Martha (2010).

As relações entre as deslocabilidades no sistema local e no sistema global, para barras inclinadas, podem ser determinadas de acordo com a equação (1):

$$\{d'\} = [R] \cdot \{d\} \quad (1)$$

na qual: $[R]$ é uma matriz de transformação por rotação; $\{d'\}$ é o vetor das deslocabilidades da barra no sistema local; e $\{d\}$ é o vetor das deslocabilidades da barra no sistema global.

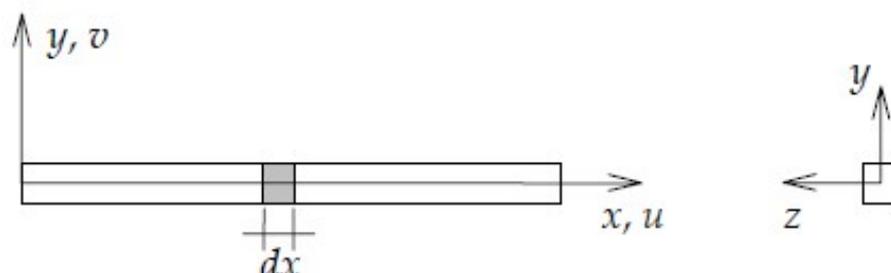
2.5 Idealização do comportamento de barras

Martha (2010) ressalta que a mecânica dos sólidos idealiza o comportamento das barras através de um conjunto de hipóteses sobre o seu comportamento cinemático e mecânico, e essa concepção do comportamento das barras é o que permite a criação do modelo estrutural para estruturas reticuladas. O modelo estrutural utilizado garante que os campos de deslocamentos e deformações sejam compatíveis entre si, além de assegurar a condição de continuidade entre esses dois campos no interior dos elementos de barra.

Nas barras sujeitas à flexão, o modelo estrutural empregado baseia-se em duas teorias: a teoria de vigas de Navier, conhecida também como a teoria de Euler-Bernoulli, e a teoria de vigas de Timoshenko. Na teoria de vigas de Navier, desconsidera-se as deformações causadas por efeitos cortantes (de cisalhamento) na presença de outras deformações, sendo essa hipótese geralmente optada para flexão em barras longas (comprimento muito maior que as dimensões da seção transversal). Todavia, nos dias atuais, em que as análises estruturais são realizadas com auxílio do computador, é usual se considerar as deformações por cisalhamento (teoria da viga de Timoshenko), pois o custo computacional adicional é mínimo (MARTHA, 2010).

Para definir as relações entre deformações e deslocamentos em um elemento finito de barra, é estabelecido um sistema de coordenadas locais para a barra, como indicado na Figura 27. O eixo axial da barra (eixo x) passa através do centro de gravidade das seções transversais, e os demais eixos são transversais à barra.

Figura 27 - Sistema de referência local de uma barra.



Fonte: Martha (2010).

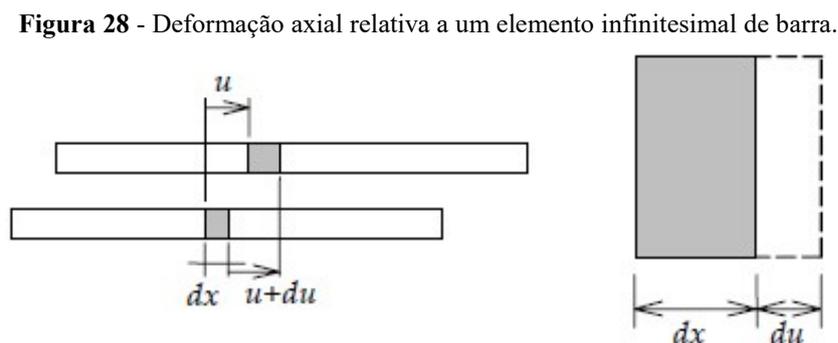
Quatro hipóteses fundamentais são indispensáveis para as duas teorias de vigas adotadas (Navier e Timoshenko) no comportamento de barras à flexão, são elas (MARTHA, 2010):

- A primeira hipótese é de que as seções transversais são mantidas planas quando a viga se deforma, e essa hipótese foi proposta originalmente por Jacob Bernoulli (1654-1705);
- A segunda hipótese é de que o ângulo de rotação da seção transversal (θ) é muito pequeno, e pode ser aproximadamente igual a sua tangente;
- A terceira hipótese desconsidera as deformações e tensões normais na direção transversal do eixo y da barra, pois essas tensões são pequenas em relação às tensões normais longitudinais;
- A quarta hipótese considera que em cada lâmina vertical da barra, é mantido um estado plano de tensões, não existindo deslocamentos na direção transversal ao plano xy .

2.5.1 Deformações axiais

As deformações normais à seção transversal da barra provocadas por esforços axiais, que são esforços em que a resultante passa pelo centro de gravidade da seção transversal, são denominadas deformações axiais, gerando uma situação onde todos os pontos da seção transversal possuem os mesmos deslocamentos. Como consequência disso, as seções transversais de um elemento finito de barra permanecem planas quando submetidas a uma deformação axial, garantindo a continuidade de deslocamentos no interior da barra (MARTHA, 2010).

A deformação axial na seção transversal é obtida a partir do deslocamento axial relativo, du , entre duas seções próximas, com distância dx entre elas, como é ilustrado na Figura 28, e a deformação é escrita na equação (2) abaixo.



Fonte: Martha (2010).

$$\varepsilon_x^a = \frac{du}{dx} \quad (2)$$

sendo: dx o comprimento original de um elemento infinitesimal de barra; du o deslocamento axial relativo de um elemento infinitesimal de barra; ε_x^a a deformação normal na direção longitudinal devida ao efeito axial. Portanto, para esforços axiais, os deslocamentos relativos internos podem ser representados pela equação (3):

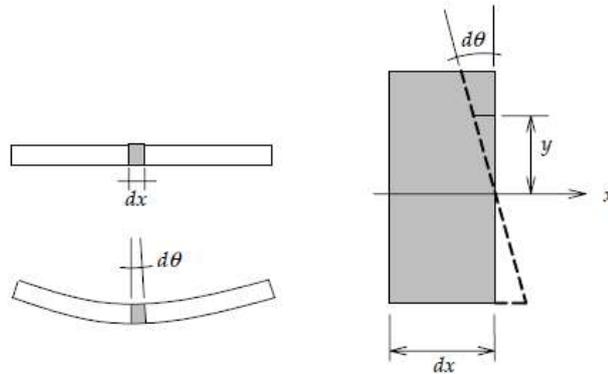
$$N = \sigma_x^a \cdot A = E \cdot \varepsilon_x^a \cdot A = E \cdot \frac{du}{dx} \cdot A \rightarrow du = \frac{N}{EA} dx \quad (3)$$

em que: A é a área da seção transversal; e E é o módulo de elasticidade do material.

2.5.2 Deformações normais por flexão

Pela teoria de Vigas de Navier, em que as seções transversais são mantidas planas e normais ao eixo de deformação da barra e são desprezadas as deformações provocadas por efeitos de cisalhamento, há uma relação entre a rotação da seção transversal com as deformações normais por flexão. A equação (4) e a Figura 29 expõem essa compatibilidade entre os deslocamentos.

Figura 29 - Rotação de flexão em um elemento infinitesimal de barra.



Fonte: Martha (2010).

$$\varepsilon_x^f = -\frac{d\theta}{dx} \cdot y \quad (4)$$

sendo: $d\theta$ é a rotação relativa por flexão de elemento infinitesimal de barra; ε_x^f é a deformação normal na direção longitudinal devida ao efeito de flexão.

Com relação aos esforços de flexão, a rotação relativa interna gerada por um momento fletor aplicado em um elemento infinitesimal de barra é dada pela equação (5):

$$M = \int_A \sigma_x^f \cdot (-y) dA = \int_A E \cdot \left(-\frac{d\theta}{dx} y\right) \cdot (-y) dA \rightarrow d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (5)$$

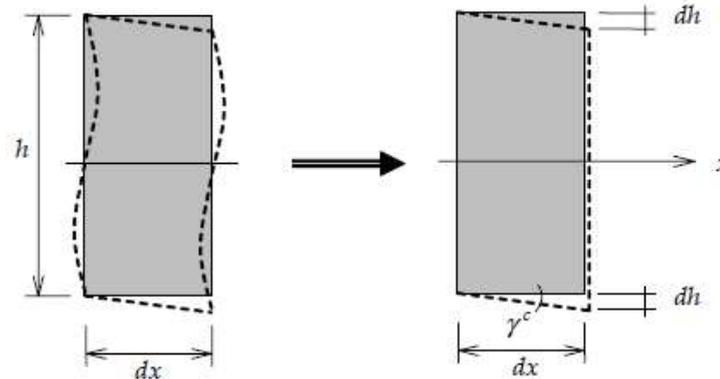
no qual: I é o momento de inércia da seção; e E é o módulo de elasticidade do material.

Já na teoria de vigas de Timoshenko, admite-se que os esforços cisalhantes provocam distorções na seção transversal, fazendo com que a seção não permaneça perpendicular ao eixo na flexão (MARTHA, 2010).

2.5.3 Distorções por efeito cortante

O efeito cortante (cisalhamento) em um elemento de barra ocasiona o empenamento da seção transversal, e a distribuição dessas distorções não é feita de forma uniforme ao longo da seção. Para barras com o comprimento muito maior que as dimensões da seção transversal (caso mais usual), as distorções provocadas pelo cortante são desprezadas (GERE; WEAVER JR., 1990).

Figura 30 - Deformação transversal devido esforço cortante em um elemento infinitesimal de barra.



Fonte: Martha (2010).

A partir das deformações ilustradas na Figura 30, a distorção de cisalhamento causada por força cortante é representada na equação (6):

$$\gamma^c = -\frac{dh}{dx'} \quad (6)$$

sendo: γ^c é a distorção de cisalhamento por efeito cortante; dh é o deslocamento transversal relativo em um elemento infinitesimal de barra. E esse deslocamento transversal relativo interno pode ser expresso na equação (7):

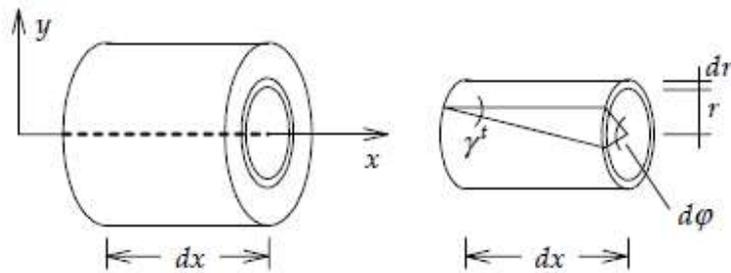
$$Q = \tau_y^m \cdot \frac{A}{\chi} = G \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{A}{\chi} \rightarrow dh = \chi \cdot \frac{Q}{GA} dx \quad (7)$$

no qual: χ é o fator de forma, que depende da forma da seção e define a área efetiva para cisalhamento; G é o módulo de elasticidade transversal do material; e A é a área da seção transversal.

2.5.4 Distorções por torção

Um elemento de barra submetido a um esforço de torção desenvolve distorções de cisalhamento. Em barras que apresentam seção transversal com simetria radial, por exemplo, em formatos de círculos e anéis, quando submetidas a torção, as distorções que surgem são proporcionais ao raio da seção, e não ocorre o empenamento da seção transversal (GERE; WEAVER JR., 1990).

Figura 31 - Deformação por torção em elemento infinitesimal de barra de seção circular.



Fonte: Martha (2010).

A partir das deformações ilustradas na Figura 31, a distorção de cisalhamento por efeito de torção (seção com simetria radial) é representada na equação (8):

$$\gamma^t = \frac{d\varphi}{dx} \cdot r \quad (8)$$

sendo: γ^t é a distorção de cisalhamento por efeito de torção; $d\varphi$ é a rotação relativa por torção de um elemento infinitesimal de barra; r é o raio que define a posição de um ponto no interior da seção circular. A rotação relativa interna por torção é dada por:

$$T = \int_A \tau^t \cdot r dA = \int_A G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot r \cdot r dA \rightarrow d\varphi = \frac{T}{GJ_t} dx \quad (9)$$

em que: J_t é o momento de inércia à torção da seção transversal; e G é o módulo de elasticidade transversal do material.

2.6 Matriz de rigidez do elemento de barra

Considera-se que a torre, objeto de estudo nesse trabalho, pode ser representada por uma subdivisão em estruturas planas compostas por barras retas, em que cada uma destas barras pode ser analisada como sendo elasticamente equilibrada, de maneira que os esforços podem ser avaliados a partir dos deslocamentos das extremidades, ou seja, a partir dos deslocamentos nodais. Segundo Martha (2010), os coeficientes de rigidez de barra representam forças e

momentos que necessitam atuar nos nós de cada barra isolada, para equilibrar as barras quando um deslocamento ou uma rotação for imposta em cada uma das suas extremidades.

O método da rigidez direta tem como premissa que todos os nós da estrutura estão fixados, ou seja, restringe-se todos os deslocamentos nodais. Com isso, cada um dos elementos encontra-se isolados, o que permite fazer a análise separadamente das barras homogêneas, na aplicação dos deslocamentos e rotações nas extremidades de cada barra (SORIANO, 2005). Um conceito fundamental na aplicação do método da rigidez direta é o princípio dos trabalhos virtuais, necessário para o cálculo dos coeficientes de rigidez do elemento de barra.

2.6.1 Princípio dos trabalhos virtuais

Os conceitos relativos a deslocamentos virtuais e trabalho virtual são amplamente utilizados no estudo da Estática, quando são usados para resolver problemas sobre equilíbrio estático de estruturas. A palavra virtual significa que os valores são imaginários, não existindo no sentido real ou físico. Portanto, deslocamento virtual é um deslocamento imaginário arbitrariamente imposto sobre o sistema estrutural real, mas não se trata de um deslocamento real, como é a flexão causada por cargas atuantes na estrutura. O trabalho realizado por forças reais durante um deslocamento virtual é chamado trabalho virtual (TIMOSHENKO; GERE, 1984).

Segundo Martha (2010), o balanço entre o trabalho externo e a energia de deformação interna combinando esses dois sistemas independentes resulta no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):

$$\overline{W}_E = \overline{U} \rightarrow \sum F_A \cdot D_B = \int f_A \cdot d_B \quad (10)$$

sendo: $\overline{W}_E = \sum F_A \cdot D_B$ é o trabalho virtual das forças externas F_A com os correspondentes deslocamentos (externos) D_B ; $\overline{U} = \int f_A \cdot d_B$ é a energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos f_A com os correspondentes deslocamentos relativos internos d_B . No trabalho externo virtual, as forças não são a causa ou efeito dos deslocamentos, assim como na energia interna virtual os esforços internos não são a causa ou efeito dos deslocamentos relativos internos. É devido a essa independência entre forças e deslocamentos que o termo virtual se aplica. Em outras palavras, o trabalho \overline{W}_E e a energia de deformação \overline{U} são ditos virtuais porque eles são meras abstrações de cálculo.

No caso de pórticos planos, a energia de deformação interna virtual pode ser desmembrada em parcelas que consideram os efeitos axial, de flexão, de torção e de esforço cortante (MARTHA, 2010):

$$\bar{U} = \int N_A \cdot du_B + \int M_A \cdot d\theta_B + \int Q_A \cdot dh_B + \int T_A \cdot d\varphi_B \quad (11)$$

Vale salientar que o Princípio dos Trabalhos Virtuais só é válido se o sistema de forças (F_A, f_A) realmente satisfizer as condições de equilíbrio, e se a configuração deformada (D_B, d_B) satisfizer as condições de compatibilidade. O Princípio das Forças Virtuais (PFV) estabelece que, dada uma configuração deformada real (D, d) e um sistema de forças (F, f) virtual em equilíbrio, a igualdade $\bar{W}_E = \bar{U}$ estabelece uma condição de compatibilidade para a configuração deformada real, onde:

$$\bar{U} = \int \bar{f} \cdot d = \bar{W}_E = \sum \bar{F} \cdot D \quad (12)$$

tendo \bar{U} como a energia de deformação interna virtual armazenada em uma estrutura, combinando os esforços internos virtuais \bar{f} com os correspondentes deslocamentos relativos internos reais d , e \bar{W}_E como o trabalho das forças externas virtuais \bar{F} com os correspondentes deslocamentos externos reais D (MARTHA, 2010).

O PFV utiliza um sistema auxiliar, chamado sistema virtual, que é completamente independente do sistema real, sendo este a estrutura da qual se quer calcular um deslocamento ou rotação. O sistema virtual trabalha com a mesma estrutura, mas com cargas diferentes, que são as forças (ou momentos) virtuais, escolhidas arbitrariamente na direção do deslocamento (ou rotação) que se deseja calcular e de suas correspondentes reações de apoio. Combinando o sistema virtual e o sistema real, a expressão geral do PFV para o cálculo de um deslocamento genérico de um ponto de um pórtico plano é obtida a partir da equação (11) (MARTHA, 2010):

$$\bar{U} = \int \bar{N} \cdot du + \int \bar{M} \cdot d\theta + \int \bar{Q} \cdot dh + \int \bar{T} \cdot d\varphi \quad (13)$$

em que: $du, dh, d\theta$ e $d\varphi$ são os deslocamentos e rotações no sistema real; e $\bar{N}, \bar{M}, \bar{Q}$ e \bar{T} são as forças e momentos provocados pela carga virtual.

Segundo Timoshenko e Gere (1984), em uma viga hiperestática, pode-se determinar as reações de apoio removendo-se alguns vínculos, substituindo-os por forças correspondentes, formando o sistema principal analisado. Considerando deslocamentos unitários nas vinculações removidas, e utilizando os conceitos do PFV, pode-se determinar os coeficientes de influência de flexibilidade, ou simplesmente flexibilidades. A equação geral para a determinação das flexibilidades é escrita a partir da equação (13), substituindo os elementos das equações (3), (5), (7) e (9), resultando na equação (14) abaixo:

$$f_{i,j} = \int \frac{N_1 \cdot N_2}{EA(x)} dx + \int \frac{M_1 \cdot M_2}{EI(x)} dx + \int x \frac{Q_1 \cdot Q_2}{GA(x)} dx + \int \frac{T_1 \cdot T_2}{GJ(x)} dx \quad (14)$$

sendo: $f_{i,j}$ são os elementos que compõem a matriz de flexibilidade, estando relacionados com os elementos que compõem a matriz de rigidez do elemento de barra. Para um elemento de barra com seção transversal variável, a área, o momento de inércia à flexão e o momento de inércia à torção são em função do comprimento do elemento de barra.

A matriz de flexibilidade obedece ao Teorema de Maxwell, onde em uma estrutura linear elástica, a força generalizada que atua no ponto j necessária para provocar um deslocamento generalizado unitário no ponto i é igual à força generalizada que atua no ponto i necessária para provocar um deslocamento generalizado unitário no ponto j . Nos termos da matriz de flexibilidade, esse teorema pode ser expresso como (MARTHA, 2010):

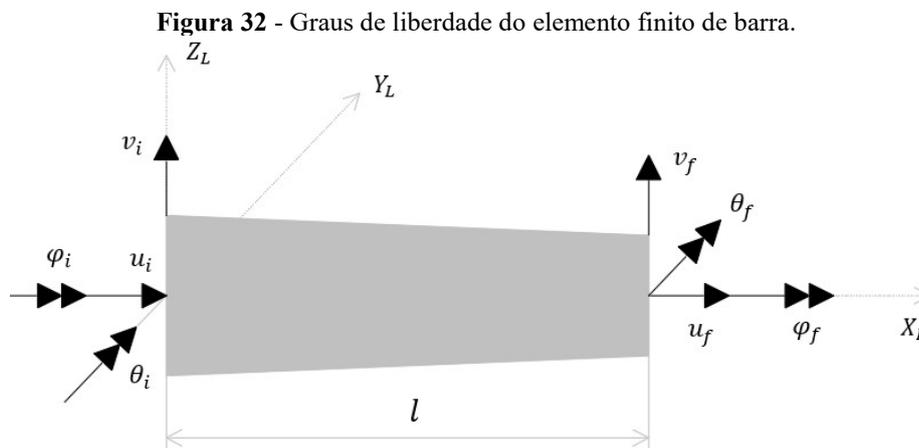
$$f_{i,j} = f_{j,i} \quad (15)$$

2.6.2 Matriz de rigidez linear

Para uma barra genérica, define-se um referencial ortogonal orientado de forma que um de seus eixos fique ao longo do eixo da barra, e os demais eixos transversais a barra, ou seja, um Sistema Local de Coordenadas (SLC). Dessa forma, para cada elemento de barra estabelecido na discretização em elementos finitos, é possível definir 8 graus de liberdade $\{\mathbf{d}\}$ por elemento, associados com as 8 reações elásticas $\{\mathbf{R}_e\}$ no Sistema Local de Coordenadas, como indicado na Figura 32, na Figura 33, e na equação (16) (LIMA, 2018).

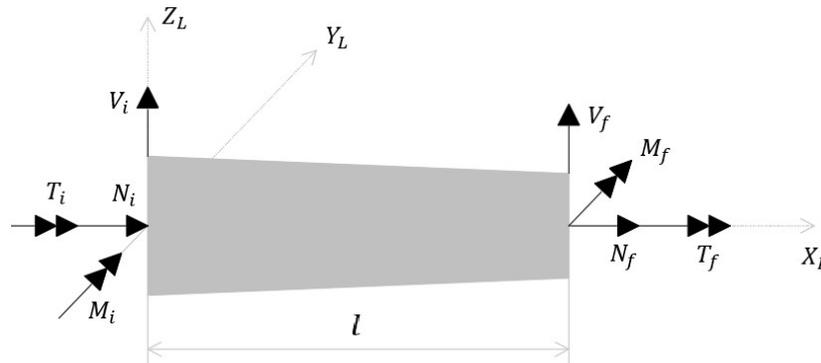
$$\{\mathbf{R}_e\} = [\mathbf{K}_e] \cdot \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{R}_e^F\} \quad (16)$$

sendo: $\{\mathbf{R}_e\}$ é o vetor de reações elásticas; $[\mathbf{K}_e]$ é a matriz de rigidez linear; $\{\mathbf{d}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais; e $\{\mathbf{R}_e^F\}$ é o vetor de reações de engastamento.



Fonte: Autor (2018).

Figura 33 - Reações elásticas no elemento finito de barra.



Fonte: Autor (2018).

Na forma expandida, a equação (16) faz-se:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ V_i \\ M_i \\ N_f \\ T_f \\ V_f \\ M_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -b_i & 0 & 0 & -t & -b_f \\ 0 & 0 & -b_i & k_i & 0 & 0 & b_i & a \\ -r & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & b_i & 0 & 0 & t & b_f \\ 0 & 0 & -b_f & a & 0 & 0 & b_f & k_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_f \\ \varphi_f \\ v_f \\ \theta_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_i^F \\ T_i^F \\ V_i^F \\ M_i^F \\ N_f^F \\ T_f^F \\ V_f^F \\ M_f^F \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Os termos da matriz de rigidez linear da equação (17) podem ser adquiridos a partir das flexibilidades (considerando a energia de deformação por flexão, por corte, axial e por torção), que são calculadas utilizando o princípio dos trabalhos virtuais.

2.6.3 Cálculo dos elementos da matriz de rigidez linear

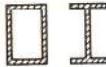
No cálculo das flexibilidades relacionadas com as rigidezes dos esforços axiais, a equação (14) se resume apenas ao primeiro termo, associado com as deformações axiais. De forma análoga, no cálculo das flexibilidades relacionadas com as rigidezes do momento torçor, a equação (14) se resume ao último termo, associado com as rotações torcionais do elemento de barra. Já com relação as flexibilidades e rigidezes de flexão, o cálculo pela equação (14) é feito considerando a parcela de rotação por flexão e a parcela do esforço cortante.

Como foi visto na idealização do comportamento de barras, para barras longas, o efeito da deformação pela ação do esforço cortante pode ser desprezada, contudo, para se obter um resultado mais próximo da realidade, maior deverá ser a discretização da torre, resultando em segmentos de barras com o comprimento bem pequeno, quando comparado com as dimensões da seção transversal. Utilizando da teoria de viga de Timoshenko, considera-se a energia de

deformação por cortante no cálculo dos coeficientes da matriz de flexibilidade, e consequentemente, da matriz de rigidez (TIMOSHENKO; GERE, 1984).

Na parcela do esforço cortante, o parâmetro χ corresponde ao fator de forma, que varia de acordo com a seção transversal do elemento de barra. Para uma seção circular tubular, de espessura fina, que corresponde a seção transversal da torre em questão neste trabalho, o fator de forma adotado é igual a 2, como pode ser apontado na Figura 34.

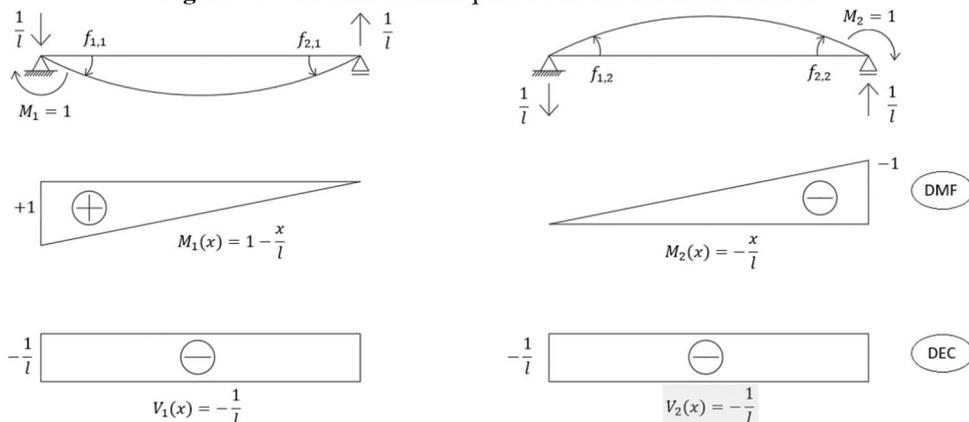
Figura 34 - Coeficiente de cisalhamento α_s e fator de forma χ .

Seção	α_s	χ
 Retângulo	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
 Círculo	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$
 Tubo fino	2	2
 Perfil caixa ou I	$\frac{A}{A_{alma}}$	$\frac{A}{A_{alma}}$

Fonte: Timoshenko e Gere (1984).

Para o cálculo dos elementos da matriz de rigidez linear, é necessário aplicar um sistema auxiliar para a resolução da equação (14). Esse sistema consiste em uma viga biapoada, onde são aplicados deslocamentos de rotação unitária em cada um dos apoios, calculando-se os diagramas de esforços solicitantes e suas respectivas equações, para cada uma das duas situações. Esse processo é detalhado na Figura 35.

Figura 35 - Sistema auxiliar para o cálculo das flexibilidades.



Fonte: Autor (2018).

Por fim, após calculado os elementos da matriz de flexibilidade, os valores dos coeficientes da matriz de rigidez da equação (17) podem ser obtidos por: para os termos relacionados com a rigidez axial (r), torcional (s), e de flexão (k_i , k_f e a), esses coeficientes são determinados por meio da equação (18); através das equações de equilíbrio da viga do sistema auxiliar da Figura 35, determina-se os demais coeficientes (b_i , b_f e t) por meio da equação (19).

$$k_{ij} = f_{ij}^{-1} \quad (18)$$

$$b_i = \frac{k_i + a}{l}, b_f = \frac{k_f + a}{l}, t = \frac{b_i + b_f}{l} \quad (19)$$

2.6.4 Matriz de rigidez geométrica

No cálculo da matriz de rigidez do elemento finito de barra, é importante destacar também a matriz de rigidez geométrica, que se trata de uma matriz que considera o efeito da força axial na redução da rigidez da estrutura, fazendo com que haja um incremento em suas deformações elásticas. Esse procedimento de redução da rigidez da estrutura é fundamental na análise de uma torre eólica, pois é uma forma de considerar os efeitos de segunda ordem que atuam no sistema real da torre. Segundo Timoshenko e Gere (1963), em uma análise com os efeitos de primeira ordem, o equilíbrio da estrutura é estudado na sua configuração geométrica inicial, contudo, em uma análise de segunda ordem, os efeitos são somados com os obtidos na análise de primeira ordem, e o equilíbrio da estrutura para a ser estudado considerando a configuração deformada da estrutura.

A consideração de efeitos de segunda ordem faz com que o modelo estrutural tenha um comportamento não linear, é a chamada não linearidade de ordem geométrica. Essa análise não linear é importante, pois permite antever possíveis problemas de instabilidade da estrutura (MARTHA, 2010). A escolha do procedimento mais adequado a ser usado nessa análise não linear depende de vários fatores, como por exemplo a magnitude dos deslocamentos e rotações na estrutura, o nível dos esforços normais atuantes, a sensibilidade da estrutura aos efeitos de 2ª ordem, entre outros. O uso da matriz de rigidez geométrica é uma das alternativas possíveis para essa análise dos efeitos de segunda ordem, que pode substituir, com vantagens, o método $P - \Delta$.

Segundo Humar (2001), a partir do princípio dos trabalhos virtuais, e dos esforços axiais submetidos nos elementos de barra, provenientes do peso próprio da torre, dos flanges, dos parafusos e componentes de ligação, nasce, pás e demais elementos funcionais da torre, os elementos da matriz de rigidez geométrica podem ser determinados pela equação (20):

$$k_{Gij} = \int_0^1 NN(x) \cdot \psi'_i(x) \cdot \psi'_j(x) dx \quad (20)$$

sendo: $NN(x)$ é a função de esforço normal no elemento finito de barra; $\psi'_i(x)$ e $\psi'_j(x)$ são as derivadas das funções de forma que representam a configuração deslocada do sistema.

As funções de forma escolhidas para representar a estrutura deformada devem ser independentes entre si, e devem também, no mínimo, satisfazer as condições de geométricas do sistema. Cada função de forma é multiplicada por uma coordenada generalizada, e essas coordenadas servem como incógnitas no sistema, cujo valores devem ser determinados por uma solução das equações de movimento (HUMAR, 2001). As funções de forma adotadas, para o sistema de referencial local estabelecido na Figura 32, são:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l} & \psi_3(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & \psi_4(x) &= -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \\ \psi_5(x) &= \frac{x}{l} & \psi_7(x) &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & \psi_8(x) &= \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \end{aligned} \quad (21)$$

decorrendo que $(K_{e,g})_{13}, (K_{e,g})_{14}, (K_{e,g})_{17}, (K_{e,g})_{18}$ e seus respectivos simétricos são nulos, pois na montagem geral, o caso em que não há interação entre os graus de liberdade axiais e flexionais é considerado. As seis funções de forma utilizadas são relativas aos graus de liberdade de translação axial, translação transversal e rotação de flexão para cada elemento finito de barra discretizado, visto que os graus de liberdade torcionais da matriz de rigidez linear não são afetados pela não linearidade geométrica, estabelecendo que $(K_{e,g})_{2j}$ e $(K_{e,g})_{6j}$ e seus respectivos simétricos são nulos (LIMA, 2018). Na forma expandida, a matriz de rigidez geométrica fica:

$$[K_{e,g}] = \begin{bmatrix} r_g & 0 & 0 & 0 & -r_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_g & -b_{i,g} & 0 & 0 & -t_g & -b_{f,g} \\ 0 & 0 & -b_{i,g} & k_{i,g} & 0 & 0 & b_{i,g} & a_g \\ -r_g & 0 & 0 & 0 & r_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t_g & b_{i,g} & 0 & 0 & t_g & b_{f,g} \\ 0 & 0 & -b_{f,g} & a_g & 0 & 0 & b_{f,g} & k_{f,g} \end{bmatrix} \quad (22)$$

2.6.5 Matriz de rigidez tangencial

Conforme pode ser observado por Moreira (1977), a matriz de rigidez tangencial do elemento finito de barra discretizada $[K_{e,g}]$ é dada pela subtração da matriz de rigidez linear – equação (17) – pela matriz de rigidez geométrica – equação (22):

$$[\mathbf{K}_{e,T}] = [\mathbf{K}_e] - [\mathbf{K}_{e,g}] \quad (23)$$

podendo reescrever a equação (23) na forma:

$$\{\mathbf{R}_e\} = \{[\mathbf{K}_e] - [\mathbf{K}_{e,g}]\} \cdot \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{R}_e^F\} \quad (24)$$

em que todos os termos são obtidos subtraindo-se dos elementos da matriz de rigidez linear os elementos da matriz de rigidez geométrica.

2.7 Caracterização dinâmica da torre

O conhecimento das propriedades dinâmicas (modais) de um sistema estrutural e, portanto, a capacidade de prever a resposta dinâmica a partir dos dados modais é de suma importância para os engenheiros. Conforme Humar (2001) indica, a análise da resposta de vibração é de considerável importância no projeto de estruturas que possam estar sujeitas a perturbações dinâmicas. Sob certas situações, as vibrações podem causar grandes deslocamentos e tensões severas na estrutura. Isso pode acontecer quando a frequência da força atuante coincide com uma frequência natural da estrutura.

O movimento oscilatório nas estruturas pode, às vezes, causar desgaste e mau funcionamento do maquinário. Além disso, a transmissão de vibrações para estruturas conectadas pode levar a resultados indesejáveis. Vibrações induzidas por máquinas rotativas podem, por exemplo, serem transmitidas através da estrutura de suporte para instrumentos delicados montados em outra parte, fazendo com que esses instrumentos não funcionem corretamente. Alguns exemplos de forças dinâmicas que podem atuar em uma estrutura são: as forças do vento, as cargas provenientes de explosão ou terremoto, entre outras (HUMAR, 2001).

Murtagh, Basu e Broderick (2004) afirmam que a resposta total de uma estrutura é uma combinação das respostas separadas em cada um dos seus modos individuais de vibração, somadas nas proporções apropriadas à perda de energia em cada modo. No entanto, em estruturas de torres flexíveis, mais de 90% da dissipação de energia total geralmente ocorre devido ao modo fundamental de flexão.

Com o progresso na engenharia, o uso crescente de materiais leves e de alta resistência está sendo usado. Como resultado, as estruturas modernas são mais suscetíveis a vibrações críticas, como é o caso da torre para suporte de aerogeradores (HUMAR, 2001). Em função disso, o objetivo deste trabalho é obter as frequências naturais da torre eólica, juntamente com os modos de vibração correspondentes.

O equilíbrio dinâmico do elemento finito de barra, com 8 graus de liberdade $\{\mathbf{d}\}$, como é indicado no sistema da Figura 32 e da Figura 33, no sistema local de coordenadas e sem considerar parcela de amortecimento da estrutura, é dada por (LIMA, 2018):

$$\{\mathbf{R}_e\} = [\mathbf{M}_e] \cdot \{\ddot{\mathbf{d}}\} + [\mathbf{K}_{e,T}] \cdot \{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{R}_e^F\} \quad (25)$$

no qual: $\{\mathbf{R}_e\}$ é o vetor de reações elásticas; $[\mathbf{K}_{e,T}]$ é a matriz de rigidez tangencial; $\{\mathbf{d}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais; $\{\mathbf{R}_e^F\}$ é o vetor de reações de engastamento; $\{\ddot{\mathbf{d}}\}$ é o vetor de acelerações nodais; e $[\mathbf{M}_e]$ é a matriz de massa do elemento finito discretizado.

As frequências naturais e os modos de vibração podem ser obtidos resolvendo um problema de autovalores e autovetores associada a equação de movimento de vibração representada pela equação (25). Essa análise resulta na determinação de várias frequências e modos de vibração da torre, no entanto, o modo fundamental é geralmente o de maior interesse para engenheiros projetistas, e em vários casos práticos tem contribuição dominante para a resposta total da estrutura (MURTAGH, BASU e BRODERICK, 2004).

2.7.1 Matriz de massa

A matriz de massa do elemento finito de barra $[\mathbf{M}_e]$ representada na equação (25) pode ser genericamente definida por:

$$[\mathbf{M}_e] = \begin{bmatrix} v_i & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i & -\gamma_i & 0 & 0 & \sigma & \tau_i \\ 0 & 0 & -\gamma_i & \beta_i & 0 & 0 & -\tau_f & \lambda \\ \eta & 0 & 0 & 0 & v_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & \mu_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\tau_f & 0 & 0 & \alpha_f & \gamma_f \\ 0 & 0 & \tau_i & \lambda & 0 & 0 & \gamma_f & \beta_f \end{bmatrix} \quad (26)$$

Fazendo uso do conceito de elementos finitos, é possível calcular os coeficientes da matriz de massa para cada elemento de barra estabelecido, utilizando-se das funções de forma apresentadas na equação (21) e das massas de cada um dos elementos de barra (HUMAR, 2001). Os termos relacionados aos graus de liberdade axiais são dados por:

$$(M_e)_{ij} = \int_0^l \rho \cdot A(x) \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) dx \quad (27)$$

em que: $i = 1$ ou 5 e $j = 1$ ou 5 ; ρ é a massa específica do material (no caso do torre, a maça específica do aço); $A(x)$ é a função de área da seção transversal no elemento finito de torre analisado (o diâmetro da seção é variável, assim como a espessura da chapa de aço empregado); $\psi_i(x)$ é a i -ésima função de forma; e l é o comprimento do elemento finito analisado (trecho de torre) (LIMA, 2018).

Os termos relativos aos graus de liberdade torcionais são:

$$(M_e)_{ij} = \int_0^1 \rho \cdot J_0(x) \cdot \psi_{i-1}(x) \cdot \psi_{j-1}(x) dx \quad (28)$$

no qual: $i = 2$ ou 6 e $j = 2$ ou 6 ; e $J_0(x)$ é a função de momento polar de inércia da seção transversal no elemento finito de torre analisado.

Por último, os termos referentes aos graus de liberdade flexionais são:

$$(M_e)_{ij} = \int_0^1 \rho \cdot A(x) \cdot \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) dx \quad (29)$$

sendo: $i = 3, 4, 7$ ou 8 e $j = 3, 4, 7$ ou 8 .

3 METODOLOGIA

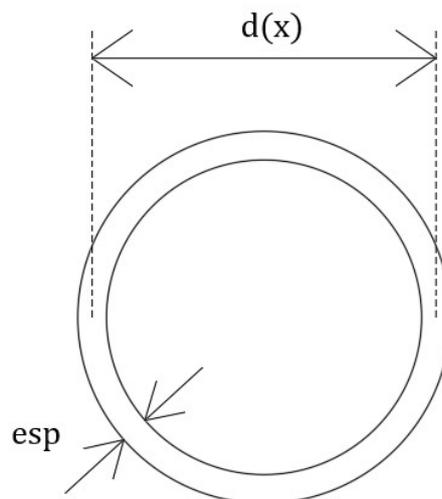
Neste item, é abordada a metodologia aplicada para analisar a estabilidade elástica e na determinação das frequências e dos modos de vibração de uma torre tubular de aço para a sustentação de aerogerador de eixo horizontal.

Para a análise de estabilidade elástica (com não linearidade geométrica) da torre, bem como para a modelagem dinâmica da torre e determinação dos modos de vibração, foi implementado um código próprio no *software* Mathcad 14 (conforme é apresentado no APÊNDICE). A torre foi discretizada utilizando elementos finitos de barra (Figura 32) com 8 graus de liberdade (4 graus de liberdade por nó: translações axiais e transversais, rotação flexional e rotação torcional).

3.1 Caracterização da torre

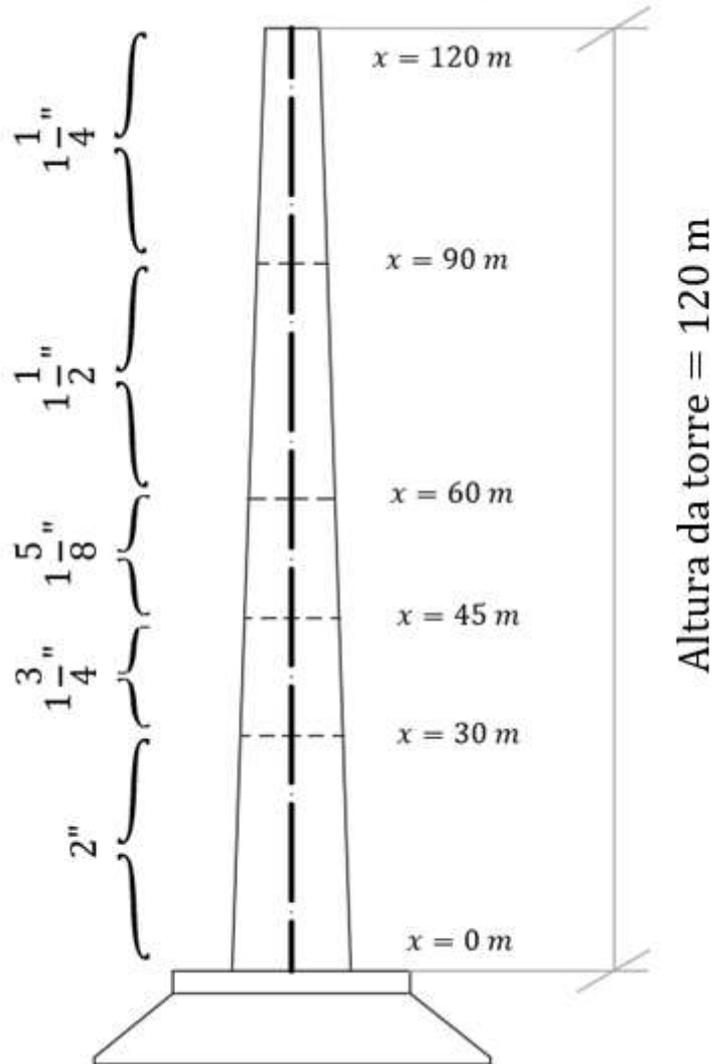
A torre objeto de estudo deste trabalho possui uma altura de 120 m, diâmetro variando linearmente ao longo da altura – 6,5 m na base e 3,5 m no topo. Na Figura 36 é demonstrada a seção transversal da torre. A espessura das chapas utilizadas na calandragem e formação dos segmentos da torre também são variáveis com a altura, e os valores adotados por segmento são indicados na Figura 37, em polegadas.

Figura 36 – Seção transversal da torre.



Fonte: Autor (2018).

Figura 37 - Espessura das chapas ao longo da altura da torre.

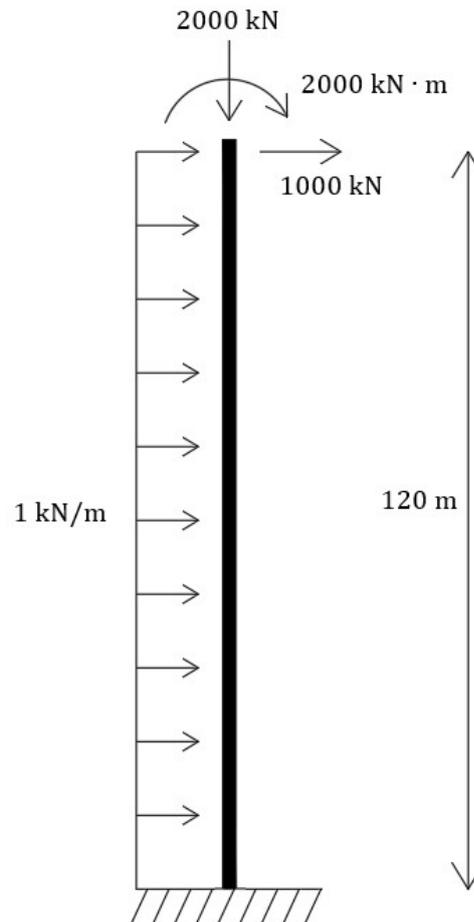


Fonte: Autor (2018).

O aço utilizado nas chapas que constituem a torre e nos flanges de ligação foi o S355J2, de acordo com as especificações da EN 10025-2 (2004). Com relação ao carregamento externo atuante na torre, considerou-se um momento de flexão aplicado no topo de 2000 kNm, uma força horizontal no topo de 1000 kN, uma força vertical no topo de 2000 kN, e uma carga de 1 kN/m aplicada ao longo da altura da torre, simulando a carga de vento atuante, como pode ser ilustrado na Figura 38.

Esse carregamento demonstrado na Figura 38 foi adotado como uma forma de calibragem do algoritmo desenvolvido para a análise da estabilidade e da determinação dos modos de vibração da torre. Inicialmente, implementou-se o método da rigidez direta de forma que as deslocabilidades obtidas pudessem ser comparadas com as deslocabilidades fornecidas pelo *software* FTOOL.

Figura 38 – Carregamento adotado na torre.



Fonte: Autor (2018).

3.2 Ligações da torre

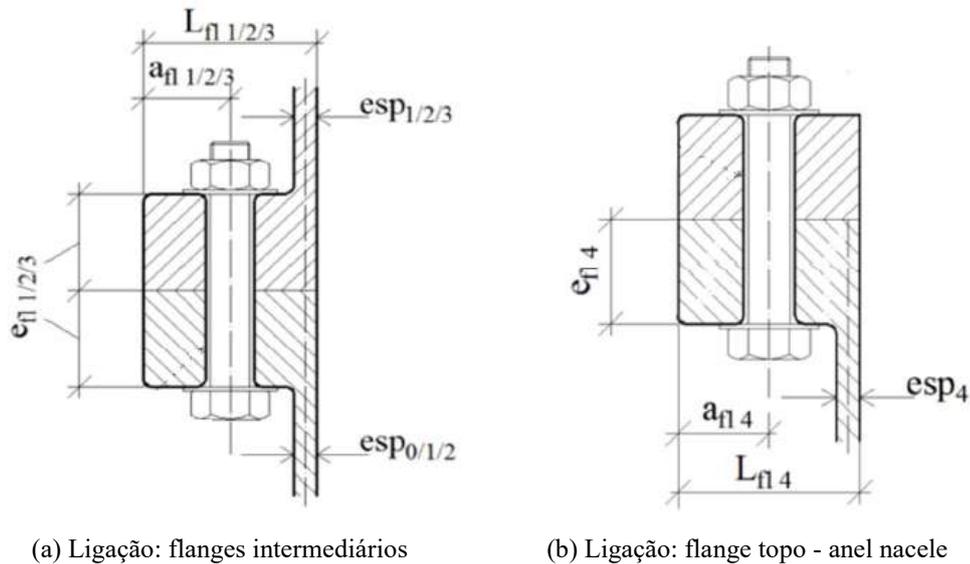
O detalhamento das ligações parafusadas nos flanges da torre pode ser ilustrado na Figura 39, em que (LIMA, 2018):

- Ligação entre os flanges intermediários 1 na cota de 30 m;
- Ligação entre os flanges intermediários 2 na cota de 60 m;
- Ligação entre flanges intermediários 3 na cota de 90 m;
- Ligação do flange azimuthal da torre com a cremalheira da nacele na cota de 120 m.

Na Figura 39, as espessuras da parede do tubo da torre são indicados por: esp_0 (2"), esp_1 (1 3/4"), esp_2 (1 5/8"), esp_3 (1 1/2") e esp_4 (1 1/4"). As espessuras dos flanges intermediários 1, 2 e 3 e do flange azimuthal da torre indicados por: enf_1 (4"), enf_2 (4"), enf_3 (3 1/2") e enf_4 (4"), respectivamente. As larguras dos flanges intermediários 1, 2 e 3 e do flange azimuthal da torre indicados por: L_{fl_1} (28 cm), L_{fl_2} (28 cm), L_{fl_3} (24 cm) e L_{fl_4} (24 cm), respectivamente. E por fim, as distâncias do eixo do parafuso a borda do flange intermediário 1, 2 e 3 e do flange

azimutal da torre são apresentados por: $a_{fl\ 1}$ (12 cm), $a_{fl\ 2}$ (12 cm), $a_{fl\ 3}$ (11 cm) e $a_{fl\ 4}$ (11 cm), respectivamente.

Figura 39 – Detalhamento das ligações.



Fonte: Adaptado de Lima (2018).

3.3 Matriz de rigidez global e equilíbrio dinâmico da torre

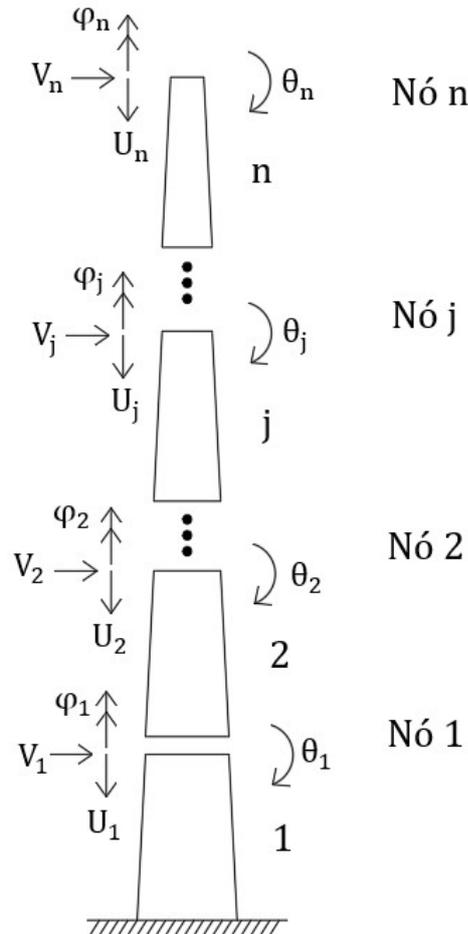
Após a determinação da matriz de rigidez local de um elemento finito de barra, deve-se utilizar um procedimento que permita somar as contribuições de rigidez de cada elemento discretizado da estrutura, obtendo como resultado a matriz de rigidez global que relacione esforços e deslocamentos nodais de toda a estrutura. De maneira análoga, deve ser feita a montagem da matriz de massa no sistema global da estrutura (SORIANO, 2005).

Uma maneira de montar a matriz de rigidez global consiste em compor as condições de equilíbrio das ações originadas em cada nó da estrutura, com relação aos graus de liberdade, proveniente das reações elásticas dos elementos que concorrem para o nó, bem como a possíveis ações externas aplicadas diretamente aos nós. O mesmo procedimento é tomado para a determinação do equilíbrio dinâmico da torre, resultando na matriz de massa global. Cada uma das linhas da matriz de rigidez global e da matriz de massa global são resultantes de uma das equações de equilíbrio nos nós discretizado (LIMA, 2018).

Na metodologia empregada neste trabalho, a numeração dos nós, dos elementos de barra e dos graus de liberdade aplicados foi executada no sentido da base da torre até o topo, ou seja, as linhas da matriz de rigidez global seguem a sequência do nó mais próximo da base até o nó do topo da torre. Na Figura 40 é exemplificado a subdivisão da torre em n elementos finitos de barra, com a numeração dos nós da base ao topo da torre, e com os sentidos positivos das

deslocabilidades no sistema global de coordenadas utilizado (V representa os deslocamentos transversais, U os deslocamentos axiais, θ as rotações de flexão e φ as rotações de torção). Em cada um dos nós, foi analisado o equilíbrio das reações elásticas.

Figura 40 – Subdivisão da torre em n elementos finitos.



Fonte: Autor (2018).

Para o cálculo dos elementos da matriz de rigidez e da matriz de massa de cada um dos elementos discretizados da torre, pode-se escrever as seguintes funções relacionadas à variação da seção transversal do tubo da torre ao longo da altura: A equação (30) representa a função de diâmetro $d(x)$; a equação (31) representa o vetor de funções de áreas de seção transversal $A(x)$; a equação (32) representa o vetor de funções de momentos de inércia à flexão $I(x)$; e a equação (33) representa o vetor de funções de momentos de inércia à torção $J(x)$.

$$d(x) = \frac{d_{\text{base}}}{L} \left[L - \left(1 - \frac{d_{\text{topo}}}{d_{\text{base}}} \right) x \right] \quad (30)$$

sendo: d_{topo} e d_{base} são os diâmetros médios do tubo na base e no topo; L é o comprimento da torre, igual a 120 m; x é a coordenada ao longo da altura da torre;

$$A(x) = \pi d(x) \text{esp}_i \quad (31)$$

em que, esp_i é o vetor de espessura da parede do tubo da torre avaliado nos níveis i ao longo do comprimento;

$$I(x) = \frac{\pi}{64} \{ [d(x) + \text{esp}_i]^4 - [d(x) - \text{esp}_i]^4 \} \quad (32)$$

$$J(x) = \frac{\pi}{32} \{ [d(x) + \text{esp}_i]^4 - [d(x) - \text{esp}_i]^4 \} \quad (33)$$

A equação de equilíbrio de momentos de flexão para um nó j , empregando as equações (22) e (26), é dada por:

$$\begin{aligned} M_f^j + M_i^{j+1} = 0 \Rightarrow & \lambda^j \ddot{\theta}_{j-1} + (\beta_f^j + \beta_i^{j+1}) \ddot{\theta}_j + \lambda^{j+1} \ddot{\theta}_{j+1} - \tau_i^j \ddot{v}_{j-1} - \\ & - (\gamma_i^{j+1} + \gamma_f^j) \ddot{v}_j - \tau_f^{j+1} \ddot{v}_{j+1} + a_T^j \theta_{j-1} + (k_{f,T}^j + k_{i,T}^{j+1}) \theta_j + a_T^{j+1} \theta_{j+1} + \\ & + b_{f,T}^j v_{j-1} + (b_{i,T}^{j+1} - b_{f,T}^j) v_j - b_{i,T}^{j+1} v_{j+1} = -M_i^{F(j+1)} - M_f^{F(j)} \end{aligned} \quad (34)$$

sendo essa expressão válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n-1$. Para o nó n , a expressão fica:

$$\begin{aligned} M_f^n + I_{nac}^{fl} \ddot{\theta}_n = M_H \Rightarrow & \lambda^n \ddot{\theta}_{n-1} + (\beta_f^n + I_{nac}^{fl}) \ddot{\theta}_n - \tau_i^n \ddot{v}_{n-1} - \gamma_f^n \ddot{v}_n + \\ & + a_T^n \theta_{n-1} + k_{f,T}^n \theta_n + b_{f,T}^n v_{n-1} - b_{i,T}^n v_n = -M_f^{F(n)} + M_H \end{aligned} \quad (35)$$

em que: M_H é o momento fletor aplicado ao topo da torre, que neste trabalho considerou-se 2000 kNm; I_{nac}^{fl} é o momento de inércia da nacele em relação ao eixo que passa pelo diâmetro da seção transversal de topo da torre (eixo em torno do qual tem-se a rotação θ_n). Para o cálculo do momento de inércia, admite-se que a nacele tenha formato paralelepípedo, com dimensão horizontal de 12 m ($a_{nac} = 12$ m) e vertical de 5 m ($h_{nac} = 5$ m), além de massa específica (ρ_{nac}) constante. A expressão do momento de inércia é (LIMA, 2018):

$$I_{nac}^{fl} = \frac{M_{nac}}{12} (a_{nac}^2 + 4h_{nac}^2) \quad (36)$$

sendo M_{nac} a massa da nacele, considerada igual a 200 toneladas neste trabalho.

A equação de equilíbrio de forças horizontais para um nó j é dada por:

$$\begin{aligned} V_f^j + V_i^{j+1} = 0 \Rightarrow & -\tau_f^j \ddot{\theta}_{j-1} - (\gamma_i^{j+1} + \gamma_f^j) \ddot{\theta}_j - \tau_i^{j+1} \ddot{\theta}_{j+1} + \sigma^j \ddot{v}_{j-1} + \\ & + (\alpha_i^{j+1} + \alpha_f^j) \ddot{v}_j + \sigma^{j+1} \ddot{v}_{j+1} - b_{i,T}^j \theta_{j-1} + (b_{i,T}^{j+1} - b_{f,T}^j) \theta_j + b_{f,T}^{j+1} \theta_{j+1} - \\ & - t_T^j v_{j-1} + (t_T^j - t_T^{j+1}) v_j - t_T^{j+1} v_{j+1} = V_i^{F(j+1)} + V_f^{F(j)} \end{aligned} \quad (37)$$

Semelhante a expressão de momentos de flexão, essa expressão é válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n-1$. Para o nó n , a expressão fica:

$$\begin{aligned} -V_f^n + M_{nac} \ddot{u}_n = F_H \Rightarrow & -\tau_f^n \ddot{\theta}_{n-1} - \gamma_f^n \ddot{\theta}_n + \sigma^n \ddot{v}_{n-1} + (\alpha_f^n + M_{nac}) \ddot{v}_n - \\ & - b_{i,T}^n \theta_{n-1} - b_{f,T}^n \theta_n - t_T^n v_{n-1} + t_T^n v_n = V_f^{F(n)} + F_H \end{aligned} \quad (38)$$

sendo F_H a força horizontal aplicada ao topo da torre, que neste trabalho considerou-se 1000 kN.

A equação de equilíbrio de forças verticais para um nó j é dada por:

$$\begin{aligned} N_f^j + N_i^{j+1} = 0 \Rightarrow \eta^j \ddot{u}_{j-1} + (v_i^{j+1} + v_f^j) \ddot{u}_j + \eta^{j+1} \ddot{u}_{j+1} - r_T^j u_{j-1} + \\ + (r_T^{j+1} + r_T^j) u_j - r_T^{j+1} u_{j+1} = -N_i^{F(j+1)} - N_f^{F(j)} \end{aligned} \quad (39)$$

Novamente, essa expressão é válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$. Para o nó n , a expressão fica:

$$\begin{aligned} N_f^n + M_{nac} \ddot{u}_n = F_V \Rightarrow \eta^n \ddot{u}_{n-1} + (v_f^n + M_{nac}) \ddot{u}_n - r_T^n u_{n-1} + r_T^n u_n = \\ -N_f^{F(n)} + F_V \end{aligned} \quad (40)$$

sendo F_V a força vertical aplicada ao topo da torre, que neste trabalho considerou-se 2000 kN.

A equação de momentos de torção para um nó j é dada por:

$$\begin{aligned} T_f^j + T_i^{j+1} = 0 \Rightarrow \delta^j \ddot{\varphi}_{j-1} + (\mu_i^{j+1} + \mu_f^j) \ddot{\varphi}_j + \delta^{j+1} \ddot{\varphi}_{j+1} - s^j \varphi_{j-1} + \\ + (s^{j+1} + s^j) \varphi_j - s^{j+1} \varphi_{j+1} = -T_i^{F(j+1)} - T_f^{F(j)} \end{aligned} \quad (41)$$

Essa expressão também só é válida para os nós e elementos $j = 1, \dots, n - 1$. Para o nó n , a expressão fica:

$$T_f^n + I_{nac}^{tr} \ddot{\varphi}_n = T \Rightarrow \delta^n \ddot{\varphi}_{n-1} + (\mu_f^n + I_{nac}^{tr}) \ddot{\varphi}_n - s^n \varphi_{n-1} + s^n \varphi_n = -T_f^{F(n)} + T \quad (42)$$

em que: T é o momento torçor aplicado ao topo da torre, que neste trabalho considerou-se 0 kNm; I_{nac}^{tr} é o momento de inércia da nacele em relação ao eixo vertical da torre (eixo em torno do qual tem-se a rotação φ_n). Além das dimensões horizontal e vertical da nacele já definidas, considera-se a largura da nacele igual a 4 m ($b_{nac} = 4$ m), e o momento de inércia a torção pode ser dado por (LIMA, 2018):

$$I_{nac}^{tr} = \frac{M_{nac}}{12} (a_{nac}^2 + b_{nac}^2) \quad (43)$$

As equações (34), (35), (37), (38), (39), (40), (41) e (42) são associadas para cada nó da estrutura, resultando na forma matricial do Sistema Global de Coordenadas da torre, compondo as matrizes expostas na equação (25).

Como foi abordado no item anterior, as ligações entre os segmentos que compõem a torre são feitas por meio de flanges cilíndricos aparafusados. Na Figura 37 são indicadas as cotas em que essas ligações são realizadas (30, 45, 60, 90 e 120 m) ao longo da torre. É importante destacar que essas ligações possuem uma massa significativa quando comparada com a massa dos segmentos que constituem a torre, sendo assim, considera-se o efeito localizado das massas dos flanges na montagem da matriz de massa global da torre nos elementos da matriz correspondentes as cotas citadas acima.

Nas parcelas referentes ao equilíbrio de momentos de flexão, a contribuição dos flanges é dada pela equação (44):

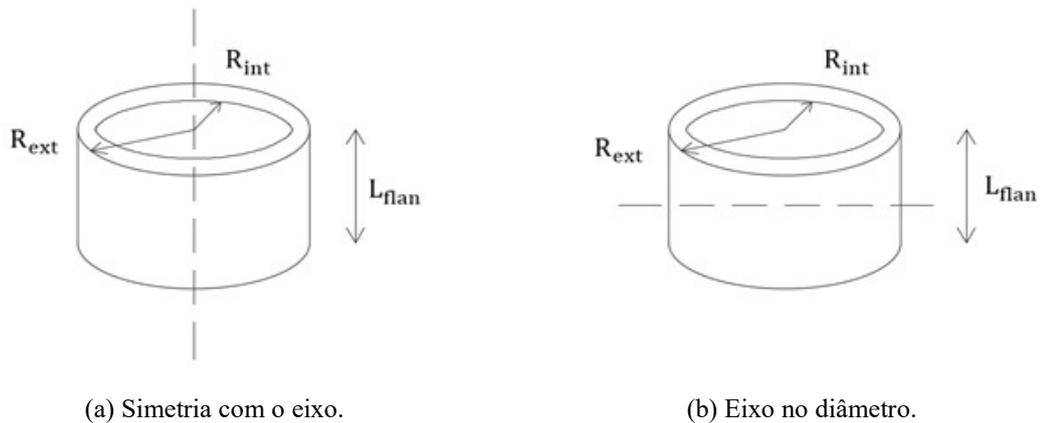
$$I_{\text{flan}}^{\text{fl}} = \frac{M_{\text{flan}}}{4} (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) + \frac{M_{\text{flan}}}{12} L_{\text{flan}}^2 \quad (44)$$

em que: M_{flan} é a massa do flange; R_{ext} e R_{int} os raios externos e internos do flange, respectivamente; L_{flan} é o comprimento do flange; e $I_{\text{flan}}^{\text{fl}}$ é o momento de inércia a flexão do flange, com o eixo no diâmetro, conforme é indicado na Figura 41 (a). Já nas parcelas referentes ao equilíbrio de momentos de torção, a contribuição dos flanges é dada pela equação (45):

$$I_{\text{flan}}^{\text{tr}} = \frac{M_{\text{flan}}}{2} (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) \quad (45)$$

sendo $I_{\text{flan}}^{\text{tr}}$ o momento de inércia a torção do flange, com a simetria no eixo, como é ilustrado na Figura 41 (b).

Figura 41 – Representação geométrica do flange de ligação.



Fonte: Autor (2018).

3.4 Cálculo dos deslocamentos da torre

Com a matriz de rigidez do sistema global formada com base na metodologia do item anterior $[\mathbf{K}_e]$, é possível escrever a forma matricial no Sistema Global de Coordenadas conforme:

$$\{\mathbf{F}_e\} = [\mathbf{K}_e]\{\mathbf{D}\} \quad (46)$$

em que: $\{\mathbf{F}_e\}$ é o vetor das forças nodais e $\{\mathbf{D}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais. Na equação (46), não se considera a parcela da matriz de massa e das acelerações nodais da equação (25). É possível calcular o vetor de deslocamentos nodais por:

$$\{\mathbf{D}\} = [\mathbf{K}_e]^{-1}\{\mathbf{F}_e\} \quad (47)$$

3.5 Determinação das frequências e modos de vibração

Um sistema com múltiplos graus de liberdade irá vibrar mesmo sem a presença de uma força externa, sempre que for submetido a perturbações na forma de deslocamentos iniciais, ou velocidades iniciais, ou ambos, ao longo dos seus graus de liberdade. Para a obtenção da resposta dinâmica de uma estrutura, é feita uma superposição das respostas de seus modos de vibração.

Para a solução desse problema, é utilizado uma metodologia que é comumente conhecida como um problema de autovalor linear. O autovetor de uma matriz é definido como um vetor que possui a propriedade que, quando multiplicado pela matriz, produz outro vetor que é proporcional ao original, com a constante de proporcionalidade sendo chamada de autovalor (HUMAR, 2001). Para isso, é fundamental que se desacople as equações de movimento, reduzindo o problema na resolução de equações de movimento com apenas 1 grau de liberdade, efetuando a posterior superposição. Esse procedimento é conhecido como o Método da Superposição Nodal (LIMA, 2018).

Para a resolução desse problema, é implementada a seguinte marcha de cálculo (LIMA, 2018):

1) Diagonalização da matriz de massa:

A matriz de massa é diagonalizada através de uma transformação linear ortogonal, pois ela é uma matriz simétrica. Para isso, calcula-se a matriz de autoversores $[\boldsymbol{\varphi}]$ da matriz de massa, e realiza-se a seguinte operação:

$$[\mathbf{M}^*] = [\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{M}_E] [\boldsymbol{\varphi}] \quad (48)$$

sendo: $[\mathbf{M}^*]$ é a matriz de massa diagonalizada da estrutura (autovalores de $[\mathbf{M}_E]$). Com esta transformação:

$$\{\mathbf{D}(t)\} = [\boldsymbol{\varphi}] \{\mathbf{D}^*(t)\} \quad (49)$$

nos quais: t é a variável temporal; $\{\mathbf{D}(t)\}$ é o vetor de funções temporais de deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura no referencial global de coordenadas; $\{\mathbf{D}^*(t)\}$ é o vetor de funções temporais de deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura no referencial que diagonaliza a matriz de massa.

Com essa transformação, a equação matricial de movimento não amortecido, dado pela equação (25), passa a ter a seguinte forma:

$$[\mathbf{M}^*] \{\ddot{\mathbf{D}}^*\} + [\mathbf{K}^*] \{\mathbf{D}^*\} = \{\mathbf{F}^*\} \quad (50)$$

com seus elementos escritos no referencial que diagonaliza a matriz de massa, sendo:

$$[\mathbf{K}^*] = [\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{K}_E] [\boldsymbol{\varphi}] \quad [\mathbf{F}^*(t)] = [\boldsymbol{\varphi}]^T \{\mathbf{F}_E(t)\} \quad (51)$$

em que $\{\mathbf{F}_E(t)\}$ é o vetor de funções temporais das forças nodais da estrutura no referencial global de coordenadas.

2) Cálculo da matriz dinâmica inversa:

A partir dessa matriz de massa diagonalizada, é possível determinar a matriz dinâmica inversa $[\mathbf{DI}]$:

$$[\mathbf{DI}] = [\mathbf{M}^*]^{-1/2} [\boldsymbol{\varphi}]^T [\mathbf{K}_e] [\boldsymbol{\varphi}] [\mathbf{M}^*]^{-1/2} \quad (52)$$

em que, seguindo essa metodologia, gera-se uma matriz simétrica, reduzindo o custo computacional na resolução do problema analisado. Com mais uma transformação:

$$\{\mathbf{D}^*(t)\} = [\mathbf{M}^*]^{-1/2} \{\mathbf{Y}(t)\} \quad (53)$$

a equação matricial de movimento passa a ter a seguinte forma:

$$\{\ddot{\mathbf{Y}}\} + [\mathbf{DI}]\{\mathbf{Y}\} = \{\mathbf{F}^1\} \quad (54)$$

a qual está escrita no referencial que transforma a matriz de massa original em uma matriz identidade $[\mathbf{I}]$ de ordem n . Sendo:

$$\{\mathbf{F}_I(t)\} = [\mathbf{M}^*]^{-1/2} \{\mathbf{F}^*(t)\} \quad (55)$$

3) Diagonalização da matriz dinâmica inversa:

Usando da mesma lógica utilizada na matriz de massa, diagonaliza-se a matriz dinâmica inversa por meio de uma transformação linear ortogonal, através da matriz de autoversores $[\bar{\boldsymbol{\Psi}}]$:

$$[\boldsymbol{\omega}^2] = [\bar{\boldsymbol{\Psi}}]^T [\mathbf{DI}] [\bar{\boldsymbol{\Psi}}] \quad (56)$$

sendo: $[\boldsymbol{\omega}^2]$ é a matriz diagonal que compreende as frequências angulares quadradas referentes aos modos de vibração da estrutura (autovalores de $[\mathbf{DI}]$), obtida a partir da seguinte transformação ortogonal:

$$\{\mathbf{Y}(t)\} = [\bar{\boldsymbol{\Psi}}]\{\bar{\mathbf{q}}(t)\} \quad (57)$$

Assim, a matriz $[\boldsymbol{\omega}^2]$ contém a solução do problema padrão de autovalores e autovetores dado pela equação (54). De maneira geral, as menores frequências são as mais importantes na contribuição modal da estrutura, por isso, é interessante reorganizar as frequências angulares $[\boldsymbol{\omega}^2]$, assim como a matriz de transformação $[\bar{\boldsymbol{\Psi}}]$, para que as frequências fiquem organizadas da menor para a maior.

4) Calcular a matriz modal ponderada:

A matriz modal ponderada $[\boldsymbol{\Phi}]$ pode ser calculada por:

$$[\boldsymbol{\Phi}] = [\mathbf{M}^*]^{-1/2} [\bar{\boldsymbol{\Psi}}] \quad (58)$$

5) Cálculo dos modos de vibração

Por fim, calcula-se os modos de vibração no referencial original $[\bar{\boldsymbol{\Phi}}]$ por:

$$[\bar{\boldsymbol{\Phi}}] = [\boldsymbol{\varphi}][\boldsymbol{\Phi}] \quad (59)$$

em que os modos de vibração são ortogonais entre si.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste item, é realizada a apresentação dos resultados obtidos neste trabalho, com o intuito de desempenhar uma análise da estabilidade por meio da determinação dos deslocamentos e rotações críticas as quais a torre está submetida, e obtenção das respostas dinâmicas da estrutura, com caracterização das frequências e dos modos de vibração livre, discussão sobre os efeitos desses parâmetros na estrutura, bem como destacar a relevância desse tema estudado.

4.1 Deslocamentos da torre

Conforme mencionado anteriormente, adotou-se um carregamento na torre conforme indicado na Figura 38 com o objetivo de validação do modelo utilizado. Os deslocamentos e as rotações obtidas para a torre podem ser alcançados através de duas análises – considerando somente os efeitos de primeira ordem (linear), e considerando os de segunda ordem. Na análise de primeira ordem, é considerado o equilíbrio da estrutura em sua posição indeformada, logo, os efeitos da matriz de rigidez geométrica não são levados em conta. Já na análise de segunda ordem, é considerado os efeitos da matriz de rigidez geométrica, e os esforços adicionais que isso provoca na estrutura.

Na Tabela 1 abaixo, são apresentados os deslocamentos transversais e as rotações de flexão obtidas para o topo da torre, em consequência do carregamento ilustrado na Figura 38, tanto para a análise de primeira ordem quanto para a de segunda ordem.

Tabela 1 - Deslocamentos e rotações de flexão da torre para análises de 1ª e 2ª Ordem.

Análise	Deslocamento Transversal (m)	Rotação de Flexão (rad)
1ª Ordem	0,98642	0,01595
2ª Ordem	1,03400	0,01676

Fonte: Autor (2018)

Conforme pode ser observado, quando empregada a análise de segunda ordem, os deslocamentos e as rotações na estrutura são ampliados, e torna os resultados obtidos mais próximos daquilo que de fato ocorre na estrutura. Fazendo um comparativo, a diferença entre os deslocamentos transversais nessas duas análises é da ordem de 4,60%, e entre as rotações de flexão é da ordem de 4,83%.

Para uma estrutura com grandes dimensões e elevada esbelteza, como é o caso desta torre em estudo, sendo as dimensões axiais muito menores que a dimensão longitudinal (da ordem

de 1/20), o emprego de uma análise de segunda ordem é crucial, pois além dessas características físicas e da natureza do material, que contribuem para uma instabilidade da estrutura, deve-se lembrar da existência da nacela, pás e demais componentes do aerogerador que se encontram instalados no topo da torre, as quais possuem uma massa considerável, além dos efeitos de rotação e de ação do vento em seus elementos.

Lima (2018) realizou o cálculo dos deslocamentos transversais no topo da torre para modelos engastados na base, realizados com elementos finitos de barra (em que se considerou a não linearidade geométrica, por meio da matriz de rigidez geométrica), via mecânica dos meios contínuos, e via elementos finitos de casca no *software* ANSYS, concluindo que não houve diferenças significativas entre os resultados obtidos nos três modelos (diferença da ordem de 1% na análise de não linearidade geométrica).

A critério de comparação, a norma brasileira de projeto de estruturas de aço não possui nenhuma recomendação específica para deslocamentos máximos admissíveis para o caso de torres como no modelo proposto. Sendo assim, o deslocamento horizontal no topo da torre, é tratado segundo considerações da norma europeia EN 1993-3-2 (2006), que indica um deslocamento máximo permitido no topo dessas estruturas por meio da equação (60):

$$\delta_{\max} = \frac{h}{50} \quad (60)$$

sendo: h é a altura da torre. Para o modelo de estudo deste trabalho ($h=120$ m), o deslocamento transversal máximo permitido no topo da torre é de 2,4 m. Com isso, pode-se notar que a estrutura atende a este requisito da norma europeia EN 1993-3-2 (2006), em que tanto o deslocamento resultante da análise de primeira ordem (0,98642 m) quanto o de segunda ordem (1,034 m) encontram-se bem abaixo deste valor limite, sendo 0,98642 m equivalente a 41,1% do valor limite, e 1,034 m equivalente a 43,1% do valor limite.

Utilizando-se de um critério de comparação mais rígido que o apresentado na EN 1993-3-2 (2006), Lima (2018) verificou o estado limite de serviço de deslocamentos máximos no topo da torre, objetivando obedecer às limitações de deslocamentos estabelecidas pelos fabricantes dos equipamentos que se encontram na nacela, além de limitar os deslocamentos da torre para evitar o contato das pás do aerogerador com a torre de sustentação. Portanto, utilizou como valor limite para o deslocamento transversal no topo da torre de $h/70$. Para o modelo estudado neste trabalho, este limite corresponde a 1,70 m, e pode-se constatar que os resultados alcançados na Tabela 1 encontram-se também abaixo deste limite.

Por ser um método numérico e para obtenção de melhor convergência dos resultados, pode ser necessário o uso de malha mais discretizada, sem qualquer dificuldade para implementação. Mas é importante destacar que, mesmo em uma estrutura de geometria

complexa como a torre, sujeita aos carregamentos externos, o método consegue determinar os deslocamentos e rotações em seus nós com elevada precisão.

4.2 Análise dinâmica da estrutura

Para a realização da análise modal do modelo de torre e alcance das respostas dinâmica da torre, é necessário estabelecer o número de elementos finitos a ser discretizada a torre. Em geral, quanto mais discretizada a torre, maior é a aproximação dos dados obtidos com os dados reais observados. Entretanto, para um número cada vez maior de elementos finitos, maior é o esforço computacional do *software* para obtenção dos resultados, inviabilizando uma discretização tão elevada.

Estabelecendo o número de elementos finitos em que a torre será discretizada, e resolvendo o problema de autovalores e de autovetores, intrínseco à questão da vibração livre, adquire-se as frequências naturais e os respectivos modos de vibração não amortecidos da torre, onde esses modos são as configurações ou formas como o sistema pode oscilar, em que para cada frequência natural, existe um modo de vibração específico. Buscando atingir uma convergência nas frequências e nos períodos de oscilação, comparou-se esses dados obtidos para as discretizações em 8, 16, 32, 64 e 128 elementos finitos da torre, como pode ser constatado nas tabelas 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente.

Tabela 2 - Dados de vibração livre da torre para $n = 8$.

Ordem	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a
Natureza	Flexão	Flexão	Torção	Flexão	Flexão	Torção
Frequência (Hz)	0,29512	1,67515	3,97771	4,39479	7,92576	8,60368
Período (s)	3,388	0,597	0,251	0,228	0,126	0,116
Frequência angular (rad/s)	1,854	10,526	24,993	27,613	49,799	54,058

Fonte: Autor (2018).

Tabela 3 - Dados de vibração livre da torre para $n = 16$.

Ordem	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a
Natureza	Flexão	Flexão	Torção	Flexão	Flexão	Torção
Frequência (Hz)	0,29528	1,67518	3,98002	4,39207	7,91296	8,60485
Período (s)	3,387	0,597	0,251	0,228	0,126	0,116
Frequência angular (rad/s)	1,855	10,525	25,007	27,596	49,719	54,066

Fonte: Autor (2018).

Tabela 4 - Dados de vibração livre da torre para n = 32.

Ordem	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a
Natureza	Flexão	Flexão	Torção	Flexão	Flexão	Torção
Frequência (Hz)	0,29536	1,67519	3,98060	4,39156	7,91030	8,60515
Período (s)	3,386	0,597	0,251	0,228	0,126	0,116
Frequência angular (rad/s)	1,856	10,525	25,011	27,593	49,702	54,068

Fonte: Autor (2018).

Tabela 5 - Dados de vibração livre da torre para n = 64.

Ordem	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a
Natureza	Flexão	Flexão	Torção	Flexão	Flexão	Torção
Frequência (Hz)	0,29539	1,67520	3,98074	4,39146	7,90969	8,60522
Período (s)	3,385	0,597	0,251	0,228	0,126	0,116
Frequência angular (rad/s)	1,856	10,526	25,012	27,592	49,698	54,068

Fonte: Autor (2018).

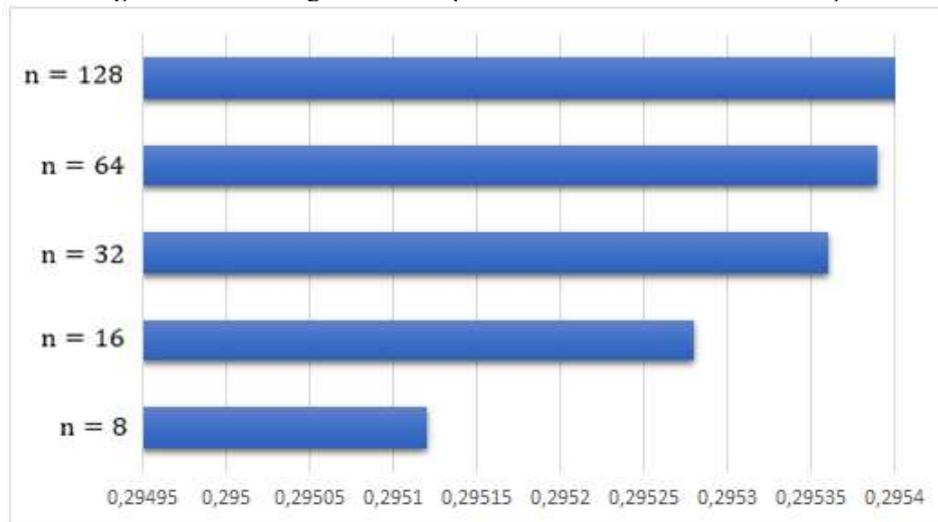
Tabela 6 - Dados de vibração livre da torre para n = 128.

Ordem	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a
Natureza	Flexão	Flexão	Torção	Flexão	Flexão	Torção
Frequência (Hz)	0,29541	1,67522	3,98078	4,39145	7,90954	8,60524
Período (s)	3,385	0,597	0,251	0,228	0,126	0,116
Frequência angular (rad/s)	1,856	10,526	25,012	27,592	49,697	54,068

Fonte: Autor (2018).

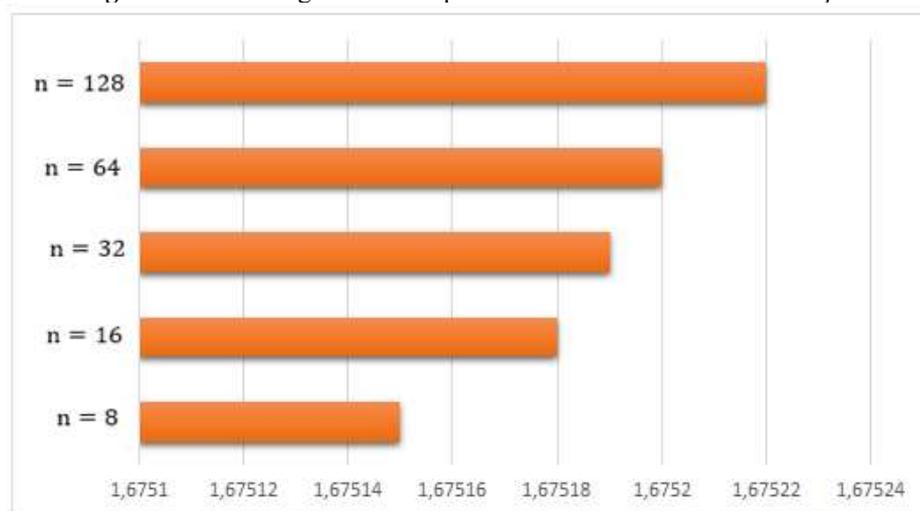
A convergência das frequências de oscilação, a medida em que se aumentou a discretização da estrutura, pode ser visualizada nas figuras a seguir. Na Figura 42 é apresentado a convergência do primeiro modo de vibração, na Figura 43 a do segundo modo, na Figura 44 o terceiro modo, na Figura 45 o quarto modo, na Figura 46 o quinto modo, e na Figura 47 o sexto modo. Esse comportamento corresponde com o previsto, uma vez que, a medida em que a estrutura é subdividida em mais elementos, mais precisos se tornam os resultados, aproximando-se do modelo real da estrutura.

Figura 42 – Convergência da frequência em Hz do 1º modo de vibração.



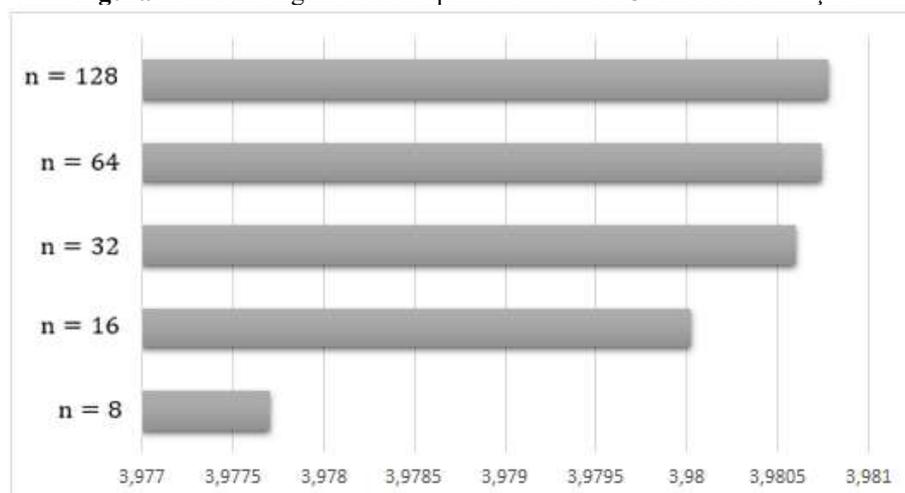
Fonte: Autor (2018).

Figura 43 – Convergência da frequência em Hz do 2º modo de vibração.



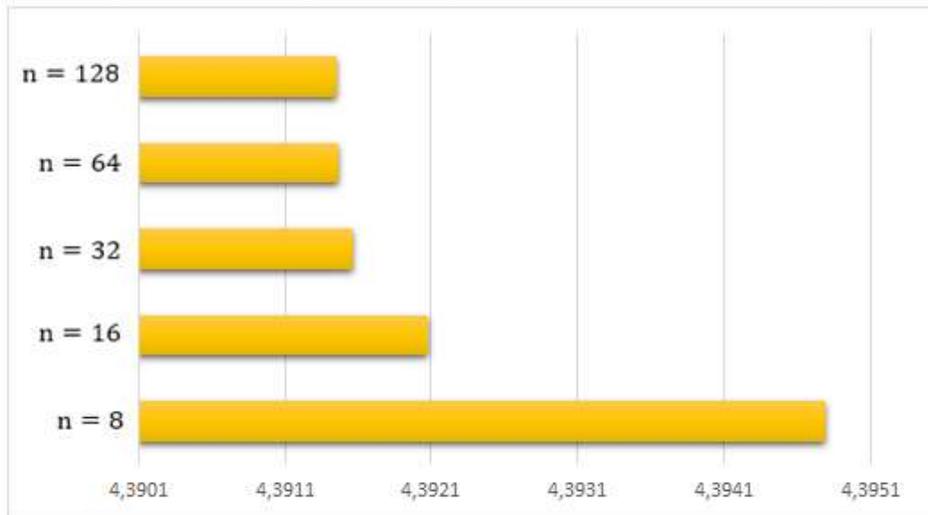
Fonte: Autor (2018).

Figura 44 – Convergência da frequência em Hz do 3º modo de vibração.



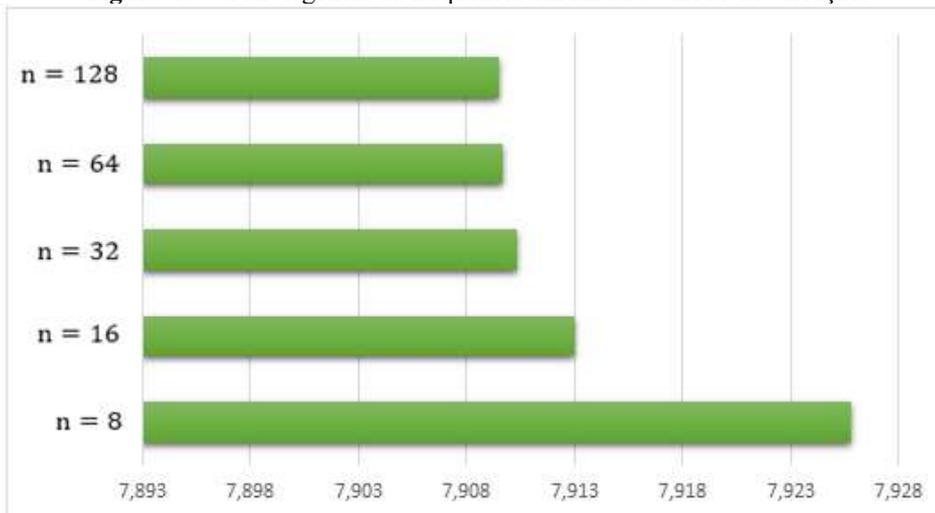
Fonte: Autor (2018).

Figura 45 – Convergência da frequência em Hz do 4º modo de vibração.



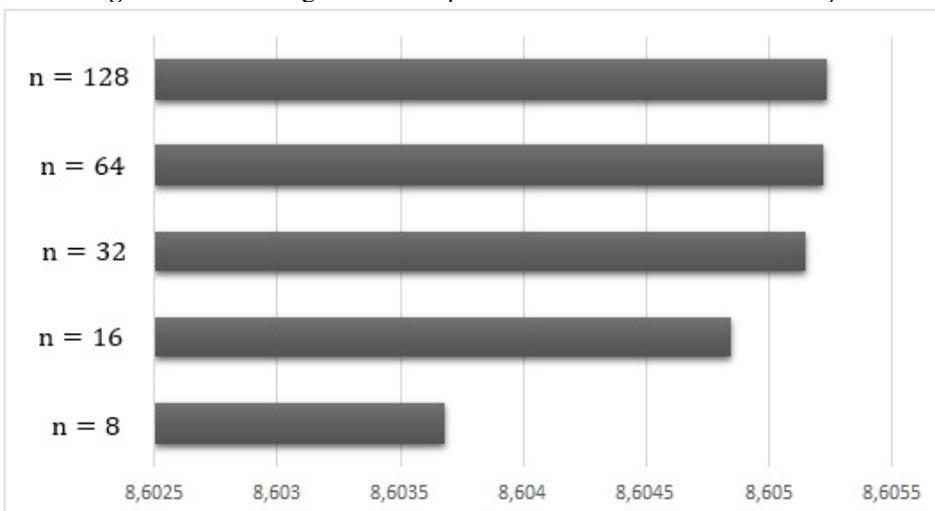
Fonte: Autor (2018).

Figura 46 – Convergência da frequência em Hz do 5º modo de vibração.



Fonte: Autor (2018).

Figura 47 – Convergência da frequência em Hz do 6º modo de vibração.



Fonte: Autor (2018).

Como pode-se observar, os resultados obtidos para a discretização em 8 elementos finitos pouco diferem das demais, conforme pode ser destacado na Tabela 7 abaixo, que faz o comparativo entre as frequências obtidas para a subdivisão em 8 e em 128 elementos de barra.

Com isso, é possível notar que a diferença é irrisória, sendo a frequência do quinto modo de vibração a que mais diferiu, apresentando 0,2046% de disparidade. Na frequência do primeiro modo de oscilação, que é o modo mais relevante para o estudo desta torre, a discrepância foi de apenas 0,0982%. Esses resultados exibem que, com pouco esforço computacional, soluções confiáveis puderam ser alcançadas, principalmente quando comparado com as soluções para a subdivisão em 128 elementos.

Tabela 7 - Comparativo entre as frequências para n=8 e n=128.

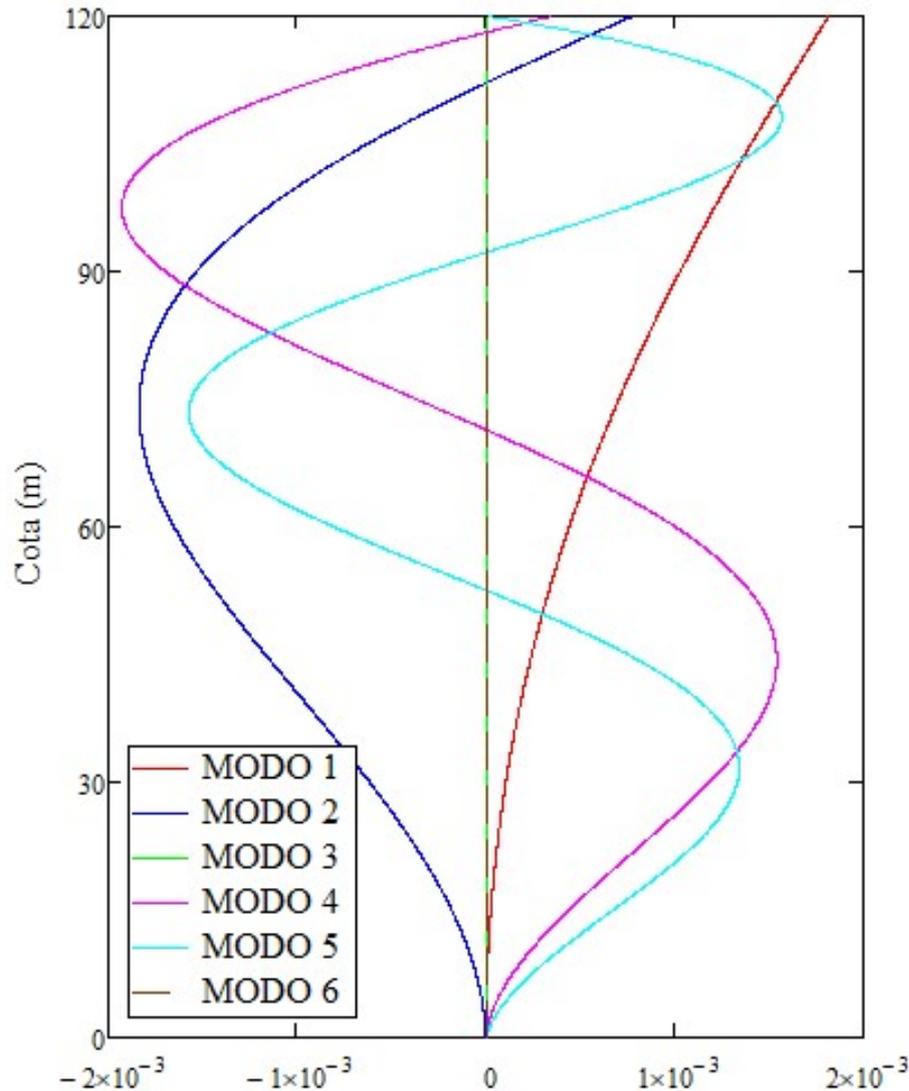
Ordem	Frequência para n=8 (Hz)	Frequência para n=16 (Hz)	Diferença (%)
1 ^a	0,29512	0,29541	0,0982
2 ^a	1,67519	1,67522	0,0018
3 ^a	3,97771	3,98078	0,0771
4 ^a	4,39479	4,39145	0,0760
5 ^a	7,92576	7,90954	0,2046
6 ^a	8,60368	8,60524	0,0181

Fonte: Autor (2018).

Na Figura 48 são ilustrados os modos de vibração flexionais da torre, e na Figura 49 são ilustrados os modos de vibração torcionais da torre, adquiridos para uma discretização em 128 elementos finitos.

Examinando as frequências obtidas da torre, a frequência fundamental na flexão (0,29541 Hz) é a mais preocupante quanto a eventualidade de haver ressonância da estrutura, tanto para o caso de vibração na direção do vento, quanto para a vibração na direção perpendicular do vento, que pode ser provocado pelo fenômeno de desprendimento de vórtices. Devido a esse baixo valor da frequência fundamental de vibração, resulta-se em um período de vibração de 3,385 s, que representa o tempo essencial para uma oscilação completa da torre, confirmando com o previsto devido a flexibilidade desta estrutura (LIMA, 2018).

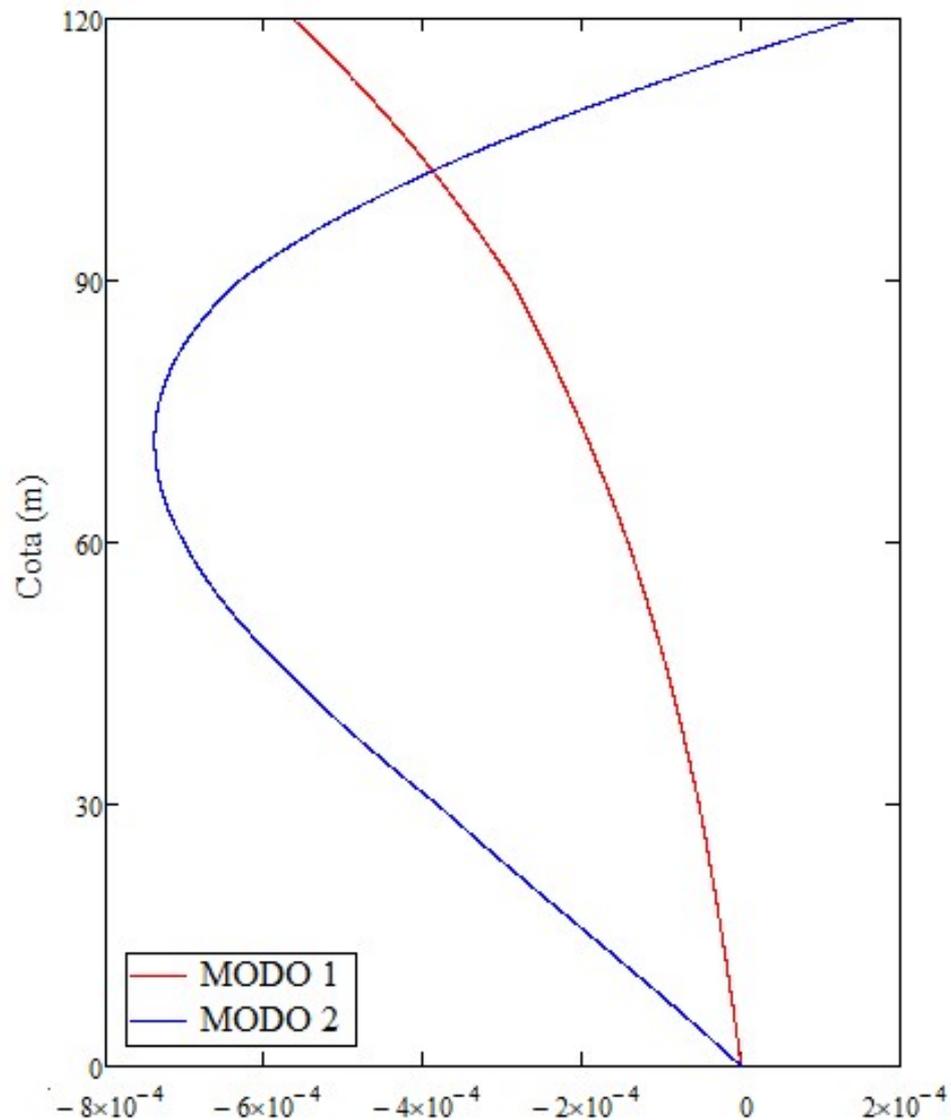
Figura 48 – Deslocamentos transversais à torre dos primeiros modos flexionais de vibração.



Fonte: Autor (2018).

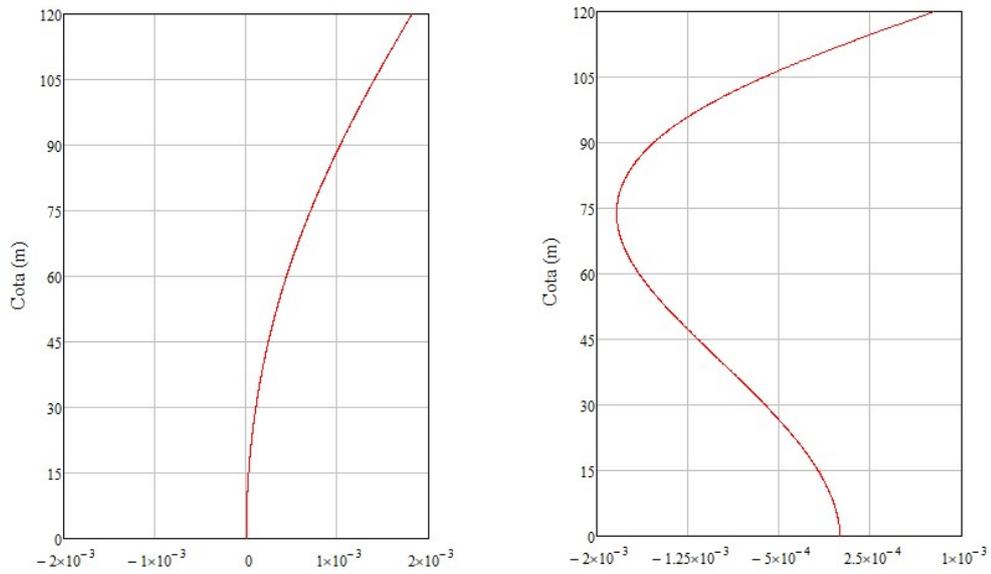
No estudo deste tipo de estruturas, a importância de se estudar a frequência fundamental é superior das demais, pois esta é mais provável de ocorrer ao longo da vida útil do equipamento. A intensidade das forças do vento cresce com a altura em relação ao nível do solo, o aumento dos deslocamentos horizontais à torre com relação à altura no 1º modo de vibração e a massa concentrada no topo da torre proveniente da nacelle (possui mesma ordem de grandeza da massa da torre) são fatores que contribuem para excitação do 1º modo de vibração da torre (LIMA, 2018). Em contrapartida, dificilmente a estrutura se encontra submetidas a carregamentos e condições que estimulem todas estas frequências de oscilação, tendo como significativo, em geral, apenas os 4 ou 5 primeiros modos.

Figura 49 – Rotações torcionais à torre dos dois primeiros modos torcionais de vibração.



Fonte: Autor (2018).

Conforme é demonstrado por Sirqueira (2008), através de uma análise harmônica, é possível determinar quais os modos de vibração que contribuem de forma mais significativa para a resposta dinâmica da estrutura, chegando-se a conclusão que, para este tipo de estruturas, a influência do primeiro modo de vibração é preponderante em relação aos demais. Com base neste estudo, pode-se dizer que a torre se comporta como uma viga engastada e livre. Na Figura 50 é ilustrado com mais destaque a configuração deformada da torre nos dois primeiros modos flexionais de vibração.

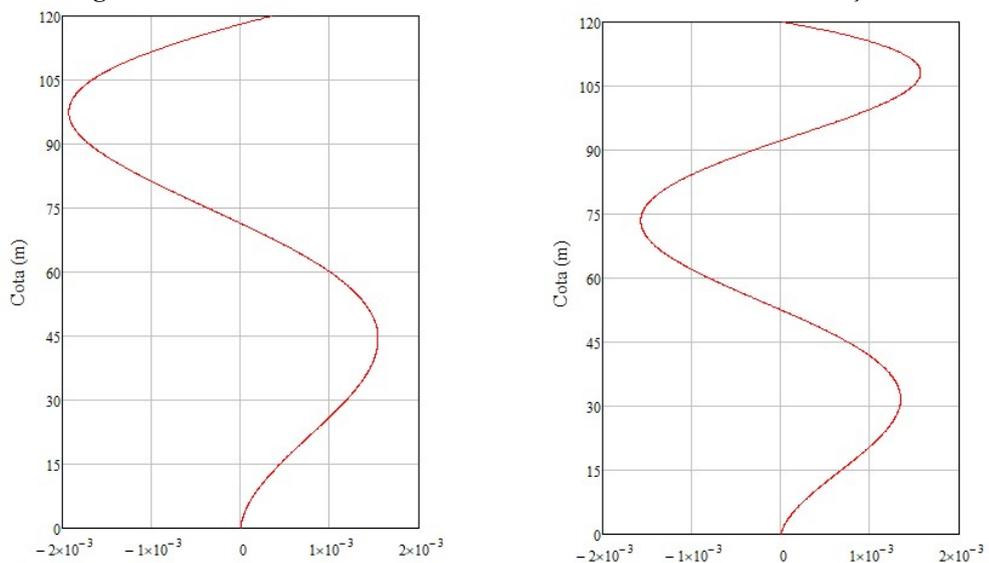
Figura 50 – Deslocamentos transversais à torre no 1º e 2º modo de vibração.

(a) 1º modo flexional de viração.

(b) 2º modo flexional de viração.

Fonte: Autor (2018).

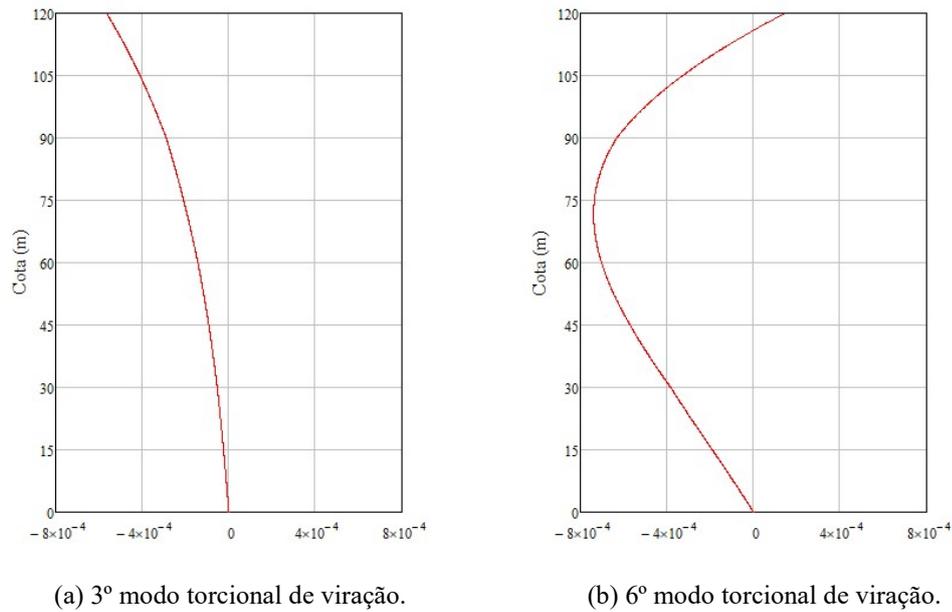
É interessante evidenciar que no quarto e no quinto modo de vibração (modos flexionais), o deslocamento no topo da torre, onde é instalado a nacela e demais equipamentos do aerogerador, é bem próximo de zero, como pode ser destacado na Figura 51. Com relação as rotações torcionais da torre, vale destacar que, por possuir uma geometria de uma estrutura cônica, de seção transversal circular e vazado, a torre possui uma elevada resistência a torção, reduzindo a probabilidade de se atingir os 2 primeiros modos torcionais (3º e 6º modo de vibração, respectivamente), salientados na Figura 52.

Figura 51 – Deslocamentos transversais à torre no 4º e 5º modo de vibração.

(a) 4º modo flexional de viração.

(b) 5º modo flexional de viração.

Fonte: Autor (2018).

Figura 52 – Rotações torcionais à torre no 3º e 6º modo de vibração.

Fonte: Autor (2018).

Apesar da influência primeiro modo de vibração ser significativamente superior aos demais modos, não se pode negligenciar a importância de analisar os outros modos de vibrações, como pode ser constatado por Guimarães (2013), que realizou simulações com intuito de estudar a eficácia de diferentes tipos de controle atuando em uma estrutura de uma torre de turbina eólica *offshore* (flutuante) modelada como um pêndulo invertido. Nesse estudo, as frequências naturais do sistema foram obtidas por meio de uma análise modal, concluindo-se que o modo associado à segunda frequência natural possuía maior influência na resposta, enquanto que o modo associado à primeira frequência natural possuía influência tão pequena que seu pico resulta numa ordem de grandeza muito abaixo de 10^{-8} . O mesmo raciocínio pode ser utilizado para os modos de vibração torcionais, que usualmente não são considerados nas análises deste tipo de estrutura, mas que dependendo da geometria da torre e dos demais elementos que a compõem, pode apresentar um efeito significante na estrutura.

Adicionalmente, uma das limitações dessa metodologia adotada para a determinação das frequências e dos modos de vibração é a impossibilidade de determinação dos modos de oscilação ovais (modos de ovalização) ao longo da estrutura, obtendo-se apenas os modos globais. Os modos de vibrações de flexão ou de torção globais possuem seus deslocamentos segundo um determinado eixo, enquanto que os modos de ovalização são modos de vibrações locais acoplados, nos quais há deslocamentos em mais de um eixo coordenado. Estes tipos de modos surgem devido à fina espessura da parede da torre, e na sua análise, podem ser eliminados ou posicionados em frequências superiores (ou seja, de menor importância para a

resposta da estrutura) com a utilização de enrijecedores transversais à torre (anéis de rigidez) (LIMA, 2018).

Para a investigação desses modos de ovalização, pode-se utilizar um modelo de cascas. Oliveira (2012) ressalta que a capacidade que um modelo de casca tem para determinar os modos de oscilação ovais pode tornar a tarefa de se analisar os modos de vibração de flexão globais da estrutura cada vez mais complicada, uma vez que à medida que o programa vai fornecendo os modos de vibração, a quantidade de modos de oscilação ovais que aparece entre os modos globais é cada vez maior.

A respeito da necessidade de análise dinâmica em uma edificação, conforme a ABNT NBR 6123 (1988), que trata das forças devidas ao vento em edificações, em edificações com período fundamental igual ou inferior a 1 segundo, pode-se desconsiderar as oscilações e respostas dinâmicas da estrutura, considerando apenas os efeitos estáticos. Porém, em edificações com período fundamental superior a 1 segundo e fracamente amortecidas, como é o caso da torre de estudo deste trabalho, podem ser apresentados importantes respostas dinâmicas de oscilação, e uma análise dinâmica deve ser feita.

Uma das importâncias na determinação das frequências e períodos de oscilação encontra-se na verificação de fadiga da estrutura, principalmente na fadiga causada na primeira frequência natural. Sempre que a vibração natural do material de uma máquina ou estrutura coincidir com a vibração externa, ocorre o fenômeno de ressonância, ampliando as deflexões, causando defeitos por fadiga e falhas estruturais por carregamento excessivo. O estado limite de fadiga deve ser tomado como o estado em que os ciclos repetidos de aumento e diminuição da tensão levam ao desenvolvimento de uma fenda por fadiga. Dentre as metodologias para essa análise de fadiga, destacam-se as estabelecidas na norma europeia de projeto de estruturas de aço – EN 1993-1-9 (2005).

Sendo assim, a determinação das frequências e períodos de oscilação são fundamentais para a solução de um dos problemas a serem enfrentados no projeto de torres esbeltas de aço para a sustentação de aerogeradores que é a vibração excessiva das pás e da torre que pode levar à fadiga dos materiais. Estas cargas e consequentes oscilações, com frequências dentro do conjunto das frequências naturais da estrutura, podem provocar a fadiga das subestruturas de suporte do gerador ou provoca a ressonância da estrutura, sendo capaz de levar ao colapso total da estrutura. Como tal, a previsão das frequências modais da estrutura é de extrema importância para o projeto adequado, uma construção e funcionamento eficientes das torres eólicas (OLIVEIRA, 2012).

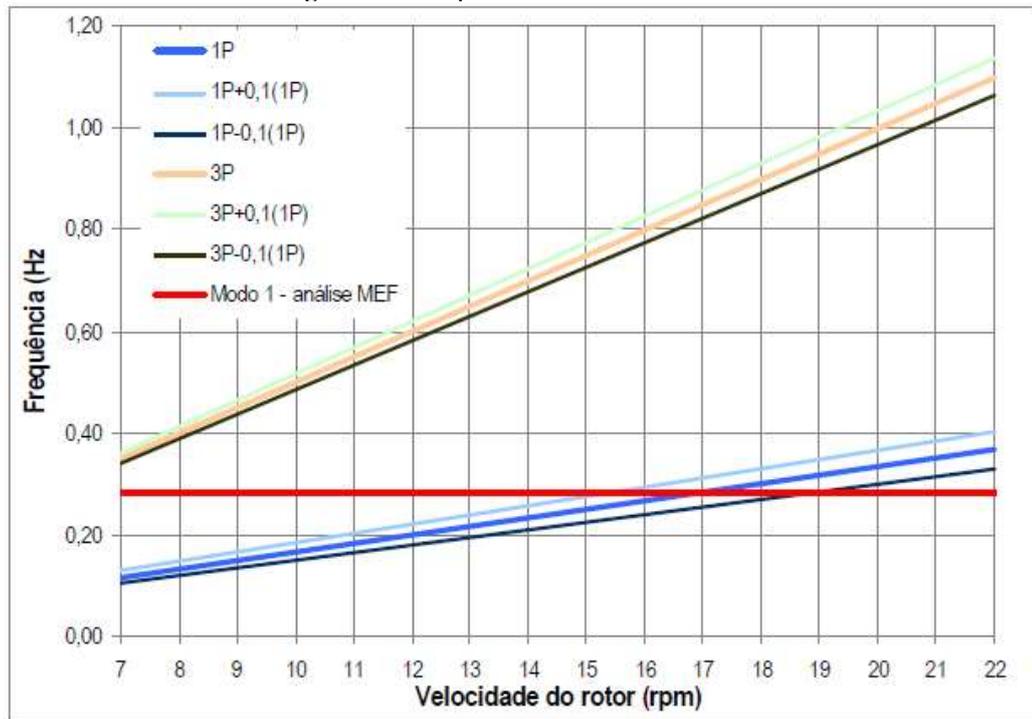
Conforme a ABNT NBR 6123 (1988), em geral as vibrações nas edificações são originadas por uma série de causas, entre elas o desprendimento cadenciado de vórtice, que está intimamente relacionado com as frequências de oscilação da estrutura. Segundo Lima (2018), o efeito dinâmico de desprendimento cadenciado de vórtices (vórtices de von Kármán) provoca movimentos transversais à direção do vento (*across-wind*) em certa frequência de desprendimento de um par de vórtices, que pode ser potencialmente preocupante quando esta se iguala a uma das frequências naturais da estrutura, dentro da faixa de velocidade de vento esperada, e este fenômeno pode ser particularmente nocivo em chaminés e torres cilíndricas metálicas. Assim como no caso da vibração na direção do vento (*along-wind*), tem-se especial atenção à eventualidade de excitação do primeiro modo de vibração da torre devido ao perfil de velocidade de vento, que segue a uma função crescente em relação ao nível geral do terreno.

O fenômeno de desprendimento de vórtices ocorre em trechos ao longo do comprimento da torre, formando as chamadas células de vórtices, mantendo-se constante a frequência de desprendimento em cada célula. Além disso, os efeitos dinâmicos do desprendimento cadenciado de vórtices são possíveis se a velocidade crítica for igual ou inferior à máxima velocidade média de vento (BLESSMANN, 2005).

Além do desprendimento cadenciado de vórtices, a ABNT NBR 6123 (1988) indica outros fenômenos que provocam efeitos dinâmicos em edificações esbeltas e flexíveis, como: efeitos de golpe, galope, drapejamento e energia contida na turbulência atmosférica. Para a análise de todos esses critérios, é essencial que se conheçam as frequências e modos de vibração da estrutura, mostrando ainda mais a relevância do tema abordado neste trabalho.

A análise de vibração livre da estrutura também possui uma elevada relevância para a comparação da primeira frequência natural do modelo de torre estudado com a frequência de excitação do rotor da nacela, evitando assim o problema de ressonância na estrutura. Lavassas et al. (2003) demonstram que a frequência natural da torre (0,60 Hz) em relação às frequências de excitação do rotor da turbina eólica (0,37 Hz e 0,73 Hz) é um critério importante de investigação da ressonância da estrutura.

Maiolino (2014) relata que no rotor objeto de seu estudo, o qual opera com rotações entre 6 rpm e 16 rpm, selecionou-se faixa de operação da torre entre 0,32 Hz e 0,36 Hz, garantindo rigidez à torre que proporcionasse uma frequência de 0,32 Hz. Loureiro (2014) executou o dimensionamento de uma torre eólica de 90 m, e em sua análise dinâmica, obteve a frequência fundamental da torre sendo 0,283 Hz, comparando com as frequências para o rotor empregado em diferentes períodos de oscilação, gerando uma faixa de operação com base nessas frequências, conforme é observado na Figura 53.

Figura 53 - Frequências na faixa de trabalho.

Fonte: Loureiro (2014).

A frequência conhecida como 1P (Figura 53) corresponde à frequência de rotação do rotor. Ademais, a passagem de uma das pás pela torre gera uma excitação em consequência do efeito de sombra, em que a frequência é dada pelo número de pás multiplicada pela frequência de rotação do rotor. Para uma turbina eólica com três pás, como foi a considerada no estudo de Loureiro (2014), a excitação devida à passagem das pás pela torre correspondente a 3P.

A linha vermelha representa a primeira frequência de vibração da torre, e essa frequência não pode ser coincidente com as frequências do rotor supracitadas. É especificado ainda que a frequência natural deve distar de, no mínimo, $\pm 10\%$ das frequências 1P e 3P para rotores com velocidade variável. Do ponto de vista aerodinâmico, essas forças de excitação são as mais críticas pois não podem ser evitadas.

Nos resultados obtidos nos modelos analisados por Lima (2011), atestou que as frequências naturais dos modelos analisados (0,60 Hz e 0,53 Hz) encontravam-se acima da frequência acima da frequência do rotor operando com velocidade de rotação de até 15 rotações por minuto (rpm), não havendo risco de ressonância, e podendo classificar como flexível, pelo critério de Hau (2006).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste item, é apresentada uma síntese das principais conclusões e considerações a respeito deste estudo, bem como, as sugestões para trabalhos futuros a serem desenvolvidos no tema deste trabalho.

5.1 Síntese do trabalho e conclusões

Este trabalho teve como objetivo a análise de estabilidade elástica e estudo do comportamento dinâmico por meio da determinação das frequências e dos modos de vibração de uma torre tubular de aço de 120 m de altura, com diâmetro e espessura das chapas variáveis ao longo da altura, que servem para a sustentação de aerogeradores de eixo horizontal.

Realizou-se uma revisão bibliográfica sobre os aerogeradores, descrevendo os tipos de aerogeradores existentes, bem como as principais partes que os compõem. Foram apresentados os principais tipos de torres utilizadas, apontado suas características, vantagens e desvantagens. Em seguida, abordaram-se alguns dos principais conceitos na análise de estruturas reticuladas, a discretização pelo método dos elementos finitos e a idealização do comportamento de barra dos elementos discretizados. A avaliação estrutural da torre foi executada pelo emprego da análise matricial de estruturas, com a aplicação do método da rigidez direta para a definição dos parâmetros inerentes às características geométricas da torre, e por fim, a utilização do método da superposição modal para a obtenção das respostas dinâmicas da estrutura. Todos os estudos foram realizados por meio de um algoritmo desenvolvido pelo próprio autor no *software* Mathcad 14.

A otimização e o estudo das torres de aço são de fundamental relevância para a engenharia nos dias de hoje, tendo em vista a crescente busca por fontes renováveis de energia e ampla difusão no aproveitamento da energia dos ventos. No cenário nacional, a geração por energia eólica vem ganhando maior participação na matriz energética, causando uma demanda crescente de torres mais altas e esbeltas, e conseqüentemente sujeitas a maiores efeitos dinâmicos, visando a construção de sistemas cada vez mais eficientes.

Dentro desse desenvolvimento nacional no aproveitamento da energia eólica, destacam-se os parques eólicos instalados no estado de Pernambuco, que se mostrou ser um local com um elevado potencial para a geração de energia eólica, recebendo diversos investimentos na instalação dos parques eólicos existentes, bem como projetos para a instalação futura de novos

parques, se tornando uma das principais matrizes energéticas do estado, em conjunto com as hidroelétricas.

Determinou-se, com base em um carregamento usual para este tipo de estrutura, os deslocamentos e rotações críticas no topo da torre, evidenciando as características de rigidez apresentadas pela estrutura, e verificando esses deslocamentos detectados com os valores permitidos por norma europeia, e por bom senso quanto às limitações de deslocamentos estabelecidas pelos fabricantes dos equipamentos da nacela.

Além das análises de estabilidade que são comumente feitas neste tipo de estruturas altas e esbeltas, é de suma importância a necessidade da caracterização dos parâmetros dinâmicos da torre, uma vez que este tipo de estrutura fica submetido aos diversos tipos de ações dinâmicas, e tais parâmetros são indispensáveis para a determinação das respostas dinâmicas da torre.

No problema simulado neste trabalho, concluiu-se que a influência do primeiro modo de vibração é preponderante em relação aos demais, e pode-se dizer que a torre se comporta como uma viga engastada e livre. Entretanto, não se deve negligenciar os estudos dos demais modos, como é observado por Guimarães (2013), que investigou as frequências de vibração de uma torre eólica flutuante (*offshore*), constatando-se que o modo associado à segunda frequência natural possuía maior influência na resposta da estrutura.

Na realização de projeto das torres, deve-se ter atenção quanto as dimensões finais da torre, em virtude das frequências e dos modos fundamentais de vibração, de modo a evitar a ressonância da estrutura ou a fadiga das subestruturas de suporte. O período de oscilação do primeiro modo de vibração obtido para esta torre foi da ordem de 3,385 s, sendo um valor consideravelmente apropriado, devido à altura, rigidez e esbeltez da estrutura. Para uma situação de projeto, é interessante reduzir esse período de oscilação, percebendo-se a necessidade de aparelhos de controle de vibração que façam com que as condições de projeto da torre sejam atendidas nas situações em que estas estejam submetidas a cargas dinâmicas.

O método numérico dos elementos finitos demonstrou-se bastante útil e preciso na avaliação do comportamento estrutural da torre eólica estudada. Sua utilização mostrou-se eficaz na previsão das análises estática, dinâmica e não linear, como pode ser demonstrado por Lima (2018), que utilizou um modelo estrutural via elementos finitos e comparou os resultados obtidos com um modelo de meio contínuo, resolvido mediante diferenças finitas, concluindo-se que os resultados obtidos são consistentes e muito próximos, o que garante a validade das técnicas numéricas implementadas. Portanto, o modelo representado por elementos finitos de barra pode ser utilizado como representativo do comportamento dinâmico da torre, e a metodologia adotada neste trabalho configura-se como uma boa representação da estrutural

real. É importante salientar que no modelo presente neste trabalho não se considerou o efeito de amortecimento da torre, analisando-se apenas a vibração livre da estrutura.

Finalmente, conclui-se que os resultados deste trabalho contêm contribuições de interesse prático na atualidade, uma vez que é eminente a ampliação da utilização de aerogeradores para a geração de energia elétrica não só no estado de Pernambuco, mas em todo o país, fornecendo dados e metodologias confiáveis para a obtenção de parâmetros indispensáveis para os projetos das torres.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Estudos futuros podem agregar no desenvolvimento e ampliação das análises realizadas neste trabalho, de modo a completá-las e modelar casos mais complexos. Em vista disso, estão apresentadas a seguir algumas sugestões para a elaboração de trabalhos futuros:

1. Analisar a estabilidade e as respostas dinâmicas da torre considerando o efeito sísmico, tendo em vista a ocorrência de sismos no estado de Pernambuco, provenientes de uma falha geológica que cruza de leste a oeste o estado;
2. Realizar o projeto executivo da torre, incluindo todo o detalhamento das ligações;
3. Desenvolver análises, semelhantes às expostas neste trabalho, aplicadas às torres de aerogeradores offshore;
4. Analisar um dispositivo de controle de vibração aplicado à torre e seu efeito na resposta dinâmica da estrutura;
5. Estudar, detalhadamente, a modelagem da ação do vento nas pás e a sua interação com a ação na torre, dada a importância desta força no resultado final;
6. Simular as condições do modelo considerando a fundação, e avaliando a interação solo x estrutura;
7. verificação do estado limite de fadiga para a torre.

REFERÊNCIAS

- ACCIOLY, M. M. L. **Aplicação de métodos de controle ótimo à redução de vibrações em edifícios submetidos à ação de cargas dinâmicas**. 149 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006.
- Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL). Banco de Informações de Geração (BIG): Capacidade de Geração do Estado PERNAMBUCO. ANEEL, 2016. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br>>. Acesso em: 22 maio 2016.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – NORMA BRASILEIRA. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988. 66p.
- ATLAS EÓLICO E SOLAR DE PERNAMBUCO. **Capítulo III - O Estado de Pernambuco e Capítulo VII - O Potencial Eólico de Pernambuco**. ATLAS..., 2017. Disponível em: <<http://www.atlaseolicosolar.pe.gov.br/>>. Acesso em: 22 maio 2018.
- BAZEOS, N.; HATZIGEORGIOU, G. D.; HONDROS, I. D.; KARAMANEAS, H.; KARABALIS, D. L.; BESKOS, D. E. Static, seismic and stability analyses of a prototype wind turbine steel tower. **Engineering Structures**, v. 24, n. 8, p. 1015-1025, 2002.
- BLESSMANN, Joaquim. **Introdução ao estudo das ações dinâmicas do vento**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005. 282 p. ISBN 85-7025-802-X.
- Centro de Referência para as Energias Solar e Eólica Sérgio de S. Brito (CRESESB). Tipos de Aerogeradores para Geração de Energia Elétrica. 2008. Disponível em: <<http://www.cresesb.cepel.br>>. Acesso em: 23 maio 2018.
- DANISH WIND INDUSTRY ASSOCIATION. DWIA. By Soren Krohn. **Wind Turbine Towers**. 2003. Disponível em: < <http://xn--drmstrre-64ad.dk/wp-content/wind/miller/windpower%20web/en/tour/wtrb/tower.htm> >. Acesso em: 24 maio 2018.
- DELLEZZOPOLLES Jr., C. F. **Análise dinâmica de torres de energia eólica**. 83 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 10025-2**: Hot rolled products of structural steels – Part 2: Technical delivery conditions for non-alloy structural steels. Brussels, 2004.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1993-1-9**: Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-9: Fatigue. Brussels, 2005.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1993-3-2**: Eurocode 3: Design of steel structures – Part 3-2: Towers, masts and chimneys – Chimneys. Brussels, 2006.
- GERE, J. M.; WEAVER Jr., W. **Análise matricial de estruturas reticuladas**. Nova Iorque: Editora Springer, 1990.
- GLOBAL WIND ENERGY COUNCIL (GWEC). **Global statistics**. Brussels, 2018. Disponível em: <<http://gwec.net/global-figures/graphs/>>. Acesso em: 16 jun. 2018.

GUIMARÃES, P. V. B. **Controle semiativo de modelo de pêndulo invertido para aerogeradores offshore**. 101 p. Tese (Mestrado em Integridade de Materiais da Engenharia) - Faculdade gama e faculdade de tecnologia da universidade de Brasília, Brasília, 2016.

HANDLEMAN, C. **With 50% Capacity Factors, Great Plains Wind is Ready for Prime Time**. 2014. Disponível em: <<https://handlemanpost.wordpress.com/2014/01/22/with-50-capacity-factors-wind-has-reached-the-tipping-point/>>. Acesso em: 24 maio 2018.

HANSEN, M. O. L.; SORENSEN, J. N.; VOUTSINAS, S.; SORENSEN, N.; MADSEN, H. A. State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 42, n. 4, p. 285–330, 2006.

HAU, Erich. **Wind Turbines: Fundamentals, Technologies, Application, Economics**. 2 ed. Munich (Germany): Springer, 2006. 783 p.

HUMAR, J. L. **Dynamics of Structures**. 2 ed. Ottawa (Canada): A.A. Balkema Publishers, Lisse, 2002. 967 p.

LAVASSAS, I.; NIKOLAIDIS, G.; ZERVAS, P.; EFTHIMIOU, E.; DOUDOUMIS, I. N.; BANIOTOPOULOS, C. C. Analysis and design of the prototype of a steel 1-MW Wind turbine tower. **Engineering Structures**, v. 25, p. 1097-1106, 2003.

LIMA, D. M. **Análise da estabilidade elástica, análise dinâmica e controle de vibração em torres tubulares de aço para aerogeradores de eixo horizontal**. 320 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Centro de Tecnologia e Geociência, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

LIMA, J. B. C. A. **Contribuições para otimização estrutural de torres tubulares de aço para turbinas eólicas**. 149 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil – Área de Concentração: Estruturas) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

LOUREIRO, M. A. F. **Dimensionamento de torre eólica de 90m**. 36 f. Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra - Departamento de Engenharia Civil, Coimbra, 2014.

MAIOLINO, P. **Análise dinâmica de turbina eólica offshore do tipo monocoluna**. 114 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

MARCUCCI, F. História da energia eólica e suas utilizações. 2017. Disponível em: <<https://fabricioengmec.blogspot.com>>. Acesso em: 16 jun. 2018.

MARTHA, L. F. **Métodos básicos da análise de estruturas**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Elsevier, 2010.

MELO, E. Fonte eólica de energia: aspectos de inserção, tecnologia e competitividade. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 27, n. 77, p. 125-142, 2013.

MOREIRA, D. F. **Análise Matricial das Estruturas**. Rio de Janeiro: Editora da USP, 1977.

MURTAGH, P. J.; BASU, B.; BRODERICK, B. M. Simple models for natural frequencies and mode shapes of towers supporting utilities. **Computers & Structures**, p. 1745-1750, 2004.

OLIVEIRA, L. F. M. P. **Análise do comportamento dinâmico de torres de geradores eólicos**. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2012.

SANTOS, N. A. A. S. **Otimização de torre de aço para aerogerador eólico**. 114 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Área de Concentração: Estruturas). Faculdade de Tecnologia e Ciências, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

SIRQUEIRA, A. S. **Comportamento estrutural de torres de aço para suporte de turbinas eólicas**. 112f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Tecnologia e Ciências, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SORIANO, H. L. **Análise de estruturas – Formulação matricial e implementação computacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2005.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. ISBN 85-216-0246-4.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. 2 ed. Nova Iorque: McGRAW-HILL, 1963.

VANDERBILT, M. D. **Matrix Structural Analysis**. New York: Quantam Publishers, 1974.

WANG, J.; QIN, D.; LIM, T. C. Dynamic analysis of horizontal axis wind turbine by thinwalled beam theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, n. 17, p. 3565-3586, 2010.

World Wind Energy Association (WWEA). **Statistics of World Wind Energy Association**. Bonn (Alemanha), 2018. Disponível em: <<http://www.wwindea.org>>. Acesso em: 22 maio 2018.

APÊNDICE A – CÓDIGO IMPLEMENTADO

Características da torre

Altura da torre:	$L_t := 120$
Número de subdivisões da torre:	$n := 8$
Altura dos elementos discretizados:	$l_{\text{el}} := \frac{L_t}{n} = 15$
Graus de liberdade da torre:	$m := 4 \cdot n = 32$
Diâmetro da base da torre:	$D_{\text{base}} := 6.5$
Diâmetro do topo da torre:	$D_{\text{topo}} := 3.5$

Propriedades do aço S355 (EN 10025-2, 2004)

Módulo de elasticidade:	$E := 205 \cdot 10^9$
Coefficiente de Poisson:	$\nu := 0.3$
Módulo de elasticidade transversal:	$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = 7.885 \times 10^{10}$
Massa específica:	$\rho := 7850$
Peso específico (acrécimo de 5% para considerar todos os equipamentos ao longo da torre, como por exemplo, escadas, plataformas internas, etc.):	$\gamma_{\text{equip}} := 1.05$

Forças externas aplicadas à torre

Momento aplicado no topo:	$M_H := 2000000$
Força horizontal aplicada no topo:	$F_H := 1000000$
Força vertical aplicada no topo:	$F_V := 2000000$
Carga distribuída ao longo da torre:	$q := 1000$

Propriedades da nacele

Massa da nacele:	$M_{\text{nac}} := 200000$
Dimensões do paralelepípedo equivalente à nacele:	$a_{\text{nac}} := 12$ $h_{\text{nac}} := 5$ $b_{\text{nac}} := 4$
Momento de inercia da nacele à flexão:	$I_{\text{nac}} := \frac{M_{\text{nac}}}{12} \cdot (a_{\text{nac}}^2 + 4 \cdot h_{\text{nac}}^2)$
Momento de inercia da nacele à torção:	$I_{\text{nac}_t} := \frac{M_{\text{nac}}}{12} \cdot (a_{\text{nac}}^2 + b_{\text{nac}}^2)$

Características dos flanges

Espessura dos flanges: $\text{efl} := \text{for } i \in 0..n-1$

$$\left| \begin{array}{l} \text{efl}_i \leftarrow 0.1016 \text{ if } i = \frac{n}{4} - 1 \vee i = \frac{2 \cdot n}{4} - 1 \vee i = n - 1 \\ \text{efl}_i \leftarrow 0.0889 \text{ if } i = \frac{n \cdot 3}{4} - 1 \\ \text{efl}_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

Largura dos flanges: $\text{Lfl} := \text{for } i \in 0..n-1$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Lfl}_i \leftarrow 0.28 \text{ if } i = \frac{n}{4} - 1 \vee i = \frac{2 \cdot n}{4} - 1 \\ \text{Lfl}_i \leftarrow 0.24 \text{ if } i = \frac{n \cdot 3}{4} - 1 \vee i = n - 1 \\ \text{Lfl}_i \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

Reações de engastamento perfeito

Momento fletor: $M_f := \frac{q \cdot l^2}{12}$

Esforço cortante: $V_f := q \cdot \frac{l}{2}$

Vetores de dimensões dos trechos discretizados

Vetor de diâmetros: $\text{diam} := \text{for } i \in 0..n$

$$\left| \begin{array}{l} \text{diam}_i \leftarrow D_{\text{base}} - \frac{D_{\text{base}} - D_{\text{topo}}}{L_t} \cdot i \\ \text{diam} \end{array} \right.$$

Vetor de espessura das chapas: $\text{esp} := \text{for } j \in 0..n-1$

$$\left| \begin{array}{l} \text{esp}_j \leftarrow 0.0508 \text{ if } j \cdot 1 < 30 \\ \text{esp}_j \leftarrow 0.04445 \text{ if } j \cdot 1 < 45 \wedge j \cdot 1 \geq 30 \\ \text{esp}_j \leftarrow 0.041275 \text{ if } j \cdot 1 < 60 \wedge j \cdot 1 \geq 45 \\ \text{esp}_j \leftarrow 0.0381 \text{ if } j \cdot 1 < 90 \wedge j \cdot 1 \geq 60 \\ \text{esp}_j \leftarrow 0.03175 \text{ if } j \cdot 1 \geq 90 \\ \text{esp} \end{array} \right.$$

Cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez

Fator de cisalhamento: $f := 2$

Coefficientes:

$Kr := \text{for } i \in 0..n-1$

$$\begin{aligned}
 \text{Diam}(z) &\leftarrow \left(\frac{1-z}{1}\right) \cdot (\text{diam}_i - \text{diam}_{i+1}) + \text{diam}_{i+1} \\
 A(z) &\leftarrow \pi \cdot \text{esp}_i \cdot \text{Diam}(z) \\
 I(z) &\leftarrow \frac{\pi}{64} \cdot \left[(\text{Diam}(z) + \text{esp}_i)^4 - (\text{Diam}(z) - \text{esp}_i)^4 \right] \\
 \text{fi} &\leftarrow \text{identity}(2) - \text{identity}(2) \\
 \text{fi}_{0,0} &\leftarrow \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{E \cdot I(z)} dz + \int_0^1 f \cdot \left(\frac{-1}{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{G \cdot A(z)} dz \\
 \text{fi}_{1,1} &\leftarrow \int_0^1 \left(\frac{-z}{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{E \cdot I(z)} dz + \int_0^1 f \cdot \left(\frac{-1}{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{G \cdot A(z)} dz \\
 \text{fi}_{0,1} &\leftarrow \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{1}\right) \cdot \left(\frac{-z}{1}\right) \cdot \frac{1}{E \cdot I(z)} dz + \int_0^1 f \cdot \left(\frac{-1}{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{G \cdot A(z)} dz \\
 \text{fi}_{1,0} &\leftarrow \text{fi}_{0,1} \\
 \text{Kr}_{i,0} &\leftarrow (\text{fi}^{-1})_{0,0} \\
 \text{Kr}_{i,1} &\leftarrow (\text{fi}^{-1})_{1,1} \\
 \text{Kr}_{i,2} &\leftarrow (\text{fi}^{-1})_{0,1} \\
 \text{Kr}_{i,3} &\leftarrow \frac{\text{Kr}_{i,0} + \text{Kr}_{i,2}}{1} \\
 \text{Kr}_{i,4} &\leftarrow \frac{\text{Kr}_{i,1} + \text{Kr}_{i,2}}{1} \\
 \text{Kr}_{i,5} &\leftarrow \frac{\text{Kr}_{i,3} + \text{Kr}_{i,4}}{1} \\
 \text{Kr}_{i,6} &\leftarrow \int_0^1 \frac{(-1)^2}{E \cdot A(z)} dz \\
 \text{Kr}_{i,6} &\leftarrow (\text{Kr}_{i,6})^{-1} \\
 J(z) &\leftarrow 2 \cdot I(z) \\
 \text{Kr}_{i,7} &\leftarrow \int_0^1 \frac{(-1)^2}{G \cdot J(z)} dz \\
 \text{Kr}_{i,7} &\leftarrow (\text{Kr}_{i,7})^{-1} \\
 Kr &
 \end{aligned}$$

Vetor do peso próprio da torre

P := for i ∈ 0..n - 1

$$\left| \begin{array}{l} \text{Diam}(z) \leftarrow \left(\frac{1-z}{1} \right) \cdot (\text{diam}_i - \text{diam}_{i+1}) + \text{diam}_n \\ \text{Ae}(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_i \cdot \text{Diam}(z) \\ \text{ppe}(z) \leftarrow \text{Ae}(z) \cdot \rho \cdot 9.807 \\ \text{P}_i \leftarrow \gamma_{\text{equip}} \cdot \int_{i:1}^{(i+1):1} \text{ppe}(z) \, dz \\ \text{P}_n \leftarrow \text{FV} \\ \text{P} \end{array} \right.$$

Vetor de esforços axiais devido ao peso próprio

NN := for j ∈ 0..n

$$\text{NN}_j \leftarrow \sum_{i=j}^n \text{P}_i$$

Cálculo dos coeficientes das matrizes de rigidez geométrica e de massa

Ativador da matriz geométrica: $\text{Kg} := 1$

Ativador da matriz de massa $\text{KKm} := 1$

Coefficientes:

KM := for j ∈ 0..n - 1

$$\left| \begin{array}{l} \text{NNe}(z) \leftarrow \left(\frac{\text{NN}_j - \text{NN}_{j+1}}{1} \right) \cdot z + \text{NN}_{j+1} \\ \text{KM}_{j,0} \leftarrow \text{Kg} \cdot \int_0^1 \text{NNe}(z) \cdot \left(\frac{-1}{1} \right)^2 \, dz \\ \text{KM}_{j,1} \leftarrow \text{Kg} \cdot \int_0^1 \text{NNe}(z) \cdot \left(6 \cdot \frac{z^2}{1^3} - 6 \cdot \frac{z}{1^2} \right)^2 \, dz \\ \text{KM}_{j,2} \leftarrow \text{Kg} \cdot \int_0^1 \text{NNe}(z) \cdot \left(6 \cdot \frac{z^2}{1^3} - 6 \cdot \frac{z}{1^2} \right) \cdot \left(-1 + \frac{4z}{1} - 3 \cdot \frac{z^2}{1^2} \right) \, dz \\ \text{KM}_{j,3} \leftarrow \text{Kg} \cdot \int_0^1 \text{NNe}(z) \cdot \left(6 \cdot \frac{z^2}{1^3} - 6 \cdot \frac{z}{1^2} \right) \cdot \left(2 \cdot \frac{z}{1} - 3 \cdot \frac{z^2}{1^2} \right) \, dz \\ \text{KM}_{j,4} \leftarrow \text{Kg} \cdot \int_0^1 \text{NNe}(z) \cdot \left(-1 + \frac{4z}{1} - 3 \cdot \frac{z^2}{1^2} \right)^2 \, dz \end{array} \right.$$

$$\text{KM}_{j,5} \leftarrow \text{Kg} \cdot \int_0^1 \text{NNe}(z) \cdot \left(-1 + \frac{4z}{1} - 3 \cdot \frac{z^2}{1^2} \right) \cdot \left(2 \cdot \frac{z}{1} - 3 \cdot \frac{z^2}{1^2} \right) dz$$

$$\text{KM}_{j,6} \leftarrow \text{Kg} \cdot \int_0^1 \text{NNe}(z) \cdot \left(2 \cdot \frac{z}{1} - 3 \cdot \frac{z^2}{1^2} \right)^2 dz$$

$$\text{Diam}(z) \leftarrow \left(\frac{1-z}{1} \right) \cdot (\text{diam}_j - \text{diam}_{j+1}) + \text{diam}_{j+1}$$

$$\text{A}(z) \leftarrow \pi \cdot \text{esp}_j \cdot \text{Diam}(z)$$

$$\text{KM}_{j,7} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{1} \right)^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,8} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{1} \right) \cdot \left(\frac{z}{1} \right) dz$$

$$\text{KM}_{j,9} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,10} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left(\frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right)^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,11} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right] \cdot \left(\frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right) dz$$

$$\text{KM}_{j,12} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right]^2 dz$$

$$\text{KM}_{j,13} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left(-z + 2 \cdot \frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right) \cdot \left(\frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right) dz$$

$$\text{KM}_{j,14} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left(-z + 2 \cdot \frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right) \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right] dz$$

$$\text{KM}_{j,15} \leftarrow \text{KKm} \cdot \int_0^1 \rho \cdot \text{A}(z) \cdot \left(-z + 2 \cdot \frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right)^2 dz$$

$$KM_{j,16} \leftarrow KKm \cdot \int_0^1 \rho \cdot A(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right]^2 dz$$

$$KM_{j,17} \leftarrow KKm \cdot \int_0^1 \rho \cdot A(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right] \cdot \left(-z + 2 \cdot \frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right) dz$$

$$KM_{j,18} \leftarrow KKm \cdot \int_0^1 \rho \cdot A(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right] \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right] dz$$

$$KM_{j,19} \leftarrow KKm \cdot \int_0^1 \rho \cdot A(z) \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^3 \right] \cdot \left(\frac{z^2}{1} - \frac{z^3}{1^2} \right) dz$$

$$J(z) \leftarrow \frac{2 \cdot \pi}{64} \cdot \left[(\text{Diam}(z) + \text{esp}_j)^4 - (\text{Diam}(z) - \text{esp}_j)^4 \right]$$

$$KM_{j,20} \leftarrow KKm \cdot \int_0^1 \rho \cdot J(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{1} \right)^2 dz$$

$$KM_{j,21} \leftarrow KKm \cdot \int_0^1 \rho \cdot J(z) \cdot \left(1 - \frac{z}{1} \right) \cdot \left(\frac{z}{1} \right) dz$$

$$KM_{j,22} \leftarrow KKm \cdot \int_0^1 \rho \cdot J(z) \cdot \left(\frac{z}{1} \right)^2 dz$$

$$KM_{j,23} \leftarrow 0$$

$$KM_{j,23} \leftarrow KKm \cdot \left[\rho \cdot \left[\left(\text{Lfl}_j - \frac{\text{esp}_j}{2} \right) \cdot \text{efl}_j + \left(\text{Lfl}_{j+\frac{n}{4}} - \frac{\text{esp}_{j+1}}{2} \right) \cdot \text{efl}_{j+\frac{n}{4}} \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot \text{Diam}(1) \right] \text{ if } (j+1) \cdot 1 \leq 90$$

$$KM_{j,23} \leftarrow KKm \cdot \left[\rho \cdot \left(\text{Lfl}_j - \frac{\text{esp}_j}{2} \right) \cdot \text{efl}_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \text{Diam}(1) \right] \text{ if } (j+1) \cdot 1 = 120$$

$$KM_{j,24} \leftarrow KKm \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot KM_{j,23} \cdot \left[\left(\frac{\text{Diam}(1) + \text{esp}_j}{2} \right)^2 - \left(\frac{\text{Diam}(1) - \text{esp}_j}{2} \right)^2 \right] \right]$$

$$KM_{j,25} \leftarrow KKm \cdot \left[\frac{KM_{j,24}}{2} + \frac{1}{12} \cdot KM_{j,23} \cdot \left(\text{efl}_j + \text{efl}_{j+\frac{n}{4}} \right)^2 \right] \text{ if } (j+1) \cdot 1 \leq 90$$

$$KM_{j,25} \leftarrow KKm \cdot \left[\frac{KM_{j,24}}{2} + \frac{1}{12} \cdot KM_{j,23} \cdot \left(\text{efl}_j \right)^2 \right] \text{ if } (j+1) \cdot 1 = 120$$

KM

Montagem da matriz de rigidez tangencial global

```

Ke := | W ← identity(m) - identity(m)
      | for i ∈ 0..m - 1
      |   for j ∈ 0..m - 1
      |     for k ∈ 0..n - 1
      |       if i = j                                     if i < n - 1
      |         | Wi,j ← (Kri,6 + Kri+1,6 - KMi,0 - KMi+1,0)
      |         | Wi,j-1 ← -(Kri,6 - KMi,0) if j > 0
      |         | Wi,j+1 ← -(Kri+1,6 - KMi+1,0)
      |       if i = j                                     if i = n - 1
      |         | Wi,j ← (Kri,6 - KMi,0)
      |         | Wi,j-1 ← -(Kri,6 - KMi,0) if j > 0
      |       if i = j                                     if i > n - 1 ∧ i < 2n - 1
      |         | Wi,j ← Kri-n,7 + Kri-n+1,7
      |         | Wi,j+1 ← -Kri-n+1,7
      |         | Wi,j-1 ← -Kri-n,7 if i > n
      |       if i = j                                     if i = 2n - 1
      |         | Wi,j ← Kri-n,7
      |         | Wi,j-1 ← -Kri-n,7 if j > n
      |       if i = j                                     if i > 2n - 1 ∧ i < 3n - 1
      |         | Wi,j ← Kri-2n,1 + Kri-2n+1,0 - KMi-2n,6 - KMi-2n+1,4
      |         | Wi,j-1 ← (Kri-2n,2 - KMi-2n,5) if i > 2n
      |         | Wi,j+1 ← (Kri-2n+1,2 - KMi-2n,5)
      |         | Wi,i+n+1 ← -(Kri-2n+1,3 - KMi-2n,2)
      |         | Wi,i+n-1 ← (Kri-2n,4 - KMi-2n+1,3) if i > 2n
      |         | Wi,i+n ← (-Kri-2n,4 + Kri-2n+1,3) + KMi-2n,3 - KMi-2n+1,2
      |       if i = j                                     if i = 3n - 1
      |         | Wi,j ← (Kri-2n,1 - KMi-2n,6)
      |         | Wi,j-1 ← (Kri-2n,2 - KMi-2n,5) if n ≠ 1
      |         | Wi,m-1 ← -(Kri-2n,4 - KMi-2n,3)
      |         | Wi,m-2 ← (Kri-2n,4 - KMi-2n,3) if n ≠ 1

```

```

if i = j                                     if i > 3·n - 1 ∧ i < m - 1
|
| Wi,j ← Kri-3·n,5 + Kri-3·n+1,5 - KMi-3·n,1 - KMi-3·n+1,1
| Wi,j+1 ← -(Kri-3·n+1,5 - KMi-3·n+1,1)
| Wi,j-1 ← -(Kri-3·n,5 - KMi-3·n,1) if j > 3·n
| Wi,i-n+1 ← (Kri-3·n+1,4 - KMi-3·n+1,3)
| Wi,i-n-1 ← -(Kri-3·n,3 - KMi-3·n,2) if i > 3·n
| Wi,i-n ← (-Kri-3·n,4 + Kri-3·n+1,3) + KMi-3·n,3 - KMi-3·n+1,2
if i = j                                     if i = m - 1
|
| Wi,j ← (Kri-3·n,5 - KMi-3·n,1)
| Wi,j-1 ← -(Kri-3·n,5 - KMi-3·n,1) if n ≠ 1
| Wi,j-n ← -(Kri-3·n,4 - KMi-3·n,3)
| Wi,j-n-1 ← -(Kri-3·n,3 - KMi-3·n,2) if n ≠ 1
W

```

Vetor de forças nodais da estrutura no sistema global de coordenadas

```

Fe := for i ∈ 0..m - 1
|
| Qi,0 ← FV if i = n - 1
| Qi,0 ← MH - Mf if i = 3·n - 1
| Qi,0 ← 2·Vf if i > 3·n - 1 ∧ i < m - 1
| Qi,0 ← Vf + FH if i = m - 1
| Qi,0 ← 0 otherwise
Q

```

Cálculo dos deslocamentos e rotações dos nós

$$d := Ke^{-1} \cdot Fe$$

Montagem da matriz de massa global

```

Me := γequip · S ← identity(m) - identity(m)
for i ∈ 0..m - 1
for j ∈ 0..m - 1
|
| if i = j                                     if i < n - 1
| | Si,j+1 ← KMi+1,8
| | Si,j-1 ← KMi,8 if j > 0
| | Si,j ← (KMi,9 + KMi+1,7 + KMi,23)
if i = j                                     if i = n - 1
| | Si,j ← KMi,9 + Mnac + KMi,23
| | Si,j-1 ← KMi,8 if j > 0

```

```

if i = j                                     if i > n - 1 ∧ i < 2·n - 1
| Si,j ← KMi-n,22 + KMi-n+1,20 + KMi-n,24
| Si,j+1 ← KMi-n+1,21
| Si,j-1 ← KMi-n,21 if i > n
if i = j                                     if i = 2·n - 1
| Si,j ← KMi-n,22 + Inact + KMi-n,24
| Si,j-1 ← KMi-n,21 if j > n
if i = j                                     if i > 2n - 1 ∧ i < 3·n - 1
| Si,j ← KMi-2n,10 + KMi-2n+1,15 + KMi-2n,25
| Si,j-1 ← KMi-2n,13 if j > 2n
| Si,j+1 ← KMi-2n+1,13
| Si,i+n ← -KMi-2n,11 - KMi-2n+1,17
| Si,i+n-1 ← -KMi-2n,19 if i > 2·n
| Si,i+n+1 ← -KMi-2n+1,14
if i = j                                     if i = 3·n - 1
| Si,j ← KMi-2n,10 + Inac + KMi-2n,25
| Si,j-1 ← KMi-2n,13 if n ≠ 1
| Si,m-1 ← -KMi-2n,11
| Si,m-2 ← -KMi-2n,19 if n ≠ 1
if i = j                                     if i > 3·n - 1 ∧ i < m - 1
| Si,j ← KMi-3·n,12 + KMi-3·n+1,16 + KMi-3·n,23
| Si,j+1 ← KMi-3·n+1,18
| Si,j-1 ← KMi-3·n,18 if j > 3·n
| Si,i-n+1 ← -KMi-3·n+1,19
| Si,i-n-1 ← -KMi-3·n,14 if i > 3n
| Si,i-n ← -KMi-3·n,11 - KMi-3·n+1,17
if i = j                                     if i = m - 1
| Si,j ← KMi-3·n,12 + Mnac + KMi-3·n,23
| Si,j-1 ← KMi-3·n,18 if n ≠ 1
| Si,j-n ← -KMi-3·n,11
| Si,j-n-1 ← -KMi-3·n,14 if n ≠ 1

```

S

Diagonalização da matriz de massa

Autovetores da matriz de massa:

$\varphi := \text{eigenvecs}(\text{Me})$

Matriz de massa diagonalizada (autovalores):

$\text{Mediag} := \varphi^T \cdot \text{Me} \cdot \varphi$

Matriz dinâmica inversa

Raiz da matriz de massa diagonalizada: $M_{raiz} :=$ for $i \in 0..m-1$
 for $j \in 0..m-1$

$$\left| \begin{array}{l} M_{raiz}_{i,j} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_{diag}_{i,j}}} \text{ if } i=j \\ M_{raiz}_{i,j} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

Matriz dinâmica inversa: $D := M_{raiz} \cdot \varphi^T \cdot K e \cdot \varphi \cdot M_{raiz}$

Diagonalização da matriz dinâmica inversa

Autovetores da matriz dinâmica inversa: $\psi := \text{eigenvecs}(D)$

Matriz dinâmica diagonalizada (autovalores): $\omega_2 := \psi^T \cdot D \cdot \psi$

Matriz de transformação ordenada da matriz dinâmica inversa:

$$\psi_{aux} := \left| \begin{array}{l} \psi_{aux} \leftarrow \text{identity}(m) - \text{identity}(m) \\ \text{for } k \in 0..m-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{cont} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..m-1 \\ \quad \text{cont} \leftarrow \text{cont} + 1 \text{ if } \omega_{2,k,k} > \omega_{2,i,i} \\ \psi_k \leftarrow \text{cont} \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 0..m-1 \\ \quad \text{for } j \in 0..m-1 \\ \quad \quad \psi_{aux,j,\psi_i} \leftarrow \psi_{j,i} \end{array} \right.$$

Matriz espectral ordenada: $\omega_2 := \psi_{aux}^T \cdot D \cdot \psi_{aux}$

Frequências angulares

Frequências angulares naturais: $\omega :=$ for $i \in 0..m-1$
 $\omega_i \leftarrow \sqrt{\omega_{2,i,i}}$

Frequências de vibração: $\text{freq} :=$ for $i \in 0..m-1$
 $\text{freq}_i \leftarrow \frac{\omega_i}{2 \cdot \pi}$

Períodos: $T :=$ for $i \in 0..m-1$
 $T_i \leftarrow \frac{1}{\text{freq}_i}$

Matriz modal ponderada: $\Phi e := M_{raiz} \cdot \psi_{aux}$

Modos de vibração flexionais

$$u_{\text{mod}} := \varphi \cdot \Phi e$$

$$u_{\text{modos}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..m-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} u_{\text{modos}}_{0,k} \leftarrow 0 \\ u_{\text{modos}}_{n+1,k} \leftarrow 0 \end{array} \right. \\ \quad \text{for } i \in 1..n \\ \quad \quad \text{for } j \in 0..m-1 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} u_{\text{modos}}_{i,j} \leftarrow u_{\text{mod}}_{i-1+2 \cdot n,j} \\ u_{\text{modos}}_{i+n+1,j} \leftarrow u_{\text{mod}}_{i-1+3 \cdot n,j} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$N_{\text{pontos}} := 20$$

$$Niv := \text{for } i \in 0..n \cdot (N_{\text{pontos}} - 1)$$

$$Niv_i \leftarrow i \frac{Lt}{n \cdot (N_{\text{pontos}} - 1)}$$

$$\text{Modos} := \left| \begin{array}{l} \theta_i(\xi, 1) \leftarrow (-\xi + 2 \cdot \xi^2 - \xi^3) \cdot 1 \\ \theta_f(\xi, 1) \leftarrow (\xi^2 - \xi^3) \cdot 1 \\ v_i(\xi) \leftarrow (1 - 3 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi^3) \\ v_f(\xi) \leftarrow (3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi^3) \\ \text{for } k \in 0..2 \cdot n - 1 \\ \quad \text{for } i \in 0..n - 1 \\ \quad \quad \text{for } j \in 1..N_{\text{pontos}} \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} \xi_j \leftarrow \frac{j-1}{N_{\text{pontos}} - 1} \\ \text{Modos}_{j-1+i \cdot (N_{\text{pontos}} - 1), k} \leftarrow \theta_i(\xi_j, 1) \cdot u_{\text{modos}}_{i,k} + \theta_f(\xi_j, 1) \cdot u_{\text{modos}}_{i+1,k} + \\ \text{Modos}_{j-1+i \cdot (N_{\text{pontos}} - 1), k} \leftarrow (-v_i(\xi_j)) \cdot u_{\text{modos}}_{n+1+i,k} + (-v_f(\xi_j)) \cdot u_{\text{modos}}_{n+2+i,k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Modos de vibração torcionais

$$u_{\text{torcao}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..m-1 \\ \quad u_{\text{torcao}}_{0,k} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } i \in 1..n \\ \quad \quad \text{for } j \in 0..m-1 \\ \quad \quad \quad u_{\text{torcao}}_{i,j} \leftarrow u_{\text{mod}}_{i-1+n,j} \end{array} \right.$$

$$\text{Modos}_{\text{torcao}} := \left\{ \begin{array}{l}
 u_i(\xi) \leftarrow 1 - \xi \\
 u_f(\xi) \leftarrow \xi \\
 \text{for } k \in 0..2 \cdot n - 1 \\
 \quad \text{for } i \in 0..n - 1 \\
 \quad \quad \text{for } j \in 1..N_{\text{pontos}} \\
 \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l}
 \xi_j \leftarrow \frac{j - 1}{N_{\text{pontos}} - 1} \\
 \text{Modos}_{\text{torcao}_{j-1+i \cdot (N_{\text{pontos}}-1),k}} \leftarrow u_i(\xi_j) \cdot u_{\text{torcao}_{i,k}} + u_f(\xi_j) \cdot u_{\text{torcao}_{i+1,k}}
 \end{array} \right. \\
 \text{Modos}_{\text{torcao}}
 \end{array} \right.$$