



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE ACADÊMICO DO AGRESTE  
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE  
FÍSICA-LICENCIATURA

JOSEMAR BESERRA DE MÉLO FILHO

**O PROBLEMA DE UMA ESFERA DE ISOPOR SOBRE O PLANO INCLINADO:  
análise de livros didáticos do ensino médio e desenvolvimento de modelagens  
matemáticas**

CARUARU

2019

JOSEMAR BESERRA DE MÉLO FILHO

**O PROBLEMA DE UMA ESFERA DE ISOPOR SOBRE O PLANO INCLINADO:  
análise de livros didáticos do ensino médio e desenvolvimento de modelagens  
matemáticas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Física-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física.

**Área de concentração:** Física.

**Orientador:** Prof. Dr. Sérgio de Lemos Campello.

CARUARU

2019

Catálogo na fonte:  
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

M528p Mélo Filho, Josemar Beserra de.  
O problema de uma esfera de isopor sobre o plano inclinado: análise de livros didáticos do ensino médio e desenvolvimento de modelagens matemáticas. / Josemar Beserra de Mélo Filho. - 2019.  
60 f. il.: 30 cm.

Orientador: Sérgio de Lemos Campello.  
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Física, 2019.  
Inclui Referências.

1. Física – Estudo e ensino. 2. Livros didáticos. 3. Modelagem. 4. Experimentos. I. Campello, Sérgio de Lemos (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.)

UFPE (CAA 2019-398)

JOSEMAR BESERRA DE MÉLO FILHO

**O PROBLEMA DE UMA ESFERA DE ISOPOR SOBRE O PLANO  
INCLINADO: análise de livros didáticos do ensino médio e  
desenvolvimento de modelagens matemáticas**

Trabalho de conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física-licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Física.

Aprovada em: 13/12/2019.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Sérgio de Lemos Campello (Orientador)  
Universidade Federal de Pernambuco/NICEN

---

Prof. Dr. João Eduardo Fernandes Ramos (Examinador Interno)  
Universidade Federal de Pernambuco/NFD

---

Profa. Me. Roberta Felix de Oliveira (Examinadora Externa)  
ETE José Alencar Gomes da Silva

Dedico esse trabalho a toda minha família, em especial, a minha mãe, um exemplo de perseverança e coragem.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, professor Dr. Sérgio de Lemos Campello, que de imediato aceitou o convite de orientar-me neste trabalho, além disso, sempre foi atencioso e paciente. E também, seus ensinamentos durante a disciplina de Instrumentação para o ensino da física impulsionou-me em investir na temática deste trabalho.

Gostaria também de agradecer aos demais professores da graduação que com suas aulas e reflexões, me fizeram tornar-se um melhor profissional e pessoa. Aos meus colegas, que sempre me ajudaram com dicas e referências para produção deste trabalho: Elton David Lopes, Oduvaldo dos Santos Régis Neto e Uémisson Araújo Nogueira. Em especial, Igor Macêdo Gonçalves, suas correções foram importantes e significativas para o andamento do trabalho.

A Vitória Maria Silva de Aquino, que sempre acreditou e estimulou o desenvolvimento do meu trabalho, mostrando possibilidades de avanços sempre que me deparava com adversidades. A Mirelly Stephane Félix Mélo, minha irmã, que me auxiliou na produção do aparato experimental, gravação dos experimentos e organização dos dados experimentais.

Por fim, agradeço a todos e todas que fortaleceram diretamente ou indiretamente minha jornada acadêmica, em especial, todos os membros mais próximos da minha família que me estimulam a perseverar no caminho da educação.

## RESUMO

Adotando a premissa de que o problema da determinação da velocidade final de corpos redondos sobre o plano inclinado, é estudado através de simplificações excessivas nos livros didáticos do ensino médio, pretende-se investigar: “Até que ponto é possível aprimorar a modelagem matemática do problema do plano inclinado no ensino médio?”. Sendo assim, para validar a premissa e responder à pergunta proposta neste trabalho, foram investigados livros didáticos do ensino médio, além disso, foi construído um aparato experimental para execução de dois experimentos, e através dos experimentos, foram desenvolvidos modelos matemáticos. Para definir os melhores modelos matemáticos para os experimentos, utilizaremos o recurso do erro relativo percentual, a comparação percentual ocorrerá entre os resultados dos modelos matemáticos e os resultados obtidos através da gravação experimental e aplicação no software Tracker. Serão desenvolvidos modelos simplificados e de acordo com as possibilidades do ensino médio os modelos serão refinados, incluindo uma maior quantidade de parâmetros físicos. Para os livros didáticos do ensino médio, investigaremos 130 questões, em quatro livros e serão analisadas quais grandezas costumam ser consideradas ou desprezadas para resoluções de exercícios. Desse modo, de acordo com os modelos matemáticos que foram desenvolvidos, é percebido que os melhores modelos são os que consideram o rolamento e a resistência do ar, e de acordo com as questões investigadas nos livros didáticos do ensino médio, nenhuma destas consideram o rolamento como recurso necessário para resolução e 125 questões não consideram a resistência do ar. Com esses resultados, é possível concluir, que os professores devem chamar a atenção dos alunos para as limitações teóricas das questões, para não comprometer a visão de o que é ciências.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Experimentação. Plano inclinado. Livros didáticos.

## ABSTRACT

Adopting the premise that the problem of determining the final velocity of round bodies on the inclined plane is studied through excessive simplification in high school textbooks, it is intended to investigate: "To what extent can mathematical modeling of the inclined plane problem in high school be improved?". Thus, in order to validate the premise and answer the question proposed in this paper, high school textbooks were investigated, in addition, an experimental apparatus was built to perform two experiments, and through the experiments, mathematical models were developed. To define the best mathematical models for the experiments we will use the relative percentage error feature, the percentage comparison will occur between the results of the mathematical models and the results obtained through the experimental recording and application in the Tracker software. Simplified models will be developed and according to high school possibilities the models will be refined, including a greater number of physical parameters. For high school textbooks, we will investigate 130 questions in four books and analyze which magnitudes are often considered or disregarded for exercise resolutions. Therefore, according to the mathematical models that were developed, it is perceived that the best models are those that consider rolling and air resistance, and according to the questions investigated in high school textbooks, none of these consider rolling as a necessary resource for resolution, also 125 questions do not consider air resistance. With the obtained results, it is possible to conclude that teachers should draw students' attention to the theoretical limitations of the questions, to not compromise the view of what is science.

Keywords: Mathematical modeling. Experimentation. Inclined plane. Textbooks.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Esquema das etapas do processo de modelagem matemática .....	21
Figura 2 –	Graus de liberdade do professor/aluno em aulas de laboratório ....	22
Figura 3 –	Representação do procedimento experimental 1 .....	24
Figura 4 –	Representação do procedimento experimental 2 .....	25
Figura 5 –	Tela inicial do Tracker .....	28
Figura 6 –	Barra de ferramentas do Tracker.....	29
Figura 7 –	Resultados obtidos para um dos experimentos.....	30
Figura 8 –	Procedimento experimental para alturas de $h=10$ cm, $h=50$ cm e $h=100$ cm .....	32
Figura 9 –	Gráficos dos experimentos de velocidade em função do tempo para algumas alturas.....	33
Figura 10 –	Síntese das alturas e velocidades finais (experimento 1) .....	33
Figura 11 –	Procedimento experimental para os ângulos de $10^\circ$ , $40^\circ$ e $80^\circ$ .....	34
Figura 12 –	Gráficos dos experimentos de velocidade em função do tempo para alguns ângulos .....	35
Figura 13 –	Síntese das alturas e velocidades finais (experimento 1) .....	35
Figura 14 –	Representação da força de resistência do ar e sentido do movimento .....	38
Figura 15 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 1 (um) referente à seção de cinemática .....	48
Figura 16 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 1 (um) referente à seção de Leis de Newton .....	48
Figura 17 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 1 (um) referente à seção de Energia .....	49
Figura 18 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 2 (dois) referente à seção de Cinemática .....	49
Figura 19 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 2 (dois) referente à seção de Leis de Newton .....	50
Figura 20 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 2 (dois) referente à seção de Energia .....	50

Figura 21 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 3 (três) referente à seção de Leis de Newton .....	51
Figura 22 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 3 (três) referente à seção de Energia .....	51
Figura 23 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 4 (quatro) referente à seção de Cinemática .....	51
Figura 24 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 4 (quatro) referente à seção de Leis Newton .....	52
Figura 25 –	Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 4 (quatro) referente à seção de Energia .....	52
Figura 26 –	Quantidade total de questões analisadas vs. Categorias de análise	55

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Funcionalidades da geração e análise de dados .....	27
Tabela 2 –	Resultados experimento 1 (um) - velocidade final vs. altura .....	33
Tabela 3 –	Resultados experimento 2 (dois) velocidade final vs. Ângulo .....	36
Tabela 4 –	Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.1 .....	41
Tabela 5 –	Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.2.....	42
Tabela 6 –	Dados experimentais para os modelos com resistência do ar .....	43
Tabela 7 –	Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.3 .....	43
Tabela 8 –	Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.4 .....	44
Tabela 9 –	Comparação entre experimento 2 e resultado encontrado no modelo 2.1 .....	44
Tabela 10 –	Comparação entre experimento 2 e resultado encontrado no modelo 2.2 .....	45
Tabela 11 –	Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 2.3 .....	45
Tabela 12 –	Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 2.4 .....	46
Tabela 13 –	Categorias de análise dos livros didáticos e siglas associadas .....	47
Tabela 14 –	Síntese e ranking dos modelos para o experimento 1 .....	53
Tabela 15 –	Síntese e ranking dos modelos para o experimento 2 .....	54

## LISTA DE ABREVIATURAS

CAC	Com atrito entre o móvel e a superfície
CRA	Com resistência do ar
CR	Com rolamento
NEVA	Não especificação de velocidade e aceleração
SAC	Sem atrito com a superfície
SRA	Sem resistência do ar
SR	Sem rolamento
VC	Velocidade constante
VVAC	Velocidade variável com aceleração constante
VVAV	Velocidade variável com aceleração variável

## **LISTA DE SIGLAS**

DCN	DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS
FNDE	FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO
MDF	MEDIUM DENSITY FIBERBOARD
MEC	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA
OSP	OPEN SOURCE PHYSICS
PNLD	PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS .....	17
1.2	MOTIVAÇÃO PARA PRODUÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO .....	17
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>19</b>
2.1	O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA? .....	19
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA .....	21
2.3	SUGESTÃO DE APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE FÍSICA .....	22
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>24</b>
3.1	MONTAGEM DO APARATO EXPERIMENTAL E SOLTURAS REALIZADAS .....	24
3.2	MODELAGEM MATEMÁTICA UTILIZADA PARA OS EXPERIMENTOS	25
3.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS COM O SOFTWARE TRACKER .....	26
<b>3.3.1</b>	<b>Sequência utilizada no Tracker para esse trabalho .....</b>	<b>28</b>
3.4	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS .....	30
<b>4</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>32</b>
4.1	OBTENÇÃO DA VELOCIDADE FINAL DA ESFERA DE ISOPOR COM A VARIAÇÃO DA ALTURA E ÂNGULO FIXO EM 45° ATRAVÉS DO TRACKER .....	32
4.2	OBTENÇÃO DA VELOCIDADE FINAL DA ESFERA DE ISOPOR COM A VARIAÇÃO DO ÂNGULO E ALTURA FIXA EM 25 CM ATRAVÉS DO TRACKER .....	34
4.3	ESTUDO DOS MODELOS PARA CADA EXPERIMENTO .....	36
4.4	APLICAÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS MATEMÁTICOS E ERROS EXPERIMENTAIS .....	41
4.5	PROBLEMA DO PLANO INCLINADO EM LIVROS DE FÍSICA DO ENSINO MÉDIO .....	46
<b>4.5.1</b>	<b>Por que a investigação de livros do ensino médio? .....</b>	<b>46</b>
<b>4.5.2</b>	<b>Livros do ensino médio analisados .....</b>	<b>47</b>
4.5.2.1	Livro 1: Conecte tópicos de física (Doca R. H., et al., 2014) .....	47
4.5.2.2	Livro 2: Conexões com a Física (Martini. G. et al, 2016) .....	49

4.5.2.3	Livro 3: Física aula por aula (Filho B. B., Silva C. B. da, 2016) .....	50
4.5.2.4	Livro 4: Física: interação e tecnologia (Filho A. G., Toscano C., 2013) .....	51
<b>5</b>	<b>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS .....</b>	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>58</b>
	<b>APÊNDICE A – SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DE ENSINO RELACIONADAS ÀS PRÁTICAS EXPERIMENTAIS E DE MODELAGENS MATEMÁTICAS. ....</b>	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Problemas relacionados ao plano inclinado são estudados com frequência no ensino da física básica. A grande maioria dos livros de física utiliza o artifício teórico do plano inclinado para estudar problemas relacionados à cinemática, leis de Newton, e energia. Um exemplo encontra-se no livro intitulado Curso de Física Básica vol.1 (Nussenzveig, 2002, pág. 66), em que é exposto um texto de Galileu em “Diálogos Sobre os Principais Sistemas do Mundo” e, através deste, é explicada a lei da inércia aplicada ao plano inclinado. O livro Conecte tópicos de física (Doca R. H., et al, 2014) contém 63 questões direcionadas a descidas em superfícies inclinadas, o que reforça a importância de explorar esta temática.

Os livros didáticos, geralmente, abordam a problemática do plano inclinado de acordo com a seguinte perspectiva: abandonando um bloco ou um corpo esférico sobre uma superfície inclinada em relação a horizontal e, a partir desta representação experimental, são estudadas questões relacionadas à determinação da velocidade final através da altura de abandono. Além desta possibilidade supracitada, é possível também abordar problemas relacionados à conservação de energia, força de atrito, dissipação de energia e aceleração do centro de massa do objeto percorrendo o plano, etc. Questões que envolvam os conteúdos mencionados podem ser encontradas facilmente nos livros didáticos do ensino médio e ensino superior. Assim, para este trabalho, partiremos da hipótese de que a maioria dos livros didáticos abordam o problema do plano inclinado de maneira superficial (desprezando efeitos das forças de atrito, resistência do ar e rolamento, por exemplo).

Como mencionado anteriormente, podemos abordar muitos assuntos da física em apenas uma situação experimental, portanto, neste trabalho, analisaremos questões dos seguintes livros didáticos: Conecte tópicos de física (Doca R. H., et al, 2014), Física: interação e tecnologia (Filho A. G., et al, 2013), Física aula por aula (Filho B. B., et al, 2016) e Conexões com a Física (Martini. G., et al, 2016). Conjecturamos que o estudo do plano inclinado no ensino médio, apesar de tantas possibilidades de investigação, se restringe a aplicação de equações simplificada e distante da realidade experimental. Assim, motivados por esta problemática, pretendemos responder a seguinte questão: “Até que ponto é possível melhorar/aprimorar a modelagem matemática do problema do plano inclinado no ensino médio?”.

Começaremos efetuando uma análise dos livros didáticos com o intuito de verificar a nossa concepção de que o problema do plano inclinado é visto no ensino médio de maneira simplória, e considerando que o livro didático em alguns casos é a única ou principal ferramenta para o professor ensinar os conteúdos. Posteriormente, modelos matemáticos serão

desenvolvidos para o problema do plano inclinado de formas alternativas e, para tal, desenvolvemos um aparato experimental de baixo custo.

A primeira investigação que faremos será a análise de um caso em que o ângulo de inclinação do plano permanecerá fixo e será variada a posição inicial do objeto em relação a vertical, desse modo, variaremos a energia potencial atrelada a força peso. Em seguida, será feito o processo inverso, variaremos o ângulo de inclinação do plano inclinado e manteremos fixa a posição de soltura do objeto em relação a vertical, garantindo que a energia mecânica inicial seja a mesma em todos os experimentos.

Com as duas propostas experimentais descritas, pretendemos encontrar a velocidade final do objeto solto sobre o plano (uma bola de isopor). E, a partir dos resultados experimentais, efetuaremos as modelagens matemáticas de acordo com as possibilidades matemáticas do ensino médio. Para definir o melhor modelo, calcularemos, o erro percentual entre o valor real (obtido através do software Tracker) e o valor teórico (obtido através dos modelos matemáticos). Os modelos matemáticos desenvolvidos poderão servir para professores do ensino médio trabalharem com a sua turma de acordo com seu grau de interesse e aprofundamento no estudo do plano inclinado.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN's) para Educação Básica, podemos encontrar princípios e finalidades que orientam o docente do Ensino Médio na condução dos conteúdos curriculares. Temos 4 tópicos centrais, dentre eles, é importante mencionar o terceiro: "III O aprimoramento do estudante como um ser de direitos, pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico" (BRASIL, 2013, pág. 39). É percebido que o item III corrobora com o produto gerado pelo trabalho, pois, o processo de modelagem pode começar por representações matemáticas simplórias, até representações mais detalhadas da realidade. Para avançar nesse processo é necessário que o discente desenvolva autonomia intelectual e pensamento crítico para compreender quais as grandezas físicas que podem ser consideradas desprezíveis e não desprezíveis para aprimoramento da modelagem matemática e compreensão dos conceitos físicos inerentes ao problema.

É importante que os alunos sejam incluídos em processos investigativos durante sua aprendizagem, pois os mesmos podem compreender a dinâmica existente no mundo das ciências, possibilitando novas reflexões a partir de indagações, pesquisas e debates. Isto contribuirá para a formação de estudantes ativos na construção do conhecimento, o que os

tornam sujeitos críticos do processo de ensino-aprendizagem, desmistificando o professor como único detentor do saber.

### 1.1 OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS

Tomando como ponto de partida o que foi discutido, pretendemos desenvolver nesse trabalho de forma geral:

1. Investigar novas perspectivas de modelagem matemática para a abordagem de um corpo redondo se deslocando sobre um plano inclinado.

E de forma específica:

1. Produzir um aparato experimental relacionado ao problema do plano inclinado que sirva para os dois experimentos propostos;
2. Desenvolver sequências de modelagens matemática que possam facilitar/nortear o estudo do plano inclinado no ensino médio;
3. Investigar como é desenvolvida a modelagem matemática para o problema do plano inclinado nos livros do ensino médio.

### 1.2 MOTIVAÇÃO PARA PRODUÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

No sétimo período da graduação no semestre de 2018.2 foi cursada pelo autor a disciplina de Instrumentação para o ensino da Física, ministrada pelo Prof. Dr. Sérgio Campello (Orientador deste trabalho). A disciplina é constituída por produção de projetos, e um desses abordava a seguinte problemática: “Até que ponto é possível considerar/desconsiderar o movimento rotacional de um corpo redondo ao ser abandonado sobre o plano inclinado?”. Para isso, o estudo teve uma perspectiva metodológica de laboratório aberto: vertente que trata de uma nova forma de pensar as práticas de laboratório, mais precisamente o de Física. Sendo assim, sua aplicação permite que o aluno tenha as mesmas práticas de um cientista, visto que o mesmo realizará o experimento e o analisará, encontrando erros e acertos durante o seu desenvolvimento. Isto permite que o estudante reflita sobre o processo, já que a ciência não é absoluta, acabada e imutável, mas que sempre está em construção e que pode ser melhorada cada vez mais. Segundo Pozo e Crespo (2009):

“Aprender ciência deve ser, portanto, um exercício de comparar e diferenciar modelos, não de adquirir saberes absolutos e verdadeiros (...). Ensinar ciências

não deve ter como meta apresentar aos alunos os produtos da ciência como saberes acabados, definitivos.” (POZO e CRESPO, 2009, p. 21).

Neste sentido, o laboratório aberto surge nessa perspectiva investigativa realizada pelos alunos, já que não terá roteiros pré-estabelecidos e que no fim não há uma resposta errada, mas uma resposta que melhor se adequa ao que está sendo pesquisado (MOURA e HIGINO, 1996).

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA?

Existem muitas interpretações em relação a palavra modelo, essa palavra pode ser empregada em diversos sentidos. Bassanezi (2009) elucida algumas possibilidades de definições:

“Por exemplo, para McLone (...) “um modelo matemático é um construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular”. Ferreira Jr (...) apresenta uma definição generalizada de modelo matemático a partir de uma abordagem abstrata dos conceitos básicos de dimensão, unidade e medida.” (apud BASSANEZI, 2009, pág. 20).

É pretendido não problematizar as diversas possibilidades de utilização da palavra modelo, sendo assim, o trabalho compartilhará do seguinte ponto de vista: “Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma um dado objeto estudado.” (BASSANEZI, 2009).

Bassanezi (2009) define modelagem matemática como a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Além disso, este mesmo autor, traz duas vertentes para utilização da modelagem matemática, que são: Método científico de pesquisa e estratégia de ensino-aprendizagem.

No livro *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, D’Ambrosio (2009) afirma:

“Os sistemas educacionais tem sido dominado nos últimos duzentos anos pelo que se poderia chamar de uma fascinação pelo teórico e abstrato. Teorias e técnicas são muitas vezes apresentadas e desenvolvidas sem um relacionamento com fatos reais e, mesmo quando ilustradas com exemplos apresentam-se de maneira artificial.” (BASSANEZI, 2009, pág. 11)

Uma das maiores preocupações da modelagem matemática é interpretar problemas práticos da realidade através da linguagem matemática. Logo, se a modelagem matemática for utilizada como vertente de estratégia de ensino-aprendizagem, é possível romper com a fascinação do teórico citado por D’Ambrosio. Utilizar modelagem matemática para o ensino não implica necessariamente em romper com a fascinação do teórico e abstrato, a técnica por si só não é autossuficiente. Por isso, é importante considerar outros fatores: motivação do aluno

em compreender a proposta do professor, dinamicidade e compreensão do professor de o que é, e como pode ser utilizado a modelagem matemática para o ensino.

Possivelmente, professores(as) já ouviram dos alunos as seguintes indagações: “Professor, mas para quê essa fórmula serve?”, “Professor, como vou utilizar isso na minha vida?”. Utilizando a modelagem matemática, é possibilitado encontrar esse sentido que os alunos tanto buscam quando estudam determinados assuntos. Tal possibilidade se dá em função de que a modelagem matemática busca envolver problemas do cotidiano.

Bassanezi (2009) define algumas etapas para o desenvolvimento da modelagem matemática, que são elas, 1 Experimentação, 2 Abstração, 3 Resolução, 4 Validação e 5 Modificação. Neste trabalho, iremos seguir estas etapas para desenvolver os modelos teóricos dos experimentos da bola de isopor sendo largada sobre o plano inclinado.

Para melhor compreensão do leitor, iremos descrever as características de cada uma das cinco etapas na formulação de modelos teóricos segundo Bassanezi. Começaremos com a etapa de experimentação (etapa 1). Esta é uma etapa laboratorial em que ocorre a coleta de dados. Nessa etapa é importante verificar a calibração dos instrumentos de medidas, tal verificação pode contribuir para uma melhor apuração dos resultados. Também é recomendado, em alguns casos, fazer medições repetidas de um mesmo fenômeno para aplicar técnicas estatísticas e aumentar a confiabilidade do resultado encontrado.

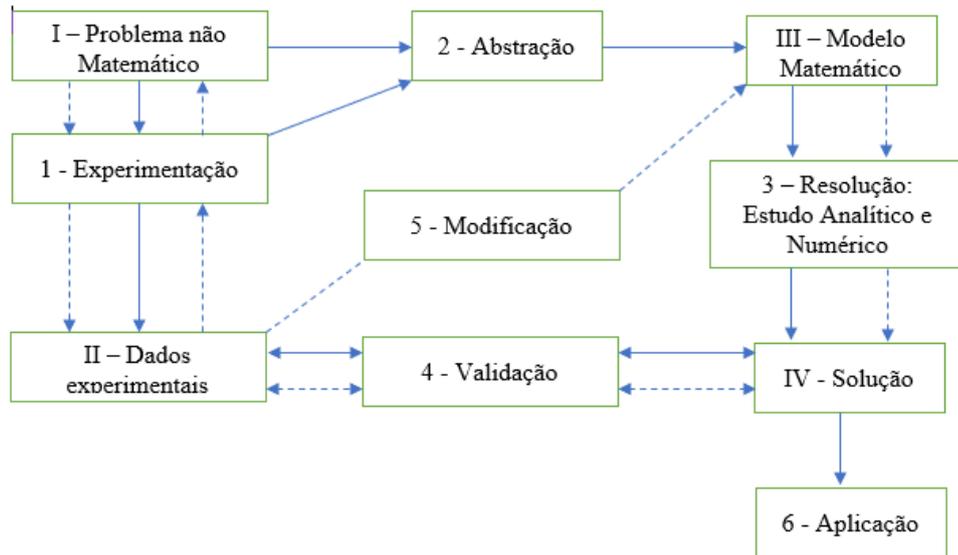
A segunda fase da formulação (etapa 2) é responsável pela abstração do fenômeno sobre investigação e é este momento que formulamos os modelos matemáticos. Para isto, é importante estabelecer alguns critérios, que são eles: a. Seleção de variáveis, em que é feita a escolha das variáveis de estado e variáveis de controle; b. Problematização, nesta ocorre a formulação dos problemas teóricos; c. Formulação de hipóteses, critério destinado a presunção de fenômenos empíricos específicos; d. Simplificação, em que ocorre as delimitações das informações, de forma coerente, incorporadas ao problema original.

A terceira fase (etapa 3) é direcionada a resolução, em que o modelo matemático pode ser considerado finalizado, quando for ultrapassado a linguagem natural das hipóteses pela linguagem matemática. A quarta fase (etapa 4) é definida como validação, em que ocorre o processo de aceitação ou não do modelo.

Por fim, a quinta fase (etapa 5) possibilita a modificação, em que podemos substituir fatores, tanto do experimento, quanto da modelagem, com intuito de aumentar a confiabilidade do trabalho e reduzir o erro percentual associado.

Para facilitar a compreensão destas etapas, podemos utilizar o esquema pictórico exibido na Figura 1. Esta figura, nos ajuda a compreender todas as etapas e processos de

formulação de um modelo teórico-matemático segundo a perspectiva de Bassanezi. Além disso, na mesma figura, as setas contínuas indicam a primeira aproximação, as setas pontilhadas indicam a dinamicidade do processo de modelação, e sempre que preciso o modelador pode retornar etapas para qualificar e refinar o modelo encontrado.



**Figura 1: Esquema das etapas do processo de modelagem matemática. Adaptado de: BASSANEZI, 2009, p. 27**

Na próxima seção será feito um levantamento dos estudos relacionados a modelagem matemática no ensino da Física, segundo Souza (2010), usando a mesma referência é mostrado a importância desse estudo para apreensão conceitual dos fenômenos físicos.

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DA FÍSICA

Há muitas pesquisas que aplicam modelagem matemática para o ensino de Física. Por exemplo, Souza (2010), na sua dissertação de mestrado, caracteriza quanto à metodologia os trabalhos disponíveis na internet sobre as temáticas Modelagem Matemática e ensino de Física. Dentre estes trabalhos, temos: Lozada e colaboradores (2006) que aborda a questão da importância dos modelos matemáticos para o ensino de Física. Costa (2009) que estuda a lei de Transformação dos Gases de Charles-Gay Lussac através da modelagem de limite e continuidade.

Pelo estudo de Souza (2010) é percebido, que existem muitos trabalhos relacionados a modelagem matemática para o ensino de física, por outro lado, essa temática deveria e poderia

ser mais explorada para o ensino de física, pelos inúmeros benefícios que podem envolver para o ensino da física.

Souza (2010), aponta que “os discentes ao interpretarem as diferentes representações matemáticas referentes ao mesmo fenômeno físico, desenvolvem as funções cognitivas necessárias à apreensão conceitual”. Tomando essa possibilidade como referência, o presente trabalho pode possibilitar um melhor entendimento conceitual acerca do modelo de um objeto redondo se movendo sobre um plano inclinado, pois serão desenvolvidas diferentes modelagens matemáticas para o mesmo experimento físico. Logo, nessa vertente, a modelagem matemática não se restringirá à análise puramente matemática e, com isso, é esperado que o grau de aprendizagem conceitual do aluno seja ampliado.

### 2.3 SUGESTÃO DE APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE FÍSICA

Neste trabalho utilizamos duas problemáticas relacionadas ao rolamento de uma bola de isopor sobre o plano inclinado. Dado essa problemática, é almejado aprimorar os modelos matemáticos até obter o menor erro percentual possível, quando comparado com o valor disponibilizado pelo Tracker. Os professores que tenham interesse em aplicar as problemáticas deste trabalho, podem tomar como embasamento as orientações de Carvalho (2010), que direciona possibilidades para o desenvolvimento de atividades experimentais. O direcionamento trazido por Carvalho é apresentado de forma na Tabela da Figura 2.

	GRAU I	GRAU II	GRAU III	GRAU IV	GRAU V
Problema	P	P	P	P	A
Hipóteses	P	P	P	A	A
Plano de trabalho	P	P	A	A	A
Obtenção de dados	A	A	A	A	A
Conclusões	P	A	A	A	A

Figura 2: Graus de liberdade do professor/aluno em aulas de laboratório. **Fonte: (CARVALHO, 2010).** P: representa o professor; A: representa o aluno.

Na tabela 2.2, temos os graus de liberdade para atividades de práticas experimentais, classificadas do grau I ao grau V. O grau I, por exemplo, mostra uma prática de laboratório mais tradicional, pelo fato de que o professor determina a problemática, hipóteses, plano de trabalho e conclusões, e o aluno apenas é responsável pela obtenção de dados. Conforme os

graus avançam, os alunos passam a ter mais autonomia no processo de desenvolvimento da prática experimental.

A recomendação de aplicação deste trabalho, segundo as orientações de Carvalho, seria para o professor transmitir o problema para o aluno. Segue um exemplo de problemática: “Como poderíamos encontrar a velocidade final de uma bola de isopor ao descer sobre o plano inclinado de tal forma que o erro percentual seja o menor possível comparado com o resultado obtido através do software Tracker?”. Tomando esta iniciativa o professor estaria propondo o problema e poderia permitir que os alunos levantassem suas hipóteses, tais como, plano de trabalho, obtenção de dados e conclusões. Nesse formato, teríamos a utilização do grau IV de liberdade (vide Figura 2). É importante que nas demais etapas, mesmo que desenvolvidas pelos alunos, o professor acompanhe cada procedimento para que o foco do trabalho não seja extraviado.

Vale destacar que, para os modelos matemáticos, o professor poderia expor as demonstrações ou resultados finais de cada demonstração que estão no capítulo 3 deste trabalho (dependerá do interesse do professor), para a partir de então, os alunos coletarem os dados experimentais com auxílio do Tracker e poder comparar com os resultados que seriam obtidos pelos modelos. No Apêndice A, será sugerida uma sequência de ensino, para professores da educação básica que tenham interesse em desenvolver práticas experimentais e modelagens matemáticas.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão descritos os experimentos desenvolvidos, e como ocorrerá as análises dos livros didáticos do ensino médio. Os dois experimentos envolvem uma esfera de isopor descendo sobre o plano inclinado. Para o primeiro experimento, será mantido o ângulo de inclinação fixo e as alturas de abandono serão variadas. Para o segundo experimento, manteremos uma altura de abandono fixa, e os ângulos de soltura serão variados. Com esse procedimento, determinaremos a velocidade final através do software Tracker, e compararemos com os modelos matemáticos desenvolvidos.

#### 3.1 MONTAGEM DO APARATO EXPERIMENTAL E SOLTURAS REALIZADAS

A primeira etapa deste trabalho será a construção de um aparato experimental, que possibilite o desenvolvimento de dois experimentos. Os materiais utilizados na produção experimental foram: Duas tábuas Medium Density Fiberboard (MDF), transferidor, duas dobradiças, canudos, palitos de churrasco, pregos, parafusos, bola de isopor e tampões de cano de meia polegada. Novamente, merece destaque que todos materiais utilizados são de baixo custo, ou que podem ser reciclados facilmente, o que viabiliza o desenvolvimento deste trabalho.

O primeiro experimento decorrerá com o ângulo  $\theta$  do plano inclinado fixo, sendo o ângulo  $\theta=45^\circ$ , e, com isso, abandonaremos uma esfera das marcações representadas sobre o plano inclinado (vide Figura 3). Cada um desses pontos possui uma altura em relação a horizontal de um múltiplo natural de 10 cm, tendo como altura máxima  $h_{\text{máx}}=100$  cm. Todas as descidas da esfera de isopor serão gravadas, e para cada altura, será determinada através do Tracker a velocidade final da bola de isopor. O procedimento de manuseio do software Tracker, descreveremos nas próximas seções deste trabalho

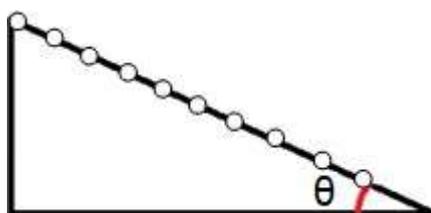


Figura 3: Representação do procedimento experimental 1. **FONTE: Autor, 2019**

O segundo experimento está representado na Figura 4. Será mantida uma altura ( $h$ ) fixa de 25 centímetros, e será variado o ângulo de inclinação do plano inclinado. O ângulo será variado como um múltiplo natural de  $10^\circ$ , tendo como ângulo mínimo  $10^\circ$  e ângulo máximo  $80^\circ$ . Novamente, para cada uma dessas descidas da esfera de isopor, será medida a velocidade final com o Tracker.

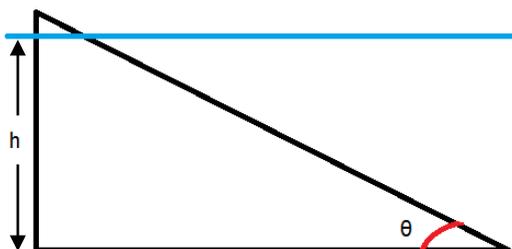


Figura 4: Representação do procedimento experimental 2. **FONTE: Autor, 2019.**

### 3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA UTILIZADA PARA OS EXPERIMENTOS

A segunda etapa do trabalho dar-se-á com os desenvolvimentos das modelagens matemáticas e aplicações numéricas, para os dois experimentos em análise. No que concerne o desenvolvimento dos modelos, será tomado como principal referência Nussenzevig (2002) e Halliday (2014), onde todos os modelos serão iniciados a partir do teorema  $W_{f_{nc}} = \Delta E_m$  onde  $W_{f_{nc}}$  indica o Trabalho das forças não-conservativas e  $\Delta E_m$  a variação da energia mecânica total do sistema. O modelo matemático ideal para situação em análise será definido em função do menor erro percentual.

Os modelos a serem analisados são os seguintes: Energia conservada e desprezo do rolamento, energia conservada e consideração do rolamento, energia dissipada por atrito com o ar e desprezo do rolamento e, por fim, energia dissipada por atrito com o ar e consideração do rolamento.

Para o desenvolvimento dos modelos, serão utilizadas equações que relacionem os principais parâmetros experimentais, ou seja, velocidade, altura e ângulo. Sendo assim, um dos possíveis caminhos, é iniciar as modelagens através do teorema trabalho energia cinética:  $W_{fr} = \Delta K$  (equação 1). (Trabalho da força resultante é igual a variação da energia cinética). Como em alguns momentos deste trabalho será do interesse levar em consideração as forças não conservativas, então é importante reescrever a equação 1 em termos de forças não conservativas, para isso, substituiremos o trabalho da força resultante sobre a partícula, pelo

trabalho realizado pelas forças não-conservativas acrescido do trabalho das forças conservativas, escrito matematicamente, temos a equação 2:

$$W_{f_{nc}} + W_{f_c} = \Delta K \text{ (equação 2.)}$$

Por outro lado, a forma como o trabalho das forças conservativas se relaciona com a energia potencial é representado pela equação 3, através desta, vemos que o trabalho das forças conservativas é igual a menos a variação da energia potencial gravitacional do sistema:

$$W_{f_c} = -\Delta U \text{ (equação 3.)}$$

De posse dessa informação, podemos aplicar a equação 3, na equação 2, e obter a equação 4:

$$W_{f_{nc}} = \Delta K + \Delta U \text{ (equação 4.)}$$

Através da equação 4, obtemos uma relação importante para as modelagens que pretendemos desenvolver. Conseguimos um modelo que envolva forças dissipativas, energias cinética e potencial. Sabendo que a variação da energia cinética acrescida da variação da energia potencial gravitacional é entendida como a variação da energia mecânica total do sistema, logo a equação 4, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$W_{f_{nc}} = \Delta E_m \text{ (equação 4.1)}$$

A partir de então, vemos que a equação 4.1 pode envolver os parâmetros que pretendemos abordar, através do trabalho da força não conservativa, podemos relacionar com o ângulo do plano inclinado. A energia cinética está diretamente relacionada a velocidade da partícula e a energia potencial gravitacional está relacionada com a altura do plano inclinado. Com essa expressão podemos levar em conta os principais parâmetros experimentais.

### 3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS COM SOFTWARE TRACKER

O Tracker - *Video Analysis and Modeling Tool*, que por tradução livre significa ferramenta de análise e modelagem de vídeo, é um software gratuito pertencente a coleção Open Source Physics (OSP), seu desenvolvimento foi direcionado como recurso para o ensino de física. Para usufruir dos seus recursos é necessário fazer uma gravação do fenômeno experimental, em seguida abrir o vídeo no software e através dessa sequência é possível obter alguns dados significativos, tais como: velocidade do objeto em função do tempo, aceleração em função do tempo, posição em função do tempo e outros.

Os dados técnicos, que nesse trabalho serão expostos de forma resumida, assim bem como seu download pode ser encontrado e feito através do site (<https://physlets.org/Tracker/>). O Tracker pode ser baixado nos seguintes sistemas operacionais: Windows, Mac OS X, Linux

32 bits, Linux 64 bits. O programa é disponibilizado em vários idiomas, para este trabalho foi utilizado sua versão em Português.

Seus principais recursos são: Rastreamento, modelagem, vídeo, geração e análise de dados e navegador de biblioteca. Para este trabalho o recurso de geração e análise de dados foi utilizado com maior frequência. As funcionalidades desse recurso estão descritas na tabela 2.

Tabela 1: Funcionalidades da geração e análise de dados. **FONTE: Tracker, 2019.**

Recurso do Tracker	Funcionalidades
Geração e análise de dados	Escala, origem e inclinação do sistema de coordenadas fixo ou variável no tempo.
	Opções de calibração: fita, bastão, pontos de calibração e / ou origem do deslocamento.
	Alternância para o centro de massa e outros quadros de referência.
	Os dados incluem unidades (unidades métricas de SI por padrão, comprimento e massa configuráveis).
	Transferidores e fitas métricas que possibilitam medições de distância e ângulo.
	A ferramenta Ajustador de círculo ajusta os círculos a 3 ou mais pontos, etapas ou faixas.
	Defina variáveis personalizadas para plotagem e análise.
	Adicione colunas de texto editáveis para comentários ou dados inseridos manualmente.
	A ferramenta de análise de dados inclui: ajuste automático e manual de curvas.
	Exportação de dados formatados ou brutos para um arquivo de texto delimitado ou para a área de transferência.
Exibição de valores medidos usando formatos de número personalizados.	

Como mencionado anteriormente, um dos objetivos deste trabalho é a obtenção do melhor modelo matemático para os dois experimentos, para definir o melhor modelo será comparado através do erro percentual, as velocidades finais obtidas através do Tracker, com as velocidades finais obtidas através dos modelos matemáticos, sendo assim, não foi utilizado todos os recursos do Tracker para atingir esse fim. A partir de então, será feita uma breve descrição dos recursos utilizados para conseguir obter as velocidades finais de cada abandono da esfera sobre o plano inclinado.

### 3.3.1 Sequência utilizada no Tracker para esse trabalho

O experimento realizado seguiu a seguinte sequência:

- a) Gravação dos experimentos em um SmartPhone simples.
- b) Abrir o Tracker no computador, tendo a Figura 5 como tela inicial (Nessa tela será aberto o vídeo a ser analisado, além disso, no espaço superior direito será visualizado os gráficos, e no espaço inferior direito será visualizado as tabelas geradas pelo software):

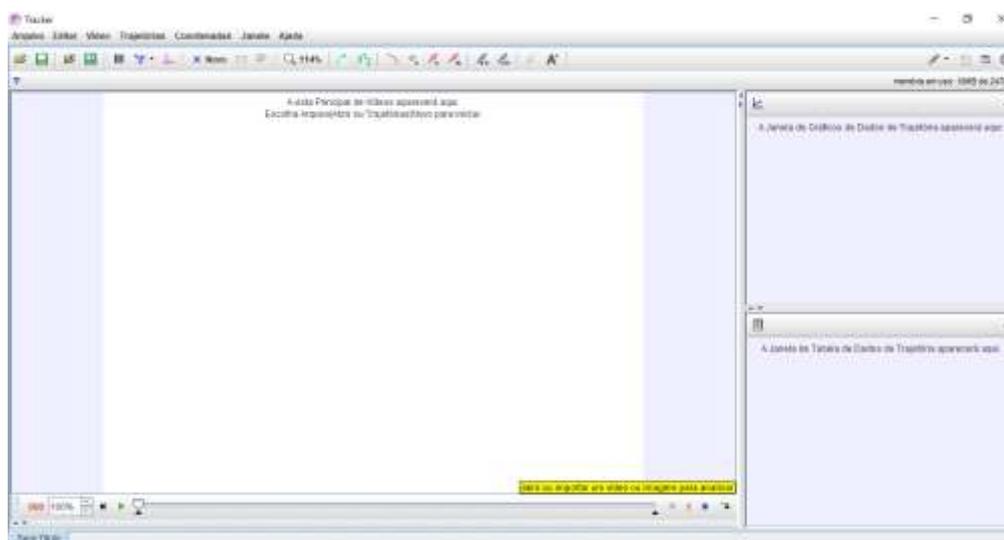


Figura 5: Tela inicial do Tracker. **FONTE: Autor, 2019.**

- c) Para abrir o vídeo experimental a sequência é: Arquivo > abrir (procurar o vídeo no seu computador) > abrir. Ou utilizar o atalho Ctrl + O.
- d) Uma primeira ferramenta utilizada foi a delimitação dos quadros de gravação, existem momentos precedentes e posteriores ao experimento, que são vistos no vídeo, e por sua vez, não são relevantes para análise, sendo assim delimitar os quadros é um recurso importante para

visualizar o que é importante do ponto de vista experimental. Na parte superior da tela inicial do Tracker, tem-se a ferramenta que possibilita delimitar os quadros:



Figura 6: Barra de ferramentas do Tracker. **FONTE: Autor, 2019.**

O item circulado em preto representa os ajustes de cortes no vídeo. Ao utiliza-lo, é possível determinar o quadro inicial do vídeo, quadro final do vídeo e frequência de passagem dos quadros.

e) A segunda ferramenta é o eixo de coordenadas, que na Figura 6 é encontrado como a segunda opção a direita dos ajustes de cortes do vídeo. Para o experimento desenvolvido a direção x foi colocada paralela à superfície do plano inclinado.

f) O terceiro recurso utilizado foi a fita de calibração, ferramenta encontrada entre o eixo de coordenadas e ajustes de cortes do vídeo, esta etapa é muito importante, pois será determinada a escala para análises dos experimentos, em outras palavras, o experimentador deverá inserir dados métricos pertinentes ao experimento.

g) Por fim, para obter os dados experimentais, na barra de ferramentas temos a opção: novo > ponto de massa (marcar o objeto: bola de isopor). Ao acionar essa opção, pressionando a tecla SHIFT o objeto translada e os dados experimentais são obtidos.

Com todo esse procedimento feito, é possível obter dados neste formato:

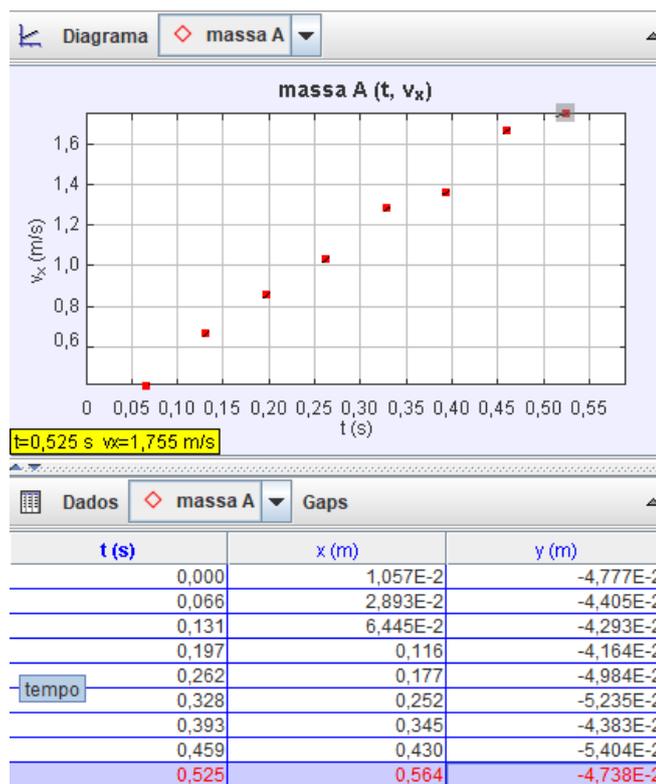


Figura 7: Resultados obtidos para um dos experimentos. **FONTE: Autor, 2019.**

Note que, marcando o último ponto experimental, é obtida a velocidade final experimental para a descida da esfera sobre o plano inclinado. Para essa representação a velocidade final foi de 1,755 m/s, marcado de amarelo na Figura 7.

### 3.4 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Esta etapa da pesquisa é considerada de natureza mista: quantitativa e qualitativa, visto que foi investigado um elevado número de questões e, através desta análise, pretendemos verificar se as questões são estudadas com simplificações excessivas pelos livros didáticos. Sua vertente qualitativa, dar-se pela possibilidade de identificar aspectos subjetivos dos municípios onde são utilizados os livros didáticos investigados, sobre a temática do plano inclinado.

Serão analisadas as questões relacionadas ao plano inclinado dos seguintes livros didáticos: Conecte tópicos de física (Doca R. H., et al, 2014), Física: interação e tecnologia (Filho A. G., et al, 2013), Física aula por aula (Filho B. B., et al, 2016) e Conexões com a Física (Martini. G., et al, 2016). A análise almejará classificar as questões de acordo com os seguintes parâmetros: Não especificação de velocidade e aceleração (NEVA), velocidade variável com

aceleração constante (VVAC), velocidade variável com aceleração variável (VVAV), velocidade constante (VC), com atrito entre o móvel e a superfície (CAC), sem atrito com a superfície (SAC), com resistência do ar (CRA); sem resistência do ar (SRA), com rolamento (CR) e sem rolamento (SR). As análises dessas questões foram distribuídas entre os capítulos de Cinemática, Leis de Newton e Energia, tendo em vista que são esses os capítulos que utilizam com maior frequência questões relacionadas ao plano inclinado.

## 4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

### 4.1 OBTENÇÃO DA VELOCIDADE FINAL DA ESFERA DE ISOPOR COM A VARIÇÃO DA ALTURA E ÂNGULO FIXO EM 45° ATRAVÉS DO TRACKER

Após gravar as descidas da esfera de isopor com o auxílio de um smartphone, foram obtidos os gráficos da velocidade versus tempo para cada altura de abandono, conforme representado na Figura 8 para as alturas 10 cm, 50 cm e 100 cm.



Figura 8: Procedimento experimental para alturas de  $h=10$  cm,  $h=50$  cm e  $h=100$ cm. **Fonte: Autor, 2019.**

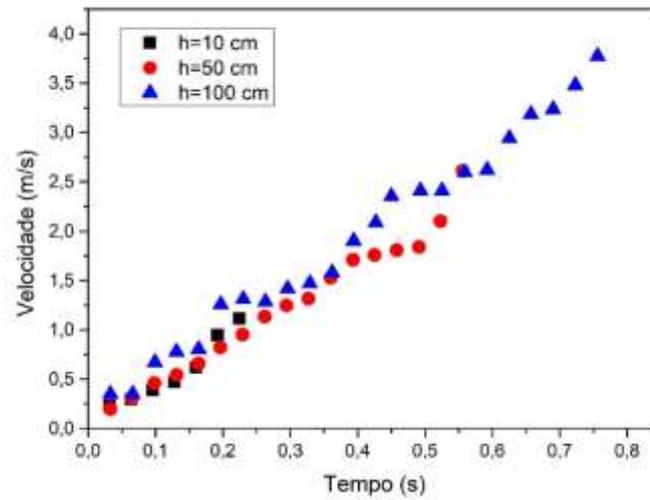


Figura 9: Gráficos dos experimentos de velocidade em função do tempo para algumas alturas. **Fonte:** Autor, 2019.

Os gráficos disponibilizados pelo Tracker possibilitaram a determinação da velocidade final para cada altura de abandono, cujos dados estão sintetizados no gráfico da Figura 10 e na Tabela 2.

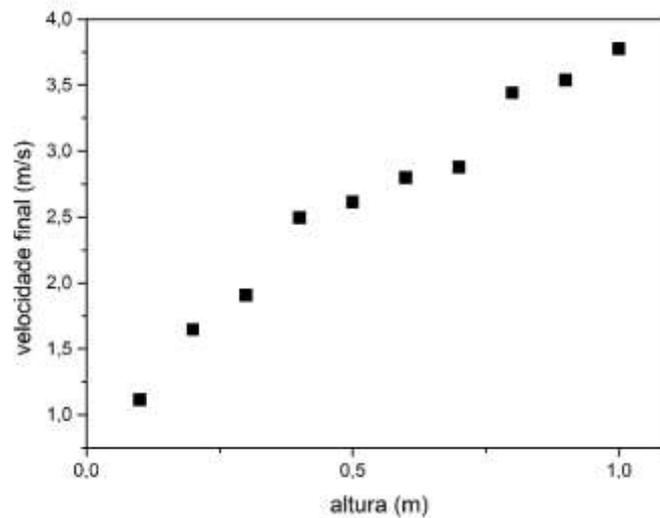


Figura 10: Síntese das alturas e velocidades finais (experimento 1) – **Fonte:** Autor, 2019.

Tabela 2: Resultados experimento 1 (um) - velocidade final vs. altura. – (Autor, 2019)

Altura (metro)	Velocidade final (m/s)
0,1	1,115

0,2	1,646
0,3	1,904
0,4	2,493
0,5	2,612
0,6	2,796
0,7	2,876
0,8	3,440
0,9	3,538
1,0	3,774

#### 4.2 OBTENÇÃO DA VELOCIDADE FINAL DA ESFERA DE ISOPOR COM A VARIAÇÃO DO ÂNGULO E ALTURA FIXA EM 25 CM ATRAVÉS DO TRACKER

O procedimento experimental 2 foi realizado com todas as alturas de abandonos em 25 cm de altura, na Figura 11, expomos o procedimento experimental para os ângulos de 10°, 40° e 80°.



Figura 11: Procedimento experimental para os ângulos de 10°, 40° e 80°. Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 12 estão representados os gráficos das velocidades em função do tempo para os ângulos de  $10^\circ$ ,  $40^\circ$  e  $80^\circ$ . Os dados dos gráficos da Figura 12 foram obtidos através do Tracker.

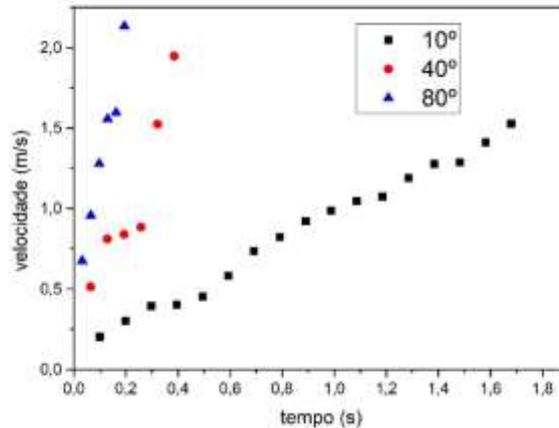


Figura 12: Gráficos dos experimentos de velocidade em função do tempo para alguns ângulos. **Fonte: Autor, 2019.**

Os gráficos representados nas figuras precedentes, possuem as velocidades finais experimentais sintetizados no gráfico apresentado na Figura 13 e na Tabela 3.

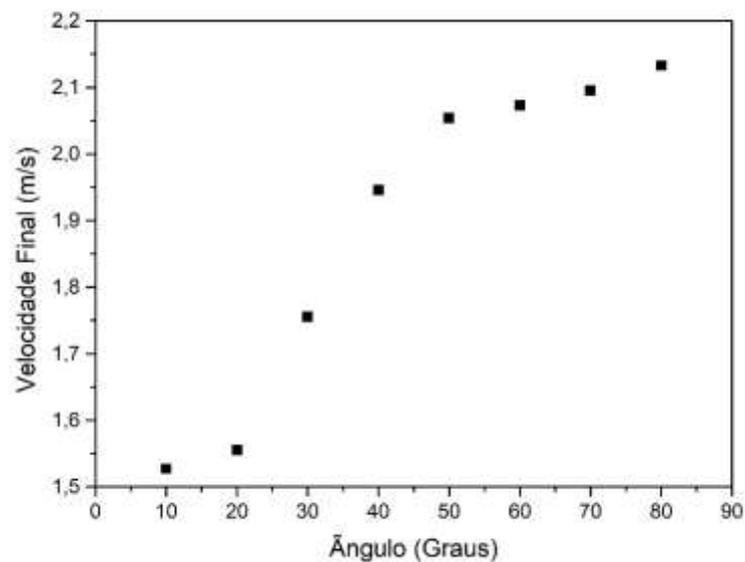


Figura 13: Síntese das alturas e velocidades finais (experimento 1) – **Fonte: Autor, 2019.**

Tabela 3: Resultados experimento 2 (dois) velocidade final vs. Ângulo – Fonte: Autor, 2019.

Ângulo ( <i>Graus</i> : °)	Velocidade final (m/s)
10°	1,527
20°	1,555
30°	1,755
40°	1,946
50°	2,054
60°	2,073
70°	2,095
80°	2,133

Diferentemente do experimento 1, para o experimento 2 foram feitas 8 medições. Perceba na Tabela 3 que os ângulos estão sendo acrescidos em 10 unidades. Então, por essa sequência, o próximo ângulo seria de 90°. Porém, nesse caso, não teríamos uma descida sobre o plano inclinado, mas sim um movimento de queda livre, que não é o interesse de análise do trabalho. Desta etapa experimental, os dados mais importantes são os das tabelas 4.1 e 4.2, os quais serão importantes para determinação do erro percentual.

#### 4.3 ESTUDO DOS MODELOS PARA CADA EXPERIMENTO

Como mencionado na metodologia, para os dois experimentos serão desenvolvidos os seguintes modelos: Energia conservada e desprezo do rolamento, energia conservada e consideração do rolamento, energia dissipada por atrito com o ar e desprezo do rolamento, e por fim, energia dissipada por atrito com o ar e consideração do rolamento.

Nas modelagens para o experimento 1, é almejado deduzir equações da velocidade  $v$ , em função da altura  $h$ , ou seja,  $v(h)$ .

##### **Modelo 1.1: Energia conservada, sem rolamento.**

Considerando as pretensões deste modelo, podemos afirmar que a representação matemática está desprezando as forças dissipativas, e, além disso, o rolamento está sendo desprezado. Logo, não será incluído na modelagem a energia cinética de rotação.

É importante reforçar que essas restrições são representações, aplica-las não implica afirmar que o modelador atribui esse modelo como ideal, ou correto. O parâmetro que informará o modelo mais adequado será o erro percentual médio.

Partindo da equação da equação 4.1:

$$W_{f_{nc}} = \Delta E_m \text{ (equação 4.1)}$$

Aplicando uma das restrições do modelo, ou seja,  $W_{f_{nc}}$  (Trabalho das forças não conservativas) = 0.

$$0 = \Delta E_m \text{ (equação 5.)}$$

A variação da energia mecânica pode ser escrita como a variação da energia cinética mais a variação da energia potencial gravitacional:

$$0 = \Delta K + \Delta U \text{ (equação 6.)}$$

A variação de uma grandeza é compreendida como a grandeza no seu estado final menos a grandeza no seu estado inicial:

$$0 = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) \text{ (equação 7.)}$$

Em que,  $K_f$  representa a Energia cinética final,  $K_i$  a Energia cinética inicial,  $U_i$  a Energia potencial gravitacional inicial e  $U_f$  a Energia potencial gravitacional final. Reagrupando os termos, temos:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \text{ (equação 8.)}$$

Como a esfera está sendo abandonada do repouso sua velocidade inicial é nula, o que implica que  $K_i = 0$ , o solo será o nosso nível de referência, ou seja,  $U_f = 0$ :

$$U_i = K_f \text{ (equação 9.)}$$

Aplicando as definições matemáticas de cada termo na equação 9, segue a equação 10:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} \text{ (equação 10.)}$$

Na equação 10,  $m$  representa a massa da esfera,  $g$  a aceleração gravitacional,  $h$  a altura do plano inclinado e  $v$  velocidade final da esfera. Desenvolvendo algumas manipulações na equação 10, temos a expressão final do modelo 1.1, que por sua vez é a mesma expressão de Torricelli para o movimento de queda livre.

$$v(h) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \text{ (equação 11.)}$$

### **Modelo 1.2: Energia conservada, com rolamento.**

Em comparação com o modelo 1.1, a condição  $W_{f_{nc}}$  (Trabalho das forças não conservativas) = 0 será mantida. Entretanto, neste modelo, será considerado a energia cinética de rotação que abreviaremos de  $K_r$ . Partindo da equação 6, acrescentando a parcela de variação da energia cinética rotacional:

$$0 = \Delta K + \Delta U + \Delta K_r \text{ (equação 6 – Acrescida da contribuição rotacional)}$$

Reforçamos, que a velocidade inicial é igual a 0 e que o solo é o nível de referência 0, sendo assim, nos resta:

$$U_i = K_f + K_{r_f} \text{ (equação 12.)}$$

A energia cinética rotacional é definida como:

$$K_f = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \text{ (equação 13.)}$$

Em que  $I$  é o momento de inércia e  $\omega$  a velocidade angular. A esfera que foi utilizada no experimento, é uma esfera maciça, logo seu momento de inércia é calculado pela expressão

$I_{\text{esfera}} = \frac{2.m.R^2}{5}$  (equação 14.). Na equação 14, temos que,  $m$  = massa da esfera e  $R$  = raio da esfera. Para este modelo será considerado uma rotação sem deslizamento, o que permite escrever  $\omega = \frac{v}{R}$  (equação 15.) em que  $v$  = velocidade da esfera e  $R$  = raio da esfera.

Partindo da equação 12 e aplicando as definições matemáticas das equações 13, 14 e 15, obtemos que a velocidade final pode ser calculada por:

$$v(h) = \sqrt{\frac{10.g.h}{7}} \text{ (equação 16.)}$$

### Modelo 1.3: Energia dissipada por atrito com o ar, sem rolamento.

Refinando o processo de modelagem, serão levadas em consideração as forças dissipativas. No modelo 1.3, a energia será dissipada pela força de resistência do ar, ou atrito com o ar, ou seja,  $W_{f_{nc}} \neq 0$ .

De acordo com Nussenzveig (2002) e Halliday (2014), o trabalho de uma força é calculado pela seguinte expressão.

$$W_f = F \cdot d \cdot \cos \alpha \text{ (equação 17.)}$$

Em que  $F$  representa o módulo da força,  $d$  representa o deslocamento, e  $\alpha$  representa o ângulo entre a força e o sentido do deslocamento da partícula/esfera. Na Figura 14, está representado a força de resistência do ar ( $\vec{F}_{ar}$ ) e o sentido de deslocamento ( $\vec{v}$ ) para o experimento. Vemos que a força de resistência do ar tem sentido oposto ao da velocidade, e que além disso, tanto a força de resistência do ar quanto a velocidade possuem direções paralelas a superfície do plano inclinado.

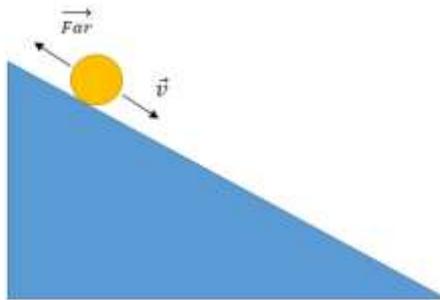


Figura 14: Representação da força de resistência do ar e sentido do movimento – Fonte: Autor, 2019.

A força de resistência do ar é calculada pela seguinte expressão:

$$\vec{F}_{ar} = \frac{C_a \cdot \rho_{ar} \cdot A \cdot v^2}{2} \text{ (equação 18.)}$$

Em que,  $C_a$  = Coeficiente de arrasto;  $A$  = área “frontal”;  $\rho_{ar}$  = densidade do ar = 1.22 kg/m<sup>3</sup>,  $v$  = velocidade da partícula/esfera. A equação 18 é possível de ser utilizada, pois consideramos uma aproximação de que depois de um certo deslocamento sobre o plano inclinado a velocidade comporta-se de forma constante. Para o desenvolvimento o modelo 1.3, é necessário relembrar a equação 4.1.

$$W_{f_{nc}} = \Delta E_m \text{ (equação 4.1)}$$

Aplicando na equação 4.1 as grandezas definidas anteriormente, temos:

$$F_{ar} \cdot d \cdot \cos \alpha = \frac{m \cdot v^2}{2} - m \cdot g \cdot h \text{ (equação 19.)}$$

Logo, a velocidade final para o modelo 1.3 é calculada pela expressão:

$$v(h) = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{\frac{C_a \cdot \rho_{ar} \cdot A \cdot d}{m} + 1}} \text{ (equação 20.)}$$

Para termos uma dependência totalmente da altura, o deslocamento ( $d$ ), será reescrito em função da altura ( $h$ ) e do ângulo do plano inclinado, sendo assim:

$$d = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot h = \sqrt{2} \cdot h \text{ (equação 21.)}$$

Aplicando a equação 21 na equação 20, é obtido a equação final para o modelo 1.3

$$v(h) = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h \cdot m}{m + \sqrt{2} \cdot C_a \cdot \rho_{ar} \cdot A \cdot h}} \text{ (equação 22.)}$$

#### **Modelo 1.4: Energia dissipada por atrito com o ar, com rolamento.**

Esse modelo é semelhante ao desenvolvimento do modelo 1.3, com uma alteração significativa para o desenvolvimento matemático e físico. Neste modelo 1.4, será incluído a contribuição da energia cinética de rotação. Partindo da equação 19, e acrescentando a contribuição da energia cinética de rotação,

$$F_{ar} \cdot d \cdot \cos \alpha = \frac{m \cdot v^2}{2} - m \cdot g \cdot h + \frac{I \cdot \omega^2}{2} \text{ (equação 23.)}$$

Aplicando na equação 23 as definições das equações 14, 15, 18 e 21. Explicitando a velocidade em função da altura:

$$v(h) = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h \cdot m}{7 \cdot m + 5 \cdot \sqrt{2} \cdot C_a \cdot \rho_{ar} \cdot A \cdot h}} \text{ (equação 24.)}$$

Nas modelagens para o experimento 2, é pretendido encontrar equações da velocidade  $v$ , em função do ângulo de inclinação do plano inclinado  $\theta$ , ou seja,  $v(\theta)$ .

#### **Modelo 2.1: Energia conservada, sem rolamento.**

Partindo da equação 11.

$$v(h) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = v(\theta) \text{ (equação 11.)}$$

Neste caso não é necessário reescrever a equação 11 em função do ângulo de inclinação do plano inclinado, visto que para todos os abandonos da bola de isopor a altura foi mantida fixa, e igual a 25 cm.

Portanto, para esse modelo, será obtido apenas um valor para velocidade final da bola de isopor, e esse valor será comparado com o que mais se aproximar dos valores experimentais.

### **Modelo 2.2: Energia conservada, com rolamento.**

Por argumentos análogos ao modelo 2.1, será obtido apenas um valor para velocidade, mesmo reescrevendo a altura (h) da equação 16 em função do ângulo do plano inclinado, temos que a altura é constante e igual a 25 cm.

$$v(h) = \sqrt{\frac{10.g.h}{7}} = v(\theta) \text{ (equação 17.)}$$

Novamente, o resultado obtido neste modelo será comparado com o que mais se aproximar dos valores experimentais.

### **Modelo 2.3: Energia dissipada por atrito com o ar, sem rolamento.**

Iniciando a modelagem, a partir da equação 20:

$$v(h) = \sqrt{\frac{2.g.h}{1 + \frac{C_a.P_{ar}.A.d}{m}}} \text{ (equação 20.)}$$

E utilizando a trigonometria do triângulo retângulo, podemos reescrever o deslocamento (d) sobre o plano inclinado em função da altura (h) e o ângulo de inclinação do plano, através da expressão:

$$d = \frac{h}{\text{sen}\theta} \text{ (equação 25.)}$$

Aplicando a equação 25, em 20. Temos a velocidade em função do ângulo:

$$v(\theta) = \sqrt{\frac{2.g.h.m.\text{sen}\theta}{m.\text{sen}\theta + C_a.\rho_{ar}.A.h}} \text{ (equação 26.)}$$

Portanto, a equação 26, possibilitará calcular as velocidades finais, em função do ângulo de inclinação do plano inclinado.

### **Modelo 2.4: Energia dissipada por atrito com o ar, com rolamento.**

Iniciando a modelagem matemática, a partir da equação 23:

$$F_{ar}.d.\cos\alpha = \frac{m.v^2}{2} - m.g.h + \frac{I.\omega^2}{2} \text{ (equação 23.)}$$

Aplicando as definições pertinentes na equação 23, inclusive a equação 25, temos a equação que norteará o modelo 2.4

$$v(\theta) = \sqrt{\frac{10.g.h.m.\text{sen}\theta}{7.m.\text{sen}\theta + 5.C_a.\rho_{ar}.A.h}} \text{ (equação 27.)}$$

#### 4.4 APLICAÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS MATEMÁTICOS E ERROS EXPERIMENTAIS

Com os modelos matemáticos desenvolvidos na seção 4.3, calcularemos as velocidades teóricas, e posteriormente, compararemos com o valor da velocidade final experimental disponibilizada pelo tracker. Para o cálculo do erro percentual será utilizada a expressão:

$$E\% = \frac{|Valor\ exato - Valor\ aproximado|.100\%}{Valor\ exato} \text{ (equação 28.) – Cálculo Numérico (Santos J. D., Silva Z. C.)}$$

Para este trabalho o valor exato será considerado o valor experimental, e o valor aproximado, será considerado os valores obtidos pelos modelos. Com o que foi desenvolvido, podemos aplicar os cálculos numéricos para os modelos matemáticos. Lembrando que as velocidades finais para os dois modelos estão resumidas nas tabelas 4.1 e 4.2.

##### • Cálculo numérico e erros percentuais modelo 1.1:

O modelo 1.1 é norteado pela equação 11, é percebido que para esse modelo, necessitamos apenas da aceleração gravitacional (g) que consideraremos como 10 m/s<sup>2</sup>, pois este é o valor adotado nos livros didáticos do ensino médio, e da altura de inclinação do plano inclinado:

Aplicando as alturas e utilizando o valor de (g) teórico, temos a sintetização dos dados na Tabela 4:

Tabela 4: Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.1

– Fonte: Autor, 2019.

Altura (metro)	Velocidade final – modelo 1.1 (m/s)	Velocidades experimental 1 – [TRACKER] (m/s)	E%
0,1	1,414	1,115	26,80%
0,2	2,000	1,646	21,50%
0,3	2,449	1,904	28,60%
0,4	2,828	2,493	13,40%
0,5	3,162	2,612	21,05%
0,6	3,464	2,796	23,90%
0,7	3,742	2,876	30,10%

0,8	4,000	3,44	16,30%
0,9	4,243	3,538	19,90%
1,0	4,472	3,774	18,49%
			E%(médio) $\approx$ 22%

Calculando os erros percentuais entre o experimento 1 e modelo 1.1, temos a tabela a seguir:

● **Cálculo numérico e erros percentuais modelo 1.2:**

Esse modelo é norteado pela equação 16, e novamente, considerando  $g = 10m/s^2$ , e aplicando os valores das alturas, temos os valores para velocidades finais experimentais, teóricas e erros relativo percentual sintetizados na tabela a seguir:

Tabela 5: Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.2

– Fonte: Autor, 2019.

Altura (metro)	Velocidade final – modelo 1.2 (m/s)	Velocidades experimentais 1 – [TRACKER] (m/s)	E%
0,1	1,195	1,115	7,17%
0,2	1,680	1,646	3,22%
0,3	2,070	1,904	8,72%
0,4	2,390	2,493	4,13%
0,5	2,673	2,612	2,33%
0,6	2,928	2,796	4,72%
0,7	3,162	2,876	9,94%
0,8	3,381	3,44	1,72%
0,9	3,586	3,538	1,36%
1,0	3,779	3,774	0,13%
			E%(médio) $\approx$ 4,34%

● **Cálculo numérico e erros percentuais modelo 1.3:**

Para esse modelo tomaremos como norte a equação 22, e a Tabela 6. Note que a equação 22 depende de: aceleração gravitacional ( $g$ ), altura de abandono ( $h$ ), coeficiente de arrasto ( $C_a$ ), Densidade do ar ( $\rho_{ar}$ ), área frontal da bola de isopor ( $A$ ) e massa da bola de isopor ( $m$ ).

Tabela 6: Dados experimentais para os modelos com resistência do ar – Fonte: (MARINHO, Cássio; et al)

Aceleração gravitacional - (g)	10 m/s <sup>2</sup>
Coefficiente de arrasto - ( $C_a$ )	0,4
Densidade do ar - ( $\rho_{ar}$ )	1,22 kg/m <sup>3</sup>
Área “frontal” bola de isopor - (A)	$A = \pi \times r^2 \approx 3,1416 \times 0,0375^2 = 0,00441787m^2$
Massa da bola de isopor - (m)	0,006 kg

Substituindo os dados da Tabela 6 e as alturas de abandono, na equação 22, obtemos os seguintes resultados para velocidades finais da bola de isopor e erros relativos percentuais:

Tabela 7: Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.3

– Fonte: Autor, 2019.

Altura (metro)	Velocidade final – modelo 1.3 (m/s)	Velocidades experimentais 1 – [TRACKER] (m/s)	E%
0,1	1,380	1,115	23,76%
0,2	1,906	1,646	15,80%
0,3	2,283	1,904	19,90%
0,4	2,577	2,493	8,40%
0,5	2,832	2,612	8,08%
0,6	3,032	2,796	8,44%
0,7	3,213	2,876	11,72%
0,8	3,373	3,44	1,95%
0,9	3,516	3,538	0,62%
1,0	3,643	3,774	3,44%
			E%(médio) $\approx$ 11,21%

#### • Cálculo numérico e erros percentuais modelo 1.4:

Esse modelo é norteado pela equação 24, deduzida na seção anterior. Para aplicação numérica, consideraremos os dados da Tabela 6, e aplicaremos na equação 24, juntamente, com os valores das alturas de abandono. Desenvolvendo o procedimento supracitado, temos a seguinte tabela.

Tabela 8: Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 1.4

– Fonte: Autor, 2019.

Altura (metro)	Velocidade final – modelo 1.4 (m/s)	Velocidades experimentais 1 – [TRACKER] (m/s)	E%
0,1	1,174	1,115	5,29%
0,2	1,632	1,646	0,85%
0,3	1,966	1,904	3,26%
0,4	2,234	2,493	10,38%
0,5	2,459	2,612	5,86%
0,6	2,653	2,796	5,11%
0,7	2,824	2,876	1,81%
0,8	2,976	3,44	13,49%
0,9	3,113	3,538	12,01%
1,0	3,238	3,774	14,20%
			E%(médio) $\approx$ 7,23%

● **Cálculo numérico e erros percentuais modelo 2.1:**

No desenvolvimento do modelo 2.1 foi mencionado que teríamos apenas um valor para a velocidade final, visto que esse modelo é norteado pela equação 11, e nesta, temos a velocidade dependendo da altura de abandono, e aceleração gravitacional. Como para o experimento dois a altura de largada é constante, sendo  $h = 0,25$  m e usando  $g = 10m/s^2$ . Ao aplicar os dados na equação 11, temos  $v \cong 2,236$  m/s.

Como dito, não é possível calcular o erro percentual médio, mas é possível comparar a velocidade final do modelo 2.1, com a velocidade final encontrada pelo Tracker para o ângulo de  $80^\circ$ , tendo como erro percentual 4,83%.

Tabela 9: Comparação entre experimento 2 e resultado encontrado no modelo 2.1 – Fonte: Autor, 2019.

Ângulo ( $^\circ$ )	Velocidade final experimento 2 [TRACKER] (m/s)	Velocidade final modelo 2.1 (m/s)	Erro relativo percentual
$80^\circ$	2,133	2,236	4,83%

● **Cálculo numérico e erros percentuais modelo 2.2:**

O cálculo numérico será norteado pela equação 17, sabendo que  $g = 10m/s^2$  e  $h = 0,25m$ . Temos que o valor da velocidade para esse modelo será de  $v \cong 1,890 m/s$ , esse valor é comparável com a descida em que  $\theta=40^\circ$ . Nesta situação, o erro percentual entre a velocidade experimental e velocidade do modelo é de 2,88%. É percebido que, quando um fator importante é considerado (o rolamento), é obtido uma comparação coerente com o ângulo de  $40^\circ$ .

Tabela 10: Comparação entre experimento 2 e resultado encontrado no modelo 2.2 – Fonte: Autor, 2019.

Ângulo (°)	Velocidade final experimento 2 [TRACKER] (m/s)	Velocidade final modelo 2.2 (m/s)	Erro relativo percentual
40°	1,946	1,890	2,88%

● **Cálculo numérico e erros percentuais modelo 2.3:**

A aplicação numérica decorrerá da equação 26, aplicando os dados da Tabela 6, e os ângulos de inclinação na equação seguinte. Temos a Tabela 11:

Tabela 11: Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 2.3

– Fonte: Autor, 2019.

Ângulo (°)	Velocidade final – modelo 2.3 (m/s)	Velocidades experimentais 2 – [TRACKER] (m/s)	E%
10	1,815	1,527	18,86%
20	1,990	1,555	27,97%
30	2,059	1,755	17,32%
40	2,094	1,946	7,61%
50	2,115	2,054	2,97%
60	2,128	2,073	2,65%
70	2,136	2,095	1,96%
80	2,141	2,133	0,37%
			E%(médio) $\approx$ 9,96%

● **Cálculo numérico e erros percentuais modelo 2.4:**

Utilizando os dados da Tabela 6 e aplicando na equação 27, é produzido a tabela:

Tabela 12: Altura de largada, velocidade teórica, velocidade experimental e erro relativo percentual – modelo 2.4

– Fonte: Autor, 2019.

Ângulo (°)	Velocidade final – modelo 2.4 (m/s)	Velocidades experimentais 2 – [TRACKER] (m/s)	E%
10	1,615	1,527	5,76%
20	1,734	1,555	11,51%
30	1,779	1,755	1,37%
40	1,802	1,946	7,40%
50	1,815	2,054	11,63%
60	1,823	2,073	12,06%
70	1,828	2,095	12,74%
80	1,831	2,133	14,16%
			E%(médio) $\approx$ 9,58%

#### 4.5 PROBLEMA DO PLANO INCLINADO EM LIVROS DE FÍSICA DO ENSINO MÉDIO

##### 4.5.1 Por que a investigação de livros do ensino médio?

A justificativa do objeto de análise ser o livro, ocorre em função da existência de um programa denominada Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que segundo o Ministério da Educação e Cultura (MEC), temos a seguinte definição para o Programa:

“O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.” (PORTAL MEC, 2018)

É percebido que esse programa garante para as escolas públicas conveniadas a disponibilização do livro didático, segundo o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) no município de Caruaru temos um total de 133 escolas públicas que aderiram ao PNLD em 2019, de um total de 172 escolas públicas (<http://www.escolas.inf.br/pe/caruaru>), ou seja, 77,3% das escolas de Caruaru tem por garantia o recebimento do livro didático. Tal fator, garante e motiva de que é uma vertente significativa desenvolver análises dos livros didáticos. As escolas podem ser carentes de estruturas, tais

como, laboratório de informática, laboratório de física e/ou ciências, mas através dos dados citados refletimos que o livro didático é um recurso de garantia mínima para o funcionamento das escolas públicas de Pernambuco.

#### 4.5.2 Livros do ensino médio analisados

A análise consistiu em quantificar as seguintes categorias, em relação as questões dos livros que envolvem o plano inclinado:

Tabela 13: Categorias de análise dos livros didáticos e siglas associadas – Fonte: Autor, 2019.

CATEGORIAS DE ANÁLISE	SIGLA
Não especificação da velocidade ou aceleração.	(NEVA)
Velocidade variável com aceleração constante.	(VVAC)
Velocidade variável com aceleração variável.	(VVAV)
Velocidade constante.	(VC)
Com atrito de contato com o solo.	(CAC)
Sem atrito de contato com o solo.	(SAC)
Com resistência do ar.	(CRA)
Sem resistência do ar.	(SRA)
Com rolamento.	(CR)
Sem rolamento.	(SR)

Nas subseções seguintes, serão expostas as análises de cada livro didático de escolas do ensino médio de Pernambuco.

##### 4.5.2.1 Livro 1: Conecte tópicos de física (Doca R. H., et al., 2014)

Este livro foi utilizado na Escola Teófilo Severino de Arruda no município de Frei Miguelinho-PE. Atualmente não é utilizado em sala de aula, mas serve como material complementar, recomendo pelo professor de Física da escola. As análises serão ilustradas nos gráficos, que estão representados nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10.

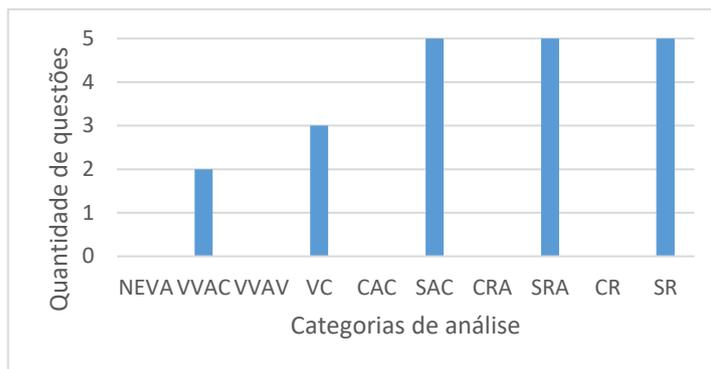


Figura 15: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 1 (um) referente à seção de cinemática. – **Fonte: Autor, 2019.**

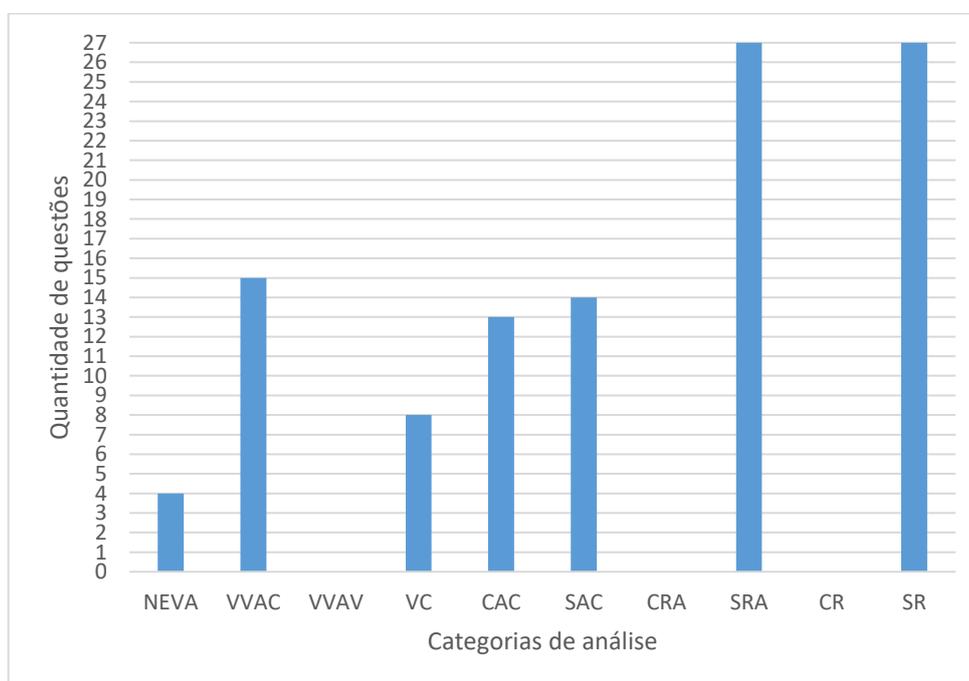


Figura 16: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 1 (um) referente à seção de Leis de Newton. – **Fonte: Autor, 2019.**

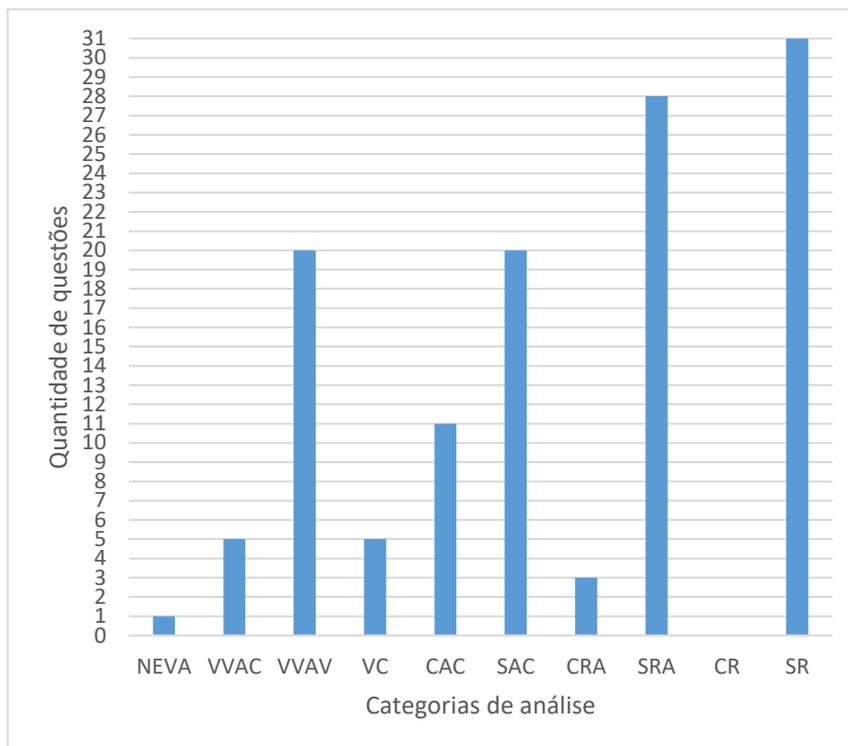


Figura 17: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 1 (um) referente à seção de Energia. – Fonte: Autor, 2019.

#### 4.5.2.2 Livro 2: Conexões com a Física (Martini. G. et al., 2016)

Livro utilizado na Escola de Referência em Ensino Médio Dom Miguel de Lima Valverde, localizada no município de Caruaru-PE, sua utilização deu-se a partir de 2018 e servirá de bibliografia principal até o ano de 2020. Os gráficos representados nas figuras 4.11, 4.12 e 4.13 representam as análises feitas

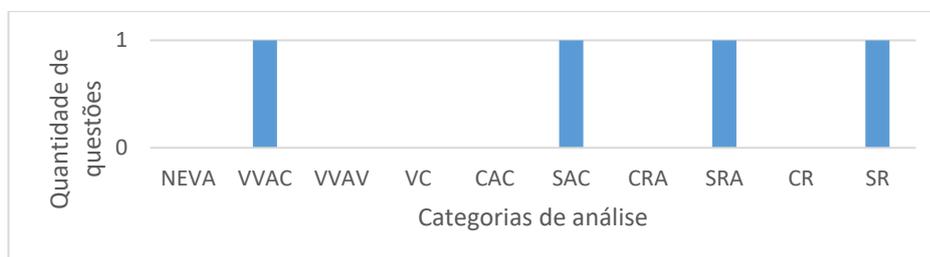


Figura 18: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 2 (dois) referente à seção de Cinemática. – Fonte: Autor, 2019.

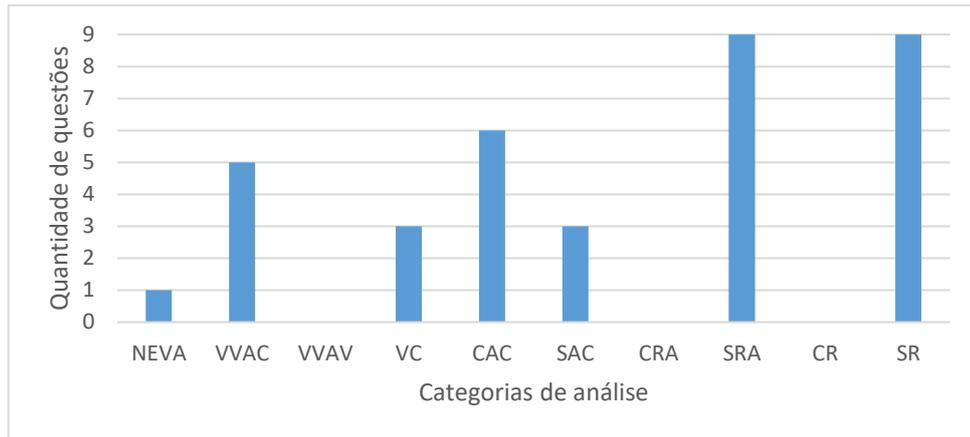


Figura 19: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 2 (dois) referente à seção de Leis de Newton. – **Fonte: Autor, 2019.**

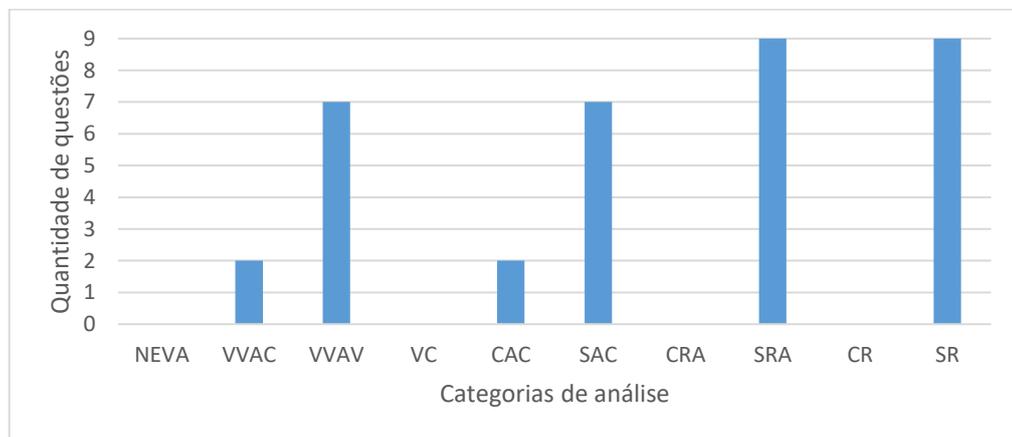


Figura 20: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 2 (dois) referente à seção de Energia. – **Fonte: Autor, 2019.**

#### 4.5.2.3 Livro 3: Física aula por aula (Filho B. B., Silva C. B. da, 2016)

Livro identificado como material de divulgação pelo PNLD (2018). Na seção de cinemática o livro não apresentava questões relacionadas ao plano inclinado, sendo assim, a análise começou a partir do capítulo de Leis de Newton. As análises gráficas estão nas figuras 4.14 e 4.15.

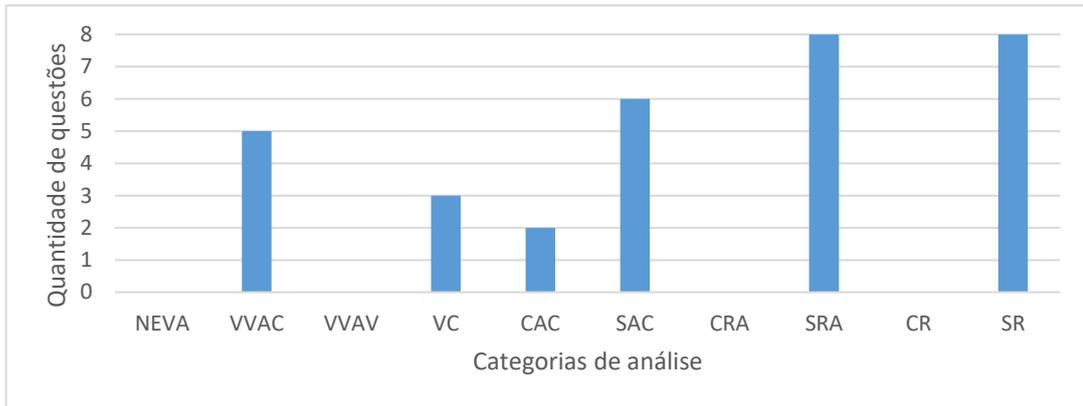


Figura 21: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 3 (três) referente à seção de Leis de Newton. – **Fonte: Autor, 2019.**

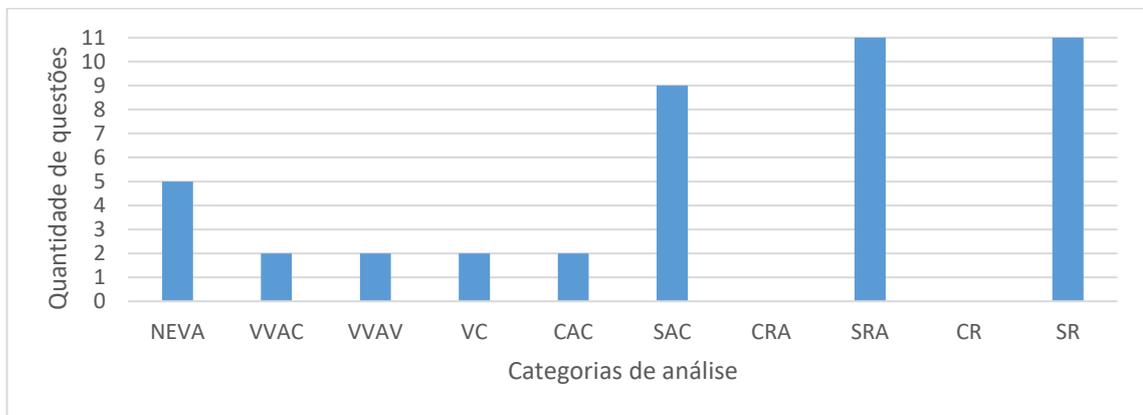


Figura 22: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 3 (três) referente à seção de Energia. – **Fonte: Autor, 2019.**

#### 4.5.2.4 Livro 4: Física: interação e tecnologia (Filho A. G., Toscano C., 2013)

Esse livro foi utilizado na Escola de Referência em Ensino Médio Manoel Gonçalves de Lima no município de Cumaru-PE entre os anos de 2015 à 2017, nos dias atuais é utilizado como bibliografia complementar. Segue os gráficos de análises desse livro, nas figuras 4.16, 4.17 e 4.18.

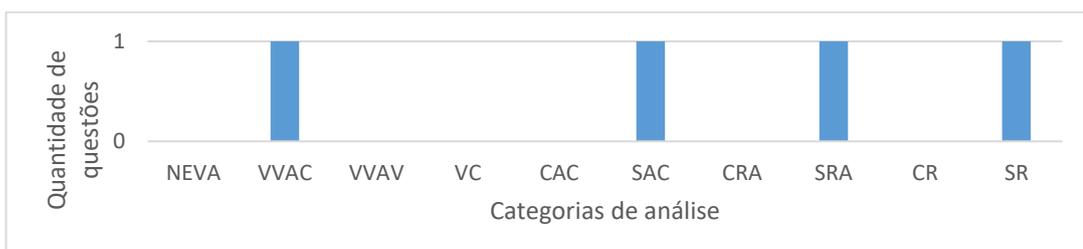


Figura 23: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 4 (quatro) referente à seção de Cinemática. – **Fonte: Autor, 2019.**

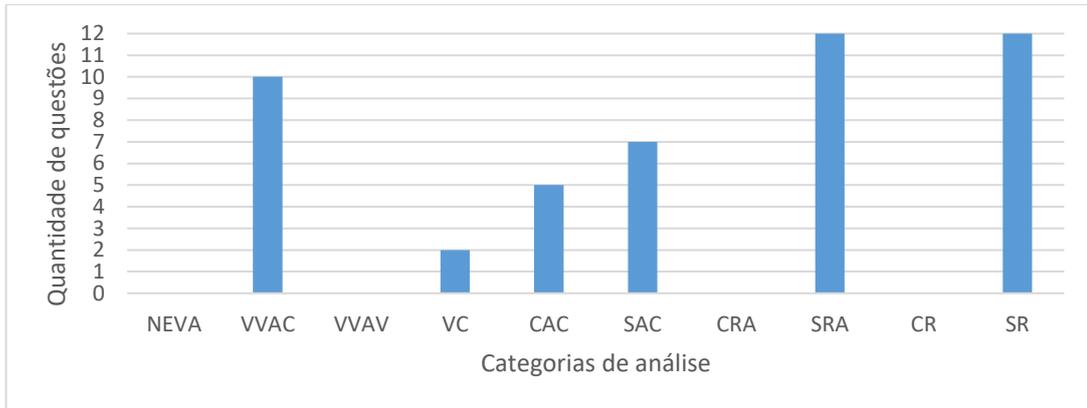


Figura 24: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 4 (quatro) referente à seção de Leis Newton. – **Fonte: Autor, 2019.**

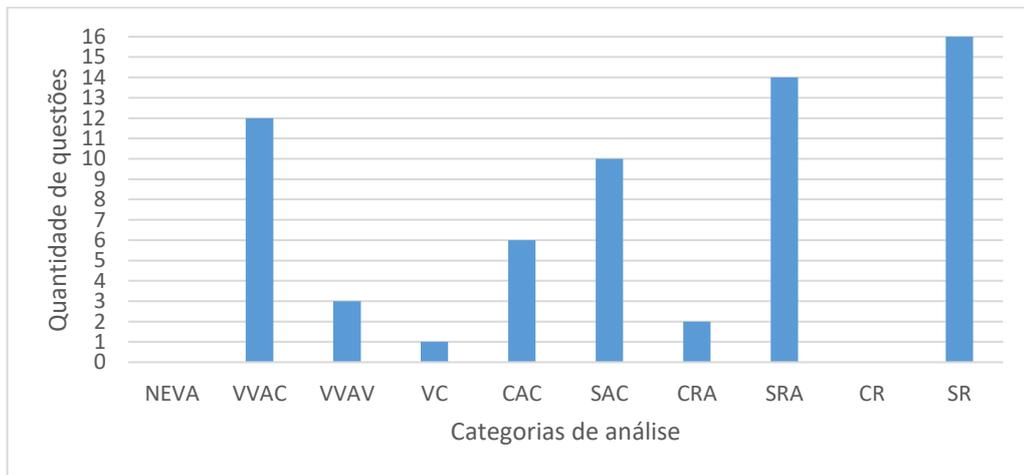


Figura 25: Gráfico de quantidade de questões vs. Categorias de análise do livro 4 (quatro) referente à seção de Energia. – **Fonte: Autor, 2019.**

## 5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Reforçando, os principais objetos de análise deste trabalho foram os desenvolvimentos de modelagens matemática para os dois experimentos propostos. Com os resultados encontrados através dos modelos foram aplicadas comparações de erro percentual com o resultado experimental disponibilizado pelo Tracker. Além desse desenvolvimento experimental, foi buscado em livros didáticos as grandezas físicas que os livros costumam considerar como pertinentes para resoluções dos exercícios.

Sobre as modelagens matemáticas foi almejado obter o menor erro percentual possível, resumidos na Tabela 14 e 15 para os modelos 1 e 2, respectivamente.

Tabela 14: Síntese e ranking dos modelos para o experimento 1 – **Fonte: Autor, 2019.**

RANKING	MODELO	PORCENTAGEM	DESCRIÇÃO
1º	MODELO 1.2	E%(médio) ≈ 4,34%	Energia conservada, com rolamento.
2º	MODELO 1.4	E%(médio) ≈ 7,23%	Energia dissipada por atrito com o ar, com rolamento.
3º	MODELO 1.3	E%(médio) ≈ 11,21%	Energia dissipada por atrito com o ar, sem rolamento.
4º	MODELO 1.1	E%(médio) ≈ 22,00%	Energia conservada, sem rolamento.

Na Tabela 14 é percebido que os melhores modelos foram os que levaram em consideração o rolamento, com erros percentuais de 4,34% e 7,23%, dado esse preocupante, tendo em visto que das 130 questões analisadas, nenhuma considera o rolamento como ferramenta necessária para resolução de questões. Além disso, é percebido um dado que gera inquietação, no modelo 1.1, que envolve a conservação de energia e despreza o rolamento, a inquietação decorre de que na maioria dos casos esse modelo é o mais frequente para resoluções de questões dos livros didáticos do ensino médio, e por sua vez, obteve o maior erro percentual, sendo este de 22%. Essa problemática pode distorcer o significado de ciência para os alunos.

No segundo experimento o pensamento de comparação através do erro percentual não funcionou para todos os modelos, pois alguns modelos tiveram como conclusão apenas uma medição, mas ainda assim, é possível levantar discussões pertinentes. No modelo 2.1, em que é desprezado forças dissipativas e considerado a conservação de energia, obtivemos a Tabela 10.

Tabela 10: Comparação entre experimento 2 e resultado encontrado no modelo 2.2 – **Fonte: Autor, 2019.**

Ângulo (°)	Velocidade final experimento 2 [TRACKER] (m/s)	Velocidade final modelo 2.2 (m/s)	Erro relativo percentual
40°	1,946	1,890	2,88%

Através da tabela supracitada, percebemos que o erro percentual entre o modelo e o experimento é de 4,83%. E o que isso implica em termos de discussão? É possível conjecturar que para elevados valores de ângulos de inclinação do plano inclinado (Limite angular  $< 90^\circ$ , para o caso que o ângulo é igual a  $90^\circ$ , temos uma queda livre), podemos desprezar o rolamento da esfera, e fazer a modelagem análoga ao movimento de queda livre.

Ainda sobre os modelos do experimento dois, temos o destaque de dois modelos, o 2.4 e 2.3, em que nesses modelos, foram possibilitados o desenvolvimento do cálculo do erro percentual, que está representa na tabela 15:

Tabela 15: Síntese e ranking dos modelos para o experimento 2 – Fonte: Autor, 2019.

RANKING	MODELO	PORCENTAGEM	DESCRIÇÃO
1º	MODELO 2.4	E%(médio) $\approx$ 9,58%	Energia dissipada por atrito com o ar, com rolamento.
2º	MODELO 2.3	E%(médio) $\approx$ 9,96%	Energia dissipada por atrito com o ar, sem rolamento.

Com a proposta de utilizar a matemática a nível de ensino médio, o experimento 2 (dois) não apresentou modelos com baixos erros percentuais médios, obtendo como menor erro 9,58%. Para este trabalho consideramos baixos erros percentuais, valores menores ou igual a 5%. Para uma situação que é considerado o atrito com o ar e o rolamento, apesar da não obtenção de um baixo erro percentual, temos uma possibilidade futura deste trabalho, em que podemos desenvolver modelos para o experimento dois com a matemática estudada no ensino superior, com a intenção de obter menores erros percentuais.

Para análise dos livros didáticos o gráfico da Figura 26 sintetiza a análise de todos os 4 (quatro) livros e de todas as seções analisadas, lembrando as seções de análise foram: cinemática, leis de newton e conservação de energia.

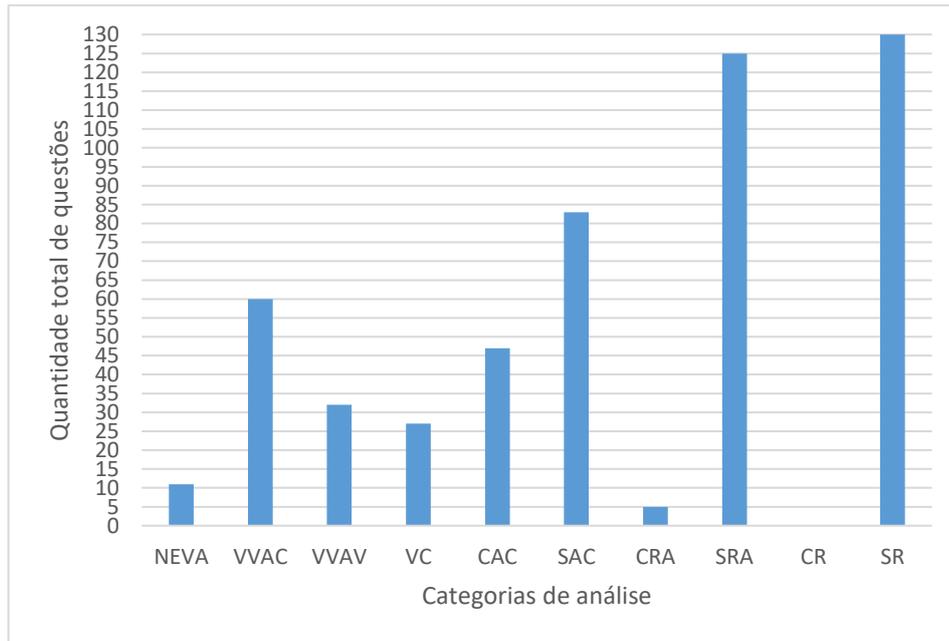


Figura 26: Quantidade total de questões analisadas vs. Categorias de análise. – Fonte: Autor, 2019.

Na introdução, apresentamos a possibilidade de que os livros didáticos simplificam em excesso as questões relacionadas a essa temática, e através da finalização da pesquisa esse pensamento foi concretizado. Note que de 130 questões analisadas todas não envolvem o rolamento para sua resolução. Outro fator percebido é, que 125 questões desprezam a resistência do ar como parâmetro. Tomando como referência os modelos matemáticos desenvolvidos, os melhores modelos foram os que consideraram rolamento e energia dissipada pelo ar, e são as entidades que não são utilizadas, ou quando utilizada dar-se em baixa frequência nos livros didáticos. Dado esse fator, os professores devem tomar cuidado com as simplificações em demasia existentes no livro didático, para não distorcer a visão de ciência dos discentes.

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Este trabalho apresenta uma investigação relacionada a quatro livros didáticos do ensino médio, sobre quais grandezas físicas as questões costumam considerar ou desprezar para sua resolução. Para tal foi proposto algumas categorias e, dentre elas foram analisadas 130 questões, a opção pela entidade de análise ser os livros didáticos foi fundamentada no capítulo 4, onde percebemos que as escolas tem como garantia mínima o recebimento do livro didático.

Para a etapa de análise dos livros, merece destaque as seguintes categorias que foram propostas: Consideração do rolamento, desconsideração do rolamento, consideração da resistência do ar, e desconsideração da resistência do ar. Das 130 questões analisadas todas desconsideraram o rolamento como parâmetro necessário para resolução das questões, e 125 desconsideraram a resistência do ar como item necessário para resolver as questões, tal fator serve de “alavanca” para que os professores chamem a atenção dos alunos para as delimitações de cada problema físico.

Além da investigação dos livros, foram desenvolvidos modelos matemáticos para dois problemas experimentais sobre plano inclinado, esses experimentos foram descritos no capítulo 4, e entre todos os modelos propostos, os que obtiveram o menor erro percentual foram os modelos que consideravam o movimento rotacional dos corpos e forças dissipativas como exemplo a resistência do ar, informações essas que podem ser confrontadas com os resultados obtidos nos livros didáticos que desprezam as principais grandezas presente nos melhores modelos obtidos para esse trabalho.

Por fim, este trabalho contribui para que os professores do ensino médio possam chamar a atenção dos alunos em relação as delimitações das questões relacionadas ao plano inclinado, e além disso os modelos matemáticos desenvolvidos poderão ser utilizados como atividades experimentais em turmas do ensino médio, os fatores mencionados contribuem substancialmente para o ensino de física visto que envolvem estudos relacionados a cinemática, leis de newton e energia que são praticamente os assuntos estudados no primeiro ano do ensino médio.

Há uma diversidade de possibilidades para propostas futuras desse trabalho, mas merece destaque duas possibilidades:

1 – Aplicar em sala de aula um dos experimentos, ou até mesmo os dois, e desenvolver com os alunos os modelos matemáticos para aprofundar a compreensão sobre a temática, essa aplicação pode ser feita de acordo com o apêndice A desse trabalho, ou o professor poderá pensar na

possibilidade de aplicar um questionário prévio e posterior a prática experimental para acompanhar/mapear o desenvolvimento dos alunos.

2 – Sobre os experimentos propostos foi utilizado apenas uma esfera de isopor e uma superfície de madeira, para experimentos futuros é possibilitado variar as superfícies o que causaria interferência no atrito entre o objeto e a superfície, além disso poderia ser variado o formato do objeto utilizado como cilindro, anel, entre outros, o que mudaria o momento de inércia e conseqüentemente a velocidade final do objeto, tais variações de parâmetros podem ser inseridas ampliando as possibilidades de investigação do professor/pesquisador.

## REFERÊNCIAS

- BASSANEZI R. C., **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**, São Paulo: Contexto, 2009.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: 2008. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 18 de nov. 2019.
- CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. As práticas experimentais no ensino de Física. In: CARVALHO, Anna Maria Pessoa de et al. **Ensino de física**. São Paulo: Cengage Learning, 2010. p. 53-78.
- DOCA R. H., BISCUOLA G.J., BÔAS N. V., **Conecte tópicos de física** vol. 1, São Paulo: Saraiva 2014.
- FILHO A. G., TOSCANO C., **Física: interação e tecnologia** vol. 1, São Paulo: Leya, 2013.
- FILHO, B. B., SILVA C. X., **Física aula por aula** vol.1, São Paulo: FTD, 2016.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Mecânica**. 9. ed. LTC, 2014. v. 1.
- MARINHO, Cássio; BARBOSA NETO, Euclides; MORENO, Thiago. **A Resistência do Ar e o Movimento de Projéteis**. Disponível em: <<https://www.if.ufrj.br/~carlos/inic/cassio/cassioJornada.pdf>>. Acesso em: 02 ago. 2019.
- MARTINI, G., SPINELLI, W., REIS, H. C., SANT'ANNA, B., **Conexões com a Física** vol.1, São Paulo: Moderna, 2016.
- MOURA, D. G.; HIGINO A. F. F. **Laboratório Aberto de Física: Proposta de uma metodologia adequada às demandas atuais**, 1996, disponível em:

<[http://www.tecnologiadeprojetos.com.br/banco\\_objetos/%7BF6C611CC-ACFF4848-B499-72A6C2C59C36%7D\\_relato%20lab%20de%20fisica.pdf](http://www.tecnologiadeprojetos.com.br/banco_objetos/%7BF6C611CC-ACFF4848-B499-72A6C2C59C36%7D_relato%20lab%20de%20fisica.pdf)>. Acesso em: 24 de maio de 2019.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. v. 1.

PORTAL FNDE. **FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação)**. Disponível em: <<https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico/item/11986-escolha-pnld-2019>> Acesso em: 03 de jun. de 2019.

PORTAL MEC. **PNLD (Programa Nacional do Livro Didático)**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>> Acesso em: 03 de jun. de 2019.

POZO, J. I.; CRESPO, M. A. G. **A aprendizagem e o ensino de ciências: do conhecimento cotidiano ao conhecimento científico**. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SANTOS, José Dias dos; SILVA, Zanoni Carvalho da. **Métodos Numéricos**. Recife: Editora Universitária UFPE, 2010.

SOUZA, Ednilson Sergio Ramalho de. **MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA: Registros de Representação Semiótica**. 2010. 123 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, UFPA, Belém, 2010. Disponível em:

<[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/2010/Fisica/dissertacao\\_ednilson\\_souza.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Fisica/dissertacao_ednilson_souza.pdf)>. Acesso em: 26 set. 2019.

**TRACKER** – Video analysis and modeling tool. Versão 5.1.2.; Disponível em: <<http://physlets.org/Tracker>>. Acesso em: 09 de set. 2019.

## **APÊNDICE A – SUGESTÃO DE SEQUÊNCIA DE ENSINO RELACIONADAS ÀS PRÁTICAS EXPERIMENTAIS E DE MODELAGENS MATEMÁTICAS.**

Uma possibilidade de aplicação desse processo, para professores da educação básica, decorre conforme a sequência explicitada.

Primeiro momento: Explicar como utilizar o Tracker, elucidando os principais fatores para determinar a velocidade final da bola de isopor. (Duração prevista: 20 à 30 minutos)

Segundo momento: Fazer as deduções para obter expressões da velocidade em função da altura ou ângulo, ou mostrar as expressões finais e explicar cada expressão pra turma. (Duração prevista: 1 hora e 30 minutos à 1 hora e 40 minutos)

Terceiro momento: Aplicação do grau IV de liberdade, permitir que os alunos construam o aparato experimental, levantem hipóteses, e obtenham os resultados com o auxílio do Tracker. (Duração prevista: 2 horas)

Quarto momento: Aula para expor os resultados e chegar as conclusões de qual foi o melhor modelo, levantar questionamentos de sobre o porquê de determinado modelo ser o melhor e que outros não sejam os mais adequados. (Duração prevista: 1 hora e 30 minutos)

É possibilitado aplicar essa temática nos meses finais do primeiro ano do ensino médio, pois sintetiza a maioria dos assuntos vistos no ensino médio: Cinemática, Leis de Newton e Energia. Como envolve os principais assuntos estudados no primeiro ano do ensino médio é de grande viabilidade a aplicação desse trabalho.

Para avaliar se a aplicação foi significativa, o professor aplicador poderá aplicar um questionário, ou um texto dissertativo para analisar a compreensão conceitual e matemática de cada aluno.