



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE FÍSICA - LICENCIATURA

**UMA ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS POR ESTUDANTES DE CURSO DE
FÍSICA – LICENCIATURA – CAA – UFPE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
CÁLCULO INTEGRAL E DIFERENCIAL I**

MACGAYVER MANOEL DO NASCIMENTO MACÊDO

CARUARU
2019

MACGAYVER MANOEL DO NASCIMENTO MACÊDO

**UMA ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS POR ESTUDANTES DO CURSO DE
FÍSICA – LICENCIATURA – CAA – UFPE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
CÁLCULO INTEGRAL E DIFERENCIAL I**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso Graduação em Física – Licenciatura do
Centro Acadêmico do Agreste da Universidade
Federal de Pernambuco, como requisito parcial
para a obtenção do título de licenciado em Física.

Orientador: Prof. Me. Paulo Roberto Câmara de
Sousa

CARUARU
2019

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

M141a Macêdo, Macgayver Manoel do Nascimento.
Uma análise de erros cometidos por estudantes do curso de Física – licenciatura –
CAA – UFPE na resolução de problemas de cálculo integral e diferencial I. / Macgayver
Manoel do Nascimento Macêdo. – 2019.

33 f. ; il. : 30 cm.

Orientador: Paulo Roberto Câmara de Sousa.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de
Pernambuco, CAA, Licenciatura em Física, 2019.
Inclui Referências.

1. Análise de erros. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral. 4. Aritmética. 5.
Álgebra. I. Sousa, Paulo Roberto Câmara de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.)

UFPE (CAA 2019-247)

MACGAYVER MANOEL DO NASCIMENTO MACÊDO

**UMA ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS POR ESTUDANTES DO CURSO DE
FÍSICA – LICENCIATURA – CAA – UFPE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
CÁLCULO INTEGRAL E DIFERENCIAL I**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso Graduação em
Física – Licenciatura do Centro
Acadêmico do Agreste da Universidade
Federal de Pernambuco, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Licenciado em Física.

Aprovada em: 16 / 09 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Profº. Me. Paulo Câmara Sousa (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco/CAA

Profº. Dr. Edelweis Jose Tavares Barbosa (Examinador1)
Universidade Federal de Pernambuco/CAA

Profº Dr. João Eduardo Ramos (Examinador 2)
Universidade Federal de Pernambuco/CAA

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus que me deu forças para concluir o curso, a minha mãe, meu pai e meus irmãos que sempre torceram e acreditaram em mim durante todos os momentos difíceis dessa jornada. E também, a minha namorada Jéssica que sempre me incentivou e me apoiou para que no final tudo terminasse bem.

Ao meu orientador, Prof. Me. Paulo Câmara que mesmo sendo do curso de Matemática, acreditou na minha ideia, foi paciente e esteve disponível para me ajudar na construção de todas as etapas deste projeto.

Agradeço a todos meus professores do curso de Física da UFPE/CAA e, também, do curso de Matemática que compartilharam comigo seus conhecimentos e me ajudaram a me tornar, com muito orgulho, também um professor de Física.

Aos meus amigos de curso e professores de Física, Vasco Junior e José Roberto de Jesus que, durante toda graduação compartilharam comigo momentos de alegria, angústia e, acima de tudo, momentos de aprendizagem.

Ao meu amigo e parceiro de viagens Toninho, do curso de Química e a todos os outros colegas da Van e do CAA que partilharam comigo deste momento único.

RESUMO

A análise de erros em provas de Matemática é algo que vem sendo motivo de pesquisas e estudos em vários níveis de ensino, especialmente, em nível superior. O Cálculo Integral e Diferencial é uma disciplina comum e obrigatória entre os cursos graduação na área de exatas, pois, ele tem inúmeras aplicabilidades nestas áreas, o que nos leva a fazer uma reflexão acerca de sua importância. Diante disso, faz-se necessário um estudo que busca entender o que leva os alunos a cometerem erros em avaliações desta disciplina, pois, através do Cálculo, é possível compreender e explicar diversos fenômenos físicos. Este trabalho objetiva-se, de modo geral, fazer uma análise dos erros cometidos pelos alunos do curso de Física-Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste nas avaliações de Cálculo I, no período de 2015.2. Diante da extensa ementa do curso, foi analisada apenas a avaliação do segundo exercício escolar que tratava dos conteúdos de derivada e integral. A pesquisa tem caráter qualitativo e quantitativo e os dados estatísticos obtidos foram expressos em tabelas e gráficos que serão mostrados ao longo do trabalho. Concluímos que os erros cometidos estão relacionados com a falta de conhecimento em Matemática advinda do ensino básico, e, em grande parte, com os próprios conceitos da disciplina de Cálculo I.

Palavras-chave: Análise de Erros. Cálculo I. Aritmética. Álgebra.

ABSTRACT

Error analysis in math tests is something that has been the subject of research and study at various levels of education, especially at the higher level. Integral and Differential Calculus is a common and compulsory subject among undergraduate exact courses, as it has several applicability in these areas, which leads us to reflect on its importance. Therefore, there is a necessary study that seeks to understand what leads students to make mistakes in the tests of this discipline, because, through Calculation, it is possible to understand and explain various physical phenomena. This paper aims to analyze the mistakes made by students of the Physics course at the Academic Center of Agreste in Calculus I Evaluations, in the period of 2015.2. Given the length of the current course, only an assessment of the second school year dealing with derived and full content was analyzed. The research has qualitative character and the selected statistical data were expressed in tables and graphs that will be shown throughout this. We conclude that the errors are related to lack of knowledge in mathematics, beyond basic education and, to a large extent, to the specific concepts of the calculus discipline I.

Keywords: Error analysis. Calculation I. Arithmetic. Algebra.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
2	OBJETIVOS.....	11
2.1	Objetivo Geral.....	11
2.2	Objetivos Específicos.....	11
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	12
4	METODOLOGIA.....	15
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	17
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	29
	REFERÊNCIAS.....	31
	ANEXO A – AVALIAÇÃO APLICADA E USADA NA PESQUISA.....	32

1 INTRODUÇÃO

A análise de erros em provas de Matemática é algo que vem sendo motivo de pesquisas e estudos em vários níveis de ensino, especialmente, em nível superior. As dificuldades de ensino e aprendizagem, o baixo aproveitamento e o grande número de reprovações em disciplinas de matemática levaram professores e pesquisadores ao interesse em descobrir o motivo pelo qual isto ocorre, como também, encontrar maneiras mais eficazes de se trabalhar as dificuldades dos discentes e, as metodologias usadas pelos docentes nas salas de aula.

O interesse em para fazer uma pesquisa em análise de erros surge a partir de uma motivação pessoal, pois no início de minha graduação tive muita dificuldade em disciplinas relacionadas com a Matemática. Tais dificuldades me levaram a um baixo aproveitamento e reprovações em disciplinas como Matemática Básica, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e, principalmente, a Física. Isso acabou se tornando uma barreira a ser superada na minha graduação e motivou esse trabalho de pesquisa.

A dificuldade de ensino e aprendizagem em matemática desde o ensino básico ao ensino superior é uma realidade de todas as escolas, faculdades e universidades em todo território nacional e, pode se tornar uma imensa barreira a ser superada por um aluno recém-concluinte do ensino médio ao ingressar em um curso de nível superior na área de exatas, onde o conhecimento da matemática é indispensável.

A preocupação com essa situação levou, pesquisadores, estudantes de graduação, professores e alunos de pós-graduação a se reunir para discutir o problema visando mudar esse quadro. Nesse sentido, a educação matemática surge para ajudar a compreender os processos de mudança.

Barbosa (2004) cita a importância do sentido para a real importância do Cálculo no ensino superior.

“Sabemos que a falta de sentido na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral origina-se, em parte, das dificuldades decorrentes dessa transposição. O aluno só compreende os vínculos do conteúdo estudado quando fica compreensível para ele essa passagem. Por isso, contextualizar no ensino de Cálculo vincularia os conhecimentos aos lugares onde foram criados e onde são aplicados, isto é, incorporar vivências

concretas ao que vai se aprender e incorporando o aprendizado a novas vivências. (BARBOSA, 2004, p. 41).”

A partir dessa ideia de ter um ensino contextualizado citado por Barbosa, percebe-se que o conteúdo estudado deve ter um sentido real com a vida dos estudantes, ou com a vida acadêmica dos mesmos, como por exemplo, uma situação em que se aplica a derivação ou integração em um problema relacionado à cinemática.

O Cálculo Integral e Diferencial é uma disciplina comum e obrigatória entre os cursos graduação nestas áreas. Ele faz parte da grade curricular dos cursos de todas as engenharias, da Ciência da Computação, da Matemática, da Química, da Física, entre outros. Portanto, ao ingressar em um curso de Física-Licenciatura como o curso oferecido na UFPE/CAA o discente, logo no segundo período do curso se encontra com algo novo, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, que tem inúmeras aplicações nas ciências. Uma dessas aplicações na Física pode ser observada na teoria eletromagnética onde as leis do Eletromagnetismo são expressas em quatro equações que usam o Cálculo para sua dedução, conhecidas como as Equações de Maxwell, na Matemática, ele pode ser usado nas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para modelar um problema de crescimento populacional, na economia o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal, entre outras áreas do conhecimento que o Cálculo pode ser aplicado.

Para que o aluno tenha boa aprendizagem e bom aproveitamento nessa disciplina, é importante que ele tenha domínio de conteúdos como: Álgebra, Polinômios, Frações, Funções, entre outros conhecimentos básicos necessários.

Segundo Cury (1990), as causas dos erros em um determinado conteúdo do Cálculo estão relacionadas, principalmente, com as dificuldades nos conceitos básicos da Matemática. Além dessas competências exigidas, que são trabalhadas no primeiro período do curso, na disciplina de Matemática Básica, os alunos têm que aprender algo totalmente novo, ou seja, os conceitos e aplicações do Cálculo I, que englobam os limites, as derivadas e as integrais.

Tendo em vista a grande variedade dos assuntos desta disciplina, em particular trabalharemos com a análise de questões de uma prova do segundo

exercício escolar da turma de Física do período de 2015.2, que relacionam as derivadas e as integrais, as quais têm diversas aplicabilidades na Física.

Diante disso, nosso problema de pesquisa é: análise de erros cometidos por estudantes de Física Licenciatura na resolução de problemas de Cálculo Integral e Diferencial I.

Como finalidade, a pesquisa em questão irá limitar o estudo em apenas identificar, classificar e quantificar os erros cometidos pelos alunos. Uma possível proposta de se trabalhar com os erros cometidos pelos alunos deve ser feita em trabalhos futuros ou ficar como sugestão para outros trabalhos que tratam do assunto.

Esta é uma pesquisa de caráter qualitativo e quantitativo, cujos resultados, discussões e análises ainda serão apresentados nas etapas seguintes deste trabalho. Na fundamentação teórica serão mostrados alguns trabalhos que tratam dos erros cometidos pelos alunos em provas de Cálculo, logo em seguida trazemos a metodologia que utilizamos para realização da pesquisa, a turma em que foram coletadas as avaliações, com também seu ano e semestre de realização. Na etapa seguinte, mostramos os resultados da investigação, expressos em tabelas, onde é possível fazer um levantamento do aproveitamento dos alunos nas avaliações.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

- Investigar o desempenho de alunos do curso de Física – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da UFPE em resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I) relacionados com os conteúdos de derivadas e integrais.

2.2 Objetivos Específicos

- Identificar os erros de atenção, conceitual e nos cálculos aritméticos e algébricos cometidos pelos alunos na resolução de uma prova de Cálculo (Cálculo I) em questões de uma prova aplicada no período letivo de 2015.2. As provas foram escolhidas aleatoriamente do acervo de provas do professor Paulo Câmara, orientador deste trabalho;
- Analisar quantitativamente e qualitativamente os erros dos sujeitos na resolução dos problemas da avaliação.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O cálculo diferencial e integral é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas e a acumulação de quantidades. Onde há movimento ou crescimento em que forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada.

Ao ingressar em curso superior os estudantes se deparam com uma realidade totalmente diferente da que viveram no ensino básico, fundamental e médio, especialmente, aqueles que optaram por um curso de exatas como a Matemática, a Física, a Química e as engenharias. Os primeiros períodos de um curso de exatas exige que os estudantes tenham conhecimentos básicos das ciências exatas e da Matemática que foram, ou deveriam ter sido construídos no ensino médio. Desde os primeiros anos do ensino básico, a matemática vem sendo trabalhada com mais intensidade nas escolas públicas e privadas do país, não por ser mais importante que outras disciplinas, mas sim, porque há uma maior dificuldade no seu ensino e aprendizagem. Em muitos casos, os estudantes ingressam no curso superior com muita dificuldade em matemática e só tem os primeiros contatos com o Cálculo Diferencial e Integral quando começam a graduação. Essa dificuldade trazida do ensino básico pode se tornar uma barreira a mais para ser superada diante da disciplina de Cálculo I.

Pesquisas apontam que as dificuldades mais sérias estão relacionadas com conteúdos de ensino básico, especialmente, com problemas que vêm da sétima e oitava séries do ensino fundamental e conteúdos do ensino médio, quando são estudados, em geral, conteúdos de álgebra e funções.

Em seu artigo “Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigação em cursos de engenharia”, Helena Noronha Cury (2003) afirma: “Tendo realizado várias investigações sobre erros cometidos por alunos de Cálculo de cursos de engenharia, observamos que os estudantes, em geral, não dominam conteúdos de álgebra, trigonometria e geometria do ensino básico”. A falta de domínio destes conteúdos básicos logo nos primeiros semestres faz com que muitos estudantes tirem notas muito baixas nas avaliações em disciplinas de Cálculo, especialmente, Cálculo Diferencial e Integral I e, com isso, muitos deles acabam

reprovando, desistindo da disciplina antes mesmo do término da mesma e, também, muitos desistem do curso.

Alguns aspectos que estão relacionados aos discentes e aos docentes sobre as causas da não aprendizagem da disciplina de Cálculo são citados por Thainnã T. Oliveira Sena e Ademária A. de Souza (2015) em seu artigo, Causas de dificuldades no Ensino-Aprendizagem de Cálculo diferencial e integral na perspectiva dos alunos e dos professores do curso de Matemática.

“Os principais aspectos relacionados aos discentes são: pouco tempo dedicado ao estudo da disciplina fora da sala de aula, participação limitada nas aulas, falta de hábito constante de realizar consultas a outras fontes de estudo, não procura o professor para esclarecer dúvidas, desinteresse e a falta de esforço para aprender o conteúdo da matéria, deficiência de conhecimentos básicos de matemática. Se preocupa apenas em obter créditos desta disciplina e não em aprendê-la. Embora na visão dos alunos os professores apresentem domínio do conteúdo, cita-se como aspectos relacionados aos docentes: metodologia do professor utilizada em sala de aula e rigorosidade nos critérios de avaliação (aplicação e correção), a maioria não relaciona os conteúdos da disciplina com outras áreas do conhecimento.”

Esses aspectos citados acima devem ser pensados na hora de se fazer um estudo sobre as causas dos erros. A princípio, o foco da pesquisa está em identificar e classificar os erros cometidos pelos alunos nas provas de Cálculo I, sendo que, nesse sentido, não há preocupação em investigar as causas dos erros, portanto, a análise dos mesmos se coloca apenas como uma maneira de criticar o desempenho dos alunos ou a ainda a maneira de ensinar dos professores. Em um estudo mais aprofundado do tema, não queremos apenas nos limitar a isto, mas sim, compreender os erros e fazer um estudo de como eles podem contribuir para o processo de ensino aprendizagem.

Deve-se analisar o erro a partir de uma perspectiva construtiva, em que ele se coloca como um instrumento de reflexão do professor, como fala Neuza Bertoni Pinto (1998) em sua tese de doutorado, “O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar”.

Em outra concepção de avaliação, preocupada mais com a formação do aluno em termos de aprendizagens significativas e duradouras, o erro deixa de ser apenas uma resposta a ser analisada; passa a ser uma questão desafiadora que o aluno coloca ao professor, portanto, um elemento desencadeador de um amplo questionamento de *ensino*. (Bertoni Pinto, 1998, p. 10).

Partindo dessa ideia, o erro passa a ser parte integrante do processo de construção do conhecimento. Ele é algo que não deve ser apenas identificado e corrigido pelo professor. O professor deverá ser o agente mediador que tenta buscar maneiras de perturbar o sistema cognitivo dos alunos. Para que isso ocorra, as situações problemas e os exercícios de Cálculo deverão ser algo que despertem a dúvida, o interesse, e faça com que os alunos se sintam desafiados. O erro, como também o acerto, faz parte de todo processo de construção do ensino aprendizagem.

A abordagem construtivista a partir de Piaget tem outra visão do erro. Nela, tem-se a ideia de que o erro é algo que deva acontecer para que assim possa ser identificado e explorado.

(...) um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas consequências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas ideias (Piaget, apud Casávola et al 1988: 43).

Essa perspectiva proposta por Piaget apresenta uma visão bem mais aberta, aceitando os erros cometidos pelos alunos e até estimulando sua ocorrência considerando as possibilidades que se abrem para o sujeito construtor do conhecimento. A partir dos erros cometidos, os professores e os discentes poderão levantar novas hipóteses e ideias para a resolução dos mesmos e, assim, poderão ter novas descobertas matemáticas.

3 MEDODOLOGIA

Nesse estudo utilizamos como instrumento de pesquisa uma prova de Cálculo Diferencial e Integral I que foi aplicada como 2º exercício escolar numa turma de estudantes de Física do CAA – UFPE no semestre letivo 2015.2. Essa prova foi selecionada, de modo aleatório, dentre outras das turmas de Física que se encontravam no acervo do Prof. Paulo Câmara e que avaliava conteúdos de derivada e integral. Ao todo trinta e três provas foram colhidas para análise, sendo que nove destas obtiveram o conceito 10, assim, foram analisadas as outras vinte e quatro avaliações, pois continham algum tipo de erro.

A prova continha um total de oito quesitos que, em síntese, avaliavam conhecimentos sobre: (1) regra da cadeia, (2) equação da reta tangente, (3) diferenciação de funções exponenciais e logarítmicas, (4) Integral de funções polinomiais, (5) Aplicação da integral a uma situação contextualizada da Cinemática, (6) Cálculo de área, (7) Cálculo de área e (8) Aplicação da integral numa situação contextualizada tratando de crescimento populacional.

Analizamos as resoluções das oito questões de 24 provas, de um total de 33. Foram excluídas 9 provas pelo fato de suas notas terem sido a máxima (dez) e em nenhuma delas constatarmos a presença de erros dos tipos que estavam sendo investigados. Ao fazer as correções e análises, criamos quatro categorias para nomear os erros encontrados e as chamamos de: erros *aritméticos*, *algébricos*, *conceituais* e de *atenção* que descrevemos a seguir.

- *Erro Aritmético* (EA), em que o sujeito comete ao lidar com cálculos numéricos envolvendo as operações básicas, potenciação, radiciação, sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves) e propriedades operatórias nos diferentes campos numéricos.

Exemplo:

$$(-4 + 8)^2 = (-4)^2 = -16$$

- *Erro Algébrico* (EAL) que ocorre em operações e situações envolvendo como, por exemplo, cálculo algébrico, equações e funções.

Exemplo:

$$(a^2 + b)^2 = a^4 + b^2$$

- *Erro Conceitual* (EC): quando o estudante utiliza equivocadamente um conceito ou propriedade matemática para resolver determinada situação.

Exemplo:

Se um móvel tem equação da velocidade $v(t) = 3t^3 - 2t$, então a equação do espaço é $s(t) = v'(t) = 9t^2 - 2$.

No exemplo, para obter a equação do espaço deve-se integrar a equação da velocidade, ou seja, $s(t) = \int v(t)dt$.

- *Erro de Atenção* (EAT): erro que ocorre quando o sujeito, ao lidar com números, letras, leituras de enunciados, omite ou insere dados sem nenhuma relação com a situação que estava sendo resolvida.

Exemplo:

A derivada da função

$$f(x) = 2e^{-3x}$$

é

$$f'(x) = e^{-3x} \cdot (-3x)' = e^{-3x} \cdot (-3) = -3e^{-3x}.$$

No caso, vê-se que o número 2 (em vermelho) foi suprimido da função durante o processo de derivação, o que levou ao resultado $-3e^{-3x}$ quando, na verdade, deveria ser $-6e^{-3x}$.

Ao todo foram analisadas 24 provas num total de 192 questões, excluindo aquelas que receberam o conceito “certo” e dedicamos atenção especial naquelas que receberam o conceito “meio certo” em que aparecia a palavra *erro* com uma seta indicativa e, em especial, naquelas que receberam o conceito “errado”.

Fizemos um levantamento estatístico dos erros, questão por questão, cujos resultados apresentamos no capítulo seguinte – Resultados e Discussões – com apresentações de alguns deles e são levantadas hipóteses do por que de tais erros.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao analisa as provas de Cálculo diferencial e Integral I de uma turma de Física do 2º semestre da UFPE/CAA nos deparamos com muitos erros cometidos que estão relacionados com os que já foram citados acima e, a partir disso, tentamos compreender os motivos pelo qual os estudantes não dominam tais conteúdos básicos e, também, conteúdos próprios do ensino de Cálculo.

A prova era composta de oito questões relacionadas à obtenção e aplicação de derivadas e integrais de funções de uma variável. E uma síntese do rendimento dos 33 alunos da turma pode ser observada no quadro abaixo:

Nota (N)	Número de alunos
10,00	9
Maior ou igual a 7	14
Entre 5 e 7	1
Entre 0 e 5	5
0,0	4

Em relação à quantificação dos erros, nós, pesquisador e orientador do trabalho, que optamos por classificá-los em erro aritmético (EA), erro algébrico (EAL), erro conceitual (EC) e erro de atenção (EAT), mostramos os resultados a seguir, questão por questão, em tabelas, acompanhadas de exemplos.

A primeira questão, que avaliava uma aplicação da regra da cadeia no contexto das funções polinomiais, tinha o enunciado seguinte:

Use a regra da cadeia para calcular a derivada dy/dx no ponto especificado pelo valor de x_0 .

$$y = 5u^4 + 12u^3; u = x + 2; x_0 = -4$$

Todos os 24 alunos responderam esse quesito e os percentuais de erros por categoria estão apresentados na Tabela 01 a seguir.

Tabela 01			
EA	EAL	EC	EAT
8%	4%	25%	8%

É importante ressaltar que nos recortes das avaliações abaixo, junto às respostas dos discentes, tem as correções do professor orientador da disciplina e anotações do próprio pesquisador.

Vejamos exemplos de alguns erros cometidos pelos alunos nessa situação com um recorte da prova mostrando a resolução da questão feita por eles e abaixo mostramos com mais detalhe onde ocorreu o erro:

Recorte da prova

①. $y = 5u^4 + 12u^3$; $u = x + 2$, $x = -4$

$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}$

$y = 5u^4 + 12u^3$

$u = x + 2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$\frac{dy}{du} = 20u^3 + 36u^2 \cdot 1$

$\frac{dy}{du} = 20(x+2)^3 + 36(x+2)^2 \cdot 1$

$x = -4$ $[20(-4+2)^3 + 36(-4+2)^2] \cdot 1$

$(-4+2)^3 = -8$

$20(-4-64) + 36(-4+16) - 4 \cdot 1 =$

28662

- *Erro aritmético: esse primeiro exemplo não está no recorte da prova,*

$$20 \times (-4 + 2)^3 + 36 \times (-4 + 2)^2 = 20 \times 8 + 36 \times 4 = 160 + 144 = 304,$$

que classificamos como erro aritmético;

- *Erro de atenção e aritmético:*

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} * \frac{du}{dx} \quad u = x + 2$$

$$\frac{dx}{du} = 20u^3 + 36u^2 * 4$$

$$\frac{dx}{du} = 20(x+2)^3 + 36(x+2)^2 - 4$$

$$[20(-4+8)^3 + 36(-4+4)^2] - 4 - 4$$

$$20(-4-64) + 36(-4+16) - 4 - 4 = 28662$$

A segunda questão, cujo enunciado aparece abaixo, pedia que fosse determinada a equação da reta tangente a uma curva cuja equação algébrica era uma função racional, num ponto de abscissa x_0 .

Determine a equação da reta tangente à curva da função dada no ponto especificado pelo valor de x .

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}; x_0 = 1$$

Como dois alunos não responderam o quesito, o cálculo dos percentuais de erros cometidos foi feito tomando-se como unidade o valor 22. Os resultados aparecem na Tabela 02 abaixo. O percentual foi feito a partir dos 22 alunos que responderam.

Tabela 02			
EA	EAL	EC	EAT
5%	9%	41%	5%

Nesse item, o índice de erro conceitual foi bem elevado em relação aos demais. Vejamos um exemplo de erro cometido pelo aluno nessa situação com um recorte da prova mostrando a resolução da questão feita por ele e abaixo mostramos com mais detalhe onde ocorreu o erro:

Recorte da prova

Handwritten student work on lined paper. The student is calculating the derivative of $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$ at $x_0 = 1$. The work shows several steps with errors circled in red and labeled 'E.C.' (Error Conceptual) in green. The errors are: 1) Deriving the inner function $2x-1$ as $2x$ instead of 2 . 2) Applying the chain rule incorrectly by multiplying by $2x$ instead of 2 . The final result is -6 .

g:

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$$

$x_0 = 1$

E.C.

$$f(x) = (2x-1)^{-3}$$

$$f'(x) = -3 \cdot (2x-1)^{-4} \cdot (2x-1)'$$

$$f'(x) = -3 \cdot (2x-1)^{-4} \cdot 2x \rightarrow \text{deriva errado}$$

$$y_0 = f(x_0) = -6x \cdot (2x-1)^{-4}$$

$$f'(x_0) = f'(1) = -6 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)^{-4}$$

$$= -6 \cdot (-1)^{-4}$$

$$= -6$$

O estudante, equivocadamente, assumiu que a derivada da função afim $y = 2x - 1$ é a função $y' = 2x$.

$$f(x) = (2x - 1)^{-3}$$

$$f(x) = -3 \times (2x - 1)^{-4} \times (2x - 1)'$$

$$f(x) = -3 \times (2x - 1)^{-4} \times (2x)$$

Notadamente, reconhecemos que, no caso, pode ter ocorrido um erro de atenção, mas optamos por incluí-lo no grupo do erro conceitual.

A questão 3, que continha dois itens, pedia que fossem determinadas as derivadas de funções exponenciais e logarítmicas.

Diferencie: a) $f(x) = 2e^{-3x}$

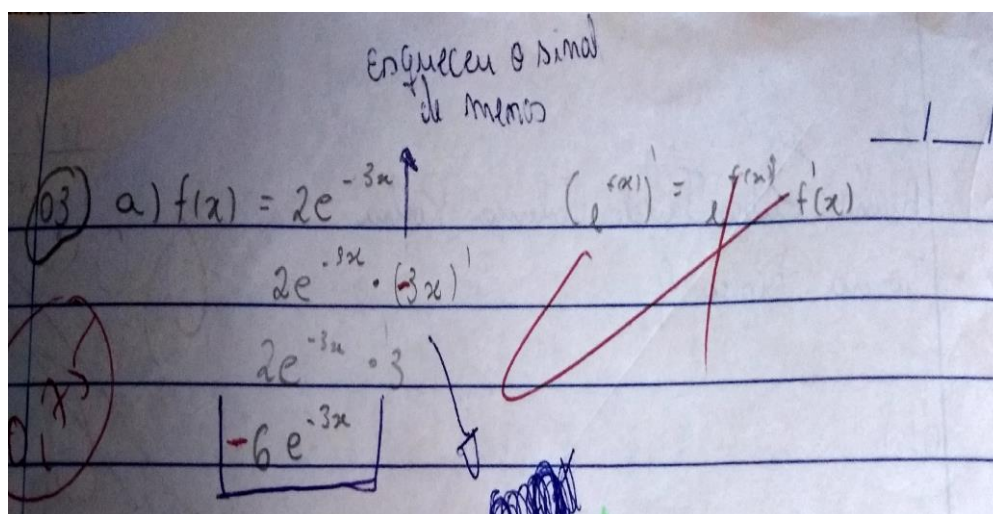
b) $f(x) = e^{2x} \ln 2x$

Três discentes deixaram os itens (a) e (b) em branco e nesse caso o cálculo percentual ocorreu considerando-se um total 21 sujeitos. Observemos os resultados na Tabela 03.

Tabela 03			
EA	EAL	EC	EAT
0%	5%	62%	29%

Exemplo de erro cometido com um recorte da prova e detalhado logo em seguida.

Recorte da prova



Nesse quesito, letra (a), veja um erro de atenção cometido por um dos sujeitos:

$$f(x) = 2e^{-3x}$$

$$f'(x) = 2e^{-3x} \times (3x)'$$

$$f(x) = 2e^{-3x} \times 3 = 6e^{-3x}.$$

O erro de atenção ocorreu quando o sujeito, na segunda igualdade, derivou a função $y = 3x$ quando deveria ter sido $y = -3x$, o que levou à resposta $6e^{-3x}$ quando a resposta correta seria $-6e^{-3x}$.

O quarto quesito, que também continha dois itens, pedia que fossem calculadas duas integrais sendo uma indefinida e a outra definida.

Calcule as integrais indicadas a seguir.

(a) $\int \sqrt{t} (t + 2) dt$

b) $\int_1^4 (\frac{3}{4}x^3 - 2x + 1) dx$

Observemos tratar-se de integrais de funções polinomiais. A função da letra (a), $f(t) = \sqrt{t} (t + 2)$, necessitava de um cálculo algébrico preliminar que a levaria à forma $(t) = t^{3/2} + 2t^{1/2}$ para, em seguida, ser integrada.

Abaixo, apresentamos a Tabela 04 com os percentuais de erros relacionados na resolução desse quesito pelos sujeitos. O cálculo das porcentagens ocorreu sobre um total de 20 sujeitos, tendo em vista que quatro deles não respondeu nenhum dos itens do quesito.

Tabela 04			
EA	EAL	EC	EAT
35%	40%	45%	10%

Exemplos de erros cometidos por um aluno nessa situação com um recorte da prova mostrando a resolução da questão feita por ele e abaixo, detalhes de onde ocorreu o erro:

Recorte da prova

The image shows a handwritten student solution for the integral problem. The student has written the integral $\int_1^4 (\frac{3}{4}x^3 - 2x + 1) dx$ and attempted to solve it by integrating term by term. The solution is as follows:

$$\int_1^4 (\frac{3}{4}x^3 - 2x + 1) dx = \int_1^4 \frac{3}{4}x^3 dx - \int_1^4 2x dx + \int_1^4 1 dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_1^4 x^3 dx - 2 \int_1^4 x dx + \int_1^4 1 dx$$

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^4 - 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 + \left[x \right]_1^4$$

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{4^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right] - 2 \left[\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] + [4 - 1]$$

$$= \frac{3}{4} [64 - \frac{1}{4}] - 2 [8 - \frac{1}{2}] + 3$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 63\frac{3}{4} - 2 \cdot 7\frac{1}{2} + 3$$

$$= 768 - 8 + 4 - 3 - 2 + 7$$

$$= 760$$

Annotations on the image:

- A green circle around the first term of the integrand, $\frac{3}{4}x^3$, with an arrow pointing to the text "erro na multiplicação de frações" (error in multiplication of fractions) and the label "E.A.km".
- A green circle around the term $\frac{3}{4}x^4$ in the antiderivative, with an arrow pointing to the text "erro na integral de x" (error in the integral of x) and the label "E.C.". A red checkmark is next to this label.

Algumas vezes, numa mesma resolução, identificávamos mais de um tipo de erro como podemos observar na resolução de um dos estudantes no item (b) da questão 4.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(\frac{3}{4}x^3 - 2x + 1 \right) dx &= \\ \int_1^4 \frac{3}{4}x^3 dx - \int_1^4 2x dx + \int_1^4 1 dx &= \\ = \frac{3}{4} \int_1^4 x^3 dx - 2 \int_1^4 x dx + 1 \int_1^4 dx &= \\ \frac{3}{4} \times \frac{x^4}{4} - 2x + 1x = \frac{3}{4} \times \frac{x^4}{4} - 2x + 1x \text{ (intervalo de 1 a 4)} \rightarrow (3x^4 - 2x + x) &= \\ = [3 \times (4)^4 - 2 \times (4) + 4] - [3 \times (1)^4 - 2 \times (1) + 1] = 768 - 8 + 4 - 3 - 2 + 1 = 760. \end{aligned}$$

Os erros cometidos, que estão em vermelho, levaram naturalmente à resposta errada. O primeiro deles foi o cálculo da integral $\int x$ que é igual a $\frac{x^2}{2}$ e não x que consideramos como erro conceitual (poderia ter sido um erro de atenção) e o segundo, considerado como erro algébrico, ocorreu no produto $\frac{3}{4} \times \frac{x^4}{4} = 3x^4$ sendo o correto $\frac{3x^4}{16}$.

A questão 5 explorava uma aplicação da integral numa situação da Cinemática – Física e sua resolução consistia basicamente em determinar a equação do espaço do corpo integrando a equação da velocidade.

Um corpo está se movendo numa linha reta de tal forma que sua velocidade após t minutos é $v(t) = 4 + 10t + 12t^3$ metros por minuto. Determine:

- A posição que esse corpo ocupa no $t = 3$ min?*
- A distância percorrida pelo corpo do instante $t_1 = 3$ min até $t_2 = 9$ min?*

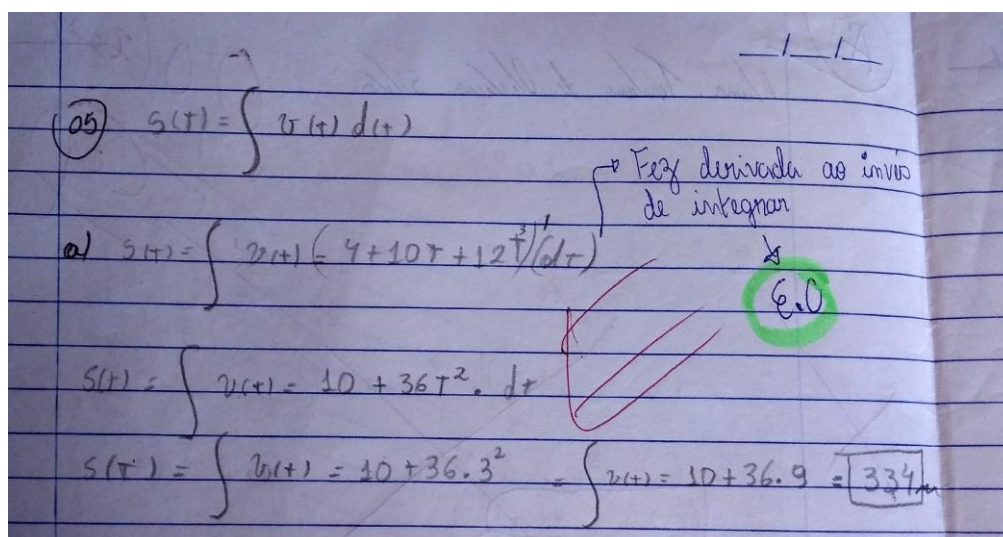
Como dois alunos não responderam a questão, o cálculo percentual foi feito sobre um total de 22 sujeitos. A Tabela 05 com a estatística está representada abaixo.

Tabela 05			
EA	EAL	EC	EAT
18%	0%	27%	9%

Vê-se que 27% dos alunos, ou seja, 6 alunos cometeram erro conceitual ao derivar a função horária da velocidade ao invés de integrar. Um deles apresentou a seguinte resolução para o item (a):

Exemplo erros cometidos com um recorte da prova.

Recorte da prova



$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int (4 + 10t + 12t^3) dt$$

$$s(t) = \int v(t) = 10 + 36t^2 dt$$

$$s(t) = \int v(t) = 10 + 36 \cdot 3^2 = s(t) = \int v(t) = 10 + 36 \cdot 9 = 334 \text{ m}$$

Observa-se que ele utilizou corretamente o fato de ter que integrar e, no entanto, acabou por derivar a função do integrando e substituiu t por 3. Aqui vale a ressalva de que entrevistar o estudante sobre essa sua resolução seria bastante enriquecedor para o estudo.

A sexta questão avaliava os sujeitos em relação ao cálculo de uma área determinada pelo gráfico de uma função quadrática, pelo eixo x e por duas retas verticais aplicando uma integral definida, como se pode ver em seu enunciado.

Calcule a área da região R limitada pela curva $y = 4x^3 + 2x - 1$, pelas retas $x = 2$ e $x = 4$ e o eixo x .

A Tabela 06 com os percentuais de erros cometidos aparece a seguir, em que para os cálculos foi considerado o universo de 21 sujeitos, pois três deles não a responderam.

Tabela 06			
EA	EA	EC	EAT
4%	0%	19%	10%

Exemplos de erros cometidos pelos alunos nessa situação com um recorte da prova.

Recorte da prova

15/12/15

6- $y = 4x^3 + 2x - 1$ $x = 2$ e $x = 4$

$y' = 12x + 2x$ $\rightarrow$ deveria integrar e não derivar

$y' = 14x$ **E.C.**

$A = \int_{-4}^2 f(x) dx = \int_{-4}^2 14x$

$= \int_{-4}^2 14 \cdot (-4) - \int_{-4}^2 14 \cdot (2) = -56 - 28 = -84$

Observemos a resolução dessa questão por um dos estudantes:

$$y = 4x^3 + 2x - 1$$

$$y = 12x + 2x$$

$$y = 14x$$

$$A = \int_{-4}^2 f(x) dx = \int_{-4}^2 14x = \int_{-4}^2 14 (4) - \int_{-4}^2 14 (2) = -56 - 28 = -84$$

Vê-se que o aluno cometeu um erro conceitual ao derivar a função ao invés de integrar. Além disso, cometeu, em seguida, um erro de atenção ao utilizar -4 e 2 como limites de integração, ao invés de 2 e 4 , nessa ordem.

O sétimo quesito, tal como o anterior, era uma aplicação da integral definida no cálculo de uma área limitada por uma função quadrática e o eixo x . A diferença dela para a questão seis era que o estudante tinha de determinar as intersecções da curva com o eixo das abscissas cujos valores seriam os limites de integração. Vejamos seu enunciado:

Encontre a área da região limitada pelo gráfico de $y = -x^2 + 4x - 3$ e o eixo x .

Nove alunos não responderam essa questão, o que nos levou ao cálculo percentual sobre o universo de 15 sujeitos. Os resultados foram mostrados na Tabela 07 a seguir:

Tabela 07			
EA	EAL	EC	EAT
27%	0%	53%	13%

Vejamos parte da resolução dessa questão por um dos alunos com explicação detalhada abaixo:

Recorte da prova

Parte II

01. $-x^2 + 4x - 3$

$a = -1$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $-4 \pm \sqrt{4}$ $x' = \frac{-4 \pm 2}{-2} = -1$

$b = 4$ $\Delta = 4^2 - 4(-1)(-3)$ $x'' = \frac{-4 \pm 2}{-2} = 3$

$c = -3$ $\Delta = 16 - 12$ $\Delta = 4$

Área = $\int_{-1}^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$

$-\frac{(-1)^3}{3} + 2(-1)^2 - 3(-1) = \frac{1}{3} + 2 + 3 = \frac{1}{3} + 5 = 5,33$

$-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = -9 + 18 - 9 = 0$

$5,33 - 0 = 5,33$

Erro na adição

E. Aluno

maiuscul

No cálculo da determinação das intersecções da parábola como eixo x

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2}.$$

Em seguida: $\frac{-4+2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$ e $\frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$, onde se vê um erro de atenção (em vermelho) e passou a utilizar os limites de integração - 1 e 3 no cálculo da área.

E no cálculo da área procedeu da seguinte maneira:

$$\text{Área} = \int_{-1}^3 -x^2 + 4x - 3 = \frac{-x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x = \frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x \text{ (no intervalo de -1 a 3)}$$

$$\frac{(-3)^3}{3} + 2 \times 3^2 - 3 \times 3 = -9 + 18 - 9 = 0.$$

$$\frac{-(-1)^3}{3} + 2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) = \frac{1}{3} + 2 + 3 = \frac{1}{3} + 5 = 5,33. \text{ Área} = -5,33$$

Cometendo um erro conceitual (talvez de atenção) ao fazer a diferença $0 - 5,33$ quando deveria ser $5,33 - 0$.

A questão oito tinha o seguinte enunciado:

Estima-se que daqui a x meses a população de certa cidade estará aumentando à razão de $2 + 6\sqrt{x}$ habitantes por mês. A população atual é de 5.000 pessoas. Qual será a população daqui a 9 meses?

Trata-se de um problema sobre crescimento populacional cujo objetivo era a determinação da equação da função (população) seguida da determinação de seu valor em $x = 9$.

Os resultados, em relação aos erros, onde foi considerado um total de 12 sujeitos, pois 12 alunos não responderam a questão, foram os da Tabela 08:

Tabela 08			
EA	EAL	EC	EAT
16%	8%	33%	0%

Observemos a resolução dessa questão por um dos estudantes:

Recorte da prova

02] $2 + 6\sqrt{x}$
 $2 \int dx + 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx$
 $2x + 6x^{\frac{3}{2}}$
 $\frac{3}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{2} PL$
 $2x + 6x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + C$
 $2(9) + 4(9)^{\frac{3}{2}} + 5000 = \boxed{6476 \text{ habitantes}}$
 E. Akm.

Faltou fechar o ponto e calcular a integral no ponto (9).

$$2 + 6\sqrt{x}$$

$$2 \int dx + 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 2x + 6 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 2x + 6x^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} = 2x + 4x^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$2 \times (9) + 4 \times (9)^{\frac{3}{2}} + 5000 = 6476 \text{ habitantes.}$$

Nota-se que o aluno desenvolveu a questão de forma correta, errando, por falta de habilidades aritméticas (EA), o cálculo final. A resposta correta seria 5126 habitantes e o resultado do aluno foi de 6.476 habitantes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se iniciou este trabalho de pesquisa constatou-se que alunos de disciplinas relacionadas à matemática (Cálculo, Álgebra, Geometria etc.) tinham grandes dificuldades em aprendizagem e aprovação nestas disciplinas, como por exemplo, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I que foi ênfase da nossa pesquisa. As desistências na disciplina, as reprovações e evasões do curso de Física Licenciatura, devido a dificuldades em Cálculo, serviram de motivação para que fosse feito um estudo buscando entender os motivos para que isso ocorresse. Diante disso, a pesquisa relatada neste trabalho buscou entender quais os motivos das dificuldades dos alunos em provas de Cálculo I, quais os tipos de erros cometidos eram mais comuns nas provas e, classifica-los em quatro categorias que chamamos de erro aritmético (EA), erro algébrico (EAL), erro conceitual (EC) e erro de atenção (EAT).

Após a análise dos resultados foi possível observar que o objetivo da pesquisa foi atingido, pois, o trabalho conseguiu verificar que muitos dos erros cometidos pelos discentes nas provas de Cálculo I estão relacionados com a falta de habilidades básicas da Matemática. Isso pôde ser observado em alguns exemplos de resoluções de questões mostrados na análise e discussões dos resultados desta pesquisa, quando apareceram erros aritméticos do tipo $(-4 + 2)^3 = 8$ e $\frac{3}{4} \times \frac{x^4}{4} = 3x^4$.

Porém, um fato novo foi observado enquanto aos erros cometidos. Na maioria das análises e, em todas as questões da prova, foram detectados erros que tem relação com os conceitos teóricos do Cálculo, ao qual definimos como erros conceituais. Essa observação mostra que os discentes não têm boa compreensão, ou não dedicam parte do tempo, nos estudos dos conceitos que antecedem a resolução de questões e aplicações do Cálculo I.

Em nossa hipótese inicial não contávamos com tantas dificuldades encontradas em relação à aprendizagem dos conceitos teóricos do Cálculo I. Partimos da hipótese de que as principais dificuldades nas provas estavam relacionadas com a falta de conhecimento em Matemática proveniente do ensino básico e, apesar de termos confirmado nosso pensamento inicial, a pesquisa revelou esse novo problema.

Diante disso, percebemos que as dificuldades e as causas dos erros cometidos não estão somente ligadas aos conteúdos básicos da Matemática, mas também, aos conteúdos do próprio Cálculo I. Uma hipótese que surge para esse novo problema é que ele pode estar relacionado com a falta de dedicação nos estudos por parte dos discentes, e a metodologia usada pelos docentes. Será que as aulas buscam o entendimento teórico/conceitual do Cálculo ou elas visam à forma mecânica de resolução de exercícios, levando em consideração a extensa ementa do curso e o tempo para que seja visto todo conteúdo?

A pesquisa foi feita com as avaliações de uma turma de Física Licenciatura da UFPE/CAA no período de 2015.2, com a prova do segundo exercício escolar, em um total de trinta e três avaliações e que nove destes tiveram conceito dez, portanto, analisamos as outras vinte e quatro provas. Algo importante que poderia ter sido pesquisado seria as opiniões dos discentes em relação às aulas e as avaliações de Cálculo I, mas, como o trabalho foi feito à quase quatro anos após término da disciplina, infelizmente, não seria possível localizar todos os alunos que participaram da avaliação e, assim, poder fazer uma entrevista ou questionário.

Apesar dessa limitação da pesquisa, no que diz respeito ao número de avaliações analisadas, tivemos um panorama do conhecimento da turma em meio a grande diversidade de estudantes de Cálculo I nos mais diversos cursos e instituições de ensino.

Poderíamos ter feito uma coleta de dados maior, com turmas de outros cursos ou em diferentes períodos, mais referências bibliográficas que discutem o tema, principalmente no contexto teórico do Cálculo, mas isso não foi possível devido a limitações principalmente do tempo e geográficas do pesquisador e também de seu orientador.

Como a análise de erros é algo que vem crescendo, tanto no ensino superior como no ensino básico, recomendamos a busca por novas bibliografias que tratam o erro como algo a ser mais explorado conceitualmente e, que a análise possa ser feita com um público maior que o público deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, A. C. C.; CONCORDIDO, C. F. R.; CARVALHAES, C. G. **Uma proposta de Pré- Cálculo com ensino colaborativo**. In: **Colóquio de História e Tecnologia do Ensino da Matemática**, Rio de Janeiro. Anais. Rio de Janeiro: UERJ, CD-ROM, 2004.
- CAVASOTTO, Marcelo., VIALI, Lori. (2011). **Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar**.
- CURY, H. N. **Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática**. p. 39-50. Zetetike, v. 3, n. 1, 11 out. 2009.
- CURY, H. N. (2003). **Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia**.
- OLIVEIRA, Thainnã., SOUZA, Ademária. (2015). **Causas de dificuldades no Ensino-Aprendizagem de Cálculo diferencial e integral na perspectiva dos alunos e dos professores do curso de matemática da UFAL – Campus de Arapiraca**.
- PINTO, N. B. (1998). **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar**. Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Educação da USP como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Educação: área de Didática.

06. Calcule a área da região R limitada pela curva $y = 4x^3 + 2x - 1$, pelas retas $x = 2$ e $x = 4$ e o eixo x .

Parte II

01. Encontre a área da região limitada pelo gráfico de $y = -x^2 + 4x - 3$ e o eixo x .

02. Estima-se que daqui a x meses a população de certa cidade estará aumentando à razão de $2 + 6\sqrt{x}$ habitantes por mês. A população atual é de 5.000 pessoas. Qual será a população daqui a 9 meses?

15/12/2015

Bom trabalho!

Paulo Câmara