UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
MATEMÁTICA- LICENCIATURA

RENATO CARLOS DA SILVA VIEIRA

UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DO CONCEITO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS EM LIVROS DIDÁTICOS

Caruaru
2019

RENATO CARLOS DA SILVA VIEIRA

UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DO CONTEÚDO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS EM LIVROS DIDÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática- Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de graduado em Matemática- Licenciatura.

Área de concentração: Didática da Matemática

Orientador: Profº. Me. Cleiton Ricardo de Lima

Caruaru

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

V658a Vieira, Renato Carlos da Silva.
Uma análise praxeológica do conceito de semelhança de triângulos em livros didáticos. / Renato Carlos da Silva Vieira. - 2019.
46 f. il. : 30 cm.

Orientador: Cleiton Ricardo de Lima.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Semelhança (Matemática) - Estudo e ensino. 2. Triângulos. 3. Geometria. I. Lima, Cleiton Ricardo de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-415)

RENATO CARLOS DA SILVA VIEIRA

UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DO CONTEÚDO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS EM LIVROS DIDÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de graduado em Matemática-Licenciatura.

Aprovado em: 17/06/2019.

BANCA EXAMINADORA

____
Profº. Me. Cleiton Ricardo de Lima (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profº. Me. Paulo Roberto Câmara de Sousa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Dr. Edelweis José Tavares Barbosa (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

A você que se faz presente mesmo não estando aqui. És em mim leveza e força que alimenta o meu existir e me desperta o desejo de conquistar o mundo. Te amo do início ao infinito, vovô Tião. Sebastião Ferreira (*in memorian)*

AGRADECIMENTOS

Grato a Deus por ser inspiração diária para me manter de pé e ir em busca dos meus sonhos e a todos os meus que foram ponte para que eu pudesse chegar até aqui.

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados da análise em dois livros de geometria utilizados na disciplina de geometria euclidiana plana do curso de licenciatura em matemática. Nos atemos as tarefas pertinentes as provas e demonstrações que abrangem o conteúdo de ‘’semelhança de triângulos’’. Sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, analisamos os livros selecionados de acordo com a praxeologia que se organiza em tarefas, técnicas, tecnologia e teoria. Buscamos compreender como esses autores abordam o pensamento dedutivo e como é feito o estudo de semelhança de triângulos no campo das definições e demonstrações. Os aspectos metodológicos são de cunho qualitativo e análise bibliográfica. Em relação aos resultados, os estudos indicam que, ambos os livros apresentam a definição de ‘’semelhança de triângulos’’ de maneira direta, validadas através de demonstrações formais. Por fim, comparamos os dois livros e percebemos peculiaridades em cada um deles que juntas podem fundamentar notas de aula para o professor que irá ensinar semelhança de triângulos.

Palavras-chave: Demonstração. Semelhança de triângulos. Praxeologia. Geometria.

ABSTRACT

This work presents the results of the analysis of two books of geometry used in the discipline of flat Euclidean geometry of the licentiate course in mathematics. We attach the relevant tasks to the proofs and demonstrations that cover the content of "similarity of triangles". From the perspective of the anthropological theory of didactics, we analyze the selected books according to the praxeology that is organized in tasks, techniques, theory and technology. We seek to understand how these authors approach deductive thinking and how the study of similarity of triangles in the field of definitions and demonstrations is done. The methodological aspects are of a qualitative nature and analysis of bibliographic data. Regarding the results, the studies indicate that, in both books, the definition of "similarity of triangles" is not clearly addressed and presents the properties directly, validated through formal demonstrations. Then they conclude the chapter with a series of exercises and problems to be solved. In addition, they do not make historical reflections or allusion to previous knowledge that facilitate learning. Finally, we compare the two books and perceive peculiarities in each of them that together can base class notes for the teacher who will teach similarity of triangles.

Key words: Demonstration. Similarity of triangles. Praxeology. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática se fundamenta em padrões e aborda ideais abstratos ou esclarecidos que estão ao alcance do raciocínio humano (BIEMBEGUTT E HEIN, 2000), em que o pensamento de que nos valemos para matematizar é, a rigor, de cunho genérico e abstrato. Dessa forma, ela é construída por noções primitivas, axiomas, definições e propriedades.

A esse respeito, os professores de matemática buscam didáticas que facilitem a compreensão dos que estão aprendendo. Uma das tônicas em frequente discussão é de como os livros didáticos abordam os conteúdos e como sua utilização influencia no momento de aprendizagem. Segundo Rosa (2012), é preciso analisar as características do livro, procurando conhecer sua estrutura e possibilidades de trabalho para disseminar a construção do conhecimento.

Acreditamos que é possível o aluno construir uma demonstração matemática a partir de saberes já existentes e os livros que conseguem transmitir de maneira satisfatória as definições e propriedades, fazem com que o educador tenha um olhar mais crítico sobre as abordagens práticas e suas aplicações, despertando problematizações e estruturações concisas.

Neste trabalho, serão analisados os capítulos sobre semelhanças de triângulos dos livros Geometria euclidiana plana, escrito por João Lucas Marques Barbosa o qual chamaremos de **Livro A** e Geometria euclidiana plana e construções geométricas com autoria de Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim Queiroz que denotamos **Livro B**.

Sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1992, 1998.1999, 2002), analisaremos estes livros em termos de tarefa, técnica, teoria e tecnologia, com o objetivo de compreender como esses autores abordam o pensamento dedutivo e como é feito o estudo de semelhança de triângulos no âmbito das definições e demonstrações. Em específico, investigar se esses livros oferecem condições necessárias que possibilitem a transformação do saber disponível em saber aprendido e, por fim, fazer uma análise comparativa entre eles para identificar qual dos dois facilitaria o ensino de semelhança de triângulos no curso de licenciatura em matemática.

A escolha do objeto de pesquisa surgiu por considerarmos o livro didático uma ferramenta que aperfeiçoa o ensino e aprendizagem. Os livros selecionados, são usados frequentemente na disciplina de Geometria Plana do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, desde o primeiro semestre do ano de 2014.

Delimitamos o conteúdo após uma análise superficial desses livros e percebemos que todas as construções dos capítulos anteriores convergiam para o assunto de semelhança de triângulos. Somado a isso, durante o estudo da disciplina, vimos que alguns alunos ainda apresentam dificuldades quanto a abordagens axiomáticas e demonstrações matemáticas, logo, sentimos a necessidade de investigar de que forma os livros de geometria utilizados na licenciatura em matemática abordam o conteúdo.

Esta monografia está dividida em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos uma breve discussão sobre aspectos históricos do ensino de Geometria ancorados nos estudos feitos por Boyer (1996), Machado e Cunha (2003) e Lorenzato (2008), dando ênfase a sua importância no curso de Licenciatura em Matemática. Dentro desse capítulo, há dois subtítulos que explanam especificamente o conteúdo de semelhança de triângulos e o livro didático de matemática.

No segundo capítulo, discutiremos o pensamento dedutivo e apresentamos as concepções de prova e demonstração em geometria escolhidas para este estudo.

O capítulo três apresenta a Teoria Antropológica do Didático, o conceito de praxeologia e a organização didática estudadas por Yves Chevallard.

O capítulo quatro, traz os aspectos metodológicos escolhidos para nortear a pesquisa.

No quinto capítulo, fazemos a descrição e análise dos livros escolhidos, apresentamos como estão estruturados e tecemos comentários sobre perspectivas dos autores quanto ao público alvo. Discutimos os critérios que foram utilizados para analisá-los, bem como a descrição e a análise matemática relacionadas ao objeto ‘’semelhança de triângulo’’. Nas considerações finais, apresentamos as principais conclusões e perspectivas do trabalho, e uma breve comparação entre os livros para identificar qual dos dois facilitaria o ensino de semelhança de triângulos de acordo com os critérios adotados.

2 UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

Ao estudarmos geometria, achamos necessário fazer um aporte teórico que discuta suas origens. Autores como Boyer e Machado e Cunha (2003), discutem como possivelmente surgiu o pensamento geométrico. Fundamentaremos este capítulo, apoiados nos estudos feitos por esses autores.

Segundo a história da Matemática, a geometria teve sua origem desde a antiguidade. Segundo Machado e Cunha (2003), a cultura egípcia já apresentava conhecimentos geométricos quatro mil anos A.C.. Para Boyer (1996), há duas possíveis teorias que fundamentam a origem dos estudos geométricos no Egito, a primeira delas firmada nas observações de Heródoto[1] o qual, "defendia que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio". A segunda teoria é a de que os estudos em geometria foram guiados pela classe sacerdotal egípcia, classe de prestígio que era responsável pela parte administrativa do império com hierarquia social abaixo apenas do faraó. Como se tratam de teorias, não sabemos se são ou não verdadeiras, mas a primeira teoria é presente no ensino de geometria nos dias atuais. A palavra "geometria" deriva do grego geos (terra) e metron (medida).

O Egito não é o único lugar que mostra indícios da origem da geometria. Boyer (1996), relata sobre como babilônicos, no período de 2000 A.C. utilizavam a geometria para realizar cálculos algébricos e aplicação aritmética. Registros em tábuas comprovam seu conhecimento para calcular áreas de figuras, também tinham conhecimento da semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras.

Além de Egito e Babilônia, documentos que registraram alguns teoremas e textos geométricos nos faz concluir que a geometria também teve suas origens na Grécia por volta de 320 A.C. que ganharam destaque por exercitarem o pensamento dedutivo para resolver problemas. O matemático Tales de Mileto, contribuiu para que esse método ganhasse força nas validações geométricas. Euclides, Arquimedes e Apolônio também são geômetras gregos de suma importância para estudos na área.

Os estudos de Euclides o levou a escrever o livro "Elementos", estruturado em treze volumes, onde reuniu tudo que havia aprendido sobre matemática: aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria espacial. O matemático organizou as ideias, criando propriedades para as figuras geométricas e chamou esse campo de lugar geométrico.

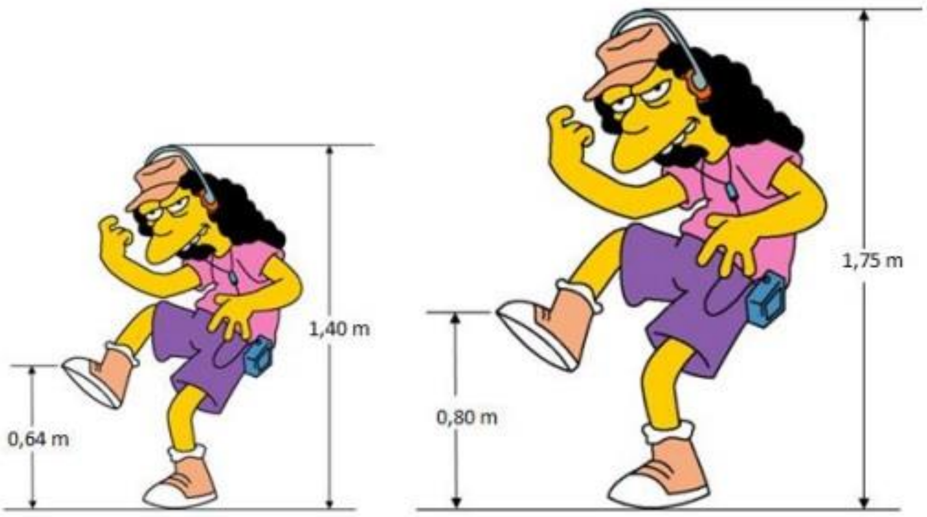
Dessa forma, vimos que os estudos em geometria são longínquos e mesmo não sendo possível categorizar sua origem, essas contribuições foram importantes para o ensino de geometria e sua presença no currículo escolar.

2.1 Semelhança de Triângulos

A semelhança entre duas figuras quaisquer, seja no plano ou no espaço, é um assunto que aparece constantemente no nosso dia a dia. Como exemplo, podemos citar os mapas que são uma redução de um território em tamanho real e que obedecem uma escala; também os brinquedos infantis, como carros e bonecas que nada mais são que reproduções em menor escala de carros de verdade e de pessoas reais.

Definição: Duas figuras são semelhantes quando todos os segmentos que aparecem em uma aparecem na outra, multiplicados por um fator constante. Essa definição mostra que, se duas figuras são semelhantes, uma pode ser obtida via ampliação, redução ou até mesmo reprodução da outra, sejam elas no plano ou no espaço. Vemos um exemplo por meio da figura a seguir:

Figura 1 - Semelhança entre figuras



Fonte: Silva, 2013, p. 10.

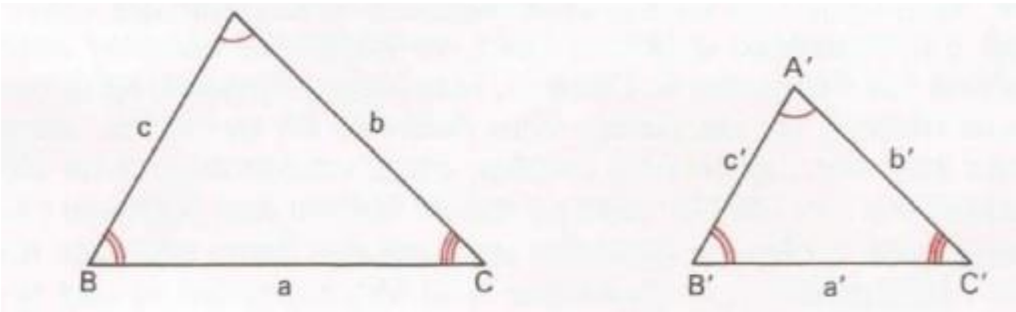
Note que podemos obter a figura maior por meio de uma ampliação da figura menor, pois $0{,}64x1{,}25 = 0{,}80 \; e \; 1{,}40x1{,}25 = 1{,}75$. Assim, verifica-se que a razão de semelhança entre as figuras é $r = 1{,}25$. Para averiguarmos a rigor que as figuras são exatamente semelhantes, poderíamos medir todos os seus segmentos, mas não seria viável. Dando continuidade, citaremos dois teoremas importantes que constituem a definição de semelhança.

Teorema 1: A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Teorema 2: A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança. Dito isto, agora iremos tratar sobre semelhança de triângulos.

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando podemos obter uma função bijetora entre seus vértices, colocando de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais.

Figura 2- Semelhança de triângulos

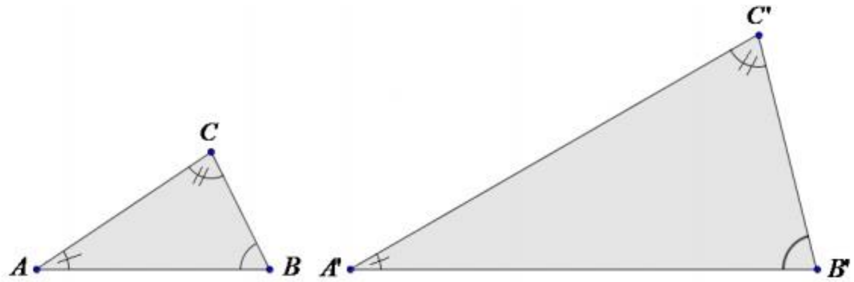


Fonte :Dolce e Pompeo pág. 198.

Assim se tivermos dois triângulos ABC e $A'B'C'$ para que eles sejam semelhantes, é necessário e suficiente que, se existe a correspondência A→A', B→B', C→C' e vale que $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\hat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$ tenha-se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$, onde K é chamada de constante de proporcionalidade entre os dois triângulos. Note que, ao dizermos que dois triângulos são semelhantes, não queremos dizer que são iguais, embora os seus ângulos internos correspondentes sejam congruentes, mas sim, que um é proporcional ao outro, ou seja, na congruência, um triangulo se sobrepõe ao outro e na semelhança um é a ampliação ou redução do outro, assim dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um.

Para verificar que dois triângulos são semelhantes existem três caminhos, além da definição, em que chamaremos de casos de semelhança. O primeiro caso se refere apenas aos ângulos internos dos triângulos, o segundo trata de um ângulo interno e seus lados e o terceiro fala sobre a proporcionalidade dos lados dos triângulos. Dessa forma, os casos de semelhança servem como “atalhos’’ que podemos utilizar para investigar se os triângulos são semelhantes. Detalhamos a seguir estes casos:

Figura 3 - - Semelhança de triângulos pelo caso A.A.



1° caso de semelhança (Ângulo Ângulo): Se os dois triângulos possuírem os ângulos internos, respectivamente congruentes entre si, os dois triângulos são semelhantes.

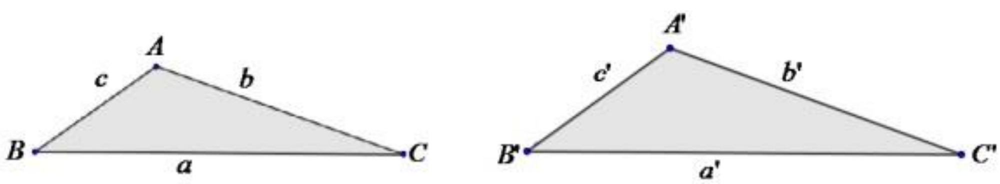
Fonte: Silva, 2013, p. 13.

Com $\hat{A} = \widehat{A'}, \hat{B} = \widehat{B'}, \hat{C} = \widehat{C'}$

Note que pelo fato de a soma dos ângulos internos de um triangulo ser igual a 180°, podemos reduzir este caso a quando percebermos apenas dois ângulos correspondentes sendo congruentes pois se dois deles são congruentes, com certeza o terceiro será.

2° Caso de semelhança (L.L.L.): Se todos os lados de um triângulo forem proporcionais aos lados de outro, os dois triângulos são semelhantes.

Figura 4 - Semelhança de triângulos pelo caso LLL



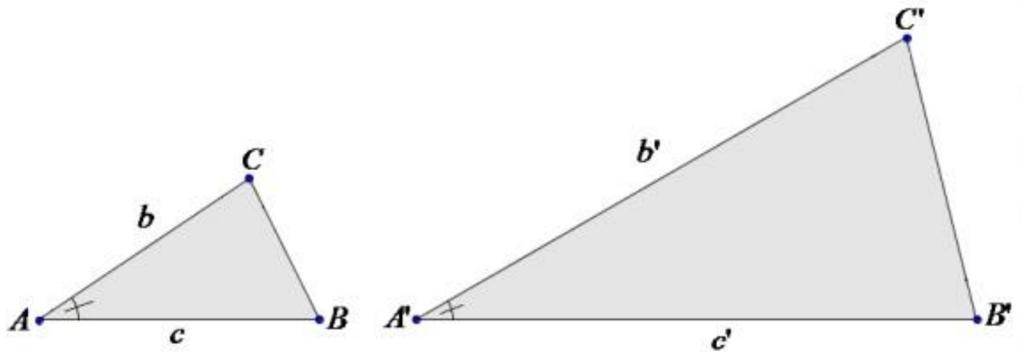
Fonte: Silva, 2013, p.12.

Com $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Note a importância de se verificar a proporcionalidade nos três lados correspondentes, pois podemos ter dois lados em que há uma relação de proporcionalidade, porém se o ângulo formado entre eles tiver medida diferente de um triangulo para outro, os terceiros lados não seguiriam a mesma razão de proporção.

3° caso de semelhança (L.A.L.): Se dois triângulos possuírem um ângulo congruente formado entre dois lados de medidas proporcionais, os dois triângulos são semelhantes.

Figura 5 - Semelhança de triângulos pelo caso LAL



Fonte: Silva, 2013, p15.

Com $\hat{A} = \widehat{A'}, \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Neste caso o problema citado no caso anterior deixa de existir pois ao garantirmos a congruência dos ângulos formados pelos lados proporcionais em questão, garantimos também a proporcionalidade na razão correta dos terceiros lados restantes garantindo com isso a semelhança entre os triângulos em questão.Com isso, falamos sobre os possíveis casos em que dois triângulos podem ser verificados como semelhantes.

2.2 O livro didático de matemática

Apesar dos avanços tecnológicos serem constantes, o livro didático ainda é um dos recursos mais utilizados em todas as áreas de ensino. Para Santos (2007), no que se refere a recursos didáticos, podemos considerar que são ‘’componentes do ambiente educacional que estimulam os educandos, facilitando e enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem. ’’. Claramente, este se faz presente em todas as áreas de conhecimento e sua utilização se torna fonte de informações que relacionam a reunião e simplificação dos conteúdos, sua consulta e aprendizagem adquirida. Logo, se torna crucial buscar compreender como o professor desenvolve conteúdos matemáticos em sua prática. Segundo Carneiro (2005)

> A centralidade do livro didático lhe confere estatuto e funções privilegiadas na medida em que é por meio dele que o professor organiza, desenvolve e avalia seu trabalho pedagógico de sala de aula. Para o aluno, o livro didático é um dos principais elementos determinantes da sua relação com a disciplina. CARNEIRO, 2005, p. 1)

O Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) aponta a utilização do livro didático como crucial em sala de aula, mostrando a importância de analisar esse recurso didático para um processo de construção de conhecimento significativo. Em detrimento a isso, reitera que ‘’é necessário analisar as principais funções do livro didático, destacando que o professor tem o papel de observar a adequação desse instrumento à sua prática pedagógica e ao seu aluno.’’ (BRASIL, 2007, p.12). Nessa perspectiva, Dante defende que,

> [...] - em geral, só a aula do professor não consegue fornecer todos os elementos necessários para a aprendizagem do aluno, uma parte deles como problemas, atividades e exercícios pode ser coberta recorrendo-se ao livro didático; - o professor tem muitos alunos, afazeres e atividades extracurriculares que o impedem de planejar e escrever textos, problemas interessantes e questões desafiadoras, sem a ajuda do livro didático; - a matemática é essencialmente sequencial, um assunto depende do outro, e o livro didático fornece uma ajuda útil para essa abordagem; -para professores com formação insuficiente em matemática, um livro didático correto e com enfoque adequado pode ajudar a suprir essa deficiência; - muitas escolas são limitadas em recursos como bibliotecas, materiais pedagógicos, equipamento de duplicação, vídeos, computadores, de modo que o livro didático constitui o básico, senão o único recurso didático do professor; - a aprendizagem da matemática depende do domínio de conceitos e habilidades. O aluno pode melhorar esse domínio resolvendo os problemas, executando as atividades e os exercícios sugeridos pelos livros didáticos; - o livro didático de matemática é tão necessário quanto um dicionário ou uma enciclopédia, pois ele contém definições, propriedades, tabelas e explicações, cujas referências são frequentemente feitas pelo professor. (DANTE, 1996. p.52-53).

A análise de livros didáticos permite ao professor uma percepção de como os assuntos são apresentados aos alunos. Nesse momento, ele poderá desenvolver uma didática que triangule aluno, docente e aprendizagem. Por esse motivo, Rosa e Santos (2012) destacam p quão é necessário analisar criticamente os materiais didáticos antes de preparar a aula, pois é importante levar para o aluno uma fonte de informação que lhe desperte a vontade de resolver os exercícios, dando continuidade ao processo de construção do conhecimento.

3 O PENSAMENTO DEDUTIVO

Segundo Diniz e Silva (2008), o conhecimento científico busca compreender de maneira aprofundada o fenômeno observado, se utilizando da razão como caminho para chegar à certeza da verdade sobre o fato pesquisado. O método dedutivo é uma definição usada em todas as áreas de conhecimento e que viabiliza diversas formas do saber. Tem como pressuposto, analisar premissas que intensificam a chegada de conclusões.

Descartes, em sua obra "O discurso do método'', fala que o conhecimento empírico deve estar associado ao conhecimento teórico, sendo isso possível através de métodos que fundamentem a apreensão do que se quer afirmar. Esse método está usualmente presente na álgebra e geometria.

Dessa forma, o pensamento dedutivo defende que, mesmo que o objeto de estudo apresente complexidade, é possível compreendê-lo, mas é necessário seguirmos um caminho mais fácil, mais superficial do objeto, para chegarmos em hipóteses que, através da dedução, nos leve a uma solução do problema, à conclusão.

Sob a perspectiva de Diniz e Silva (2008), o método dedutivo se embasa das teorias e leis universais e busca explicar a ocorrência de dados particulares, partindo de circunstancias generalizadas (leis universais) que supostamente compõem as premissas[1] do pensamento racional e deduzidas, chegam a conclusões que se denominam demonstração. Tais leis universais descritas como o princípio da identidade, o princípio da não contradição e o princípio do terceiro excluído.

O princípio de identidade estabelece que "tudo é idêntico a si mesmo", ou seja, todo enunciado escrito sob a forma lógica "N é N" será tido como verdade, em que, apesar da simplicidade, ajuda na confirmação de várias proposições. Logo, podemos afirmar que um objeto é o que é sem confundi-lo com outro. A segunda lei universal é denominada princípio da não contradição, em que afirma que[1] duas proposições contraditórias não podem ser tidas como verdade ao mesmo tempo e argumenta que duas proposições "*A é B*" e "*A não é B*" são mutuamente exclusivas, não podendo coexistir duas afirmações - "a bola é redonda" e "a bola não é redonda". A última, conceituada como o princípio do terceiro excluído, fala que para qualquer proposição, ela é verdadeira, ou sua negativa é verdadeira, pois é necessário afirmar ou negar uma proposição, tornado impossível haver uma terceira conclusão para a proposição.

---

[1] Proposiçã**o**, o conteúdo, as informações essenciais que servem de base para um raciocínio, para um estudo que levará a uma conclusão.

Por exemplo, "o céu é azul", o que é verdadeira, pois o céu é realmente azul, e sua negação seria "o céu não é azul".

3.1 Provas e demonstrações em geometria

Nesta seção, explicaremos os conceitos de prova e demonstração, fundamentados pelos estudos de Balacheff (2000) que se interessou pela problemática para validar ideias matemáticas e os significados desses termos. Segundo o autor, antes de definirmos prova e demonstração, devemos falar sobre explicação e ressaltar a diferença entre eles. De acordo com o mesmo (apud, Ferreira, 2016, p 43)

> Explicação: Um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado, os quais podem ser discutidos, refutados ou aceitos; Prova: Uma explicação aceita por dada comunidade em dado momento. Essa decisão pode ser objeto de um debate voltado a determinar um sistema de validação comum aos interlocutores; Demonstração: Um tipo de prova dominante em matemática, com uma forma particular. Trata-se de uma série de enunciados que se organizam segundo um conjunto bem definido de regras. (Ferreira, 2016, p. 43)

Segundo Balacheff (2004), provar um enunciado pode se adequar em aceitar diversos caminhos propostos pelos alunos para estabelecer sua validade, porém é crucial não descartar o método formal que explica essa afirmação, ou seja, a demonstração. O autor corrobora que não se pode aprender matemática sem demonstração e defende que provas e demonstrações devem ser trabalhadas desde as séries iniciais.

As demonstrações são provas particulares que admitem caminhos a partir de axiomas (enunciados aceitos como verdade), deduções a partir de outros tópicos já demonstrados, ou através de pensamentos dedutivos derivados de regras lógicas. Em matemática, visa-se afirmar a veracidade de um fato, explicando e justificando essa comprovação (Villiers, 2001 apud Ferreira, 2008). Demonstrar também é uma forma de comunicação baseada na álgebra que é uma linguagem específica presente na matemática. É crucial deixar claro qual linguagem será trabalhada no momento de demonstrar.

Para Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), os currículos de Matemática devem contemplar atividades que induzam o aluno a desenvolver o pensamento lógico dedutivo e argumentos matematicamente válidos. Dessa forma, destacamos a importância de que o professor precisa trabalhar processos consistentes de argumentação, sua justificativa e explicação, para chegar até as demonstrações. Vale salientar que um argumento lógico matemático deve passar certeza para qualquer leitor no que diz respeito a veracidade matemática apresentada.

Nesta pesquisa, adotaremos o conceito de prova matemática para validar um conteúdo matemático e a demonstração com base em fatos matemáticos comprovados e irrefutáveis. Acreditamos, também, que essas demonstrações não se restringem a caminho da abstração matemática, também podendo ser trabalhadas no mundo sensível com o auxílio de recursos didáticos que afirmem sua comprovação.

4 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático e, em particular, as noções de organização matemática e didática, têm sido fonte de fundamentação para várias pesquisas, apresentando sucesso em artigos que analisam livros. (Freitas, 2016). Segundo Yves Chevallard (1992, 1998.1999, 2002), toda didática está inserida no campo antropológico, ou seja, ele propõe a elaboração de uma antropologia didática, sendo o objeto de estudo a própria didática.

Chevallard é conhecido por sua contribuição, na década de 1980, à teoria da transposição didática. Essa teoria foi estudada dentro da Didática da Matemática e parte da compreensão de que há diferenças entre as diversas formas de configuração de um determinado saber, dependendo dos fins e contexto ao qual está inserido. Dessas pesquisas, nasceu a Teoria Antropológica do Didático (TAD). O intuito foi de esclarecer as transformações que o conhecimento e a experiência do professor de matemática passam durante o caminho da formação de saberes as quais ele denomina: saber sábio, saber a ensinar e saber ensinado, com o objetivo entender como um saber pode ser moldado e adequado para abranger as diferentes demandas sociais. Chevarllard fala que a TAD foi introduzida com o propósito de conter problemas dentro da comunicação do conhecimento e explica como acontece a adaptação e aplicação didática no processo de ensino e aprendizagem em que tudo é considerado objeto: as instituições, os indivíduos, e as posições que os indivíduos ocupam.

Araújo (2009) fala que as primeiras noções de ‘’pessoa’’ surgem a partir dessa relação da pessoa (N) com objeto (O), e ganha significado por R (N, O). Nesse viés, para Chevallard (1996) pessoa é um ser dinâmico que sofre mudanças nas suas relações com o decorrer do tempo. O principal postulado da TAD é que “qualquer atividade humana pode ser descrita por um modelo único que se resume a palavra praxeologia’’ (Santos, 2015 p.7).

Para Chevallard (1992, 1998.1999, 2002) apud Almouloud (2007, p. 123), as praxeologias (ou organizações) associadas a um objeto, apresentam caminhos matemáticos e didáticos com o objetivo de enfatizar que, para se realizar uma tarefa, é necessário a mobilização de uma técnica. Porém, para que essas técnicas nasçam, é preciso que elas atendam a condição mínima de serem justificadas. Logo, a TAD exige explicação e produção da técnica empregada para a resolução de uma tarefa. Segundo Barbosa (2017) , as praxeologias matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em sala de aula, permitindo que os alunos atuem na resolução de problemas de maneira adequada, logo, o ato de ensinar e aprender são resultados de atividades humanas.

Assim, a praxeologia é constituída por dois blocos inseparáveis: um referente a "prática" - a práxis, e outro ao "saber" - o logos. (Chevallard; Bosch; Gascón, 2001). Eles são organizados em quatro componentes: tarefa (T), técnica (τ) tecnologia (θ) e teoria (Θ) O bloco [T, τ] é chamado prático-técnico ou "saber-fazer", o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] denomina-se "saber".

Denota-se tarefa **(T)** como sendo algo intencional do ser humano, ou seja, a ideia de ''fazer coisas''. Esse componente é específico e deve se manifestar através de um verbo no infinitivo, como por exemplo, **demonstrar** que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, mas, **demonstrar**, somente, está ligado ao gênero de tarefas.

A praxeologia relacionada a componente (T), determina o procedimento utilizado para realizar uma determinada tarefa chamado de técnica **(t)**. É importante ressaltar que uma técnica direcionada a uma tarefa específica nem sempre servirá para outras tarefas associadas a essa técnica. Por exemplo, algumas técnicas usadas para ensinar retas perpendiculares não são adequadas para ensinar retas ortogonais. Para Chevallard, Bosch e Gascón (1997), a técnica deve se apresentar como algo correto compreensível e racional, ou seja, ela tem de ser altamente interpretativa quanto a sua aplicabilidade e essa racionalidade se denomina tecnologia (θ).

Dessa forma, a tecnologia (θ) é a explicação racional da técnica (t**)** e dar suporte a sua utilização – '' a veracidade da técnica realizada para executar o tipo de tarefa é definida como tecnologia'' (Chevallard, 1998a), logo, é o porquê de fazer determinadas tarefas ou gênero de tarefas de determinadas maneiras. Como tem a função de explicar, esse componente varia de acordo com o tipo de tarefa e técnica utilizada. Para exemplificar, podemos refletir sobre a relação entre ângulos externos e ângulos internos de um triângulo através do teorema do ângulo externo. Neste caso, a demonstração do teorema é a tecnologia utilizada.

Martensen (2011), nos diz que a ciência de uma tecnologia é uma condição mínima para que exista uma técnica, sendo assim, ela também tem a função de produzir técnicas. Toda tecnologia precisa de uma explicação que se chama teoria **(Θ)**, pois o discurso tecnológico nem sempre é claro, logo, tem a necessidade de ser descrita com rigor, permitindo sua formalização. Portanto, a Teoria (Θ) é a abstração dos conceitos presentes em um discurso generalizado

Nesse trabalho, analisamos as organizações didáticas de dois livros de geometria utilizados nos cursos de licenciatura em matemática. Na análise, faremos relações entre o objeto matemático ''semelhança de triângulos'', os autores e a instituição ''livro'' de acordo com bloco prático-técnico [T, τ] ou “saber-fazer” e o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ], ‘’saber’’.

Segue um exemplo de como trabalharemos os conceitos de tipo de tarefa, tarefa , a técnica escolhida pelos autores e o bloco teórico-tecnológico que justifica essa tarefa:

Quadro - Exemplo de análise utilizando os blocos praxeológicos

Tarefa (T):	Mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º
Técnica (t) $_1$:	Utilizando folha de papel e dobraduras
Técnica (t) $_2$:	Utilizando demonstração formal
Bloco teórico –tecnológico (θ /Θ):	Apresentação do conceito de soma dos ângulos interno de um triângulo

Construção do autor

Assim, uma tarefa pode ser relacionada a uma técnica, uma tecnologia e uma teoria que devem fazer parte de toda obra matemática com o intuito de ser solução para algum tipo de problema justificado e fundamentado. Além disso, é preciso esclarecer que a TAD não se enquadra no processo cognitivo do conhecimento por trás da aprendizagem, apenas considera as especificidades do conhecimento, explicando os fenômenos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A proposta desse trabalho se baseia em fazer uma análise bibliográfica dos capítulos sobre semelhanças de triângulos de dois livros Geometria euclidiana plana e tem cunho qualitativo pois

> (...)trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (DESLANDES et al, 1994, p. 21).

Sobre essa linha metodológica Lüdke e André (1986 , p.11) ressalvam que ‘’a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento, e que isso facilita a pesquisa, pois o pesquisador em contato direto e prolongado com o ambiente e a situação que está sendo pesquisada’’.

A análise bibliográfica é uma metodologia de pesquisa que se constitui em descrever e interpretar o conteúdo de textos e documentos. Essa análise, organizada sistematicamente, auxilia no momento de interpretar mensagem para chegar a compreensão de seus significados. (Bardin,1995). Para esse autor, ‘’fornece indicadores que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção e recepção dessas mensagens’’.

Neste trabalho, serão analisados os capítulos sobre semelhanças de triângulos dos livros Geometria euclidiana plana, escrito por João Lucas Marques Barbosa o qual chamaremos de **Livro A** e Geometria euclidiana plana e construções geométricas com autoria de Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz que denominamos **Livro B**.

Delimitamos o conteúdo após uma análise superficial desses livros e percebemos que todas as construções dos capítulos anteriores convergiam para o assunto de semelhança de triângulos. Somado a isso, durante o estudo da disciplina, vimos que alguns alunos ainda apresentam dificuldades quanto a abordagens axiomáticas e demonstrações matemáticas, logo, sentimos a necessidade de investigar de que forma os livros de geometria utilizados na licenciatura em matemática abordam esse assunto.

Para a análise crítica do conteúdo, nos pautamos na Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1992, 1998.1999, 2002), no que se refere a organização praxeológica em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria com o objetivo de investigar como esses autores abordam o pensamento dedutivo e como é feito o estudo de semelhança de triângulos no âmbito das definições e demonstrações.

Observando o livro didático como recurso fundamental sobre o saber a ser ensinado e, também, como portador dos conteúdos, conceitos, métodos que são trabalhados durante o exercício docente, se torna pertinente analisar como esses conceitos são estruturados e relacionados.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS LIVROS ESCOLHIDOS

Faremos uma análise geral dos livros escolhidos, apresentando estrutura e o público o qual está direcionado.

Barbosa (2006), tem como proposta apresentar a geometria axiomática para futuros professores de matemática e fala que o seu público alvo **(Livro A)** são alunos que cursam licenciatura em matemática. O autor também fala que seu objetivo é que no futuro haja um aprofundamento nos conteúdos geométricos para que o professor tenha propriedade do que está sendo ensinado.

Queiroz e Rezende (2008), objetivam em seu livro **(Livro B)** proporciona ao leitor uma maior facilidade em organizar o pensamento matemático e o indicam para alunos de licenciatura em matemática a pós-graduação na mesma área.

O livro A é constituído por 10 capítulos e o conteúdo de semelhança de triângulos é abordado no capítulo 7 com título "Semelhança de triângulos''. Ao final de cada capitulo, o autor traz uma relação de exercícios e problemas propostos, além de uma sessão de comentários. Diferenciando problema e exercício, pois o primeiro tende a complementar a teoria e a ser de caráter conceitual, enquanto os exercícios são para fixação de conteúdo.

O livro B é estruturado por 14 capítulo e o capitulo analisado é o quinto, intitulado "Semelhança''. Ao final de cada capítulo, as autoras apresentam uma seção em que chamam de "Nota histórica'', além de uma série de exercícios propostos.

6.1 Análise praxeológica dos livros A e B

Sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1992, 1998.1999, 2002), analisaremos estes livros em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, com o objetivo de compreender como esses autores abordam o pensamento dedutivo e como é feito o estudo de semelhança de triângulos no âmbito das definições e demonstrações.

Elaboramos seis questões que darão origem às tarefas e suas determinadas técnicas que serão justificadas pelo bloco teórico- tecnológico. As tarefas estão relacionadas a metodologia usada para apresentar o conteúdo de semelhança de triângulos, voltadas ao professor e a aplicação de suas propriedades, direcionadas ao aluno. Adaptamos e utilizaremos as seguintes notações relacionadas à praxeologia em que:

- Q_{n}: questão *n*;
- $T_{m}Q_{n}$: tarefa *m* relacionada à questão *n*
- $t_{k}(T_{m}Q_{n})$: técnica *k*, referente à tarefa *m* da questão *n*
- $[\theta/\Theta]_{n}$: discurso teórico-tecnológico que justifica a questão *n*

Para nossa análise, usaremos as seguintes notações geométricas:
ΔABC – indica triângulo ABC
$\overline{AB}$ – indica segmento de reta AB
~ - sinal de semelhança
$\hat{A}$ – ângulo A
A seguir, iniciamos a análise praxeológica voltada a primeira questão.

Questão 1 (Q1): Como é abordado o conceito de demonstração?

T_1Q_1: Explicar o que significa o método dedutivo

$t_1(T_1Q_1)$: Abordagem epistemológica

$t_2(T_1Q_1)$: Abordagem direta

T_2Q_1: Explicar os conceitos de prova e demonstração.

$t_1(T_2Q_1)$: Discutir as diferenças entre eles

$t_2(T_2Q_1)$: Identificar se utilizam linguagem formal matemática baseados em definições, teoremas e axiomas.

$[\theta/\Theta]_1$: As discussões teóricas-tecnológicas que norteiam as técnicas escolhidas para **T1Q1 e T2Q1** se baseiam em como o texto aborda o método dedutivo e se fazem contexto epistemológico ou direto dos termos prova e demonstração e suas utilizações.

Apresentamos no quadro seguinte as tarefas relacionadas a primeira questão realizadas pelos autores dos Livros A e B. A letra ‘’X’’ indica que esses autores cumpriram essas tarefas.

Quadro 1 - Análise das tarefas da questão 1 (Q1)

		LIVRO A	LIVRO B
T_1	$t_1(T_1Q_1)$		
	$t_2(T_1Q_1)$	X	X
T_2	$t_1(T_2Q_1)$		
	$t_2(T_2Q_1)$	X	X

Fonte: Construção nossa

No livro A, Barbosa (2006) inicia o primeiro capítulo falando que ponto, reta e plano são figuras geométricas elementares e ressalva que estes satisfazem cinco grupos de axiomas que são apresentados no decorrer dos capítulos. Se utiliza dos termos prova e demonstração sem diferenciá-los e dá o mesmo significado para prova e demonstração, ao afirmar que os teoremas são "validados através de demonstrações'', mas usa o termo provar ao enunciar as propriedades.

Na seção de comentários, ainda no capítulo um, o autor compara argumentos matemáticos a um jogo de damas, pois ambos precisam de regras. Em geometria, essas regras seriam os axiomas e os elementos do jogo, figuras geométricas. O autor fala que, o momento de validação das propriedades, pelos teoremas e definições, seria o objetivo final do jogo, logo a demonstração. Nessa seção, há uma abordagem superficial sobre o pensamento dedutivo, ao fazer associação ao jogo e suas regras. Então, podemos afirmar que houve a realização da tarefa, porém com uso de uma técnica diferente das que elaboramos em $t_1(T_1Q_1)$ e t_2(T1Q1).

Na seção de comentários do capítulo cinco do livro A, Barbosa (2006) explica que quando se quer demonstrar uma proposição, "é muito importante que sejamos capazes de separar as hipóteses do que se deseja provar''. Ele aborda o pensamento dedutivo por meio da implicação, em que a hipótese é precedida de ''se'' e conclusão de um ''então''. Por exemplo: Se uma hipótese P, então chegamos à conclusão Q. Dessa forma, o autor realizou a tarefa proposta, fazendo uso da técnica $t_2(T_1Q_1)$.

No livro B, há uma pequena introdução sobre o contexto histórico que deu origem as primeiras ideias geométricas. Rezende e Queiroz (2008) comentam o uso do "método dedutivo" que consiste em iniciar os estudos na Geometria com base em afirmações chamadas de axiomas ou postulados e validação dos teoremas através das demonstrações. As autoras não explicam o termo demonstração para sintetizar o método dedutivo.

Apesar de não serem claros quanto ao método dedutivo, os dois livros trazem noções que podem motivar o leitor a querer estudar esse campo de maneira mais aprofundada. Além disso, ambos fazem uso da linguagem formal matemática no momento das provas e demonstrações, o que se esperava por se tratar de um livro acadêmico.

Os dois livros não exploram o conteúdo a fim de torná-lo mais compreensível, não traz sugestões de aplicação ou outros exemplos de visualização da representação simbólica. Sobre isso, Van Hiele (1957) fala que os conceitos abstratos, se traduzidos em imagens, havendo uma construção contínua dos conceitos trabalhados na geometria, o momento de aprender será mais brando e significativo.

Uma vez que, esses dois livros são constantemente adotados no curso de licenciatura em matemática, o professor deve esclarecer os termos que constituem o pensamento dedutivo, pois, por partir do mundo das abstrações, o aluno pode ficar confuso, quando o objetivo é tornar significativo os conceitos geométricos.

Questão 2 (Q2): Como é apresentado o conceito de semelhança de triângulos?

T1Q2: Apresentar a definição de semelhança geral

$t_1(T_1Q_2)$: Mostrar através de figuras

$t_2(T_1Q_2)$: Mostrar através de linguagem simbólica

T2Q1: Apresentar a definição de semelhança de triângulos.

$t_1(T_2Q_2)$: Demonstração através de figuras

$t_2(T_2Q_2)$: Demonstração através de linguagem simbólica

t_3 (T_2Q_2): Enunciação da propriedade sem demonstração

$[\theta/\Theta]_1$: O bloco teórico-tecnológico associado às tarefas T1Q2 e T2Q2 é a definição semelhança de figuras quaisquer e a definição de semelhança entre triângulos, através das condição mínimas (três ângulos correspondentes sejam congruentes e 3 lados correspondentes possuam a mesma razão de proporcionalidade).

No quadro 3, fazemos uma síntese das técnicas usadas pelos autores dos livros A e B.

Quadro 2 - Análise das tarefas da questão 2 (Q2)

		LIVRO A	LIVRO B
T_1	$t_1(T_1Q_2)$		
	$t_2(T_1Q_2)$		X
T_2	$t_1(T_2Q_2)$		
	$t_2(T_2Q_2)$	X	X

Fonte: Construção nossa

Dos dois livros analisados, apenas o Livro B apresenta uma definição superficial sobre semelhança de figuras quaisquer, dando exemplos presentes na Engenharia, como "a ampliação e redução de plantas, maquetes e mapas''. Rezende e Queiroz (2008) ressaltam a importância da precisão nas "formas idênticas entre duas figuras", respeitando a mesma proporção entre suas dimensões. Assim, podemos dizer que as autoras cumprem a tarefa, porém usam uma técnica diferente da que propomos, pois tecem comentários contextualizando recursos reais presentes numa profissão, mas não fazendo uso de imagens ou linguagem simbólica.

Ao analisar a definição de semelhança de triângulos, vimos que, nos livros A e B, os autores citam a correspondência biunívoca[1] entre os vértices de dois triângulos, de modo que seus ângulos sejam congruentes e seus lados correspondentes sejam proporcionais.

No livro A, o autor inicia essas relações utilizando linguagem simbólica falando que dois triângulos ABC e EFG são semelhantes se seus lados correspondentes forem proporcionais e seus ângulos correspondentes sejam iguais O quociente entre as medidas dos lados é chamado de razão de proporcionalidade k.

$$\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G} \quad \text{e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

Fonte: Barbosa, 2006, pág. 27

Barbosa (2006) representa dois triângulos através de figuras, possibilitando a visualização do que foi dito simbolicamente, porém não as utiliza para validar a definição. No livro B, Rezende e Queiroz (2008), trazem os triângulos em forma de imagem antes de representa-los por linguagem simbólica; acreditamos que, partindo desse pressuposto do livro B, a definição fica mais compreensível.

Os objetivos das tarefas T_1Q_2 e T_2Q_2 são de enfatizar como o conteúdo de semelhança de triângulos foi introduzido em cada livro e qual definição foi escolhida pelos autores.

Questão 3 (Q3): Como o autor define conceito de semelhança pelo caso Ângulo-Ângulo (AA)

T_1Q_3: Apresentar a definição como teorema

$t_1(T_1Q_3)$: Demonstração pelo Teorema de Tales

$t_2(T_1Q_3)$: Demonstração utilizando figuras

$t_3(T_1Q_3)$: Demonstração com o auxílio de recursos didático

$t_4(T_1Q_3)$: Demonstração através de linguagem formal

T_2Q_3: Apresentar o conceito como corolário de um teorema previamente apresentado

$t_1(T_2Q_2)$: Demonstra o teorema que foi utilizado utilizando figuras

$t_2(T_2Q_2)$: Não demonstra o teorema que foi utilizado

$[\theta/\Theta]_2$: O discurso teórico- tecnológico relacionado às tarefas T_1Q_3 e T_2Q_3, buscam apresentar o teorema semelhança de triângulos pelo caso de dois ângulos correspondentes iguais(AA). A técnica $t_3(T_1Q_3)$ foi escolhida para apontar se, apesar de se tratar de um livro acadêmico, os autores podem apresentar caminhos diferentes para demonstrar teoremas. Em relação a primeira tarefa, como Livro A e B são voltados para o curso de licenciatura em matemática, acreditamos que ambos utilizem a técnica $t_4(T_1Q_3)$.

O quadro 3 faz uma síntese das técnicas cumpridas pelos autores.

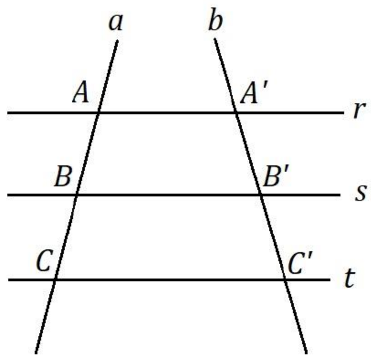
Quadro 3 - Análise da questão 3 (Q3)

		LIVRO A	**LIVRO B**
T_1	**$t_1(T_1Q_3)$**		
	$t_2(T_1Q_3)$	X	
	$t_3(T_1Q_3)$		
	$t_4(T_1Q_3)$	X	
T_2	**$t_1(T_2Q_3)$**		X
	$t_2(T_2Q_3)$		

Fonte: **Construção nossa**

O caso AA, em ambos os livros é o primeiro teorema apresentado. Somente o livro B titula ''Teoremas Fundamentais sobre semelhança de triângulos'' conhecido pelo uso do teorema de Tales para demonstrar os três casos de semelhança de triângulos. O teorema de Tales diz que “um feixe de retas paralelas, intersectadas por duas retas transversais quaisquer, determina segmentos de retas proporcionais. ’’

Figura 6 - Representação figural do teorema de Tales



Fonte: Mundo educação

Em que,

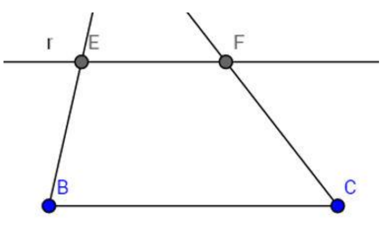
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Aplicando esse teorema num triângulo ABC, temos que, se uma reta *r* paralela ao lado BC a qual intersecciona os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos E e F, os triângulos ABC e AEF são semelhantes.

Demonstração segundo a técnica $t_2(T_2Q_2)$

$t_2(T_2Q_2)$:Demonstração pelo teorema de Tales (Figura 7).

Figura 7- Figura de apoio para demonstrar o caso AA de semelhança de triângulos segundo a técnica t1(T1Q3)



Fonte: Brasil Escola

São válidas as seguintes proporcionalidades

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FC}}$$

Hipótese: Dois triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhante se e $\hat{A} = \widehat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, então os triângulos são semelhantes.

Admitindo os triângulos ABC e DEF diferentes, percebemos que o ângulo interno do vértice A é comum para os dois triângulos, analogamente, afirmamos que eles são semelhantes pelo postulado Lado – ângulo – lado (LAL), que falaremos posteriormente em uma das questões que constituem essa análise. Portanto, podemos concluir que os lados AE e AF são proporcionais aos lados AC e AB.

No livro B, as autoras fazem uso do teorema fundamental para demonstrar o caso AAA, e relembram um corolário do capítulo 4, que fala que, se em um triângulo dois ângulos correspondentes são congruentes, logo o terceiro ângulo é congruente. As autoras apresentam um (corolário AA) derivado do citado anteriormente e apontam que este segundo será usado com mais frequência que o caso AAA

O livro A, inicia a prova falando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180º e induz o leitor, através de linguagem simbólica, a traçar semirretas em pontos que ele chama de H e J, nitidamente conforme o teorema fundamental de semelhança de triângulos, mas sem representação de imagens. Além disso, Barbosa (2006), cita exemplos de validação do caso AA, utilizando os recursos didáticos régua e transferidor, em que pede para o leitor desenhar um triângulo e seguir o passo indicado por ele até chegar a prova.

Os dois livros apresentam a definição pelo caso AA, de maneiras parecidas, mas com características próprias. Definem claramente o teorema e utilizam linguagem formal.

Questão 4 (Q4): Como o autor define conceito de semelhança pelo caso Lado - Ângulo-Lado (LAL)

T1Q4: Apresentar a definição através de teorema

$t_1(T_1Q_4)$: Apresenta a propriedade sem demonstração

$t_2(T_1Q_4)$: Demonstração através de construção de figuras

$t_3(T1Q_4)$:Utiliza um caso particular no triângulo retângulo

$t_4(T_1Q_4)$: Utilizar um teorema já demonstrado como lema

T2Q4: Apresentar a definição sem a utilização de teorema

$t_1(T_2Q_3)$: Sugere métodos que possibilitam a imersão do conteúdo

[θ/Θ]$_3$: O bloco teórico - tecnológico que norteia T1Q4 e T2Q4, partem do pressuposto de como está sendo definido o caso LAL,e como os autores apresentam as demonstrações criando alternativas diferentes para validar os teoremas, como no caso particular pelo triângulo retângulo. A técnica $t_2(T_1Q_4)$ foi criada para refletir como acontece a interação entre o leitor e os autores de cada livro. O teorema de semelhança do caso LAL fala que, dados dois triângulos ABD e DEF, se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então esses triângulos são semelhantes.

A seguir, quadro síntese que representa as técnicas cumpridas pelos autores.

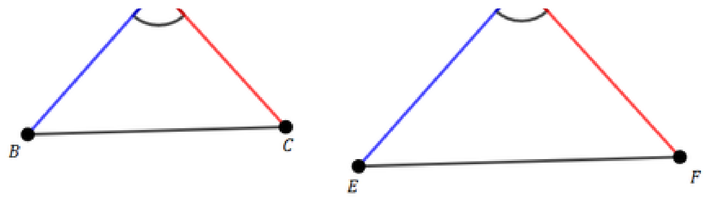
Qudro 4 - Análise da questão 4 (Q4)

		LIVRO A	LIVRO B
T1	**$t_1(T_1Q_4)$**		
	$t_2(T_1Q_4)$	X	X
	$t_3(T_1Q_4)$		
	$t_4(T_1Q_4)$	X	X
	$t_5(T_1Q_4)$	X	X
T2	**$t_1(T_2Q_4)$**		

Fonte: Construção nossa.

A seguir, mostraremos a representação de semelhança pelo caso Lado- Ângulo- Lado e um caso particular de semelhança a partir dela.

Figura 8 - Representação de semelhança pelo caso LAL

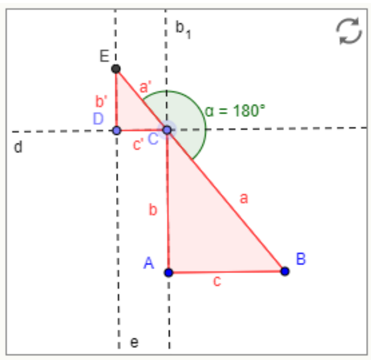


Fonte: Fandon

A seguir, falaremos sobre o caso particular de LAL no triângulo retângulo. Utilizamos o programa Geogebra, um recurso didático que pode ser instalado em computadores ou smartphone e que auxilia no momento de construir e visualizar figuras geométricas.

Demonstração conforme a técnica $t_3(T1Q_4)$:

$t_3(T_1Q4)$:Demonstração do caso particular de LAL no triângulo retângulo (Figura 9).



Fonte: Geogebra

Se ABC e DCE são dois triângulos retângulos e possuem um vértice em comum, sendo necessário que os catetos b e b sejam perpendiculares, então as hipotenusas farão parte da mesma reta, logo esses triângulos são semelhantes. A representação visual nos faz perceber que a soma dos ângulos internos em torno do desse vértice em comum é igual a 180º. Portanto, obedece o critério de semelhança de triângulos pelo caso LAL.

No livro A, o autor sugere ao leitor que construa dois triângulos, obedecendo os critérios de congruência citados por ele. Nesse momento, faz uso do teorema do caso AA para corroborar a validação do caso LAL. Barbosa usa figuras e linguagem simbólica para desenvolver a prova do teorema. Podemos dizer que o autor cumpriu a técnica $t_2(T_1Q_4)$, conforme proposto.

O livro B, apresenta a figura de dois triângulos e segue a demonstração, relembrando o teorema fundamental da proporcionalidade e, mais uma vez, o teorema de Tales.

Ambos os livros não trazem, nesse caso, a demonstração através do triângulo como propomos na técnica $t_3(T1Q_4)$, mas abordam esse método no decorrer do capítulo analisado, a semelhança de triângulos retângulos.

Questão 5 (Q5): Como é apresentado o conceito de semelhança pelo caso Lado- Lado-Lado (LLL)

T1Q5: Apresentar o conceito como teorema

t1(T1Q5): Demonstração pelo teorema de proporcionalidade

t2(T1Q5): Demonstração utilizando figuras

t3(T1Q5): Demonstração utilizando linguagem simbólica

T2Q5: Apresentar o conceito sem a utilização de teorema

$t_1(T_2Q_5)$: Identificar uma organização didática que possibilite a imersão do conteúdo

$[\theta/\Theta]_5$: O bloco teórico- tecnológico associadas ás tarefas T1Q5 e T2Q5 consiste em apresentar a definição do terceiro caso de semelhança de triângulos, LLL e o teorema da proporcionalidade.

Segue quadro que sumariza as técnicas cumpridas pelos autores.

Quadro 5 - Análise da questão 5(Q5)

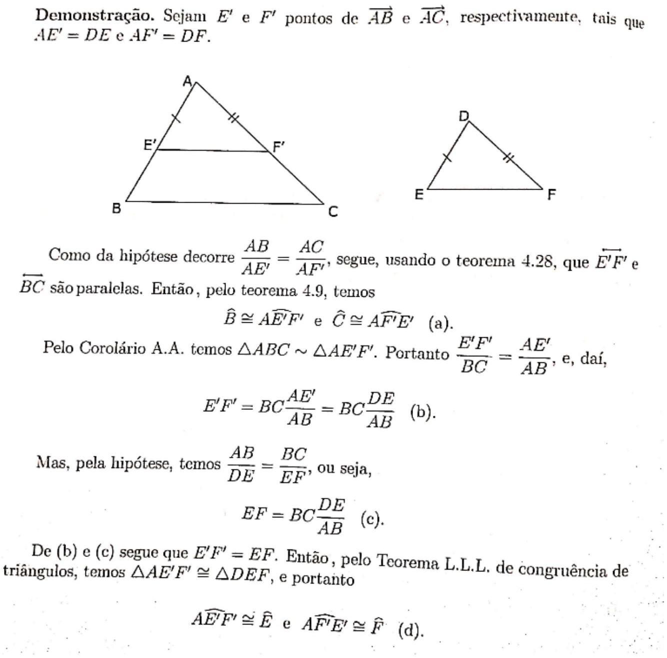
		LIVRO A	LIVRO B
T1	**t1(T1Q5)**		
	t2(T1Q5)	X	X
	t3(T1Q5)		
T2	**t1(T2Q5)**		

Fonte: Construção nossa.

O Livro A, no caso de semelhança de triângulos LLL, também sugere ao leitor, como no teorema do caso LAL, a construção de dois triângulos e relembra o mesmo teorema para afirmar a semelhança desses triângulos no caso LLL. O autor cita no início do capítulo que o quociente entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade, mas não o define como teorema.

No que se refere a demonstração dos três casos de semelhança de triângulos, o livro B faz uso do teorema de Tales em todos eles. O teorema de semelhança LLL é anunciado e em seguida demonstrado, como nos outros casos, usando representação de figuras e linguagem formal, e recorrem mais uma vez ao corolário AA, instituído no primeiro caso de semelhança apresentado pelas autoras. A figura a seguir mostra a demonstração no livro B.

Figura 10 - Demonstração do caso LLL



Demonstração. Sejam E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AE' = DE$ e $AF' = DF$.

Como da hipótese decorre $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$, segue, usando o teorema 4.28, que $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Então, pelo teorema 4.9, temos

$$\hat{B} \cong A\widehat{E'F'} \text{ e } \hat{C} \cong A\widehat{F'E'} \quad \text{(a)}.$$

Pelo Corolário A.A. temos $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$. Portanto $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$, e, daí,

$$E'F' = BC\frac{AE'}{AB} = BC\frac{DE}{AB} \quad \text{(b)}.$$

Mas, pela hipótese, temos $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, ou seja,

$$EF = BC\frac{DE}{AB} \quad \text{(c)}.$$

De (b) e (c) segue que $E'F' = EF$. Então, pelo Teorema L.L.L. de congruência de triângulos, temos $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$, e portanto

$$A\widehat{E'F'} \cong \hat{E} \text{ e } A\widehat{F'E'} \cong \hat{F} \quad \text{(d)}.$$

Fonte: Livro B, pág. 76

Por se tratar de livros para o público universitário, a linguagem conceitual e a presença dos teoremas estão certamente presentes. Ao propormos a tarefa T_2Q_5, acreditamos que é possível realizar uma demonstração sem apresentar o teorema, utilizando recursos didáticos, como já indicados por um dos autores, ou ancorados em saberes já existentes. Moreira (2013), acredita que um saber já existente é capaz de servir como base e dando condições a quem está aprendendo de atribuir significados a novos conceitos.

Questão 6 (Q6): Verificar se as propriedades que caracterizam semelhança de triângulos são validadas através de aplicações

T_1Q_6: Apresentar o caso de Teorema de Pitágoras

$t_1(T_1Q_6)$: Demonstração de semelhança no triângulo retângulo

$t_2(T_1Q_6)$: Demonstrar o Teorema de Pitágoras através das relações métricas

T_2Q_6: Verificar se há contextualização com outras áreas que se utilizam desse conteúdo

$t_1(T_2Q_6)$: Apresentar diferentes contextualizações

$[\theta/\Theta]_{6:}$ O bloco teórico - tecnológico que rege essas tarefas, então baseadas na aplicação dos casos de semelhança em triângulos retângulos, relações métricas no triângulo retângulo e demonstração do teorema de Pitágoras. A contextualização do que foi trabalhado durante o capítulo em outras áreas de ensino que se apropriam desse conhecimento como ferramenta de aplicação.

Apresentamos o quadro síntese que descreve as técnicas cumpridas pelos autores dos livros A e B:

Quadro 6 - Análise da questão 6 (Q6)

		LIVRO A	**LIVRO B**
T1	**t1(T1Q6)**	**X**	**X**
	t2(T1Q6)	**X**	**X**
T2	**t1(T2Q6)**		

Fonte: Construção nossa.

Os dois livros abordam o triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras. Em especial, apenas o livro B os separa em títulos isoladamente. Rezende e Queiroz (2008) apresenta como teorema e em seguida mostra um corolário construído a partir da altura, catetos e hipotenusa do triângulo para demonstrar as relações métricas.

O livro A, faz uso do triângulo retângulo para mostrar uma segunda forma de demonstrar o caso LLL. O autor apresenta o triângulo com linguagem simbólica, e pede para que o leitor represente em linguagem figural, conforme sugerido nos dois casos anteriores e chega até a relação de quadrado da altura do triângulo é igual ao produto de suas projeções. Após isso, Barbosa (2006) cita o teorema de Pitágoras, afirmando que este é considerado um os mais importantes e mais úteis teoremas da geometria Euclidiana plana.

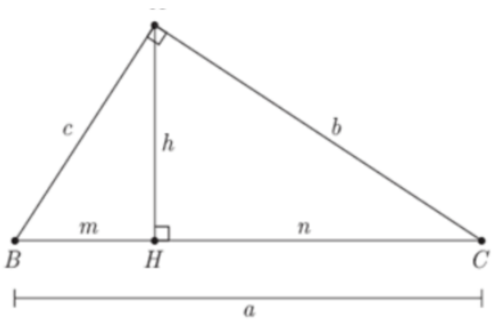
Mostraremos a demonstração de semelhança no triângulo retângulo e do teorema de Pitágoras.

Demonstrações segundo as técnicas $t_1(T_1Q_6)$ e $t_2(T_1Q_6)$

$t_1(T_1Q_6)$: Demonstração de semelhança no triângulo retângulo

$t_2(T_1Q_6)$: Demonstrar o Teorema de Pitágoras através das relações métricas.

Figura 11 - Figura de apoio para demonstrar a semelhança no triângulo retângulo, conforme a técnica t1(T1Q6) e t2(T1Q6**)**



Fonte: Oliveira, 2015, pág. 29

Do triângulo ABC, que possui ângulo reto em A e altura AH perpendicular à hipotenusa BD, surgem dois triângulos semelhantes ao triângulo ABD, em vista da congruência dos ângulos (BÂH =$\hat{C}$, complemento de $\hat{B}$, CÂH =$\hat{B}$, complemento de $\hat{C}$).Pelo caso AA, mostramos que os ABC ~ HAC.

Assim,

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \ e \ \frac{b}{a} = \frac{n}{b}$$

e dessas igualdades são deduzidas as relações métricas no triângulo retângulo:

$$h^2 = mn$$

$$b^2 = an$$

$$c^2 = am$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Em que a última é o conhecido teorema de Pitágoras.

Os autores dos livros A e B cumprem as técnicas $t_1(T_1Q_6)$ e $t_2(T_1Q_6)$ e demonstram conforme fizemos acima, porém não cumprem a tarefa T_2Q_6 proposta, pois não fazem contextualizações e possíveis aplicações em outras áreas que trabalhem esse assunto, como em outras licenciaturas.

A semelhança no triângulo retângulo conclui o capítulo de semelhança de triângulos. No livro A, após os exercícios e problemas propostos, o autor escreve uma seção de comentário sobre a contribuição de Pitágoras para a descoberta dos números racionais. No livro B, as autoras titulam nota histórica, escrito antes dos exercícios, em que relatam um caso na antiguidade que se fez uso do triângulo retângulo na construção de um aqueduto[2].

[2] elevada estrutura de alvenaria constituída por uma ou mais ordens de arcadas superpostas e erguida para servir de suporte a um canal que se destinava a conduzir a água sobre vale ou outra depressão do terreno.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, nos propusemos a analisar dois livros de geometria plana, usualmente presente no curso de licenciatura à luz da Teoria Antropológica do Didático, com o objetivo de compreender como autores abordam o pensamento dedutivo e como é feito o estudo de semelhança de triângulos no âmbito das definições e demonstrações.

Nos ancoramos em Balacheff(1988), no que se refere aos termos de prova e demonstração estudados e diferenciados por ele. Portanto, ao falarmos de a provas formais, nos referimos as demonstrações que, conforme esse autor, devem estar organizadas em um conjunto bem definido de regras.

Os livros A e B, apresentam alguma noção sobre o pensamento dedutivo, em destaque o livro A que aborda esse conceito, após já ter falado em um capítulo antecedente. Os termos prova e demonstração são usados com o mesmo sentido, com o objetivo de validar uma informação.

A apresentação do conteúdo de semelhança de triângulos é parecida nos livros A e B. Os dois usam provas formais para explicar os conceitos e as propriedades são abordadas de maneira direta sem dar exemplos de aplicações que permita ao aluno fazer deduções, criar preposições e querer demonstrá-las.

Compreendemos a necessidade desses autores em fazerem validações matemática das propriedades, mas que atrelado a isso, possam esclarecer o caminho escolhido, explicando os termos do pensamento dedutivo e criando organizações didáticas que complementem essas validações, refletindo que, ensinar apenas por meio de demonstrações ou provas, por se tratar do meio acadêmico, não é o suficiente para chegar a aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. 2009. 290f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

ARAÚJO, I. SILVA, W. **Abordagem da geometria nos livros didáticos de matemática da 3ª e 4ª série do ensino fundamental**. Artigo da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Unidade Universitária de Cassilândia, 2007.

BALACHEFF, N**. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). Mathematics Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas (Trad. Pedro Gómez). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes**, 2000. Disponível em <http://hal.archivesouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>. Data do acesso: 12 de Janeiro de 2013.

BALACHEFF, **N. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz**, n. 109, Grenoble, 2004. Disponível em: < http://wwwleibniz.imag.fr/LesCahiers/>. Data do acesso: 12 de janeiro de 2013

BALACHEFF, N. **Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives** (pp. 115-136). New York: Springer, 2010. Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4419-0576-5_9#page-2>. Acesso em 12 de janeiro de 2013.

BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana.** 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

BARBOSA, E. J.T, **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau**. Tese de doutorado, UFRPE. 2017.

BIEMBEGUTT, M. S.; HEIN, N**. Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher, Ltda., 1974.

BRASIL, **Guia de livros didáticos: PNLD 2008**: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007.

_____________, **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Secretaria de Educação Fundamental** - Brasília: MEC/SEF, 1997

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 35-113

CARNEIRO, M.H. **livro didático inovador e professores: uma tensão a ser vencida1 innovating textbook and teachers: a challenge tension**. Rev. Ensaio, Belo Horizonte, 2005.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique**. In : Petit X n° 5, IREM, Grenoble, 1984.

___________Dimension ibstrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique.Séminaire de didactique des mathématiques et de L'informatique de Grenoble. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble. (1991)

___________. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. Actes de l'U.E. de la Rochelle, 1998.

________________. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221- 266, 1999.

DANTE, L.R.; **Livro didático de Matemática: uso ou abuso?** Em Aberto, Brasília, ano 16 n.69, jan./mar.1996.

DESLANDES, S. F; NETO, O.C; GOMES,R; MINAYO, M.C.S. **Pesquisa Social: teoria, método e criatividade.** Petrópolis: Vozes 1994.

DOLCE, O. & POMPEO, J. N. .**Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 09**. São Paulo: Atual, 1993

EVES, Howard. **Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997

FERREIRA, Maridete B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 342f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

FREITAS, Maxlei. **Uma análise praxeológica do ensino de volume dos sólidos geométricos em livros didáticos do ensino médio.** Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. **Concepções de professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa.** In: Portal do GT 19 da ANPEd (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação). 30ª reunião. Caxambú – MG. 2007. p. 1-21. Disponível em . Acesso em 24 jan. 2014.

LORENZATO, SERGIO. **Por Que Não Ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista – SBEM, 1995

LÜDKE, Menga, ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo : EPU, 1986.

MACHADO, Nílson J. e CUNHA, Marisa O. **Geometrias não-euclidianas: uma abordagem ingênua. In: Linguagem, conhecimento, ação: ensaios de epistemologia e didática** / org. Nílson José Machado, Marisa O. Cunha. São Paulo: Escrituras Editora, 2003. – (Coleção ensaios transversais, 23)

MENDES, Herman do Lago. **Análise Praxeológica de livro didático de matemática referente ao estudo de números binários.** Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 199-219, set. 2015. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2015v10n1p199>. Acesso em: 18 jul. 2018.

MORAES, Roque. **Análise de conteúdo**. *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MELLO, Elizabeth G. S. da. **Demonstração: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometria.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), 187p,

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B**. A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

OLIVEIRA, R.M. **Teorema de pitágoras: demonstrações.** Trabalho de conclusão de curso. Macapá, AP, 2015.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de matemática em Moçambique**. Tese (Doutorado) 325p. – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PEREIRA, Júlio Cesar Rodrigues. **Análise de dados qualitativos**: estratégias metodológicas para as Ciências da Saúde, Humanas e Sociais. 3 ed. 1. reimpr. São Paulo: EDUSP, 2004.

POMMER, M. W. **A Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo, 2013. Disponível em: <http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+20 1 3.pdf>. Acesso em 15 de julho. 2018.

REZENDE, E.Q.; QUEIROZ, M.L.B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.** Campinas: Editora Unicamp, 2008.

SANTOS, O.K.;BELMINO, J.F. **Recursos didáticos: uma melhoria na qualidade da aprendizagem.** Editora Realize, 2013.

SANTOS, M. C. **A importância da produção de material didático na prática docente**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE GEÓGRAFOS, 7, Vitória, 2014. Vitoria/ES. Anais do VII CBG

SANTOS, M.C.; SANTOS, M.R. . **O conceito de área de figuras geométricas planas no livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático.** Revista de educação matemática e tecnologia ibero-americana, Pernambuco, 2015.

SANTOS, R.C. **Conteúdos Matemáticos na Educação Básica e sua abordagem em cursos de Licenciatura em Matemática**, 2005, 234f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

SILVA, D.B. **Propostas para o ensino da semelhança.** Monografia. Rio de Janeiro, 2013.

ROSA, A. C. SANTOS, J. D. **O uso das tecnologias na educação de jovens e adultos: reflexões sobre um relato de experiência.** In: Anais do 3º Simpósio de Educação e Comunicação. Aracaju - Universidade Tiradentes – UNIT, 2012.

VAN HIELE-GELDOF, D**. The didactics of geometry in the lowest class of secondary school.** 206 p. Tesis (Doctoral) - Universidad de Utrecht: Utrecht. Traducción al inglés en Fuys, 1973.