UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

GUTTIERRY ÁLEX DOS SANTOS

# SISTEMAS LINEARES E SUA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA: uma abordagem instrumental das soluções algébricas com o uso do GeoGebra

Caruaru
2019

GUTTIERRY ÁLEX DOS SANTOS

**SISTEMAS LINEARES E SUA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA:** uma abordagem instrumental das soluções algébricas com o uso do GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado(a) ao Curso de Graduação em Matemática- Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a graduação em Licenciatura em Matemática.

**Área de concentração:** Ensino/ Matemática

Orientador: Profº Drº Valdir Bezerra Santos Júnior

Caruaru

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S237s Santos, Guttierry Álex dos.
Sistemas lineares e sua representação geométrica: uma abordagem instrumental das soluções algébricas com o uso do GeoGebra. / Guttierry Álex dos Santos. - 2019.
51 f. il.: 30 cm.

Orientador: Valdir Bezerra Santos Júnior.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Tecnologia educacional. 3. Aprendizagem. 4. Sistemas lineares. 5. Software. I. Santos Júnior, Valdir Bezerra (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-382)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática - Licenciatura

# SISTEMAS LINEARES E SUA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA: uma abordagem instrumental das soluções algébricas com o uso do GeoGebra.

GUTTIERRY ÁLEX DOS SANTOS

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e ___________________ em 09 de dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

_______________________________________

Profº. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_______________________________________

Profª. MSc. Lidiane Pereira de Carvalho
(Examinador(a) Externo(a))

_______________________________________

Profº. MSc. Luan Danilo Silva dos Santos
(Examinador(a) Externo(a))

“Dedico este trabalho a Deus, o maior orientador da minha vida. Ele esteve comigo tanto nos momentos de fartura quanto os de necessidade e sua presença foi constante a cada palavra escrita neste trabalho, o qual é apenas o início de um chamado que Ele tem me inspirado e capacitado todos os dias.”

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho é fruto de uma longa caminhada de aprendizagem construída durante minha formação como docente, nos quais muitas pessoas contribuíram direta e indiretamente para que houvesse amadurecimento e crescimento como estudante, profissional e principalmente como ser humano.

Ao meu senhor e salvador Jesus Cristo, por ser aquele que é a razão da minha existência e aquele pelo qual vivo todos os dias, pois sem sacrifício e sem seu amor eu não conseguiria viver e é graças a Ele que hoje posso fazer a diferença na vida de outras pessoas através do ensino, visto que Ele é o mestre dos mestres.

À minha família, em especial, ao meu pai José Antonio dos Santos e minha mãe Maria Cleide da Silva Santos, que do pouco fizeram o muito e das poucas oportunidades que a vida os ofereceu deram o seu melhor para que hoje eu tivesse a oportunidade de avançar nos estudos e me dedicar assim como eles em tudo quanto eu fizer.

À Universidade Federal de Pernambuco, em particular o Campus do Agreste, pela oportunidade.

Ao meu orientador Valdir Bezerra, pelas orientações e contribuições, pela amizade, paciência, disponibilidade de materiais, tempo destinado para construção deste trabalho, e também pelos grandes ensinamentos nas disciplinas durante minha graduação.

Ao professores que fizeram parte da minha trajetória de aprendizagem e que contribuíram para o meu crescimento e amadurecimento como cidadão.

Aos meu queridos amigos da turma de 2015.1 com os quais aprendi ainda mais a lidar com as diferenças de pensamento, crença, personalidade e principalmente com quem aprendi a ser um ser humano melhor, compreendendo a importância da união e do companheirismo em prol do objetivo de ensinar e aprender matemática.

Por fim, agradeço a mulher com quem decidi dividir toda a minha vida, minha esposa Soyane Lima de Albuquerque dos Santos, pois a mesma foi aquela que suportou comigo todos os momentos desafiadores e amedrontadores, me animando e confortando sempre que precisei. Alguém que não resumiu nossa união a apenas um sim no altar, mas todos os dias demonstrou estar sob a mesma missão e sob o mesmo propósito que eu.

## RESUMO

A utilização de novas tecnologias como uma ferramenta que auxilia no processo de ensino e aprendizagem, além de proporcionar uma aprendizagem mais produtiva aos alunos quando a mesma propõe experiências com o conteúdo abordado por meio de recursos tecnológicos, permite uma aproximação com a realidade dos adolescentes e jovens da atualidade, visto que os mesmos estão tão imersos no mundo digital por meio de seus celulares e computadores. O ensino de matemática tem evoluído com relação ao uso de recursos tecnológicos em sala de aula, os quais estão atrelados tanto ao ensino como a aprendizagem dos estudantes, a ponto de tratarem de conteúdos que no passado só se resolviam utilizando papel e lápis. Disso segue que é imprescindível e certamente válido que, desde a formação acadêmica, exista uma dedicação por parte daqueles que pretendem lecionar ou mesmo aqueles que já lecionam, em desenvolver trabalhos de ensino utilizando recursos tecnológicos, sejam softwares matemáticos ou outras mídias. Partindo desse pressuposto, o objetivo deste trabalho é investigar as estratégias na resolução de atividades, dos estudantes de um curso de formação de professores de matemática, sobre os tipos de soluções de sistemas lineares 3x3 associadas as suas representações geométricas, como também os obstáculos e potencialidades do GeoGebra como instrumento de ensino e de aprendizagem matemática. Como instrumento de coleta, utilizou-se um questionário aplicado em duas turmas que cursavam a disciplina de álgebra linear no intuito de selecionar participantes de acordo com a quantidade de acertos quanto ao tipo de solução dos sistemas lineares propostos, para que tais participantes estivessem em uma segunda etapa que consistiu em responder novamente as mesmas questões, porém com o possível auxílio do *software* GeoGebra. Baseando-se na Teoria da Instrumentação de Rabardel (1995) obtivemos resultados satisfatórios com relação à análise do uso e manuseio do GeoGebra, notando que o *software* é um potencial instrumento tanto para o ensino quanto para a aprendizagem de sistemas lineares 3x3, todavia o *software* só terá tal valor de instrumento dado o momento em que aqueles que o utilizarão precisam conhecer como o mesmo funciona e também compreender a relação entre suas ferramentas e os conceitos necessários para a compreensão matemática do conteúdo abordado.



**Palavras-chave:** Tecnologias. Ensino. Aprendizagem. Matemática. Sistemas. GeoGebra.

## ABSTRACT

The use of new technologies as a tool that assists in the teaching and learning process. In addition, provide more productive learning to students when it offers experiences with the addressed content through technological resources, it allows an approximation with the reality of today's adolescents and young people, since they are truly immersed in the digital world through mobile phones and computers. Mathematics teaching has evolved with regard to the use of technological resources in the classroom, which are linked to both teaching and students' learning, to the point of dealing with the content that in the past it only could be solved using paper and pencils. Besides, that it is essential and certainly valid that, since academic education, there is a dedication on the part of those who intend to teach or even those who already teach, in developing teaching work using technological resources, whether mathematical software or other media. As a matter of fact, the objective of this work is to investigate the strategies in the resolution of activities, of the students of a mathematics teachers' training course, on the types of 3x3 linear system solutions associated with their geometric representations, as well as the obstacles and potentialities of GeoGebra as an instrument of teaching and mathematical learning. As a methodology, a questionnaire applied in two classes that studied the subject of linear algebra in order to select participants according to the amount of correct answers regarding the type of solution of the proposed linear systems, so that such participants were in a second stage that consisted of re-answering the same questions, although with the possible assistance of geogebra software. Based on rabardel's Instrumentation Theory (1995) we obtained satisfactory results regarding geogebra use and handling analysis, realizing that the software is a potential instrument for teaching as well as for learning 3x3 linear systems, in spite of the software will only have such an instrument when those who will use it need to know how it works and also understand the relationship between its tools and the necessary concepts for mathematical understanding of the content addressed.



**Key-words:** Technologies. Teaching. Learning. Mathematics. Systems. GeoGebra.

## LISTA DE FIGURAS


| | | |
|---|---|---|
| Figura 1 – | Representação Geométrica do Sistema A................................................ | 26 |
| Figura 2 – | Representação Geométrica do Sistema C................................................ | 26 |
| Figura 3 – | Representação Geométrica do Sistema E................................................ | 27 |
| Figura 4 – | Representação Geométrica do Sistema B................................................ | 27 |
| Figura 5 – | Representação Geométrica do Sistema D................................................ | 28 |
| Figura 6 – | Protocolo de Construção........................................................................ | 30 |
| Figura 7 – | Resolução no GeoGebra do Participante I, Sistema A............................. | 32 |
| Figura 8 – | Resolução no GeoGebra do Participante I, Sistema B............................. | 32 |
| Figura 9 – | Resolução no GeoGebra do Participante I, Sistema C............................. | 33 |
| Figura 10 – | Resolução no GeoGebra do Participante I, Sistema D............................. | 33 |
| Figura 11 – | Resolução no GeoGebra do Participante I, Sistema E............................. | 34 |
| Figura 12 – | Resolução no GeoGebra do Participante II, Sistema A........................... | 36 |
| Figura 13 – | Resolução no GeoGebra do Participante II, Sistema B........................... | 37 |
| Figura 14 – | Resolução no GeoGebra do Participante II, Sistema C........................... | 37 |
| Figura 15 – | Resolução no GeoGebra do Participante II, Sistema D........................... | 38 |
| Figura 16 – | Resolução no GeoGebra do Participante II, Sistema E........................... | 38 |
| Figura 17 – | Resolução no GeoGebra do Participante III, Sistema B.......................... | 41 |
| Figura 18 – | Resolução no GeoGebra do Participante III, Sistema C.......................... | 41 |
| Figura 19 – | Resolução no GeoGebra do Participante III, Sistema E.......................... | 42 |
| Figura 20 – | Resolução no GeoGebra do Participante III, Sistema D.......................... | 42 |
| Figura 21 – | Resolução no GeoGebra do Participante IV, Sistema A.......................... | 44 |
| Figura 22 – | Resolução no GeoGebra do Participante IV, Sistema B.......................... | 45 |
| Figura 23 – | Resolução no GeoGebra do Participante IV, Sistema C.......................... | 45 |
| Figura 24 – | Resolução no GeoGebra do Participante IV, Sistema D.......................... | 46 |
| Figura 25 – | Resolução no GeoGebra do Participante IV, Sistema E.......................... | 46 |

**SUMÁRIO**


**1 INTRODUÇÃO.......... 10**

**2 OBJETIVOS.......... 14**

2.1 OBJETIVOS GERAIS.......... 14

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.......... 14

**3 SISTEMAS LINEARES, SUAS SOLUÇÕES E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA.......... 15**

**4 ABORDAGEM INSTRUMENTAL DE SOFTWARES DINÂMICOS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES.......... 19**

4.1 ABORDAGEM INSTRUMENTAL DE RABARDEL (1995) E OS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA.......... 20

**5 PERCURSO METODOLÓGICO.......... 23**

**6 ANÁLISE E RESULTADOS.......... 30**

6.1 PARTICIPANTE I.......... 30

6.2 PARTICIPANTE II.......... 34

6.3 PARTICIPANTE III.......... 39

6.4 PARTICIPANTE IV.......... 43

**7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.......... 48**

**REFERÊNCIAS.......... 50**

## 1. INTRODUÇÃO

Este estudo tem como objetivo analisar as estratégias na resolução de atividades dos estudantes de um curso de formação de professores de matemática sobre os tipos de soluções de sistemas lineares 3x3 associadas as suas representações geométricas.

A partir do cumprimento deste, acreditamos que é possível realizar uma reflexão sobre como as representações geométricas dos sistemas lineares podem ser importantes para a construção dos conceitos que também são algébricos. Além disso, observar se o uso de instrumentos tecnológicos serviu como auxílio na abordagem e entendimento de sistemas lineares 3x3 ao analisar como graduandos de um curso de formação de professores de matemática compreendem os tipos de soluções de sistemas lineares e sua representação geométrica no *software* GeoGebra.

É notável que as novas tecnologias tenham ganhado espaço em todos os cenários da sociedade e, embora haja alguma resistência, o âmbito educacional tem se mostrado favorável para a utilização de *softwares* dinâmicos e outras tecnologias como auxílio no ensino e na aprendizagem, não apenas da disciplina de matemática, como também de outras áreas do conhecimento. O objetivo de tal uso seria proporcionar uma experiência mais significativa aos alunos para que possam, mais do que receber e reproduzir, desenvolver um melhor raciocínio acerca dos conteúdos, a fim de uma melhor construção dos conceitos matemáticos.

Ribeiro e Paz (2012, p. 12) afirmam que:

> As novas tecnologias têm sofrido avanços consideráveis, e consequentemente, novos rumos e possibilidades de ensino estão surgindo, principalmente na área da matemática, onde há uma grande variedade de programas e jogos nos computadores que oferecem um significado especial na construção do conhecimento.

Tendo em vista outros recursos didáticos como marcador para quadro, lousa e livro didático, utilizados na Educação Básica e até mesmo no Ensino Superior, é notório que os mesmos são os principais recursos utilizados pelos professores de matemática em sala de aula, por isso entende-se que o uso de outras tecnologias é algo que os docentes, relativamente, ainda podem sentir dificuldade em utilizar.

Importante destacar que o possível movimento de inserção dos recursos tecnológicos na Educação Básica não vêm com objetivo de substituir a ação pedagógica do professor em sala de aula, pelo contrário, este movimento pode lhe fornecer mais ferramentas para que possa exercer a sua prática buscando atingir aos mais diversos tipos de estudantes.

> É fundamental que o profissional de Educação Matemática utilize as novas tecnologias hoje existentes na área da educação com pleno domínio, e que adquiram

> a consciência de sua importância como mediador de conhecimentos, já que o computador virá para adicionar mais recursos pedagógicos em seu trabalho docente, o que poderá contribuir para que o aprendizado se torne mais atraente e motivador para o aluno. (SANTOS; LORETO; GONÇALVES; 2010, p. 48-49)

Porém, segundo Bittar (2006), o uso por si só de tais recursos pode, além de redirecionar o objetivo da aula, ser apenas uma atividade de entretenimento na qual os educandos não conseguem relacionar os jogos, *softwares* e aplicativos com o currículo proposto nem com o desenvolvimento dos conceitos que deveriam ser abordados em sala de aula, mas que no fim perdem seu espaço em nome do uso de novas tecnologias.

Sem sombra de dúvidas a tecnologia está cada vez mais inserida na realidade do corpo discente e não associar os recentes recursos tecnológicos ao ambiente escolar pode ser um ponto de dificuldade para atingir o interesse dos mesmos. Ademais, aliar tais recursos, os quais fazem parte do cotidiano dos alunos, com os conceitos a serem estudados pode ser um grande trunfo nas mãos do professor de matemática, visto que em diversas situações propostas em sala de aula os educandos têm a impressão de que o processo de solução é sempre o mesmo, o que mudou é apenas o "corpo" do problema, isto é, a forma com o que foi escrito ou apresentado, ao qual, mesmo que extremamente textualizado, o estudante irá apenas reproduzir a fórmula memorizada anteriormente a fim de encontrar o famoso "valor de x" e, por fim, a solução daquilo que se pede.

Nesta direção Oliveira e Gonçalves (2018, p. 94) afirmam que:

> Na tentativa de formular respostas a questões diversas, o indivíduo utilizará a tecnologia como elemento reorganizador de seu pensamento. Do ponto de vista educacional, os alunos passam a utilizar tal aparato para formular respostas às situações-problema, conjecturando e experimentando suas hipóteses. [...] a tecnologia surge como possibilidade de ampliar a exploração dos conceitos antes consolidados. Nessa etapa, os estudantes percebem que é possível visualizar as conjecturas propostas e refletir sobre elas, de modo a criar conclusões válidas a respeito do objeto matemático.

Disso segue que é imprescindível e certamente válido que, desde a formação acadêmica, exista uma dedicação por parte daqueles que pretendem lecionar ou mesmo aqueles que já lecionam, em desenvolver trabalhos de ensino utilizando recursos tecnológicos, sejam *softwares* matemáticos ou multimídias como vídeos, slides, gráficos virtuais, plataformas online, entre outros, bem como seus efeitos no processo de ensino e aprendizagem. Assim como afirma Gravina e Santarosa (1998, p. 10), ao evidenciar as contribuições da tecnologia na sala de aula: "As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito às concretizações mentais".

Podemos exemplificar alguns casos em que isso é possível por meio da utilização de *softwares* educacionais de geometria dinâmica, como: *winplot*[1], *cabri-géométre*[2], entre outros. Além do GeoGebra, que é tratado com mais detalhes nesta pesquisa. Cabe destacar que não conseguiríamos abordar todos os domínios que podem ser abordados por meio de atividades desenvolvidas no GeoGebra, a saber: estatística, geometria, álgebra, etc. Por isso, nos dedicaremos a tratar sobre um tema associado ao domínio da álgebra linear: sistemas lineares 3x3.

Ainda sobre o domínio da álgebra linear podemos afirmar que no ensino superior, normalmente nos cursos da área de exatas, existe uma componente curricular de mesmo nome em que é importante destacar que as noções associadas ao domínio de resolução de sistemas lineares são geralmente tratadas de maneira a privilegiar os procedimentos algébricos, o que pode trazer dificuldades para os educandos compreenderem a sua utilidade na construção do conhecimento matemático.

> Compreender Álgebra Linear exige que os estudantes comecem a pensar sobre os objetos e os operadores de Álgebra não em termos de relações entre matrizes, vetores ou operadores particulares, mas em termos de estruturas inteiras de objetos tais como: espaços vetoriais sobre corpos, álgebras, classes de operadores lineares, que podem ser transformados, representados de diferentes maneiras e considerados como sendo ou não isomorfos (DORIER, 1989, p. 203).

Especificamente sobre o tema sistemas lineares encontramos na citação de Bastos, Pinheiro e Arruda (2016, p. 149), que “o ensino e a aprendizagem de sistemas lineares há muito tempo ocorre por meio de expressões algébricas, que são desprovidas de situações reais e, concomitantemente, mecanicistas”.

Diante das ideias de Dorier (1989) e Bastos, Pinheiro e Arruda (2016) podemos inferir que a representação geométrica pode ser de fundamental auxílio para uma melhor abordagem e compreensão visto que o ensino de álgebra linear geralmente é feito através da formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas, feita de forma mecânica e reproduzida, a qual muitas das vezes a sua representação geométrica é deixada de lado.

Sobre a importância do estudo geométrico da álgebra linear, Celestino (2000, p. 46) afirma:

> Quando os alunos encontram os vetores pela primeira vez, estes são identificados como uma lista de números. Entretanto, quando são escritos em bases diferentes, essa identificação fica totalmente abalada. Outro problema é encontrar as coordenadas de um vetor e a representação matricial de um operador linear em relação a uma base,

[1] Disponível para download em <https://winplot.br.softonic.com/> acesso em 23 de setembro de 2019.
[2] Disponível para download em < https://pt.freedownloadmanager.org/Windows-PC/Cabri-Geometry-II.html> acesso em 05 de novembro de 2019.

> assim como as relações entre duas matrizes representando um mesmo operador linear. Muitos alunos são capazes de efetuar a mudança de registros em um único sentido.

Considerando as ideias aqui explicitadas sobre a importância da tecnologia e ainda sobre o ensino e aprendizagem do domínio da álgebra linear fez chegar ao seguinte questionamento: Quais as são as estratégias na resolução de atividades, dos estudantes de um curso de formação de professores de matemática, sobre os tipos de soluções de sistemas lineares 3x3 e sua representação geométrica?

Foi diante desse cenário que a presente pesquisa foi desenvolvida em uma das disciplinas de graduação de Matemática (licenciatura), a saber, o componente curricular de Álgebra Linear, ofertado pela Universidade Federal de Pernambuco, campus do agreste. De maneira mais específica, trazendo as representações geométricas dos sistemas lineares 3x3 bem como a de suas soluções, utilizando para isso o *software* GeoGebra como instrumento, em sua plataforma 3D.

O trabalho ficou estruturado em duas etapas, das quais a segunda envolvia diretamente o uso do GeoGebra e as soluções de sistemas lineares 3x3 cujo questionamento buscava compreender a relação pessoa que estudantes de um curso de licenciatura em matemática tem com a representação geométrica de tais sistemas e se o *software* de geometria dinâmica, GeoGebra, pode servir como instrumento segundo a teoria da instrumentação de Rabardel (1995).

Para atingirmos nosso objetivo organizamos o trabalho em 7 capítulos. O primeiro capítulo versa sobre a introdução ao problema de pesquisa, bem como as justificativas que levaram a este trabalho e também considerações de alguns autores que reforçam as buscas que norteiam este trabalho. No segundo capítulo estão descritos os objetivos do trabalho, sendo divididos em gerais e específicos.

Quanto ao terceiro e quarto capítulo dissertamos o referencial teórico em que este trabalho se baseia, tendo como foco a teoria da instrumentação de Rabardel (1995). No quinto capítulo descrevemos a metodologia da pesquisa, a apresentação dos participantes envolvidos nas duas etapas da pesquisa, a estrutura, objetivos e expectativas do questionário utilizado como também a forma com que foram selecionados os participantes entre a primeira e segunda etapa.

Em seguida, no sétimo capítulo, foram feitas as análises dos estudantes na segunda etapa da pesquisa, contando com suas construções no GeoGebra e suas considerações acerca do questionamento do trabalho. Por fim estão as considerações finais feitas com base nos dados coletados e analisados anteriormente.

# 2. OBJETIVOS

## 2.1 GERAL

Analisar as estratégias na resolução de atividades, dos estudantes de um curso de formação de professores de matemática, sobre os tipos de soluções de sistemas lineares 3x3 associadas as suas representações geométricas.

## 2.2 ESPECÍFICOS

I. Analisar as justificativas que os licenciandos apresentam para diferenciação entre as possíveis soluções dos sistemas lineares 3x3.
II. Analisar que limites e potencialidades o *software* GeoGebra apresenta na abordagem, resolução e interpretação de sistemas lineares 3x3 no ponto de vista dos licenciandos.

## 3. SISTEMAS LINEARES, SUAS SOLUÇÕES E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA.

O tema sistemas lineares e suas resoluções têm aplicações práticas nos mais diversos campos da ciência e engenharia, desde circuitos eletrônicos a simulações de aviões em pleno voo como também o balanceamento de equações químicas e aplicações em interpolação polinomial ou até tráfego de veículos em ruas movimentadas, o tema é, sobretudo, um campo que vale a pena ser explorado e estudado no ensino de matemática, como afirma Boccardo em sua dissertação:

> [...] é um tema de bastante relevância no ensino de Matemática. Além disso, é ferramenta fundamental para trabalhar com os alunos outros conteúdos de Matemática, como Matrizes, Determinantes, Modelagem, Otimização, entre outros. É um assunto abordado desde o Ensino Fundamental, passando pelo Ensino Médio e, também, em algumas disciplinas de cursos superiores da área de Exatas. (BOCCARDO, 2007, p.9)

O ensino de álgebra linear tem sido amplamente discutido, não apenas no ensino fundamental e no médio, em que muitas problemáticas que envolvem a componente curricular são abordadas, mas também no nível superior sendo tratada como domínio da matemática de destaque no desenvolvimentos de cursos na área das exatas em que, segundo estudos de Dorier (1998) é possível notar dificuldades por parte dos estudantes no desenvolvimento e aprendizado dos conceitos, os quais merecem tanta atenção quanto outras disciplinas ditas mais complexas.

Estas dificuldades mostradas por parte dos estudantes, especificamente quanto ao assunto de sistemas lineares, vem desde o ensino fundamental, visto que, muitos profissionais da educação reclamam que ao avançar de nível os educandos não possuem conhecimento necessário para desenvolver atividades que demandam a sua atual etapa escolar. Sobre tais problemas, Dias e colaboradores (2019) afirma:

> [...] as dificuldades em relação à noção de sistemas de equações lineares tende a se agravar no ensino superior, pois é neste momento que ela se torna uma das ferramentas importantes para a introdução de novos conhecimentos, que precisa estar disponível para que os estudantes possam aplicá-la nas diversas tarefas que encontrarão em seus respectivos cursos. (DIAS *et al*. 2019, p.1)

Ainda no trabalho de Dias e colaboradores (2019), essa dificuldade pode ser notada explicitamente nos estudantes do ensino superior quanto ao uso de forma correta e adequada da noção de sistemas de equações lineares e de suas soluções, especificamente, nos sistemas lineares 2x2, os quais parte dos alunos que participaram da pesquisa não souberam identificar os sistemas, que podem ser de: 1) única solução, ou ainda, o sistema é possível e determinado, logo as retas são concorrentes; 2) infinitas soluções, ou ainda, o sistema é possível e indeterminado, logo as retas são coincidentes e 3) o sistema não tem solução, ou ainda, o sistema é impossível, logo as retas são paralelas.

Embora as pesquisas de Dias e colaboradores (2019) estivessem voltadas para os sistemas lineares 2x2 e suas soluções, o nosso estudo, como já mencionado, pretendeu investigar como os estudantes de nível superior de um curso de formação de professores de matemática lidam com os sistemas lineares 3x3, analisando possíveis faltas na compreensão dos tipos de solução e como a interpretação geométrica interfere nessa abordagem. Pois a interpretação geométrica, conforme Borba, Silva e Gadanidis (2014), sobretudo em relação com a geometria dinâmica, traz consigo um outro olhar sobre os elementos que constituem o sistema, possibilitando a utilização, combinação, visualização e construção do mesmo, proporcionando novos caminhos de investigação.

Quanto aos sistemas lineares 3x3, os tipos e soluções segundo Boldrini e colaboradores (1980), p. 44), podem ser descritos como:

a) Possível e Determinado, isto é, quando os planos formados por cada equação tem uma única interseção, a saber um único ponto.
b) Possível e Indeterminado, quando os planos tem uma interseção, porém dois deles são coincidentes, ou seja, a interseção entre os três planos é uma reta, logo teremos infinitos pontos que constituem uma infinidade de soluções possíveis.
c) Impossível, quando os planos não possuem nenhuma interseção, ou seja, um dos planos é paralelo a pelo menos um dos outros ou quando os três são paralelos entre si.

Uma das hipóteses que explicaria a razão pela qual existe essa dificuldade na compreensão dos tipos de solução é justamente a ausência da interpretação geométrica na exposição e na abordagem dos conceitos, que também são algébricos. Todavia, a interpretação não é um fim em si mesma, bem como não é uma mera “ajuda visual” que, segundo Celestino (2000, p. 83-84) “quando o quadro geométrico é utilizado como ‘ajuda visual’ pressupõe-se que os alunos disponham de conhecimentos que estariam sendo construídos com seu auxílio”. Apontando assim, um paradoxo que nos alerta como a abordagem geométrica pode ser infrutífera quando é feita apenas para que o aluno a conheça, sem conexão firme com outras interpretações ou até mesmo provocar o efeito contrário do desejado, ou seja, limitar o estudo da álgebra linear fazendo da geometria um objetivo ao invés de um objeto que faz parte do processo de aprendizagem.

Disso segue que devemos entender melhor como se dá tal abordagem geométrica e o quão importante ela pode ser como parte do processo de resolução e entendimento dos tipos de soluções dos sistemas lineares a fim de proporcionar maior diversidade de investigação como também a interação com outros conhecimentos, sejam eles algébricos ou geométricos.

Na abordagem de sistemas lineares é notável, segundo Dias et al. (2019), que os graduandos assistidos pelo questionário aplicado tiveram dificuldades na resolução de sistemas 2x2 em que é possível notar que, diante de suas respostas, alguns não compreendem quando o sistema possui uma solução real, porém indeterminada, ou quando o sistema é realmente impossível, visto que a maioria das resoluções apresentadas demonstram o caráter algébrico da solução, todavia desvinculada de outras possibilidades para a mesma. Partindo desse plano de fundo, podemos deduzir que essa dificuldade só tende a aumentar no tocante a dimensões maiores, ou seja, que saem do plano cartesiano 2x2 e das duas únicas incógnitas.

> A discussão de um sistema linear refere-se à determinação de sua resolubilidade, indicando os tipos de soluções possíveis e, a partir daí, a apresentação de um conjunto solução. A determinação do conjunto solução de um sistema linear nem sempre é facilmente elaborada e compreendida. (JORDÃO, A. L. I; BIANCHINI, B. L. 2012, p. 6)

Jordão e Bianchini (2012) em sua pesquisa com alunos do Ensino Médio, abordou sistemas lineares 2x2 e logo em seguida 3x3 pelo método de adição, ambos com o auxílio do *software Winplot*, procurado analisar os mecanismos de investigação dos alunos ao se depararem com tais sistemas lineares, onde "coube ao aluno o papel de ser o sujeito da pesquisa, e ficou a cargo do professor a retomada das questões discutidas, restabelecendo os principais resultados da teoria" (JORDÃO; BIANCHINI, 2012, p. 9). Vale salientar que as autoras utilizaram uma sequência didática a fim de que os alunos se familiarizassem com o *software* durante a resolução dos sistemas 2x2 para que em seguida, após uma avaliação prévia de todo o processo, o esquema fosse feito também, e de igual metodologia, com sistemas 3x3.

Os resultados obtidos através dessa pesquisa foram bem previsíveis, visto que "os alunos resolvem os sistemas lineares de forma mecânica, sem dar sentido a eles" (JORDÃO; BIANCHINI, 2012, p.14), ou seja, resolviam os sistemas algebricamente, mas não sabiam o que aquilo representava nem mesmo no campo algébrico, mostrando assim a importância não apenas da visualização gráfica, como também da interpretação das representações geométricas que envolvem os tipos de solução dos sistemas lineares. Onde as autoras afirmam:

> Convém ressaltar aqui a relevância de interpretar e compreender a solução dos sistemas lineares. Para tanto, foi utilizado o software Winplot, que possibilitou ao aluno visualizar, compreender e interpretar a solução do sistema linear 3x3 e estabelecer relações entre os coeficientes das equações no sistema linear 2x2. (JORDÃO, A. L. I; BIANCHINI, B. L. 2012, p. 14)

É notório que a interpretação das representações geométricas de sistemas lineares é de fundamental importância para uma melhor compreensão do educando quanto a construção e também dos tipos de solução dos mesmos, principalmente aqueles que possuem três incógnitas, os quais terão representações em um espaço tridimensional, cuja visualização possivelmente será facilitada com o uso de *softwares* de geometria dinâmica (GD). Como diz Borba, Silva e Gadanidis:

> As atividades que propõem a construção de objetos com o uso de softwares de GD buscam construir cenários que possibilitem a investigação matemática. Em nossa perspectiva, nós pensamos-com-tecnologias, ou seja, a natureza dos problemas e da atividade matemática está em simbiose com o design das tecnologias que utilizamos, com a potencialidade das mídias que usamos para fazer sentido a conceitos ou produzir conhecimentos matemáticos (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 24).

## 4. ABORDAGEM INSTRUMENTAL DE SOFTWARES DINÂMICOS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Em uma análise de pesquisas e estudos específicos podemos notar através de autores como Bittar (2006; 2011), Silveira (2017), Ferreira (2016) e tantos outros, que existe uma preocupação, não apenas com os tipos de representação dos conceitos matemáticos, mas também com o risco do uso de tecnologia apenas pelo uso, onde os alunos, sejam eles da educação básica ou superior, aprendem a manusear os recursos tecnológicos que são disponibilizados a ponto de domesticá-los, como afirma Borba, Silva e Gadanidis:

> Entendemos que domesticar uma tecnologia significa utilizá-la de forma a manter intacta práticas que eram desenvolvidas com uma mídia que é predominante em um determinado momento da produção do conhecimento. Manter tais práticas de forma acrítica, como por exemplo usar ambientes virtuais de aprendizagem apenas para enviar um PDF é o que chamamos de domesticação. O envio substitui o correio usual que entregava um texto, mas não incorpora o que pode ser feito com uma nova mídia. (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 25)

Muitas vezes as novas tecnologias tornam-se apenas uma ferramenta conectada com o mundo digital, mas desconectada com a aprendizagem dos estudantes a ponto de, por exemplo, “na maioria das vezes em que um *software* de matemática é usado com os alunos não se trata de uma situação que provoque mudanças com relação ao saber” (BITTAR, 2001, p. 159). Isso faz do uso de recursos tecnológicos uma mera desculpa para inserir o computador ou uso de aplicativos para celular ao invés de integrá-los ao processo de ensino e por consequência, de aprendizagem dos educandos.

Ainda segundo estudos de Bittar (2011), esse inserir se explica pelo simples fato da presença do computador como objeto dentro de sala de aula ou ambiente virtual como os laboratórios de informática, enquanto inserir implica na ação do uso efetivo de tal objeto como auxílio para uma melhor abordagem dos conceitos a serem estudados, promovendo aprendizagem e alcançando com mais êxito os objetivos previamente traçados para a aula em questão. As influências que a tecnologia digital tem sobre os processos educacionais provocam outras mediações entre a abordagem do professor, a compreensão do estudante e o conteúdo problematizado (KENSKY apud SILVEIRA; LAURINO; NOVELLO, 2017).

Muitos são os fatores que têm se tornado verdadeiros empecilhos no uso de tecnologia no ambiente escolar, eles vão desde a falta de equipamentos, espaços, formação e conhecimento tecnológico do professor, disposição do docente, colaboração dos alunos e incentivo da equipe gestora e de políticas públicas que envolvem todas estas atividades realizadas (FERREIRA, 2016). Além disso, mesmo que muitas dessas barreiras sejam ultrapassadas na educação superior, mais uma vez nos deparamos com o fato de que os recursos tecnológicos disponíveis não passam de artefatos que contribuem muito pouco para a compreensão dos graduandos quanto ao conteúdo estudado.

> A maneira como professores e estudantes operam as tecnologias digitais no ambiente educativo podem modificar o comportamento desses sujeitos e alterar a lógica da sala de aula. A organização do espaço e do tempo, o número de estudantes que fazem parte de cada turma e os objetivos do ensino precisam ser reconsiderados para que a tecnologia digital possa auxiliar nos processos interativos e de compreensão conceitual. (SILVEIRA; LAURINO; NOVELLO, 2017, p. 68)

Para entendermos melhor como os recursos tecnológicos podem se tornar verdadeiros instrumentos de ensino e de aprendizagem, recorremos a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995), a qual é centrada no processo de instrumentalização e de instrumentação que envolvem a transformação do artefato em instrumento, cujo objetivo é distinguir ambos os termos para criar uma melhor relação entre o sujeito e o artefato, proporcionando-lhe uma melhor experiência e consequentemente uma melhor abordagem e entendimento dos conceitos matemáticos.

## 4.1 ABORDAGEM INSTRUMENTAL DE RABARDEL (1995) E OS SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

A abordagem Instrumental apresentada por Rabardel (1995) pode ser resumida na distinção entre o que é artefato e o que é instrumento, bem como a ação do sujeito que utiliza determinado objeto (artefato) para a realização de dada tarefa, tornando-o um instrumento que lhe será de ferramenta para determinado objetivo.

Bittar (2011, p. 160) diz que "a teoria da instrumentação permite investigar a ação com instrumentos no campo social e no campo científico; ou seja, não se aplica somente à educação", o foco dessa teoria é estudar o processo que está ligado à ação de um sujeito para com determinado objeto, ao qual é usado como meio pelo qual esse sujeito pretende executar uma tarefa, seja ela no intuito de uma melhor aprendizagem ou a simples execução de atividades cotidianas. Uma forma de exemplificar esse processo pode ser visto em um instrumento musical, cuja funcionalidade é inegável, porém o mesmo é apenas um artefato enquanto o sujeito que o possui não aprender a manuseá-lo e mais do que isso, compreender as teorias musicais e como colocá-las em prática ao usar aquele objeto, dessa forma tal artefato passa a ser um instrumento para tocar melodias e músicas dos diversos tipos possíveis.

> Um artefato é disponibilizado para o sujeito resolver uma dada tarefa, ele se apropria do artefato transformando-o em instrumento. A apropriação e a transformação do artefato em instrumento, nos diversos contextos de utilização para uma mesma classe de situações, é o cerne da Gênese Instrumental que está centrada em dois processos,

> o de Instrumentação (constitui a evolução dos esquemas de utilização dos artefatos, ou seja, sobre a ação e a atividade) e o processo de Instrumentalização (é a transformação dos artefatos durante a sua apropriação). (PEREIRA, SILVA, SANTANA. 2016, p. 6)

Para compreender melhor essa abordagem é preciso distinguir bem a diferença entre os processos que compõem o que Rabardel (1995) chama de gênese instrumental, a instrumentação e a instrumentalização. Tomando o conceito de esquema, dado por Vergnaud (1990; 2009), onde o mesmo explica que são os comportamentos e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante (representação simbólica) que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo (VERGNAUD, 1990 apud MOREIRA, 2002, p. 11), podemos afirmar, segundo Notare e Basso (2017, p. 2), que a instrumentalização envolve um “progressivo reconhecimento das potencialidades e das limitações do artefato por parte do sujeito (sujeito → objeto). Já a instrumentação se dá pelo “desenvolvimento de esquemas de utilização (objeto → sujeito)”.

> A instrumentalização concerne à emergência e a evolução do componente artefato do instrumento: seleção, reagrupamento, produção e instituição de funções, transformações do artefato [...] que prolongam a concepção inicial dos artefatos. A instrumentação é relativa à emergência e a evolução dos esquemas de utilização: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução assim como a assimilação de artefatos novos aos esquemas já constituídos (RABARDEL, 1999, p. 210).

No âmbito educacional podemos citar o exemplo de um livro didático, em que, em sua essência, foi criado para ser um instrumento para o ensino e para a aprendizagem, porém caso o sujeito não desenvolvam as potencialidades deste artefato, o mesmo não será útil para o fim ao qual foi proposto ao ponto deste sujeito estar apenas no processo de instrumentalização, destoando assim do real objetivo da utilização do livro. Isso ocorre com os livros didáticos, segundo Dante (1996), porque:

> Muitos professores, na falta de outros materiais instrucionais, tornam-se, voluntariamente ou não, escravos do livro didático. Suas preocupações constituem-se "dar" toda a matéria contida no livro em lugar de trabalhar as idéias [sic] essenciais daquela série. O foco é o livro de ponta a ponta e não a aprendizagem do aluno. (DANTE, 1996, p. 88)

De acordo com os estudos de Bittar (2011, p. 160), “um artefato pode ser um meio material, como um martelo, uma enxada, ou um meio simbólico, como uma linguagem simbólica (linguagem algébrica, símbolos vetoriais etc.)”. Nesse sentido, os recursos tecnológicos se encaixam como artefatos dentro dessa abordagem até o momento em que o professor ou o estudante se apropria das potencialidades e limitações destes recursos, os quais ao serem conectados com o conteúdo proposto de forma a auxiliar na compreensão dos mesmos tornam-se instrumentos de ensino e de aprendizagem.

É importante salientar que quando um artefato é meramente utilizado por si mesmo e em si mesmo, ou seja, sem conexão com o conteúdo a ser trabalhado e sem promover aprendizagem, não se transformará em instrumento. Esse fato pode ser notado nas escolas e principalmente nas aulas de matemática, nas quais muitos professores se utilizam de mídias digitais, aplicativos de celular, entre outros recursos apenas como fuga do ensino tradicional, não agregando conhecimento e motivação para investigação do conteúdo a ser trabalhado em suas aulas.

Isso pode ser explicado devido "os cursos de formação de professores para o uso de tecnologia, possuem enfoque no desenvolvimento de esquemas de uso. Ou seja, a formação está centrada em 'ensinar ao professor como o *software* funciona" (STORMOWSKI et al; 2015, p. 7). Todavia, o professor não deve se apegar apenas ao que viu na graduação, mas deve buscar constantemente uma evolução em seus métodos de ensino, incluindo o uso de tecnologia, o qual deve procurar ir além de simplesmente aprender sobre o artefato, mas compreender e desenvolver esquemas para que os recursos tecnológicos se transformem em instrumentos para o processo de ensino e aprendizagem.

Os *softwares* de Geometria Dinâmica são poderosas ferramentas, quando bem utilizadas, para o ensino não apenas de geometria, mas de outros componentes curriculares que têm implicações e representações geométricas, tais como cálculo diferencial, álgebra escolar e álgebra linear. Isso acontece porque tais assuntos necessitam de uma visualização mais clara e intuitiva, como afirmam Alves e Soares (2003):

> Através dos recursos de animação de alguns softwares geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente exeqüíveis [sic] com o uso do computador (ALVES; SOARES, 2003, p. 178).

Informamos que no próximo capítulo nos dedicaremos a explicitação da metodologia.

# 5. PERCURSO METODOLÓGICO

Após dissertarmos sobre os conceitos ligados aos sistemas lineares 3x3, sua representação geométrica e a possível influência de *softwares* dinâmicos no ensino e na aprendizagem da álgebra linear, retomamos o objetivo deste trabalho que se propõe a analisar as estratégias na resolução de atividades, dos estudantes de um curso de formação de professores de matemática, sobre os tipos de soluções de sistemas lineares 3x3 associadas as suas representações geométricas.

Para isso, tomou-se a natureza qualitativa na pesquisa para cumprir tais objetivos, natureza esta que, segundo Neves (1996, p. 1) "compreende um conjunto de diferentes técnicas interpretativas que visam a descrever e a decodificar os componentes de um sistema complexo de significados". Tal escolha foi feita devido à busca por dados que não se se resumem a dados estatísticos, mas a aspectos relacionados à compreensão dos estudantes, no que diz respeito a forma com que cada participante resolve sistemas lineares com três variáveis bem como os tipos de solução para os mesmos e não apenas analisar se as respostas estão corretas ou não. Isso, pois esta pesquisa tem como maior preocupação "o processo e não simplesmente com os resultados ou produto" (GODOY 1995, p. 63).

O tipo da pesquisa se ateve ao estudo de caso, onde o contexto analisado tem grande influência nos possíveis resultados da pesquisa e que a forma como se dá a compreensão e entendimento dos participantes em relação ao tema estudado é o alvo dos questionamentos propostos neste trabalho. Sobre tal tipo de pesquisa GODOY (1995, p. 25) destaca que o mesmo "visa ao exame detalhado de um ambiente, de um simples sujeito ou de uma situação em particular", ou seja, no contexto escolhido, a observação será feita baseando-se na maneira com que cada sistema linear 3x3 é resolvido e que meios foram utilizados para saber o tipo de solução representado.

A pesquisa se desenvolveu com estudantes de um curso de formação de professores de matemática de uma universidade, os quais estavam cursando a disciplina de Álgebra Linear, feita através de duas etapas, buscando analisar as resoluções dos sistemas lineares 3x3 e seus tipos de solução.

Adotamos como instrumento de coleta de dados o questionário, que "consiste basicamente em traduzir os objetivos específicos da pesquisa em itens bem redigidos" (GIL, 2002, p. 116), feito em duas etapas. Na primeira etapa, um questionário foi aplicado em uma das aulas de álgebra linear de duas turmas pertencentes a um curso de formação de professores de matemática, em um momento no qual o professor já tenha abordado em aulas anteriores o assunto de sistemas de equações lineares. Esse questionário possuiu cinco questões com sistemas lineares 3x3 distribuídas da seguinte maneira:

a) Uma questão com um sistema com solução possível e determinada.
b) Uma questão com um sistema de solução possível, porém indeterminada.
c) Três questões com sistemas de solução impossível.

A escolha dessas questões se deu de tal forma, justamente para que sejam analisadas as resoluções de cada graduando e se o mesmo compreende o tipo de solução encontrado, não levando em consideração se o participante desta primeira etapa respondeu corretamente cada questão, mas como essa resolução foi desenvolvida observando as justificativas e elementos matemáticos utilizados.

O questionário da primeira etapa ficou organizado como destacamos no quadro I:

QUADRO I: Sistemas propostos na atividade e seus objetivos

| Apresente o conjunto solução dos sistemas lineares a seguir: | Tipo de solução | Objetivo da questão |
|---|---|---|
| a) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 2x+2y+2z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ | Impossível | Na primeira etapa o objetivo deste sistema é de identificar a impossibilidade de solução independente da técnica, todavia a escolha para este sistema especificamente se justifica pela segunda etapa da pesquisa, na qual espera-se uma observação de um sistema linear de três planos paralelos, os quais não possuem uma intersecção e portanto, sem solução real. |
| b) $\begin{cases} x-2y-2z=-1 \\ x-y+z=-2 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$ | Possível e determinada | Este sistema foi escolhido por mostrar uma solução real (x,y,z), o qual, na segunda etapa da pesquisa, se mostrará como um ponto de interseção entres os três planos no espaço. |
| c) $\begin{cases} 4x+4y+3z=1 \\ -4x-4y-3z=7 \\ y+z=2 \end{cases}$ | Impossível | Da mesma forma que a questão a) esse sistema não possui solução, todavia, o que o diferencia é o fato de |

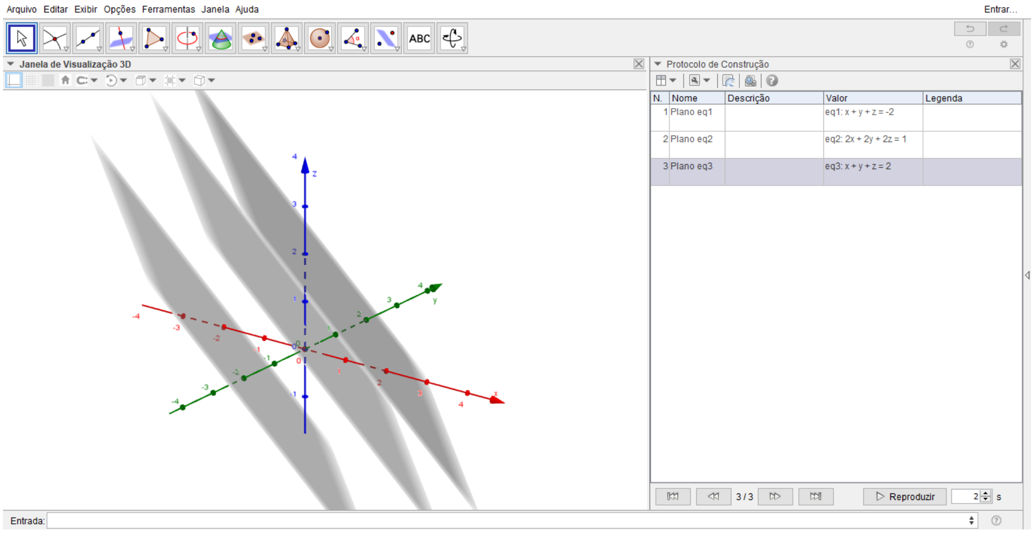
| | | |
|---|---|---|
| | | dois dos planos serem paralelos e o outro interceptando ambos, assim não possuindo uma intersecção entre os três planos, mutuamente. |
| d) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = \frac{1}{2} \end{cases}$ | Possível e indeterminada | Este sistema foi selecionado com o objetivo de, na primeira etapa trazer um sistema linear que possua infinita soluções constituindo a equação de uma reta cuja representação será analisada na segunda etapa. |
| e) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 6y + 3z = -1 \\ 3x - 8y + 4z = 2 \end{cases}$ | Impossível | De forma análoga a questão c), o sistema não possui solução real, contudo o que o diferencia dos anteriores é de existir interseção entre os planos apenas dois a dois. |

FONTE: O pesquisador (2019)

Foram escolhidos três diferentes casos de sistema com solução impossível, pois cada um deles tem uma representação geométrica diferente, a qual demonstra a impossibilidade de intersecção entre os três planos, assim, o participante poderia contemplar três formas de sistemas 3x3 com solução impossível.

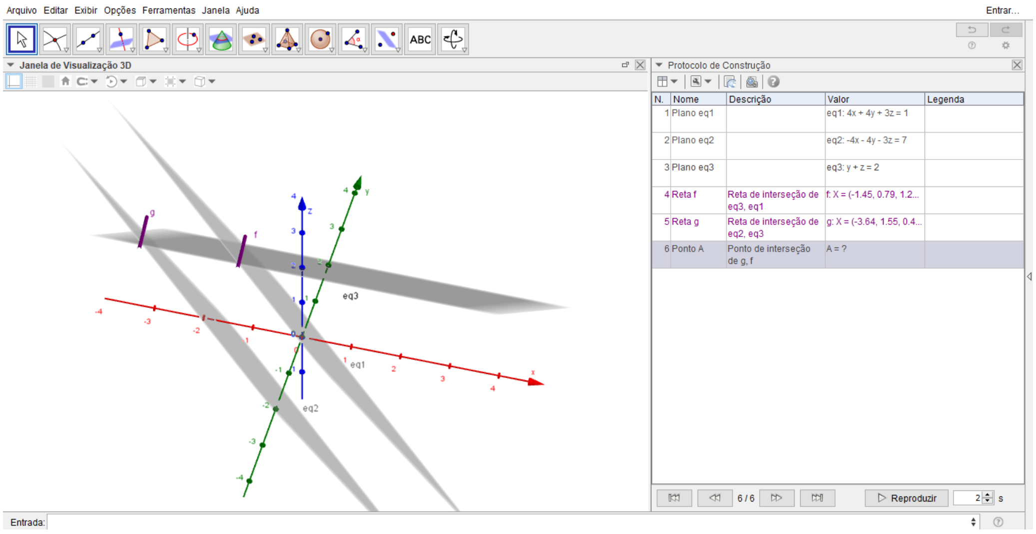
No sistema da letra A presente no quadro anterior, os planos são paralelos entre si, assim não haverá intersecção mútua pela definição de paralelismo. Já no sistema da letra C, só existe intersecção entre dois planos, enquanto o terceiro plano é paralelo a um dos planos anteriores. Vejamos nas figuras 1 e 2 a representação geométrica dos sistemas A e C.

Figura 1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO SISTEMA A




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

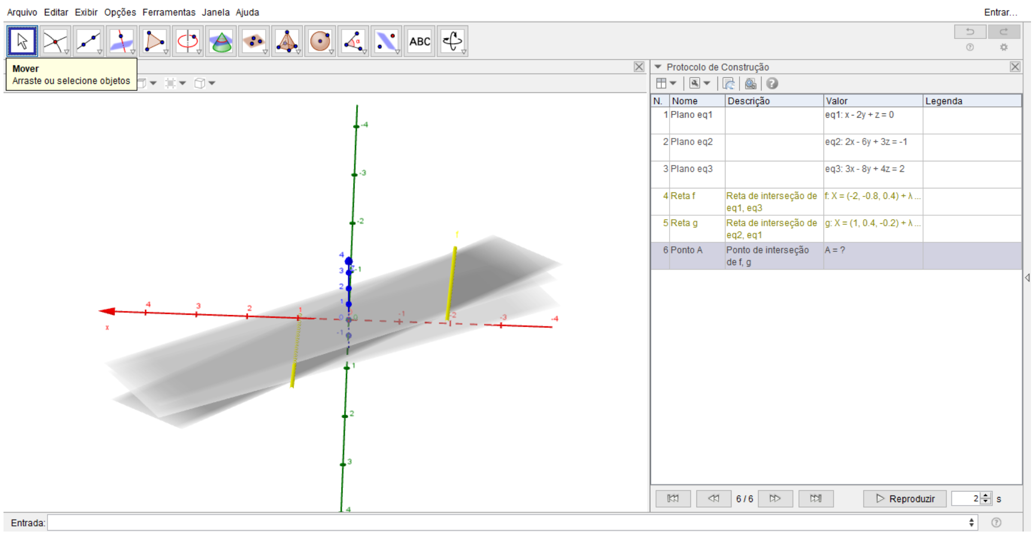
Figura 2 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO SISTEMA C




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No sistema da letra E os três planos possuem intersecção apenas tomados dois a dois, ou seja, não se interceptam entre si, não havendo intersecção entre os mesmos e consequentemente não possuindo uma solução real, como podemos observar na figura 3.

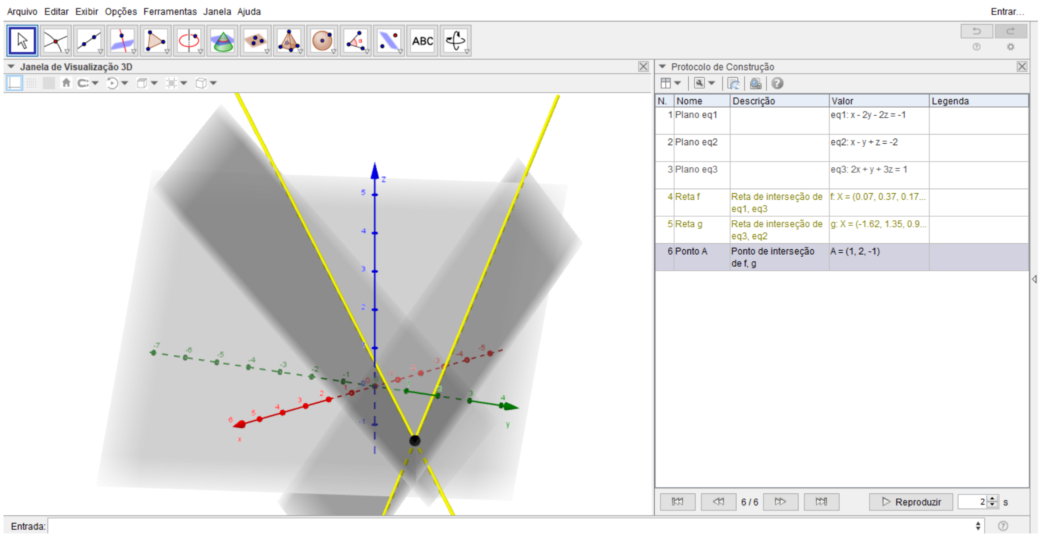
Figura 3 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO SISTEMA E




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

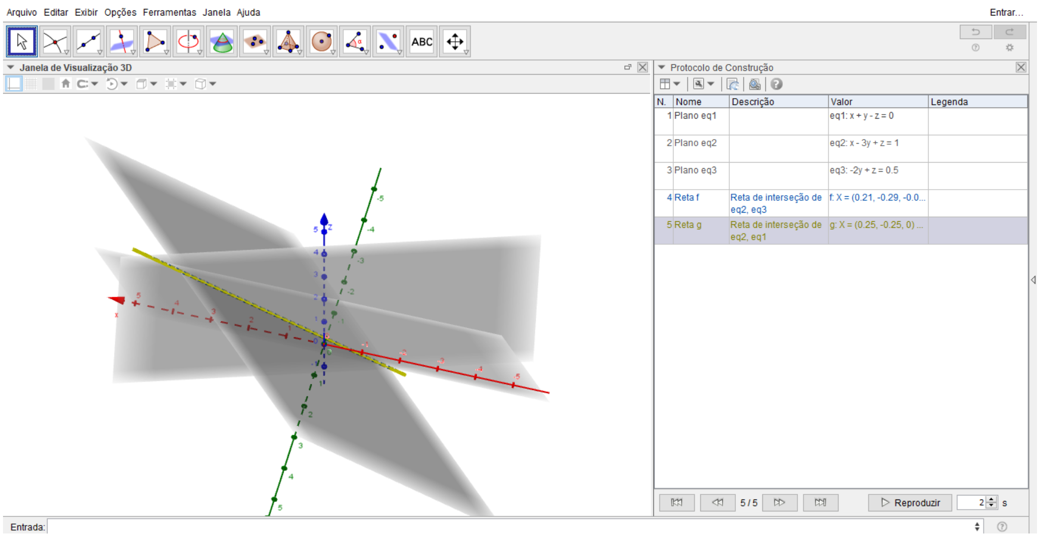
Quanto aos sistemas que possuem solução possível, no nosso caso o sistema B, a sua solução é determinável e sua representação é um ponto (ver figura 4) que se encontra na interseção mútua dos três planos cuja construção pode ser dada através de retas concorrentes que passam pela interseção dos planos do sistema tomados dois a dois. Já o sistema D possui uma solução, mas é indeterminada, isto é, a interseção dos três planos é uma reta, onde podemos observar que a mesma demonstra infinitos pontos (x,y,z) os quais servem de solução para o sistema (ver figura 5).

Figura 4 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO SISTEMA B




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Figura 5 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO SISTEMA D




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Após a coleta dos dados, foram descartados os questionários de graduandos de engenharia civil e de produção que faziam parte da turma em que foi aplicada a primeira etapa da pesquisa, pois o foco deste trabalho é investigar estudantes de licenciatura em matemática. Em seguida, foram selecionados quatro dos que se dispuseram a responder o questionário para participarem da segunda etapa, a saber, dois participantes que identificaram o tipo de solução de corretamente de todos sistemas 3x3 propostos no questionário. E dois participantes que embora tenha feito cálculos algébricos e desenvolvido uma resolução, não identificaram qual o tipo de solução era de cada sistema linear ou, se identificaram, não o fizeram de maneira correta em todos os sistemas.

Para a segunda etapa da pesquisa, os 4 participantes selecionados, denominados nesta pesquisa de “Participante I, Participante II, Participante III e Participante IV”, participaram de um segundo questionário com os mesmos sistemas contidos na primeira etapa, porém para responder eles tiveram o auxílio do *software* GeoGebra como ferramenta de resolução, o qual poderia ser optado pelo participante o uso deste *software* no computador ou celular. Em seguida foi dada uma breve explicação de que a intersecção entre os três planos do sistema constituía o conjunto solução do sistema linear 3x3.

Nesta etapa o questionário terá a mesma composição de questões da etapa anterior, porém a aplicação foi feita de forma individual, ou seja, em horários e locais diferentes para cada participante e para responder às questões os alunos deveriam justificar o tipo de solução que eles encontraram para cada sistema linear e durante a aplicação do questionário foi observado como cada um desenvolve sua resposta e quais elementos utilizaram da plataforma do GeoGebra, bem como quais conceitos algébricos e geométricos farão parte da justificativa, salvando o arquivo do *software* e indicando ao aplicador o tipo de solução e sua justificativa.

Algumas perguntas foram feitas por parte do aplicador durante a resolução dos sistemas feitos pelos participantes na segunda etapa da pesquisa, onde os participantes tiveram liberdade para comentar e expressar seus conhecimentos com a representação geométrica dos sistemas, com o *software* GeoGebra e com a relação entre *software* e representação geométrica, a saber:

1) Você conhece os tipos de solução de um sistema linear 3x3?
2) Conhece a relação de cada sistema linear 3x3 e seu tipo de solução com sua representação geométrica?
3) Você sabia que a solução dos sistemas 3x3 poderia ser dada de forma geométrica?
4) Você conhece o *software* GeoGebra?
5) Já o utilizou para estudos ou em sala de aula? De que maneira?

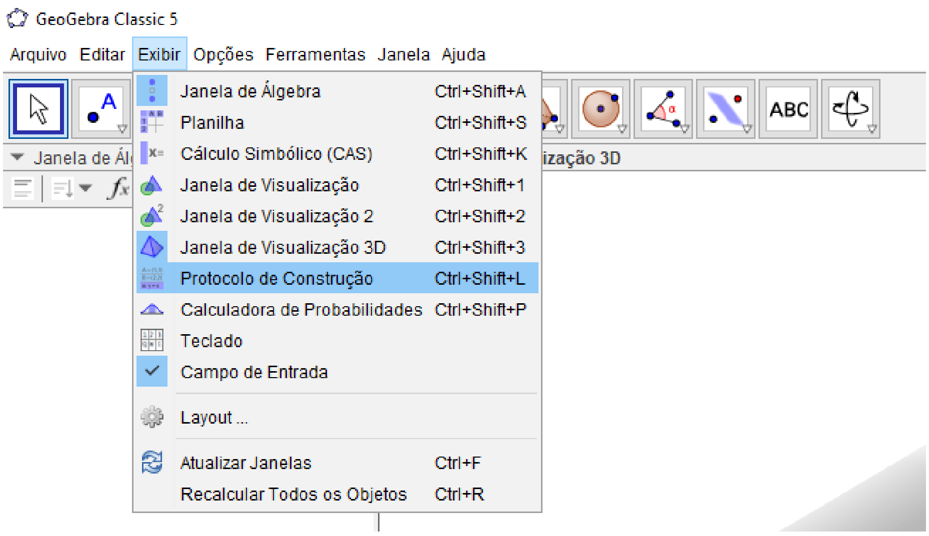
Por fim, a partir dos novos dados coletados foi feito um comparativo entre as duas etapas, mais precisamente sobre os questionários dos quatro alunos participantes da segunda etapa, observando como foi o desenvolvimento de cada resolução e se o *software* GeoGebra os auxiliou tanto na solução quanto na justificativa das questões propostas, observando suas potencialidades e possíveis limitações.

## 6. ANÁLISE E RESULTADOS

Iniciamos a análise destacando que a organizamos considerando cada participante, ou seja, dedicamos um subtópico da análise para cada participante. Importante destacar os procedimentos da análise que primeiro sobressaímos o que cada participante fez na etapa dedicada a escolha dos mesmos quando foi aplicada a atividade com os alunos das disciplinas de álgebra linear. Depois trazemos a análise dos dados referente aos questionamentos que descrevemos anteriormente. E por fim propomos que os estudantes buscassem as respostas aos sistemas utilizando o programa empregado na pesquisa.

Sobre a forma de coleta de dados do *software* indicamos que utilizamos para a análise a ferramenta do GeoGebra chamada de "protocolo de construção", situada no menu exibir do *software*, a qual serve para mostrar o passo a passo utilizado pelo participante durante a construção dos planos pertencentes a cada sistemas propostos no questionário.

Figura 6 – PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Além disso, foram feitos alguns comentários durante a aplicação da segunda etapa, os quais foram necessários à medida que o participante necessitava de auxílio em determinada construção ou constatação relacionada a solução dos sistemas.

### 6.1 PARTICIPANTE I

O Participante I, durante a primeira etapa, identificou corretamente todos os sistemas lineares 3x3 e como já mencionado no capítulo anterior, não foram analisados os métodos algébricos de resolução, apenas a identificação do tipo de solução dos sistemas propostos. Antes da aplicação do questionário algumas considerações foram ditas pelo participante mediante as perguntas feitas pelo aplicador já citadas no capítulo anterior acerca do seu possível manuseio do GeoGebra como artefato e como possível instrumento de aprendizagem.

O estudante afirmou utilizar com frequência o *software* tanto na versão para computadores quanto para dispositivos móveis e de fato foi perceptível, numa primeira análise, sua facilidade em utilizar as ferramentas que lhe foram necessárias para a resolução do questionário.

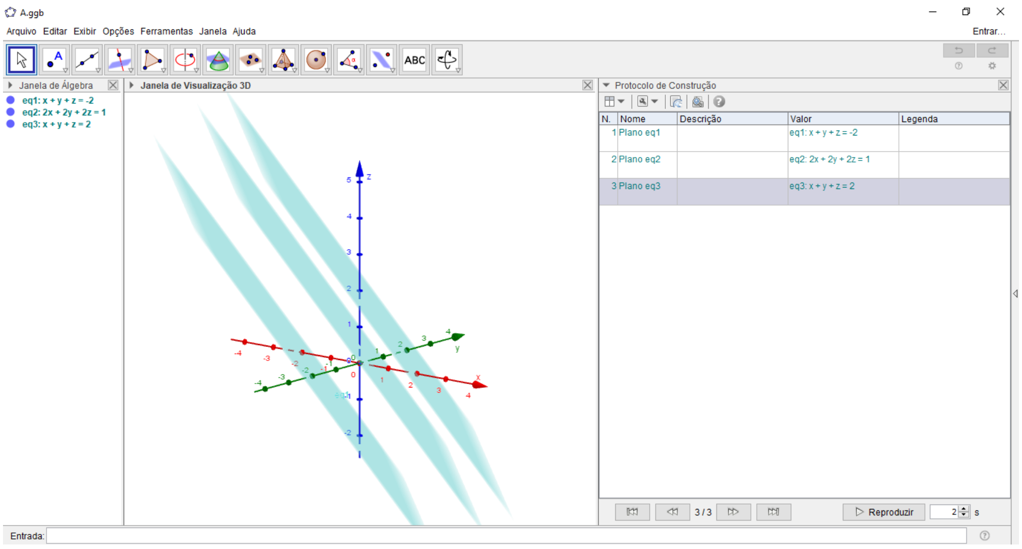
QUADRO II: Respostas do participante I as questões realizadas antes do GeoGebra

| Questões | Dados observado nas respostas |
|---|---|
| 1. Você conhece os tipos de solução de um sistema linear 3x3? | Afirma conhecer os tipos de solução |
| 2. Conhece a relação de cada sistema linear 3x3 e seu tipo de solução com sua representação geométrica? | Afirma reconhecer as representações geométricas graças a disciplina de geometria espacial. |
| 3. Você sabia que a solução dos sistemas 3x3 poderia ser dada de forma geométrica? | Afirma ter estudado tal aspecto nas aulas de álgebra, porém o foco eram os métodos algébricos. |
| 4. Você conhece o *software* GeoGebra? | Afirma não apenas conhecer como também ser costumeiro o uso deste *software* frente a outros temas de cunho geométrico. |
| 5. Já o utilizou para estudos ou em sala de aula? De que maneira? | Afirma ter usado em casa para rever assuntos de outros temas da geometria, a título de curiosidade. Em sala de aula, já utilizou em atividades de geometria plana para visualizar a aplicação de alguns teoremas, não se recordando se foi usado o *software* na disciplina de Álgebra Linear |

FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Partindo para o momento de trabalho com o GeoGebra, no primeiro sistema proposto, o Participante I apenas digitou as equações dos planos e notou que os mesmos eram paralelos, não possuindo assim nenhuma interseção. Tais informações podem ser observadas no protocolo de construção informado pelo *software*, mostrado na figura a seguir.

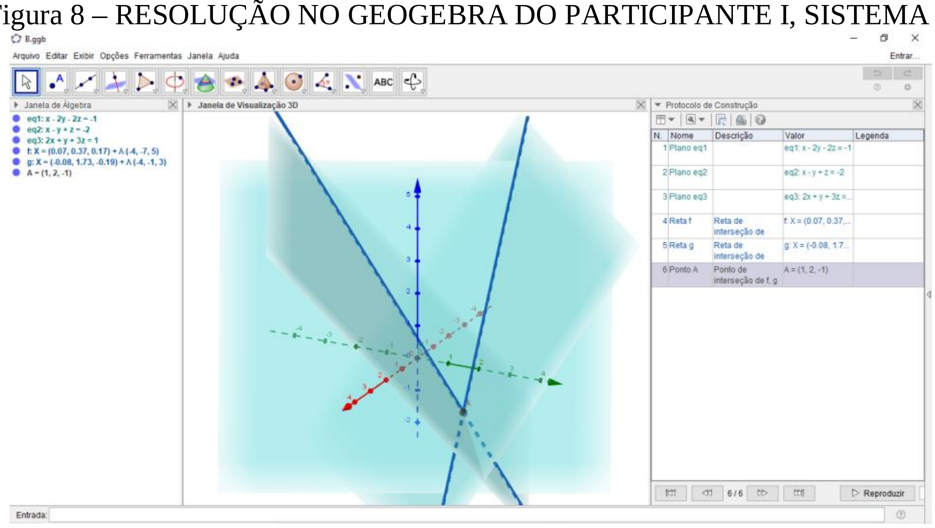
Figura 7 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE I, SISTEMA A




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No segundo sistema do questionário, em que a solução era possível e determinada, para demonstrar a intersecção entre os três planos pode se observar que o participante construiu a interseção dos mesmos dois a dois, tendo assim duas retas que eram concorrentes, em seguida indicou a intersecção entre as duas retas, mostrando assim o ponto de interseção dos três planos o qual constitui a solução (x,y,z) do sistema linear.

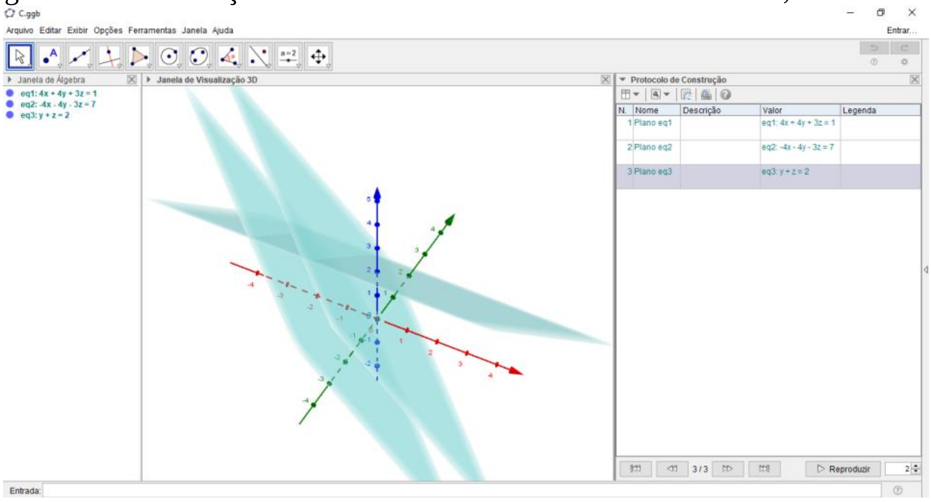
Figura 8 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE I, SISTEMA B




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

De forma análoga ao primeiro sistema proposto no questionário, o participante analisado apenas construiu os três planos, utilizando a caixa de diálogo do *software* denominada de entrada, notando que dois dos planos eram paralelos e o terceiro interceptava-os, concluindo que não haveria interseção mútua entre os planos do sistema. Pode se observar que o participante não utilizou ferramentas de intersecção para comprovar a não existência de solução no sistema linear analisado, conforme mostra a figura a seguir.

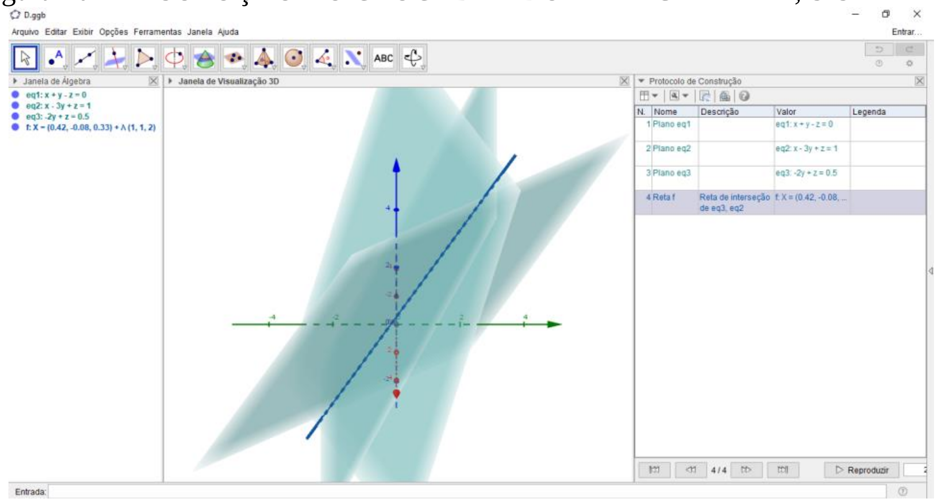
Figura 9 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE I, SISTEMA C




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No quarto sistema do questionário o participante, após construir os três planos, usou a ferramenta de interseção entre superfícies para exibir a reta que passa pela interseção entre o segundo e o terceiro plano, notando através da visualização que essa reta também passa na interseção entre esses planos e o primeiro plano do sistema. Concluindo que a solução é do tipo possível e indeterminada, justificando que existem infinitos pontos nessa reta que servem de solução para o sistema 3x3 analisado.

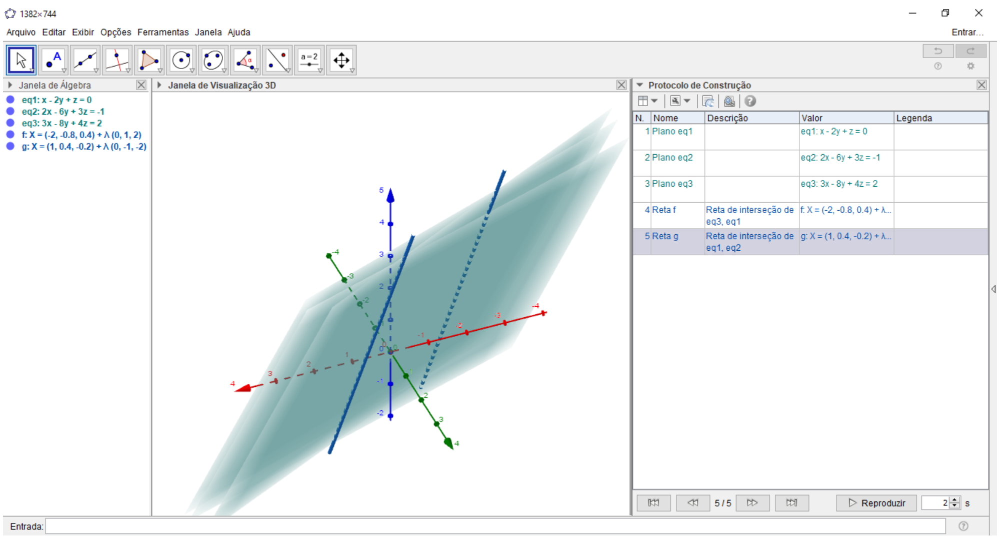
Figura 10 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE I, SISTEMA D




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No último sistema, observou-se que o participante construiu os três planos e em seguida construiu, através da ferramenta de interseção entre superfícies, as retas f e g que são, respectivamente, a interseção entre os planos do sistema linear tomados dois a dois. O estudante notou que essas retas eram paralelas, logo os planos do sistema não teriam uma interseção mútua, apenas tomados dois a dois. Contudo não utilizou a ferramenta de interseção entre objetos para comprovar o paralelismo entre as retas intercessoras f e g.

Figura 11 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE I, SISTEMA E



FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Nos sistemas de solução impossível houve surpresa por parte do Participante I relacionada ao fato de existirem representações diferentes para cada um dos sistemas, pois segundo o estudante, quando o conjunto solução era impossível os planos representados teriam grande semelhança, porém ao ver no *software* GeoGebra a visualização de tais sistemas percebeu a diferença geométrica entre cada um.

De forma geral, as estratégias vistas por este participante para a resolução dos sistemas se basearam na escrita das equações para a construção dos planos, visto que também existe uma ferramenta para construção manual, mas que não é tão prática e precisa quanto o uso do campo de entrada do GeoGebra. Pode-se observar que o Participante I se ateve a visualização para deduzir o tipo de solução, não apontando em alguns dos casos propostos o local extado da possível interseção ou a ausência da mesma.

## 6.2 PARTICIPANTE II

O Participante II, assim como o participante anterior, identificou corretamente todos os sistemas lineares 3x3 propostos na primeira etapa. As considerações feitas pelo estudante foram de que seu contato com o *software* GeoGebra se deu principalmente na disciplina de Geometria Analítica cursada pelo mesmo, onde seu domínio baseava-se apenas na versão mobile do *software* que, segundo o participante, era mais fácil de manusear devido ao GeoGebra separar os aplicativos de acordo com sua funcionalidade, ou seja, o GeoGebra clássico é subdividido em categorias e uma delas é a de geometria, tendo também a versão de visualização 3D, para estudos espaciais. Por isso, para melhor análise, os arquivos foram exportados para um computador onde só assim pode-se observar o protocolo de construção o qual não é disponível na versão mobile do GeoGebra.

QUADRO III: Respostas do participante II as questões realizadas antes do GeoGebra

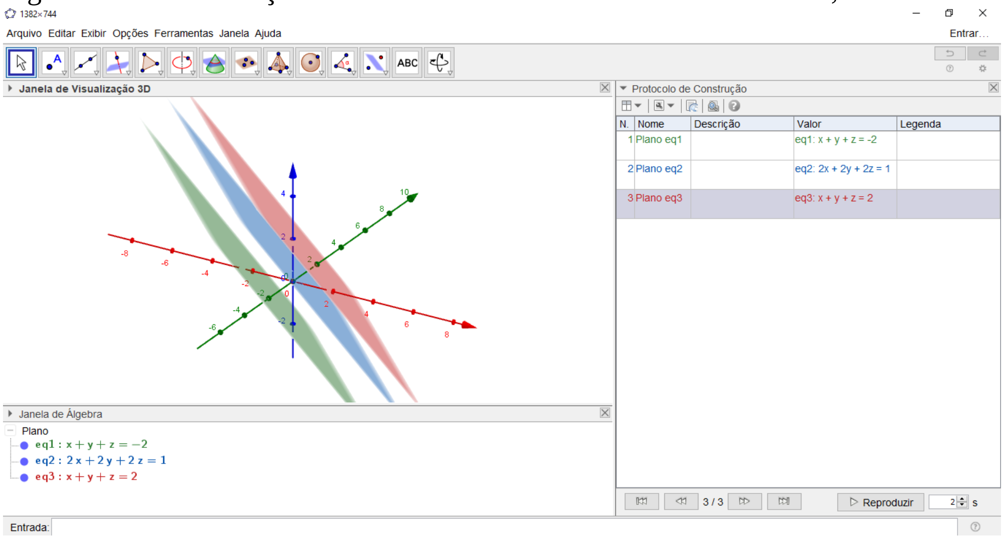
| Questões | Dados observado nas respostas |
|---|---|
| 1. Você conhece os tipos de solução de um sistema linear 3x3? | Afirma conhecer os tipos de solução |
| 2. Conhece a relação de cada sistema linear 3x3 e seu tipo de solução com sua representação geométrica? | Afirma reconhecer as representações geométricas, porém não lhe é costumeiro trabalhar com as mesmas, visto que sua preferência e convencimento sobre o tipo de solução é mais o método algébrico. |
| 3. Você sabia que a solução dos sistemas 3x3 poderia ser dada de forma geométrica? | Afirma ter estudado tal aspecto nas aulas de álgebra, porém da mesma forma que o Participante I, o foco eram os métodos algébricos. |
| 4. Você conhece o *software* GeoGebra? | Afirma conhecer o *software*, todavia assegura ter dificuldades com o manuseio de ferramentas no computador, sendo sua prática, que mesmo sendo esporádica, é atrelada a versão mobile do programa. |
| 5. Já o utilizou para estudos ou em sala de aula? De que maneira? | Afirma ter usado em sala de aula na resolução de exercícios propostos pelo professor de Álgebra Linear a título de verificação de seus cálculos e manipulações algébricos, no objetivo de confirmar ou não se sua resposta era correta. |

FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Uma dificuldade apresentada pelo participante foi de compreender a representação geométrica da solução, visto que necessitou de ajuda para mostrar a interseção dos planos contidos no sistema, a qual seria a possível solução do mesmo. O participante sabia qual ferramenta do *software* necessária para o procedimento, porém desconhecia que a interseção entre dois planos seria uma reta e que caso as retas intercessoras fossem concorrentes, o ponto de encontro das mesmas seria a solução do sistema. No caso dos sistemas de solução impossível, não houve dificuldade, pois mesmo sem construir a interseção dos planos a visualização permitia ver a impossibilidade de encontro dos planos contidos no sistema 3x3.

No primeiro sistema linear, o Participante II, fez a construção da mesma maneira que o Participante I, construindo os planos através do comando de entrada do GeoGebra e notando o paralelismo entre eles apenas pela visualização, sem utilizar de qualquer ferramenta para comprovar a ausência de interseção entre os mesmos.

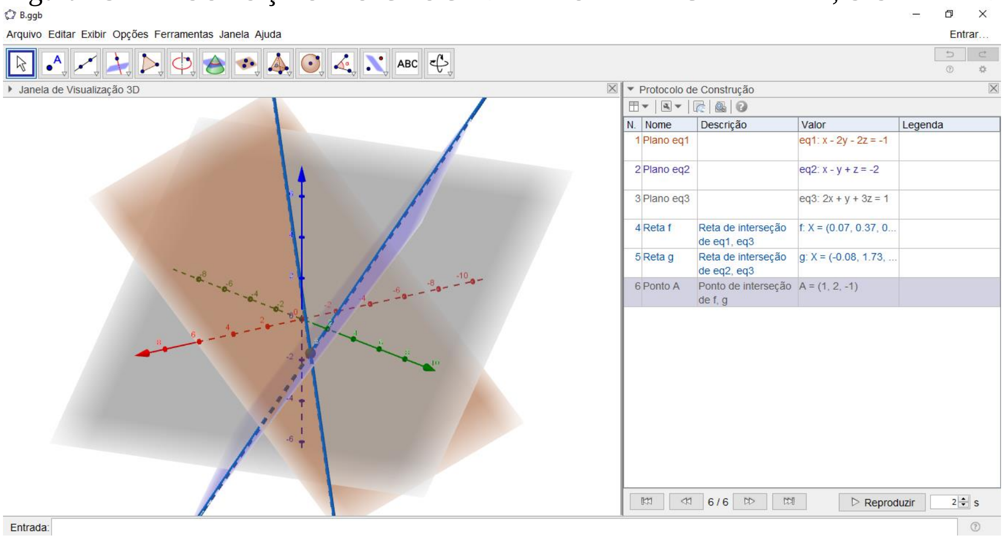
Figura 12 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE II, SISTEMA A




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No segundo sistema, de forma análoga ao Participante I, pode se observar que foi utilizada a ferramenta de interseção entre superfícies para mostrar as retas que passam pelas interseções entre os planos tomados dois a dois e utilizando a interseção entre objetos notar o ponto de encontro dessas retas, que consequentemente representa a interseção entre os três planos do sistema cuja solução é possível e determinada.

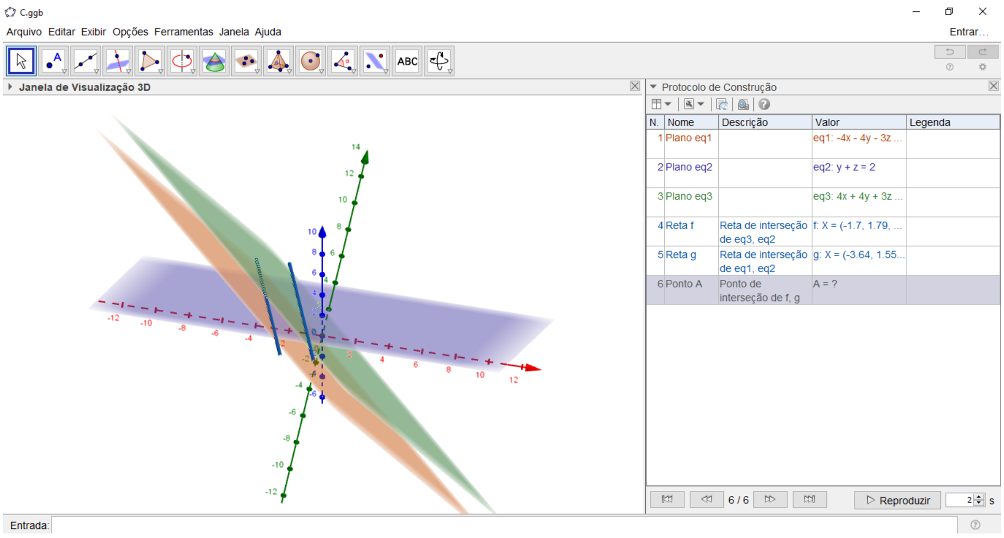
Figura 13 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE II, SISTEMA B




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No terceiro sistema, o participante novamente construiu os planos de forma semelhante ao que fez o Participante I, porém ao construir as retas intercessoras dos planos, utilizou a ferramenta de intersecção entre objetos, comprovando que tais retas eram paralelas, ou seja, os planos não possuíam uma interseção mútua pois dois dos planos eram paralelos e suas interseções com o terceiro plano também constituíam retas não-concorrentes, tornando o sistema 3x3 de solução impossível.

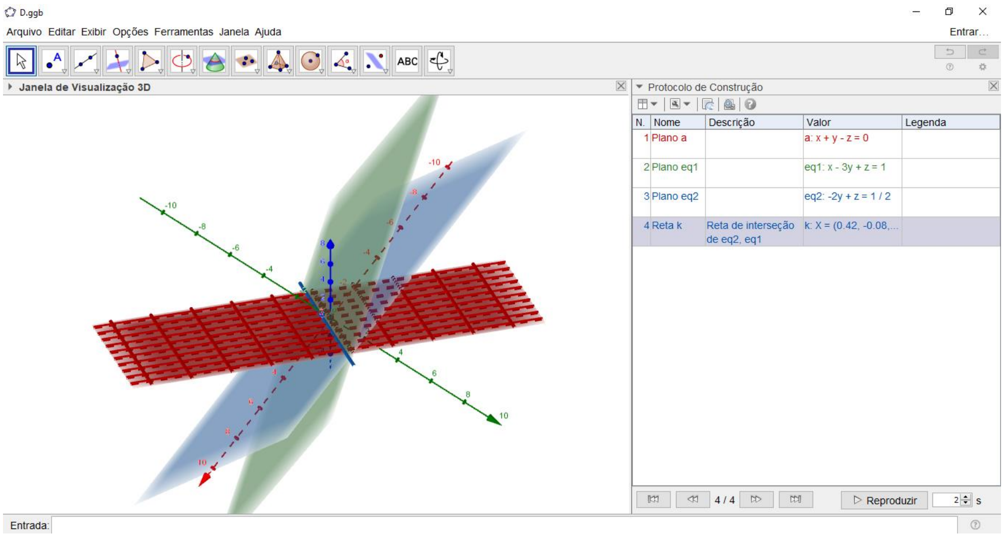
Figura 14 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE II, SISTEMA C




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Já no quarto sistema linear proposto, o participante após construir os planos utilizou a ferramenta de interseção entre planos para mostrar a reta k que passa na interseção entre os dois primeiros planos e através da visualização notou que essa reta também passa na interseção com o terceiro plano do sistema, notando que o sistema linear possui infinitas soluções pertencentes a essa reta.

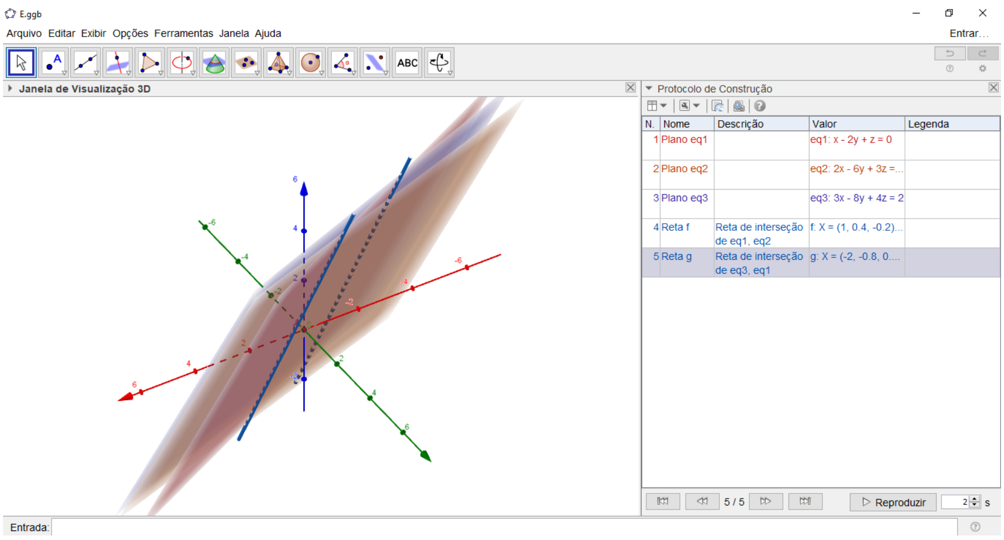
Figura 15 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE II, SISTEMA D




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No último sistema, o participante fez exatamente os mesmos passos do Participante I, não utilizando nenhuma ferramenta que comprovasse o paralelismo entre as retas intercessoras, as quais são o encontro entre os planos do sistema tomados dois a dois.

Figura 16 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE II, SISTEMA E




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Apesar de não apresentar grandes problemas com relação ao manuseio do *software* GeoGebra mobile, o participante alegou que tinha certa dificuldades em compreender as representações geométricas das soluções de sistemas 3x3 apenas por métodos, mas que a visualização no *software* agregava um sentido mais claro às operações por ele feitas na primeira etapa. Todavia, para a resolução de sistemas 3x3 afirmou ainda preferir a forma algébrica para resolver e solucionar tais questões.

De forma geral o Participante II mostrou, através do GeoGebra mobile, as interseções que demonstravam o tipo de solução dos sistemas e também quando havia as ausências soube como comprova-las através das ferramentas disponíveis no aplicativo, usando como estratégia a escrita das equações de cada plano e atendendo as expectativas do uso do GeoGebra como instrumento de resolução.

## 6.3 PARTICIPANTE III

Na primeira etapa, o participante identificou o tipo de solução dos sistemas lineares, porém um deles não estava correto, levando assim a sua escolha para a segunda etapa.

QUADRO IV: Respostas do participante III as questões realizadas antes do GeoGebra

| Questões | Dados observado nas respostas |
|---|---|
| 1. Você conhece os tipos de solução de um sistema linear 3x3? | Afirma conhecer os tipos de solução |
| 2. Conhece a relação de cada sistema linear 3x3 e seu tipo de solução com sua representação geométrica? | Afirma reconhecer as representações geométricas, mas sente dificuldades em justificar quando a solução é possível e indeterminada, não sendo de costume trabalhar com outra representação que não seja a algébrica. |
| 3. Você sabia que a solução dos sistemas 3x3 poderia ser dada de forma geométrica? | Afirma ter estudado tal aspecto nas aulas de álgebra, porém da mesma forma que o Participante I e II, o foco eram os métodos algébricos. Um detalhe ressaltado por este participante é o fato de que essas representações eram usadas pelo professor apenas como uma curiosidade, não como método de resolução que deve ser usado frequentemente. |

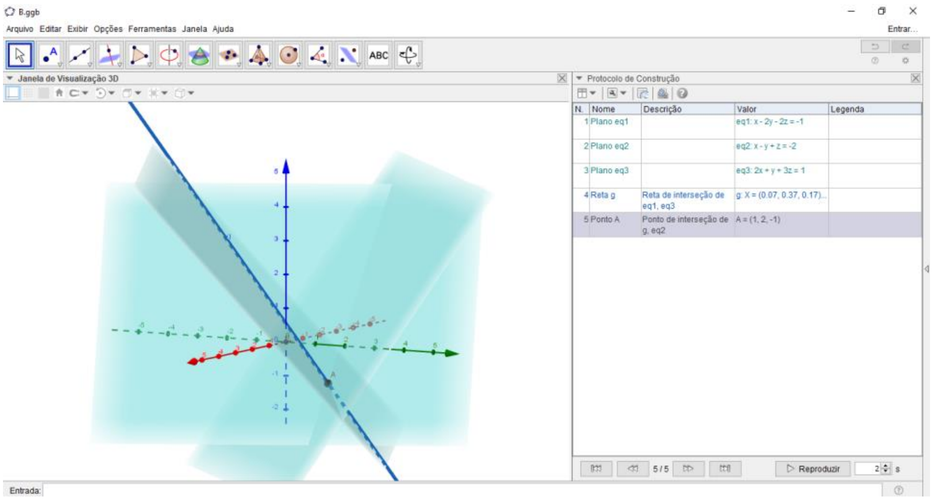
| | |
|---|---|
| 4. Você conhece o *software* GeoGebra? | Afirma conhecer o *software* e já ter visto ele em prática algumas vezes em disciplinas do curso, principalmente as ligadas a geometria. |
| 5. Já o utilizou para estudos ou em sala de aula? De que maneira? | Diferentemente dos participantes anteriores, o Participante III não possui contato regular com o GeoGebra, visto que o mesmo afirmou apenas visualizar o uso deste recurso por parte dos professores do curso de matemática, mas que não tinha a prática de usá-lo em nenhuma de suas versões. |

FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Diante da resposta a última indagação no quadro IV, grande parte dessa segunda etapa foi orientada pelo aplicador no que diz respeito a quais ferramentas usar e como elas servirão para a resolução de cada sistema linear, todavia, foi o participante quem realizou as operações e construções necessárias. Durante as construções foi apresentado ao participante a ferramenta de interseção entre superfícies e entre objetos, para que, quando fossem inseridos os planos ao digitar as equações no campo de entrada do GeoGebra fossem construídas as interseções entre os planos e consequentemente apresentar o tipo de solução de cada sistema 3x3.

Nos sistemas a) e d) o Participante III fez construções idênticas às do Participante I, desde a construção dos planos bem como a interseção construída utilizando a ferramenta adequada do *software*. Já no sistema b), para determinar a interseção mútua entre os três planos do sistema linear, o participante operou o comando de interseção entre dois dos planos formando uma reta e em seguida a interseção dessa reta com o terceiro plano restante, obtendo assim o ponto (x,y,z) que é solução para o sistema.

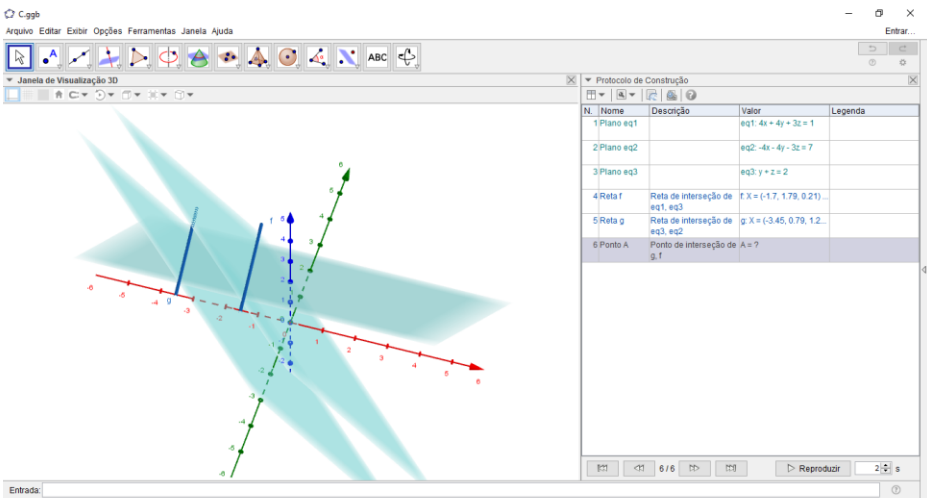
Figura 17 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE III, SISTEMA B




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

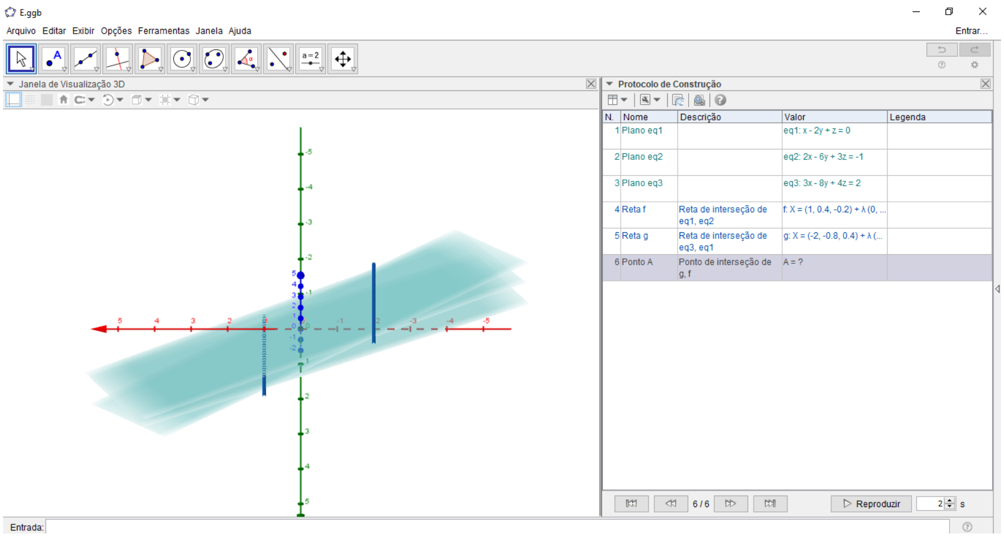
O que diferenciou este participante dos demais foi o fato de que, nos sistemas c) e e) que tem solução impossível, o mesmo realizou o comando de interseção entre as retas intercessoras dos planos tomados dois a dois, comprovando a ausência de interseção mútua entre os três planos analisados.

Figura 18– RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE III, SISTEMA C




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

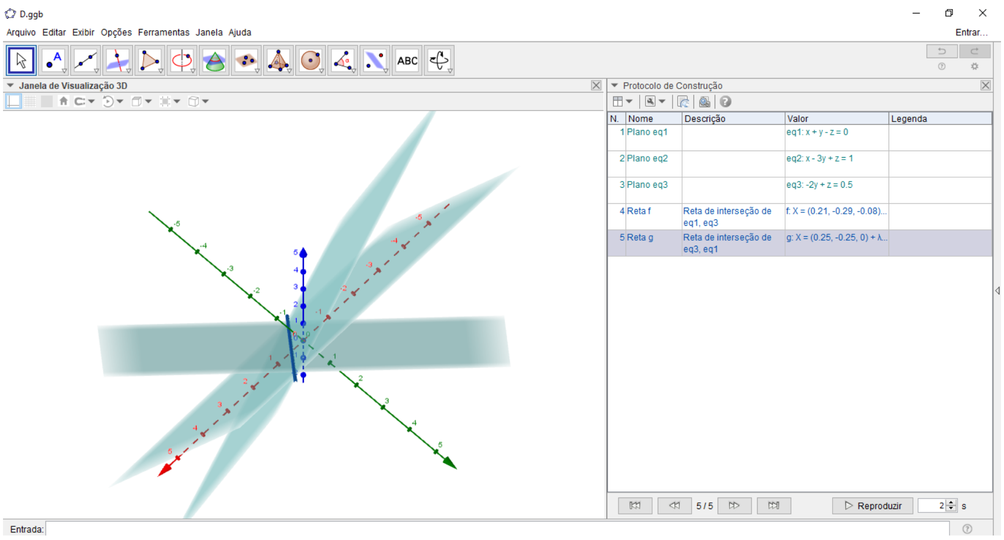
Figura 19 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE III, SISTEMA E



FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No quarto sistema o participante em questão construiu com sucesso os planos solicitados no sistema e ao demonstrar a interseção entre os mesmos, além da construção de duas retas as quais eram as interseções dos planos tomados dois a dois. Porém, para comprovar que a solução era possível, mas indeterminada, isto é, existem infinitos pontos pertencentes a esta reta formada da interseção dos planos dois a dois. Observou-se que as duas retas intercessoras eram coincidentes, comprovando assim que o sistema era de solução indeterminada.

Figura 20 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE III, SISTEMA D



FONTE: Dados da pesquisa (2019)

O participante mostrou-se empolgado e ao realizar as construções, mesmo que sob orientação, afirmou que o *software* mostra perfeitamente as representações geométricas permitindo a visualização e uma melhor compreensão dos sistemas lineares, principalmente com relação as três formas de sistema de solução impossível. De forma geral, as estratégias usadas pelo participante na segunda etapa foram orientadas e guiadas em sua maioria, todavia vale ressaltar que nos momentos em que era preciso mostrar a existência ou ausência de interseções entre os planos o estudante preocupou-se em perguntar se o GeoGebra possuía alguma forma de visualização ou representação da solução dos sistemas, principalmente quando os mesmos eram impossíveis, ou seja, se havia uma maneira de demonstrar que realmente não havia uma interseção entre os três planos analisados.

## 6.4 PARTICIPANTE IV

O Participante IV demonstrou bom domínio do *software* GeoGebra, mesmo não conhecendo a ferramenta de intersecção entre superfícies, o estudante conseguiu encontra-la após verificar que a ferramenta de intersecção entre objetos não funcionava ao selecionar os planos trabalhados em cada questão. Na primeira etapa, foram identificados pelo participante o tipo de solução apenas dos três primeiros sistemas lineares, dos quais o terceiro foi incorreto.

QUADRO V: Respostas do Participante IV as questões realizadas antes do GeoGebra

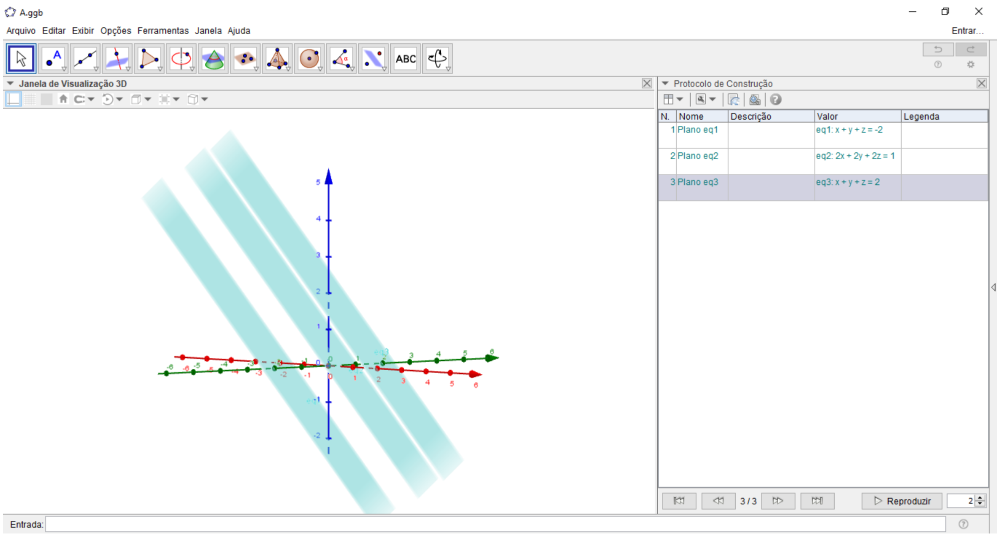
| Questões | Dados observado nas respostas |
|---|---|
| 1. Você conhece os tipos de solução de um sistema linear 3x3? | Afirma conhecer os tipos de solução |
| 2. Conhece a relação de cada sistema linear 3x3 e seu tipo de solução com sua representação geométrica? | Reconhece não ser muito familiarizado com todas as representações, especificamente, conhece a representação de quando a solução é possível e determinada. |
| 3. Você sabia que a solução dos sistemas 3x3 poderia ser dada de forma geométrica? | Afirma ter estudado tal aspecto nas aulas de álgebra, porém não recorda da visualização, demonstrando que não tem uma relação pessoal constante com o tema. |
| 4. Você conhece o *software* GeoGebra? | Afirma conhecer o *software* e de conhecer o uso do mesmo em outras disciplinas além da Álgebra Linear, especialmente temas da Geometria Analítica e Plana. |
| 5. Já o utilizou para estudos ou em sala de aula? De que maneira? | Afirma ter contato com as ferramentas do *software*, todavia, assim como o participante |

| | |
|---|---|
| | II, o uso do GeoGebra se restringiu mais a construções de figuras e representações geométricas que facilitassem e verificassem os cálculos algébricos e também na aplicação de teoremas ligados a geometria. |

FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No primeiro sistema, através da visualização e manuseio da janela de visualização 3D, o participante notou a ausência de interseção entre os planos construídos, porém, diferentemente dos outros participantes o estudante tentou construir a interseção dos planos para verificar se eles realmente possuíam uma solução do tipo impossível.

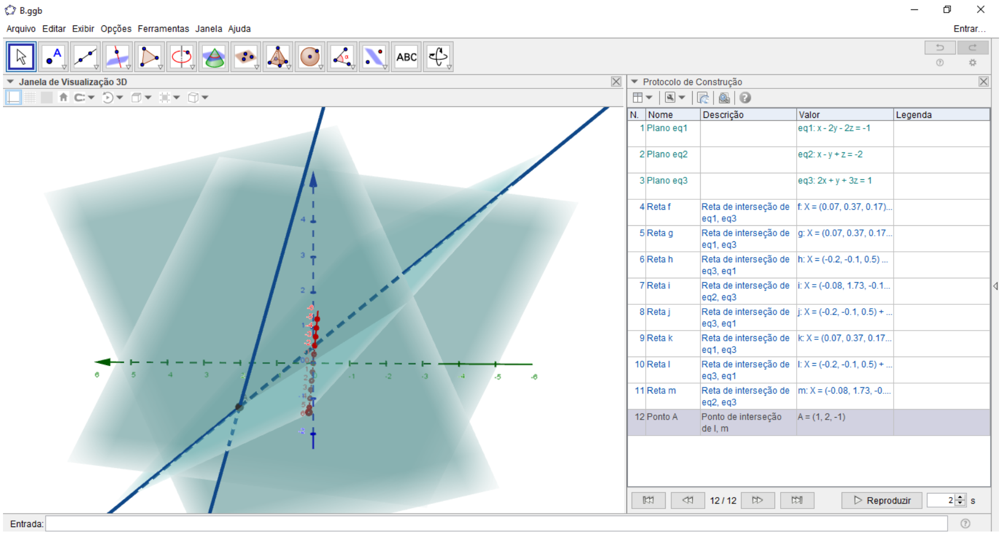
Figura 21 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE IV, SISTEMA A




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

De forma semelhante aos outros participantes, no segundo sistema o Participante IV construiu as retas intercessoras dos planos dois a dois e em seguida, utilizou a interseção entre objetos para determinar o ponto que é solução para o sistema linear proposto. Algo que vale salientar é que o participante tentou fazer a interseção entre uma das retas intercessoras encontradas e o terceiro plano construído, mas por não saber qual das ferramentas de interseção usar, preferiu construir a outra reta e marcar o ponto de encontro entre elas.

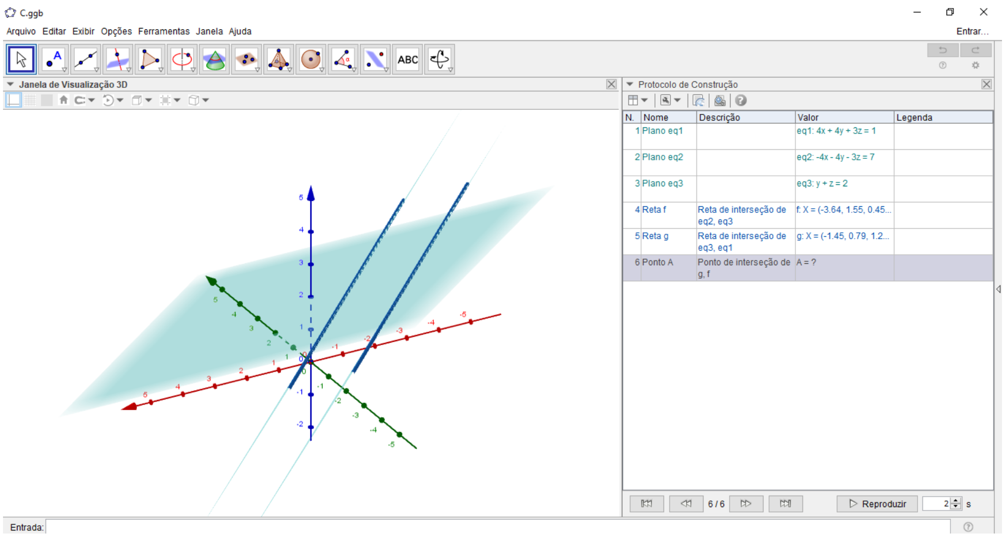
Figura 22 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE IV, SISTEMA B



FONTE: Dados da pesquisa (2019)

Na construção do terceiro sistema proposto, após serem construídos os planos por meio da escrita das equações no campo de entrada do *software*, o participante notou que dois dos planos eram paralelos e o terceiro os interceptava notando assim, pela visualização, que não haveria solução possível para o sistema, onde segundo o participante seria visível a interseção dos planos separadamente com o plano que os intercepta, mas por serem paralelos eles não teriam interseção mútua. O participante viu em seu questionário da primeira etapa que a solução apresentava por meio de métodos algébricos estava incorreta e afirmou que com o GeoGebra a verificação da solução era bem mais favorável do que revisar todos os procedimentos manuais feitos na primeira etapa.

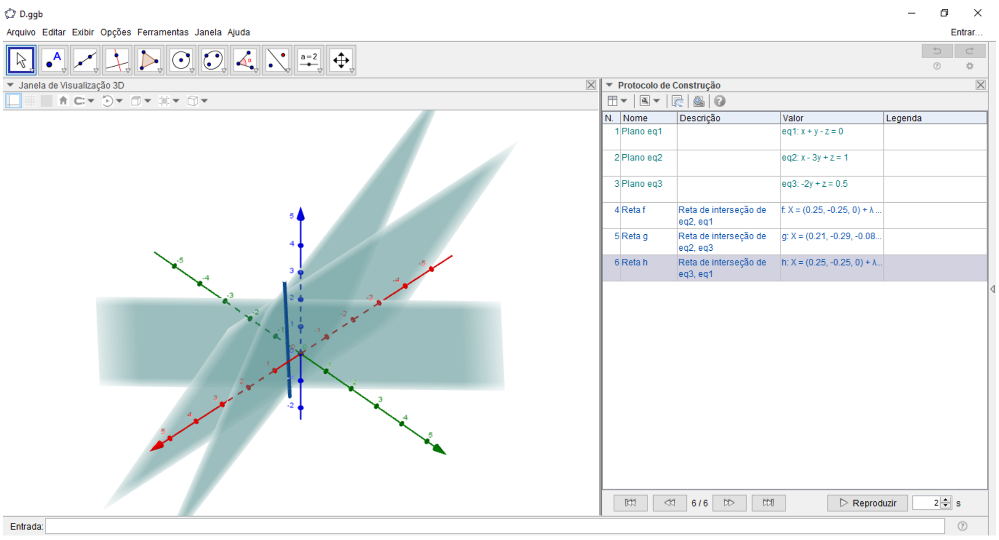
Figura 23 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE IV, SISTEMA C



FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No quarto sistema, notamos um pouco de dificuldade com o manuseio do espaço tridimensional para obtenção da interseção dos planos, porém após algumas tentativas o participante fez, assim como no segundo sistema, a interseção entre dois dos planos construídos formando uma reta e ao repetir o procedimento com o plano que faltava notou que as retas eram coincidentes, concluindo que a solução era possível, mas indeterminada.

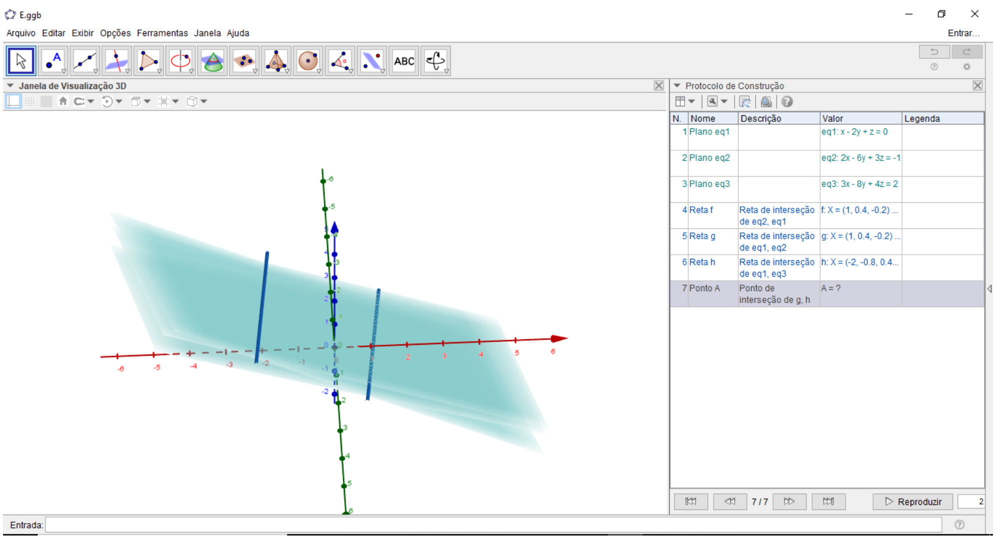
Figura 24 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE IV, SISTEMA D




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

No último sistema, o participante construiu os planos pelo sistema de entrada do GeoGebra e utilizou das ferramentas de interseção entre superfícies e entre objetos para demonstrar que as retas intercessoras eram paralelas, isto é, não há interseção entre os três planos mutuamente.

Figura 25 – RESOLUÇÃO NO GEOGEBRA DO PARTICIPANTE IV, SISTEMA E




FONTE: Dados da pesquisa (2019)

O Participante IV alegou que o GeoGebra trouxe uma visualização que permitiu entender com mais clareza o porquê de cada tipo de solução, especialmente a que tem solução possível e indeterminada, pois algebricamente é possível ver a equação de uma reta como solução, mas na representação geométrica ficou mais evidente a justificativa para tal solução. Todavia, afirmou que o problema é conhecer como usar as ferramentas do GeoGebra para produzir tais soluções, as quais nem sempre são de fácil visualização.

De modo geral, as estratégias utilizadas por este participante foram semelhantes a do participante III, contudo sem quaisquer orientações sobre como proceder com exceção da ferramenta de interseção entre superfícies a qual era desconhecida para o Participante V. Demonstrando preocupação em construir ou mostrar as interseções entre os planos ou a ausência delas para que se confirmasse a hipótese associada a solução do sistema proposto a fim de, usando o GeoGebra pudesse visualizar melhor cada caso de sistemas e como os mesmos se comportam em sua representação geométrica na janela de visualização 3D, atendendo assim as expectativas com relação à justificativa das possíveis soluções apresentadas anteriormente.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa pesquisa buscou-se as estratégias na resolução de atividades, dos estudantes de um curso de formação de professores de matemática, sobre os tipos de soluções de sistemas lineares 3x3 associadas as suas representações geométricas bem como os obstáculos e potencialidades do *software* GeoGebra como instrumento de aprendizagem de tais sistemas tendo em vista a visualização das representações de cada tipo de solução.

Diante dos dados que foram analisados em ambas as etapas da pesquisa, observou-se que a compreensão da representação geométrica dos sistemas lineares parece se tornar mais efetiva com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica como o GeoGebra, mas quando tal ferramenta não é utilizada na prática pelos estudantes, ficando apenas como modo de visualização a qual é mostrada pelo professor em suas aulas, os estudantes terão tal recurso tecnológico apenas como um artefato o qual, se não for estudado no que diz respeito ao seu manuseio e aplicação no conteúdo não será um instrumento útil para a aprendizagem. Isso não só dos sistemas lineares, como também outras áreas, como a geometria analítica, plana, espacial ou qualquer outro assunto que possivelmente demande de uma visualização e manipulação da representação geométrica.

Por ser um *software* que aborda mais os conhecimentos atrelados a geometria, os estudantes que mesmo possuindo domínio sobre técnicas de resolução algébrica e até mesmo que use o GeoGebra para outros fins, podem não conhecer especificamente como se dá o processo de solução de sistemas 3x3 no âmbito das suas projeções geométricas ou por não terem estudado essa relação entre o uso do software e o tema proposto ou por não saberem manusear com um domínio satisfatório o recurso tecnológico que, novamente, será apenas um artefato que precisa ser estudado previamente ou mutuamente ao conteúdo matemático, tornando-se um instrumento só a partir do momento em que o estudante não apenas aprenda a manusear o software e suas ferramentas, mas compreenda como o mesmo está ligado ao conteúdo estudado, que no caso desta pesquisa podemos compreender que embora o desenvolvimento algébrica seja de suma importância é possível notar a necessidade de uma reprodução dessa resolução no âmbito geométrico que talvez possibilite uma melhor compreensão de ambos os raciocínios para saber o tipo de solução dos sistemas, algébrico e geométrico.

O *software* GeoGebra, por possuir sua versão para dispositivos móveis pode facilitar tanto o contato quanto a aprendizagem do uso desse recurso tecnológico de maneira mais acessível que na sua versão para computador, porém é notório que mesmo sabendo as funções de cada ferramenta do programa e tendo até utilizado as mesmas em outros possíveis temas, como na geometria analítica e na geometria espacial, o indivíduo exposto a tal *software* pode apresentar dificuldades para relacionar os conceitos da álgebra linear com suas representações no espaço tridimensional, onde cada solução possui uma aspecto diferente até mesmo nas representações de solução impossível podemos ter variações de acordo com as equações dos planos contidos no sistema.

Os principais obstáculos para a realização das pesquisas envolveram principalmente a disponibilidade de alguns participantes, visto que na primeira etapa a ideia inicial era buscar estudantes que não fizeram a resolução dos sistemas corretamente, ou que fizeram mas não identificaram qual o tipo de solução em cada proposição do questionário. Porém, justamente esses e também outros participantes, mesmo deixando o nome e o contato no cabeçalho do questionário não se dispuseram a realizar a segunda etapa, por motivos desconhecidos. Por isso os critérios para seleção de participantes não continha a possibilidade de abordar graduandos que responderam erroneamente o questionário ou talvez não identificaram nenhum tipo de solução.

Diante, a pesquisa nos leva a crer que o GeoGebra tem grandes possibilidades no que diz respeito a ser um instrumento de ensino e principalmente de aprendizagem, todavia, o *software* só se tornará tal instrumento se deixar de ser um simples artefato na mão dos estudantes ou professores a partir do momento que exista, não apenas um bom entendimento teórico e prático das ferramentas do GeoGebra, mas também a ligação no uso deste *software* com o conteúdo que está sendo proposto.

# REFERÊNCIAS

ALVES, George de Souza; SOARES, Adriana Benevides. **Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae.** IX Workshop de Informática na Escola - WIE, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Rio de Janeiro, 2003.

BASTOS, Crislene Barbosa; PINHEIRO, Luana Paula Vilhena; ARRUDA, Suellen Cristina Queiroz. **O uso do GeoGebra para o ensino de sistemas lineares - uma experiência no ensino médio.** Relato de Experiência, Jornada de Estudos em Matemática, 2., 2016, Marabá. ISSN 2448-4342.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo S. R.; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática.** Sala de aula em movimento. Coleção Tendências em Educação Matemática, 3 ed. Editora Autêntica, São Paulo, 2014.

BITTAR, Marilena. **Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de softwares na aprendizagem da matemática. Um estudo de um caso: o software aplusix.** Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia - São Paulo, out. 2006.

BITTAR, Marilena. **A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática.** Educar em Revista. Editora UFPR n. Especial 1/2011, p. 157-171. Curitiba - PR, 2011.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear.** 3 ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

CARDOZO, Valdinei Cezar. **Ensino e aprendizagem de álgebra linear: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas - SP, 2014.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90.** Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP. São Paulo, 2000.

DIAS, Marlene Alves; SANTOS JÚNIOR, Valdir Bezerra dos ; GUADAGNINI, Miriam do Rocio; ANDRADE, Sirlene Neves de. **A NOÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NA TRANSIÇÃO ENTRE OS ENSINOS FUNDAMENTAL, MÉDIO E SUPERIOR**. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v. 32, p. 159-167, 2019.

FERREIRA, Denise Helena Lombardo. **Criatividade, tecnologia e modelagem matemática na sala de aula.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 142-155, 2016. disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p142> acesso em 29 de novembro de 2018.

GIL, Antônio Carlos, 1946 - **Como elaborar projetos de pesquisa/Antônio Carlos Gil.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M.. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.

OLIVEIRA, Gerson Pastre de; GONÇALVES, Mariana Dias. **Construções em Geometria Euclidiana Plana: as perspectivas abertas por estratégias didáticas com tecnologias.** Bolema, v. 32, n. 60, p. 92 – 116. Rio Claro (SP), abr. 2018

RABARDEL, P. (1995). **Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin.

RABARDEL, P. Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In: BAILLEUL, M. (Ed.). **Actes de la Xème Ecole d'Été en Didactiques des Mathématiques. Houlgate:** IUFM de Caen, 1999. p. 95; 202-213.

RIBEIRO, Flávia; PAZ, Maria. **O ensino da matemática por meio de novas tecnologias.** Revista Modelos – FACOS/CNEC Osório, ano 2, vol. 2, n. 2, p. 12-21, ago. 2012.

SANTOS, Rosana dos; LORETO, Aline Brum; GONÇALVES, Juliano Lucas. **Avaliação de Softwares Matemáticos quanto a sua funcionalidade e tipo de licença para uso em sala de aula**. REnCiMa, v. 1, n. 1, p. 47-65, 2010.

SILVEIRA, D. S.; LAURINO, D. P.; NOVELLO, D. P. **Experiências do ensinar e do aprender matemática ao operar as tecnologias digitais na educação superior.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v.12, n. 2, p. 67-81, 2017

STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M.A.; & LIMA, J.V. (2015). Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v.13, n.2, p 1-10.

VERGNAUD, G. **La théorie de champs conceptuels.** Recherches en Didactique de Mathématiques, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

______. O que é aprender? In: BITTAR, M.; Muniz, C. A. (Orgs.). A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 13-26.