UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

JOÃO VICTOR OLIVEIRA DOS SANTOS

UMA ANÁLISE DOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS REVELADOS NA APRENDIZAGEM DE LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

Caruaru
2022

JOÃO VICTOR OLIVEIRA DOS SANTOS

UMA ANÁLISE DOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS REVELADOS NA APRENDIZAGEM DE LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Prof.ª. Dra. Naralina Viana Soares da Silva Oliveira

Caruaru

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Santos, João Victor Oliveira dos.
Uma análise dos obstáculos epistemológicos revelados na aprendizagem de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real / João Victor Oliveira dos Santos. - Caruaru, 2022.
42 : il., tab.

Orientador(a): Naralina Viana Soares da Silva Oliveira
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2022.

1. Obstáculos Epistemológicos. 2. Limite e Continuidade. 3. Licenciatura em Matemática. 4. Dualidade Essenciais. I. Oliveira, Naralina Viana Soares da Silva. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

JOÃO VICTOR OLIVEIRA DOS SANTOS

UMA ANÁLISE DOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS REVELADOS NA APRENDIZAGEM DE LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 01/04/2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª. Dra. Naralina Viana Soares da Silva Oliveira (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof.ª Dra. Simone Moura Queiroz (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof.ª Dra. Kátia Silva Cunha (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho

- A minha vó, Ismerina (in memoriam). Foi maravilhoso tê-la em minha vida.

- Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, dando-me todo o apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Ele, por me dar forças para cumprir esta jornada.

Agradeço imensamente aos meus pais, Valdilene e Hilton, e minhas irmãs, Patrícia e Déborah, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em todas as minhas decisões. É maravilhoso tê-los comigo. Vocês são a minha verdadeira referência de amor incondicional.

Agradeço a todos meus professores da educação básica e do ensino superior. Além de todos os ensinamentos, vocês cativaram em mim um olhar especial para a educação e, em especial, para a Matemática.

Agradeço aquelas pessoas que caminharam junto comigo durante a graduação, aprendi muito com cada um. Destaco carinhosamente os amigos que ganhei durante essa fase da minha vida, vocês tornaram os momentos na Universidade mais leves e divertidos.

Agradeço à banca examinadora, por contribuir com meu trabalho com ensinamentos valorosos.

Um agradecimento especial a minha orientadora, a Prof.ª Dra. Naralina Viana. Obrigado por compartilhar comigo esse momento tão desafiador que é o trabalho de conclusão de curso. Sua paciência, ensinamentos e cuidados foram muito importantes para a conclusão deste trabalho.

Por fim, muito obrigado a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para minha formação.

O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno. As revelações do real são recorrentes. O real nunca é "o que se poderia achar”, mas é sempre o que se deveria ter pensado. (BACHELARD, 1996, p. 17)

RESUMO

Este trabalho é referente a um estudo sobre os obstáculos epistemológicos revelados na aprendizagem de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real. Observamos, através de referenciais teóricos como os de Rezende (2003), Bachelard (1996) e Brousseau (1983), que algumas dualidades essenciais presentes no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral podem estar relacionadas à resistência de um conhecimento anterior, podendo ocasionar erros cometidos ou interpretações inadequadas. Nesse sentido, de que forma os obstáculos epistemológicos relacionados a dualidades são manifestados na aprendizagem de Limites e Continuidade de Funções de uma variável real por discentes da UFPE/CAA do curso de Matemática-Licenciatura? Diante deste problema, delimitamos como objetivo geral desta pesquisa analisar os obstáculos epistemológicos, relacionados a dualidades, manifestados na aprendizagem de Limites e Continuidade de Funções de uma variável real por discentes da UFPE/CAA no curso de Matemática-Licenciatura. Para isso, adotamos como instrumento de pesquisa um questionário composto por 6 perguntas abertas referentes à noção de Limite e Continuidade. O questionário foi respondido por estudantes do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE/CAA matriculados na disciplina Cálculo I no semestre letivo 2021.2. Após a análise das respostas produzidas, pudemos verificar que os estudantes manifestaram alguns desvios ocasionados por obstáculos epistemológicos à noção de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real. Essas dificuldades estiveram relacionadas principalmente à dualidade variabilidade-permanência e à dualidade local-global, sendo também observadas as dualidades discreto-contínuo e finito-infinito. Concluímos, então, que o modo como os conhecimentos relacionados a temas do Cálculo foi construído pode gerar entraves manifestados pelos estudantes.

Palavras-chave: Obstáculos Epistemológicos. Limite e Continuidade. Licenciatura em Matemática. Dualidades essenciais.

ABSTRACT

This work refers to a study about the epistemological obstacles revealed in the learning of Limit and Continuity of Functions of a real variable. We observed, through theoretical references such as Rezende (2003), Bachelard (1996) and Brousseau (1983), that some essential dualities present in the development of Differential and Integral Calculus may be related to the resistance of a previous knowledge, which may cause errors committed or inadequate interpretations. In this sense, how epistemological obstacles related to dualities are manifested in the learning of Limits and Continuity of Functions of a real variable by students of the UFPE/CAA Mathematica-Licenciatura course? In face of this problem, we defined as a general objective of this research to analyze the epistemological obstacles, related to dualities, manifested in the learning of Limits and Continuity of Functions of a real variable by students of UFPE/CAA in the Matemática-Licenciatura course. For this, we adopted as research instrument a questionnaire composed by 6 open questions about the notion of Limit and Continuity. The questionnaire was answered by students of the Matemática-Licenciatura course at UFPE/CAA enrolled in Calculus I in the school semester 2021.2. After analyzing the answers, we could verify that the students manifested some deviations caused by epistemological obstacles to the notion of Limit and Continuity of Functions of a real variable. These difficulties were mainly related to the duality variability-permanence and the duality local-global, being also observed the discrete-continuous and finite-infinite dualities. We conclude, then, that the way the knowledge related to topics of Calculus was built can generate obstacles manifested by the students.

Keywords: Epistemological Obstacles. Limit and Continuity. Degree in Mathematics. Essential dualities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Estudar Cálculo Diferencial e Integral certamente é um marco vivenciado por estudantes de alguns cursos de graduação. De repente, nos deparamos com uma variável que "se movimenta" numa curva se aproximando de um ponto com uma diferença "tão pequena quanto se queira", precisamos calcular a taxa de variação instantânea de uma variável em relação a outra, ou ainda, calcular áreas de figuras planas não muito familiares – "a área sobre a curva". É razoável admitir que essa nova visão dada às Funções na Matemática é um tanto intimidante, afinal, de certa forma não era essa a Matemática que conhecíamos até ingressarmos na Universidade.

Em verdade, a introdução ao Cálculo[1] é um momento inicial para entender a Matemática com um olhar investigativo, explorando as funções de maneira até então não vista. Nos cursos de formação de professores de Matemática, o Cálculo pode oferecer subsídios teóricos para a explicação de conceitos e procedimentos da Matemática do ensino básico. Na estrutura curricular do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Campus Agreste (CAA), a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I é o primeiro componente associado às ideias do Cálculo, tendo por objetivo

> Fazer o estudo qualitativo de funções reais, estudando limite, derivada e integral de funções, dando destaque a aplicações em outras áreas da ciência e sempre que possível relacionar a disciplina com assuntos vistos no ensino médio, como por exemplo análise de gráfico e cálculo de áreas de figuras planas. (UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, 2016, p.45)

Assim, essa disciplina inicial pretende, ao fazer o estudo qualitativo das funções reais, possibilitar ao discente relacionar as noções de Cálculo com os conteúdos de Matemática da educação básica. Soma-se a isso a importância de compreender, a partir dessas noções, os fenômenos aplicativos em outras áreas da ciência.

É importante ressaltar, por outro lado, que para muitos alunos a experiência de estudar Cálculo não é algo positivo. Tal fenômeno pode ser constatado pelos baixos índices de proficiência nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, revelando uma existência de uma cultura de reprovação, como afirma Oliveira e Raad (2012):

> Apesar da existência de bons livros didáticos, de boas práticas pedagógicas, de diferentes iniciativas no sentido de diminuir o insucesso dos estudantes em Cálculo: oferecimento de monitorias, revisão de conteúdos de Matemática básica, diminuição do rigor e valorização de aspectos intuitivos e aplicativos,

[1] Frequentemente utilizaremos o termo "Cálculo" para nos referirmos à "Cálculo Diferencial e Integral"

> ainda assim a reprovação persiste, permanece como um problema crônico, uma verdadeira tradição. (p. 135)

Acreditamos que essa tradição do insucesso no estudo do Cálculo pode estar relacionada a fatores além dos didáticos ou psicológicos, conforme aponta Rezende (2003). Questionando os artifícios empregados no ensino de Cálculo, o autor defende que

> O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de "infinito", de "infinitésimos", de "variáveis", do que com "fatoração de polinômios", "relações trigonométricas", "cálculos algébricos" etc. É bem verdade que o conhecimento destes últimos auxilia na árdua tarefa de calcular limites (derivadas, integrais etc), mas é exatamente aí que se coloca a nossa primeira questão fundamental: Qual é o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção dos significados? Quando se fala de "falta de base", de que "base" se está falando? (REZENDE, 2003, p. 36, grifo do autor)

Essa indagação de Rezende (2003) assemelha-se a algumas das minhas reflexões enquanto discente do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE/CAA. Em minha trajetória pela graduação, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral despertavam a curiosidade e inquietação acerca do objeto de estudo desses componentes.

O primeiro contato com o Cálculo se deu no estudo de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real, na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. Essa experiência inicial me permitiu perceber que, embora tivesse certa familiaridade e êxito para analisar o Limite e a Continuidade de Funções, frequentemente me questionava sobre o conflito de significados entre o Cálculo e a forma pela qual a Matemática me foi apresentada até então.

Neste percurso em busca de respostas para meus questionamentos, deparei-me com pesquisas acerca de obstáculos epistemológicos presentes na construção do conhecimento. Contribuições teóricas como as de Gaston Bachelard, Guy Brousseau e Wanderley Moura Rezende – esta última exercendo forte influência neste trabalho – me apresentaram um campo de estudo necessário para a discussão de obstáculos na aprendizagem de Cálculo.

Analisando os Anais da última década dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM)[2], pudemos verificar que as pesquisas envolvendo as disciplinas de Cálculo têm apresentado notoriedade em diversos segmentos da Educação Matemática. Na Tabela 1, dividimos os trabalhos encontrados em quatro categorias, baseadas nos subeixos temáticos do último ENEM.

---

[2] Os Encontros Nacionais de Educação Matemática acontecem de forma trianual, constituindo um acervo de pesquisas influentes no cenário da Educação Matemática no Brasil.

Tabela 1 – Quantidade de trabalhos cujo tema envolve Cálculo Diferencial e Integral na última década do ENEM por categoria

Ano	Ensino-aprendizagem de Matemática	Currículo	Alternativas Metodológicas e/ou avaliativas	Recursos tecnológicos e didáticos
2013	6	3	3	5
2016	13	1	2	6
2019	9	-	1	7

Fonte: elaborado pelo autor (2022)

Percebemos com essa análise que o enfoque das discussões tem sido o processo de ensino-aprendizagem e a utilização de recursos tecnológicos e didáticos. Todavia, notamos a ausência de debates centralizados nos obstáculos epistemológicos presentes na aprendizagem de Cálculo – e, especificamente, na aprendizagem de Limites e Continuidade de Funções. Por isso, acentuamos a importância da pesquisa destes obstáculos na academia, de forma a permitir a reflexão sobre os conflitos gerados no processo de aprendizagem desse ramo da Matemática.

De uma forma geral, os obstáculos epistemológicos na Educação Matemática podem ser entendidos como uma resistência originada por um conhecimento anterior que, em contextos diversos do qual ele foi estabelecido, pode se revelar inadequado ou errôneo (BROUSSEAU, 1983). Esses obstáculos, no âmbito do Cálculo, podem ser percebidos na presença de conflitos entre perspectivas na significação dos conceitos, explicitados pelo que Rezende (2003) denominou de dualidades essenciais.

Isto posto, traçamos como o problema desta pesquisa: De que forma os obstáculos epistemológicos relacionados a dualidades são manifestados na aprendizagem de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real por discentes da UFPE/CAA do curso de Matemática-Licenciatura?

Diante desse problema, delimitamos como o objetivo geral deste trabalho analisar os obstáculos epistemológicos, relacionados a dualidades, manifestados na aprendizagem de Limites e Continuidade de Funções de uma variável real por discentes da UFPE/CAA no curso de Matemática-Licenciatura. Especificamente, buscamos identificar as dificuldades dos estudantes oriundas de obstáculos epistemológicos envolvendo o Limite e a Continuidade de Funções de uma variável real. Além disso, procuramos identificar a relação entre as dificuldades manifestadas pelos estudantes e as dualidades essenciais no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo.

Com isso, dividimos nosso trabalho em capítulos. O primeiro deles refere-se aos obstáculos epistemológicos no campo da Educação Matemática, no qual apresentamos as contribuições teóricas iniciais, bem como alguns autores que pesquisaram sobre esta temática.

Dentro deste capítulo também apresentamos algumas considerações teóricas sobre a noção de Limite e Continuidade de Funções.

No segundo capítulo, expomos as dualidades essenciais, segundo Rezende (2003), presentes no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo, além de outras pesquisas que também investigam tais dualidades. Na metodologia, apresentamos os procedimentos para produção e análise dos dados, sendo esta feita no capítulo seguinte. Nas considerações finais, concluímos nossa pesquisa destacando as contribuições deste trabalho para o processo de ensino-aprendizagem de Limite e Continuidade de Função de uma variável real e, de forma geral, para o Cálculo.

2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Em contextos gerais, define-se um obstáculo como “o que obsta ou impede; estorvo; impedimento”[3]. A expressão epistemologia, por sua vez, significa um “ramo da filosofia que se ocupa dos problemas que se relacionam com o conhecimento humano, refletindo sobre sua natureza e validade”[4]. As definições anteriores portam um significado que, ao se transpor para o contexto científico, revelam um campo de estudo que enriquece os debates sobre a construção do conhecimento.

A convergência entre esses termos pode ser entendida inicialmente através do que Bachelard (1996) definiu como obstáculos epistemológicos:

> [...] é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (p. 17)

Essas contribuições iniciais tiveram grande influência na reflexão sobre a construção pensamento científico e, no campo da Educação Matemática, a conceitualização dos obstáculos epistemológicos fez surgir diversas pesquisas no empenho de explicar a causa de dificuldades até então não exploradas sob essa perspectiva.

2.1 ALGUNS OLHARES SOBRE A NOÇÃO DE OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO

A noção de obstáculo epistemológico na Educação Matemática, a partir das concepções iniciais de obstáculo por Bachelard (1996), revelam certa complexidade deste campo de reflexão, no qual diferentes visões sobre o conceito são defendidas e, em nosso entendimento, se complementam. Igliori (1999) destaca que a definição de obstáculo epistemológico tem criado controvérsias entre alguns pesquisadores, considerando a dificuldade em reconhecer um obstáculo de ordem epistemológica.

Pode-se afirmar que a introdução da noção de obstáculo epistemológico na Educação Matemática se deve a Guy Brousseau, um expoente da Didática da Matemática. Procurando ressignificar a percepção do erro, o didata francês consolida que

---

[3] Dicionário Priberam Online de Português Contemporâneo. Disponível em: https://dicionario.priberam.org/obstáculo. Acesso em: 23 jan. 2022.

[4] Dicionário Priberam Online de Português Contemporâneo. Disponível em: https://dicionario.priberam.org/epistemologia. Acesso em: 23 jan. 2022.

> [...] o erro e a falha não têm o papel simplificado que às vezes desejamos que lhes atribuam. O erro não é apenas o efeito da ignorância, incerteza e acaso que acreditamos nas teorias de aprendizagem empiristas ou comportamentais, mas o efeito do conhecimento anterior, que teve seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadequado. Erros desse tipo não são aleatórios e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos. (BROUSSEAU, 1983, p. 104, tradução nossa)[5]

Nesse sentido, entendemos que Brousseau exprime o obstáculo como a resistência de um conhecimento diante de novas situações de aprendizagem. Segundo Costa (2009), esses obstáculos manifestam-se como um contrapensamento, quando uma organização do pensamento anterior é ameaçada. Assim, tal rejeição pode desencadear erros, não sendo estes apenas consequência do desconhecimento. Além disso, os obstáculos não se exteriorizam apenas com os erros cometidos, mas também podem ser o resultado da impossibilidade de responder a certas questões ou de um processo de resolução insatisfatório (COSTA, 2009).

Segundo Igliori (1999), no empenho de Brousseau em transferir para a Didática da Matemática a noção de obstáculo, o didata francês distingue três tipos de obstáculo que se figuram no sistema didático:

> [...] os de origem ontogênica, que são aqueles que se processam a partir de limitações de ordem do tipo neurofisiológicas entre outras, do sujeito, no momento de seu desenvolvimento; os de ordem didática que dependem somente das escolhas realizadas para um sistema educativo; e os de ordem epistemológica, que são aqueles dos quais não se pode nem se deve escapar, pois são constitutivos do conhecimento visado. (p. 101)

Nesse sentido, Igliori (1999) defende que o obstáculo epistemológico “é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode em princípio encontrar na história do conceito.” (p. 97). Assim, em conformidade com Sierpinska (1988, apud BITTENCOURT, 1998), não saltamos um obstáculo epistemológico, mas o superamos, adquirindo consciência histórica sobre o conhecimento, implicando uma atitude de reflexão frente ao saber.

No que se refere a identificação de obstáculos em situações didáticas, Vergnaud (1988, apud BITTENCOURT 1998), acentua a importância de distinguir a dificuldade de um obstáculo, o que aponta a necessidade de tomarmos atitudes diferentes para cada um dos casos.

Bittencourt (1998), por sua vez, revela que a perspectiva histórica do desenvolvimento da matemática tem na discussão dos obstáculos epistemológicos um lugar influente.

---

[5] No original: L’erreur et l’échec n’ont pas le rôle simplifié qu’on parfois leur faire jouer. L’erreur n’est pas seulemente l’effect et l’ignorance, de l’incertitude, du hasard que l’on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l’apprentissage, mais l’effet d’une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succés, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreus de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles.

> A procura por obstáculos históricos tem sido um dos métodos utilizados pelos pesquisadores [...]. Em todos esses estudos, o mergulho histórico tem se mostrado fundamental na análise epistemológica dos conhecimentos envolvidos, compreendendo o obstáculo como um conhecimento com determinado domínio de validade e significado social. (p. 14)

Artigue (1990, apud IGLIORI, 1999), em conformidade com Bittencourt (1998), argumenta que o obstáculo epistemológico é fundamentado mais na aparição e na resistência histórica de certos conceitos, conjuntamente com as concepções análogas observadas nos alunos, do que no reconhecimento dessa resistência nos estudantes da atualidade. A autora afirma ainda que a generalização abusiva e a fixação sobre uma contextualização são processos geradores de obstáculos.

Finalmente, Bittencourt (1998) conclui em sua pesquisa que

> Há controvérsias sobre o que seria obstáculo ou simplesmente uma dificuldade, ou ainda sobre que critérios eleger para caracterizar um obstáculo (por exemplo a exigência ou não do aval histórico ou o grau de resistência à ruptura). Alguns conhecimentos podem funcionar em determinadas saturações como obstáculos e em outras não, sendo, portanto, de difícil controle. Um obstáculo pode ter tanto natureza psicológica quanto epistemológica ou didática e muitas vezes um obstáculo epistemológico é reforçado pelo didático. Se é relativamente simples identificar um erro, já análise de sua estrutura, revelando a rede concepções ao qual ele está relacionado, assim como reagrupar essas concepções de modo a criar bons instrumentos didáticos são tarefas extremamente complexas. (p. 04)

Em síntese, diante das contribuições pautadas até aqui, assumimos que o obstáculo epistemológico se manifesta como uma resistência de um conhecimento anterior, induzindo intepretações errôneas ou inadequadas pelos estudantes frente a um novo conceito. Além disso, obstáculos desse tipo podem estar associados com a história do desenvolvimento da Matemática e a tarefa de superá-los enseja uma análise que permita tratar distintamente as dificuldades que por eles são geradas.

2.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A NOÇÃO DE LIMITE E CONTINUIDADE

Na história do Cálculo, a noção de Limite permaneceu por muito tempo indefinida e, com o desenvolvimento deste conceito, a derivada e a integral passaram a ser definidas em termos de limite (MORAES, 2013). Assim, a partir da introdução do Limite no Cálculo, obstáculos puderam ser notados quanto à abordagem de temas relacionados à continuidade e ao infinito, conforme Bell (1948, apud MORAES, 2013).

Messias e Brandemberg (2018), ao fazerem um estudo sobre as compreensões dos estudantes relacionadas ao conceito de Limite e Continuidade, destacam duas mobilizações feitas pelos estudantes. Uma delas é caracterizar o limite como algo inalcançável, partindo da ideia de que a função se move em direção a um ponto, mas sem nunca o atingir. Cornu (1983, apud MESSIAS; BRANDEMBERG, 2018) aponta que essa concepção pode levar a intepretações equivocadas, fazendo com que a aproximação seja enfatizada apenas no eixo das abcissas, sem considerar o valor limite no eixo das ordenadas.

A outra mobilização, em contrapartida, é de que o valor do limite pode ser alcançado. Segundo Messias e Brandemberg (2018), os estudantes podem considerar que o valor do limite será sempre igual ao valor da função no ponto, fator este influenciado por uma prática excessiva do cálculo de limites de funções polinomiais, pelo método da substituição direta.

Cornu (1991, apud DOMINGOS, 2003) verifica que concepções anteriores do conceito de limite são formadas antes mesmo do ensino formal. O autor as denominou então como concepções espontâneas, as quais não desaparecem diante do novo conceito.

> Estas ideias espontâneas misturadas com o novo conhecimento adquirido modificam-se e adaptam-se para formar as concepções pessoais dos alunos. Assim, perante a resolução de um problema não é evocada nenhuma teoria única científica, mas antes um raciocínio natural e espontâneo. (p. 91)

Ao analisar os obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior, Celestino (2008) menciona a divisão, por Cornu (1981), dos obstáculos epistemológicos relativos ao conceito de limite em grupos. Um deles é referente ao conflito gerado pela indagação: *o limite...atinge ou não?.* Como pontua Celestino (2008), por muito tempo se entendeu que o limite não poderia ser atingido. O autor destaca ainda o obstáculo epistemológico relacionado à noção de "infinitamente pequeno" e "infinitamente grande", os quais são ainda muito presentes na construção da noção de limite.

No que concerne ao conceito de continuidade, Messias e Brandemberg (2018), com base em algumas considerações teóricas, afirmam que o fato de uma função ser definida por partes implica em descontinuidade, sendo esse pensamento incentivado pela presença de assíntotas nos gráficos das funções. Visto isso, discutimos no próximo capítulo as dificuldades ligadas aos obstáculos epistemológicos presentes nas ideias do Cálculo de forma geral.

3 DUALIDADES ESSENCIAIS PRESENTES NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Os obstáculos epistemológicos que são originados em conceitos de Cálculo, conforme aponta Rezende (2003), predizem algumas dificuldades encontradas pelos estudantes. O pesquisador realizou, em sua tese de doutorado, um mapeamento das dificuldades de natureza epistemológica, evidenciando os macroespaços das dualidades essenciais previstas na aprendizagem do Cálculo.

Esses macroespaços "não são estanques e nem constituem fronteiras bem-definidas, ao contrário, eles se entrelaçam e se inter-relacionam plenamente, sem hierarquia de valores ou graus de subordinação" (REZENDE, 2003, p. 398). Discutimos neste capítulo contribuições na literatura acerca dessas dualidades, quais sejam: discreto-contínuo, variabilidade-permanência, finito-infinito e local-global.

3.1 A DUALIDADE DISCRETO-CONTÍNUO

Numa perspectiva histórica, a dualidade discreto-contínuo pode ser inicialmente percebida no debate sobre o problema histórico da medida de grandezas geométricas, sendo estas intuitivamente contínuas, mas tratadas através de procedimentos aritméticos discretos (REZENDE, 2003).

No âmbito do Cálculo, Brolezzi (1999) afirma que

> [...] as idéias iniciais do Cálculo tiveram sua origem nas tentativas de compreensão da relação entre o discreto e o contínuo, já desde a visão estática grega, quebrada em parte pela descoberta pitagórica dos incomensuráveis, que deram a largada na corrida em busca de definições satisfatórias de número e infinito. A distinção entre o Repouso e o Movimento fará parte dessa busca. A consideração do movimento, fonte de inquietação no tempo de Zeno, acabou por abrir caminho a uma nova forma de abordar a relação entre o discreto e o contínuo, permitindo a criação do Cálculo Diferencial e Integral. (p. 41)

Numa concepção pedagógica, Rezende (2003) afirma que um distanciamento entre o discreto e o contínuo ocorre desde os níveis mais elementares da educação. Ao mencionar o caso do tratamento aritmético dado às dízimas periódicas e o caráter nebuloso dado aos números irracionais, o autor destaca que

> [...] a dízima periódica, uma denominação aritmética para as séries geométricas, é camuflada e "resolvida" aritmeticamente. E, com esta camuflagem, as séries são relegadas a um segundo plano no ensino básico de matemática. E, desse modo, torna-se inevitável o hiato entre a representação

> decimal de um número irracional (discreto) e sua representação geométrica (contínua). Nesse sentido, seriam interessantes que se realizassem algumas antecipações do binômio séries/limites no ensino básico para que houvesse uma problematização inicial das dificuldades de representação e definição dos números irracionais. [...] O que se quer é oferecer ao estudante um cenário real das dificuldades da significação deste conceito, ao passo que, com esta representação, alguns elementos essenciais do pensamento "diferencial" – como a noção intuitiva de limite e as séries – já pudessem ser iniciadas. (p. 330-331, grifo do autor)

Nesse sentido, existe uma lacuna presente na relação entre o discreto e o contínuo no que concerne às representações de certos conceitos matemáticos. A preferência por uma abordagem em detrimento de outra prevalece ao longo das etapas de escolarização, o que provavelmente pode conduzir a significações equivocadas pelos alunos.

Por sua vez, Zuffi e Pacca (2000), em uma análise sobre a linguagem dos professores do ensino médio na conceitualização das funções, mostram que a relação discreto-contínuo abordada é confusa: "Os gráficos contínuos eram sempre determinados por um conjunto muito pequeno de pontos "discretizados", sem se discutir o que acontecia com as imagens nos intervalos entre esses pontos" (p. 22, grifo do autor).

Com relação ao ensino de Cálculo, a noção de continuidade é estabelecida em termos de função, sendo ela definida localmente através da noção de limite. Quando essa noção é estendida para todos os pontos do domínio, o conceito de continuidade é globalizado, no entanto, não oferece muito sentido para os estudantes. Assim, o professor recorre à intuição geométrica, mostrando que a função é contínua quando não tem "saltos" ou "buracos" (REZENDE, 2003). Por outro lado, Gutiérrez-Fallas e Henriques (2017) observam que as concepções que os alunos têm sobre continuidade de uma função deixam de ter sentido na ausência da representação gráfica, os conduzindo a apresentar dificuldades quando a função é definida algebricamente.

Outro caso de desaproximação de uma dualidade discreto-contínuo pode ser percebida no uso indiferenciado do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) para tratar as Integrais, como diz Rezende (2003). Segundo o autor, o estudo das Integrais é uma oportunidade de introduzir a interface entre o discreto e o contínuo. Essa interface pode ser percebida nas tentativas de calcular áreas de regiões planas curvilíneas, com aproximações sucessivas, induzindo o conceito de Integral. No entanto, tratar as integrais demasiadamente pelo TFC leva o aluno a perceber essa operação apenas como uma antiderivada, com um tratamento discreto, ignorando uma concepção contínua do processo.

3.2 A DUALIDADE VARIABILIDADE-PERMANÊNCIA

No processo de ensino-aprendizagem do Cálculo, o tratamento das Funções é o núcleo das definições, propriedades e resoluções de problemas discutidos na disciplina. A forma como a definição de Função é estudada prediz a atitude dos alunos frente à noção de variabilidade ou permanência de objetos matemáticos.

Rezende (2003) atesta que a maneira como o conceito de Função é abordada no ensino fundamental e médio provoca desvios de natureza epistemológica no ensino de Cálculo:

> [...] a idéia de função é estabelecida pelos alunos, não no contexto da "variabilidade", mas, em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis "x" e "y". O gráfico da função é, em geral, "plotado" através de uma tabela em que os valores "notáveis" são escolhidos pelo professor. A curvatura das curvas que compõem o gráfico da função é, em geral, induzida pelo professor que tenta convencer o aluno, pelo acréscimo de mais pontos, ou mesmo através de um sofisticado programa computacional, que a única possibilidade é a dela – professor. (p. 344, grifo do autor)

Logo, o tratamento estático dado às Funções revela que o conhecimento sobre a variabilidade de grandezas fica em segundo plano. Como afirma Rezende (2003), essa ideia de Função não está incorreta, pois inclusive é uma das formas como alguns teóricos a conceituam, mas esse caminho vai de encontro à história do Cálculo, constituindo um obstáculo epistemológico significativo à noção de interdependência entre quantidades variáveis.

Se não bastasse o tratamento dado às Funções como uma correspondência estática durante a educação básica, no ensino superior essa abordagem perdura, provavelmente ocorrendo concomitante a um curso inicial de Cálculo, agora acrescida de uma formalidade característica dos cursos superiores de Matemática. Silva (1996) aponta que é na relação entre conjuntos ou na correspondência entre seus elementos que reside, preferencialmente, a conceitualização das funções no ensino superior: "É a idéia de que a cada elemento x de um conjunto A se associa um único elemento f(x) de outro conjunto B, segundo uma relação definida de A em B. Esta interpretação é estática e tem um caráter mais formal que as demais" (p. 32).

Considerando que essa conceitualização, e apenas esta, seja feita num momento em que se pretende preparar os alunos para adentrar em conceitos de limites e derivadas, tal processo pode fixar o olhar dos alunos para o Cálculo sob um viés algébrico. Esse viés é reforçado nos conceitos de Derivada e Integral Definida.

> Com efeito, com o descolamento da dualidade discreto/contínuo do conceito de integral, estimulado principalmente pelo uso do Teorema Fundamental do Cálculo, o ato de integrar é identificado pelo aluno ao ato de encontrar a

> antiderivada da função do integrando. [...] Já no que toca ao conceito de derivada o problema é muito mais sério. [...] Interpretá-la tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza [...]. (REZENDE, 2003, p. 350, grifo do autor)

Logo, caracterizar a Integral meramente como uma antiderivada, ou impor à Derivada uma interpretação unicamente geométrica – "o coeficiente angular da reta tangente" – lançando mão de uma exaustiva apresentação de técnicas de derivação e integração, talvez explique porque lidar com atividades envolvendo um sentido aplicativo dos conceitos, por exemplo, parece ser uma tarefa árdua para muitos alunos de Cálculo.

3.3 A DUALIDADE FINITO-INFINITO

A noção de infinito não é uma construção de fácil assimilação. Perguntas sobre o quão grande é o universo, ou como podemos contar grandes quantidades, são indícios da discussão sobre a dualidade finito-infinito. Na Matemática, o infinito se revela em diversos momentos, seja no conceito de retas e planos, ou nas noções de limites e séries.

Em verdade, o conceito de infinito se manifesta como um obstáculo na Matemática, tendo sua conceitualização passado por mudanças e rupturas. Siqueira e Lorin (2020) relatam que, numa visão histórica, as primeiras discussões sobre o infinito mostram que o termo teve um significado de algo potencial, isto é, "uma ideia de infinito que não tem fim, e que servia exclusivamente como um qualificador de uma ação" (p. 556).

O conceito potencial do infinito, contudo, não é estendido totalmente ao conceito de infinito atual. Este é encarado como um objeto da matemática, como fez Bernhard Bolzano na sua introdução dos conjuntos, sendo Georg Cantor o responsável por consolidar a noção de infinito atual, constituindo critérios para diferenciar conjuntos infinitos conforme sua cardinalidade (SIQUEIRA; LORIN, 2020).

Rock (2003), citado por Siqueira e Lorin (2020), revela que os obstáculos manifestados pelos alunos em relação à noção de infinito é reflexo dos obstáculos epistemológicos encontrados no desenvolvimento histórico do conceito. Sierpinska (1987, apud REZENDE, 2003), por exemplo, indica que nos estudantes predominam atitudes finitistas ou de infinito potencial.

Rezende (2003) aponta 4 níveis de significação da noção de infinito dado pelos alunos, relevando algumas semelhanças com a história da compreensão do termo, sendo eles: "[...]

infinito como algo que não tem fim; infinito como algo incontável; infinito como algo limitado; infinito como forma indeterminada" (p. 360).

Ademais, um caráter ingênuo com que os estudantes lidam com as operações infinitas é observado por Rezende (2003). Ao tratar sobre séries, por exemplo, surge nos alunos sentimentos de estranheza e submissão às soluções e técnicas impostas:

> [...] esse sentimento de impotência por parte dos estudantes é fruto mais uma vez da formação matemática passiva que receberam. Obedecem aos "rituais consagrados" e às "convenções matemáticas" estabelecidas no processo pedagógico, aprendem a "jogar o jogo sintático" do ensino da matemática – se A então B – e ignoram o significado daquilo que fazem ou aprendem. (p. 364-365, grifo do autor)

Já no que diz respeito ao tratamento das indeterminações matemáticas, Rezende (2003) percebe que os alunos transferem as propriedades conhecidas no "finito" para o cálculo dos limites.

> [...] pode-se perceber nas atitudes dos estudantes uma simplificação ingênua do cálculo dos limites. Não reconhecem as situações de indeterminação presentes em cada um dos limites e procuram traduzir e "resolver" as indeterminações através de uma espécie de álgebra do infinito. O interessante é que o infinito, que "não é nada", ou "é apenas um símbolo matemático", passa a se comportar agora como um número. (p. 366, grifo do autor)

Portanto, podemos perceber que na dualidade finito-infinito soma-se à dificuldade de dar uma noção ao conceito o fato de que há uma confusão na abordagem de operações que envolvem uma concepção infinita. Não é de se espantar observar essa atitude, considerando todo o questionamento histórico do que é o infinito – dentro e fora da Matemática.

3.4 A DUALIDADE LOCAL-GLOBAL

A dualidade local-global é um marco recente na história do Cálculo. Rezende (2003) afirma que essa dualidade não apareceu efetivamente na invenção do Cálculo, indicando que Newton e Leibniz, por exemplo, não faziam uma distinção entre o local e o global.

Sobre isso, o pesquisador apontou dois fatores que explicam essa ausência: "uma primeira relacionada ao bom comportamento das curvas frequentemente utilizadas nos cálculos de Newton" e "Faltavam aos matemáticos dois conceitos fundamentais que pudessem vislumbrar a íntima relação da dualidade local/global com o Cálculo que acabavam de "inventar": a noção de limite e o conceito de função" (REZENDE, 2003, p. 376, grifo do autor).

Sobre o conceito de função e sua relação com o trânsito local-global, Olimpio Júnior (2006), indagando a afirmação de que a definição formal de função é um tanto estéril como também abstrata (REZENDE, 2003), argumenta que

> [...] no contexto do Ensino Médio, o foco está localizado na exploração global das chamadas funções elementares. Como são inexistentes (ou são poucas) as singularidades nessas funções e o foco é global, uma exploração mais atenta aos componentes da definição de função não seria recomendável, até porque o tempo sequer é suficiente para que as próprias funções elementares sejam completamente exploradas. Além disso, questões de limite, continuidade e diferenciabilidade não são usualmente tratadas neste contexto. [...] se o foco sobre o conceito de função no Ensino Médio é global e os conceitos locais de limite, continuidade e diferenciabilidade não são ali estudados, qualquer exploração local do conceito tornar-se-á, de fato, estéril. (OLIMPIO JÚNIOR, 2006, p. 210-211)

No entanto, no contexto do Ensino Superior, os conceitos locais devem ser trabalhados, do contrário, prejudicaria o desenvolvimento do estudante (OLIMPIO JUNIOR, 2006).

Rezende (2003) explica ainda que a dificuldade em lidar com a dualidade local-global está associada à maneira como ocorre a passagem de uma perspectiva para outra, e isso acontece com destaque no estudo das Derivadas.

> [...] pode-se dizer que a significação do conceito de derivada em um curso normal de Cálculo se estabelece em dois caminhos distintos: uma inicial, estabelecida no nível teórico pelo professor, que parte da definição local de derivada para estendê-la de forma “natural” para seu estado global; o outro, influenciado pelas técnicas de derivação, que realiza o caminho inverso. (p. 384, grifo do autor)

O que se observa então é que além de uma abordagem ínfima ou inexistente de uma perspectiva local das funções na escolarização básica, existe um tratamento global para os principais resultados no ensino de Cálculo, associado a isso o uso imediato de técnicas de derivação, o que pode originar as dificuldades relativas à dualidade local-global.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos deste trabalho. Com isso, retomamos o nosso problema de pesquisa: De que forma os obstáculos epistemológicos relacionados a dualidades são manifestados na aprendizagem de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real por discentes da UFPE/CAA do curso de Matemática-Licenciatura?

Assim, nesta etapa buscamos atingir os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as dificuldades oriundas de obstáculos epistemológicos relacionados à noção de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real.
- Identificar a relação entre as dificuldades manifestadas pelos estudantes e as dualidades essenciais no processo de ensino-aprendizagem de Cálculo.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES

Para corresponder aos objetivos especificados acima, delimitamos como os participantes da pesquisa os estudantes da UFPE/CAA do curso de Matemática-Licenciatura matriculados na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I do semestre letivo 2021.2.

Dentre os 43 estudantes matriculados, 28 participaram da pesquisa. De forma a assegurar o anonimato, nos referimos aos discentes a partir do codinome C1, C2, ..., C28, de forma aleatória, sem qualquer relação lógica que possa os identificar.

4.2 ELABORAÇÃO DO INSTRUMENTO DE PESQUISA

A partir da delimitação dos participantes da pesquisa, partimos para a elaboração de um questionário composto por 6 questões abertas envolvendo a noção de Limite e Continuidade de Funções de uma variável real. A etapa seguinte consiste na aplicação dessa atividade.

Na primeira questão, exposta na Figura 1, solicitamos que o estudante expresse o significado da equação que contém o limite de uma função. A partir das respostas, esperamos identificar que dualidade pode estar presente no pensamento acerca do significado de limite de forma geral, sem necessariamente ser explícita uma função definida por uma lei de formação.

Figura 1: Questão 1

1- Explique com suas palavras o significado da equação $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Na segunda questão, exposta na Figura 2, solicitamos que o estudante calcule o limite, se o limite existir, de uma função algébrica. Nesta questão, objetivamos verificar como os discentes lidam com o limite de uma função que, recorrendo-se a uma substituição direta, resulta em uma indeterminação. Assim, pretendemos perceber que obstáculos podem estar sendo enfrentados na escolha por um método de resolução.

Figura 2: Questão 2

2- Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$, se o limite existir.

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Conforme a Figura 3, a terceira questão não é referente diretamente à noção de limite, mas com ela pretendemos observar quais são as possíveis dualidades relacionadas à dificuldade em expressar graficamente uma função por partes, uma vez que com este tipo de função é possível discutir a noção de continuidade.

Figura 3: Questão 3

3- Esboce o gráfico da função $\begin{cases} \frac{1}{\mathrm{x}+2}, se\ x \neq -2 \\ 1, se\ x = -2 \end{cases}$

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Na quarta questão (Figura 4), é solicitado que os estudantes encontrem o limite de uma função na qual a variável x assume valores muito grandes. Visamos notar qual a atitude discente diante de operações envolvendo o infinito e, com efeito, que dualidades relacionadas à obstáculos na resolução da questão podem estar sendo manifestadas.

Figura 4: Questão 4

4- Encontre $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+2} - x$

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Na quinta questão (Figura 5), a partir de uma função dada pela lei de formação e, explicitando o domínio, solicitamos que o discente discuta sobre a continuidade. O objetivo deste item é perceber que obstáculos os estudantes podem estar enfrentando diante de um viés local dado uma Função real.

Figura 5: Questão 5

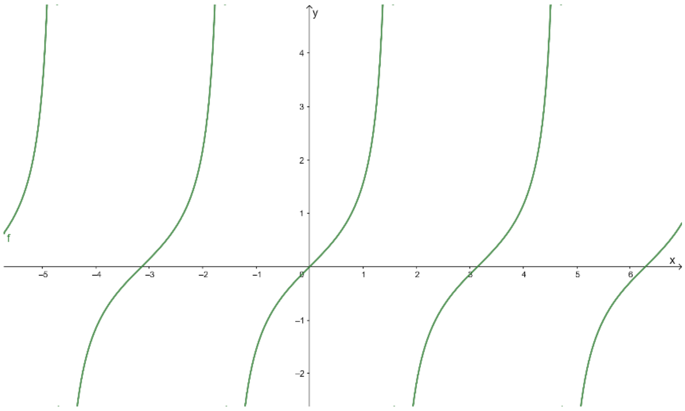
5- Seja $f\colon\ \mathbb{R}^+ - \{[0,1]\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$. f é contínua? Justifique.

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Por fim, na última questão (Figura 6), propomos identificar como se revelam as dualidades na discussão sobre continuidade a partir da função dada e do seu gráfico.

Figura 6: Questão 6

6- Abaixo encontra-se o gráfico da função $f(x) = \tan x$. O que podemos afirmar sobre a continuidade de f?



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

4.3 PROCEDIMENTOS PARA A ANÁLISE DOS DADOS

Após a etapa da coleta das resoluções da atividade, fizemos um levantamento quantitativo por questão, a fim de verificar a quantidade de respostas obtidas. Entre aqueles que conseguiram dar alguma resposta aos quesitos, procuramos identificar os caminhos percorridos até chegar à resposta final, os argumentos utilizados e então, os obstáculos epistemológicos e sua relação com as dualidades discutidas por Rezende (2003).

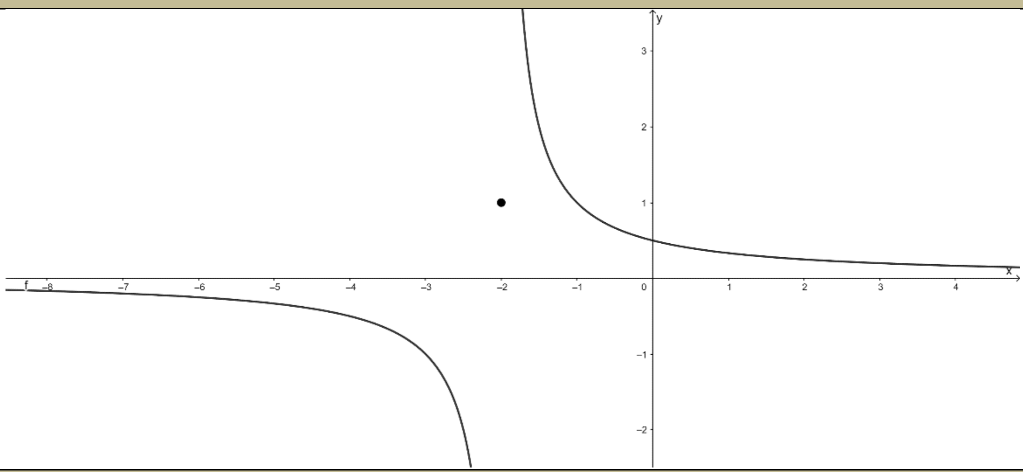
Para realizar a análise das produções dos estudantes, buscamos em Cury (2007) direcionamentos sobre as repostas dos alunos na perspectiva da análise de erros. Segundo a autora:

> Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si – que são pontuados em uma prova de avaliação da aprendizagem –, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem. (p. 60)

Nesse sentido, a partir dessa perspectiva, nos interessa nesta pesquisa verificar a maneira como os estudantes se apropriaram do conhecimento matemático para responder aos questionamentos. Portanto, a partir da produção escrita dos participantes, dificuldades de aprendizagem podem ser reveladas e, dentro dos objetivos deste trabalho, associadas aos obstáculos que as originaram e às possíveis dualidades presentes no desenvolvimento do Cálculo.

No quadro 1, apresentamos as respostas esperadas para cada questão. Essas respostas não são parâmetros definitivos para a análise das produções dos participantes, mas figuram-se como uma referência para a resolução de cada item.

Quadro 1: Respostas esperadas para cada questão

QUESTÃO 1: Explique com suas palavras o significado da equação $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.
De forma intuitiva, a equação $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ indica que $f(x)$ se aproxima de 5 quando x se aproxima de 2, por ambos os lados.
QUESTÃO 2: Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$, se o limite existir.
Observamos que a função $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ não está indefinida em $x = 2$. No entanto, podemos escrever $\frac{x^2+x-6}{x-2}$ como $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)}$. Logo, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x + 3$. Como chegamos em uma função polinomial e $f(x) = x + 3$ está definida em $x = 2$, podemos estimar o limite aplicando a propriedade da substituição direta, assim $\lim_{x \to 2} x + 3 = f(2) = 2 + 3 = 5$.
QUESTÃO 3: Esboce o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, se\ x \neq -2 \\ 1, se\ x = -2 \end{cases}$

QUESTÃO 4: Encontre $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+2} - x$

Como tanto $\sqrt{x^2+2}$ como x são grandes quando x se torna grande, é difícil perceber o que acontece com essa diferença. Manipulando algebricamente a função fornecida, podemos reescrever o limite da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2} - x = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - x\right)\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

Note que o denominador cresce indefinitivamente quando $x \to \infty$. Logo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0$$

QUESTÃO 5: Seja $f: \mathbb{R}^+ - \{[0,1]\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \frac{1}{x-1}$. f é contínua? Justifique.

De acordo com a notação especificada, observa-se que o domínio da função é $D = (1, \infty)$. Levando-se em conta este domínio, é fácil perceber que:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-1} = f(a), \forall a \in D$$

Logo, f é contínua em $D = (1, \infty)$.

QUESTÃO 6: Abaixo encontra-se o gráfico da função $f(x) = \tan x$. O que podemos afirmar sobre a continuidade de f?

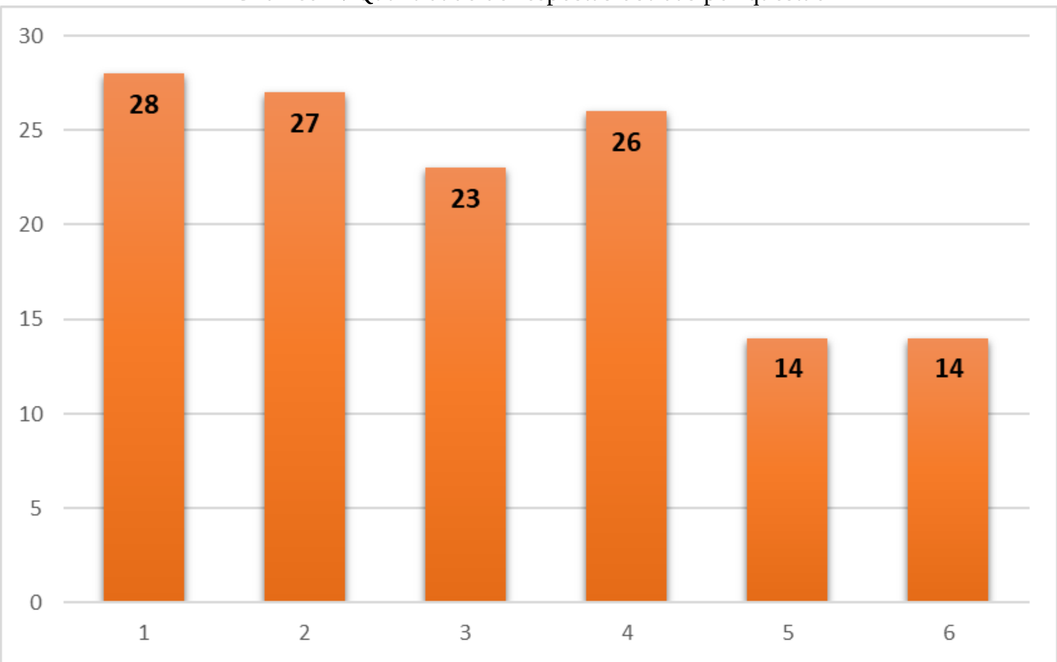
O domínio da função $f(x) = \tan x$ é $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Observa-se no gráfico que f não está definida nos pontos fora de D, constituindo assíntotas verticais. Portanto, pode-se afirmar que f é contínua em D.

Fonte: elaborado pelo autor (2022)

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO

Inicialmente, apresentamos no Gráfico 1 a quantidade de respostas obtidas entre os 28 participantes desta pesquisa.

Gráfico 1: Quantidade de respostas obtidas por questão



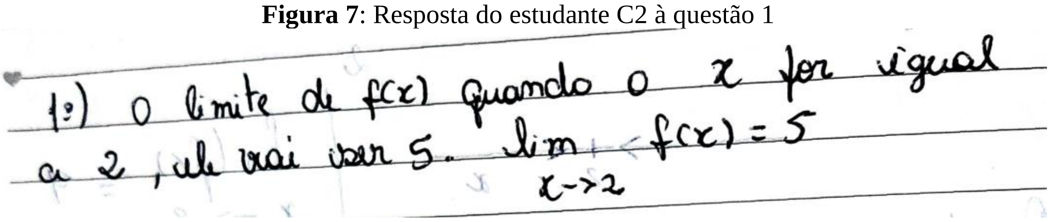
Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

As questões de 1 à 4 apresentaram alto índice de respostas produzidas, sendo a primeira questão respondida por 100% dos discentes. Por outro lado, as questões 5 e 6 tiveram as menores taxas de respostas obtidas, com apenas metade do número de participantes. A seguir, analisamos as respostas dadas por cada questão.

5.1 ANÁLISE DA QUESTÃO 1

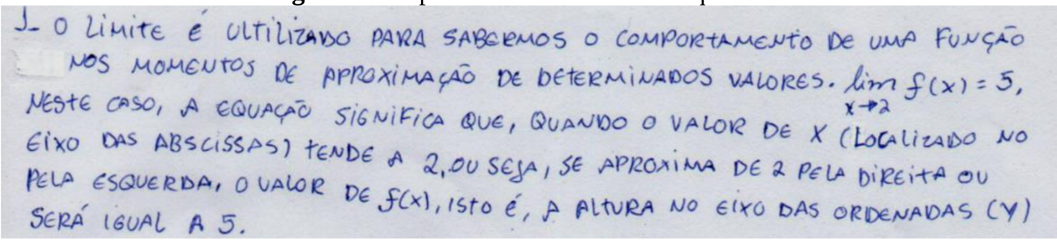
Ao expressar a ideia sobre limite através da expressão dada, alguns estudantes manifestaram concepções relacionadas a uma perspectiva estática. Nas Figuras 7 e 8, apresentamos um recorte das respostas fornecidas pelos estudantes C2 e C16, nessa ordem.

Figura 7: Resposta do estudante C2 à questão 1



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Figura 8: Resposta do estudante C16 à questão 1

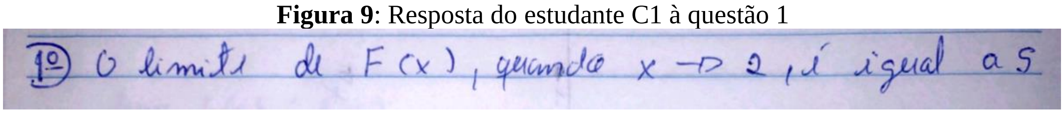

1- O LIMITE É ULTILIZADO PARA SABERMOS O COMPORTAMENTO DE UMA FUNÇÃO NOS MOMENTOS DE APROXIMAÇÃO DE DETERMINADOS VALORES. $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$, NESTE CASO, A EQUAÇÃO SIGNIFICA QUE, QUANDO O VALOR DE X (LOCALIZADO NO EIXO DAS ABSCISSAS) TENDE A 2, OU SEJA, SE APROXIMA DE 2 PELA DIREITA OU PELA ESQUERDA, O VALOR DE $f(x)$, ISTO É, A ALTURA NO EIXO DAS ORDENADAS (Y) SERÁ IGUAL A 5.

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Percebemos que esse olhar estático não acontece apenas no eixo das abcissas, como também no eixo das ordenadas, o que acontece na resposta do aluno C16, que afirma ser y=5 “a altura no eixo das ordenadas” quando x se aproxima de 2. Acreditamos que essa concepção esteja relacionada a um obstáculo relacionado à dualidade variabilidade-permanência na noção de função, que em sua introdução é vista sob uma correspondência estática de entre valores de x e y (REZENDE, 2003).

Outros estudantes, a exemplo de C1 (Figura 9), apenas interpretam a expressão em sua tradução literal:

Figura 9: Resposta do estudante C1 à questão 1

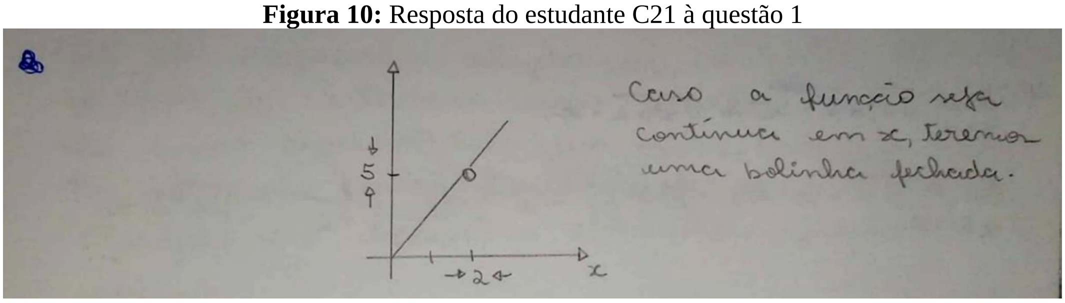

1º O limite de F(x), quando x → 2, é igual a 5

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Essa tradução literal parece nos indicar a dificuldade discente em atribuir um significado para o limite. Acreditamos que, na tentativa de simplificar expressões polinomiais para poder aplicar a substituição direta do ponto de aproximação, a noção de limite pode ser confundida com a imagem da função naquele ponto.

Outras formas de se expressar para responder à primeira questão puderam ser notadas na análise das respostas dadas pelos estudantes. O participante C21 lançou mão da representação da gráfica (Figura 10) para apresentar a noção de limite:

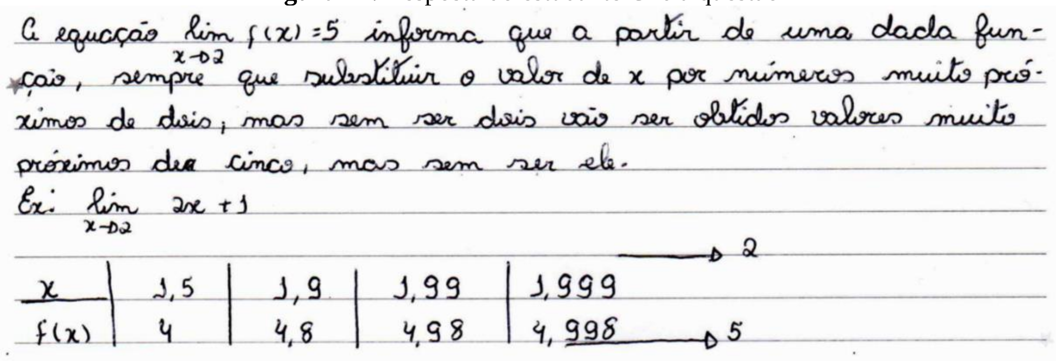
Figura 10: Resposta do estudante C21 à questão 1



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

É interessante notar que C21 leva em consideração o fato de que a função não está possivelmente definida em x=2, mas afirma que isso acontece caso a função seja contínua nesse ponto. Por sua vez, C26 (Figura 11) recorre à atribuição de valores muito próximos à 2, de forma a obter valores muito próximos à 5, demonstrando uma percepção dinâmica do conceito de limite:

Figura 11: Resposta do estudante C26 à questão 1



A equação $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ informa que a partir de uma dada função, sempre que substituir o valor de x por números muito próximos de dois, mas sem ser dois vão ser obtidos valores muito próximos de cinco, mas sem ser ele.

Ex: $\lim_{x \to 2} 2x + 1$

$\longrightarrow 2$

x	1,5	1,9	1,99	1,999
f(x)	4	4,8	4,98	4,998 $\longrightarrow 5$

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

É válido notar que o estudante considerou o limite em apenas um dos lados, com valores menores do que 2, sem nada afirmar sobre os valores muito próximos de 2, mas maiores do que ele. Chama-se atenção para o fato de que o participante enfatiza que os valores se aproximam, “sem ser dois”, obtendo-se valores muito próximos de 5, “mas sem ser ele”. Assim, deixa-se dúvidas se o limite pode ser atingido ou não, numa interpretação de que se o ponto de aproxima sempre, em conformidade com os resultados obtidos por Cornu (1981, apud CELESTINO, 2008) e Messias e Brandemberg (2018).

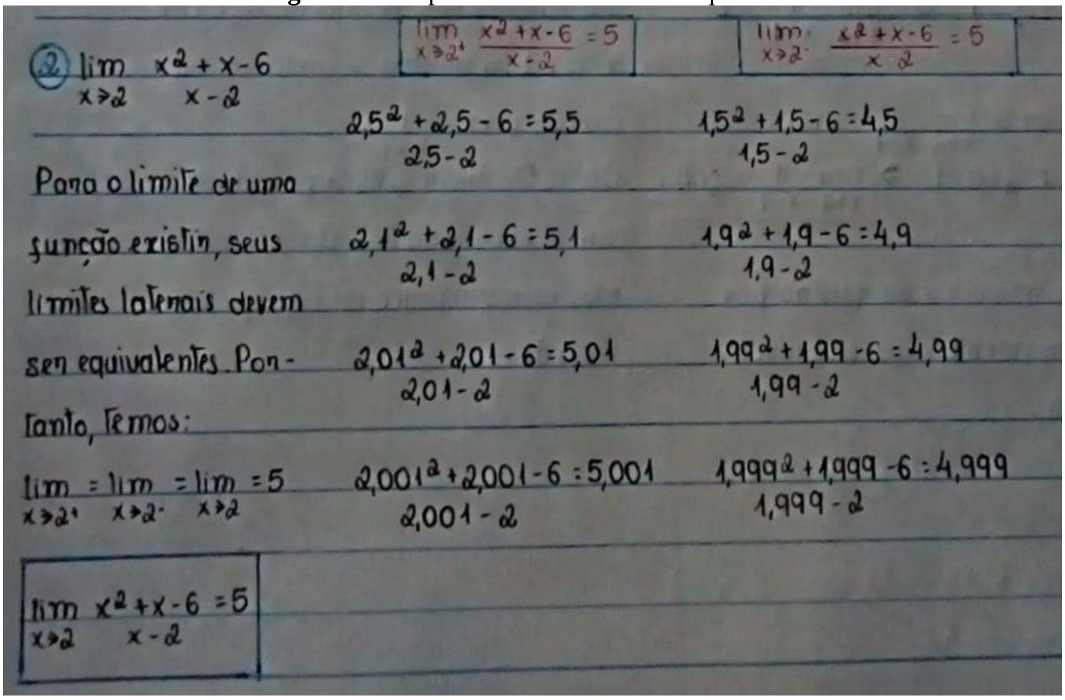
O que se destaca, nesta primeira questão é que, em maior parte, a dualidade variabilidade-permanência se manifesta quando os alunos se debruçam sobre a noção intuitiva de limite, em alguns casos demonstrando-se o limite como atribuição de um valor fixo, e não como o comportamento da função nas vizinhanças de um ponto dado, sendo certamente um vestígio da relação estática entre x e y executada nas funções (REZENDE, 2003).

5.2 ANÁLISE DA QUESTÃO 2

A segunda questão muito possivelmente é familiar aos participantes, fato este evidenciado pela alta taxa de respostas dadas que, em sua maioria, foram obtidas a partir da manipulação algébrica para “fugir” da indeterminação.

Destaca-se o caminho para encontrar o limite feita pelos participantes C19 (quadro 1) e C13 (Figura 12), que estimaram para quais valores f(x) se aproximava, à medida que x se aproximava de 2. Devido à falta de nitidez do documento digitalizado por C19, reproduzimos sua resolução no Quadro 1.

Figura 12: Resposta do estudante C13 à questão 2



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

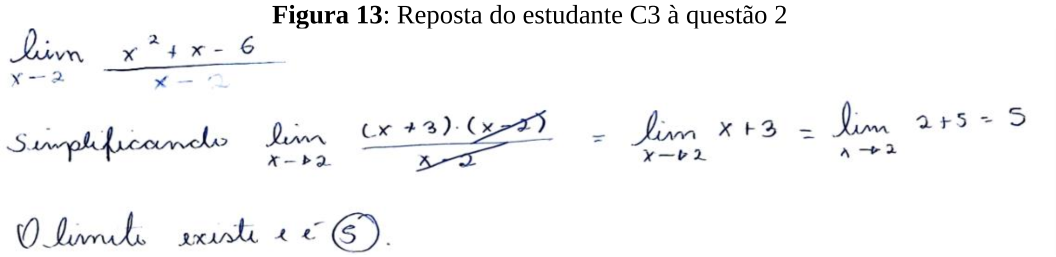
Quadro 2: Resposta do estudante C19 à questão 2

x	$\frac{x^2+x-6}{x-2}$	Resultado
1,99	$\frac{1{,}99^2+1{,}99-6}{1{,}99-2}$	4,99
2	$\frac{2^2+2-6}{2-2}$	$\nexists$
2,01	$\frac{2{,}01^2+2{,}01-6}{2{,}01-2}$	5,01

Fonte: acervo da pesquisa (2022)

É pertinente ressaltar que C13 e C19 também escolheram caminho semelhante para a primeira questão, utilizando aproximações. As demais respostas, em sua maioria corretas, foram obtidas através da fatoração de polinômios, como vemos na Figura 13:

Figura 13: Reposta do estudante C3 à questão 2



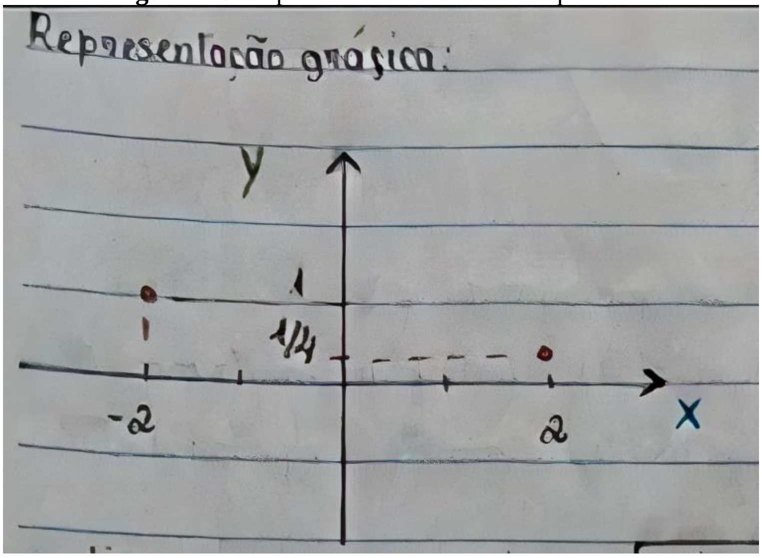
Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Portanto, nesta questão, percebemos que grande parte dos estudantes conseguiu encontrar a resposta correta. Não identificamos diretamente um obstáculo e, com efeito, uma dualidade relacionada a este item, mas possivelmente o uso recorrente da substituição direta pode-se mostrar como um entrave ao significado de limite de uma função, como visto na questão 1.

5.3 ANÁLISE DA QUESTÃO 3

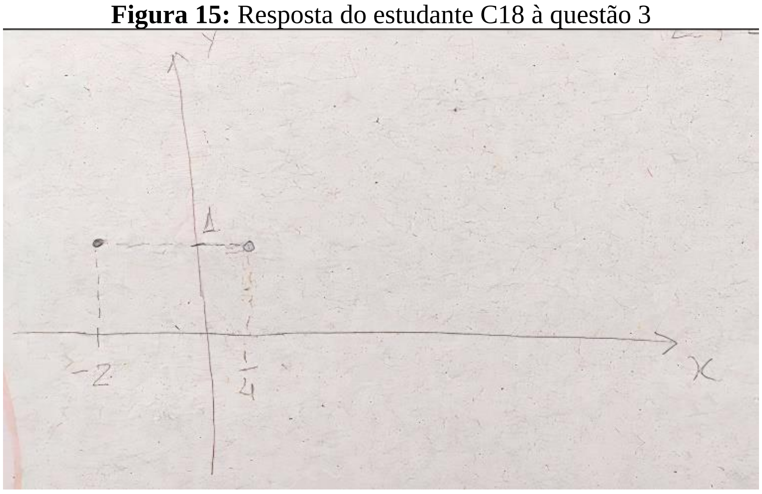
Na análise da terceira questão, percebemos a dificuldade dos estudantes em lidar graficamente com uma função definida por partes. Muitos recorrem à atribuição de pontos notáveis para o esboço do gráfico, mesmo assim, encontram dificuldades para compreender o comportamento da função entre esses pontos. Observa-se essa situação nas Figuras 14, 15 e 16:

Figura 14: Resposta do estudante C13 à questão 3



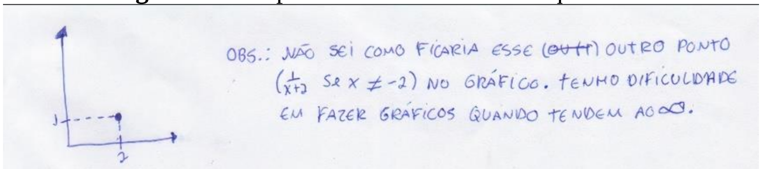
Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Figura 15: Resposta do estudante C18 à questão 3



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Figura 16: Resposta do estudante C16 à questão 3



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Consoante à observação de Zuffi e Pacca (2008), a relação entre o discreto e contínuo se mostra confusa, evidente na escolha dos pontos para o esboço do gráfico de C13, C18 e C16.

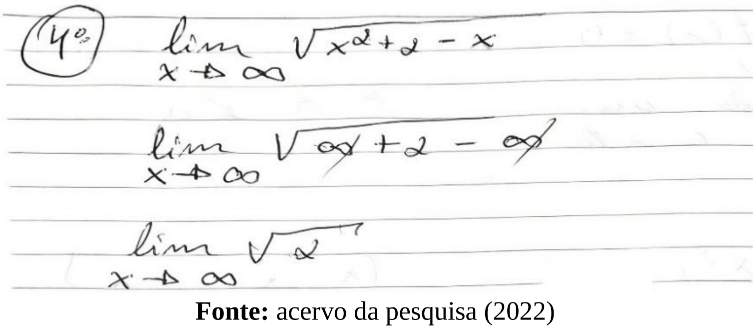
Além disso, uma relação entre as dualidades discreto-contínuo e finito-infinito pode ser observada no comentário do estudante C16, quando o mesmo afirma que tem dificuldade elaborar gráficos "quando tendem ao infinito" e aponta que não sabe como seria o gráfico em outro "ponto", ao se referir à parte da função definida como $\frac{1}{x+2}$ quando $x \neq 2$.

5.4 ANÁLISE DA QUESTÃO 4

Na quarta questão, notamos que grande parte da dificuldade dos estudantes tem sido lidar com limites envolvendo radicais. Como tanto $\sqrt{x^2 - 2}$ quanto x são grandes quando x se torna grande, é necessário manipular algebricamente a função. Ainda assim, mesmo entre aqueles que demonstram certa familiaridade com manipulações algébricas, operam incorretamente com a noção de limites no infinito.

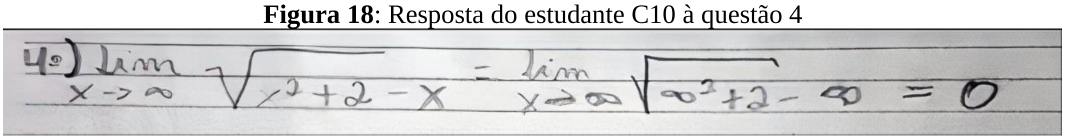
Nas Figuras 17 e 18, os estudantes C4 e C10, respectivamente, substituem a variável independente pelo infinito, num tratamento semelhante àquele dado aos números.

Figura 17: Resposta do estudante C4 à questão 4



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

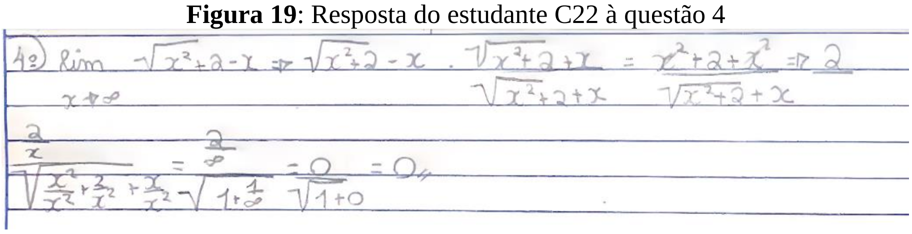
Figura 18: Resposta do estudante C10 à questão 4



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Caso similar ocorreu com o estudante C22 (figura 19), que multiplicou o numerador e o denominador pelo conjugado radical, mas, ao fim do processo, substituiu o x pelo infinito:

Figura 19: Resposta do estudante C22 à questão 4



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

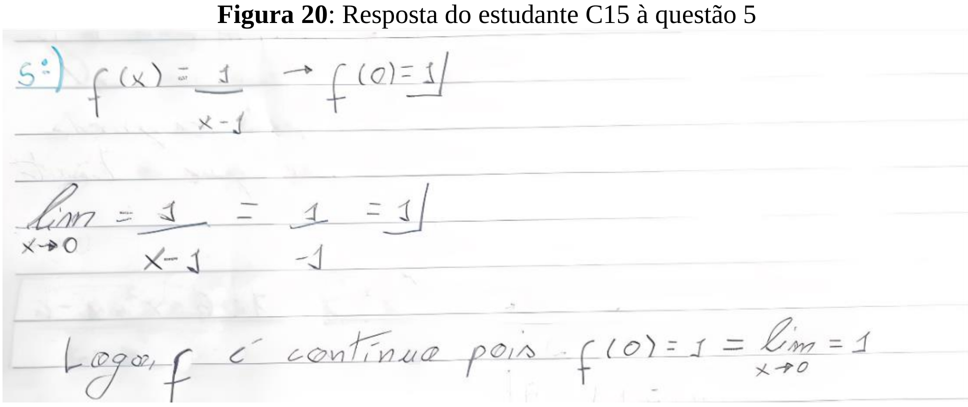
Esse tratamento de resolver indeterminações utilizando uma “álgebra do infinito”, é discutido por Rezende (2003), quando este afirma ser a dualidade finito-infinito a origem de grandes obstáculos no Cálculo. Essa visão de Rezende fica clara, ao observarmos que os caminhos utilizados pelos estudantes nos limites no infinito foram análogos aqueles utilizados para resolver a segunda questão.

5.5 ANÁLISE DA QUESTÃO 5

A quinta questão gerou grande dificuldade entre os estudantes, devido à notação $f\colon \mathbb{R}^* - \{[0,1]\} \longrightarrow \mathbb{R}$, que especificava o domínio da função fornecida. Entendemos que essa dificuldade tem origem na maneira como a função é apresentada, muitas vezes se utilizando de uma lei de formação, geralmente polinomial, que é contínua em toda parte. Uma função racional, por sua vez, é contínua em seu domínio.

Na Figura 20, destacamos a resposta do aluno C15 que, semelhante a outros participantes que responderam à questão, não compreendeu o domínio da função dada, ademais, concluindo que a mesma é contínua. Para isso, recorre à definição de continuidade – f é contínua em um número a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ – mas, ao mesmo tempo, utiliza um número fora do domínio de f.

Figura 20: Resposta do estudante C15 à questão 5



Fonte: acervo da pesquisa (2022)

Assim, a dificuldade em interpretar a notação se revela como uma dificuldade conceitual. Não identificamos nesta questão indícios da dualidade local-global, ou de outra dualidade, descrita por Rezende (2003).

5.6 ANÁLISE DA QUESTÃO 6

Na última questão da pesquisa, também trabalhamos a noção de continuidade, desta vez utilizando uma representação gráfica da função $f(x) = \tan x$, sem especificar o seu domínio. Como na questão 5, parte considerável dos participantes não conseguiu encontrar uma resposta. Entre aqueles que conseguiram, é perceptível que os estudantes discutiram a continuidade sem levar em consideração o domínio, com um olhar global sobre a função.

No Quadro 2, trazemos um recorte de algumas respostas dadas nesta questão:

Quadro 3: Registro de respostas obtidas na questão 6

Estudante	Resposta
C4	Analisando o gráfico, vejo que as linhas que cruzam o eixo x seguem uma sequência de 3 em 3 e são paralelas entre si.
C10	Não é contínua pois o gráfico está incompleto
C21	Eu acho que f não é contínua em x porque não segue o padrão das outras funções.
C24	A partir desse gráfico podemos afirmar que a função não é contínua.
C28	A função f segue caminhos onde a função não existe, são chamados de assíntotas.

Fonte: elaborado pelo autor (2022)

O estudante C24 apenas afirma que a função não é contínua a partir da visualização do gráfico. Respostas semelhantes a essa foram encontradas em outros participantes, o que entendemos ser causado por um obstáculo relacionado à dualidade local-global (REZENDE, 2003; OLIMPIO JUNIOR, 2006).

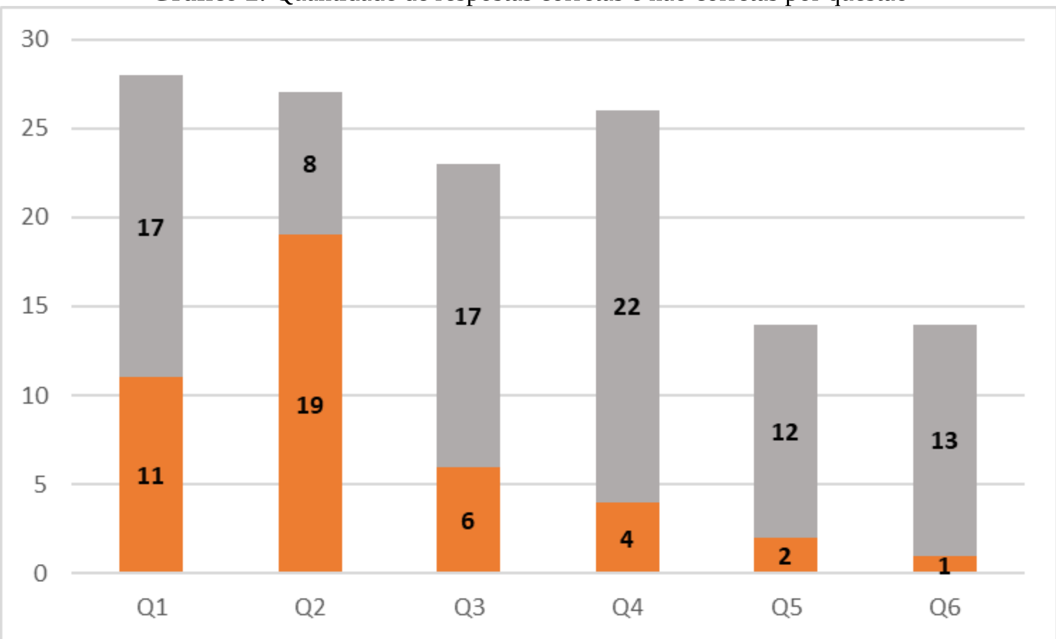
Já os estudantes C4, C10 e C21 têm interpretações semelhantes, e demonstram não conseguir identificar a continuidade em funções diferentes daquelas com comportamento gráfico “padrão”. Faz-se relevante observar a resposta dada por C28, o qual afirma que a função segue caminhos onde ela não está definida, sem nada afirmar sobre sua continuidade. Ao mencionar que esses caminhos são chamados de assíntotas, infere-se que o estudante tem consciência de que a função não está definida em certos pontos, o que poderia ser utilizado como argumento para discutir a continuidade de f.

Olimpio Junior (2006) enfatiza que esse tratamento global é um obstáculo epistemológico à noção de continuidade, surgindo então dificuldades a interpretar localmente as funções no Ensino Superior. Como pontua o autor, na etapa da escolarização básica, as funções discutidas são em sua maioria polinomiais, com um tratamento global em sua representação gráfica.

5.7 ANÁLISE FINAL

No Gráfico 2, expomos a quantidade de respostas corretas e não corretas obtidas dentre os participantes que conseguiram responder aos itens do questionário. A variável “respostas corretas” está sinalizada pela cor laranja e refere-se àqueles que responderam corretamente ao item, sem apresentar erros ou indícios de dificuldades de qualquer natureza. Por sua vez, a variável “respostas não corretas”, indicado pela cor cinza, faz referência aos participantes que não apresentaram a resposta correta para o item, como também aos que apresentaram desvios durante a resolução, sejam eles conceituais ou de ordem epistemológica.

Gráfico 2: Quantidade de respostas corretas e não corretas por questão



Fonte: elaborado pelo autor (2022)

Como observado acima, o maior índice de acertos foi observado na questão 2. Apesar de um alto número de respostas dadas nas questões de 1 à 4, pudemos verificar muitos erros cometidos pelos estudantes ao se referirem ao limite de uma função. Na segunda questão, os erros existentes são oriundos da dificuldade conceitual em simplificações de expressões algébricas.

As questões 1, 3 e 4, por outro lado, demonstram que os erros cometidos estão mais ligados a obstáculos ao conhecimento de função na perspectiva do Cálculo, a exemplo do tratamento estático dado às funções – dualidade variabilidade-permanência – e a noção de infinito fincada no olhar algébrico – dualidade finito-infinito –, do que propriamente nas dificuldades conceituais referentes ao Cálculo.

Observamos que as questões 5 e 6, além do baixo número de repostas obtidas, também apresentam alto índice de respostas não corretas. Na questão 5, dificuldades conceituais puderam ser notadas, visto que grande parte do número de estudantes não conseguiu afirmar nada sobre a continuidade da função por não entenderem a notação apresentada.

O conhecimento anterior de temas como intervalos reais, conjuntos numéricos, relações e funções, vista na escolarização básica, se mostra então resistente, figurando um obstáculo à aprendizagem de limite e continuidade, o que pode ser observado também na questão 3 – a dificuldade em esboçar o gráfico de uma função definida por partes – bem como na questão 6, na qual a representação gráfica da função gerou entraves e erros cometidos nas respostas dos participantes desta pesquisa, o que aponta a manifestação da dualidade local-global.

Assim, pudemos constatar que existem obstáculos de natureza epistemológica à noção de Limite e Continuidade relacionados à algumas dualidades essenciais expostas por Rezende (2003). Essas dualidades nos permitiram observar que não apenas dificuldades “técnicas” como fatoração de polinômios, conhecimento de conjuntos, esboço de gráficos, entre outras, se fazem presentes na aprendizagem de cálculo. A maneira como esses conhecimentos foram construídos também geram barreiras enfrentadas pelos discentes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A reflexão sobre a aprendizagem de Limite e Continuidade no Cálculo deve ser levada em consideração por fatores além daqueles relacionados à habilidade técnica de resolver limites de funções algébricas ou de identificar as condições necessárias para uma função ser contínua. Sobre a “falta de base” na aprendizagem de Cálculo, retomamos a indagação de Rezende (2003) mencionada nas considerações iniciais desta pesquisa: *de que base se está falando?*

Em verdade, pudemos verificar que é através de obstáculos epistemológicos que muitas dificuldades em aprender Cálculo se originam, e tais dificuldades podem estar relacionadas a dualidades. Isso não significa que apenas esse tipo de dificuldade está presente no processo de aprendizagem, mas expressões como “infinitésimos”, “infinitamente grande”, “se aproxima de” ou “contínua localmente”, são ainda obscuras à realidade dos estudantes recém-ingressos em um curso de Matemática. Pudemos, então, obter respostas as nossas indagações colocadas no início da pesquisa, observadas na análise e discussão da atividade proposta aos estudantes.

Acreditamos que os resultados presentes neste trabalho muito contribuirão para a reflexão sobre o ensino de Cálculo por parte dos docentes, bem como pode servir como referência para os futuros professores de Matemática no que concerne a uma aprendizagem mais significativa. Pretendemos expandir nosso trabalho para outros temas como Derivada, Séries e Integração, em momento oportuno. Portanto, como sugestão, outras pesquisas relacionadas aos obstáculos epistemológicos revelados na aprendizagem de Cálculo relacionados a dualidades podem ser realizadas, haja vista o rico campo de estudo que o Cálculo possibilita.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico:** Contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto: 1996.

BITTENCOURT, J. Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 5, n. 6, p.13-17, 1998.

BROLEZZI, A. C. Raízes do cálculo na Grécia antiga. **Revista da pesquisa & pós-graduação**, [s. l.], ano 1, v. 1, n. 1, p. 38-41, 1999. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~brolezzi/publicacoes/grecia.pdf. Acesso em: 18 fev. 2022.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limites:** imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior. Tese de Doutorado, PUC-SP, São Paulo, 2008.

COSTA, L. V. O. **Números Reais no Ensino Fundamental:** Alguns Obstáculos Epistemológicos. 2009. 368 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

CURY, H. N. **Análise de erros:** O que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados:** a matemática no início do superior. 2003. 407 f. Dissertação (Doutorado) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003. Disponível em: https://run.unl.pt/bitstream/10362/78/1/domingos_2003.pdf. Acesso em: 21 fev. 2022.

GUTIÉRREZ-FALLAS, L. F.; HENRIQUES, A. A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. **Quadrante**, [S. l.], v. 26, n. 1, p. 25–49, 2017. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/22945. Acesso em: 27 fev. 2022.

IGLIORI, S. B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. In: Machado, S. D. A. et al. (orgs.). **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 89-114, 1999.

MESSIAS, M. A. de V. F.; BRANDEMBERG, J. C. O que estudantes conhecem sobre limite e continuidade?” – uma discussão sobre diferentes compreensões relacionadas a esses conceitos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 5, n. 15, p. 6–18, 2018. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/854. Acesso em: 20 fev. 2022.

MORAES, M. S. F. **Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função e seu ensino e aprendizagem**. 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013. Disponível em: http://repositorio.ufpa.br/bitstream/2011/8567/6/Dissertacao_EstudoImplicacoesObstaculos.pdf. Acesso em: 20 fev. 2022.

OLIMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática:** uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. 273 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e Seus Fundamentos Filosófico-Científicos, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **BOLETIM GEPEM**, [s. l.], ed. 61, p. 125-137, 2012. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat//files/2011/09/Produto-educacional-Marcos-Raad.pdf. Acesso em: 15 jan. 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**. Programa dos componentes curriculares por período**. [S. l.], 2016. Disponível em: https://www.ufpe.br/documents/39114/0/PPC+2016+-+ementas2.pdf/46094a98-ec5d-4142-98b7-ea972fc41570. Acesso em: 12 jan. 2022.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. 450 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2003. Disponível em: http://flacso.org.br/files/2017/08/WANDERLEY_REZENDE.pdf. Acesso em: 10 jan. 2022.

SILVA, M. H. M. Análise histórica do conceito de função. **Caderno de Licenciatura em Matemática**, [s. l.], ano 2, v. 2, p. 29-33, 1996.

SIQUEIRA, F. K. S.; LORIN, J. H. Obstáculos epistemológicos do conceito de infinito identificados em alunos ingressantes e concluintes do curso de matemática. **RPEM**, Campo Mourão, v. 9, ed. 19, p. 555-577, 2020.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem matemática da professores do Ensino Médio p.7-28. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 8, n. 1-2, 2009. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646712. Acesso em: 19 fev. 2022.