UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
MATEMÁTICA-LICENCIATURA

RODOLFO TEMOTEO DO NASCIMENTO

UM OLHAR SOBRE OS ASPECTOS ELEMENTARES E AVANÇADOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO

CARUARU
2021

RODOLFO TEMOTEO DO NASCIMENTO

UM OLHAR SOBRE OS ASPECTOS ELEMENTARES E AVANÇADOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Profº. Dr. José Dilson Beserra Cavalcanti
Coorientador: Profº. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos

Caruaru
2021

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

N244o Nascimento, Rodolfo Temoteo do.
Um Olhar sobre os aspectos elementares e avançados do conceito de função. / Rodolfo Temoteo do Nascimento. – 2021.
53 f. ; il. : 30 cm.

Orientador: José Dilson Beserra Cavalcanti.
Coorientador: Marcílio Ferreira dos Santos
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2021.
Inclui Referências.

- Funções. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Professores – Formação. I. Cavalcanti, José Dilson Beserra (Orientador). II. Santos, Marcílio Ferreira dos (Coorientador). III. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2021-016)

RODOLFO TEMOTEO DO NASCIMENTO

UM OLHAR SOBRE OS ASPECTOS ELEMENTARES E AVANÇADOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: _____05_/__04__/__2021_

BANCA EXAMINADORA

____
Profº. Dr. José Dilson Beserra Cavalcanti (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profº. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos (Coorientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profº Drº Marcos Luiz Henrique (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profº. Ms. Leonardo Augusto de Lemos Batista (Examinador Externo)
ASCES-UNITA – Centro Universitário Tabosa de Almeida

Dedico esse trabalho aos meus pais Maria Elizabete e João Bosco, aos meus irmãos João Murilo e João Pedro, à minha irmã Michele e também à minha grande companheira a minha noiva Adriana.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por todo o apoio e incentivo durante toda a minha vida;

À minha noiva por seu companheirismo e incentivo durante estes quase dois anos de elaboração do TCC;

Aos meus orientadores José Dilson e Marcílio dos Santos pelas instigantes conversas, orientações e direcionamentos durante o processo de elaboração e escrita deste trabalho;

Às professoras Simone Queiroz e Cristiane Rocha pelas contribuições para a elaboração deste trabalho durante as disciplinas de Metodologia da Pesquisa Educacional e Trabalho de Conclusão de Curso I, respectivamente;

Aos professores presentes na banca de avaliação deste trabalho;

À todos os meus professores da Educação Básica por todo o incentivo e orientação em meus estudos. Em especial, aos meus professores de Matemática que despertaram em mim o amor pela Matemática e por seu ensino;

Aos meus companheiros da turma de 2016.1 pela incrível jornada que tivemos nestes anos todos;

Aos meus companheiros de viagem Calçado - Caruaru que tornaram as longas viagens extremamente divertidas e menos cansativas.

“Na Matemática nunca sabemos do que estamos falando nem se é verdade o que estamos dizendo” - Bertrand Russel

RESUMO

Este estudo teve como finalidade analisar o conceito de função a partir da dialética elementar x avançado. Nesse sentido, buscamos desenvolver um estudo teórico através de uma análise conceitual. Iniciamos pelo estudo dos aspectos históricos e epistemológicos do desenvolvimento do conceito função mediante uso das noções de atos de entendimento e obstáculos epistemológicos. Em seguida, analisamos as concepções/definições das funções sob a perspectiva da dialética elementar x avançado. Os resultados dessas análises nos permitiram refletir acerca da dupla descontinuidade entre a Matemática escolar e a Matemática universitária apontada por Felix Klein. Dessa forma, finalizamos nosso estudo apresentando algumas considerações a respeito da formação matemática nas licenciaturas por meio da articulação da discussão da dupla descontinuidade e da dialética elementar x avançado.

Palavras-chave: Funções. Matemática Elementar. Formação de Professores.

ABSTRACT

This study aimed to analyze the concept of function from the elementary x advanced dialectic. In this sense, we seek to develop a theoretical study through a conceptual analysis. We begin by studying the historical and epistemological aspects of the development of the concept of function using the notions of acts of understanding and epistemological obstacles. Then, we analyze the conceptions / definitions of the functions from the perspective of elementary x advanced dialectics. The results of these analyzes allowed us to reflect on the double discontinuity between school mathematics and university mathematics pointed out by Felix Klein. Thus, we conclude our study by presenting some considerations regarding mathematical training in undergraduate courses through the articulation of the discussion of double discontinuity and elementary x advanced dialectics.

Keywords: Functions. Elementary Mathematics. Teacher training

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As funções no Ensino Superior representam um conceito-chave para os fundamentos matemáticos de diversos cursos de áreas como Ciências Exatas e da Terra e Ciências Sociais, por exemplo. Ao longo das últimas décadas, esse conceito tem se consolidado também como um dos principais conteúdos da Educação Básica. O fato é que as funções são importantes tanto para modelar fenômenos que são estudados pelas diversas Ciências quanto para compreender fenômenos do cotidiano, assumindo, assim, um papel relevante para a formação técnico-científica e crítico-cidadã dos estudantes.

Os cursos de Licenciatura em Matemática fazem parte do Ensino Superior, mas, imperiosamente, precisam considerar o ensino de Matemática na Educação Básica, incluindo seus conteúdos, uma vez que estes cursos visam formar professores da disciplina Matemática da Educação Básica.

Entendemos, portanto, que talvez seja necessário considerar uma certa peculiaridade ao pensar o ensino de conceitos como o de funções. Por um lado, há diversas disciplinas como Álgebra Linear, Análise, Cálculo Diferencial e Integral, nas quais as funções são abordadas de um ponto de vista avançado. Por outro lado, tratando-se de um curso de formação de professores, há de se levar em conta também um ensino que proporcione um ponto de vista elementar.

Talvez seja por estas razões que esse conceito também se destaca como objeto de pesquisa fecundo e necessário nos estudos do campo da Educação Matemática. Sobre essa dupla perspectiva de abordagem do conceito de função no Ensino Superior e na Educação Básica, Olimpio Junior (2007) sinaliza no Ensino Superior que o foco se daria na dinâmica *processo-objeto* enquanto que, na Educação Básica, o foco seria nas diferentes *representações* do conceito de função.

Apesar de considerarmos relevantes estas vias de pesquisa, em nosso estudo optamos por focar na compreensão do conceito de função a partir da noção de **aspectos elementares de um conceito matemático**, segundo a perspectiva do matemático alemão Felix Klein[1] (1849,1925). Esta noção foi apresentada em seu

---

[1] Felix Klein foi um proeminente matemático alemão do final do século XIX. Publicou trabalhos em Geometria não-Euclidiana, Teoria das Funções, dentre outras áreas da Matemática e da Física. Klein possuía grande interesse no ensino de Matemática e escreveu livros, e proferiu palestras a respeito desta temática no início do século XX.

famoso livro *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*[2], publicado em 1908.

Consideramos este tipo de abordagem fecunda, podendo trazer importantes contribuições para a Educação Matemática. Rangel (2012), por exemplo, argumenta que essa perspectiva dos aspectos elementares “ofereceu uma forma particular de observar três questões que permeiam a prática do professor: ‘*O que ensinar?’*, ‘*Por que ensinar?’* e ‘*Como ensinar?*’ [...]” (p. 231, grifos do autor). Sendo assim, compreender os aspectos elementares do conceito de função pode contribuir com elementos para refletir de maneira mais aprofundada aspectos relacionados ao ensino deste conceito que é tão importante para a Matemática da Educação Básica, especialmente no Ensino Médio.

Nosso estudo teve como objetivo geral investigar o conceito de função a partir da dialética elementar x avançado. A partir deste objetivo geral estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (1) Investigar o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função; (2) Analisar os atos de entendimento e os obstáculos epistemológicos do desenvolvimento das funções; (3) Analisar os aspectos elementares e avançados do conceito de função.

No Capítulo 2 tratamos da noção de *Matemática Elementar* segundo a perspectiva do matemático alemão Felix Klein. Além disso, abordamos os conceitos de *dupla descontinuidade*, *translação histórica* e *hysteresis*, conceitos também propostos por Felix Klein.

No Capítulo 3 abordamos o desenvolvimento histórico e epistemológico das funções. Tratamos do seu processo de sistematização e das diversas definições propostas desde o século XVIII por Johann Bernoulli até a definição atual do conceito de função proposta pelo grupo Bourbaki, em meados do século XX.

No Capítulo 4 analisamos o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função a partir das noções de *atos de entendimento* e *obstáculos epistemológicos*.

No Capítulo 5 analisamos quais conceitos matemáticos podem ser considerados *aspectos elementares* (segundo a perspectiva de Klein) *e avançados do conceito de função*.

---

[2] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, no original em alemão, *Elementary Mathematics from an Advanced Point*, nas primeiras traduções para o inglês e *Elementary Mathematics from a Higher Point* em sua tradução mais recente.

No Capítulo 6 trazemos algumas reflexões e questionamentos a respeito da formação matemática na licenciatura a partir da problemática da *dupla descontinuidade na formação do professor* e a partir da dialética *elementar x avançado* em Matemática.

Os capítulos 3 e 4 tratam do primeiro objetivo específico deste trabalho (Investigar o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função), o capítulo 4 também trata do nosso segundo objetivo específico (Analisar os atos de entendimento e os obstáculos epistemológicos do desenvolvimento das funções). Quanto aos capítulos 2, 5 e 6, eles dizem respeito ao nosso terceiro e último objetivo específico (Analisar os aspectos elementares e avançados do conceito de função).

1.1 Aspectos Metodológicos

Nosso trabalho trata-se de um *estudo teórico*. Este tipo de estudo, conforme Gohier (1998), é caracterizado pela “intenção de conhecer, de compreender, de explicar as características de um objeto de estudo ou de um fenômeno do mundo [...]” (p. 271 apud CAVALCANTI, 2015, p. 22).

Além disso, nosso estudo é de natureza qualitativa e de cunho descritivo. É qualitativa, pois trata-se de um processo de “reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo em seu contexto histórico e/ou segundo sua estruturação” (OLIVEIRA, 2011, p. 28). É descritivo, pois, segundo Oliveira (2011), ele nos permite compreender o problema de forma aprofundada a partir de diversos aspectos.

Em nosso trabalho desenvolvemos uma *análise conceitual* dos aspectos elementares e avançados do conceito de função. A análise conceitual consiste em “... encontrar o sentido e as possibilidades de aplicação de um conceito ou uma noção, identificando os constituintes do campo semântico deste conceito ou dessa noção e suas interações com outros campos” (VAN DER MAREN, 1996, p. 139 apud CAVALCANTI, 2015, p. 30).

A análise conceitual pode ser desenvolvida de diversas formas. Em nosso trabalho, adaptamos o esquema desenvolvido por Cavalcanti (2015) em sua tese de doutorado[3]. Cavalcanti (2015) recorre, em sua análise conceitual, aos conceitos de *visão sincrética*, *visão analítica* e *visão sintética*:

> A visão sincrética corresponde à leitura de reconhecimento e à leitura seletiva. A visão analítica diz respeito à leitura crítico-reflexiva dos textos relacionados. A visão sintética, por sua vez, corresponde à leitura interpretativa, constituindo-se como a etapa final do método de leitura científica. (p. 31)

Em nosso trabalho também recorremos a estes conceitos para o desenvolvimento da análise conceitual. Os capítulos 2 e 3 correspondem à visão sincrética. Nestes capítulos abordamos a noção do elementar matemático de Felix Klein e o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função. Os Capítulos 4 e 5 correspondem à visão analítica. Nestes capítulos analisamos o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função e analisamos quais conceitos matemáticos podem ser considerados elementares e avançados em relação ao conceito de função. Por fim, o Capítulo 6 corresponde à visão sintética. Nele abordamos a formação matemática na licenciatura a partir da noção de dupla descontinuidade e da dialética elementar x avançado.

---

[3] CAVALCANTI, J. D. B. **A noção de relação ao saber:** história e epistemologia, panorama do contexto francófono e mapeamento de sua utilização na literatura científica brasileira. 2015. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências) - Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

2 MATEMÁTICA ELEMENTAR

Neste capítulo abordamos a noção de elementar em Matemática segundo a perspectiva de alguns importantes matemáticos: Apolônio, d’Alembert e Felix Klein. A perspectiva de Klein é o foco deste capítulo. Também abordamos alguns outros conceitos propostos por Klein como *translação histórica*, *dupla descontinuidade* e *hysteresis*.

2.1 O ELEMENTAR MATEMÁTICO: ALGUMAS PERSPECTIVAS

Klein não foi o primeiro a se utilizar de uma noção de elementar em Matemática. Segundo Roque (2012), “Há registros de que, muito antes de Euclides, existiriam muitas outras obras [além dos Elementos] organizadas como ‘elementos’ de algum tipo de matemática” (p. 106).

Há também, após Euclides, certa tradição em utilizar alguma noção de elementos em Matemática. Destacamos, por exemplo, a noção de elementar de Apolônio. Fried e Unguru, em seu prefácio para a mais recente edição das *Cônicas* de Apolônio, relatam que Apolônio ao explicar para o matemático Eudemus sobre como está subdivida sua obra afirma que "sobre o conteúdo das **Cônicas**, a saber, que os quatro primeiros livros 'pertencem a um curso de elementos', enquanto os quatro últimos 'são mais completos em tratamento' "(FRIED et al. 2001, p. 58 apud SCHUBRING, 2019, p. 172, tradução nossa, negritos do autor)[4].

Fried e Unguru chegam a conclusão de que, para Apolônio, uma exposição dos elementos de uma teoria é a exposição de todos os fundamentos daquela teoria de forma sistemática, formando uma apresentação bastante completa sobre o tema (SCHUBRING, Ibid.). Ou seja, para Apolônio, a noção de elementar se aproxima bastante da ideia de fundamental, essencial ou estrutural e não algo simples, fácil ou trivial.

A perspectiva de que, não só a Matemática, mas as Ciências como um todo eram compostas de elementos, foi bastante comum em meados do século XVIII. O maior expoente do tema naquela época foi Jean le Rond d’Alembert (1717 – 1783).

[4] No original “regarding the contents of the **Conica**, namely, that the first four books ‘belong to a course in the elements,’ while the latter four ‘are fuller in treatment’” (FRIED et al. 2001, p. 58 apud SCHUBRING, 2019, p. 172)

Para ele, como explica Rangel (2012), era de fundamental importância *elementarizarmos* as Ciências, ou seja, identificarmos os elementos de uma dada Ciência e reconstruí-la a partir destes elementos utilizando-se de uma seriação lógica das proposições que determinam esta Ciência.

Para d'Alembert, os "[...] elementos de um todo, [são] as partes *primitivas* e *originais* as quais podemos assumir que o todo é formado" (d'ALEMBERT, 1755, p. 491 apud SCHUBRING, 2019, p. 173, tradução nossa, grifos do autor)[5]. Isto é, para d'Alembert, a *Matemática Elementar* é formada pelas partes mais primitivas, do ponto de vista da lógica, que juntas reconstroem a Matemática através de uma série de proposições lógicas.

2.2 A PERSPECTIVA DE KLEIN

Felix Klein (1849 – 1925) foi um proeminente matemático do final do século XIX que produziu resultados em diversas áreas da Matemática, dentre elas destacamos *Geometria Não-Euclidiana* e *Teoria das Funções*, que são as áreas que ele mais possui contribuições.

Klein também demonstrou grande interesse pelo ensino de Matemática tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica e também pela formação de professores de Matemática e de Ciências. A partir destes interesses, Klein produziu livros e palestras a este respeito que influenciaram diversas gerações de matemáticos e professores de Matemática:

> Em impressão por um século, os volumes do livro de Klein foram usados em inúmeros cursos para futuros professores e professores em exercício. Eles fornecem excelentes exemplos do que hoje é denominado *conhecimento matemático para ensino*. Os cursos de Klein para professores foram parte de seus esforços de reforma para melhorar a matemática secundária, melhorando a preparação dos professores. Apesar dos muitos contratempos que encontrou, nenhum matemático teve mais profunda influência na educação matemática tanto na pesquisa como na prática (KILPATRICK, 2008, p. 27 apud KLEIN, 2016, p. v, tradução nossa, grifos do autor.)[6].

---

[5] No original: "On appelle en général élémens d'un tout, les parties *primitivies* & *originaires* dont on peut supposer que ce tout est formé" (d'ALEMBERT, 1755, p. 491 apud SCHUBRING, 2019, p. 173)

[6] In print for a century, the volumes of Klein's textbook have been used in countless courses for prospective and practice teachers. They provide excellent early examples of what today is termed *mathematical knowledge for teaching*. Klein's courses for teachers were part of his reform efforts to improve secondary mathematics by improving the preparation teachers. Despite the many setbacks he encountered, no mathematician has had a more profound influence on mathematics education as a field of scholarship and practice (KILPATRICK, 2008, p. 27 apud KLEIN, 2016, p. v).

Dentre suas obras, destacamos a obra publicada em três volumes a partir de 1908 intitulada *Matemática Elementar de um Ponto de vista Superior*[7]. Esta obra influencia matemáticos e professores de Matemática até os dias atuais. Inclusive, em comemoração ao centenário de sua célebre obra, foi desenvolvido o *Klein project for the 21st century* (Projeto Klein para o século XXI), cujo objetivo é a elaboração, em diversas línguas, de um material bibliográfico sobre Matemática seguindo a perspectiva de Klein a respeito do elementar matemático.

O interesse de Klein em abordar o ensino de Matemática e a formação de professores de Matemática advém da identificação de um problema que acometia a formação dos professores de Matemática em sua época e que ele denominou de *dupla descontinuidade na formação do professor*:

> [...] por um lado, quando os estudantes ingressam nos cursos universitários de formação de professores, poucas relações são estabelecidas entre a matemática com que passam a ter contato e aquela anteriormente aprendida por eles como alunos da escola básica; e, por outro lado, quando concluem esses cursos e iniciam a vida profissional, poucas relações são estabelecidas entre a matemática aprendida durante a graduação e aquela que passa a ser demandada pela prática de sala de aula da escola básica. Assim, é como se, ao ingressar na universidade, o futuro professor devesse 'esquecer' toda a matemática que aprendeu até então na escola básica; e ao terminar a graduação, o professor devesse novamente 'esquecer' toda a matemática ali aprendida para se iniciar na carreira docente (GIRALDO, 2018, p. 37).

Esta dupla descontinuidade na formação a tornava muitas vezes uma experiência inócua para o futuro professor de Matemática da Educação Básica. Klein tinha interesse em contribuir para superar tal ruptura tão prejudicial para o ensino de Matemática na Educação Básica. Motivado por esta problemática, Klein proferiu palestras entre 1902 e 1908 e, ao fim deste período, começou a publicar a coleção *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* que foi fruto das notas escritas para as palestras que ele proferiu no período supracitado (KLEIN, 2016).

A *Matemática Elementar* para Klein não é uma *Matemática facilitada* nem tampouco uma identificação com a *Matemática Escolar*. Klein também não a considera abaixo da *Matemática Avançada/Superior*. Para ele, a Matemática Elementar é "aquela [parte da Matemática] que congrega as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a matemática" (GIRALDO, MACULAN, RANGEL, 2014, p. 6).

---

[7] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, no original em alemão, *Elementary Mathematics from an Advanced Point*, nas primeiras traduções para o inglês e *Elementary Mathematics from a Higher Point* em sua tradução mais recente.

Ou seja, a *Matemática Elementar* é constituída por todos os conceitos e proposições que têm a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática. Alguns exemplos são: a noção de número, ponto, reta, plano, espaço, função, conjunto, etc.

Apesar das perspectivas de Klein e de d'Alembert sobre o elementar matemático serem próximas, elas possuem uma diferença fundamental. Para Klein, o elementar matemático possui um componente histórico essencial. Isto é, aquilo que não era elementar em certo momento histórico pode vir a sê-lo.

> O processo normal de desenvolvimento [...] de uma ciência é o seguinte: partes mais altas e mais complicadas tornam-se gradualmente mais elementares, devido ao aumento da capacidade de entender os conceitos e à simplificação de sua exposição ("lei da translação histórica"). Constitui tarefa da escola verificar, tendo em vista os requisitos do ensino geral, se a introdução de conceitos elementares no currículo é necessária ou não. (KLEIN; SCHIMMACK, 1907, p. 90 apud SCHUBRING, Ibid., p. 175, tradução nossa)[8].

Ou seja, à medida que os matemáticos compreendem melhor os conceitos matemáticos, alguns destes conceitos demonstram possuir a capacidade de sustentar e/ou estruturar a Matemática e, então, tornam-se parte da *Matemática Elementar*. Os conceitos de função e de conjunto são exemplos de conceitos que passaram por este processo.

O processo para determinar quais conceitos elementares farão parte da Matemática Escolar necessita de certo distanciamento histórico, este distanciamento histórico é chamado por Klein de *Hysteresis*, inspirado no conceito físico homônimo definido como

> Retardo do efeito quando as forças que atuam sobre um corpo são alteradas (como se viscosidades ou atritos internos); esp.: um atraso nos valores da magnetização resultante em um material magnético (como o ferro) devido a uma força de magnetização variável (SCHUBRING, Ibid., p. 175, tradução nossa)[9].

---

[8] No original: "The normal process of development [...] of a science is the following: higher and more complicated parts become gradually more elementary, due to the increase in the capacity to understand the concepts and to the simplification of their exposition ("law of historical shifting"). It constitutes the task of the school to verify, in view of the requirements of general education, whether the introduction of elementarised concepts into the syllabus is necessary or not" (KLEIN; SCHIMMACK, 1907, p. 90 apud SCHUBRING, 2019, p. 175)

[9] No original: "A retardation of the effect when the forces acting ubon a body are changed (as if from viscosity or internal friction); esp.: a lagging in the values of resulting magnetization in a magnetic material (such as iron) due to a changing magnetizing force (SCHUBRING, 2019, p. 175)

Para Klein, a *Hysteresis* deve ser de algumas décadas, permitindo aos conceitos matemáticos terem alcançado maturidade suficiente para que a escola pondere a respeito de sua inserção no currículo (SCHUBRING, Ibid.).

Portanto, Klein não só define o que é o elementar em Matemática, mas também aborda como o elementar matemático é construído ao longo da história e reserva à Escola Básica o protagonismo de escolher quais são os conceitos elementares que farão parte do currículo de Matemática.

3 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DAS FUNÇÕES

Neste capítulo, será abordado o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de funções no qual buscamos abordar aspectos do seu surgimento e do seu processo de desenvolvimento.

Geralmente, a maneira como os conceitos matemáticos têm sido organizados e ensinados ao longo da escolarização pode veicular uma ideia implícita da Matemática como um *corpus* de saberes estáticos, dando a entender que os mesmos surgem prontos, um após o outro, numa linha temporal progressiva. Obviamente que o estudo histórico nos encaminha a outra compreensão na qual os saberes matemáticos são construídos a partir de uma gênese natural situada em contextos histórico-culturais e passam por um processo geralmente longo desde seu surgimento à sua sistematização e formalização conceitual.

. Dessa forma, a história do conceito de funções é longa e permeada de modificações. Tem início na Antiguidade a partir de ideias ainda não abstratas, perpassa por diversas definições desde o início do século XVIII até a definição atual do conceito de função apresentada pelo grupo Bourbaki[10] em meados do século XX.

Desde a Antiguidade, as tabelas numéricas já eram amplamente utilizadas. Segundo Roque (2012), as civilizações babilônica e egípcia recorriam a construção de tabelas tanto como um auxílio para os cálculos do dia a dia quanto como um recurso para registrar seus dados astronômicos. Eles, portanto, faziam uso de alguma noção de correspondência.

Os babilônios tinham de lidar com diversos problemas que envolviam relações entre grandezas, entretanto, como explica Oliveira (1997),

> [...] para os babilônios, cada problema era uma nova situação que exigia uma nova análise, pois eles não desenvolveram procedimentos ou regras gerais para resolverem problemas semelhantes (p. 14).

Além disso, como afirma Roque (2012), os babilônios não sistematizaram uma noção de variação entre grandezas, assim como os gregos. A não sistematização da variação entre grandezas pelos gregos é explicada por Azcárate e Deulofeu (1996) a partir do uso que os gregos faziam da noção de

[10] O grupo Bourbaki foi um grupo constituído de matemáticos, em sua maioria franceses, fundado no final de 1934 com o intuito de produzir um tratado de Análise Matemática mais satisfatório do que aqueles utilizados até então (cf. ESQUINCALHA, 2012). O grupo se utilizou do pseudônimo Nicolas Bourbaki para assinar seus trabalhos. Em conjunto, produziram resultados em Teoria dos Conjuntos, Álgebra, Topologia Geral, Grupos e Álgebra de Lie, dentre outras (ibid.).

proporcionalidade, como mediadora de todo estudo que envolvia relações entre grandezas, segundo estes autores,

> (...) o que se compara é sempre da mesma natureza, de modo que **as proporções escondem a dependência entre grandezas distintas**. Por exemplo, quando se comparam as áreas de dois círculos e se estabelece que estão na mesma proporção que os quadrados de seus diâmetros, se esconde a dependência que existe entre o diâmetro e a área de um círculo, relação que nos levaria à ideia de função (p. 41 apud GONÇALVES, 2015, p.79, negritos do autor)

Ou seja, a não sistematização, por parte dos gregos, da dependência entre grandezas distintas e da variação de uma grandeza em relação à outra não ocorreu, pois, seu foco eram as proporções entre grandezas de mesma natureza e não a relação entre grandezas de naturezas distintas.

As relações entre grandezas foram descritas apenas de forma verbal e tabular durante vários séculos. Segundo Costa (2004), outras formas de representar as relações entre grandezas surgem apenas no século XIV.

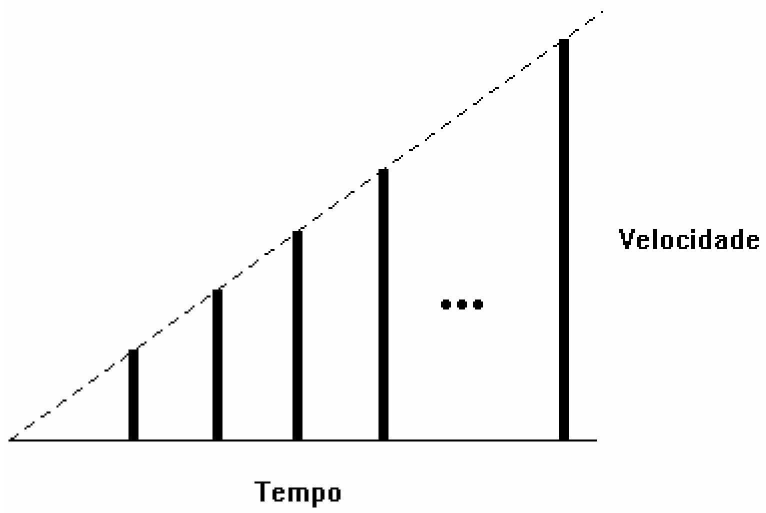
Durante o século XIV na Europa, como afirma Roque (2012), o interesse pelas causas naturais dos fenômenos se proliferou, tendo o movimento dos corpos como sendo o que mais despertou o interesse dos europeus da época. É no estudo do movimento dos corpos que vários pensadores europeus vão realizar avanços que culminaram na gênese do conceito de função.

Nicolas Oresme (1323 – 1382) foi um destes estudiosos. Ele desenvolveu uma teoria chamada de *Teoria das Latitudes e Longitudes* para descrever relações entre grandezas. Segundo sua teoria, as características dos objetos (qualidades, segundo a sua terminologia) possuem uma intensidade (ROQUE, ibid). Ou seja, um corpo não é simplesmente rápido, ele é apenas mais ou menos rápido do que outro.

De acordo com Oliveira (1997), Oresme também foi pioneiro ao ser um dos primeiros a representar de forma geométrica uma relação funcional entre duas grandezas.

> [sua representação geométrica], embora não evidencie precisamente relações quantitativas, apresenta diferentes graus de intensidade à velocidade em dependência com o tempo de certo fenômeno [...] [(Figura 1).] Trata-se de uma linha horizontal na qual, determinam-se instantes de tempo. De cada um desses instantes, parte uma barra vertical representando a velocidade do objeto naquele determinado momento. Dependendo da intensidade da velocidade, maior será o comprimento da barra. (RORATTO, 2009, p. 56).

Figura 1 - Representação Geométrica da velocidade em função do tempo para Oresme



Roratto (2009)

Sua representação da relação entre grandezas possui apenas caráter qualitativo. Ainda assim, sua representação geométrica auxilia na compreensão de relações entre grandezas, pois permite a visualização de algumas das propriedades que a relação possui.

Roque (2012) ressalta que no século XVII, devido aos esforços de matematização da natureza e o desenvolvimento de uma nova Geometria que emprega ferramentas algébricas – a Geometria Analítica – criou-se um ambiente fértil para o desenvolvimento da noção de variação, noção imprescindível para a posterior sistematização do conceito de função.

Ao final do século XVII, os problemas relacionados a curvas eram os mais estudados e as curvas tornaram-se o principal objeto de estudo da Geometria (ROQUE, ibid.). Dentre os problemas relacionados às curvas destacam-se os problemas de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de determinar a área abaixo de uma curva dada.

De acordo com Roque (ibid), problemas nos quais se necessitava encontrar as tangentes a uma curva ou a área sob ela tornaram-se cada vez mais recorrentes e era necessário encontrar métodos eficazes para resolvê-los. Dentre estes métodos destacamos o método dos indivisíveis desenvolvido por Cavalieri (1598 – 1647) e renovado por Roberval (1602 – 1675), Fermat (1607 – 1665) e Pascal (1623 – 1662) e o método das diferenciais desenvolvido por Leibniz (1646 – 1716). Estes métodos fizeram parte de um movimento chamado de *arte da invenção* – os adeptos da arte da invenção não se preocupavam em seguir o cânone grego e sim em resolver os problemas e obter resultados, conforme explica Roque (ibid). Este movimento trouxe grandes contribuições para a Matemática, pois diversificou as ferramentas que os matemáticos tinham à sua disposição.

Porém, mesmo não seguindo o cânone grego como forma de justificar seus resultados, estes matemáticos ainda estavam interessados em justificar seus métodos. Leibniz (1646 – 1716), por exemplo, apresentou diversas justificativas para o seu método das diferenciais *dy* e *dx.* Foram as discussões a respeito dos métodos infinitesimais que levaram a definição do conceito de função no século XVIII, como explica Roque (ibid.).

Leibniz trouxe uma maneira inovadora de tratar uma relação entre grandezas. Ao tentar justificar o método das diferenciais ele chegou à importante conclusão de que é possível tratar uma relação independentemente das quantidades envolvidas (ROQUE, ibid.). Por exemplo, sabemos que independentemente do valor do raio de uma circunferência, a medida da circunferência é $2\pi \times raio$. Daí a relação entre o raio e comprimento da circunferência independe das medidas particulares do raio e da circunferência.

Outra contribuição de Leibniz para o desenvolvimento do conceito de funções foram as suas definições de constante e variável que foram posteriormente utilizadas, em 1718, por Johann Bernoulli (1667 – 1748) para dar a primeira definição explícita de função, qual seja: “Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes” (Ibid., p. 373).

Com efeito, a primeira noção de função é como grandeza dependente de uma ou mais grandezas variáveis. Esta noção de função enquanto uma grandeza que depende de outras ainda é utilizada em outros contextos, como a Física, para tratar a velocidade como uma função do tempo, por exemplo.

O discípulo de Johann Bernoulli, Leonhard Euler (1707 – 1783), trouxe uma nova perspectiva para o Cálculo[11]. Para Euler, o Cálculo deveria ser encarado como uma teoria das funções – tamanha a importância que este conceito já havia

[11] O Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente Cálculo, é um ramo da Matemática que trata de problemas que envolvem a reta tangente a uma curva e problemas que envolvem o cálculo de áreas sob uma curva.

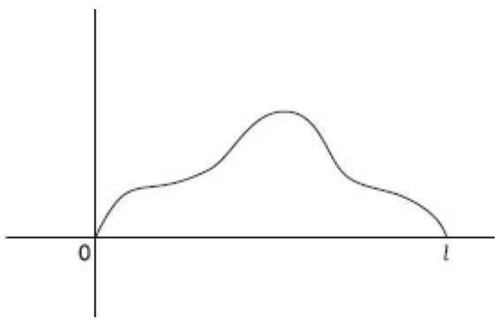
adquirido à época – (ROQUE, ibid.). Euler apresentou, em 1748, uma nova definição para o conceito de função: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes” (ibid., p. 374).

Segundo esta definição apresentada por Euler dada à expressão y = 2x, y é uma função de x. O que Euler quis dizer com *expressão analítica* acima, como nos explica Roque (ibid.), foi que ele considerava funções compostas, finita ou infinitamente, de somas, subtrações, multiplicações, divisões, potenciações ou radiciações das funções elementares x^n, a^x, log x, cos x, arc sen x, etc.[12] A definição dada por Euler, como comenta Roque (ibid), é a noção mais comum de função entre os estudantes.

Tanto a definição de Bernoulli quanto a definição de Euler são restritivas. A primeira considera apenas relações entre grandezas enquanto a outra considera apenas relações entre quantidades que podem ser expressas de forma analítica.

Novas definições para o conceito de função foram propostas durante os séculos XVIII e XIX, mas não com o intuito de generalizar a noção de função. Estas definições foram apresentadas num contexto de discussões a respeito de problemas que demandaram novas definições para o conceito de funções. O primeiro destes problemas foi o *Problema das Cordas Vibrantes*: Dada uma corda presa com suas extremidades nos pontos 0 e l, colocada em uma posição inicial qualquer que em seguida é solta. Determine sua posição em um instante t qualquer (ROQUE, ibid.)

Figura 2 – Representação Geométrica da Corda Vibrante



Fonte: Roque (2012)

De acordo com Roque (ibid.), o primeiro matemático a propor uma solução para este problema foi d’Alembert (1717 – 1783) e sua solução considerava

[12]Chamamos, atualmente, estas funções de funções analíticas (cf. LIMA, 2019).

qualquer condição inicial que pudesse ser representada por uma expressão analítica[13]. No mesmo ano, em 1748, Euler o complementou afirmando que a solução de d'Alembert poderia ser ampliada para condições iniciais dadas por mais de uma expressão analítica.

Contudo, isto levantou um questionamento, afinal, se Euler havia identificado uma função à sua expressão analítica, como ela poderia ser dada por mais de uma? Isto o levou a propor uma nova definição de função em 1755:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contêm nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x (ROQUE, ibid., p. 378).

Ou seja, Euler mudou o foco da definição de função, da expressão analítica para a variável dependente. Esta abordagem ainda é comumente utilizada em livros de Matemática ao usar expressões como: '*Seja y uma função de x'*.

Houve um segundo problema que iria mudar, e muito, a definição de função ao longo das décadas seguintes – o *Problema da Propagação do Calor*. Ele pode ser enunciado da seguinte maneira: "[...] como o calor se propaga em uma massa sólida, dadas certas condições iniciais? (ROQUE, ibid., 389).

Um dos primeiros matemáticos a apresentar uma solução para este problema foi Joseph Fourier (1768 – 1830), no início do século XIX. Sua solução era dada pela soma de uma série trigonométrica e isto levantou diversos questionamentos. Roque (ibid.) explica que Fourier percebeu que uma série trigonométrica poderia coincidir com a função constante e igual a 1 no intervalo (-1, 1) e diferir para os demais números da reta numérica, isto o fez perceber que era necessário entender melhor o que é um intervalo.

A partir desta solução, Fourier conjecturou que toda função pudesse ser expressa através de uma série trigonométrica – o que se sabe hoje não ser verdade. Mas isso significaria, como salienta Roque (Ibid.), que a função deveria ser algo além da série, já que ela seria apenas expressa por ela. Estes pontos levantados por Fourier impactaram a Matemática durante várias décadas.

---

[13] "D'Alembert já havia traduzido esse problema por uma equação diferencial parcial e concluído que sua solução pode ser representada pela soma de duas funções arbitrárias nas variáveis x e t: $\varphi(x + at) + \varphi(x - at)$. [...] As condições iniciais da corda podem ser muito diversas, mas d'Alembert acreditava que elas deviam ser sempre representadas por uma expressão analítica [...]" (ROQUE, Ibid, 376).

No século XIX, novas definições para o conceito de função foram apresentadas. Para Cauchy (1789 – 1857):

> Quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente essas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de “variável independente”; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos *funções* desta variável (ibid., p. 415).

A definição dada por Cauchy ainda trata a função como uma variável dependente de uma ou mais variáveis independentes, assim como a segunda definição apresentada por Euler. Entretanto, esta se diferencia, pois enquanto a definição de Euler ressalta a noção de variação, esta ressalta a noção de correspondência.

Roque (ibid.) explica que Dirichlet (1805 – 1859) propôs uma nova definição de função a partir dos seus estudos das séries de Fourier. Dirichlet expande a noção de função ao não exigir que a variável seja expressa por uma relação matemática explícita.

Posteriormente a Dirichlet, Georg Cantor através de suas investigações a respeito dos infinitos enumeráveis e não enumeráveis, propôs que uma função é uma correspondência entre conjuntos numéricos (ROQUE, ibid.).

Décadas mais tarde, já no século XX, o grupo Bourbaki define função da seguinte maneira:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma *relação funcional* se, para todo x pertencente a E, existe um único elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x. Damos o nome função à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E, o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x, y será dito o valor da função no elemento x (ROQUE, 2012, p. 474).

Por fim, compreendemos que o desenvolvimento do conceito de função passou por um processo dinâmico, longo e complexo atendendo a demandas internas e/ou externas à Matemática de cada época e lugar. Este processo envolveu o surgimento e desenvolvimento de outros tantos conceitos necessários ao desenvolvimento do conceito de função. Podemos citar como exemplos, os conceitos de correspondência, dependência, variação, proporcionalidade, conjuntos, dentre diversos outros.

O conceito de função foi definido de diversas formas desde o início do século XVIII: Grandeza dependente de uma ou mais grandezas; expressão analítica;

variável dependente; correspondência entre conjuntos numéricos e correspondência entre conjuntos quaisquer, de tal forma, que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento do contradomínio.

Cada uma destas definições foi útil para resolução de diversos problemas tanto matemáticos quanto extra matemáticos. Quando surgiam problemas que iam além do domínio de validade da definição dada, outra definição era proposta de forma a solucioná-lo.

Entretanto, quando uma nova definição de função é proposta, a anterior não é eliminada por completo, pois nela encontram-se elementos importantes para a compreensão do conceito de função. A noção de variação, por exemplo, não se encontra na definição atual de função, porém, faz parte do arcabouço de conceitos que envolvem o conceito de função.

Em suma, o processo de desenvolvimento do conceito de função é mais um processo de adaptação do que um processo de substituição. A definição utilizada é adaptada para atender às novas demandas que o conceito de função precisa atender.

4 ATOS DE ENTENDIMENTO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS NO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DAS FUNÇÕES

Neste capítulo analisamos o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função a partir das noções de *obstáculo epistemológico* e *atos de entendimento*[14], conforme definidos por Sierpinska (1992). Buscamos, através desta análise, complementar a abordagem que realizamos deste desenvolvimento no capítulo anterior. Enquanto na abordagem anterior tratamos de todo o desenvolvimento do conceito de função, neste trataremos apenas dos seus momentos críticos – seus momentos de ruptura, a fim de nos aprofundarmos em seu desenvolvimento.

Analisar o desenvolvimento do conceito de função a partir destes conceitos (atos de entendimento e obstáculos epistemológicos) nos possibilita compreender as contribuições e as limitações que cada definição apresenta e, a partir desta abordagem, podemos obter diversas contribuições pedagógicas para o ensino das funções, como corrobora Sierpinska (Ibid.).

Segundo Sierpinska (1992), os processos de aprender e criar Matemática não são contínuos e lineares. Estes processos se dão através de *saltos*, "[...] [estes saltos são as] mudanças qualitativas relacionadas ao conhecimento matemático na mente humana, salta de maneiras antigas de conhecer para novas formas de saber" (Ibid., p. 27, tradução nossa)[15]. Ou seja, os conceitos matemáticos se desenvolvem ao longo do tempo, modificando-se de acordo com as necessidades de cada época e lugar e o principal aspecto que devemos focar para compreender este desenvolvimento são os seus momentos de ruptura, isto é, os seus *saltos*.

Com o conceito de função não seria diferente. Houveram diversas modificações deste conceito ao longo da história[16]. As modificações na história do desenvolvimento de um conceito matemático são naturais, assim como o fato de que um longo processo de desenvolvimento conceitual de um objeto do saber matemático não é sempre progressivamente linear, uma vez que as condições do progresso podem ser permeadas de obstáculos. O sentido de obstáculo aqui não se

[14] No original: acts of understanding.

[15] No original: "[...] on the important qualitative changes related to mathematical knowledge in the human mind, jumps from old ways of knowing to new ways of knowing" (SIERPINSKA, 1992, p. 27).

[16] Abordamos o desenvolvimento histórico do conceito de função no capítulo anterior.

refere àquele particular de uma pessoa. Trata-se, portanto, de situação comum a um grupo em determinada época e lugar. Nesse caso, podem ser denominados de *obstáculos epistemológicos*, conforme Sierpinska (Ibid.).

Quanto aos *atos de entendimento*, Sierpinska (Ibid.) classifica-os em quatro (04) categorias:

1. Identificação: Um ato de entendimento é classificado como uma *Identificação* quando se percebe a existência de algo que antes não era percebido e este algo é relevante dentro do contexto ao qual se encontra ou quando uma noção comum do dia a dia mostra-se relevante dentro do contexto científico e ganha uma conotação científica;
2. Discriminação: Um ato de entendimento é uma *Discriminação* quando se percebe que coisas que vinham sendo tratadas como a mesma coisa são mais bem entendidas quando tratadas como coisas distintas;
3. Generalização: Já uma *Generalização* é o ato de entendimento de perceber a possibilidade de empregar em contextos mais variados algo que era aplicado em um contexto mais restrito;
4. Síntese: Por fim, a *Síntese* é o ato de entendimento de perceber a relação entre fatos, propriedades, conceitos, etc. que eram considerados como isolados e organizá-los de forma consistente.

Em cada momento de ruptura na história de um conceito matemático estão presentes um ou mais atos de entendimento e um ou mais obstáculos epistemológicos.

De acordo Sierpinska (Ibid.), cada salto pode ser analisado sob duas perspectivas distintas e complementares: a partir dos obstáculos epistemológicos e a partir dos atos de entendimento envolvidos. Portanto, analisar sob ambas as perspectivas permite uma compreensão mais profunda do momento de ruptura – o salto – e do desenvolvimento epistemológico do conceito como um todo.

Analisamos alguns dos principais momentos de ruptura na história do conceito de função a partir desta abordagem complementar entre obstáculos epistemológicos e atos de entendimento.

O primeiro ato de entendimento apresentado por Sierpinska (Ibid.) é o seguinte: *Identificação das mudanças no mundo circundante como um problema* *prático a ser resolvido*. Isto é, encarar os fenômenos naturais que produzem mudanças na natureza como algo que possa ser compreendido e/ou aproveitado.

Ampliar nossa compreensão do mundo natural é extremamente importante para a sobrevivência humana. Segundo Caraça (1951), "A atividade do homem, quer considerada do ponto de vista individual, quer considerada do ponto de vista social, exige um conhecimento, tão completo quanto possível, do mundo que o rodeia" (p.64).

Este ato de entendimento é uma mudança de perspectiva em relação à natureza e aos seus fenômenos. A humanidade sempre teve de lidar com as mudanças no mundo circundante, porém, não compreendia como elas se davam. Entretanto, entendê-las, como afirma Caraça (Ibid.), não é apenas questão de mera curiosidade, mas de sobrevivência:

> Quanto mais alto fôr o grau de *compreensão* dos fenómenos naturais e sociais, tanto melhor o homem se poderá defender dos perigos que o rodeiam, tanto maior será o seu domínio da Natureza e as suas forças hostis, tanto mais fàcilmente ele poderá realizar aquele conjunto de actos que concorrem para a sua segurança e para o desenvolvimento da sua personalidade, tanto maior será, enfim, a sua *liberdade*. (p.64, grifos do autor).

É através da busca pela compreensão dos fenômenos naturais que ocorre a *identificação de regularidades nos fenômenos do mundo circundante* (SIERPINSKA, 1992). Esta *identificação* é o segundo ato de entendimento do conceito de função. Perceber que a natureza apresenta certas regularidades passíveis do nosso entendimento é essencial para que tentemos entendê-la cada vez melhor.

A identificação das regularidades de um fenômeno natural permite ao ser humano se preparar para ele e esta capacidade de prever fenômenos é essencial a nossa sobrevivência enquanto espécie como corrobora Caraça (1951):

> [...] quanto maior fôr a possibilidade de previsão, maior será o domínio dêles sobre a Natureza; quem sabe prever sabe melhor defender-se e, além disso, pode provocar a repetição, para seu uso dos fenómenos naturais (p. 108).

Estes dois primeiros atos de entendimento são complementares e conduzem a uma nova perspectiva para encarar a natureza, uma perspectiva que envolve a observação dos fenômenos e o uso do raciocínio lógico para compreender os fenômenos naturais.

Os fenômenos naturais, em especial o movimento dos corpos, começa a receber grande atenção dos europeus a partir do século XIV, como mencionamos no capítulo anterior.

Um dos autores clássicos que mais influenciou a Europa neste período foi Aristóteles. Sierpinska (1992) explica que Aristóteles *tratava as mudanças no mundo circundante a partir da natureza da mudança, ignorando o que está mudando*. Esta perspectiva em relação às mudanças no mundo circundante é considerada um obstáculo epistemológico, conforme Sierpinska (Ibid.).

Para superar tal obstáculo epistemológico foi necessário o ato de entendimento de que *para compreender uma mudança na natureza é necessário identificar as grandezas relacionadas a esta mudança*. Esta *identificação* é o terceiro ato de entendimento do conceito de função (cf. SIERPINSKA, Ibid.).

O quarto ato de entendimento do conceito de função é a *discriminação entre quantidades constantes e variáveis* (SIERPINSKA, Ibid.). Segundo a autora, a diferenciação entre uma incógnita e uma variável foi tão relevante para a Matemática que posteriormente provocou a separação entre áreas da Matemática que hoje chamamos de Álgebra e de Análise.

Como mencionamos no capítulo anterior, as definições de variável e constante propostas por Leibniz (1646 – 1716) foram utilizadas por Johann Bernoulli (1667 – 1 748) para propor a primeira definição para o conceito de função. Para Bernoulli, uma função é uma grandeza dependente de uma ou mais grandezas variáveis. Bernoulli percebeu a relevância que a noção de função possuía e tratou de expressá-la de forma explícita através de uma definição. Este ato pode ser categorizado como um ato de entendimento de *identificação*, segundo a classificação de Sierpinska (Ibid.).

De acordo com Sierpinska (Ibid.), as definições apresentadas por Johann Bernoulli, Euler e Cauchy apresentam dois obstáculos epistemológicos em comum: (1) *Forte crença no poder das operações formais em expressões algébricas*[17]; (2) *Apenas relações descritíveis por fórmulas analíticas são dignas de receber o nome de função*[18]. Sierpinska chama estes obstáculos epistemológicos de *encantamento*

---

[17] No original: Strong belief in the power of formal operations on algebraic expressions;

[18] No original: Only relationships describable by analytic formulae are worthy of being given the name of functions.

com a Álgebra. O encantamento com a Álgebra se deve às importantes contribuições que as ferramentas algébricas possibilitaram (SIERPINSKA, Ibid.).

O ato de entendimento correspondente a estes obstáculos epistemológicos é o seguinte: *Discriminação entre função e as ferramentas algébricas por vezes usadas para descrever sua regra* (SIERPINSA, Ibid.).

Em suma, as definições apresentadas por Bernoulli, Euler e Cauchy contribuíram para diversos avanços na Matemática, entretanto, estas definições geraram obstáculos quanto à compreensão de noções como a diferenciabilidade, continuidade e convergência (SIERPINSKA, Ibid.). Foi em um contexto de discussões a respeito destes conceitos que Dirichlet (1805 – 1859) apresentou uma definição de função que não exige que ela seja expressa analiticamente.

Ou seja, uma melhor compreensão das noções de diferenciabilidade, continuidade e convergência contribuíram no desenvolvimento do conceito de função, conceito no qual estas noções se baseiam.

Posteriormente a Dirichlet abordamos no capítulo anterior, a definição proposta por Georg Cantor (1845 – 1918). Para Cantor, uma função é uma correspondência entre conjuntos numéricos. A restrição de que os conjuntos precisam ser conjuntos de números pode ser considerada um obstáculo epistemológico, pois exclui a possibilidade de tratarmos diversas correspondências entre conjuntos como funções. Por exemplo, a função de Euler[19] que faz corresponder os números reais aos pontos de um círculo unitário.

Portanto, cada definição de função pode ser considerada um avanço em relação às definições anteriores, pois contribuiu para a resolução de problemas internos ou externos à Matemática que estavam além do domínio de validade das definições anteriores. Por outro lado, cada definição de função é, em relação a próxima, um obstáculo epistemológico, afinal, para chegar à nova definição é imprescindível uma ruptura com esta.

[19] A função de Euler é uma função $E: \mathbb{R} \to C$, onde C é um círculo unitário. Ela é utilizada para definir as funções seno e cosseno (cf. LIMA et al, 2016).

5 ASPECTOS ELEMENTARES E AVANÇADOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capítulo analisamos quais conceitos matemáticos podem ser considerados *elementares* em relação ao conceito de função, segundo a perspectiva de Klein a respeito do elementar matemático, e quais podem ser considerados *avançados*. Isto é, analisamos quais são os *aspectos elementares e avançados do conceito de função*.

5.1. ASPECTOS ELEMENTARES DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Para Klein, *Matemática Elementar* é "aquela [parte da Matemática] que congrega as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a matemática" (GIRALDO, MACULAN, RANGEL, 2014, p. 6). Designamos, em analogia, os aspectos elementares do conceito de função como *os conceitos matemáticos que encerram a capacidade de sustentá-lo e estruturá-lo*. Em outras palavras, os aspectos elementares do conceito de função são os conceitos matemáticos a partir dos quais o conceito de função se fundamenta (capacidade de sustentá-lo) e os conceitos matemáticos a partir dos quais o conceito de função se estrutura (capacidade de estruturá-lo).

Consideramos para esta análise o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função abordado nos capítulos 3 e 4 do presente trabalho. Optamos por esta abordagem, pois o desenvolvimento histórico e epistemológico de um conceito matemático nos possibilita entender como este conceito se relaciona com diversos outros conceitos matemáticos. Realizamos uma leitura crítico-reflexiva dos capítulos anteriores a fim de identificar quais conceitos matemáticos podem ser considerados elementares e avançados em relação ao conceito de função a partir do desenvolvimento deste conceito.

No capítulo anterior, relatamos que o desenvolvimento histórico e epistemológico das funções tem início a partir dos seguintes atos de entendimento: (1) *Identificação das mudanças no mundo circundante como um problema prático a ser resolvido*; e (2) *Identificação de regularidades nos fenômenos do mundo circundante*. Estes atos de entendimento são complementares e são imprescindíveis para as investigações da natureza. A Astronomia, por exemplo, desenvolveu-se a partir da investigação de regularidades no céu noturno.

A Astronomia, como relatamos no Capítulo 3, era estudada por babilônios e egípcios e para seu estudo recorriam ao uso de tabelas para registrar seus dados. Eles também lidavam com diversos outros problemas que envolviam relações entre grandezas e que, portanto, faziam uso de algum tipo de noção de *correspondência*. Esta noção se faz presente tanto na definição apresentada por Georg Cantor (função como correspondência entre conjuntos numéricos) quanto na definição atual de função (correspondência entre conjuntos quaisquer, de tal forma, que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento do contradomínio). Por isso, podemos considerar a noção de correspondência como estruturante e fundamental para o conceito de função e, portanto, como elementar às funções.

Em seguida, comentamos, no Capítulo 3, que tanto os babilônios quanto os gregos não sistematizaram nenhuma noção de *variação* entre grandezas. Inclusive, a perspectiva aristotélica de tratar *as mudanças no mundo circundante a partir da natureza da mudança, ignorando o que está mudando*, reflete isto, pois ele ignora as grandezas envolvidas na mudança e como elas variam uma em relação a outra.

A superação da perspectiva aristotélica, considerada um obstáculo epistemológico ao desenvolvimento das funções por Sierpinska (1992), necessitou a *identificação das grandezas relacionadas às mudanças*.

A sistematização da noção de variação, como afirma Roque (2012), foi imprescindível para a sistematização do conceito de função. Esta sistematização ocorre apenas no século XVII em decorrência dos esforços de matematização da natureza. Advém de sua importância fundamental para a sistematização das funções que a noção de variação é elementar ao conceito de função.

É no século XVIII que a primeira definição de função é proposta por Johann Bernoulli (1667 – 1748): “Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes” (ROQUE, Ibid., p. 373). Nesta definição Bernoulli fez uso das noções de *variável* e *constante*. Euler também fez uso destas noções em sua primeira definição de função: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes” (ibid., p. 374). Estas noções podem, portanto, serem consideradas elementares ao conceito de função, pois fundamentam este conceito.

A noção de *dependência* também foi essencial ao desenvolvimento do conceito de função. Euler faz uso explícito desta noção em sua segunda definição de função em 1755:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contêm nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x (ROQUE, ibid., p. 378).

Esta noção também pode ser considerada elementar ao conceito de função, pois fundamenta e estrutura o conceito de função.

Além destas noções, também podemos considerar as *representações* do conceito de função (*verbal*, *tabular*, *geométrica* e *algébrica*) como elementares a este conceito. Com efeito, é a partir destas representações que o conceito de função se estrutura.

Por fim, podemos considerar como elementares às funções as noções de *conjunto*, *domínio*[20], *contradomínio*[21], *relação*[22] e *imagem*[23], noções presentes na atual definição do conceito de função. A definição atual de função se estrutura a partir destes e dos conceitos anteriormente citados.

Em suma, a partir de nossa análise identificamos como aspectos elementares ao conceito de função, as noções de correspondência, variação, variável, constante, dependência; as representações verbal, tabular, geométrica e algébrica do conceito de função; e os conceitos de conjunto, domínio, contradomínio, relação e imagem.

5.2. ASPECTOS AVANÇADOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O conceito de função, como ressalta Olimpio Junior (2007), “[...] é a base que sustenta a matemática universitária”. Isto é, diversos conceitos são definidos a partir do conceito de função e disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra

[20] Seja f uma função que faz corresponder a cada elemento do conjunto A a um único elemento do conjunto B. Ao conjunto A damos o nome de Domínio da função f.

[21] Seja g uma função que faz corresponder a cada elemento do conjunto C a um único elemento do conjunto D. Ao conjunto D damos o nome de Contradomínio da função g.

[22] Dados dois conjuntos A e B, chamamos de relação R entre A e B um conjunto qualquer R formado por pares ordenados (a,b), onde a pertence a A e b pertence a B.

[23] Dada uma função h que faz corresponder a cada elemento do conjunto X um único elemento do conjunto Y. Chamamos de imagem do elemento x pertencente a X, o elemento y = h(x) pertencente a Y e que é o elemento de Y correspondente a x pela função h.

Linear, Análise Real, dentre outras, tem as funções como um de seus principais objetos de estudo no Ensino Superior.

Consideramos como *aspectos avançados das funções* aqueles conceitos que são próprios da Matemática Universitária/Superior/Avançada, que são sustentados e/ou estruturados pelo conceito de função e que dizem respeito a algum aspecto das funções. Nesse sentido, consideramos como aspectos avançados das funções, aqueles conceitos exclusivos da Matemática Universitária, que o conceito de função é elementar a eles e que sejam utilizados na Matemática Universitária para, entre outras coisas, estudar certos aspectos locais ou globais das funções.

Para nossa análise recorremos ao *Programa dos Componentes Curriculares por Período* do curso de Matemática-Licenciatura do CAA/UFPE. Neste documento consta o Conteúdo Programático das disciplinas. A partir do Conteúdo Programático das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, II e III, Álgebra Linear e Análise Real analisamos quais conceitos abordados nestas disciplinas podem ser considerados aspectos avançados do conceito de função. A escolha destas cinco disciplinas é por serem disciplinas nas quais as funções possuem um papel central e, por isso, trazem diversos aspectos do conceito de função.

5.2.1. Cálculo Diferencial e Integral I

Figura 3 - Conteúdo programático da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Limites e continuidade de funções: definições, exemplos, propriedades, teoremas.
- Derivada: definição,interpretação geométrica e física, exemplos, propriedades, regras de derivação, regra da cadeia, derivação implícita, derivadas de funções algébricas, derivada de ordem superior, derivadas de funções trigonométricas, derivadas de funções inversas, derivadas de funções exponencial e logarítmica.
- Aplicações da derivada: significado do sinal da derivada primeira, crescimento e decrescimento de uma função, esboço de gráficos de funções reais, significado do sinal da derivada segunda, estudo da concavidade de uma função, teoria de máximos e mínimos, problemas de máximos e mínimos, teorema de Rolle e teorema do valor médio, estudo das assíntotas horizontais, verticais e inclinadas, gráficos de funções.
- Integrais indefinidas: definição, primitivas, propriedades.
- Integrais definidas: área, definição e propriedades, teorema do valor médio para integrais definidas, teorema fundamental do cálculo.
- Técnicas de integração: mudanças de variável, integração por substituição, integração por partes, substituições trigonométricas. Expressões quadráticas, frações parciais, integração de funções racionais de senos e cossenos e outras integrais trigonométricas.

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

Para a identificação de quais dos conceitos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I podem ser considerados aspectos avançados do conceito de função verificamos quais deles possuem as seguintes características:

(1) O conceito de função é elementar a ele;

(2) É próprio do Ensino Superior;

(3) Trata de algum aspecto das funções.

O conceito de Limite, por exemplo, possui todas as características apresentadas. O conceito de função sustenta e estrutura o conceito de limite (então o conceito de função é elementar ao conceito de limite), este conceito é próprio do Ensino Superior (apesar de estar implícito no estudo da área do círculo e na soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica (PG)) e trata de um aspecto das funções, um aspecto local, isto é, para qual valor a função tende quando os valores da variável se aproximam de certo valor (ou crescem indefinidamente em módulo).

O conceito de Continuidade também apresenta todas as características citadas. Ele é sustentado e estruturado pelo conceito de função, é próprio do Ensino Superior e trata de um aspecto das funções, qual seja, se f(x) tende para f(x_0) quando x tende para x_0.

A Derivada também possui as três características citadas. O conceito de função sustenta e estrutura o conceito de derivada, a derivada é própria do Ensino Superior e ela trata de um aspecto local das funções: a sua taxa de variação.

As regras de derivação possuem as duas primeiras características, mas não possuem a terceira, elas dizem respeito apenas ao cálculo da derivada e não de algum aspecto das funções. Por isso, não são aspectos avançados das funções.

O crescimento e decrescimento de uma função, sua concavidade e seus máximos e mínimos são aspectos das funções, por isso cumprem a terceira característica. Além disso, cumprem as duas primeiras características, logo são aspectos avançados das funções.

O Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio são resultados e não conceitos, por isso não os identificamos como aspectos avançados das funções.

Quanto às assíntotas as consideramos aspectos avançados das funções, pois o conceito de função sustenta e estrutura o conceito de assíntota, este conceito é próprio do Ensino Superior e trata de um aspecto das funções, pois elas são retas que ajudam a compreender o comportamento das funções.

As integrais indefinidas, definidas, o Teorema Fundamental do Cálculo e as diversas técnicas para se calcular uma integral não são aspectos avançados das funções, pois não se tratam de aspectos das funções.

A partir da análise do Conteúdo Programático desta disciplina concluímos que ela aborda os seguintes aspectos avançados do conceito de função: Limite, Continuidade, Derivada, crescimento e decrescimento, concavidade, Assíntotas Horizontais, Verticais e Inclinadas e Máximos e Mínimos.

5.2.2. Cálculo Diferencial e Integral II

Figura 4 – Conteúdo programático da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

- Coordenadas polares;
- Vetores, Seções cônicas: uma revisão;
- Funções reais de variáveis reais a valores reais. Gráficos e curvas de nível;
- Limite e Continuidade;
- Derivadas Parciais; Diferencial total e regra da cadeia;
- Plano tangente; derivada direcional e gradiente de Funções de duas variáveis;
- Máximos e mínimos de Funções de duas variáveis;
- Multiplicadores de Lagrange;
- Integrais dupla e Cálculo de integrais duplas;
- Integrais duplas e o teorema de Fubini;
- Cálculo de integrais duplas sobre regiões não-retangulares;
- Integrais duplas em coordenadas polares;
- Aplicações da integral dupla;
- Area de superfícies;
- Integrais Triplas;
- Integrais Triplas em coordenadas cilíndricas;
- Integrais Triplas em coordenadas esféricas;
- Mudança de variáveis em integrais duplas;
- Mudança de variáveis em integrais triplas;
- Aplicações da integral tripla.

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

A nossa abordagem em relação à identificação dos aspectos avançados do conceito de função é a mesma da subseção anterior (5.2.2. Cálculo Diferencial e Integral I).

As coordenadas polares, vetores e seções cônicas não são aspectos das funções e, por isso, não são aspectos avançados das funções.

As curvas de nível, por outro lado, são aspectos avançados das funções. O conceito de função é elementar à elas, elas são próprias do Ensino Superior e tratam de um aspecto das funções, o conjunto dos valores de mesma imagem no domínio da função.

Limite e Continuidade, como vimos na seção anterior, são aspectos avançados das funções. Além disso, a derivada parcial e a derivada total também o são. O conceito de função é elementar a estes conceitos, eles são próprios do Ensino Superior e tratam de um aspecto das funções: a sua taxa de variação.

Plano tangente não é um aspecto das funções, por isso, não é um aspecto avançado das funções. Já os conceitos de Derivada Direcional e Gradiente o são. O conceito de função é elementar a estes conceitos, eles são próprios do Ensino Superior e tratam de um aspecto das funções: a taxa de variação da função.

Máximos e Mínimos, como mencionado na seção anterior, são aspectos avançados das funções. Já os Multiplicadores de Lagrange não, pois não se trata de um aspecto das funções.

Por fim, como mencionado na seção anterior, o conceito de integral e as técnicas e recursos para calculá-la não se tratam de aspectos das funções e, portanto, não são aspectos avançados das funções.

Em suma, esta disciplina aborda os seguintes aspectos avançados das funções: Curvas de nível, limite e continuidade, derivada parcial, total e direcional, gradiente e máximos e mínimos.

5.2.3 Cálculo Diferencial e Integral III

Figura 5 – Conteúdo programático da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

• Sequências, sequências convergentes, teorema da convergência monótona.
•Séries numéricas,teste do termo geral, tete da integral, séries p, teste de comparação, teste de comparação de limites, séries alternadas, séries telescópicas, teste da razão, teste da raiz.
• Séries de potências, raio de convergência, polinômio de Taylor, série de Taylor e Maclaurin, representação de funções por Séries de Taylor.
• Funções vetoriais, curvas parametrizadas, relação entre curvas parametrizadas e funções vetoriais, comprimento de arco, integral de funções reais sobre curvas parametrizadas, curvatura.
• Campos Vetoriais, exemplos, campos conservativos, integrais de linha e aplicações;
• Teorema Fundamental das Integrais de Linha, independência do caminho, conservação de energia, Teorema de Green e aplicações.
• Rotacional, Divergente, Laplaciano, Superfícies Parametrizadas, Superfícies Orientavéis, Integrais de Superfícies, Teorema de Stokes, Teorema de Gauss (do divergente).

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

Quanto a esta disciplina adotamos os mesmos critérios para identificarmos os aspectos avançados do conceito de função abordados por ela.

O conceito de sequência além de ser abordado no Ensino Superior também é amplamente explorado na Educação Básica, por isso, ele não é próprio do Ensino Superior. Já o conceito de convergência é próprio do Ensino Superior, é sustentado e estruturado pelo conceito de função e trata de um aspecto das funções, logo, ele é um aspecto avançado das funções.

O conceito de série também é um conceito próprio do Ensino Superior, ele é sustentado e estruturado pelo conceito de função, entretanto, não se trata de um aspecto das funções, logo, não é um aspecto avançado das funções.

As funções vetoriais e a função de parametrização não se tratam de um aspecto das funções e sim de exemplo de funções, por isso, não são aspectos avançados das funções.

Os últimos aspectos avançados das funções abordados nesta disciplina são os conceitos de rotacional, direcional e laplaciano. Eles são sustentados e estruturados pelo conceito de função, são próprios do Ensino Superior e tratam de um aspecto das funções globais das funções.

Portanto, nesta disciplina são abordados os seguintes aspectos avançados das funções: Convergência, Rotacional, Divergente e Laplaciano.

5.2.4. Álgebra Linear

Figura 6 – Conteúdo programático da disciplina de Álgebra Linear: primeira parte

- Matrizes
- Sistemas de Equações Lineares
- Determinante; Matriz Inversa
- Espaço Vetorias
- Subespaços
- Vetoriais
- Combinação Linear
- Dependência e Independência Linear
- Base de um espaço Vetorial
- Dimensão de um Espaço Vetorial
- Coordenadas de um Vetor
- Mudança de Base
- Transformação Linear
- Imagem e Núcleo de uma Transformação Linear
- Teorema do Núcleo e Imagem; Matriz da Transformação Linear
- Operador Linear
- Autovalor e Autovetor
- Polinômio Característico
- Diagonalização de Operadores
- Produto Interno
- Coeficiente de Fourier
- Ângulo entre Vetores

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

Figura 7 – Conteúdo programático da disciplina de Álgebra Linear: segunda parte

- Ortogonalidade de Vetores
- Procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt
- Complemento Ortogonal
- Operadores Auto-Adjuntos e Ortogonais
- Diagonalização de Operadores Auto-Adjuntos
- Caracterização de Operadores Ortogonais
- Classificação de Quádricas e Cônicas
- Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

A disciplina de Álgebra Linear tem o conceito de transformação linear como um de seus principais objetos de estudo. As transformações lineares são um tipo especial de função. Entretanto, na disciplina de graduação que trata da Álgebra Linear os únicos aspectos das transformações lineares que são abordados são os conceitos de núcleo e imagem. Como o conceito de imagem é amplamente utilizado na Educação Básica, o conceito de núcleo é o único aspecto avançado das funções abordado nesta disciplina.

5.2.5 Análise Real

Figura 8 – Conteúdo programático da disciplina de Análise Real: primeira parte

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS
- Teoria elementar dos conjuntos;
- Números Naturais;
- Princípio da Indução Matemática;
- Conjuntos finitos e infinitos;
- Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis;

NÚMEROS REAIS
- Elementos de teoria de grupos;
- Corpos;
- Corpos ordenados;
- R como um corpo ordenado;
- Desigualdades;
- Supremo e ínfimo de um conjunto;
- R como um corpo ordenado completo;

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

Figura 9 – Conteúdo programático da disciplina de Análise Real: segunda parte

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS
- Seqüênciasdenúmeros reais;
- Limitesdesequências;
- Operações com Limites;
- Seqüências Monótonas;
- O número *e*;
- Limite Infinitos;
- Teorema dos intervalosencaixantes;
- Seqüências de Cauchy;
- O Teorema deBolzano-Weierstrass;

SÉRIES NUMÉRICAS REAIS
- Definição;
- Séries convergentes;
- Séries absolutamente convergentes;
- Testesdeconvergência;
- Sériesalternadas;
- Operações com séries;

NOÇÕES TOPOLÓGICAS NA RETA
- Topologia da reta;
- Conjuntos abertos;
- Conjuntos fechados;
- Pontos deacumulação;
- Pontosaderentes;

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

Figura 10 – Conteúdo programático da disciplina de Análise Real: terceira parte

FUNÇÕES REAIS E LIMITES
- Limite de umafunção;
- Propriedades de limite;
- Limites laterais;
- Limites infinitos e no infinito;
- Expressões indeterminadas;

FUNÇÕES CONTÍNUAS
- Conjuntos Compactos;
- Funções contínuas num Intervalo;
- O Teorema do ValorIntermediário;
- Funções contínuas em conjuntos compactos;
- Continuidade Uniforme;

DERIVADAS
- O conceito de derivada;
- Regras operacionais;
- Máximos e mínimos locais;
- Teorema do Valor Médio e suasaplicações;
- Fórmula de Taylor;

Fonte: Universidade Federal de Pernambuco (2016)

A disciplina de Análise Real trata de muitos conceitos em comum com as disciplinas de Cálculo. Dentre eles destacamos os que já identificamos como aspectos avançados das funções: Limite, Convergência, Continuidade, Derivada, Máximos e Mínimos.

Dentre os conceitos tratados que não são tratados nas outras disciplinas que analisamos anteriormente o único conceito que identificamos como um aspecto avançado das funções é o conceito de continuidade uniforme.

Em suma, existe uma miríade de conceitos matemáticos do Ensino Superior que podem ser considerados como aspectos avançados das funções. Organizamos no quadro abaixo os conceitos matemáticos que, a partir da nossa análise identificamos como aspectos elementares e avançados das funções:

Quadro 1 – Aspectos Elementares e Avançados do Conceito de Função

Aspectos Elementares das Funções	**Aspectos Avançados das Funções**
As noções de correspondência, variação, variável, constante, dependência; As representações verbal, tabular, geométrica e algébrica do conceito de função; e os conceitos de conjunto, domínio, contradomínio, relação e imagem.	Limite, Continuidade, Derivada, crescimento e decrescimento, concavidade, Assíntotas Horizontais, Verticais e Inclinadas, Máximos e Mínimos, Derivadas Parciais e Totais, Derivada Direcional, Gradiente, Convergência, Rotacional, Divergente, Laplaciano, Núcleo e Continuidade Uniforme.

Fonte: Própria

Este quadro não é definitivo, pois outros conceitos matemáticos podem ser considerados elementares ou avançados em relação ao conceito de função e que não constam nem no recorte do desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função abordado nos capítulos 3 e 4 deste trabalho nem nas ementas das disciplinas analisadas.

Além disso, a relação entre o elementar e o avançado é uma relação dinâmica que se altera com o tempo, pois conceitos da Matemática Avançada podem tornar-se elementares através da *translação histórica*.

6 A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO PROFESSOR: DUPLA DESCONTINUIDADE E A DIALÉTICA[24] ELEMENTAR X AVANÇADO

Vamos abordar, neste capítulo, algumas reflexões e questionamentos a respeito da formação matemática nas licenciaturas. Ou seja, vamos tratar da Matemática abordada na licenciatura em Matemática. Nossa abordagem terá como fios condutores a *dupla descontinuidade na formação do professor de matemática* e a *dialética elementar x avançado*.

Discutir a formação matemática nas licenciaturas em Matemática não é algo recente. Felix Klein (1849 – 1925) já o fazia no início do século XX. Klein identificou um problema estrutural na formação matemática dos professores – a *dupla descontinuidade na formação do professor de matemática*:

> [...] por um lado, quando os estudantes ingressam nos cursos universitários de formação de professores, poucas relações são estabelecidas entre a matemática com que passam a ter contato e aquela anteriormente aprendida por eles como alunos da escola básica; e, por outro lado, quando concluem esses cursos e iniciam a vida profissional, poucas relações são estabelecidas entre a matemática aprendida durante a graduação e aquela que passa a ser demandada pela prática de sala de aula da escola básica. Assim, é como se, ao ingressar na universidade, o futuro professor devesse 'esquecer' toda a matemática que aprendeu até então na escola básica; e ao terminar a graduação, o professor devesse novamente 'esquecer' toda a matemática ali aprendida para se iniciar na carreira docente (GIRALDO, 2018, p. 37).

Essa desconexão entre aquilo que é aprendido na universidade e aquilo que é demandado na escola acaba acarretando um efeito inócuo, por parte do curso universitário, na formação do professor. Como afirma Cavalcanti (2016), esta ainda parece ser uma realidade nas licenciaturas no Brasil.

É necessário, portanto, superar esta dupla descontinuidade na formação a fim de que a formação tenha um efeito positivo na prática do futuro professor de matemática da Escola Básica.

Estabelecer tais conexões depende de serem debatidas duas questões fundamentais a respeito da formação matemática: "- Que Matemática deve aprender um futuro professor de Matemática da Educação Básica? - Como deve aprender

---

[24] A relação dialética entre o elementar e o avançado não é intrínseca à relação entre estes dois conceitos. Em nossa abordagem, inclusive, eles são complementares. A dialética entre estes conceitos emerge da forma como eles muitas vezes interagem na formação do professor de matemática. Quando as conexões entre a Matemática da Educação Básica e a Matemática do Ensino Superior não são evidenciadas a relação entre o elementar e o avançado torna-se uma relação de oposição, daí emerge a sua dialética na formação do professor de matemática.

Matemática um futuro professor de Matemática da Educação Básica?" (CAVALCANTI, 2016, p. 8).

A Matemática ensinada na Educação Básica deve ser abordada nas licenciaturas? Giraldo (2018) explica que Deborah Ball, em sua tese de doutorado, defende que sim. Nela, Ball confronta três concepções aceitas tacitamente dentro dos cursos de formação de professores:

> (i) os tópicos da matemática escolar são simples e comumente entendidos; (ii) portanto, esses tópicos não precisam ser reaprendidos pelos futuros professores na universidade; (iii) o conhecimento de matemática de nível universitário será suficiente para equipar os futuros professores com um entendimento amplo e profundo da matemática escolar, suficiente para o ensino da disciplina na educação básica (GIRALDO, 2018, p. 37).

Depreende-se, portanto, que os tópicos da Matemática Escolar devem sim fazer parte do repertório de conhecimentos matemáticos a serem estudados durante a licenciatura em matemática. Mas, como estes tópicos devem ser abordados na licenciatura?

Existem duas abordagens distintas que se pode seguir. A primeira como *recurso* na qual estes tópicos são abordados como forma de nivelamento para se estudar a Matemática Superior e, consequentemente, se não forem necessários a este propósito nem sequer são mencionados. A segunda abordagem os utiliza como *metodologia*, isto é, são desenvolvidas situações onde se discute o desenvolvimento histórico e epistemológico dos conceitos (VALENTE, 2013).

Porém, a partir de sua experiência profissional como formador de professores de matemática, Cavalcanti (2016) salienta que a abordagem predominante da Matemática Escolar nas licenciaturas é a que a utiliza como *recurso*.

É importante, entretanto, salientar que a *Matemática Escolar* não se trata de um amontoado de tópicos de Matemática. Na perspectiva de Moreira (2004), *Matemática Escolar* refere-se:

> [...] ao conjunto dos saberes 'validados', associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática. Com essa formulação, a matemática escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, como também resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. (p. 18, grifos do autor).

A partir desta perspectiva, Matemática Escolar seria, portanto, a Matemática do professor de matemática. Esta Matemática inclui tanto os tópicos abordados na Escola Básica, como sua história, seu desenvolvimento epistemológico, seus aspectos didáticos, de forma geral, todos os conhecimentos DE e SOBRE a Matemática da Escola Básica, do ponto de vista do seu ensino.

Compreender a Matemática do professor de matemática desta maneira está em consonância com os trabalhos de Ball que compreende que a formação matemática do professor de matemática deve contemplar:

> [...] conhecimento *sobre* a matemática (como cultura e disciplina científica em suas múltiplas dimensões), conhecimento *substantivo* da matemática (isto é conhecer os princípios, fundamentos e procedimentos dos vários campos da matemática e suas respectivas práticas) e conhecimento *atitudinal* (postura crítica e afetiva perante o saber matemático e suas diferentes formas de abordá-lo) (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p.929, grifos dos autores).

A partir dessas concepções, pode-se afirmar que é de essencial importância a presença da Matemática Escolar, no sentido apresentado acima, na licenciatura em matemática. E quanto a Matemática Acadêmica?

Para Cavalcanti (2016) a Matemática Acadêmica/Avançada deve fazer parte da formação do professor de matemática segundo duas abordagens distintas:

> [...] [A primeira de um ponto de vista elementar cujo intuito] seria apresentar os conteúdos da Matemática enquanto disciplina acadêmica e científica de maneira intuitiva focando a natureza dinâmica da Matemática, destacando, principalmente, suas aplicações, sua inserção e seu papel significativo na sociedade, não só no que diz respeito à Ciência e Tecnologia, mas também nos contextos político, econômico, na saúde pública, etc. O estudo de modelos matemáticos aplicados nos mais diversos contextos seria priorizado nessas disciplinas. [...] [A segunda de um ponto de vista avançado cujo intuito é] consolidar os outros dois conjuntos de disciplinas. (p. 9).

Portanto, tanto a Matemática Escolar quanto a Matemática Acadêmica devem fazer parte do repertório de saberes a serem abordados na formação matemática nas licenciaturas. Entretanto, elas devem estabelecer conexões dentro da formação, do contrário, ainda haverá uma descontinuidade entre a formação e a prática do futuro professor de matemática.

As disciplinas de Matemática Acadêmica devem levar em consideração as relações que seus conceitos possuem com os conceitos da Matemática Escolar. Uma via através da qual estas conexões podem ser estabelecidas é através da dinâmica entre o *elementar* e o *avançado* em Matemática.

Os conceitos da Matemática Avançada, por um lado, são sustentados e estruturados por conceitos da Matemática Elementar e, por outro lado, são aspectos avançados dos conceitos da Matemática Elementar.

Além disso, segundo a perspectiva de Klein abordada no Capítulo 2, partes da Matemática Avançada tornam-se parte da Matemática Elementar através do processo de *translação histórica*.

Sendo assim, Matemática Elementar e Matemática Avançada possuem diversas conexões e, dentro da formação matemática, é necessário evidenciá-las para que o futuro professor de matemática seja capaz de estabelecer conexões entre o que aprendeu na licenciatura e aquilo que vai ensinar na escola.

A partir de nossas reflexões emergem alguns questionamentos importantes: (1) Como identificar as conexões entre a Matemática Elementar e a Matemática Avançada? (2) Como abordar a Matemática Avançada a fim de evidenciar as suas conexões com a Matemática Elementar? (3) Como explorar estas conexões pode contribuir para uma melhor compreensão da Matemática Elementar?

Em suma, a discussão a respeito da formação matemática é uma discussão essencial a fim de superarmos a dupla descontinuidade na formação do professor de matemática. Abordar esta discussão a partir da dialética elementar x avançado contribui com elementos para refletirmos a respeito de como estabelecer conexões entre a Matemática Escolar e a Matemática Superior. Nesse sentido, a dialética elementar x avançado é uma importante via para se superar a dupla descontinuidade na formação do professor de matemática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos, através deste trabalho, analisar o conceito de função a partir da dialética elementar x avançado. Através deste objetivo geral estabelecemos os seguintes objetivos específicos: (1) Investigar o desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de função; (2) Analisar os atos de entendimento e os obstáculos epistemológicos do desenvolvimento das funções; (3) Analisar os aspectos elementares e avançados do conceito de função.

Abordamos em nosso estudo a noção de Felix Klein do elementar matemático, o desenvolvimento histórico e epistemológico das funções, os atos de entendimento e os obstáculos epistemológicos deste desenvolvimento e abordamos também questões relativas à formação matemática do professor de matemática a partir da dialética elementar x avançado.

O processo de desenvolvimento das funções foi dinâmico, longo e complexo. Tem início ainda na Antiguidade a partir de ideias não abstratas, perpassa por diversas definições do conceito de função até chegar a definição atual, proposta pelo grupo Bourbaki em meados do século XX.

Durante este processo o conceito de função foi definido de diversas formas: Grandeza dependente de uma ou mais grandezas; expressão analítica; variável dependente; correspondência entre conjuntos numéricos e correspondência entre conjuntos quaisquer, de tal forma, que a cada elemento do domínio corresponde um único elemento do contradomínio.

O processo de desenvolvimento das funções ressalta o caráter dinâmico da Matemática. A Matemática está em constante construção e os conceitos em constante transformação a fim de atenderem às demandas que lhes são impostas.

Analisar o desenvolvimento histórico e epistemológico dos conceitos matemáticos através dos seus *atos de entendimento* e dos seus *obstáculos epistemológicos* se mostrou uma importante via de pesquisa. A partir desta abordagem pode-se compreender os pontos-chave do desenvolvimento de um conceito matemático. Estes pontos-chave são momentos de ruptura, isto é, momentos de quebra de paradigmas.

O desenvolvimento das funções foi permeado por diversos momentos de ruptura. Eles revelam que o conceito de função passou por um processo complexo de desenvolvimento. Estes momentos de quebra de paradigma foram motivados por problemas que estavam além do domínio de validade da definição de função utilizada na época. Motivados por estes problemas (que podem ou não serem problemas matemáticos), uma nova definição de função é proposta a fim de estender o domínio de validade da definição anterior. Ressaltamos que não ocorre uma substituição, mas sim uma adaptação da definição aos problemas que emergem de demandas internas ou externas à Matemática.

Através da nossa análise identificamos diversos aspectos elementares e avançados do conceito de função. O conceito de função pode ser abordado tanto de uma perspectiva elementar (através dos seus aspectos elementares) quanto de uma perspectiva avançada (através dos seus aspectos avançados).

Através da perspectiva elementar são ressaltados os conceitos que sustentam e estruturam o conceito de função e através de uma perspectiva avançada são ressaltadas as conexões deste conceito com as disciplinas da Matemática Superior.

O elementar e o avançado não são conceitos antagônicos, mas sim conceitos complementares. O avançado com o tempo pode tornar-se elementar e através do elementar pode-se compreender o avançado. A relação entre o elementar e o avançado, portanto, é bastante intrincada.

O elementar e o avançado fazem parte da formação matemática do futuro professor de matemática. Entretanto, eles vêm sendo abordados de forma desarticulada dentro da formação. Esta desarticulação entre o elementar e avançado gera uma ruptura entre a Matemática Elementar e a Matemática Avançada.

Para superar esta ruptura é necessário que a abordagem das disciplinas que fazem parte da formação matemática evidenciem as conexões existentes entre a Matemática Elementar e a Matemática Avançada.

Emergem a partir do nosso trabalho alguns questionamentos a serem abordados em pesquisas futuras: (1) Como identificar as conexões entre a Matemática Elementar e a Matemática Avançada? (2) Como abordar a Matemática Avançada a fim de evidenciar as suas conexões com a Matemática Elementar? (3) Como explorar estas conexões pode contribuir para uma melhor compreensão da Matemática Elementar?

Por fim, ressaltamos que a abordagem da dialética elementar x avançado contribui com elementos para discutir-se a formação matemática na licenciatura a fim de superar a dupla descontinuidade na formação do professor de matemática.

Através da dialética elementar x avançado são evidenciadas as conexões entre a Matemática Escolar e a Matemática Superior. Estas conexões devem ser ressaltadas durante a formação matemática para que a dupla descontinuidade nas licenciaturas possa, enfim, ser superada.

REFERÊNCIAS

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Lisboa Editora, 1951.

CAVALCANTI, J. D. B. **A noção de relação ao saber:** história e epistemologia, panorama do contexto francófono e mapeamento de sua utilização na literatura científica brasileira. 2015. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

CAVALCANTI, J. D. B. Reflexões e encaminhamentos sobre a formação de professores nos cursos de licenciatura em matemática. In: **Anais** do Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/autores-J.html> Acesso em: 14 mai. 2019.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

ESQUINCALHA, A. C. Nicolas Bourbaki e o Movimento Matemática Moderna. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, Rio de Janeiro, v. 2, n.3, p. 28 - 37, 2012.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP; v. 27, n. 47, p. 917 - 938, dez. 2013.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: Para uma abordagem problematizada. **Ciência e Cultura**, São Paulo, v. 70, n. 1, p. 37 - 42, 2018.

GIRALDO, V.; MACULAN, N.; RANGEL, L. Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo. **Revista Professor de Matemática Online.** v. 2, n. 1,

2014. Disponível em: <https://pmo.sbm.org.br/?s=matem%C3%A1tica+elementar+e+saber+pedag%C3%B3gico+de+conte%C3%BAdo> Acesso em: 30 mai. 2019.

GONÇALVES. **Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ciências) – ICMC – USP, São Carlos, 2015.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 1.** 11ª edição. SBM, 2016.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 1.** 15ª edição. IMPA, 2019.

KLEIN, F. **Elementary Mathematics from a Higher Standpoint Volume 1: Arithmetic, Algebra, Analysis.** 1ª edição. Springer, 2016.

MOREIRA, P. C. **O Conhecimento Matemático do Professor:** Formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

OLIMPIO JUNIOR, A. Primeiro Ano num Curso de Matemática: A Definição de Função e a Dualidade Local/Global em Conceitos de Cálculo. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 28, p. 39-68, 2007.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações e teses**. 5 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

OLIVEIRA, N. **Conceito de Função:** Uma abordagem do Processo Ensino-Aprendizagem. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - PUC - SP, São Paulo, 1997.

RANGEL, L. **Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo.** 2012. Tese

(Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

RORATTO, C. **A história da matemática como estratégia para o alcance da aprendizagem significativa do conceito de função.** 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2009.

ROQUE, T **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

SCHUBRING, G. **Klein's Conception of 'Elementary Mathematics from a Higher Standpoint'.** In: WEIGAND, H. G. et al. **The Legacy of Felix Klein.** Springer, p. 169-180, 2019

SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function.** In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. **The Conception of Function:** Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA NOTES 25, p. 25-58, 1992.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. **Programa dos Componentes Curriculares por Período.** Recife, 2016. 291 p.

VALENTE. O Lugar da Matemática Escolar na Licenciatura em Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP; v. 27, n. 47, p. 939 - 953, dez. 2013.