



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Juan Ricardo Muñoz Galeano

Boa colocação e controle para um modelo KdV-KdV

Recife

2021

Juan Ricardo Muñoz Galeano

Boa colocação e controle para um modelo KdV-KdV

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): Roberto de Almeida Capistrano Filho (UFPE)

Coorientador (a): Fernando Andrés Gallego Restrepo (UNAL-Colômbia)

Recife

2021

Catálogo na fonte
Bibliotecária Nataly Soares Leite Moro, CRB4-1722

M994b Muñoz Galeano, Juan Ricardo
Boa colocação e controle para um modelo KdV-KdV / Juan Ricardo Muñoz
Galeano. – 2021.
75 f.

Orientador: Roberto de Almeida Capistrano Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN,
Matemática, Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Análise. 2. Controlabilidade. 3. Controlabilidade. 4. Equação KdV-KdV. 5.
Sistemas dispersivos. I. Capistrano Filho, Roberto de Almeida (orientador). II.
Título.

515

CDD (23. ed.)

UFPE- CCEN 2022 - 15

JUAN RICARDO MUÑOZ GALEANO

BOA COLOCAÇÃO E CONTROLE PARA UM MODELO KDV–KDV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 29/10/2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto De Almeida Capistrano Filho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Miguel Loayza Lozano (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico a minha avó Gloria, minha mãe Siomara, meus tios Julio e Sergin e a minha pequena família Mariana e Berlín.

AGRADECIMENTOS

A minha avó Gloria, minha mãe Siomara e meus tios Julio e Sergin pelo amor, apoio e educação que eles me deram. Devo todo a vocês.

A minha namorada Mariana pelo apoio, compreensão, paciência e amor que sempre teve comigo.

Agradeço aos professores Roberto Capistrano e Fernando Gallego pela paciência, ensinamentos e dedicação. Continuarei trabalhando com “fúria” e “gastando muita energia”. Obrigado por acreditar em mim.

A toda a família da minha namorada que me acolheu como se eu fosse parte deles. Especialmente a meus sogros Lina e Jorge pelo apoio e carinho.

Aos professores da pós-graduação do DMAT-UFPE que, apesar da pandemia, continuaram com o ensino nas disciplinas.

Aos meus amigos pelo apoio com palavras de incentivo e força além dos momentos de café, caminhadas, comida e risos.

Aos professores da banca examinadora, por todas as correções/sugestões apontadas.

Meu agradecimento à Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco-FACEPE pelo apoio financeiro sob o projeto número IBPG-0909-1.01/20.

RESUMO

Nesta dissertação estudaremos o sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV, o qual descreve a propagação de ondas (de pequena amplitude) na superfície de um canal de água. O trabalho será dividido em 4 capítulos. O primeiro capítulo diz respeito a resultados clássicos que serão utilizados no desenvolvimento da dissertação. No segundo capítulo voltaremos a nossa atenção para o problema de controlabilidade exata para o sistema linearizado de Boussinesq do tipo KdV-KdV com dois controles. Utilizando o método da unicidade de Hilbert mostraremos que o sistema em questão é exatamente controlável se, e somente se, o comprimento do domínio espacial não pertence ao um conjunto finito e enumerável. No terceiro capítulo, estudaremos como obter dissipação da energia associada a solução do sistema e o efeito regularizante de Kato, sendo preciso, mostraremos algumas condições de contorno que garantem estas duas propriedades. Por fim, no último capítulo, apresentaremos algumas considerações e perspectivas de estudos futuros para o sistema de Boussinesq. Adicionalmente, no apêndice, usaremos o fato de que a energia do sistema é dissipativa, para um certo conjunto de condições de contorno, e juntamente com algumas estimativas pontuais garantimos a boa colocação do problema e a estabilidade exponencial das soluções, sem a presença de comprimento críticos para o domínio espacial.

Palavras-Chave: boa colocação; controlabilidade; estabilização; equação KdV-KdV; sistemas dispersivos.

ABSTRACT

In this work we will study the KdV-KdV type Boussinesq system, which describes the propagation of waves (with small amplitude) on the surface of a water channel. The work will be divided into 4 chapters. The first chapter concerns the classic results that will be used in the development of the work. In the second chapter we turn our attention to the exact controllability problem for the linearized Boussinesq system of the KdV-KdV type with two controls. Using the Hilbert uniqueness method we will show that the system in question is exactly controllable if and only if the length of the spatial domain does not belong a finite and enumerable set. In the third chapter, we will study how to obtain the energy dissipation associated with the solution of the system and the Kato smoothing effect, being precise, we will show some boundary conditions that guarantee these two properties. Finally, in the last chapter, we will present some considerations and perspectives for future studies for the Boussinesq system. In addition, in the appendix, we will use the fact that the energy of the system is dissipative, for a certain set of boundary conditions, and together with some estimates we guarantee the well-posedness result and the exponential stability of the solutions of the system, without a critical set for the spatial domain.

Keywords: well-posedness; controllability; stabilization; KdV-KdV equation; dispersive system.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	13
2.1	ESPAÇOS FUNCIONAIS	13
2.2	ESPAÇOS DE SOBOLEV	14
2.3	DESIGUALDADES IMPORTANTES	17
2.4	INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS DE SOBOLEV	18
2.5	ESPAÇOS $L^p(0, T; X)$	19
2.6	RESULTADOS IMPORTANTES	21
2.7	TEORIA DE SEMIGRUPOS	22
2.8	PROBLEMA DE CAUCHY ABSTRATO	24
3	FENÔMENOS DE COMPRIMENTOS CRÍTICOS E CONTROLA-	
	BILIDADE	26
3.1	BOA COLOCAÇÃO	27
3.1.1	Boa colocação do problema linear homogêneo	27
3.1.2	Existência dos traços	30
3.1.3	Sistema Adjunto	35
3.1.4	Boa colocação do problema linear não homogêneo	38
3.2	CONTROLABILIDADE	40
4	SOBRE DISSIPACÕES NA FRONTEIRA E SEUS EFEITOS RE-	
	GULARIZANTES	49
4.1	CONDIÇÕES DE CONTORNO QUE GERAM DISSIPACÃO DA ENERGIA	49
4.2	SOBRE O EFEITO REGULARIZANTE DE KATO	51
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – O EFEITO DOS AMORTECIMENTOS NA FRON-	
	TEIRA E SUAS PROPRIEDADES DE DECAI-	
	MENTO	61

1 INTRODUÇÃO

Equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não lineares, tem suas raízes na descoberta de um fenômeno, denotado “Onda Solitária” por John Scott Russel. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem mudar de forma. Russel realizou vários experimentos deste fenômeno e desafiou diversos pesquisadores a tentar explicar tal descoberta.

Após isto, cientistas como George Airy e George Stokes se interessaram pelo assunto desenvolvendo e analisando os modelos matemáticos dos fenômenos observados anteriormente em laboratórios. Apesar de certo avanço, várias perguntas ficaram sem respostas concretas, como por exemplo, por que existe uma propagação constante de uma onda com forma permanente sobre a superfície da água? O próximo grande avanço se encontra no trabalho de Joseph Boussinesq por volta de 1871. O modelo matemático dele inclui, implicitamente, várias situações as quais originaram outras importantes equações.

O sistema de Boussinesq descreve a propagação de ondas (de pequena amplitude) na superfície de um canal de água. Atualmente, já se sabe que esse tipo de sistema e suas generalizações, são extremadamente úteis quando se estuda a propagação de ondas em grandes lagos, oceanos, etc.

Em (BONA; CHEN; SAUT, 2002), J. Bona, M. Chen e J.C. Saut conseguiram derivar um sistema do tipo Boussinesq que descreve fenômenos da mesma natureza

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + a\omega_{xxx} - b\eta_{xxt} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + c\eta_{xxx} - d\omega_{xxt} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde os parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que satisfazem as condições

$$a + b = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right), \quad c + d = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) \geq 0, \quad (1.2)$$

com $\theta \in [0, 1]$ e $a + b + c + d = 1/3$.

Os resultados que estudaremos nesta dissertação, baseados nos artigos (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2019) e (PAZOTO; ROSIER, 2008), são obtidos para o sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV, isto é, $a = c > 0$ e $b = d = 0$ (é possível fazer uma mudança

de variável tal que $a = c = 1$) em um intervalo limitado $I = (0, L)$, à saber

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + \omega_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \geq 0, \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + \eta_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \geq 0 \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (1.3)$$

e condições de contorno adequadas.

Para o primeiro problema em consideração neste trabalho estudaremos a versão linear do sistema (1.3), isto é,

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \geq 0, \\ \omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \geq 0, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (1.4)$$

Com este sistema em mãos, surge a seguinte questão:

- É possível encontrar condições de contorno adequadas tais que dadas as condições iniciais (η_0, ω_0) e finais (η_1, ω_1) , em espaço funcionais adequado, a solução (η, ω) de (1.4) satisfaz $(\eta(\cdot, T), \omega(\cdot, T)) = (\eta_1, \omega_1)$, para todo $T > 0$?

Inicialmente, vamos nos concentrar na controlabilidade exata do sistema (1.4) com dois controle nas condições de Neumann,

$$\begin{cases} \omega(0, t) = 0, & \omega(L, t) = 0, \\ \omega_x(0, t) = g_2(t), & \omega_x(L, t) = h_2(t), \\ \eta(0, t) = 0, & \eta(L, t) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Assim, um dos Teoremas principais do nosso trabalho foi provado em (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2019) garantindo a controlabilidade para o sistema (1.4)-(1.5) quando o comprimento do intervalo $L \notin \mathcal{N}$, onde

$$\mathcal{N} := \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{k^2 + kl + l^2} : k, l \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Precisamente, o resultado pode ser visto à seguir.

Teorema 1. *Seja $L \notin \mathcal{N}$ e $T > 0$. Então existe uma constante $C = C(L, T) > 0$ tal que*

$$\|(\eta_0, \omega_0)\|_{H_1(I)}^2 \leq C \int_0^T [|\eta_x(L, t)|^2 + |\omega_x(0, t)|^2] dt, \quad (1.6)$$

para todo $(\eta_0, \omega_0) \in [H_1(I)]^2$ onde (η, ω) denota a solução do sistema (1.4)-(1.5).

O Teorema 1 mostra a desigualdade de observabilidade o que implica, pelo método da unicidade de Hilbert, a controlabilidade exata do sistema em consideração. A prova do Teorema 1 é obtida da seguinte maneira: Primeiro estudamos a boa colocação do problema linear homogêneo usando teoria de semigrupos. Logo, mostramos que os traços estão bem definidos em $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ e, com o método de transposição, provamos a boa colocação para o sistema linear não homogêneo. Por fim, com os resultados acima conseguimos mostrar que o sistema (1.4)-(1.5) é controlável, o que é uma consequência da desigualdade de observabilidade (1.6).

No apêndice, com o intuito de removermos a restrição sobre o comprimento L do domínio espacial, vamos estudar o comportamento assintótico das soluções do sistema de (1.3). Para estudar o sistema (1.3) precisamos de condições de contorno adequadas, à saber

$$\begin{cases} \omega(0, t) = 0, & \omega(L, t) = \alpha_2 \eta(L, t), \\ \omega_x(0, t) = \alpha_0 \eta_x(0, t), & \omega_x(L, t) = -\alpha_1 \eta_x(L, t), \\ \eta(0, t) = 0, & \omega_{xx}(L, t) = -\alpha_2 \eta_{xx}(L, t), \end{cases} \quad (1.7)$$

onde α_0, α_1 e α_2 denotam constantes reais não negativas.

Com as condições de contorno acima, a energia total associada ao sistema

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (\eta^2 + \omega^2) dx \quad (1.8)$$

é dissipativa. Portanto, é possível observar que as condições de contorno atuam como um mecanismo dissipativo, pelo menos para o sistema linear. Daí, surgem as seguintes perguntas

- $E(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$?
- Se este for o caso, é possível determinar uma taxa de decaimento?

A relação entre a dissipação da energia e o efeito regularizante de Kato pode ser vista em (PAZOTO; ROSIER, 2008) dando respostas para as perguntas acima. Vale mencionar que em (MAMUD, 2012) o autor estuda em sua dissertação tal problema detalhando várias passagens. Aqui daremos apenas uma ideia das provas para deixar o trabalho autocontido.

Teorema 2. *Assuma que $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 = 1$. Então existem constantes $\rho > 0$, $C > 0$ e $\mu > 0$, tais que, para quaisquer $(\eta_0, \omega_0) \in [L^2(I)]^2$ com $\|(\eta_0, \omega_0)\|_{[L^2(I)]^2} \leq \rho$, o sistema (1.3)-(1.7) admite uma única solução $(\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; [L^2(I)]^2) \cap C(\mathbb{R}^{+*}; [H^1(I)]^2) \cap$*

$L^2(0, 1; [H^1(I)]^2)$ satisfazendo

$$\|(\eta, \omega)(t)\|_{[L^2(I)]^2} \leq C e^{-\mu t} \|(\eta_0, \omega_0)\|_{[L^2(I)]^2}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.9)$$

$$\|(\eta, \omega)(t)\|_{[H^1(I)]^2} \leq C \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} \|(\eta_0, \omega_0)(t)\|_{[L^2(I)]^2}, \quad \forall t > 0, \quad \forall \alpha \in (0, \mu). \quad (1.10)$$

A prova do Teorema 2 é obtida da seguinte maneira: Primeiro estudamos o sistema linear para deduzir algumas estimativas a priori e o decaimento exponencial das soluções no espaço de energia $[L^2(I)]^2$. Em um segundo momento, estabelecemos o efeito regularizante de Kato usando o método dos multiplicadores de Morawetz, enquanto o decaimento exponencial é obtido com a ajuda de argumentos de compacidade que reduz a prova do resultado a um estudo de um problema espectral. Por fim, a boa colocação global e a estabilidade exponencial das soluções do sistema não linear (1.3)-(1.7) com dados iniciais em $[L^2(I)]^2$ é demonstrado. Em outras palavras, o problema consiste em combinar o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento das soluções em $[L^2(I)]^2$ para estabelecer uma estimativa pontual e, então, aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach em um espaço adequado.

Vale ressaltar que o resultado aqui provado tem carácter local, haja vista que devido a falta das estimativas a priori na norma $[L^2(I)]^2$ a questão da existência global de soluções, sem restrições nos dados iniciais, ainda é um problema aberto.

A dissipação da energia e o ganho de regularidade pelo efeito regularizante de Kato como componentes essenciais da estabilidade exponencial das soluções obtida por (PAZOTO; ROSIER, 2008) motivam procurar por outras condições de contorno que garantam esses fatos. Portanto mostramos algumas condições de contorno nas que vamos obter a dissipação e o efeito regularizante de Kato.

O trabalho estará dividido em 4 capítulos e um apêndice como segue: No **Capítulo 1** apresentamos os resultados clássicos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho. No **Capítulo 2** tratamos o problema de controle para o sistema linear estabelecendo a boa colocação do sistema homogêneo e não homogêneo, provando a existência dos traços e provando a desigualdade de observabilidade, o que garante o resultado de controlabilidade. No **Capítulo 3** mostramos alguns conjuntos de condições de contorno que garantem a dissipação da energia, bem como o efeito suavizante de Kato. Por fim, no **Capítulo 4**, apresentamos perspectivas de estudos futuros para o sistema de Boussinesq. No **Apêndice** mostramos que aumentando dissipações na fronteira o problema de comprimento crítico pode ser removido. Com isto em mãos, estabeleceremos estimativas pontuais que permitem garantir a boa colocação do problema e a estabilidade exponencial das soluções com dados iniciais pequenos

2 PRELIMINARES

Neste capítulo fixaremos algumas notações, daremos definições e alguns resultados relevantes que serão úteis em todo o trabalho.

2.1 ESPAÇOS FUNCIONAIS

Definição 2.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de φ como sendo o fecho de Ω do conjunto de pontos de Ω donde φ não se anula. Vamos denotar por $\text{supp}(\varphi)$, então*

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega: \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Observe que $\text{supp}(\varphi)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é chamada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Representamos por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, definimos $D^0 u = 0$, para toda função u .

Definição 2.1.2. *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe C^∞ em Ω , que possuem suporte compacto em Ω . Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

- (i) *Existe um compacto $K \subset \Omega$, tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$,*
- (ii) *$D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .*

Definição 2.1.3. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima, será denotado por $D(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes sobre Ω . Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $D(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *$T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in D(\Omega)$,*
- (ii) *T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $D(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$, em \mathbb{R} .*

Denotamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

Definição 2.1.4. *O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $D'(\Omega)$. Dizemos que uma sequência de distribuições escalares $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D'(\Omega)$ converge para T em $D'(\Omega)$, quando*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo $\varphi \in D(\Omega)$.

Definição 2.1.5. *Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $D(\Omega)$ por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

2.2 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição 2.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Denotamos por $L^p(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω . Com a norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis a Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|u(x)| \leq C, \text{ quase sempre em } \Omega,$$

que munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|$$

é um espaço de Banach.

Em particular, se $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert cuja norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x).$$

Dizemos que uma sequência (φ_n) em $L^p(\Omega)$ converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, para $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.2.2. Consideremos o espaço $L^p(\Omega)$, então podemos fazer a seguinte identificação para o dual topológico

$$[L^p(\Omega)]' \approx L^q(\Omega),$$

onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$[L^1(\Omega)]' \approx L^\infty(\Omega).$$

Além disso, se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável e se $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Definição 2.2.3 (Espaços de Sobolev). Sejam $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem m , denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$, para as quais suas derivadas de ordem $|\alpha|$, no sentido das distribuições, pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$, ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

são espaços de Banach.

Temos ainda que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço separável se $1 \leq p < \infty$, e reflexivo se $1 < p < \infty$. Em particular, se $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, separável e reflexivo, que é denotado por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

cujas norma e produto interno serão denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 2.2.4. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subset Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Neste caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Observação 2.2.5. (i) Observe que dizer que a imersão de X em Y é contínua é equivalente a dizer que a aplicação identidade $i: X \rightarrow Y$ dada por $i(x) = x, x \in X$, é contínua.

(ii) Note que com a estrutura topológica acima, temos que $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Definição 2.2.6. Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é representado por $W^{-m,q}(\Omega)$, se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{D(\Omega)}$ pertence a $D'(\Omega)$. No caso $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

Teorema 2.2.7 (Teorema de imersão). Sejam $m \geq 1, 1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e com fronteira regular.

(i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.

(ii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, então $W^{m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in [p, +\infty)$.

(iii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$,

sendo as imersões acima contínuas.

Demonstração. Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 2000). □

Teorema 2.2.8 (Rellich - Kondrachov). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e com fronteira Γ regular.

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, \frac{2n}{n-2m})$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty)$.

(iii) Se $n < 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow_c C^k(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - \left(\frac{n}{2}\right) < k + 1$.

Aqui o símbolo \hookrightarrow_c denota imersão compacta.

Demonstração. Ver (BREZIS, 2010). □

Teorema 2.2.9 (Banach - Alaoglu - Bourbaki). O conjunto $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ é compacto pela topologia fraca* $\sigma(E', E)$, onde E é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver (BREZIS, 2010). □

Teorema 2.2.10 (Teorema do traço). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado de classe C^{m+1} com fronteira Γ . Então existe uma aplicação traço $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$, de $H^m(\Omega)$ em $(L^2(\Omega))^m$, tal que*

(i) *Se $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0(v) = v|_\Gamma$, $\gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_\Gamma, \dots, \gamma_{m-1}(v) = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}}|_\Gamma$, onde ν é o vetor normal unitário exterior à fronteira Γ .*

(ii) *A imagem de γ é o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.*

(iii) *O núcleo de γ é $H_0^m(\Omega)$.*

Demonstração. Ver (KESAVAN, 1989). □

2.3 DESIGUALDADES IMPORTANTES

Lema 2.3.1 (Desigualdade de Gronwall). *Seja $z(t)$ uma função real absolutamente contínua em $[0, a)$, tal que para todo $t \in [0, a)$, tem-se*

$$z(t) = C + \int_0^t z(s) ds.$$

Então $z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a)$.

Demonstração. Ver (CODDINGTON; LEVINSON, 1987). □

Lema 2.3.2 (Desigualdade diferencial de Gronwall). *Seja $u(t)$ uma função não negativa e diferenciável em $[0, T]$, satisfazendo*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t),$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções integráveis em $[0, T]$. Então

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau) d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s) e^{-\int_0^s f(\tau) d\tau} ds \right], \quad \forall t \in [0, T].$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções não negativas, então a expressão torna-se

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau) d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s) ds \right], \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração. Ver (CODDINGTON; LEVINSON, 1987). □

Lema 2.3.3 (Desigualdade de Poincaré - Friedrichs). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção x_i de \mathbb{R}^n , ou seja, existe uma direção e_i tal que $|\pi_i(\Omega)| < C$, C constante, onde $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção sobre o eixo e_i . Então, existe uma constante $C_\Omega > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver (MEDEIROS; MIRANDA, 2000). □

Note que, pelo Lema 2.3.3, temos que as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes em $H_0^1(\Omega)$.

Lema 2.3.4 (Desigualdade de Young). *Sejam a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver (BREZIS, 2010). □

Lema 2.3.5 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver (BREZIS, 2010). □

2.4 INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS DE SOBOLEV

Os resultados que aqui enunciaremos, assim como suas demonstrações, podem ser encontrados em (LIONS; MAGENES, 1968). Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, com imersão contínua e densa, $X \hookrightarrow Y$. Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ os produtos internos de X e Y , respectivamente. Indicaremos por $D(S)$, o conjunto de todas as funções u definidas em X , tal que a aplicação $v \mapsto \langle u, v \rangle_X, v \in X$, é contínua na topologia induzida por Y . Então, $\langle u, v \rangle_X = \langle Su, v \rangle_Y$ define S como sendo um operador ilimitado em Y com domínio $D(S)$ denso em Y .

Observe que S é um operador auto-adjunto e estritamente positivo. Usando a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos, podemos definir $S^\theta, \theta \in \mathbb{R}$. Em particular usaremos $A = S^{1/2}$. O operador A , é auto-adjunto, positivo definido em Y , com domínio X e

$$\langle u, v \rangle_X = \langle Au, Av \rangle_Y, \forall u, v \in X.$$

Definição 2.4.1. Com as hipóteses anteriores, definimos o espaço intermediário

$$[X, Y]_\theta = D(A^{1-\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

onde $D(A^{1-\theta})$ representa o domínio de $A^{1-\theta}$, munido da norma

$$\|u\|_{[X, Y]_\theta}^2 = \|u\|_Y^2 + \|A^{1-\theta}u\|_Y^2.$$

Observemos que:

1. $X \hookrightarrow [X, Y]_\theta \hookrightarrow Y$.
2. $\|u\|_{[X, Y]_\theta} \leq \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta$.
3. Se $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ então $[X, Y]_{\theta_0} \hookrightarrow [X, Y]_{\theta_1}$.
4. $[[X, Y]_{\theta_0}, [X, Y]_{\theta_1}]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$.

Teorema 2.4.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s > \frac{1}{2}$. Então,

$$H_0^s = \left\{ u: u \in H^s(\Omega), \frac{\partial^j u}{\partial \eta_j} = 0, 0 \leq j < s - \frac{1}{2} \right\}.$$

Teorema 2.4.3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s_1 \geq s_2 \geq 0$, s_1 e s_2 diferentes de $k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $s = (s - \theta)s_1 + \theta s_2 \neq k + \frac{1}{2}$, então

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega)$$

e

$$[H_0^m(\Omega), H_0^0(\Omega)]_\theta = H_0^s(\Omega), \text{ com } s = (1 - \theta)m \neq k + \frac{1}{2}$$

com as normas equivalentes.

Teorema 2.4.4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com fronteira C^∞ . \tilde{u} uma extensão de u é uma aplicação contínua de $H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se $0 \leq s < \frac{1}{2}$. Além disso, \tilde{u} é uma aplicação contínua de $H_0^s(\Omega) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s > \frac{1}{2}$ se, e somente se $s \neq k + \frac{1}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$.

2.5 ESPAÇOS $L^p(0, T; X)$

Definição 2.5.1. Sejam X um espaço de Banach e $T > 0$. Denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u: (0, T) \rightarrow X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $(0, T)$, que, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach. No caso $p = 2$ e X um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é também um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_X \, dt.$$

Se $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(0, T; X)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u: (0, T) \rightarrow X$, fortemente mensuráveis, tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X$ pertença a $L^\infty(0, T)$, que, munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \operatorname{ess} \|u(t)\|_X,$$

é um espaço de Banach.

Observe que, quando X é reflexivo, separável e $1 < p < \infty$, temos que $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0, T; X')$, onde p e q são índices conjugados e X' é o dual de X .

Teorema 2.5.2 (Aubin-Lions). *Sejam B_0, B e B_1 , espaços de Banach tais que*

$$B_0 \hookrightarrow_c B \hookrightarrow B_1,$$

onde B_0 e B_1 são reflexivos, \hookrightarrow denota a imersão contínua e \hookrightarrow_c imersão compacta. Defina

$$W = \{u \in L^p(0, T; B_0) : u' \in L^q(0, T; B_1)\},$$

onde $1 < p, q < \infty$ e $T < \infty$, munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^q(0, T; B_1)}.$$

Então W é um espaço de Banach e $W \hookrightarrow_c L^p(0, T; B)$.

Demonstração. Ver (LIONS, 1969). □

Uma consequência do Teorema 2.5.2 é a seguinte:

Se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_1)$, então $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em W , donde existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $u_{n_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$, quando $k \rightarrow \infty$.

Definição 2.5.3. *Sejam X espaço de Banach e $T > 0$. Então definimos o espaço das funções fracamente contínuas como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^\infty(0, T; X)$, tais que, $u: [0, T] \rightarrow X$ e a aplicação $t \mapsto \langle \varphi, u(t) \rangle$ é contínua de $[0, T]$ em \mathbb{R} , para todo $\varphi \in X' = \mathcal{L}(X; \mathbb{R})$. Este espaço será denotado por $C_w([0, T]; X)$.*

Teorema 2.5.4. *Sejam X e Y espaços de Banach tais que, $X \hookrightarrow Y$ e X reflexivo. Então temos*

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_\omega([0, T]; Y) = C_\omega([0, T]; X).$$

Demonstração. Ver (TEMAM, 1984). □

2.6 RESULTADOS IMPORTANTES

Teorema 2.6.1 (Ponto fixo de Banach). *Sejam E um espaço de Banach e $F \subset E$ um subespaço fechado de E . Se $f: F \rightarrow F$ é uma contração, então existe um único $z \in F$, tal que $f(z) = z$.*

Demonstração. Ver (RUDIN, 1976). □

Teorema 2.6.2. *Seja X um espaço normado e $\overline{B_1(0)} \subset X$ a bola fechada unitária. Então, $\overline{B_1(0)}$ é compacta se, e somente se, X possui dimensão finita.*

Demonstração. Ver (BREZIS, 2010). □

Teorema 2.6.3. *Se X é um espaço vetorial normado e M é um subespaço de X de dimensão finita, então M é fechado.*

Demonstração. Ver (BACHMAN; NARICI, 1998). □

Teorema 2.6.4 (Convergência dominada de Lebesgue). *Sejam (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de Ω em X , $f: \Omega \rightarrow X$ e $g \in L^1(\Omega)$. Se*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{quase sempre em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{quase sempre em } \Omega,$$

então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \, dx.$$

Demonstração. Ver (FOLLAND, 1999). □

2.7 TEORIA DE SEMIGRUPOS

Definição 2.7.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma aplicação $S: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X , se*

- (i) $S(0) = I$, onde I é a aplicação identidade do espaço X .
- (ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Dizemos que S é de classe C_0 , ou fortemente contínuo, se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

E será S uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

Teorema 2.7.2. *Se $(S(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 , então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver (PAZY, 1999). □

Corolário 2.7.3. *Seja $(S(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 . Então, para cada $x \in X$, a aplicação*

$$t \mapsto S(t)x$$

é contínua. Equivalentemente, para cada $x \in X$,

$$\lim_{t \rightarrow s} S(t)x = S(s)x, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Demonstração. Ver (PAZY, 1999). □

Definição 2.7.4. *Se $\|S(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$, dizemos que S é um semigrupo de contrações.*

Definição 2.7.5. *O operador A definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

e

$$A(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo S .

Note que A é um operador linear e $D(A)$ é um subespaço de X .

Teorema 2.7.6. *Seja $(S(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Então,*

$$(i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(s)x \, ds = S(t)x, \forall x \in X.$$

$$(ii) \int_0^t S(s)x \, ds \in D(A), \forall x \in X, \text{ e } A \left(\int_0^t S(s)x \, ds \right) = S(t)x - x.$$

$$(iii) \text{ Para todo } x \in D(A), S(t)x \in D(A) \text{ e } \frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

$$(iv) \text{ Para todo } x \in D(A), S(t)x - S(s)x = \int_0^t AS(\tau)x \, d\tau = \int_0^t S(\tau)Ax \, d\tau.$$

Demonstração. Ver (PAZY, 1999). □

Corolário 2.7.7. *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é um espaço vetorial denso em X .*

Demonstração. Ver (PAZY, 1999). □

Proposição 2.7.8. *Um operador fechado com domínio denso é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0 .*

Demonstração. Ver (GOMES, 2005). □

Definição 2.7.9. *Sejam X espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^* . Para cada $x \in X$, defina*

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = |x^*|_{X^*}^2 \right\}.$$

Note que, pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$.

Definição 2.7.10. *Uma aplicação de dualidade é uma aplicação $j : X \rightarrow X^*$, tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$, ou seja, $\langle x, j(x) \rangle = \|x\|^2 = \|j(x)\|^2$.*

Definição 2.7.11. *Dizemos que o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação de dualidade j ,*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \forall x \in D(A).$$

Se, além disso, existir $\lambda > 0$ tal que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$, então dizemos que A é m -dissipativo.

Observe que se X é um espaço de Hilbert, então dizemos que $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo se

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0, \forall x \in D(A).$$

Dizemos que $A \in G(M, \omega)$, quando A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , denotado por $(S(t))_{t \geq 0}$, que satisfaz

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Teorema 2.7.12 (Lumer - Phillips). $A \in G(1, 0)$ se, e somente se, A é m -dissipativo e possui domínio denso em X .

Demonstração. Ver (PAZY, 1999). □

Proposição 2.7.13. Seja $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear e X um espaço de Banach. Se $\overline{D(A)} = X$, A, A^* são dissipativos e A é fechado (condição equivalente a $A^{**} = A$), então $A \in G(1, 0)$.

Demonstração. Ver (PAZY, 1999). □

2.8 PROBLEMA DE CAUCHY ABSTRATO

Sejam X um espaço de Banach, $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ de classe C_0 e $f \in L^1(0, T; X)$. Dado $u_0 \in D(A)$, o problema de Cauchy abstrato consiste em determinar uma função $u(t)$, tal que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definição 2.8.1. Dizemos que u é solução clássica (ou forte) de (2.1) em $[0, +\infty)$, se u satisfaz (2.1) e $C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$.

Teorema 2.8.2. Se $A \in G(M, \omega)$ e $u_0 \in D(A)$, o problema (2.1) possui uma solução clássica.

Demonstração. Ver (GOMES, 2005). □

Considere, agora, o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \quad (2.2)$$

Definição 2.8.3. Uma função $u: [0, +\infty) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (2.2) em $[0, +\infty)$ se u satisfaz (2.2) em $[0, +\infty)$ e se $u \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. Uma função $u \in C([0, T]; X)$, dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s)) ds,$$

é chamada de “mild solution” ou solução generalizada de (2.2) em $[0, T]$.

Note que se $f \equiv 0$, então $u(t) = S(t)u_0$, com $u_0 \in X$, é a “mild solution” de (2.1).

Teorema 2.8.4. Seja $f: [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua em t . Suponha que, para cada $\tau > 0$, existe uma constante $L = L(\tau)$, tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in X \text{ e } \forall t \in [0, \tau].$$

Então, para cada $u_0 \in X$, (2.2) possui uma única mild solution $u \in C([0, \tau]; X)$. Além disso, a aplicação $u_0 \mapsto u$ é contínua de X em $C([0, \tau]; X)$.

Demonstração. Ver (GOMES, 2005). □

3 FENÔMENOS DE COMPRIMENTOS CRÍTICOS E CONTROLABILIDADE

Neste capítulo estudaremos a controlabilidade exata do sistema KdV-KdV linearizado,

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \eta(t, 0) = 0, \eta(t, L) = 0, \eta_x(t, 0) = h_2(t), & t \geq 0, \\ \omega(t, 0) = 0, \omega(t, L) = 0, \omega_x(t, L) = g_2(t), & t \geq 0, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \omega(0, x) = \omega_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.1)$$

Seja $L > 0$ fixo. Definimos os espaços

$$X_0 := [L^2(0, L)] = L^2(0, L) \times L^2(0, L), \quad (3.2)$$

$$X_3 := \left\{ (\eta, \omega) \in [H^3(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 : \eta_x(0) = \omega_x(L) = 0 \right\}, \quad (3.3)$$

$$X_{3\theta} := [X_0, X_3]_{[\theta]}, \quad \text{para } 0 < \theta < 1, \quad (3.4)$$

onde $[X_0, X_3]_{[\theta]}$ representa o espaço de Banach obtido por interpolação. Os espaços X_0 e X_3 são munidos, respectivamente pelas normas

$$\|(\eta, \omega)\|_{X_0} := \left(\int_0^L (\eta^2(x) + \omega^2(x)) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

e

$$\|(\eta, \omega)\|_{X_3} := \|(\eta, \omega)\|_{X_0} + \|(\omega_x + \omega_{xxx}, \eta_x + \eta_{xxx})\|_{X_0}.$$

Note que se $\theta = \frac{1}{3}$ e $\theta = \frac{2}{3}$ no processo de interpolação para $X_{3\theta}$, temos que

$$X_1 = [X_0, X_3]_{\frac{1}{3}} = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L), \quad (3.5)$$

$$X_2 = [X_0, X_3]_{\frac{2}{3}} = \left\{ (\eta, \omega) \in [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 : \eta_x(0) = \omega_x(L) = 0 \right\}, \quad (3.6)$$

munidos com as normas

$$\|(\eta, \omega)\|_{X_1} = \left(\int_0^L (\eta_x^2(x) + \omega_x^2(x)) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|(\eta, \omega)\|_{X_2} = \left(\int_0^L (\eta_{xx}^2(x) + \omega_{xx}^2(x)) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vamos definir o espaço

$$X_4 := \left\{ (\eta, \omega) \in [H^4(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 : \eta_x(0) = \omega_x(L) = \eta_{xxx}(0) = \omega_{xxx}(L) = 0, \right. \\ \left. \eta_{xxx}(L) + \eta_x(L) = \omega_{xxx}(0) + \omega_x(0) = 0 \right\},$$

munido com sua norma natural. Para $s = 1, 2$, o espaço X_{-s} vai denotar o seu dual com respeito ao espaço $X_0 = [L^2(0, L)]^2$. Observe que

$$X_{-1} = H^{-1}(0, L) \times H^{-1}(0, L).$$

3.1 BOA COLOCAÇÃO

Com o objetivo de mostrar a controlabilidade do sistema (3.1) primeiramente provaremos a boa colocação.

3.1.1 Boa colocação do problema linear homogêneo

Vamos considerar o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \eta(t, 0) = \eta(t, L) = \eta_x(t, 0) = 0, & t \geq 0, \\ \omega(t, 0) = \omega(t, L) = \omega_x(t, L) = 0, & t \geq 0, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \omega(0, x) = \omega_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.7)$$

Considere $X_0 = [L^2(I)]^2$, onde $I = (0, L)$ com seu produto interno usual e o operador

$$A: D(A) \subset X_0 \rightarrow X_0$$

com domínio

$$D(A) := X_3 = \left\{ (\eta, \omega) \in [H^3(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 : \eta_x(0) = \omega_x(L) = 0 \right\} \subset X_0$$

e definido por

$$A(\eta, \omega) = (-\omega_x - \omega_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx}).$$

Proposição 3.1.1. *O operador A é anti-adjunto em X_0 e assim gera um grupo de isometrias $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$ em X_0 .*

Demonstração. Note que $\overline{D(A)} = X_0$, pois $\overline{C_0^\infty(I)} = L^2(I)$, $C_0^\infty \times C_0^\infty(I) \subset D(A)$ e $\overline{C_0^\infty(I) \times C_0^\infty(I)} = L^2(I) \times L^2(I) = X_0$, isto é, $D(A)$ é denso em X_0 . Vamos provar agora que $A^* = -A$.

Vamos lembrar que, por definição, A^* é tal que $(y, Ax) = (A^*y, x)$, $\forall x \in D(A)$ e $\forall y \in D(A^*)$.

Primeiro vamos a ver o que $-A \subset A^*$, isto é, $(u, v) \in D(A^*)$ e $A^*(u, v) = -A(u, v)$ para tudo $(u, v) \in D(A)$. De fato,

$$\begin{aligned}
((u, v), A(\eta, \omega))_{X_0} &= - \int_0^L [u(\omega_x + \omega_{xxx}) + v(\eta_x + \eta_{xxx})] dx \\
&= - \int_0^L u\omega_x dx - \int_0^L u\omega_{xxx} dx - \int_0^L v\eta_x dx - \int_0^L v\eta_{xxx} dx \\
&= \int_0^L u_x\omega dx + \int_0^L u_{xxx}\omega dx + \int_0^L v_x\eta dx + \int_0^L v_{xxx}\eta dx \\
&\quad - [u\omega + v\eta]_0^L + [-u\omega_{xx} + u_x\omega_x - u_{xx}\omega - v\eta_{xx} + v_x\eta_x - v_{xx}\eta]_0^L \\
&= \int_0^L [\omega(u_x + u_{xxx}) + \eta(v_x + v_{xxx})] dx + u(L)\omega(L) - v(L)\eta(L) \\
&\quad + u(0)\omega(0) + v(0)\eta(0) - u(L)\omega_{xx}(L) + u_x(L)\omega_x(L) - u_{xx}(L)\omega(L) \\
&\quad - v(L)\eta_{xx}(L) + v_x(L)\eta_x(L) - v_{xx}(L)\eta(L) + u(0)\omega_{xx}(0) - u_x(0)\omega_x(0) \\
&\quad + u_{xx}(0)\omega(0) + v(0)\eta_{xx}(0) - v_x(0)\eta_x(0) + v_{xx}(0)\eta(0) \\
&= \int_0^L [\omega(u_x + u_{xxx}) + \eta(v_x + v_{xxx})] dx \\
&= - (A(u, v), (\eta, \omega))_{X_0}.
\end{aligned}$$

Vamos provar agora que $A^* \subset -A$. Seja $(u, v) \in D(A^*)$. Então, existe alguma constante C , tal que

$$|((u, v), A(\eta, \omega))_{X_0}| \leq C \|(\eta, \omega)\|_{X_0}, \quad \forall (\eta, \omega) \in D(A),$$

isto é,

$$\left| \int_0^L [u(\omega_x + \omega_{xxx}) + v(\eta_x + \eta_{xxx})] dx \right| \leq C \left(\int_0^L [\eta^2 + v^2] dx \right)^{1/2}, \quad \forall (\eta, \omega) \in D(A). \tag{3.8}$$

Considere $\omega \equiv 0$ e $\eta \in C_0^\infty(0, L)$, de (3.8) nos temos que $v_x + v_{xxx} \in L^2(0, L)$, isto é, $v \in H^3(0, L)$. Analogamente, nos podemos provar que $u \in H^3(0, L)$. Logo integrando por partes o lado esquerdo de (3.8), segue que,

$$\begin{aligned}
\int_0^L [u(\omega_x + \omega_{xxx}) + v(\eta_x + \eta_{xxx})] dx &= \int_0^L (u\omega_x + v\eta_x) dx + \int_0^L (u\omega_{xxx} + v\eta_{xxx}) dx \\
&= \int_0^L (u\omega_x + v\eta_x) dx - \int_0^L [u_{xxx}\omega + v_{xxx}\eta] dx \\
&\quad + (u\omega_{xx} - u_x\omega_x + u_{xx}\omega) \Big|_0^L \\
&\quad + (v\eta_{xx} - v_x\eta_x + v_{xx}\eta) \Big|_0^L.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Daí, como $(\eta, \omega) \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned} & (u\omega_{xx} - u_x\omega_x + u_{xx}\omega) \Big|_0^L + (v\eta_{xx} - v_x\eta_x + v_{xx}\eta) \Big|_0^L \\ & = u(L)\omega_{xx}(L) - u(0)\omega_{xx}(0) + u_x(0)\omega_x(0) + v(L)\eta_{xx}(L) - v(0)\eta_{xx}(0) - v_x(L)\eta_x(L) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Assim, a igualdade acima implica,

$$\begin{aligned} & |u(L)\omega_{xx}(L) - u(0)\omega_{xx}(0) + u_x(0)\omega_x(0) + v(L)\eta_{xx}(L) - v(0)\eta_{xx}(0) - v_x(L)\eta_x(L)| \\ & \leq C \left(\int_0^L (\eta^2 + \omega^2) dx \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

para todo $(\eta, \omega) \in D(A)$. Portanto,

$$u(0) = u(L) = u_x(0) = v(0) = v(L) = v_x(L) = 0, \quad (3.12)$$

então, $(u, v) \in D(A) = D(-A)$. Em consequência $D(A^*) = D(-A)$ e $A^* = -A$ e, pelo Teorema de Stone, A é um gerador de um grupo de isometrias. \square

Teorema 3.1.2. *Seja $(\eta_0, \omega_0) \in D(A)$. Então, existe uma única solução clássica (η, ω) do sistema (3.7) tal que*

$$(\eta, \omega) \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1(0, T; X_0). \quad (3.13)$$

Além disso, se $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, o sistema (3.7) tem uma única "mild solution" $(\eta, \omega) = S(\cdot)(\eta_0, \omega_0)$ tal que

$$(\eta, \omega) \in C([0, T]; X_0). \quad (3.14)$$

Como consequência do resultado acima, temos o seguinte Corolário:

Corolário 3.1.3. *Se $(\eta_0, \omega_0) \in X_3$, o sistema (3.7) possui uma única solução clássica com $\|(\eta, \omega)\|_{X_3} := \|(\eta, \omega)\|_{X_0} + \|A(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, o sistema (3.7) possui uma única mild solution tal que $\|(\eta(t), \omega(t))\|_{X_0} = \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Observe que, o sistema (3.7) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = AU(t), & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

onde $U = (\eta, \omega)$ e $U_0 = (\eta_0, \omega_0)$. Logo, o resultado é obtido aplicando a Proposição 3.1.1 e os Teoremas 2.8.2. \square

Observação 3.1.4. *Seja $0 < s < 3$ arbitrário, então $0 < \frac{s}{3} < 1$, escolhamos $\theta = \frac{s}{3}$. Assim, por interpolação, temos*

$$[X_0, X_3]_{\frac{s}{3}} = X_{(1-\frac{s}{3})0 + \frac{s}{3}3} = X_s.$$

Logo, pelo corolário 3.1.3 como $X_0 \hookrightarrow X_s \hookrightarrow X_3$, segue que para todo $s \in (0, 3)$,

$$\|(\eta, \omega)\|_{X_s} \leq C_1 \|(\eta, \omega)\|_{X_0} = C_1 \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0} \leq C_1 \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_3} \leq C_1 C_2 \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_s}.$$

Assim, existe uma constante $C_s > 0$ tal que para todo $(\eta_0, \omega_0) \in X_s$, a solução (η, ω) de (3.7) satisfaz $(\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}, X_s)$ e

$$\|(\eta(t), \omega(t))\|_{X_s} \leq C_s \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_s}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

3.1.2 Existência dos traços

Para as soluções do sistema (3.7), os traços

$$\eta(\cdot, 0), \eta(\cdot, L), \eta_x(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0), \omega(\cdot, L), \text{ e } \omega_x(\cdot, L),$$

são zero. Vamos provar que os traços $\eta_x(\cdot, L), \omega_x(\cdot, 0) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ quando $(\eta_0, \omega_0) \in X_1$.

Proposição 3.1.5. *Sejam $(\eta_0, \omega_0) \in X_1$ e (η, ω) solução de (3.7). Fixe qualquer $T > 0$. Então $\eta_x(\cdot, L), \omega_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T)$ com*

$$\int_0^T \left[|\eta_x(t, L)|^2 + |\omega_x(t, 0)|^2 \right] dt \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2, \quad (3.16)$$

com $C = C(T)$ uma constante.

Demonstração. Suponha que $(\eta_0, \omega_0) \in X_3$, então $(\eta, \omega) \in C([0, T], X_3) \cap C^1([0, T], X_0)$. Vamos usar os multiplicadores de Morawetz como em (ROSIER, 1997a). Multiplicando a primeira equação de (3.7) por $x\omega$ e a segunda por $x\eta$, integrando por partes em $(0, T) \times (0, L)$ e adicionando os resultados temos que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L (x\omega\eta_t + x\eta\omega_t + x\omega\omega_x + x\eta\eta_x + x\omega\omega_{xxx} + x\eta\eta_{xxx}) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L x(\eta\omega)_t dt dx + \int_0^T \int_0^L \frac{x}{2} (\omega^2 + \eta^2)_x dt dx \\ &+ \int_0^T \int_0^L x(\omega_{xxx}\omega + \eta_{xxx}\eta) dt dx = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Note o seguinte,

$$\omega_{xxx}\omega = \left(\omega_{xx}\omega - \frac{1}{2}\omega_x^2 \right)_x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \int_0^T x (\omega_{xxx}\omega + \eta_{xxx}\eta) dt dx &= \int_0^T \int_0^L x \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \eta_x^2) \right)_x dx dt \\
&= \int_0^T \left[x \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \eta_x^2) \right) \right]_0^L dt \\
&\quad - \int_0^L \int_0^T \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \eta_x^2) \right) dt dx \\
&= L \int_0^T \left(\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L) - \frac{1}{2} (\omega_x(L)^2 + \eta_x(L)^2) \right) dt \\
&\quad - \int_0^L \int_0^T \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \eta_x^2) \right) dt dx \\
&= -\frac{L}{2} \int_0^T \eta_x(L)^2 dt - \int_0^L \int_0^T \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \eta_x^2) \right) dt dx.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\int_0^L \int_0^T \left(\omega_{xx}\omega - \frac{1}{2}\omega_x^2 \right) dt dx = \int_0^T [\omega_x\omega]_0^L - \frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T \omega_x^2 dt dx = -\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T \omega_x^2 dt dx$$

e

$$\int_0^L \int_0^T \left(\eta_{xx}\eta - \frac{1}{2}\eta_x^2 \right) dt dx = \int_0^T [\eta_x\eta]_0^L - \frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T \eta_x^2 dt dx = -\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T \eta_x^2 dt dx.$$

Assim,

$$\int_0^L \int_0^T x (\omega_{xxx}\omega + \eta_{xxx}\eta) dt dx = \frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T (\omega_x^2 + \eta_x^2) dt dx - \frac{L}{2} \int_0^T \eta_x(L)^2 dt. \quad (3.18)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L \frac{x}{2} (\omega^2 + \eta^2)_x dx dt &= \int_0^T \left[\frac{x}{2} (\omega^2 + \eta^2) \right]_0^L dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\omega^2 + \eta^2) dx dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\omega^2 + \eta^2) dx dt.
\end{aligned}$$

Portanto, de (3.17), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L [\eta_x^2 + \omega_x^2] dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L [\eta^2 + \omega^2] dx dt \\
+ \int_0^L [x\eta\omega]_0^T dx - \frac{L}{2} \int_0^T \eta_x^2(t, L) dt = 0.
\end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.15), com $s = 1$, temos que

$$\int_0^T \|(\eta, \omega)\|_{X_1}^2 dt \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2.$$

Assim, de (3.19) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{L}{2} \int_0^T \eta_x^2(t, L) dt &= \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L (\eta_x^2 + \omega_x^2) dt dx - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\eta^2 + \omega^2) dx dt + \int_0^L [x\eta\omega]_0^T dx \\
&\leq \frac{3}{2} C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2 + L \int_0^L |\eta(T)| |\omega(T)| dx + L \int_0^L |\eta(0)| |\omega(0)| dx \\
&\leq \frac{3}{2} C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2 + L \int_0^L \left(\frac{|\eta(T)|^2}{2} + \frac{|\omega(T)|^2}{2} \right) dx + L \int_0^L \left(\frac{|\eta(0)|^2}{2} + \frac{|\omega(0)|^2}{2} \right) dx \\
&\leq \frac{3}{2} C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2 + 2L \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}^2 \\
&\leq \left(\frac{3}{2} C + 2L \right) \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T \eta_x^2(t, L) dt \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2.$$

Agora, multiplicando a primeira equação de (3.7) por $(L-x)\omega$, a segunda por $(L-x)\eta$ e fazendo o mesmo processo que anteriormente obtemos que

$$\int_0^T \omega_x^2(t, 0) dt \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_1}^2.$$

Assim (3.16) segue para $(\eta_0, \omega_0) \in X_3$. Como X_1 é denso em X_3 , temos que o resultado é obtido para $(\eta_0, \omega_0) \in X_1$. \square

Vamos ver o que acontece com os traços de segunda orden.

Proposição 3.1.6. *Sejam $(\eta_0, \omega_0) \in X_2$ e (η, ω) solução do sistema (3.7). Fixe $T > 0$. Então, $\eta_{xx}(\cdot, 0), \eta_{xx}(\cdot, L), \omega_{xx}(\cdot, 0), \omega_{xx}(\cdot, L) \in L^2(0, T)$ com*

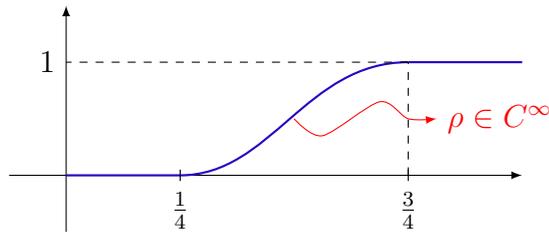
$$\int_0^T \left[|\eta_{xx}(t, 0)|^2 + |\eta_{xx}(t, L)|^2 + |\omega_{xx}(t, 0)|^2 + |\omega_{xx}(t, L)|^2 \right] dt \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_2}^2, \quad (3.20)$$

para alguma $C = C(T)$. Além disso, $\eta_x(\cdot, L), \omega_x(\cdot, 0) \in H^{\frac{1}{3}}(0, T)$ com

$$\|\eta_x(\cdot, L)\|_{H^{\frac{1}{3}}(0, T)}^2 + \|\omega_x(\cdot, 0)\|_{H^{\frac{1}{3}}(0, T)}^2 \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_2}^2 \quad (3.21)$$

para alguma $C = C(T)$.

Demonstração. Suponha que $(\eta_0, \omega_0) \in X_3$, então $(\eta, \omega) \in C([0, T], X_3) \cap C^1([0, T], X_0)$. Escolha $\rho \in C^\infty([0, T])$ com $\rho(x) = 0$ se $x \leq 1/4$ e $\rho(x) = 1$ se $x \geq 3/4$. Tal função é descrita abaixo.

Figura 1 – Gráfico da função ρ .

Fonte: O autor (2021)

Defina $\tilde{\eta} = \rho\eta$ e $\tilde{\omega} = \rho\omega$. Então, como $\eta_t = -\omega_x - \omega_{xxx}$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t + \tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_{xxx} &= \rho\eta_t + \rho_x\omega + \rho\omega_x + \rho_{xxx}\omega + 3\rho_{xx}\omega_x + 3\rho_x\omega_{xx} + \rho\omega_{xxx} \\ &= \rho_x\omega + 3\rho_x\omega_{xx} + 3\rho_{xx}\omega_x + \rho_{xxx}\omega =: \tilde{f}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Similarmente, como $\omega_t = -\eta_x - \eta_{xxx}$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_t + \tilde{\eta}_x + \tilde{\eta}_{xxx} &= \rho\omega_t + \rho_x\eta + \rho\eta_x + \rho_{xxx}\eta + 3\rho_{xx}\eta_x + 3\rho_x\eta_{xx} + \rho\eta_{xxx} \\ &= \rho_x\eta + 3\rho_x\eta_{xx} + 3\rho_{xx}\eta_x + \rho_{xxx}\eta =: \tilde{g}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Daí, $\tilde{f}, \tilde{g} \in C([0, T], L^2(0, L))$. Multiplicando cada termo em (3.22) por $\tilde{\omega}_{xx}$ e cada termo em (3.23) por $\tilde{\eta}_{xx}$ fazendo integração por partes, temos o seguinte

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L \tilde{f}\tilde{\omega}_{xx} dx dt &= \int_0^T \int_0^L (\tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_{xx} + \tilde{\omega}_x\tilde{\omega}_{xx} + \tilde{\omega}_{xxx}\tilde{\omega}_{xx}) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L \left(\tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_{xx} + \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_{xx}^2)_x \right) dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\omega}_{xx}^2 + \tilde{\omega}_x^2]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L \tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_{xx} dx dt\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L \tilde{g}\tilde{\eta}_{xx} dx dt &= \int_0^T \int_0^L (\tilde{\omega}_t\tilde{\eta}_{xx} + \tilde{\eta}_x\tilde{\eta}_{xx} + \tilde{\eta}_{xxx}\tilde{\eta}_{xx}) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L \left(\tilde{\omega}_t\tilde{\eta}_{xx} + \frac{1}{2}(\tilde{\eta}_x^2 + \tilde{\eta}_{xx}^2)_x \right) dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\eta}_{xx}^2 + \tilde{\eta}_x^2]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L \tilde{\omega}_t\tilde{\eta}_{xx} dx dt.\end{aligned}$$

Adicionando as igualdades acima obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (\tilde{f}\tilde{\omega}_{xx} + \tilde{g}\tilde{\eta}_{xx}) dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\eta}_x^2 + \tilde{\eta}_{xx}^2 + \tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_{xx}^2]_0^L dt + \int_0^T \int_0^L (\tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_{xx} + \tilde{\omega}_t\tilde{\eta}_{xx}) dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\eta}_{xx}^2(L) + \tilde{\omega}_{xx}^2(L) + \tilde{\eta}_x^2(L)] dt + \int_0^T \int_0^L (\tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_{xx} + \tilde{\omega}_t\tilde{\eta}_{xx}) dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\eta}_{xx}^2(L) + \tilde{\omega}_{xx}^2(L) + \tilde{\eta}_x^2(L)] dt + \int_0^T [\tilde{\eta}_t\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_t\tilde{\eta}_x]_0^L dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L (\tilde{\eta}_{tx}\tilde{\omega}_x + \tilde{\eta}_x\tilde{\omega}_{tx}) dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\eta}_{xx}^2(L) + \tilde{\omega}_{xx}^2(L) + \tilde{\eta}_x^2(L)] dt - \int_0^T \int_0^L (\tilde{\eta}_x\tilde{\omega}_x)_t dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\eta}_{xx}^2(L) + \tilde{\omega}_{xx}^2(L) + \tilde{\eta}_x^2(L)] dt - \left[\int_0^L \tilde{\eta}_x\tilde{\omega}_x dx \right]_0^T.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \int_0^T [\tilde{\eta}_{xx}^2(L) + \tilde{\omega}_{xx}^2(L) + \tilde{\eta}_x^2(L)] dt = \left[\int_0^L \tilde{\eta}_x\tilde{\omega}_x dx \right]_0^T + \int_0^T \int_0^L (\tilde{f}\tilde{\omega}_{xx} + \tilde{g}\tilde{\eta}_{xx}) dx dt,$$

Logo, pela desigualdade de Young e (3.15)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^T (\tilde{\eta}_{xx}^2(L) + \tilde{\omega}_{xx}^2(L)) dt &\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^L (\tilde{\eta}_x^2 + \tilde{\omega}_x^2) dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\tilde{\eta}_{xx}^2 + \tilde{\eta}_{xx}^2) dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\tilde{f}^2 + \tilde{g}^2) dx dt \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^L (\tilde{\eta}_x^2 + \tilde{\omega}_x^2) dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\tilde{\eta}_{xx}^2 + \tilde{\eta}_{xx}^2) dx dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \|(\tilde{f}, \tilde{g})\|_{X_0}^2 dt \\
&\leq C_1 \|(\tilde{\eta}_0, \tilde{\omega}_0)\|_{X_1}^2 + C_2 \|(\tilde{\eta}_0, \tilde{\omega}_0)\|_{X_2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|(\tilde{f}, \tilde{g})\|_{X_0}^2 dt.
\end{aligned}$$

Como a função $\rho(x) \leq 1$, para todo $x \in [0, L]$, por (3.22) e (3.23) temos que

$$\|(\tilde{f}, \tilde{g})\|_{X_0}^2 \leq \|(\eta, \omega)\|_{X_2} \leq C_3 \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_2}^2.$$

Assim,

$$\int_0^T [\eta_{xx}^2(t, L) + \omega_{xx}^2(t, L)] dt \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_2}^2,$$

Da mesma forma, fazendo $\tilde{\eta} = (1 - \rho)\eta$ e $\tilde{\omega} = (1 - \rho)\omega$ é possível provar que

$$\int_0^T [\eta_{xx}^2(t, 0) + \omega_{xx}^2(t, 0)] dt \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_2}^2,$$

Como X_3 é denso em X_2 temos o resultado para $(\eta_0, \omega_0) \in X_2$.

Provemos agora (3.21). Se $(\eta_0, \omega_0) \in X_4$, então $(\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}, X_4)$, assim

$$(\hat{\eta}, \hat{\omega}) := (\eta_t, \omega_t) = A(\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}, X_1)$$

que é solução de

$$(\hat{\eta}, \hat{\omega})_t = A(\hat{\eta}, \hat{\omega}), \quad (\hat{\eta}, \hat{\omega})(0) = A(\eta_0, \omega_0).$$

Daí, segue de (3.16) que

$$\|\eta_x(\cdot, L)\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\omega_x(\cdot, 0)\|_{H^1(0,T)}^2 \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_4}^2. \quad (3.24)$$

Por interpolação temos que $[X_1, X_4]_{\frac{1}{3}} = X_2$ e de (3.16) e (3.24), garantimos a seguinte estimativa

$$\|\eta_x(\cdot, L)\|_{H^{\frac{1}{3}}(0,T)}^2 + \|\omega_x(\cdot, 0)\|_{H^{\frac{1}{3}}(0,T)}^2 \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_2}^2 \quad (3.25)$$

para alguma constante positiva $C = C(T)$ e $(\eta_0, \omega_0) \in X_2$. \square

3.1.3 Sistema Adjunto

Nesta subsecção, introduziremos o sistema adjunto associado ao sistema (3.7). Assumimos que $\eta, \omega, \theta, \xi$ são funções suficientemente regulares, multiplicamos a primeira equação de (3.7) por θ e a segunda equação por ξ , integramos em $(0, T) \times (0, L)$ e obtemos

$$\int_0^T \int_0^L (\eta_t + \omega_x + \omega_{xxx}) \theta \, dx \, dt = 0$$

e

$$\int_0^T \int_0^L (\omega_t + \eta_x + \eta_{xxx}) \xi \, dx \, dt = 0.$$

Adicionamos os resultados,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L [(\eta_t + \omega_x + \omega_{xxx})\theta + (\omega_t + \eta_x + \eta_{xxx})\xi] dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L (\eta_t\theta + \omega_x\theta + \omega_{xxx}\theta) dx dt + \int_0^T \int_0^L (\omega_t\xi + \eta_x\xi + \eta_{xxx}\xi) dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L (-\eta\theta_t) dx dt + \int_0^T \int_0^L (-\omega\xi_t) dx dt + \int_0^L [\eta\theta + \omega\xi]_0^T dx \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L (\omega_x\theta + \omega_{xxx}\theta) dx dt + \int_0^T \int_0^L (\eta_x\xi + \eta_{xxx}\xi) dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L [\eta(-\theta_t - \xi_x - \xi_{xxx}) + \omega(-\xi_t - \theta_x - \theta_{xxx})] dx dt + \int_0^L [\eta\theta + \omega\xi]_0^T dx \\
&\quad + \int_0^T [\omega\theta + \omega_{xx}\theta - \omega_x\theta_x + \omega\theta_{xx}]_0^L dt + \int_0^T [\eta\xi + \eta_{xx}\xi - \eta_x\xi_x + \eta\xi_{xx}]_0^L dt \quad (3.26) \\
&= \int_0^T \int_0^L [\eta(-\theta_t - \xi_x - \xi_{xxx}) + \omega(-\xi_t - \theta_x - \theta_{xxx})] dx dt + \int_0^L [\eta\theta + \omega\xi]_0^T dx \\
&\quad + \int_0^T (\omega(L)\theta(L) - \omega(0)\theta(0)) dt + \int_0^T (\omega_{xx}(L)\theta(L) - \omega_{xx}(0)\theta(0)) dt \\
&\quad - \int_0^T (\omega_x(L)\theta_x(L) - \omega_x(0)\theta_x(0)) dt + \int_0^T (\omega(L)\theta_{xx}(L) - \omega(0)\theta_{xx}(0)) dt \\
&\quad + \int_0^T (\eta(L)\psi(L) - \eta(0)\psi(0)) dt + \int_0^T (\eta_{xx}(L)\psi(L) - \eta_{xx}(0)\psi(0)) dt \\
&\quad - \int_0^T (\eta_x(L)\psi(L) - \eta_x(0)\psi(0)) dt + \int_0^T (\eta(L)\psi_{xx}(L) - \eta(0)\psi_{xx}(0)) dt
\end{aligned}$$

De (3.26), podemos considerar o seguinte sistema adjunto

$$\begin{cases} \theta_t + \xi_x + \xi_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \in (0, T), \\ \xi_t + \theta_x + \theta_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.27)$$

com condições iniciais

$$\theta(T, x) = \theta_1(x), \quad \xi(T, x) = \xi_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (3.28)$$

e satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{cases} \theta(t, 0) = \theta(t, L) = \theta_x(t, 0) = 0, & t \in (0, T), \\ \xi(t, 0) = \xi(t, L) = \xi_x(t, L) = 0, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.29)$$

Fazendo a mudança de variável $t \mapsto T - t$ podemos reescrever o sistema (3.27)-(3.29)

como

$$\begin{cases} \theta_t - \xi_x - \xi_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \in (0, T), \\ \xi_t - \theta_x - \theta_{xxx} = 0, & x \in (0, L), t \in (0, T), \end{cases} \quad (3.30)$$

com condições iniciais

$$\theta(0, x) = \theta_0(x), \quad \xi(0, x) = \xi_0(x), \quad x \in (0, L) \quad (3.31)$$

e satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{cases} \theta(t, 0) = \theta(t, L) = \theta_x(t, 0) = 0, & t \in (0, T), \\ \xi(t, 0) = \xi(t, L) = \xi_x(t, L) = 0, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.32)$$

Portanto, (3.30)-(3.32) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\theta, \xi) = A^* (\theta, \xi); \\ (\theta, \xi) (0) = (\theta_0, \xi_0) \end{cases}$$

onde A^* é o operador adjunto de A e

$$A^*: D(A^*) \subset X_0 \rightarrow X_0$$

com domínio

$$D(A^*) := \left\{ (\theta, \xi) \in [H^3(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 : \theta_x(0) = \xi_x(L) = 0 \right\}$$

definido por

$$A^*(\theta, \xi) = (\xi_x + \xi_{xxx}, \theta_x + \theta_{xxx}).$$

Observe que as propriedades da solução de (3.30)-(3.32) são similares às provadas no Teorema 3.1.2, no Corolário 3.1.3 e na Observação 3.1.4 e podem ser descritas como segue.

Teorema 3.1.7. *Seja $(\theta_0, \xi_0) \in D(A^*)$. Então, existe uma única solução clássica (θ, ξ) do sistema (3.30) tal que*

$$(\theta, \xi) \in C([0, T]; D(A^*)) \cap C^1(0, T; X_0). \quad (3.33)$$

Além disso, se $(\theta_0, \xi_0) \in X_0$, o sistema (3.27) tem uma única "mild solution" $(\theta, \xi) = S(\cdot)(\theta_0, \xi_0)$ tal que

$$(\theta, \xi) \in C([0, T]; X_0). \quad (3.34)$$

Como consequência do resultado acima, temos o seguinte Corolário:

Corolário 3.1.8. *Se $(\theta_0, \xi_0) \in X_3$, o sistema (3.27) possui uma única solução clássica com $\|(\theta, \xi)\|_{X_3} := \|(\theta, \xi)\|_{X_0} + \|A(\theta_0, \xi_0)\|_{X_0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $(\theta_0, \xi_0) \in X_0$, o sistema (3.27) possui uma única mild solution tal que $\|(\theta(t), \xi(t))\|_{X_0} = \|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_0}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Observação 3.1.9. *Seja $0 < s < 3$ arbitrário, para todo $(\theta_0, \xi_0) \in X_s$, a solução (θ, ξ) de (3.27) satisfaz $(\theta, \xi) \in C(\mathbb{R}, X_s)$ e existe $C_s > 0$ tal que*

$$\|(\theta(t), \xi(t))\|_{X_s} \leq C_s \|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_s}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

3.1.4 Boa colocação do problema linear não homogêneo

Consideremos o sistema não homogêneo,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \eta(t, 0) = 0, \eta(t, L) = 0, \eta_x(t, 0) = h_2(t), & t \geq 0, \\ \omega(t, 0) = 0, \omega(t, L) = 0, \omega_x(t, L) = g_2(t), & t \geq 0, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \omega(0, x) = \omega_0(x), & x \in (0, L), \end{array} \right. \quad (3.36)$$

com os dados iniciais $(\eta_0, \omega_0) \in X_{-1}$, as condições de contorno $g_2, h_2 \in L^2(0, T)$. Considere também o sistema homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_t + \xi_x + \xi_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \xi_t + \theta_x + \theta_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \theta(t, 0) = \theta(t, L) = \theta_x(t, 0) = 0, & t \geq 0, \\ \xi(t, 0) = \xi(t, L) = \xi_x(t, L) = 0, & t \geq 0, \\ \theta(0, x) = \theta_0(x), \xi(0, x) = \xi_0(x), & x \in (0, L). \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Se $(\eta, \omega), (\theta, \xi) \in C([0, T], [H^3(0, L)]^2) \cap C^1([0, T], [L^2(0, L)]^2)$, caso que acontece quando $(\eta_0, \omega_0), (\theta_0, \xi_0) \in X_3$ e $h_i, g_i \in C^2([0, T])$ com $h_i(0) = g_i(0) = 0$ para $i = 0, 1, 2$, então multiplicando a primeira equação de (3.36) por θ e a segunda por ξ e integrando por partes para todo $S \in [0, T]$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^S \int_0^L (\eta_t \theta + \omega_x \theta + \omega_{xxx} \theta) dx dt &= \left[\int_0^L \eta \theta dx \right]_0^S - \int_0^S \int_0^L (\eta \theta_t + \omega \theta_x + \omega \theta_{xxx}) dx dt \\ &\quad + \int_0^S [\theta_{xx} \omega - \omega_x \theta_x]_0^L dt = 0, \\ \int_0^S \int_0^L (\omega_t \xi + \eta_x \xi + \eta_{xxx} \xi) dx dt &= \left[\int_0^L \omega \xi dx \right]_0^S - \int_0^S \int_0^L (\omega \xi_t + \eta \xi_x + \eta \xi_{xxx}) dx dt \\ &\quad + \int_0^S [\eta \xi_{xx} - \eta_x \xi_x]_0^L dt = 0, \end{aligned}$$

adicionando os resultados segue

$$\left[\int_0^L [\eta \theta + \omega \xi] dx \right]_0^S = \int_0^S [g_2(t) \theta_x(t, L) - h_2(t) \xi_x(t, 0)] dt. \quad (3.38)$$

Vamos definir a solução por transposição de nosso sistema adjunto.

Definição 3.1.10. *Seja $(\eta_0, \omega_0) \in X_{-1}$ e $g_2, h_2 \in L^2(0, T)$. Dizemos que $(\eta, \omega) \in C([0, T], X_{-1})$ é uma solução por transposição do sistema não homogêneo (3.36) se*

$$\langle (\eta(S), \omega(S)), (\theta(S), \xi(S)) \rangle_{X_{-1}, X_1} = L_S(\theta_0, \xi_0), \quad \forall (\theta_0, \xi_0) \in X_1, \forall S \in [0, T], \quad (3.39)$$

donde

$$\begin{aligned} L_S(\theta_0, \xi_0) := & \langle (\eta_0, \omega_0), (\theta_0, \xi_0) \rangle_{X_{-1}, X_1} + \left\langle g_2, \mathbf{1}_{(0,S)} \theta_x(\cdot, L) \right\rangle_{L^2(0,T), L^2(0,T)} \\ & - \left\langle h_2, \mathbf{1}_{(0,S)} \xi_x(\cdot, 0) \right\rangle_{L^2(0,T), L^2(0,T)}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

com (θ, ξ) a solução para o sistema (3.37)

Observe que $\theta_x(\cdot, L), \xi_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T)$, pela Proposição 3.1.5, logo a função $L_S: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é bem definida para todo $S \in [0, T]$. Além disso, pelo Teorema 2.4.4 temos que $\mathbf{1}_{(0,S)} \theta_x(\cdot, L), \mathbf{1}_{(0,S)} \xi_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T)$ para $S \in [0, T]$.

Vamos a estabelecer o resultado de existência e unicidade para o sistema (3.36).

Proposição 3.1.11. *Se $(\eta_0, \omega_0) \in X_{-1}$ e $g_2, h_2 \in L^2(0, T)$, então existe uma única solução $(\eta, \omega) \in C([0, T], X_{-1})$ e uma constante positiva $C = C(T)$ tal que*

$$\|(\eta, \omega)\|_{L^\infty(0,T;X_{-1})} \leq C \left(\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_{-1}} + \|g_2\|_{L^2(0,T)} + \|h_2\|_{L^2(0,T)} \right). \quad (3.41)$$

Demonstração. Seja $(\eta_0, \omega_0) \in X_{-1}$ e $g_2, h_2 \in L^2(0, T)$. Seja $(\theta_0, \xi_0) \in X_1$ os dados iniciais para o problema (3.37) com solução (θ, ξ) . Segue da Proposição 3.1.5 que $(\theta_x(\cdot, L), \xi_x(\cdot, 0)) \in X_1$. Como $X_0 \hookrightarrow X_1$, segue que $\theta_x(\cdot, L), \xi_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T)$. Sejam $(\theta_0, \xi_0) \in X_1$, então

$$\begin{aligned} \|L_S(\theta_0, \xi_0)\| & \leq \left\| \left\langle (\eta_0, \omega_0), (\theta_0, \xi_0) \right\rangle_{X_{-1}, X_1} \right\| + \left\| \left\langle g_2, \mathbf{1}_{(0,S)} \theta_x(\cdot, L) \right\rangle_{L^2(0,T), L^2(0,T)} \right\| \\ & \quad + \left\| \left\langle h_2, \mathbf{1}_{(0,S)} \xi_x(\cdot, 0) \right\rangle_{L^2(0,T), L^2(0,T)} \right\| \\ & \leq \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_{-1}} \|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1} + \|g_2\|_{L^2(0,T)} \|\theta_x(L)\|_{L^2(0,T)} \\ & \quad + \|h_2\|_{L^2(0,T)} \|\xi_x(0)\|_{L^2(0,T)} \quad (3.42) \\ & \leq C_1 \|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1} + \max \|g_2\|, \|h_2\| \int_0^T (\theta_x^2(L) + \xi_x^2(0)) dt \\ & \leq C_1 \|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1} + C_2 C \|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1} \\ & = C \|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1}, \end{aligned}$$

isto é, segue que para todo $S \in [0, T]$, a aplicação $L_S: X_{-1} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em (3.40), é continua.

Definamos agora a seguinte aplicação

$$\Gamma_S: X_1 \rightarrow X_1$$

$$(\theta_0, \xi_0) \mapsto (\theta(S), \xi(S)) = e^{SA}(\theta_0, \xi_0) \in X_1.$$

onde $e^{SA} = S(\cdot)$ é o semigrupo dado pelo Teorema 3.1.7. Por (3.15) temos que Γ_S é bem definida e continua. Pela Proposição 3.1.1 temos que

$$(\theta_0, \xi_0) = I(\theta_0, \xi_0) = e^{-SA}(e^{SA}(\theta_0, \xi_0)) = e^{-SA}(\theta(S), \xi(S)).$$

Daí, $\Gamma_S^{-1} = \Gamma_{-S}$ e portanto é invertível. Assim, Γ_S é um isomorfismo entre espaços de Hilbert. Logo $(\eta(S), \omega(S))$ é definida de forma única em X_{-1} por (3.39). Além disso, por (3.15) e (3.42) temos que para $S \in [0, T]$, Γ_S e $\Gamma_S^{-1} = \Gamma_{-S}$ são limitadas uniformemente em $\mathcal{L}(X_2)$, segue que $(\eta, \omega) \in L^\infty(0, T, X_{-1})$ e a estimativa (3.41) é satisfeita. □

3.2 CONTROLABILIDADE

Nesta seção vamos estudar o problema de controle para o sistema (3.36) com $h_2, g_2 \in L^2(0, T)$, lembremos que o sistema é o seguinte,

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \eta(t, 0) = 0, \eta(t, L) = 0, \eta_x(t, 0) = h_2(t), & t \geq 0, \\ \omega(t, 0) = 0, \omega(t, L) = 0, \omega_x(t, L) = g_2(t), & t \geq 0, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \omega(0, x) = \omega_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.43)$$

Definição 3.2.1. Dizemos que o sistema (3.43) é exatamente controlável em X_{-1} se para todo $(\eta_0, \omega_0), (\eta_1, \omega_1) \in X_{-1}$ e todo $T > 0$ é possível encontrar $g_2, h_2 \in L^2(0, T)$ tal que a solução (η, ω) de (3.43) satisfaz

$$(\eta(T, \cdot), \omega(T, \cdot)) = (\eta_1, \omega_1). \quad (3.44)$$

Daremos uma condição equivalente para a propriedade da controlabilidade exata.

Lema 3.2.2. Seja $(\eta_1, \omega_1) \in X_{-1}$. Então, existem controles $(h_2(t), g_2(t)) \in X_0$ tais que a solução (η, ω) de (3.43) satisfazem (3.44) se, e somente se

$$\langle (\eta_1, \omega_1), (\theta_1, \xi_1) \rangle_{X_{-1}, X_1} = \int_0^T (h_2(t)\xi_x(t, 0) - g_2(t)\theta_x(t, L)) dt, \quad (3.45)$$

para todo $(\theta_1, \xi_1) \in X_1$, sendo (θ_1, ξ_1) solução ao sistema reverso no tempo (3.27)-(3.29).

Demonstração. A relação (3.45) segue de (3.26). \square

Em (LIONS; MAGENES, 1968) uma equivalência entre a controlabilidade e uma desigualdade de observabilidade do sistema adjunto é estabelecida. A desigualdade de observabilidade garante a existência de um funcional linear, contínuo e coercivo que atinge um mínimo. Logo, a relação entre controlabilidade e o funcional é dada pelo Lema 3.2.2, isto é conhecido como o Método da Unicidade de Hilbert (H.U.M). Portanto, a controlabilidade exata em X_{-1} com os controles $g_2, h_2 \in L^2(0, T)$, pelo H.U.M, é equivalente à existência de uma constante $C > 0$ tal que para todo dado inicial $(\theta_0, \xi_0) \in X_1$ do problema adjunto (3.37), a seguinte estimativa se verifica

$$\|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1}^2 \leq C \int_0^T [|\theta_x(t, L)|^2 + |\xi_x(t, 0)|^2] dt. \quad (3.46)$$

É conhecido que para equação KdV com condições de Dirichlet e Neumann a controlabilidade exata com um controle na condição de Neumann se verifica. Tal resultado provado por L. Rosier, em (ROSIER, 1997b), garante que o sistema KdV é controlável se e somente se o comprimento espacial não pertença ao conjunto

$$\mathcal{N} := \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{k^2 + kl + l^2} : k, l \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Precisamente, Rosier provou o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3 ((ROSIER, 1997b, Teo. 1.2.)). *Sejam $T > 0$, $L \in (0, \infty) \setminus \mathcal{N}$ e $y_0, y_T \in L^2(0, L)$. Assim, existe $h \in L^2(0, T)$ tal que a “mild solution” $y \in C([0, T], L^2(0, L)) \cap L^2(0, T, H^1(0, L))$ de*

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y_x(t, L) = h(t), & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.47)$$

satisfaz $y(T, \cdot) = y_T$.

O Teorema anterior é consequência da seguinte desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto.

Proposição 3.2.4 ((ROSIER, 1997b, Prop. 3.3.)). *Para todo $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$ e $T > 0$, existe uma constante $C = C(L, T) > 0$ tal que*

$$\int_0^L |y_0(x)|^2 dx \leq C \int_0^T |y_x(t, 0)|^2 dt, \quad \forall y_0 \in L^2(0, L), \quad (3.48)$$

onde $y = y(t, x)$ denota a solução do sistema

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = y_x(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.49)$$

Demonstração. Primeiro, vamos seguir um argumento de compacidade - unicidade. Se (3.48) não se satisfaz, podemos escolher uma sequência $(y_0^n)_n \subset L^2(0, L)$ tal que $\|y_0^n\|_{L^2(0, L)} = 1$ e

$$\int_0^T |y_x^n(t, 0)|^2 dt \rightarrow 0. \quad (3.50)$$

Para uma sequência de soluções dadas pelo semigrupo associado, $y^n := S(\cdot)y_0^n$ temos, pela boa colocação do problema (3.49) garantido em (ROSIER, 1997b, Prop. 3.2.), que cada y^n é limitada em $L^2(0, T; H^1(0, L))$. Por outro lado, como $y_t^n = -(y_x^n + y_{xxx}^n)$ temos o seguinte, y^n limitada em $L^2(0, T; H^1(0, L))$ implica que $y_x^n \in L^2(0, L)$, daí $y_{xx}^n \in H^{-1}(0, L)$ e portanto $y_{xxx}^n \in H^{-2}(0, L)$. Assim, y_t^n é limitada em $L^2(0, T; H^{-2}(0, L))$. Como

$$H^1(0, L) \hookrightarrow_c L^2(0, L) \hookrightarrow H^{-2}(0, L), \quad (3.51)$$

sendo o primeiro compacto, segue que o conjunto $\{y^n\}$ é relativamente compacto em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Assim, podemos extrair uma subsequência, ainda denotada (y^n) convergente em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Pela Proposição (ROSIER, 1997b, Prop. 3.2.), temos que (y_0^n) é uma sequência de Cauchy em $L^2(0, L)$. Assim, pela continuidade do limite, a convergência dos dados iniciais

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0^n \quad (3.52)$$

e a solução dada pelo semigrupo $y = S(\cdot)y_0$, segue que $\|y_0\|_{L^2(0, L)} = 1$. Porém, $y_x^n(t, 0) \rightarrow y_x(t, 0)$ e por (3.50) segue que $y_x(t, 0) = 0$.

Agora, com o objetivo de mostrar que não existe nenhuma função não trivial que satisfaz (3.49) juntamente com a condição adicional $y_x(t, 0) = 0$, vamos reduzir para um problema espectral como segue:

Lema 3.2.5. *Se $T > 0$, N_T o conjunto de dados iniciais $y_0 \in L^2(0, L)$ tal que a solução de (3.49) dada pelo semigrupo com $y_x(t, 0) = 0$. Então se $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$, $N_T = \{0\}$ para $T > 0$.*

Prova. Seguindo o argumento de compacidade-unicidade acima, se consideramos uma sequência de dados iniciais

$$(y_0^n)_n \subset \{(y_0) \in N_T : \|y_0\|_{L^2(0,L)} \leq 1\}, \quad (3.53)$$

podemos concluir que (y_0^n) possui uma subsequência convergente, assim a bola unitária é um subconjunto compacto de N_T que é subespaço normado de $L^2(0, L)$. Assim, segue que $\dim N_T < \infty$.

Se $T_1 < T_2$, então $N_{T_2} \subset N_{T_1}$. De fato, para $T_1 < T_2$ seja $y_0 \in N_{T_2}$, então a solução correspondente (3.49) com $y_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T_2)$, como $T_1 < T_2$ segue que a solução correspondente (3.49) é tal que $y_x(\cdot, 0) \in L^2(0, T_1)$. Assim, $N_{T_2} \subset N_{T_1}$. Em particular, $\dim(N_{T_2}) \leq \dim(N_{T_1})$. Assim, a aplicação $T \mapsto \dim(N_T)$, definida em \mathbb{R}_+ a valores em \mathbb{N} , é não-crescente, portanto existem $T > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\dim(N_t) = \dim(N_T)$, para todo $t \in [T, T + \varepsilon]$.

Seja $y_0 \in N_T$ e a solução correspondente dada por $y = S(\cdot)y_0$ e $0 < t < \varepsilon$. Pelas propriedades do semigrupo, como $S(\tau)(S(t)y_0) = S(\tau + t)y_0$ para $0 \leq \tau \leq T$ e $y_0 \in N_{T+\varepsilon}$, segue que

$$\frac{S(t)y_0 - y_0}{t} \in N_T. \quad (3.54)$$

Vamos mostrar que

$$y_0 \in D(A) \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)y_0 - y_0}{t} \text{ existe em } L^2(0, L). \quad (3.55)$$

Para isto, defina

$$M_T := \{\tilde{y} = S(\tau)\tilde{y}_0 : 0 \leq \tau \leq T, \tilde{y}_0 \in N_T\} \subset C([0, T]; L^2(0, L)).$$

Assim, dado $y \in M_T$, $y \in H^1(0, T + \varepsilon, H^{-2}(0, L))$. Logo, existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t + \cdot) - y}{t} = y' \text{ em } L^2(0, T; H^{-2}(0, L)).$$

Por outro lado,

$$\frac{y(t + \cdot) - y}{t} \in M_T$$

se $0 < t < \varepsilon$. Além disso, note que, por um argumento análogo ao usado para provar que N_T tem dimensão finita, temos que $\dim(M_T) < \infty$. Assim, temos que M_T é um subespaço de $L^2(0, T; H^{-2}(0, L))$ que possui dimensão finita, donde M_T é fechado em $L^2(0, T; H^{-2}(0, L))$. Logo, $y' \in M_T \subset C([0, T]; L^2(0, L))$, ou seja, $y \in C^1([0, T]; L^2(I))$. Portanto, o limite

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)y_0 - y_0}{t},$$

existe em $L^2(0, L)$, ou seja, $y_0 \in D(A)$, $A(y_0) = y'(0)$ e $y_x \in C([0, T])$. Assim,

$$\left(\frac{dy_0}{dx}\right)_{x=0} = y_x(0, 0) = 0.$$

Daí, se $N_T \neq \{0\}$, a aplicação $A: N_T^{\mathbb{C}} \rightarrow N_T^{\mathbb{C}}$, onde $N_T^{\mathbb{C}}$ denota a complexificação, tem (ao menos) um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ e um autovetor $\{0\} \neq y_0 \in H^3(0, L)$ que satisfaz

$$\begin{cases} \lambda y_0 + y_0' + y_0''' = 0, \\ y_0(0) = y_0(L) = y_0'(0) = y_0'(L) = 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

□

Agora, vamos mostrar que o problema espectral associado a (3.56) é satisfeito se $L \notin \mathcal{N}$.

Lema 3.2.6. *Seja $L \in (0, \infty)$. Consideremos a seguinte afirmação:*

$$(\dagger) \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}, \exists y_0 \in H^3(0, L) \setminus \{0\} \text{ tal que } \begin{cases} \lambda y_0 + y_0' + y_0''' = 0, \\ y_0(0) = y_0(L) = y_0'(0) = y_0'(L) = 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

Então (\dagger) é equivalente a $L \in \mathcal{N}$.

Demonstração. Seja y_0 como em (\dagger) , seja $u \in H^2(\mathbb{R})$ sua extensão. Então

$$\lambda u + u' + u''' = y_0''(0)\delta_0 - y_0''(L)\delta_L, \quad (3.58)$$

onde δ_{x_0} denota a medida de Dirac em x_0 . Assim, (\dagger) é equivalente à existência dos números complexos α, β, λ , com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e da função $u \in H^2(\mathbb{R})$, com suporte compacto em $[-L, L]$, tal que

$$\lambda u + u' + u''' = \alpha\delta_0 - \beta\delta_L. \quad (3.59)$$

Tomando a transformada de Fourier, obtemos que

$$(\lambda + (i\sigma) + (i\sigma)^3) \hat{u}(\sigma) = \alpha - \beta e^{-iL\sigma}, \quad (3.60)$$

fazendo $\lambda = -ip$, segue que

$$\hat{u}(\sigma) = i \frac{\alpha - \beta e^{-iL\sigma}}{\sigma^3 - \sigma + p}. \quad (3.61)$$

Via Teorema de Paley-Wiener, obtemos que (\dagger) é equivalente à existência de $p \in \mathbb{C}$ e $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tais que a função

$$f(\sigma) := \frac{\alpha - \beta e^{-iL\sigma}}{\sigma^3 - \sigma + p} \quad (3.62)$$

seja inteira em \mathbb{C} , além disso,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\sigma)|^2 (1 + |\sigma|^2)^2 d\sigma < \infty$$

e para todo $\sigma \in \mathbb{C}$, $|f(\sigma)| \leq C(1 + |\sigma|)^N e^{L|\operatorname{Im} \sigma|}$, para $C, N > 0$. Para que a função seja inteira, como as raízes do numerador são simples, então as raízes do polinômio $\sigma^3 - \sigma + p$ devem ser simples. Assim, (†) é equivalente à existencia de complexos p, μ_0 é inteiros positivos k, l tais que

$$\mu_1 := \mu_0 + k \frac{2\pi}{L}, \quad \mu_2 := \mu_1 + l \frac{2\pi}{L}. \quad (3.63)$$

Daí,

$$\sigma^3 - \sigma + p = (\sigma - \mu_0)(\sigma - \mu_1)(\sigma - \mu_2), \quad (3.64)$$

tal que as raízes satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 &= 0, \\ \mu_0\mu_1 + \mu_0\mu_2 + \mu_1\mu_2 &= -1, \\ \mu_0\mu_1\mu_2 &= -p. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Da primeira relação acima, segue que

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 3\mu_0 + (2k + l) \frac{2\pi}{L} = 0 \implies \mu_0 = -\frac{1}{3}(2k + l) \frac{2\pi}{L}. \quad (3.66)$$

De (3.63) e a terceira relação, temos que

$$p = -\mu_0 \left(\mu_0 + k \frac{2\pi}{L} \right) \left(\mu_0 + (k + l) \frac{2\pi}{L} \right).$$

Agora, da segunda relação e de (3.63) segue que

$$\frac{3L^2\mu_0^2 + 8Lk\pi\mu_0 + 4lL\pi\mu_0 + 4k^2\pi^2 + 4lk\pi^2}{L^2} = -1. \quad (3.67)$$

Assim, procurando pelas raízes positivas de (3.67), obtemos que

$$L = -\frac{2\pi \left(\sqrt{k^2\mu_0^2 - k^2 + kl\mu_0^2 - kl + l^2\mu_0^2 + 2k\mu_0 + l\mu_0} \right)}{3\mu_0^2 + 1}. \quad (3.68)$$

Portanto, de (3.66), segue que

$$L = \frac{\pi \sqrt{\frac{16k^2}{3} + \frac{16kl}{3} + \frac{16l^2}{3}}}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{k^2 + kl + l^2}. \quad (3.69)$$

Em resumo, (†) é equivalente a $L \in \mathcal{N}$. □

Assim, temos uma solução trivial para (3.56), o que contradiz que $\|y_0\|_{L^2(0,L)} = 1$ e provando assim (3.48). \square

Conhecendo a existência do conjunto dos comprimentos críticos, estudaremos a controlabilidade do sistema (3.43). Para tal, vamos considerar a seguinte desigualdade de observabilidade correspondente a solução do sistema adjunto.

Proposição 3.2.7. *Seja $L \notin \mathcal{N}$ e $T > 0$. Então existe uma constante $C = C(L, T) > 0$ tal que*

$$\|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1}^2 \leq C \int_0^T [|\theta_x(t, L)|^2 + |\xi_x(t, 0)|^2] dt, \quad (3.70)$$

para todo $(\theta_0, \xi_0) \in X_1$, onde (θ, ξ) representam a solução de (3.37).

Se a Proposição 3.2.7 se verifica, então temos, pelo H.U.M., o seguinte resultado.

Teorema 3.2.8. *Seja $T > 0$ e $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$, então o sistema (3.43) é exatamente controlável no tempo T .*

Demonstração. De fato, considere o seguinte funcional

$$\Lambda(\theta_1, \xi_1) = \frac{1}{2} \left(\|\theta_x(\cdot, L)\|_{L^2(0,T)}^2 + \|\xi_x(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)}^2 \right) - \int_0^L (\eta_1(x)\theta_1(x) + \omega_1(x)\xi_1(x)) dx \quad (3.71)$$

onde $(\theta_1, \xi_1) \in X_1$ e (θ, ξ) é a solução do sistema adjunto (3.27)-(3.29).

Seja $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\xi}_1) \in X_1$ que minimiza o funcional Λ . Tomando a derivada de Λ , obtemos que (3.45) é satisfeita com $h_2(t) = \xi_x(t, 0) \in L^2(0, T)$ e $g_2(t) = \theta_x(t, L) \in L^2(0, T)$. Logo, com o objetivo de obter a controlabilidade temos que provar que Λ atinge o mínimo. Por (3.45) e (3.70), segue que

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta_1, \xi_1) &= \frac{1}{2} \left(\|\theta_x(\cdot, L)\|_{L^2(0,T)}^2 + \|\xi_x(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)}^2 \right) - \int_0^L (\eta_1(x)\theta_1(x) + \omega_1(x)\xi_1(x)) dx \\ &\geq C^{-1} \|(\theta_1, \xi_1)\|_{X_1}, \end{aligned}$$

isto é, Λ é coercivo, pelo Teorema de Lax-Milgram. Logo, temos que existe $(\eta_1, \omega_1) \in X_{-1}$, tais que

$$\langle (\eta_1, \omega_1); (\theta_1, \xi_1) \rangle_{X_{-1}, X_1} = \Lambda(\theta_1, \xi_1). \quad (3.72)$$

Daí, se $\Lambda(\theta_1, \xi_1) = 0$, então $\langle (\eta_1, \omega_1); (\theta_1, \xi_1) \rangle_{X_{-1}, X_1} = 0$ para todo $(\eta_1, \omega_1) \in X_{-1}$, daí $(\theta_1, \xi_1) = (0, 0)$. Portanto, $\text{Ker } \Lambda = \{0\}$, isto é, Λ é invertível. Assim, podemos definir $(\theta_1, \xi_1) := \Lambda^{-1}(\eta_1, \omega_1)$ solução do sistema (3.37). Portanto, pelo Lema 3.2.2 temos o resultado. \square

Agora estamos em posição de prova a desigualdade de observabilidade.

Prova da Proposição 3.2.7. Argumentamos por contradição. Suponhamos que (3.70) não se verifica, então existe uma sequência de dados iniciais $(\theta_0^n, \xi_0^n)_n \in X_1$ tais que,

$$1 = \|(\theta_0^n, \xi_0^n)\|_{X_1}^2, \quad (3.73)$$

$$\int_0^T |\theta_x^n(t, L)| dt \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T) \quad (3.74)$$

e

$$\int_0^T |\xi_x^n(t, 0)| dt \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T), \quad (3.75)$$

onde (θ^n, ξ^n) é solução para (3.30)-(3.32) com dado inicial (θ_0^n, ξ_0^n) . Pelo Corolário 3.1.8 e (3.73) segue que $(\theta^n, \xi^n)_n$ é limitada em $L^2(0, T; X_1)$ e de (3.30) obtemos que $(\theta_t^n, \xi_t^n)_n$ é limitada em $L^2(0, T; X_{-2}(0, L))$. Como

$$X_1 \hookrightarrow_c X_0 \hookrightarrow X_{-2},$$

sendo a primeira imersão compacta, então $(\theta^n, \xi^n)_n$ é relativamente compacta em $L^2(0, T; X_0)$. Portanto, existe uma subsequência, ainda denotada por $(\theta^n, \xi^n)_n$, tal que

$$(\theta^n, \xi^n) \rightarrow (\theta, \xi) \text{ em } L^2(0, T; X_0).$$

Além disso, como $(\theta^n, \xi^n)_n$ é limitada em $L^\infty(0, T; X_1) \cap H^1(0, T; (X_{-2}))$ podemos extrair uma subsequência tal que

$$(\theta^n, \xi^n) \rightarrow (\theta, \xi) \text{ em } C([0, T]; X_{-1}), \text{ para todo } T > 0. \quad (3.76)$$

Por (3.35), sendo $X_1 \hookrightarrow X_0$ compacto, obtemos que $(\theta_0^n, \xi_0^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em X_1 . Portanto, ao menos para uma subsequência,

$$(\theta_0^n, \xi_0^n) \rightarrow (\theta_0, \xi_0) \text{ em } X_1. \quad (3.77)$$

Em particular, de (3.76)

$$(\theta, \xi)(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta^n, \xi^n)(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_0^n, \xi_0^n) = (\theta_0, \xi_0).$$

Daí, obtemos que

$$\|(\theta_0, \xi_0)\|_{X_1} = 1 \quad (3.78)$$

e por (3.74) e (3.75), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T (|\theta_x^n(t, L)|^2 + |\xi_x^n(t, 0)|^2) dt \right\} \\ &\geq \int_0^T (|\theta_x(t, L)|^2 + |\xi_x(t, 0)|^2) dt. \end{aligned}$$

Logo, $\theta_x(\cdot, L) = \xi_x(\cdot, 0) = 0$. Definamos $y(t, x) := \theta(t, x) + \xi(t, x)$, observe que $y(t, x)$ satisfaz

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = (\theta_t + \theta_x + \theta_{xxx}) + (\xi_t + \xi_x + \xi_{xxx} = 0), & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = \theta(t, 0) + \xi(t, 0) = 0, & t \in (0, T), \\ y(t, L) = \theta(t, L) + \xi(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y_x(t, L) = \theta_x(t, L) + \xi_x(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y(0, x) = \theta_0(x) + \xi_0(x), & x \in (0, L), \end{cases}$$

juntamente com a condição adicional $y_x(t, 0) = \theta_x(t, 0) + \xi_x(t, 0) = 0$. Pela Proposição 3.2.4, segue que $\theta_0 + \xi_0 = 0$. Da mesma forma, definindo $z(t, x) := \theta(t, L-x) - \xi(t, L-x)$ podemos concluir que $\theta_0(L-x) - \xi_0(L-x) = 0$. Portanto, $\theta_0 = \xi_0 = 0$. Assim, por (3.77) obtemos que $(\theta_0^n, \xi_0^n) \rightarrow (0, 0)$ em X_1 . O que contradiz (3.73). \square

Em resumo, se $L \notin \mathcal{N}$ pela Proposição 3.2.7 segue que o sistema (3.43) é exatamente controlável em X_{-1} . Vamos verificar se $L \in \mathcal{N}$, então por (ROSIER, 1997b, Observação 3.6 (i)) existe uma solução não trivial y de (3.47) tal que $y_x(\cdot, 0) = 0$. Então $(\theta(t, x), \xi(t, x)) := (y(t, x) + y(t, L-x), y(t, x) - y(t, L-x))$ é uma solução não trivial de (3.37) tal que $\theta_x(\cdot, L) = \xi_x(\cdot, 0) = 0$. Segue que (3.43) não é exatamente controlável em X_{-1} se $L \in \mathcal{N}$.

4 SOBRE DISSIPACÕES NA FRONTEIRA E SEUS EFEITOS REGULARIZANTES

No capítulo anterior mostramos certas condições de contorno que nos ajudam a provar problemas de controlabilidade exata, com restrições sobre o domínio espacial, e estabilização exponencial das soluções de um sistema Boussinesq do tipo KdV-KdV, sem restrições no domínio espacial. Nesta seção estamos interessados em encontrar condições de contorno que nos forneça dissipação da energia associada ao sistema em consideração, bem como o efeito regularizante de Kato. Neste sentido, consideremos o sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + a\omega_{xxx} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + c\eta_{xxx} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde os parâmetros $a, c \in \mathbb{R}$ são tais que satisfazem as condições

$$a = \frac{1}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{3} \right), \quad c = \frac{1}{2} (1 - \theta^2) \geq 0, \quad a + c = \frac{1}{3}, \quad (4.2)$$

com $\theta \in [0, 1]$.

Sabemos que a versão linear do sistema (4.1) é dado por,

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + a\omega_{xxx} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + c\eta_{xxx} = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

com condições iniciais,

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad x \in (0, L), \quad (4.4)$$

e possui energia associada definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2) dx. \quad (4.5)$$

Assim, nesta seção, estamos interessados em dois pontos. Primeiramente em estudar as condições para o qual a energia (4.5) associada a solução do sistema é dissipativa, por fim, verificar quais condições de contorno são apropriadas para conseguir o efeito de regularização de Kato.

4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO QUE GERAM DISSIPACÃO DA ENERGIA

Nesta seção estamos interessados em estudar o comportamento da energia associada ao sistema (4.3). Precisamente, estudaremos o comportamento da função $E(t)$ definida em (4.5).

Iniciamos deduzindo quais condições de fronteira são as ideais para que energia do sistema seja dissipativa.

Para isto, consideremos (η, ω) funções regulares. Multiplicando a primeira equação de (4.3) por η , a segunda equação de (4.3) por ω , fazendo integrações por partes em $(0, L)$ e adicionando os resultados obtemos,

$$\int_0^L \frac{1}{2} (|\eta|^2 + |\omega|^2)_t dx + (a - c) \int_0^L \eta \omega_{xxx} dx + [\omega \eta]_0^L + c [\eta \omega_{xx} - \eta_x \omega_x + \eta_{xx} \omega]_0^L = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & -\eta(L)\omega(L) + \eta(0)\omega(0) - c [\omega(L)\eta_{xx}(L) - \eta_x(L)\omega_x(L) + \eta(L)\omega_{xx}(L) \\ & - \eta_{xx}(0)\omega(0) + \eta_x(0)\omega_x(0) - \eta(0)\omega_{xx}(0)] - (a - c) \int_0^L \eta \omega_{xxx} dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considere agora $a = c$. Logo, colocando os traços de η, ω, η_x e ω_x em evidência, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & \eta(L) [-\omega(L) - c\omega_{xx}(L)] - c\omega(L)\eta_{xx}(L) + \eta(0) [\omega(0) + c\omega_{xx}(0)] \\ & + c\omega(0)\eta_{xx}(0) + c\eta_x(L)\omega_x(L) - c\eta_x(0)\omega_x(0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Da igualdade acima, iremos escolher condições de contorno que garantem que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq 0. \quad (4.8)$$

Em particular, se escolhermos as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \omega_x(L) = -\alpha_1 \eta_x(L), \\ \omega_x(0) = \alpha_0 \eta_x(0), \end{cases} \quad (4.9)$$

donde $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & -\eta(L) [\omega(L) + c\omega_{xx}(L)] - c\omega(L)\eta_{xx}(L) + \eta(0) [\omega(0) + c\omega_{xx}(0)] \\ & + c\omega(0)\eta_{xx}(0) - c\alpha_1 |\eta_x(L)|^2 - c\alpha_0 |\eta_x(0)|^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para obter (4.8), devemos supor que:

$$-\eta(L) [\omega(L) + c\omega_{xx}(L)] - c\omega(L)\eta_{xx}(L) + \eta(0) [\omega(0) + c\omega_{xx}(0)] + c\omega(0)\eta_{xx}(0) \leq 0. \quad (4.11)$$

Portanto, podemos considerar as seguintes condições de contorno,

$$\begin{cases} \omega(L) + c\omega_{xx}(L) = \alpha_2 \eta(L), \\ c\eta_{xx}(L) = \alpha_3 \omega(L), \\ \omega(0) + c\omega_{xx}(0) = -\alpha_4 \eta(0), \\ c\eta_{xx}(0) = -\alpha_5 \omega(0), \end{cases} \quad (4.12)$$

donde $\alpha_i \geq 0, \forall i = 2, 3, 4, 5$, juntamente com as condições de contorno (4.9). Assim, supondo (4.9) e (4.12) satisfeitas, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) = & -\alpha_2 |\eta(L)|^2 - \alpha_3 |\omega(L)|^2 - \alpha_4 |\eta(0)|^2 - \alpha_5 |\omega(0)|^2 \\ & -\alpha_1 |\eta_x(L)|^2 - \alpha_0 |\eta_x(0)|^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

obtendo a dissipação da energia associada ao sistema (4.3).

Na tabela a seguir sumarizamos algumas condições de contorno que geram dissipação da energia do sistema (4.3).

Tabela 1 – Casos onde a energia é dissipativa.

Caso	$\eta(L)$	$\omega(L)$	$\eta(0)$	$\omega(0)$	$\omega_x(L)$	$\omega_x(0)$	$\omega_{xx}(L)$	$\omega_{xx}(0)$
1.	0	0	0	0	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	–	–
2.	–	$\alpha_2 \eta(L)$	0	0	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	$-\alpha_2 \eta_{xx}(L)$	–
3.	0	0	–	$-\alpha_0 \eta(0)$	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	–	$\alpha_0 \eta_{xx}(0)$
4.	–	0	–	0	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	$\alpha_0 \eta(L)$	$-\alpha_3 \eta(0)$
5.	0	$\alpha_0 \eta_{xx}(L)$	0	$-\alpha_3 \eta_{xx}(0)$	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	–	–
6.	0	0	0	$-\alpha_0 \eta_{xx}(0)$	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	–	–
7.	0	0	–	0	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	–	$\alpha_0 \eta(0)$
8.	0	$\alpha_0 \eta_{xx}(L)$	0	0	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	–	–
9.	–	0	0	0	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	$\alpha_0 \eta_x(0)$	$\alpha_1 \eta(L)$	–
10.	0	0	0	0	$-\alpha_1 \eta_x(L)$	0	–	–
11.	0	0	0	0	0	$\alpha_0 \eta_x(0)$	–	–

4.2 SOBRE O EFEITO REGULARIZANTE DE KATO

Sabemos que o sistema de Boussinesq do tipo KdV-KdV tem a presença de não linearidades de ordem um, isto é $(\eta\omega)_x$ e $\omega\omega_x$. Sendo assim, é preciso procurar um ganho de regularidade das soluções para tentar controlar os termos não lineares por meio de um argumento de ponto fixo.

Do ponto de vista da boa colocação e da controlabilidade é muito interessante se perguntar quais seriam as condições para as quais o efeito regularizante de Kato possa ser obtido. Nesse sentido, utilizaremos os bem conhecidos multiplicadores de Morawetz para analisar os diferentes casos das condições de fronteira que nos garantem estimativas à priori no espaço $L^2(0, T; H^1(0, L))$.

Estimativas à priori

Multiplicamos a primeira equação de (4.3) por η e a segunda por ω , somando os resultados e integramos em $(0, L) \times (0, T)$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L \int_0^T (\eta\eta_t + \eta\omega_x + \eta\omega_{xxx}) dt dx + \int_0^L \int_0^T (\omega\omega_t + \omega\eta_x + \omega\eta_{xxx}) dt dx \\
&= \int_0^L \int_0^T \frac{1}{2} (|\eta|^2 + |\omega|^2)_t dt dx + \int_0^T [\eta\omega]_0^L dt - \int_0^L \int_0^T \eta_x\omega dt dx + \int_0^L \int_0^T \omega\eta_x dt dx \\
&\quad + \int_0^L \int_0^T \eta\omega_{xxx} dt dx + \int_0^T [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt - \int_0^L \int_0^T \eta\omega_{xxx} dt dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L [|\eta|^2 + |\omega|^2]_0^T dx + \int_0^T [\eta\omega]_0^L dt + \int_0^T [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^L [|\eta(T)|^2 + |\omega(T)|^2] dx &= \frac{1}{2} \int_0^L [|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2] dx \\
&\quad - \int_0^T [\eta\omega]_0^L dt - \int_0^T [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Multiplicamos a primeira equação por $(T-t)\eta$ e a segunda por $(T-t)\omega$, adicionamos os resultados e integramos em $(0, L) \times (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^L (T-t)\eta\eta_t dx dt + \int_0^T \int_0^L (T-t)\eta\omega_x dx dt + \int_0^T \int_0^L (T-t)\eta\omega_{xxx} dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L (T-t)\omega\omega_t dx dt + \int_0^T \int_0^L (T-t)\omega\eta_x dx dt + \int_0^T \int_0^L (T-t)\omega\omega_{xxx} dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_0^T (T-t)\eta\eta_t dt = \int_0^T (T-t) \frac{1}{2} (|\eta|^2)_t dt = \frac{1}{2} [|\eta|^2 (T-t)]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T |\eta|^2 dt,$$

então,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int_0^L [|\eta|^2 (T-t)]_0^T dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T |\eta|^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_0^L [|\omega|^2 (T-t)]_0^T dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T |\omega|^2 dt dx + \int_0^T (T-t) [\eta\omega]_0^L dt - \int_0^T \int_0^L (T-t)\omega\eta_x dx dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L (T-t)\omega\eta_x dx dt + \int_0^T (T-t) [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L (T-t)\eta_{xxx}\omega dx dt + \int_0^T \int_0^L (T-t)\omega\eta_{xxx} dx dt \\
&= -\frac{T}{2} \int_0^L (|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2) dt + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (|\eta|^2 + |\omega|^2) dt dx + \int_0^T (T-t) [\eta\omega]_0^L dt \\
&\quad + \int_0^T (T-t) [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} \int_0^L (|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (|\eta|^2 + |\omega|^2) dt dx \\ &\quad + \int_0^T (T-t) [\eta\omega]_0^L dt + \int_0^T (T-t) [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

Multiplicamos a primeira equação de (4.3) por $x\omega$ e a segunda equação de (4.3) por $x\eta$, integramos em $(0, L) \times (0, T)$ e somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \int_0^T (x\eta_t\omega + x\omega_x\omega + x\omega_{xxx}\omega) dt dx + \int_0^L \int_0^T (x\omega_t\eta + x\eta_x\eta + x\eta_{xxx}\eta) dt dx \\ &= \int_0^L \int_0^T x (\eta\omega)_t dt dx + \int_0^L \int_0^T \frac{x}{2} (|\omega|^2 + |\eta|^2)_x dt dx \\ &\quad + \int_0^L \int_0^T x (\omega_{xxx}\omega + \eta_{xxx}\eta) dt dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observe que

$$\omega_{xxx}\omega = \left(\omega_{xx}\omega - \frac{1}{2} |\omega_x|^2 \right)_x,$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^T x (\omega_{xxx}\omega + \eta_{xxx}\eta) dt dx &= \int_0^T \int_0^L x \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) \right)_x dx dt \\ &= \int_0^T \left[x \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) \right) \right]_0^L dt \\ &\quad - \int_0^L \int_0^T \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) \right) dt dx \end{aligned}$$

Note que

$$\int_0^L \int_0^T \left(\omega_{xx}\omega - \frac{1}{2} |\omega_x|^2 \right) dt dx = -\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T |\omega_x|^2 dt dx + \int_0^T [\omega_x\omega]_0^L dt dx \quad (4.17)$$

e

$$\int_0^L \int_0^T \left(\eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} |\eta_x|^2 \right) dt dx = -\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T |\eta_x|^2 dt dx + \int_0^T [\eta_x\eta]_0^L dt dx. \quad (4.18)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^T x (\omega_{xxx}\omega + \eta_{xxx}\eta) dt dx &= \int_0^T \left[x \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) \right) \right]_0^L dt \\ &\quad + \frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) dt dx - \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt dx. \end{aligned}$$

Finalmente obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) dt dx &= - \int_0^T \left[x \left(\omega_{xx}\omega + \eta_{xx}\eta - \frac{1}{2} (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) \right) \right]_0^L dt \\ &\quad + \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt dx - \int_0^L \int_0^T x (\eta\omega)_t dt dx - \int_0^L \int_0^T \frac{x}{2} (|\omega|^2 + |\eta|^2)_x dt dx \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) dt dx &= -L \int_0^T \left(\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L) - \frac{1}{2} (|\omega_x(L)|^2 + |\eta_x(L)|^2) \right) dt \\
&+ \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt dx - \int_0^L x [\eta\omega]_0^T dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega|^2 + |\eta|^2) dt dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T [x (|\omega|^2 + |\eta|^2)]_0^L dt \\
&= -L \int_0^T \left(\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L) - \frac{1}{2} (|\omega_x(L)|^2 + |\eta_x(L)|^2) \right) dt \\
&+ \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt dx - \int_0^L x\eta(T)\omega(T) dx + \int_0^L x\eta_0\omega_0 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega|^2 + |\eta|^2) dt dx \\
&\quad - \frac{L}{2} \int_0^T (|\omega(L)|^2 + |\eta(L)|^2) dt.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) dt dx &\leq -L \int_0^T (\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L)) dt + \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt dx \\
&\quad - \int_0^L x\eta(T)\omega(T) dx + \int_0^L x\eta_0\omega_0 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega|^2 + |\eta|^2) dt dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) dt dx &\leq -L \int_0^T (\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L)) dt + \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt dx \\
&+ \frac{L}{2} \int_0^L (|\eta(T)|^2 + |\omega(T)|^2) dx + \frac{L}{2} \int_0^L (|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega|^2 + |\eta|^2) dt dx.
\end{aligned}$$

É importante notar que para continuar estimando a norma em $L^2(0, L; H^1(0, L))$ não vamos supor que a energia é dissipativa. Portanto, usando (4.14) e (4.15), segue

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \int_0^L \int_0^T (|\omega_x|^2 + |\eta_x|^2) dt dx &\leq -L \int_0^T (\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L)) dt + \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt \\
&\quad \left(L + \frac{T}{2} \right) \int_0^L (|\eta_0|^2 + |\omega_0|^2) dx \\
&\quad - L \int_0^T [\eta\omega]_0^L dt - L \int_0^T [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt \\
&\quad - \int_0^T (T-t) [\eta\omega]_0^L dt - \int_0^T (T-t) [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Notemos o seguinte

$$\begin{aligned}
& -L \int_0^T (\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L)) dt + \int_0^T [\omega_x\omega + \eta_x\eta]_0^L dt - L \int_0^T [\eta\omega]_0^L dt \\
& -L \int_0^T [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt - \int_0^T (T-t) [\eta\omega]_0^L dt - \int_0^T (T-t) [\eta\omega_{xx} - \eta_x\omega_x + \eta_{xx}\omega]_0^L dt \\
& = -L \int_0^T (\omega_{xx}(L)\omega(L) + \eta_{xx}(L)\eta(L)) dt - L \int_0^T [\eta(L)\omega(L) - \eta(0)\omega(0)] dt \\
& \quad + \int_0^T [\omega_x(L)\omega(L) + \eta_x(L)\eta(L) - \omega_x(0)\omega(0) - \eta_x(0)\eta(0)] dt \\
& -L \int_0^T [\eta(L)\omega_{xx}(L) - \eta_x(L)\omega_x(L) + \eta_{xx}(L)\omega(L) - \eta(0)\omega_{xx}(0) + \eta_x(0)\omega_x(0) - \eta_{xx}(0)\omega(0)] dt \\
& \quad - \int_0^T (T-t) [\eta(L)\omega(L) - \eta(0)\omega(0)] dt \\
& - \int_0^T (T-t) [\eta(L)\omega_{xx}(L) - \eta_x(L)\omega_x(L) + \eta_{xx}(L)\omega(L) - \eta(0)\omega_{xx}(0) + \eta_x(0)\omega_x(0) - \eta_{xx}(0)\omega(0)] dt
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Com o objetivo de garantir o efeito regularizante de Kato colocamos os traços $\eta(L)$, $\omega(L)$, $\eta(0)$, $\omega(0)$, $\eta_x(L)$, e $\omega_x(L)$ em evidência, para obter

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \eta(L) [-L\eta_{xx}(L) + \eta_x(L) - [L + (T-t)] (\omega(L) + \omega_{xx}(L))] dt \\
& \quad + \int_0^T \omega(L) [-L\omega_{xx}(L) + \omega_x(L) - [L + (T-t)] \eta_{xx}(L)] dt \\
& \quad - \int_0^T \eta(0) [\eta_x(0) - [L + (T-t)] (\omega(0) + \omega_{xx}(0))] dt \\
& \quad - \int_0^T \omega(0) [\omega_x(0) - [L + (T-t)] \eta_{xx}(0)] dt \\
& \quad + \int_0^T [L + (T-t)] \eta_x(L)\omega_x(L) dt - \int_0^T [L + (T-t)] \eta_x(0)\omega_x(0) dt \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Das estimativas anteriores, propomos as seguintes condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l}
\omega_x(0) = \alpha_0\eta_x(0), \\
\omega_x(L) = -\alpha_1\eta_x(L), \\
[-L\eta_{xx}(L) + \eta_x(L) - [L + (T-t)] (\omega(L) + \omega_{xx}(L))] = -\alpha_2\eta(L), \\
[-L\omega_{xx}(L) + \omega_x(L) - [L + (T-t)] \eta_{xx}(L)] = -\alpha_3\omega(L), \\
[\eta_x(0) - [L + (T-t)] (\omega(0) + \omega_{xx}(0))] = \alpha_4\eta(0), \\
[\omega_x(0) - [L + (T-t)] \eta_{xx}(0)] = \alpha_5\omega(0).
\end{array} \right. \tag{4.22}$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ para todo $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Exibimos assim na tabela a seguir alguns casos e as relações entre os termos que geram o efeito regularizante de Kato.

Tabela 2 – Condições para o efeito regularizante de Kato.

Caso	$\eta(L)$	$\omega(L)$	$\eta(0)$	$\omega(0)$	$\omega_x(L)$	$\omega_x(0)$	$\omega_{xx}(L)$	$\omega_{xx}(0)$
1.	0	0	0	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–
2.	–	$\alpha_2\eta(L)$	0	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	$-\alpha_2\eta_{xx}(L)$	–
3.	0	0	–	$-\alpha_0\eta(0)$	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	$\alpha_0\eta_{xx}(0)$
4.	0	0	0	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	0	–	–
5.	0	0	0	0	0	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste capítulo, vamos apresentar questões que surgiram no desenvolvimento deste trabalho. Consideremos agora o sistema completo de Boussinesq, à saber,

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + a\omega_{xxx} - b\eta_{xxt} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + c\eta_{xxx} - d\omega_{xxt} = 0, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad x \in (0, L). \end{cases} \quad (5.1)$$

Observe que o sistema linear associado ao sistema (5.1) é dado por

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + a\omega_{xxx} - b\eta_{xxt} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + c\eta_{xxx} - d\omega_{xxt} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Assim, podemos definir a energia total associada ao sistema como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2 + b|\eta_x|^2 + d|\omega_x|^2) dx. \quad (5.3)$$

Fazendo um análise análoga à feita na Seção 4.1, para garantir que a energia definida em (5.3) seja decrescente, propomos as seguintes condições de contorno,

$$\begin{cases} \omega_x(L) = -\alpha_1\eta_x(L), \\ \omega_x(0) = \alpha_0\eta_x(0), \\ b\eta_{xt}(L) - \omega(L) - c\omega_{xx}(L) = -\alpha_2\eta(L), \\ d\omega_{xt}(L) - c\eta_{xx}(L) = -\alpha_3\omega(L), \\ -b\eta_{xt}(0) + \omega(0) + c\omega_{xx}(0) = -\alpha_4\eta(0), \\ -d\omega_{xt}(0) + c\eta_{xx}(0) = -\alpha_5\omega(0), \end{cases} \quad (5.4)$$

onde $\alpha_i \geq 0, \forall i = 0, \dots, 5$. Assim, supondo as condições de contorno acima satisfeitas, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= -\alpha_0 |\eta_x(0)|^2 - \alpha_1 |\eta_x(L)|^2 - \alpha_2 |\eta(L)|^2 \\ &\quad - \alpha_3 |\omega(L)|^2 - \alpha_4 |\eta(0)|^2 - \alpha_5 |\omega(0)|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Além das condições de contorno (5.4), temos mais casos onde a energia (5.3) é dissipativa, tais casos estão detalhados na tabela a seguir.

Tabela 3 – Casos onde a energia (5.3) é dissipativa.

Caso	$\eta(L)$	$\omega(L)$	$\eta(0)$	$\omega(0)$	$\omega_x(L)$	$\omega_x(0)$	$\omega_{xx}(L)$	$\omega_{xx}(0)$	$\eta_{xx}(L)$	$\eta_{xx}(0)$
1.	0	0	0	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	–	–
2.	–	$b\eta_{xt}(L) - c\omega_{xx}(L)$	0	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(L)$	–
3.	0	0	–	$b\eta_{xt}(0) - c\omega_{xx}(0)$	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(0)$
4.	–	0	–	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	$\frac{b}{c}\eta_{xt}(L)$	$\frac{b}{c}\eta_{xt}(0)$	–	–
5.	0	–	0	–	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(L)$	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(0)$
6.	0	0	0	–	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(0)$
7.	0	0	–	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	$\frac{b}{c}\eta_{xt}(0)$	–	–
8.	0	–	0	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(L)$	–
9.	–	0	0	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	$\frac{b}{c}\eta_{xt}(L)$	–	–	–
10.	–	$b\eta_{xt}(L) - c\omega_{xx}(L)$	–	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	$\frac{b}{c}\eta_{xt}(0)$	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(L)$	–
11.	–	$b\eta_{xt}(L) - c\omega_{xx}(L)$	–	0	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(L)$	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(0)$
12.	–	0	–	$b\eta_{xt}(0) - c\omega_{xx}(0)$	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	$\frac{b}{c}\eta_{xt}(L)$	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(0)$
13.	0	–	–	$b\eta_{xt}(0) - c\omega_{xx}(0)$	$-\alpha_1\eta_x(L)$	$\alpha_0\eta_x(0)$	–	–	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(L)$	$\frac{d}{c}\omega_{xt}(0)$

Os casos da Tabela 3 representam condições de contorno que geram dissipação para a energia do sistema (5.2). Então, considerando o sistema (5.1) com as condições de contorno (5.4) ou os casos das condições de contorno da Tabela 3, surgem então as seguintes questões:

- É possível garantir a existência de soluções para o sistema (5.1) com tais condições de contorno?
- No caso das condições de contorno (5.4), é possível provar a desigualdade de observabilidade

$$\|(\eta_0, \omega_0)\|_X^2 \leq C \int_0^T A(t) dt, \quad (5.6)$$

para alguma $C > 0$, onde

$$A(t) := \alpha_0 |\eta_x(0)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L)|^2 + \alpha_2 |\eta(L)|^2 + \alpha_3 |\omega(L)|^2 + \alpha_4 |\eta(0)|^2 + \alpha_5 |\omega(0)|^2? \quad (5.7)$$

- Para controlar as não linearidades, seria possível obter condições de contorno que gerem dissipação e efeito regularizante de kato e que sejam diferentes das configurações já conhecidas?

Observe que se tivermos respostas positivas a tais perguntas conseguiremos, de certo modo, estender os resultados provados em (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2019).

REFERÊNCIAS

- BACHMAN, G.; NARICI, L. *Functional Analysis*. 2nd ed. ed. [S.l.]: Dover Publications, 1998. (Dover Books on Mathematics).
- BONA, J. L.; CHEN, M.; SAUT, J. C. Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. i. derivation and linear theory. p. 283–318, 2002.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2010. (Universitext).
- CAPISTRANO-FILHO, R. A.; PAZOTO, A. F.; ROSIER, L. Control of boussinesq system of kdv-kdv type on a bounded interval. *ESAIM Control Optimization and Calculus Variations*, n. 25, p. 1–55, 2019.
- CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1987.
- FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 1999. (PAM).
- GOMES, A. M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*. 2 edição. ed. [S.l.]: UFRJ - IM, 2005. (Rio de Janeiro).
- KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. [S.l.]: Wiley Eastern Limited, 1989.
- LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*. [S.l.]: Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- LIONS, J. L.; MAGENES, E. Problèmes aux limites non homogenes et applications. *Dunod, Gauthier-Villars, Paris*, p. vol.1, 1968.
- MAMUD, R. Estabilização de um sistema de boussinesq do tipo kdv-kdv. 2012.
- MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos)*. [S.l.]: IM - UFRJ, 2000.
- PAZOTO, A. F.; ROSIER, L. Stabilization of a boussinesq system of kdv-kdv type. n. 57, p. 595–601, 2008.
- PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer, New York, NY, 1999.
- ROSIER, L. Exact boundary controllability for the korteweg-de vries equation on a bounded domain. p. 33–55, 1997.
- ROSIER, L. Exact boundary controllability for the korteweg-de vries equation on a bounded domain. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, n. 2, p. 33–55, 1997.
- RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3d ed. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1976. (International series in pure and applied mathematics).

TEMAM, R. *Navier-Stokes equations*. 3. ed. [S.l.]: North- Holland Pu- blishing Co., Amsterdam, 1984. v. 2. (Studies in Mathematics and its Applications, v. 2).

APÊNDICE A – O EFEITO DOS AMORTECIMENTOS NA FRONTEIRA E SUAS PROPRIEDADES DE DECAIMENTO

Neste apêndice estamos interessados em mostrar alguns dos resultados obtidos em (PAZOTO; ROSIER, 2008), e cuja dissertação (MAMUD, 2012) tratou recentemente, com o interesse de estudar a estabilidade das soluções sem os comprimentos críticos.

Vamos considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + \omega_{xxx} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + \eta_{xxx} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Temos interesse em trabalhar com condições de contorno adequadas que desempenham o papel de um mecanismo de amortecimentos - *feedback* - na fronteira. Fazendo as mudanças de variável $v = \eta + \omega$ e $u = \eta - \omega$, o sistema (A.1) pode ser escrito como um sistema de duas equações KdV acopladas em suas não linearidades,

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + \frac{1}{4} [(v-u)(v+u)]_x + \frac{1}{4} (v-u)(v+u)_x = 0, \\ u_t + u_x + u_{xxx} + \frac{1}{4} [(v-u)(v+u)]_x + \frac{1}{4} (v-u)(v+u)_x = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Portanto, as condições de contorno

$$\begin{cases} v(0) = v(L) = v_x(L) = 0, \\ u(0) = u(L) = u_x(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

garantem a boa colocação e estabilidade exponencial do sistema (A.1) em $L^2(0, T) \times L^2(0, T)$. Porém, a propriedade da estabilidade exponencial é garantida se L não é um comprimento crítico no sentido de (ROSIER, 1997a), isto é,

$$L \notin \mathcal{N} := \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{k^2 + kl + l^2} : k, l \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

É importante salientar que o comportamento assintótico das soluções do sistema de Bousinesq do tipo KdV-KdV tem sido bem estudado nos últimos anos. De fato, existem diferentes mecanismos dissipativos na fronteira para obter um decaimento a zero da energia associada ao sistema com uma taxa exponencial. Nessa direção, os autores em (CAPISTRANO-FILHO; PAZOTO; ROSIER, 2019) provaram o decaimento exponencial com só um amortecimento na fronteira:

$$\begin{cases} \eta(0, t) = \eta(L, t) = \eta_x(0, t) = 0, \\ \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0, \quad \omega_x(L, t) = -\alpha\eta_x(L, t), \end{cases}$$

sempre que $L \notin \mathcal{N}$. Portanto, o fenômeno de comprimentos crítico também aparecem quando consideramos as condições de fronteira anteriores para obter o decaimento exponencial para o sistema não linear. Este fenômeno depende diretamente da configuração das dissipações na fronteira e podemos citar, como um trabalho pioneiro para o estudo do comportamento assintótico sem a presença dos comprimentos críticos, o trabalho (PAZOTO; ROSIER, 2008), que trataremos nesta seção.

Neste sentido estudaremos neste capítulo as ideias propostas em (PAZOTO; ROSIER, 2008), e detalhadas em (MAMUD, 2012), para o sistema (A.1), com as condições iniciais

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad x \in (0, L) \quad (\text{A.4})$$

e as condições de contorno

$$\begin{cases} \omega(0, t) = 0, & \omega(L, t) = \alpha_2 \eta(L, t), \\ \omega_x(0, t) = \alpha_0 \eta_x(0, t), & \omega_x(L, t) = -\alpha_1 \eta_x(L, t), \\ \eta(0, t) = 0, & \omega_{xx}(L, t) = -\alpha_2 \eta_{xx}(L, t). \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Com estas condições de contorno os autores em (PAZOTO; ROSIER, 2008) estudam propriedades assintóticas das soluções sem restrições no comprimento L . Vale ressaltar que as condições de contorno (A.5) correspondem ao caso 2 da Tabela 2.

No que segue, definimos a energia do sistema como

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2) dx. \quad (\text{A.6})$$

Vamos supor (η, ω) funções regulares. Multiplicamos a primeira equação de (A.1) por η , a segunda equação de (A.1) por ω , fazendo integrações por partes em $(0, L)$ e adicionando os resultados obtemos,

$$\int_0^L \frac{1}{2} (|\eta|^2 + |\omega|^2)_t dx + (a - c) \int_0^L \eta \omega_{xxx} dx + [\omega \eta]_0^L + c [\eta \omega_{xx} - \eta_x \omega_x + \eta_{xx} \omega]_0^L = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & -\eta(L)\omega(L) + \eta(0)\omega(0) - c [\omega(L)\eta_{xx}(L) - \eta_x(L)\omega_x(L) + \eta(L)\omega_{xx}(L) \\ & - \eta_{xx}(0)\omega(0) + \eta_x(0)\omega_x(0) - \eta(0)\omega_{xx}(0)] - (a - c) \int_0^L \eta \omega_{xxx} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Consideramos agora $a = c$. Logo, colocando os traços de η, ω, η_x e ω_x em evidência, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & \eta(L) [-\omega(L) - c\omega_{xx}(L)] - c\omega(L)\eta_{xx}(L) + \eta(0) [\omega(0) + c\omega_{xx}(0)] \\ & + c\omega(0)\eta_{xx}(0) + c\eta_x(L)\omega_x(L) - c\eta_x(0)\omega_x(0). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Supondo (A.5) satisfeitas, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha_2 |\eta(L)|^2 - \alpha_1 |\eta_x(L)|^2 - \alpha_0 |\eta_x(0)|^2 \leq 0, \quad (\text{A.9})$$

obtendo a dissipação da energia associada ao sistema (A.1).

A.1 PROBLEMA LINEAR

Voltamos nossa atenção para o problema linear com $a = c = 1$,

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + \omega_{xxx} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + \eta_{xxx} = 0, \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

satisfazendo as condições iniciais (A.4) e as condições de contorno (A.5).

A.1.1 Boa colocação do problema linear

Considere $X_0 = [L^2(I)]^2$, onde $I = (0, L)$, com seu produto interno usual e o operador

$$A: D(A) \subset X_0 \rightarrow X_0 \quad (\text{A.11})$$

com domínio

$$D(A) = \left\{ (\eta, \omega) \in [H^3(I)]^2 : \begin{aligned} &\omega(0) = 0, \quad \omega(L) = \alpha_2 \eta(L), \quad \omega_x(0) = \alpha_0 \eta_x(0), \\ &\omega_x(L) = -\alpha_1 \eta_x(L), \quad \eta(0) = 0, \quad \omega_{xx}(L) = -\alpha_2 \eta_{xx}(L) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.12})$$

definido por

$$A(\eta, \omega) = (-\omega_x - \omega_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx}). \quad (\text{A.13})$$

Temos então o seguinte resultado.

Proposição A.1.1. *Se $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2$, então A gera um semigrupo de contrações lineares de classe C_0 , denotado por $(S(t))_{t \geq 0}$, em X_0 .*

Demonstração. Vamos usar a Proposição 2.7.13. Note que $\overline{D(A)} = X_0$, pois $\overline{C_0^\infty(I)} = L^2(I)$, $C_0^\infty \times C_0^\infty(I) \subset D(A)$ e $\overline{C_0^\infty(I) \times C_0^\infty(I)} = L^2(I) \times L^2(I) = X_0$, isto é, $D(A)$ é denso em X_0 . Vamos provar agora que A e A^* são dissipativos.

Vamos definir $D(A^*)$ e A^* . Por definição $\langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle$, $\forall x \in D(A)$ e $\forall y \in D(A^*)$. Logo, dados $(f, g) \in D(A)$ e $(u, v) \in X_0$, temos que

$$\begin{aligned} \langle (u, v), A(f, g) \rangle_{X_0} &= \langle (u, v), (-g_x - g_{xxx}, -f_x - f_{xxx}) \rangle_{X_0} \\ &= - \int_0^L u g_x dx - \int_0^L u g_{xxx} dx - \int_0^L v f_x dx - \int_0^L v f_{xxx} dx \\ &= \int_0^L g (u_x + u_{xxx}) dx + \int_0^L f (v_x + v_{xxx}) dx + g_{xx}(0)u(0) + f_{xx}(0)v(0) \\ &\quad f(L) [-\alpha_2 u(L) - v(L) - \alpha_2 u_{xx}(L) - v_{xx}(L)] + f_{xx}(L) [\alpha_2 u(L) - v(L)] \\ &\quad + f_x(L) [-\alpha_1 u_x(L) + v_x(L)] - f_x(0) [\alpha_0 u_x(0) + v_x(0)]. \end{aligned}$$

Então,

$$A^*: D(A^*) \subset X_0 \rightarrow X_0 \quad (\text{A.14})$$

é dado por

$$A^*(u, v) = (v_x + v_{xxx}, u_x + u_{xxx}), \quad (\text{A.15})$$

com

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \left\{ (u, v) \in [H^3(I)]^2 : v(0) = 0, v(L) = \alpha_2 u(L), v_x(0) = -\alpha_0 u_x(0), \right. \\ &\quad \left. v_x(L) = \alpha_1 u_x(L), u(0) = 0, v_{xx}(L) = -\alpha_2 u_{xx}(L) - 2\alpha_2 u(L) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Com o mesmo processo, podemos mostrar que $A^{**} = A$, isto é, A é fechado.

Vamos mostrar que A é dissipativo. Seja $(\eta, \omega) \in D(A)$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle A(\eta, \omega), (\eta, \omega) \rangle_{X_0} &= \langle (-\omega_x - \omega_{xxx}, -\eta_x - \eta_{xxx}), (\eta, \omega) \rangle_{X_0} \\ &= - \int_0^L \omega_x \eta dx - \int_0^L \omega_{xxx} \eta dx - \int_0^L \eta_x \omega dx - \int_0^L \eta_{xxx} \omega dx \\ &= - \omega(L)\eta(L) + \omega_x(L)\eta_x(L) - \omega_x(0)\eta_x(0) \\ &= - \alpha_2 |\eta(L)|^2 - \alpha_1 |\eta_x(L)|^2 - \alpha_0 |\eta_x(0)|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Analogamente, se $(u, v) \in D(A^*)$,

$$\langle A^*(u, v), (u, v) \rangle = -\alpha_2 |u(L)|^2 - \alpha_0 |u_x(0)|^2 - \alpha_1 |u_x(L)|^2 \leq 0.$$

Assim, A e A^* são dissipativos. Portanto, como $D(A)$ é denso em X_0 e A é fechado temos que A gera um semigrupo de contrações lineares de classe C_0 . \square

Como consequência do resultado anterior o seguinte resultado da existência de soluções com as condições de contorno (A.5) se verifica.

Teorema A.1.2. *Se $(\eta_0, \omega_0) \in D(A)$, o sistema (A.10) com as condições de contorno (A.5) possui uma única solução clássica. Se $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, o sistema (A.10) com as condições de contorno (A.5) possui uma única mild solution.*

A.1.2 Efeito regularizante de Kato

Para as condições de contorno (A.5) temos que a energia associada ao sistema (A.10) é dissipativa. Vamos estabelecer as estimativas de energia e o efeito regularizante de Kato para o sistema (A.10)-(A.5).

Proposição A.1.3. *Sejam $(\eta_0, \omega_0) \in [L^2(I)]^2$, onde $I = (0, L)$ e $(\eta, \omega) = S(\cdot)(\eta_0, \omega_0)$. Então, para todo $T > 0$,*

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\eta_0(x)|^2 + |\omega_0(x)|^2) dx - \int_0^L (|\eta(x, T)|^2 + |\omega(x, T)|^2) dx \\ = 2 \int_0^T (\alpha_2 |\eta(L, t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L, t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0, t)|^2) dt \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} \int_0^T (|\eta_0(x)|^2 + |\omega_0(x)|^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (|\eta|^2 + |\omega|^2) dx dt \\ + \int_0^T (T-t) [\alpha_2 |\eta(L, t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0, t)|^2] dt. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Se, além disso, $\alpha_2 = 1$, então $(\eta, \omega) \in L^2(0, T; [H^1(I)]^2)$ e

$$\|(\eta, \omega)\|_{L^2(0, T; [H^1(I)]^2)} \leq C \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}, \quad (\text{A.19})$$

onde $C = C(T)$ é uma constante positiva.

Demonstração. A demonstração deste resultado é análogo às contas feitas no capítulo 4. Indicamos ao leitor ver (PAZOTO; ROSIER, 2008) e (MAMUD, 2012). \square

A.1.3 Estabilidade exponencial

Vamos provar a estabilidade exponencial do sistema (A.10) com as condições de contorno definidas em (A.5). Lembremos que com estas condições a energia do sistema é dissipativa, isto é,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha_2 |\eta(L)|^2 - \alpha_1 |\eta_x(L)|^2 - \alpha_0 |\eta_x(0)|^2 \leq 0. \quad (\text{A.20})$$

Teorema A.1.4. *Suponha que $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 = 1$. Então, existem constantes C_0 e μ_0 , tais que para quaisquer $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, a solução do sistema (A.10)-(A.5) satisfaz*

$$\|(\eta(t), \omega(t))\|_{X_0} \leq C_0 e^{-\mu_0 t} \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.21})$$

Demonstração. O componente essencial da prova é a seguinte desigualdade de observabilidade:

$$\|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}^2 \leq C \int_0^T \left(|\eta(L, t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L, t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0, t)|^2 \right) dt, \quad (\text{A.22})$$

para algum $C > 0$. De fato, assumamos que (A.22) se verifica. Agora, defina

$$A(t) := |\eta(L, t)|^2 + \alpha_1 |\eta_x(L, t)|^2 + \alpha_0 |\eta_x(0, t)|^2 > 0, \quad t \geq 0,$$

então,

$$\begin{cases} E'(t) = -A(t), & A(t) > 0, \\ E(0) \leq C \int_0^T A(t) dt, \end{cases}$$

onde $E(t)$ é a energia associada ao sistema linear. Logo, integrando em $[0, T]$, temos

$$\int_0^T E'(t) dt = E(T) - E(0) = - \int_0^T A(t) dt \leq - \frac{E(0)}{C},$$

ou seja,

$$E(T) \leq E(0) - \frac{E(0)}{C} \leq E(0) - \frac{E(T)}{C},$$

daí,

$$E(T) + \frac{E(T)}{C} = \left(1 + \frac{1}{C}\right) E(T) \leq E(0),$$

isto é,

$$E(T) \leq \left(\frac{C}{C+1}\right) E(0).$$

Portanto, podemos afirmar que a solução decai exponencialmente. Para provar este fato, vamos usar e provar o seguinte resultado:

Se existem $T > 0$ e $\gamma \in (0, 1)$, tais que $E(T) < \gamma E(0)$, então

$$E(t) \leq \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\left(\frac{1}{T} \ln(\gamma)\right)t}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.23})$$

Note que $E(kT) < \gamma^k E(0)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Com efeito, por indução, vamos supor que temos a estimativa válida para k e vamos mostrar para $k+1$. Como a energia é decrescente segue que

$$\begin{aligned} E((k+1)T) &\leq E(kT) < \gamma^k E(0) \\ &= \gamma^k \left(E(T) - \int_0^T A(t) dt \right) \\ &< \gamma^k E(T) < \gamma^k \cdot \gamma E(0) = \gamma^{k+1} E(0), \end{aligned}$$

visto que $E(t) \leq E(kT)$, para $kT < t < (k+1)T$. Assim,

$$E(t) \leq E(kT) < \gamma^k E(0).$$

Como $kT < t < (k+1)T$, então $\frac{t}{T} - 1 < k$ e de fato que $\gamma \in (0, 1)$ temos $\gamma^k < \gamma^{\frac{t}{T}-1}$.
Portanto,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(kT) \leq \gamma^k E(0) < \gamma^{\frac{t}{T}-1} E(0) \\ &= \frac{1}{\gamma} E(0) \gamma^{\frac{t}{T}} = \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\ln(\gamma^{\frac{t}{T}})} \\ &= \frac{1}{\gamma} E(0) e^{\ln(\gamma^{\frac{1}{T}})t} \\ &= \frac{1}{\gamma} E(0) e^{(\frac{1}{T} \ln \gamma)t}. \end{aligned}$$

Provando (A.23).

Agora estamos em condições de provar o Teorema A.1.4. Note que $\frac{c}{c+1} \in (0, 1)$ então $\ln\left(\frac{c}{c+1}\right) < 0$, daí, existe $\mu_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{T} \ln\left(\frac{c}{c+1}\right) = -\mu_0.$$

Graças a (A.23) obtemos que

$$E(t) = \|(\eta(t), \omega(t))\|_{X_0}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{C}\right) E(0) e^{-\mu_0 t} = \left(1 + \frac{1}{C}\right) \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}^2 e^{-\mu_0 t}, \quad t \geq 0,$$

mostrando o Teorema A.1.4. □

Prova de (A.22). A prova de (A.22) é análoga a prova de (3.46). Neste caso omitiremos e indicamos para prova (PAZOTO; ROSIER, 2008) e (MAMUD, 2012). □

A seguir daremos uma definição de compatibilidade necessária para os próximos resultados.

Definição A.1.5. Para $s \in [0, 3]$, definimos X_s como sendo o espaço das funções $(\eta, \omega) \in [H^s(I)]^2$ que satisfazem as condições de s -compatibilidade

$$\begin{cases} \omega(0) = 0 \text{ e } \omega(L) = \eta(L), \text{ quando } \frac{1}{2} < s \leq \frac{3}{2}, \\ \omega(0) = 0, \omega(L) = \eta(L), \omega'(0)\alpha_0 = \eta'(0), \omega'(L) = -\alpha_1 \eta'(L), \\ \eta(0) = 0, \text{ e } \omega''(L) = -\eta''(L), \text{ quando } \frac{5}{2} < s \leq 3, \end{cases}$$

munido da norma

$$\|(\eta, \omega)\|_{X_s}^2 = \|\eta\|_{H^s(I)}^2 + \|\omega\|_{H^s(I)}^2.$$

Logo, pelo Teorema A.1.4, e usando argumentos de interpolação entre espaços de Sobolev, temos o seguinte corolário.

Corolário A.1.6. *Sejam α_0, α_1 e α_2 como no Teorema A.1.4. Então, para $s \in [0, 3]$, existem $C_s > 0$ e $\mu_0 > 0$, tais que para quaisquer $(\eta_0, \omega_0) \in X_s$, a solução correspondente (η, ω) de (A.10)-(A.5) pertence a $C(\mathbb{R}^+; X_s)$ e satisfaz*

$$\|(\eta(t), \omega(t))\|_{X_s} \leq C_s e^{-\mu_0 t} \|(\eta_0, \omega_0)\|_{X_0}. \quad (\text{A.24})$$

Demonstração. Ver (PAZOTO; ROSIER, 2008) e (MAMUD, 2012). \square

A.2 PROBLEMA NÃO LINEAR

Nesta seção, voltaremos nossa atenção para a boa colocação e propriedades assintóticas do sistema

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\eta\omega)_x + \omega_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + \eta_{xxx} = 0, & t \geq 0, x \in (0, L), \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

satisfazendo as condições iniciais

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad x \in (0, L) \quad (\text{A.26})$$

e as condições de fronteira

$$\begin{cases} \omega(0, t) = 0, & \omega(L, t) = \alpha_2 \eta(L, t), \\ \omega_x(0, t) = \alpha_0 \eta_x(0, t), & \omega_x(L, t) = -\alpha_1 \eta_x(L, t), \\ \eta(0, t) = 0, & \omega_{xx}(L, t) = -\alpha_2 \eta_{xx}(L, t). \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

A ideia é escrever o problema (A.25) como um problema de Cauchy abstrato. Neste sentido, seja $U = (\eta, \omega)$, $(S(t))_{t \geq 0}$ o semigrupo gerado pela parte linear do sistema (A.25), $U_0 = (\eta_0, \omega_0)$ e $N(U) = -((\eta\omega)', \omega\omega')$, onde $'$ denota $\frac{\partial}{\partial x}$. Assim, temos o seguinte problema de Cauchy abstrato,

$$\begin{cases} U_t = AU + N(U), \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

com as condições de contorno (A.27).

Pelos resultados obtidos na Seção A.1, podemos reformular o problema acima a encontrar uma função $U = U(t)$, tal que

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s)) ds, \quad (\text{A.28})$$

que satisfaz as condições de contorno (A.27).

A.2.1 Boa colocação local

Graças ao efeito regularizante de Kato e um argumento de ponto fixo, podemos provar que a equação integral (A.28) tem solução local em $X_0 = [L^2(I)]^2$, precisamente:

Teorema A.2.1. *Dado $(\eta_0, \omega_0) \in X_0$, existe $T > 0$ e uma única solução generalizada $(\eta, \omega) \in C([0, T]; X_0) \cap L^2(0, T; X_1)$ de (A.25) satisfazendo as condições (A.27).*

Demonstração. Ver (PAZOTO; ROSIER, 2008) e (MAMUD, 2012). □

A.2.2 Boa colocação global

Nesta subsecção mostraremos que a existência global juntamente com a estabilidade exponencial podem ser estabelecidas para dados iniciais suficientemente pequenos. Para conseguir o resultado, o efeito regularizante de Kato e a taxa de decaimento exponencial em X_1 são combinados em uma estimativa pontual no tempo.

Lema A.2.2. *Para qualquer $\mu \in (0, \mu_0)$, existe uma constante $C = C(\mu) > 0$, tal que para qualquer $U_0 \in X_0$,*

$$\|S(t)U_0\|_{X_1} \leq C \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 0. \quad (\text{A.29})$$

Demonstração. Sejam $\mu \in (0, \mu_0)$ e $U_0 \in X_0$ e defina $U(t) := S(t)U_0$, $t \geq 0$. Tomando $T = 1$, segue da Proposição A.1.3 que existe uma constante $\bar{C} > 0$, tal que

$$\|U(\cdot)\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq \bar{C} \|U_0\|_{X_0}. \quad (\text{A.30})$$

Em particular, $U(t) \in X_1$, quase sempre em $(0, 1)$. Assim, podemos encontrar uma sequência decrescente $(t_n)_{n \geq 0}$ em $(0, 1]$, com $t_n \rightarrow 0^+$, tal que $U(t_n) \in X_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário A.1.6 temos que $U(t) \in X_1$ para todo $t \geq t_n$, como $t_n \rightarrow 0^+$ segue que $U(t) \in X_1$ para todo $t > 0$. Daí, pelo mesmo argumento,

$$\|U(T)\|_{X_1} \leq C_1 e^{-\mu_0(T-t)} \|U(t)\|_{X_1}, \quad \forall T \geq t, \quad (\text{A.31})$$

sempre que $U(t) \in X_1$.

Seja $T \in (0, 1]$. Por (A.31), temos que

$$\left(C_1^{-1} \|U(T)\|_{X_1}\right)^2 e^{2\mu_0(T-t)} \leq \|U(t)\|_{X_1}^2,$$

donde, integrando em $(0, T)$, obtém-se

$$\left(C_1^{-1} \|U(T)\|_{X_1}\right)^2 \int_0^T e^{2\mu_0(T-t)} \leq \int_0^T \|U(t)\|_{X_1}^2.$$

Assim, como

$$\int_0^T e^{2\mu_0(T-t)} = \frac{e^{2\mu_0 T} - 1}{2\mu_0},$$

segue que

$$\begin{aligned} \|U(T)\|_{X_1} &\leq \|U\|_{L^2(0,T;X_1)} C_1 \sqrt{\frac{2\mu_0}{e^{2\mu_0 T} - 1}} \\ &\leq \bar{C} C_1 \sqrt{\frac{2\mu_0}{e^{2\mu_0 T} - 1}} \|U_0\|_{X_0} \\ &\leq \bar{C} C_1 \frac{1}{\sqrt{T}} \|U_0\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Daí, para $t \in (0, 1]$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_1} &\leq \frac{\bar{C} C_1}{\sqrt{t}} e^{\mu t} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0} \\ &\leq \bar{C} C_1 e^{\mu} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \in (0, 1]. \end{aligned} \tag{A.32}$$

Se $t > 1$, por (A.31) e (A.32)

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_1} &\leq C_1 e^{-\mu_0(t-1)} \|U(1)\|_{X_1} \\ &\leq C_1^2 \bar{C} e^{-\mu_0(t-1)} \|U_0\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Porém, como $\mu < \mu_0$ e $t > 1$, existe $C_2 > 0$, tal que $\sqrt{t} \leq C_2 e^{\mu_0 - \mu} t$, isto é,

$$e^{-\mu_0 t} \leq C_2 \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}}.$$

Logo,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C_1^2 \bar{C} e^{-\mu_0 t} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0} \leq C_1^2 \bar{C} C_2 \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0}.$$

Assim, concluímos que se $C := C_1^2 \bar{C} C_2 e^{\mu_0} > 0$, então

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} e^{\mu_0} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 1,$$

o que prova o Lema. □

Agora, provamos a boa colocação e a estabilidade exponencial das soluções partindo de dados iniciais suficientemente pequenos em X_1 . Para tal, considere a seguinte definição

Definição A.2.3. Seja $\mu \in (0, \mu_0)$. Definimos o espaço das funções exponencialmente limitadas

$$F := \left\{ U = (\eta, \omega) \in C(\mathbb{R}^+; X_1); \left\| e^{\mu t} U(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; X_1)} < \infty \right\},$$

munido da seguinte norma

$$\|U\|_F = \left\| e^{\mu t} U(t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; X_1)} = \sup_{t \geq 0} \text{ess} \left\| e^{\mu t} U(t) \right\|_{X_1}.$$

Teorema A.2.4. Existe $r_0 > 0$, tal que, para todo dado inicial $(\eta_0, \omega_0) \in X_1$ com $\|\eta_0, \omega_0\|_{X_1} \leq r_0$, a equação integral (A.28) admite uma única solução $(\eta, \omega) \in F$.

Demonstração. Sejam $U_0 = (\eta_0, \omega_0) \in X_1$, tal que $\|U_0\|_{X_1} \leq r_0$, $B_R(0) \subset F$ e $U(\cdot) := (\eta, \omega)(\cdot) \in B_R(0)$, com r_0 e $R > 0$. Considere a aplicação

$$\Gamma: B_R(0) \subset F \rightarrow C(\mathbb{R}^+; X_1)$$

definida por

$$(\Gamma U)(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s)) ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Vamos mostrar que Γ possui um único ponto fixo na bola $B_R(0) \subset F$, para $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. Observe que pela boa colocação local obtemos que

$$\Gamma U \in C(\mathbb{R}^+; X_0) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^+; X_1),$$

com $(\Gamma U)(0) = U_0$. Note também que $\Gamma U \in F$. De fato, por (A.24), existe $C_1 > 0$, tal que

$$\|S(t)U_0\|_{X_1} \leq C_1 e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_1} \leq C_1 e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_1},$$

pois $\mu < \mu_0$. Daí,

$$\left\| e^{\mu t} S(t)U_0 \right\|_{X_1} \leq e^{\mu t} \|S(t)U_0\|_{X_1} \leq e^{\mu t} (C_1 e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_1}) = C_1 \|U_0\|_{X_1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Além disso, para todo $t \geq 0$, pelo Lema A.2.2, segue

$$\begin{aligned} \left\| e^{\mu t} \int_0^t S(t-s)N(U(s)) ds \right\|_{X_1} &\leq e^{\mu t} \int_0^t \|S(t-s)N(U(s))\|_{X_1} ds \\ &\leq e^{\mu t} C \int_0^t \frac{e^{-\mu(t-s)}}{\sqrt{t-s}} \|N(U(s))\|_{X_0} ds \\ &= C \int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}} \|N(U(s))\|_{X_0} ds, \end{aligned}$$

com $C > 0$. Portanto, pela afirmação 3, obtemos $K > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\left\| e^{\mu t} \int_0^t S(t-s) N(U(s)) ds \right\|_{X_1} &\leq C \int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}} \left(K \|U(s)\|_{X_1}^2 \right) ds \\
&= CK \int_0^t \frac{e^{-\mu s}}{\sqrt{t-s}} \left(e^{\mu s} \|U(s)\|_{X_1} \right)^2 ds \\
&\leq CK \|U\|_F^2 \int_0^t \frac{e^{-\mu s}}{\sqrt{t-s}} ds \\
&= CK \|U\|_F^2 \int_0^t \frac{e^{\mu(s-t)}}{\sqrt{s}} ds \\
&\leq CK \|U\|_F^2 \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}} ds + \int_1^{\max\{1,t\}} \frac{e^{-\mu(t-s)}}{\sqrt{s}} ds \right) \\
&\leq CK \|U\|_F^2 \left(2S^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 + \int_0^{\max\{1,t\}} e^{-\mu(t-s)} ds \right) \\
&\leq CK \|U\|_F^2 \left(2 + \frac{1}{\mu} \right).
\end{aligned}$$

Logo, se $R > 0$ tal que $R < \frac{1}{2CK(2+\mu^{-1})}$ e $r_0 > 0$ com $r_0 < \frac{R}{2C}$, obtemos

$$\left\| e^{\mu t} \Gamma U \right\|_{X_1} \leq C_1 r_0 + CK \left(2 + \mu^{-1} \right) R^2 < \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R < \infty.$$

Concluimos assim que, $\Gamma U \in F$, com $\|\Gamma U\|_F \leq R < \infty$, isto é, Γ aplica a bola $B_R(0) \subset F$ nela mesma. Por outro lado, dados $U, V \in B_R(0) \subset F$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma U - \Gamma V\|_F &= \left\| e^{\mu t} \int_0^t S(t-s) (N(U(s)) - N(V(s))) ds \right\|_{X_1} \\
&\leq C \int_0^t \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{t-s}} \|N(U(s)) - N(V(s))\|_{X_0} ds,
\end{aligned}$$

com $C > 0$. Então, pelo efeito regularizante de Kato temos que Γ é uma contração. Assim, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, Γ possui um único ponto fixo na bola $B_R(0) \subset F$.

A prova da unicidade segue como usual. Considere duas soluções U e V , com dado inicial U_0 e defina $W = |U - V|$, então W é solução ao problema com dado inicial nulo, logo, pelo Lema de Gronwall, temos que $W = |U - V| \leq 0$. Portanto $U = V$. \square

A seguir obtemos a estabilidade exponencial das soluções para o problema não linear

Teorema A.2.5. *Assuma que $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 = 1$. Então existe $\rho > 0$, $C > 0$ e $\mu > 0$, tais que, para quaisquer $(\eta_0, \omega_0) \in [L^2(I)]^2$ com $\|(\eta_0, \omega_0)\|_{[L^2(I)]^2} \leq \rho$, o sistema (A.25)-(A.27) admite uma única solução*

$$(\eta, \omega) \in C \left(\mathbb{R}^+; [L^2(I)]^2 \right) \cap C \left(\mathbb{R}^{+*}; [H^1(I)]^2 \right) \cap L^2 \left(0, 1; [H^1(I)]^2 \right) \quad (\text{A.33})$$

que satisfaz

$$\|(\eta, \omega)(t)\|_{[L^2(I)]^2} \leq C e^{-\mu t} \|(\eta_0, \omega_0)\|_{[L^2(I)]^2}, \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{A.34})$$

$$\|(\eta, \omega)(t)\|_{[H^1(I)]^2} \leq C \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} \|(\eta_0, \omega_0)(t)\|_{[L^2(I)]^2}, \quad \forall t > 0, \quad \forall \alpha \in (0, \mu). \quad (\text{A.35})$$

Demonstração. De forma a deixar o trabalho autocontido apresentaremos a prova deste resultado que pode ser visto em (PAZOTO; ROSIER, 2008) e (MAMUD, 2012).

Seja $T = 1$ no Teorema A.2.1, segue que

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq \|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)} + CK \int_0^1 \|U\|_{X_1}^2 dt.$$

Defina $R := 2 \|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)} > 0$ e $\rho_1 > 0$ com $\|U_0\|_{X_0} \leq \rho_1$, temos que

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq \frac{R}{2} + CKR^2,$$

já que $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$. De (A.30), segue que $R \leq \bar{C} \|U_0\|_{X_0}$. Logo,

$$\|\Gamma U\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq \frac{R}{2} + CK\bar{C} \|U_0\|_{X_0} R \leq \left(\frac{1}{2} + C\bar{C}K\rho_1\right) R,$$

e, então, tomando $\rho_1 > 0$ tal que $\rho_1 \leq \frac{1}{2C\bar{C}K}$, temos que Γ é uma aplicação da bola $B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$ nela mesma. Além disso, Γ é uma contração. De fato, sejam $U, V \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$. Seguindo o mesmo argumento do Teorema A.2.1, vê se que

$$\begin{aligned} \|\Gamma U - \Gamma V\|_{L^2(0,1;X_1)} &\leq C \|N(U) - N(V)\|_{L^1(0,1;X_0)} \\ &\leq CK \int_0^1 (\|U\|_{X_1} + \|V\|_{X_1}) \|U - V\|_{X_1} ds \\ &\leq 2RCK \int_0^1 \|U - V\|_{X_1} ds \\ &\leq 2RCK \|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)}, \end{aligned}$$

isto é, $\|\Gamma U - \Gamma V\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq 2RCK \|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)}$. Portanto, como $R \leq \bar{C} \|U_0\|_{X_0}$, segue que

$$\|\Gamma U - \Gamma V\|_{L^2(0,1;X_1)} \leq 2\bar{C}CK \|U_0\|_{X_0} \|U - V\|_{L^2(0,1;X_1)}.$$

Daí, tomando $\rho_2 > 0$ tal que $\rho_2 \leq \frac{1}{2\bar{C}CK}$, obtemos que se $\|U_0\|_{X_0} \leq \rho$ com $\rho := \min\{\rho_1, \rho_2\}$, então Γ é uma contração da bola $B_R(0)$ nela mesma, e pelo Teorema do ponto fixo de Banach, a equação integral (A.28) possui uma única solução $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$, onde $R = 2 \|S(\cdot)U_0\|_{L^2(0,1;X_1)}$. Em particular, existe $t_0 \in (0,1)$ que satisfaz $\|U(t_0)\|_{X_1} \leq R$. Se,

além disso, $R \leq r_0$, então, pelo Teorema A.2.4, $U(\cdot)$ pode ser estendida a \mathbb{R}^+ como solução de (A.25)-(A.27). Logo

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_1} &\leq C_1 e^{-\mu(t-t_0)} \|U(t_0)\|_{X_1} \\ &\leq C_1 \bar{C} e^{\mu_0} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \geq t_0 \text{ e } \forall \mu \in (0, \mu_0). \end{aligned}$$

Vamos a provar a estimativa (A.34). Se $t > 1$, em particular, $t > t_0$ e como $[H^1(I)] \hookrightarrow [L^2(I)]^2$, temos que existe $C_I > 0$, tal que

$$\|U(t)\|_{X_0} \leq C_I \|U(t)\|_{X_1} \leq C_I C_1 \bar{C} e^{\mu_0} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0},$$

definindo $C := C_I C_1 \bar{C} e^{\mu_0}$, então

$$\|U(t)\|_{X_0} \leq C e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 1.$$

Se $0 \leq t \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_0} &\leq \|U\|_{C([0,1];X_0)} \\ &\leq \|U\|_{C([0,1];X_0)} + \|(\eta, \omega)\|_{L^2(0,T;X_1)} \\ &\leq C \|U_0\|_{X_0} + C \int_0^1 \|N(U(t))\|_{X_0} dt \\ &\leq C \|U_0\|_{X_0} + CK \|U\|_{L^2(0,1;X_1)}. \end{aligned}$$

Como $U \in B_R(0) \subset L^2(0,1;X_1)$, com $R \leq \bar{C} \|U_0\|_{X_0}$, temos

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{X_0} &\leq C \|U_0\|_{X_0} + CK \bar{C} \|U_0\|_{X_0} R \\ &= (C + CK \bar{C} R) \|U_0\|_{X_0} \\ &= (C + CK \bar{C} R) e^{\mu_0 t} e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_0} \\ &\leq (C + CK \bar{C} R) e^{\mu_0} e^{-\mu_0 t} \|U_0\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{C} := (C + CK \bar{C} R) e^{\mu_0}$, então

$$\|U(t)\|_{X_0} \leq \tilde{C} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall \mu \in (0, \mu_0).$$

Vamos mostrar a estimativa (A.35). Se $0 < t \leq 1$, como

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)N(U(s)) ds,$$

segue, pelo Lema A.2.2, que

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_{X_1} &\leq \|S(t)U_0\|_{X_1} + \left\| \int_0^t S(t-s)N(U(s)) ds \right\|_{X_1} \leq \|S(t)U_0\|_{X_1} + C \int_0^t \|N(U(s))\|_{X_0} ds \\
&\leq \|S(T)U_0\|_{X_1} + CK \int_0^1 \|U\|_{X_1}^2 ds = \|S(T)U_0\|_{X_1} + CK \|U\|_{L^2(0,1;X_1)}^2 \\
&\leq \|S(T)U_0\|_{X_1} + CKR^2 \\
&\leq \tilde{C} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0} + CK\tilde{C} \|U_0\|_{X_0} R \\
&= \tilde{C} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0} + CK\tilde{C} e^{\mu t} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \sqrt{t} \|U_0\|_{X_0} R \\
&\leq \tilde{C} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0} + \bar{C} \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0} \\
&\leq K \frac{e^{-\mu t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t \in (0, 1] \text{ e } \mu \in (0, \mu_0),
\end{aligned}$$

donde $\bar{C} = CK\tilde{C}e^{\mu_0}R$ e $K := \max \bar{C}, \tilde{C}$.

Agora, se $t > 1$, em particular, $t > t_0$ e, então, pela desigualdade acima, temos

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C_1 \bar{C} e^{-\mu t} \|U_0\|_{X_0}.$$

Se $0 < \alpha < \mu$, então como $t > 1$, existe $C_2 > 0$, tal que

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{(\mu-\alpha)t}} \leq C_2,$$

donde

$$e^{-\mu t} \leq CC_2 \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}.$$

Logo,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C_1 \bar{C} C_2 \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0}.$$

Seja $C := C_1 \bar{C} C_2 > 0$, então,

$$\|U(t)\|_{X_1} \leq C \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{X_0}, \quad \forall t > 1 \text{ e } \alpha \in (0, \mu),$$

provando assim o resultado. □