



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

CAMILA NASCIMENTO RIBEIRO

**TÉCNICAS DE REFINAMENTO DA APROXIMAÇÃO DO GRADIENTE PARA
OTIMIZAÇÃO DA INJEÇÃO DE ÁGUA**

Recife
2021

CAMILA NASCIMENTO RIBEIRO

**TÉCNICAS DE REFINAMENTO DA APROXIMAÇÃO DO GRADIENTE PARA
OTIMIZAÇÃO DA INJEÇÃO DE ÁGUA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco do Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.

Coorientador: Dr. Juan Alberto Rojas Tueros.

Recife

2021

Catálogo na fonte
Sandra Maria Neri Santiago, CRB-4 / 1267

R484t Ribeiro, Camila Nascimento.
Técnicas de refinamento da aproximação do gradiente para otimização da injeção de água / Camila Nascimento Ribeiro. – 2021.
131 f.: figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Horowitz.
Coorientador: Dr. Juan Alberto Rojas Tueros.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Recife, 2021.
Inclui referências.

1. Engenharia civil. 2. Método baseado em ensemble. 3. Gradiente simplex. 4. Otimização do problema de injeção de água. 5. Algoritmos de otimização. 6. Refinamentos. I. Horowitz, Bernardo (Orientador). II. Tueros, Juan Alberto Rojas (Coorientador). III. Título.

UFPE

624 CDD (22. ed.)

BCTG / 2022-19

CAMILA NASCIMENTO RIBEIRO

**TÉCNICAS DE REFINAMENTO DA APROXIMAÇÃO DO GRADIENTE PARA
OTIMIZAÇÃO DA INJEÇÃO DE ÁGUA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco do Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

Aprovada em: 09/08/2021.

BANCA EXAMINADORA

Participação por videoconferência
Prof. Dr. Bernardo Horowitz (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Participação por videoconferência
Prof. Dr. Leonardo Correia de Oliveira (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Participação por videoconferência
Profa. Dra. Silvana Maria Bastos Afonso da Silva (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho ao meu filho, por todo apoio que me deu nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado saúde e sabedoria para superar as dificuldades e desafios, e conseguir a realização deste trabalho.

Ao meu filho Luis Fillipe, sou grata por compreender minha ausência, por me apoiar e me incentivar em minhas rotinas de estudo e trabalho durante todo o período do Mestrado.

Aos meus pais, Dayse e Valdevino, e à minha irmã Cybelle, agradeço pelo suporte emocional nos momentos de dificuldade, pelo amor, carinho e paciência em todos os momentos da minha vida.

Agradeço aos meus amigos, Rômulo e Verônica, que sempre me apoiaram e incentivaram. Aos amigos que o mestrado me trouxe, os quais me auxiliaram muito nessa minha caminhada, obrigada por todos os ensinamentos, conhecimentos compartilhados, incentivos e momentos de alegria.

Agradeço à UFPE por me proporcionar a oportunidade de realizar esta pesquisa. Aos professores da área de concentração em Simulação e Gerenciamento de Reservas de Petróleo do PPGEC (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) da UFPE, sou grata pelos ensinamentos oferecidos durante o curso das suas respectivas disciplinas. Em especial gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Bernardo Horowitz, que desempenhou um papel fundamental em meu desenvolvimento acadêmico e profissional e, ao meu coorientador Dr. Juan Alberto Rojas Tueros, por todo conhecimento transmitido e dedicação do seu tempo para me ajudar e tirar minhas dúvidas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas técnicas de refinamento para melhorar tanto o desempenho do Método Baseado em Ensembles (EnOpt), como também melhorar o desempenho do Gradiente Simplex (SG), para o gerenciamento ótimo do problema de injeção de água em reservatórios sujeitos a restrições. A função objetivo adotada é o Valor Presente Líquido (VPL) e, as restrições impostas são a nível de poço e do campo. Adotou-se o algoritmo SQP para resolução do problema de injeção de água e, o Método dos Mínimos Quadrados Não-lineares (*Non-linear Least Squares Method – NLS*) para resolver o problema desacoplado. Propomos quatro técnicas de refinamento da matriz de sensibilidade: Técnica do Truncamento; Técnica do Amortecimento; Técnicas de Localização que incluem a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos outros poços produtores e a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos poços injetores; e ainda as Técnicas de Regularização, sendo elas, a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores e a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos outros poços injetores. Essas técnicas foram inseridas aos métodos EnOpt e SG, resultando em cinco refinamentos distintos, REB (Método baseado em Ensemble com as técnicas de localização e regularização e, utiliza a média de todas as realizações para calcular a matriz de desvios), REB* (Método baseado em Ensemble com as técnicas de localização e regularização e, utiliza apenas as perturbações para calcular a matriz de desvios), REB+T (Método baseado em Ensemble com as técnicas de truncamento, localização e regularização), RSG+T (Gradiente Simplex com as técnicas de truncamento, localização e regularização) e RSG+TD (Gradiente Simplex com as técnicas de truncamento, amortecimento, localização e regularização). Todas as estratégias foram avaliadas em dois modelos de reservatórios, Brush Canyon Outcrop (BCO) e Brugge.

Palavras-chave: método baseado em ensemble; gradiente simplex; otimização do problema de injeção de água; algoritmos de otimização; refinamentos.

ABSTRACT

In this work, refinement techniques are implemented to improve the performance of the Ensemble Based Method (EnOpt) and the performance of the Simplex Gradient (SG), for production optimization. The objective function is the Net Present Value (NPV), the controls variables are rate and bottom hole pressure (BHP) to producer and injector wells. The SQP algorithm was used to solve the Waterflooding Optimization and the Nonlinear Least Squares Method (NLS) was used to solve the Capacitance-Resistance Model based on producer wells (CRMP). We propose four techniques to refine the sensitivity matrix: Truncation technique; Damping Technique; Localization Techniques that include the sensitivity of the NPV of the producer wells with respect to the controls of the other producer wells and the sensitivity of the NPV of the producer wells with respect to the controls of the injector wells; and also the Regularization Techniques, that include the sensitivity of the NPV of the injector wells with respect to the controls of the producer wells and the sensitivity of the NPV of the injector wells with respect to the controls of the other injector wells. These techniques were implemented to improve the quality of the gradient in the search direction using EnOpt and SG methods. This implementation results in five distinct refinements, REB (Ensemble Based Method with localization and regularization techniques and uses the average of all realizations to calculate the deviation matrix), REB* (Ensemble Based Method with localization and regularization techniques and uses only the perturbations to calculate the deviation matrix), REB+T (Ensemble Based Method with truncation, localization and regularization techniques), RSG+T (Simplex Gradient with truncation, localization and regularization techniques) and RSG+TD (Simplex Gradient with truncation, damping, localization and regularization techniques). All strategies were validated in two synthetic models with real properties, Brush Canyon Outcrop (BCO) and Brugge.

Keywords: ensemble-based method; simplex gradient; waterflooding optimization; optimization algorithms; refinements.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Vista lateral de um reservatório	29
Figura 2 –	Bloco de reservatório	31
Figura 3 –	Região anular usada para derivar a equação de difusão de pressão em radial coordenadas	35
Gráfico 1 –	Função integral exponencial, $Ei(-x)$	43
Figura 4 –	Vazão de produção alterada por quantidades menores em vários intervalos de tempo	51
Figura 5 –	Vazão de produção alterada por quantidades menores em vários intervalos de tempo para o caso geral	52
Figura 6 –	Representação esquemática do volume de controle para produtor j , CRMP	60
Figura 7 –	Trajetórias de amortecimento para 10, 20, 30 e 40 ciclos de controle	80
Figura 8 –	Permeabilidade do modelo BCO-Falha	90
Figura 9 –	Definição dos ciclos de controle do modelo BCO-Falha	91
Figura 10 –	Resultados estatísticos do VPL do modelo BCO-Falha	95
Figura 11 –	Histórico das iterações dos melhores resultados do modelo BCO-Falha	95
Figura 12 –	Trajetória ótima dos controles dos poços injetores do modelo BCO-Falha	96
Figura 13 –	Trajetória ótima dos controles dos poços produtores do modelo BCO-Falha	97
Figura 14 –	Resultado do otimizador <i>versus</i> resultado do simulador para o poço injetor I-1	98
Figura 15 –	Resultado do otimizador <i>versus</i> resultado do simulador para o poço produtor P-1	99
Figura 16 –	Máxima vazão de injeção no campo para poços injetores modelo BCO-Falha	100
Figura 17 –	Máxima vazão de injeção no campo para poços produtores modelo BCO-Falha	100
Figura 18 –	Produção acumulada de óleo e água modelo BCO-Falha	101

Figura 19 –	Saturação de óleo modelo BCO-Falha	101
Figura 20 –	Saturação de água modelo BCO-Falha	102
Figura 21 –	Saturação de óleo do modelo Brugge	103
Figura 22 –	Mapa da permeabilidade horizontal do modelo Brugge	105
Figura 23 –	Definição dos ciclos de controle do modelo Brugge	106
Figura 24 –	Resultados estatísticos do VPL do modelo Brugge	110
Figura 25 –	Histórico das iterações dos melhores resultados do modelo Brugge	111
Figura 26 –	Trajetória ótima dos controles do poço injetor I-5 do modelo Brugge	113
Figura 27 –	Trajetória ótima dos controles do poço produtor P-2 do modelo Brugge	114
Figura 28 –	Resultado do otimizador <i>versus</i> resultado do simulador para o poço injetor I-5	115
Figura 29 –	Resultado do otimizador <i>versus</i> resultado do simulador para o poço produtor P-2	116
Figura 30 –	Produção acumulada de óleo e água modelo Brugge	118
Figura 31 –	Saturação de óleo modelo Brugge	119
Figura 32 –	Saturação de água modelo Brugge	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Função integral exponencial, $-Ei(-x)$	42
Tabela 2 –	Matriz de sensibilidade da vazão líquida sem truncamento	78
Tabela 3 –	Matriz de sensibilidade da vazão líquida com truncamento	78
Tabela 4 –	Descrição dos refinamentos utilizados	88
Tabela 5 –	Características e propriedades do modelo BCO-Falha	90
Tabela 6 –	Parâmetros econômicos adotados no modelo BCO-Falha	90
Tabela 7 –	Resumo dos parâmetros adotados no modelo BCO-Falha	92
Tabela 8 –	Resumo resultados finais modelo BCO-Falha	94
Tabela 9 –	Distribuição das zonas de formação modelo Brugge	104
Tabela 10 –	Características e propriedades do modelo Brugge	104
Tabela 11 –	Histórico de controle de produção por 10 anos do modelo Brugge	106
Tabela 12 –	Resumo dos parâmetros adotados no modelo Brugge	107
Tabela 13 –	Parâmetros econômicos adotados no modelo Brugge	108
Tabela 14 –	Resumo resultados finais modelo Brugge	109

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVOS	16
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	PROBLEMA DE INJEÇÃO DE ÁGUA	18
2.2	SUAVIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE CONTROLE NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO	21
2.3	ALGORITMOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	22
2.3.1	Programação Quadrática Sequencial (<i>Sequential Quadratic Programming – SQP</i>)	24
2.3.2	Método dos Mínimos Quadrados Não-lineares (<i>Non-linear Least Squares Method – NLS</i>)	26
2.4	CÁLCULO DO GRADIENTE	27
2.5	EQUAÇÕES DE FLUXO	28
2.5.1	Lei de Darcy e o Fluxo de Estado Estacionário	28
2.5.2	Equações da Conservação de Massa	32
2.5.3	Equação de difusão em coordenadas cartesianas	34
2.5.4	Equação de difusão em coordenadas cilíndricas	36
2.5.5	Aproximação Logarítmica	46
2.5.6	Pulso Instantâneo de Fluido Injetado	48
2.6	PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO	50
2.7	MODELO DE CAPACITÂNCIA E RESISTÊNCIA (<i>CAPACITANCE RESISTANCE MODEL, CRM</i>)	55
2.7.1	CRMP	61
3	MÉTODO BASEADO EM ENSEMBLE	65
3.1	CÁLCULO DO VETOR GRADIENTE PARA O PROBLEMA DE INJEÇÃO DE ÁGUA	68
3.2	VANTAGENS E LIMITAÇÕES DO VETOR GRADIENTE APROXIMADO POR ENSEMBLES	75
4	REFINAMENTO DA MATRIZ DE SENSIBILIDADE	77

4.1	TÉCNICA DO TRUNCAMENTO	77
4.2	TÉCNICA DO AMORTECIMENTO	80
4.3	TÉCNICAS DE LOCALIZAÇÃO	82
4.3.1	Sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos outros poços produtores $(S_{x_p,k}^{liq,P_j})$	83
4.3.2	Sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos poços injetores $(S_{x_I,k}^{liq,P_j})$	85
4.4	TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO	86
4.4.1	Sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores $(S_{x_p,k}^{wi,I_i})$	87
4.4.2	Sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores $(S_{x_p,k}^{wi,I_i})$	87
5	CASOS ESTUDADOS E RESULTADOS	89
5.1	MODELO BRUSH CANYON OUTCROP (BCO)	90
5.1.1	Casos estudados e resultados	92
5.2	MODELO BRUGGE FIELD	104
5.2.1	Casos estudados e resultados	106
6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	123
6.1	CONCLUSÕES	123
6.2	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	126
	REFERÊNCIAS	127

1 INTRODUÇÃO

A produção por injeção de água tem um longo histórico de aplicação na indústria de petróleo, sendo considerada uma das técnicas mais utilizadas pela Engenharia de Petróleo, devido ao baixo custo associado ao uso da água, que é abundante em muitas áreas de produção, bem como à maior estabilidade do processo se comparado com a injeção de gás, por exemplo (DAKE, 1994).

A injeção de água serve para dois propósitos: manter a pressão do reservatório, que energiza o sistema e, em deslocar o óleo para os poços produtores. No que se refere à manutenção da pressão, essa é uma boa prática e apresenta como vantagem, além da manutenção da pressão do reservatório, a manutenção do estado de sub-saturação do reservatório, pois isso evita a liberação de gás associado e o aumento rápido da razão gás-óleo (RGO) dos produtores. Quanto ao deslocamento do óleo para os produtores, a razão de mobilidade dos fluidos, as heterogeneidades e a segregação (efeito gravitacional) são os três fatores que governam a eficiência de recuperação do óleo (DAKE, 1994).

Na Engenharia de Petróleo um dos principais objetivos é o desenvolvimento e aplicação de técnicas capazes de aumentar a eficiência da produção em um campo de petróleo e, o gerenciamento ótimo pode ser formulado como um problema de otimização onde as variáveis de projeto podem ser as vazões ou pressão de fundo de poço dos poços injetores e produtores, subdivididos em intervalos de tempos de concessão do campo, chamados de ciclos de controle. A função objetivo a ser adotada é o Valor Presente Líquido (VPL) e, as restrições a serem impostas tanto dizem respeito aos poços individualmente como ao reservatório como um todo, onde cada poço tem, por motivos operacionais, a sua vazão e/ou pressão máxima e mínima. Os poços injetores e produtores estão ligados, respectivamente, às unidades de injeção e produção do campo, e como estas unidades têm capacidade limitada, a soma das vazões de injeção e produção não pode violar estas capacidades (TUEROS, 2019).

É de fundamental importância lembrar que no processo de otimização o objetivo é encontrar os valores das variáveis que geram o melhor resultado dentre os critérios de desempenho. Por isso, no desenvolvimento deste trabalho adotamos o algoritmo Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming* – SQP), utilizado para resolução do problema de injeção de água.

Outra abordagem utilizada para alcançar o resultado desejado, foi resolver o conjunto de equações, minimizando a soma dos erros desse conjunto de equações, e para isso, empregamos o Método dos Mínimos Quadrados Não-lineares (*Non-linear Least Squares Method – NLS*) para resolver o problema desacoplado. Ambos os algoritmos são apresentados no Capítulo 2.

Ainda objetivando aumentar a eficiência da produção em um campo de petróleo, adotamos o cálculo aproximado do gradiente, onde empregou-se o tradicional Método Baseado em Ensemble (*Ensemble Optimization Method – EnOpt*) de Chen e Oliver (2012) e o Gradiente Simplex (*Simplex Gradient – SG*) proposto por Do e Reynolds (2013), que serão descritos com mais detalhes no Capítulo 3.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é aplicar técnicas de refinamento para melhorar tanto o desempenho do Método Baseado em Ensemble (EnOpt), como também melhorar o desempenho do Gradiente Simplex (SG), para o gerenciamento ótimo do problema de injeção de água em reservatórios sujeitos a restrições.

Como objetivos específicos pode-se destacar:

- Estudar técnicas de refinamentos propostas por autores como Chen e Oliver (2012), Liu e Reynolds (2020), Tueros (2019) e Tueros *et al.*, (2018a; 2018b; 2020), afim de aplica-las no Método Baseado em Ensemble (EnOpt) e no Gradiente Simplex (SG).
- Realizar um comparativo entre os resultados obtidos com os novos refinamentos propostos e verificar se melhoram o desempenho dos métodos empregados.
- Determinar qual refinamento proposto melhora a qualidade do vetor gradiente.
- Comparar e avaliar se as trajetórias dos poços produtores e injetores, obtidas após o processo de otimização, apresentaram mudanças abruptas ou suaves.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 1 é feita uma breve introdução sobre este trabalho, incluindo a motivação, os objetivos e a metodologia abordada para sua realização.

No capítulo 2 é realizada uma fundamentação teórica a respeito dos conceitos necessários para o entendimento deste trabalho, sendo assim, aborda-se o problema de injeção de água, os algoritmos e equações de fluxo utilizados na resolução dos casos estudados. Abrange ainda o cálculo do gradiente, o princípio da superposição e o modelo de capacitância e resistência (CRM).

O capítulo 3 refere-se ao Método Baseado em Ensemble, incluindo o cálculo do vetor gradiente para o problema de injeção de água, a matriz de sensibilidade e, as vantagens e limitações do vetor gradiente aproximado por ensembles.

No capítulo 4 apresentamos as técnicas empregadas no refinamento da matriz de sensibilidade, sendo elas: Técnica do Truncamento; Técnica do Amortecimento; Técnicas de Localização que incluem a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos outros poços produtores e a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos poços injetores; e ainda as Técnicas de Regularização, sendo elas, a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores e a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos outros poços injetores.

No capítulo 5 são apresentados os casos estudados e resultados. Utilizou-se dois modelos de reservatórios, sendo o primeiro modelo um reservatório simples, com sete poços produtores e cinco poços injetores e, o segundo modelo possui vinte poços produtores e dez poços injetores.

Por fim, o capítulo 6 apresenta as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será fornecido uma base conceitual para entendimento do trabalho desenvolvido nesta dissertação. Serão definidos conceitos básicos a respeito do problema de injeção de água, os algoritmos de otimização utilizados, equações de fluxo, cálculo do gradiente, o princípio da superposição e o modelo de capacitância e resistência (CRM).

2.1 PROBLEMA DE INJEÇÃO DE ÁGUA

Na engenharia de reservatórios, a injeção de água é o método mais utilizado para melhorar a recuperação de óleo e manter o reservatório devidamente pressurizado. Nesse processo, é necessário impor restrições de limite à nível de campo e poço, para evitar uma rápida irrupção de água nos poços produtores e ativação de falhas selantes dentro do reservatório (TUEROS e HOROWITZ, 2020).

As técnicas de otimização são aplicadas para melhorar esta eficiência, com o objetivo de maximizar o valor presente líquido (VPL) que é considerado a função objetivo e está sujeito às restrições a nível de poço e de campo. As restrições são impostas para garantir a viabilidade da solução com respeito à capacidade do poço e dos equipamentos de superfície (HOROWITZ *et al.*, 2013; TUEROS, 2019). Matematicamente, o problema de injeção de água para um caso geral, pode ser formulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximize } VPL &= \left[\sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{(1+d)^{\tau_k}} F(q_k) \right] \\
 \text{Sujeito a: } \sum_{w \in P} q_{w,k}^{liq} &\leq Q_{max,k}^{liq}; w \in P \text{ e } k = 1, \dots, N_c \\
 \sum_{w \in I} q_{w,k}^{inj} &\leq Q_{max,k}^{inj}; w \in I \text{ e } k = 1, \dots, N_c \\
 q_{min,k}^{liq} &\leq q_{w,k}^{liq} \leq q_{max,k}^{liq}; w \in P \text{ e } k = 1, \dots, N_c \\
 q_{min,k}^{inj} &\leq q_{w,k}^{inj} \leq q_{max,k}^{inj}; w \in I \text{ e } k = 1, \dots, N_c \\
 BHP_{min} &\leq BHP_{w,k} \leq BHP_{max}; w \in P \text{ e } k = 1, \dots, N_c \\
 BHP_{min} &\leq BHP_{w,k} \leq BHP_{max}; w \in I \text{ e } k = 1, \dots, N_c
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde o tempo de simulação é subdividido em N_c ciclos de controle; τ_k é o período de referência no ciclo de controle k ; d é a taxa de desconto anual. Os índices P e I correspondem, respectivamente, ao conjunto de poços produtores e injetores; $q_{w,k}^{liq}$ é a vazão líquida do poço produtor w no k -ésimo ciclo de controle; $q_{w,k}^{inj}$ corresponde à vazão de injeção do poço injetor w no k -ésimo ciclo de controle; $Q_{max,k}^{liq}$ representa a vazão líquida total máxima permitida no campo no k -ésimo ciclo de controle; $Q_{max,k}^{inj}$ determina a máxima vazão de injeção total permitida no campo no k -ésimo ciclo de controle.

Podemos ainda definir $q_{min,k}^{liq}$ e $q_{max,k}^{liq}$ como a mínima e máxima vazões líquidas permitidas para o poço produtor no k -ésimo ciclo de controle, respectivamente; $q_{min,k}^{inj}$ e $q_{max,k}^{inj}$ representam a mínima e máxima vazões de água do poço injetor no k -ésimo ciclo de controle, respectivamente; $BHP_{w,k}$ corresponde a pressão de fundo de poço do poço w no k -ésimo ciclo de controle; BHP_{min} e BHP_{max} representam as pressões de fundo de poço mínima e máxima, respectivamente.

O fluxo de caixa no ciclo de controle k , $F(q_k)$, é dado por:

$$F(q_k) = \Delta\tau_k \left[\sum_{w \in P} (r_o q_k^{w,op} - c_{wp} q_k^{w,wp}) - \sum_{w \in I} (c_{wi} q_k^{w,wi}) \right] \quad (2.2)$$

onde $\Delta\tau_k$ representa o intervalo de tempo no k -ésimo ciclo de controle; r_o corresponde ao preço do óleo; c_{wp} e c_{wi} denotam o custo da água produzida e água injetada, respectivamente; $q_k^{w,op}$ e $q_k^{w,wp}$ são as vazões de óleo e água do poço produtor w , no ciclo de controle k , respectivamente; $q_k^{w,wi}$ representa a vazão de água do poço injetor w , no ciclo de controle k . Os índices op e wp correspondem, respectivamente, as fases de óleo e água na vazão de produção; e wi é a fase água na vazão de injeção.

Para realização deste trabalho, maximizamos o VPL da seguinte forma:

1. No primeiro estudo de caso, utilizamos o modelo BCO (descrito no Capítulo 5), e maximizamos o VPL com respeito as vazões dos poços produtores e injetores, e ainda impomos restrições de capacidade.

2. No segundo estudo de caso, utilizamos o modelo Brugge (também descrito no Capítulo 5), e para maximizar o VPL usamos como variáveis de controle para os injetores as vazões de injeção e para os poços produtores usamos o BHP. Ainda impomos diretamente no simulador os BHPs dos poços injetores e as vazões de produção dos poços produtores. Neste caso não há restrição de capacidade.

Definidas as variáveis de controle, a normalização $\hat{x}_{w,k}$ dá-se por:

$$\hat{x}_{w,k} = \frac{x_{w,k} - x_w^{min}}{x_w^{max} - x_w^{min}} \quad \text{com} \quad x_w^{max} \neq x_w^{min} \quad (2.3)$$

Onde $x_{w,k}$ representa o controle atual do poço w (produtor ou injetor) no k -ésimo ciclo de controle. x_w^{max} e x_w^{min} correspondem, respectivamente, ao máximo BHP ou máxima vazão do poço, e ao mínimo BHP ou mínima vazão do poço.

Com os controles normalizados, as variáveis podem variar de 0 (zero) a 1 (um). Se $\hat{x}_{w,k} = 0$, significa que o controle do poço w tem o menor valor de BHP para os poços produtores e menor valor de vazão para os poços injetores. Porém, se $\hat{x}_{w,k} = 1$, significa que o controle do poço w tem o maior valor de BHP para os poços produtores e maior valor de vazão para os poços injetores. É importante observar que no simulador, utilizamos o valor real expresso por:

$$x_{w,k} = x_w^{min} + (x_w^{max} - x_w^{min})\hat{x}_{w,k} \quad (2.4)$$

Com a normalização obtida na Eq. (2.3), podemos então considerar a formulação do problema para os dois estudos de caso da seguinte maneira:

1. Para o estudo de caso do modelo BCO.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize}_x f(x) = \frac{VPL}{\widehat{VPL}} \\
 & \text{Sujeito a: } \sum_{w \in P} \frac{q_{w,k}^{liq} - Q_{max,k}^{liq}}{Q_{max,k}^{liq}} \leq 0; \quad w \in P \text{ e } k = 1, \dots, N_c \\
 & \quad \sum_{w \in I} \frac{q_{w,k}^{inj} - Q_{max,k}^{inj}}{Q_{max,k}^{inj}} \leq 0; \quad w \in I \text{ e } k = 1, \dots, N_c \\
 & \quad x_w^{min} \leq x_{w,k} \leq x_w^{max}; \quad w \in P, w \in I \text{ e } k = 1, \dots, N_c
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde \widehat{VPL} = fator de normalização da função $f(x)$, normalmente definido como $VPL(x_0)$; x_0 = ponto inicial.

2. Para o estudo de caso do modelo Brugge.

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize}_x f(x) = \frac{VPL}{\widehat{VPL}} \\
 & \text{Sujeito a: } x_w^{min} \leq x_{w,k} \leq x_w^{max}; \quad w \in P, w \in I \text{ e } k = 1, \dots, N_c
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por simplificação de notação e para futuras discussões técnicas, denotamos $x_{i,k}$ como a i -ésima variável de controle com respeito ao k -ésimo ciclo de controle no poço produtor ou injetor.

No cálculo do VPL, faz-se necessário uma execução completa do simulador de reservatórios, o que pode levar horas para ser completamente executado. Por esta razão, neste trabalho empregou-se técnicas matemáticas e computacionais eficientes para refinar o processo de otimização.

2.2 SUAVIZAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE CONTROLE NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

Muitas das soluções obtidas pelo método baseado em ensembles apresentam mudanças abruptas nos controles das vazões dos poços e não são aceitas pelos engenheiros a nível de campo, porque são difíceis de entender e de

pôr em prática. Uma alternativa, para tratar as mudanças abruptas entre os controles é utilizar uma estratégia de suavização (TUEROS, 2019; TUEROS *et al.*, 2020).

Técnicas de suavização foram implementadas para o método baseado em ensemble por autores como ALIM (2013), CHEN e OLIVER (2012), Tueros (2019) e Tueros *et al.*, (2020). Essas técnicas suavizam a direção de busca e o vetor gradiente através de multiplicações sucessivas pela matriz de covariância, evitando mudanças abruptas na trajetória dos controles.

Neste trabalho, o gradiente é gerado a partir de valores correlacionados por ensembles, porém, o otimizador pode produzir mudanças abruptas nas trajetórias de controle. Por este motivo, penalizamos a função objetivo usando uma técnica de suavização para evitar saltos bruscos nas trajetórias de controle durante o processo de otimização. A estratégia consiste em adicionar um termo quadrático à função objetivo.

O novo problema de otimização com controles de suavização pode ser expresso como:

$$\text{Maximize } \tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_c} S_i (x_{i+1,k} - x_{i,k})^2 \text{ com } S_i = \frac{\beta}{(N_c - 1)} \quad (2.7)$$

Onde β =fator de suavização. Se $\beta = 0$, temos o problema de otimização original (Eqs. 2.5 e 2.6). Neste trabalho, adotamos $\beta = 10^{-3}$ seguindo as recomendações de Tueros (2019) e Tueros *et al.*, (2020) e, o gradiente do fator de suavização é calculado analiticamente.

2.3 ALGORITMOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Os algoritmos de otimização podem ser classificados de acordo com o tipo de solução do problema, distinguindo-se entre algoritmos de ordem zero, primeira e segunda ordem dependendo se a solução do algoritmo exige apenas o valor da função, a primeira ou segunda derivada da função, respectivamente (TORRES, 2001).

Podem ainda ser classificados com base no tipo de função objetivo e restrições, diferenciando-se em lineares (Programação Linear – *Linear Programming, LP*), se as variáveis dependentes ou suas derivadas aparecem

apenas na primeira ordem, caso contrário, são não lineares (Programação Não Linear – *Nonlinear Programming, NLP*) (EDGAR *et al.*, 2001).

Segundo Edgar *et al.* (2001) é possível citar como exemplos de algoritmos de otimização:

- a) De ordem zero: Busca Aleatória (*Random Search*), Busca em Grelha (*Grid Search*), Busca Univariada (*Univariate Search*), Método de Pesquisa Simplex (*Simplex Search Method*) e Busca de Direções Conjugadas (*Conjugate Search Directions*).
- b) De primeira ordem: Método dos Gradientes – no processo de maximização, o algoritmo é chamado *steepest ascent*; já no processo de minimização, a direção de busca é o negativo do gradiente, então o algoritmo é chamado *steepest descent*. Há ainda o Método dos Gradientes Conjugados (*Conjugate Gradient Methods*) e, Método Quasi-Newton (*Quasi-Newton Methods*).
- c) De segunda ordem: Método de Newton (*Newton's Method*).
- d) Programação Linear (*Linear Programming – LP*): Algoritmo Simplex (*Simplex Algorithm*), Método de Barreira (*Barrier Method*) e, Análise de Sensibilidade (*Sensitivity Analysis*).
- e) Programação Não Linear (*Nonlinear Programming – NLP*): Programação Quadrática (*Quadratic Programming – QP*); Métodos de Penalidade, Barreira e Lagrangiana Aumentada (*Penalty, Barrier, and Augmented Lagrangian Method*); Programação Linear Sucessiva (*Successive linear programming – SLP*); e Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*).

Na seção (2.3.1), é apresentado o algoritmo Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*), utilizado para resolução do problema de injeção de água.

É importante lembrar que no processo de otimização o objetivo é encontrar os valores das variáveis que geram o melhor resultado dentre os critérios de desempenho. Uma abordagem utilizada para alcançar o resultado desejado, é resolver o conjunto de equações, minimizando a soma dos erros desse conjunto de equações, geralmente por um procedimento denominado Método dos Mínimos Quadrados (*Least Squares Method*), que se subdivide em Método dos Mínimos Quadrados Lineares (*Linear Least Squares Method*) e Método dos Mínimos Quadrados Não-lineares (*Non-linear Least Squares Method – NLS*) (GOLUB, 1965; EDGAR *et al.*, 2001).

O Método dos Mínimos Quadrados Não-lineares (*Non-linear Least Squares Method – NLS*) é utilizado para resolver o problema desacoplado do Modelo de Capacitância e Resistência baseado nos Produtores (CRMP) e será descrito na seção (2.3.2).

2.3.1 Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*)

O algoritmo SQP se apresenta de maneira eficiente para resolver problemas não lineares, podendo ser utilizado com restrições de igualdade, desigualdade e de limite. O procedimento do algoritmo para solução do problema consiste em resolver uma série de subproblemas quadráticos (*Quadratic Problems – QP*) de forma sequencial, e como consequência, refere-se ao método como Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*) (EDGAR *et al.*, 2001; LINS, 2018).

Para resolver as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) de um problema original, o algoritmo SQP emprega o método de Newton (ou Quasi-Newton) e como resultado, ao invés de se resolver o problema original, resolve-se, a cada iteração, um subproblema de minimização quadrática (QP), que consiste em uma aproximação da função Lagrangiana (EDGAR *et al.*, 2001; LINS, 2018).

O problema de programação não-linear original é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } f(x) \\
 & \text{Sujeito a: } h_i(x) = 0; \quad i = 1, \dots, e_c \\
 & \quad \quad g_j(x) \leq 0; \quad j = 1, \dots, i_c
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

onde $f(x)$ é a função objetivo que se deseja minimizar; $h_i(x)$ e $g_j(x)$ são as restrições de igualdade e desigualdade do problema, respectivamente; e_c e i_c correspondem, respectivamente, ao número de restrições de igualdade e desigualdade. E x é o vetor das variáveis de controle.

A cada iteração t , o método SQP, resolve o seguinte subproblema de programação quadrática:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \nabla f(x^t)d_x + \frac{1}{2}d_x^T \mathcal{L}(x^t)d_x \\ & \text{Sujeito a: } h_i(x^t) + \nabla h_i(x^t)^T d_x = 0; \quad i = 1, \dots, e_c \\ & \quad \quad g_j(x^t) + \nabla g_j(x^t)^T d_x \leq 0; \quad j = 1, \dots, i_c \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde d_x é o vetor de correção de x na iteração t , e $\mathcal{L}(x^k)$ é a matriz Hessiana da função Lagrangiana.

O fato da matriz Hessiana ser da função Lagrangiana e não apenas da função objetivo, faz com que as curvaturas das restrições sejam indiretamente levadas em consideração (TUEROS, 2019).

Para se obter uma aproximação da matriz Hessiana por uma matriz simétrica positiva definida, é utilizada a aproximação pelo método Broydon–Fletcher–Goldfarbo–Shanno (BFGS). Esse método é considerado o preferido porque é mais sensível às imprecisões numéricas (VANDERPLAATS, 1984; DEHDARI e OLIVER, 2012).

De maneira geral, as principais etapas do algoritmo SQP convencional são (ANTONIOU e LU, 2007; EDGAR *et al.*, 2001; QUEIROZ, 2020; TUEROS *et al.*, 2015):

1. Definir um ponto inicial (x_0).
2. Configurar a aproximação inicial para a matriz Hessiana de acordo com os termos quadráticos da função objetivo.
3. Resolver o subproblema QP para encontrar a direção de busca.
4. Realizar a busca linear para definir o tamanho do passo na direção de busca.
5. Atualizar a matriz Hessiana, utilizando o esquema BFGS, e atualizar a solução.
6. Verificar a convergência.

7. Se o mínimo local for encontrado, então parar o processo, caso contrário, retornar para o passo 5.

O algoritmo fornecido acima tem fundamentos teóricos sólidos e é considerado um método poderoso para muitas tarefas de otimização. No entanto, para projetos de engenharia, algumas modificações são consideradas úteis, como por exemplo a exclusão de restrição e a busca unidimensional, mais detalhes sobre esses exemplos podem ser encontrados em Vanderplaats e Sugimoto (1985).

Neste trabalho, no processo de otimização, além de utilizar o SQP do *Optimization Toolbox* disponível no *MATLAB* (2016), utilizou-se também o *solver SQP/SNOPT (Sparse Nonlinear OPTimizer)* para problemas de larga escala. Mais detalhes referentes ao *solver SQP/SNOPT* podem ser encontrados em GILL *et al.* (2005).

2.3.2 Método dos Mínimos Quadrados Não-lineares (*Non-linear Least Squares Method – NLS*)

Para este trabalho, utilizou-se o método dos mínimos quadrados não-lineares para resolver o problema desacoplado descrito na Seção 6. Neste método, a função objetivo é definida como:

$$\text{Minimize } f(x) = \sum_{i=1}^k [T_i(x)]^2 \quad (2.10)$$

onde $T_i(x)$ corresponde a diferença entre os valores numéricos obtidos no simulador de reservatório e as respostas aproximadas do modelo. Por exemplo, o valor real pode ser a vazão líquida de um determinado poço produtor obtido pelo simulador e, o valor aproximado que foi obtido usando o modelo CRMP. Ao minimizar esta função, obtém-se valores para os parâmetros que melhor correlacionam o modelo e o valor real (LINS, 2018; OLIVEIRA *et al.*, 2021).

O vetor gradiente ($f'(x)$) e a matriz Hessiana ($H(f)$) da função objetivo na Eq. (2.9) são dados por:

$$f'(x) = T_i(x)T'_i(x)$$

e

(2.11)

$$H(f) = T_i(x)T''_i(x) + [T'_i(x)]^2$$

Considerando que $T_i(x)$ tende a zero perto da solução, então o primeiro termo da matriz das segundas derivadas (Eq. (2.11)) tenderá a zero, e a matriz Hessiana das segundas derivadas de $f(x)$ poderá ser aproximada usando apenas as primeiras derivadas de $T_i(x)$ (LINS, 2018; OLIVEIRA *et al.*, 2021).

O algoritmo de Gauss-Newton é usado para resolver problemas de mínimos quadrados não lineares. Trata-se de uma modificação do método de Newton para encontrar o mínimo de uma função, porém, ao contrário do método de Newton, o algoritmo de Gauss-Newton só pode ser usado para minimizar a soma dos valores da função quadrada, mas tem a vantagem de que as derivadas secundárias, que podem ser difíceis de calcular, não são necessárias (MITTELHAMMER *et al.*, 2000).

O método dos mínimos quadrados é utilizado em muitas áreas de aplicação e é uma ferramenta robusta para otimização. Contudo, no *MATLAB* (2016), apenas é possível resolver problemas com restrições de limites utilizando o método de mínimos quadrados, adotando a estratégia de dividir o problema em dois, resolvendo inicialmente um problema sem a restrição de desigualdade e apenas com as restrições de limites. A grande vantagem em adotar essa estratégia de dividir o problema em dois é que o primeiro problema torna-se mais simples, sendo possível resolvê-lo através do método dos mínimos quadrados que é uma ferramenta de rápida convergência, e que irá determinar os valores iniciais da otimização para o caso acoplado, pois gera um bom ponto de partida para resolver o problema com todas as restrições (LINS, 2018).

A otimização para o problema desacoplado é feita utilizando a função *lsqnonlin*, do *Optimization Toolbox* disponível no *MATLAB* (2016), a qual resolve problemas de mínimos quadrados não lineares com restrições de limites.

2.4 CÁLCULO DO GRADIENTE

As abordagens mais eficientes propostas para otimização da produção em reservatórios de petróleo, envolvem o cálculo do gradiente de uma função objetivo com respeito às variáveis de controle (CHEN e OLIVER, 2012).

O método adjunto é a maneira mais eficiente de calcular o gradiente da função objetivo pois requer apenas duas simulações para este cálculo, independentemente do número de variáveis. No entanto, a implementação do método é trabalhosa e requer acesso ao código fonte do simulador, o que geralmente não é possível em simuladores comerciais como o IMEX. Além disso, quando o número de variáveis e ciclos de controle são grandes, o cálculo requer grandes quantidades de armazenamento de dados (CHEN e OLIVER, 2012; CMG, 2017). Similarmente, o cálculo destas derivadas utilizando o método das diferenças finitas não é viável para problemas de larga escala (TUEROS *et al.* 2015; TUEROS, 2019).

Uma alternativa viável é o cálculo aproximado do gradiente, cujas vantagens são a diminuição do número de simulações e a utilização do simulador como caixa preta sem a necessidade de intervenção do código fonte (BROUWER e JANSEN, 2004; JANSEN, 2011; TUEROS, 2019; TUEROS *et al.*, 2020; VOLKOV e BELLOUT, 2017).

Neste estudo, para o cálculo aproximado do gradiente, empregou-se o tradicional Método Baseado em Ensemble (*Ensemble Optimization Method – EnOpt*) de Chen e Oliver (2012) e o Gradiente Simplex (*Simplex Gradient – SG*) proposto por Do e Reynolds (2013), que serão descritos com mais detalhes no Capítulo 3.

2.5 EQUAÇÕES DE FLUXO

As equações diferenciais básicas que governam o fluxo de fluidos em meios porosos, tais como rochas ou solos, são obtidas através da combinação do princípio de conservação de massa com a equação de transporte (equação de Darcy), que relaciona a taxa de fluxo e o gradiente de pressão. A equação diferencial resultante desta combinação é uma equação do tipo difusão que governa a forma como a pressão do fluido muda em função do tempo e varia espacialmente ao longo do reservatório, formando a base dos códigos de simulação numérica que são usados na engenharia de reservatórios de petróleo para prever recuperação de petróleo (AHMED e MCKINNEY, 2005; AHMED, 2010; ZIMMERMAN, 2018).

2.5.1 Lei de Darcy e o Fluxo de Estado Estacionário

Uma vez que todas as equações de fluxo a serem consideradas dependem da Lei de Darcy, é importante levar em consideração esta relação de transporte primeiro. A expressão matemática desenvolvida por Darcy em 1956 afirma que a velocidade de um fluido homogêneo em um meio poroso é proporcional ao gradiente de pressão, e inversamente proporcional à viscosidade do fluido. Para sistema linear horizontal, esta relação é (AHMED e MCKINNEY, 2005; AHMED, 2010; ZIMMERMAN, 2018):

$$Q = \frac{CA\Delta(\mathcal{P} - \rho gz)}{L} \quad (2.12)$$

onde \mathcal{P} é a pressão (Pa), ρ é a densidade (kg/m³), g é a aceleração gravitacional (m/s²), z é a coordenada vertical (m), L é o comprimento da amostra (m), Q é a vazão de fluxo volumétrico (m³/s), C é a constante de proporcionalidade (m²/Pa s), e A é a seção transversal da amostra (m²).

O termo $\mathcal{P} - \rho gz$ resulta da Equação De Bernoulli e governa a vazão de fluxo pois incorpora o Princípio da Conservação de Energia. Como os fluidos fluem das regiões de maior energia para regiões de menor energia, a força condutora para o fluxo deve ser o gradiente (ou seja, a taxa de mudança espacial) de $\mathcal{P} - \rho gz$ (ZIMMERMAN, 2018).

Ao trabalhar com fluxo volumétrico por unidade de área q , em vez de trabalhar com o fluxo total Q , temos:

$$q = \frac{Q}{A} \quad (2.13)$$

e como $C = k/\mu$, onde k é a permeabilidade (m²) e μ é a viscosidade (Pa s), substituindo esses termos na Eq. (2.12):

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{k \Delta(\mathcal{P} - \rho gz)}{\mu L} \quad (2.14)$$

onde o fluxo q é expresso em (m³/m²s).

Para processos transientes, as vazões de fluxos vertical (q_v) e horizontal (q_H) assumem as seguintes formas:

$$q_v = \frac{Q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{d(\mathcal{P} - \rho g z)}{dz} \quad (2.15)$$

e

$$q_H = \frac{Q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{d(\mathcal{P} - \rho g z)}{dx} = -\frac{k}{\mu} \frac{d\mathcal{P}}{dx} \quad (2.16)$$

O sinal de menos é incluído porque o fluxo flui na direção de maior para menor valores de $\mathcal{P} - \rho g z$. E como z é uma coordenada vertical, na Eq. (2.16), z é constante. Se o fluido estiver em equilíbrio estático, então $q = 0$ e a Eq. (2.15) assume a forma:

$$\frac{d(\mathcal{P} - \rho g z)}{dz} = 0 \rightarrow \mathcal{P} - \rho g z = \text{constante} \quad (2.17)$$

Se consideramos que $z = 0$ está na superfície, onde a pressão do fluido é atmosférica, então a pressão estática do fluido do reservatório em uma profundidade z é:

$$\mathcal{P}_{\text{estático}}(z) = \mathcal{P}_{\text{atm}} + \rho g z \quad (2.18)$$

A pressão no reservatório sempre é medida como “pressão manométrica”, por isso negligencia-se \mathcal{P}_{atm} na Eq. (2.18).

Observa-se ainda, que apenas a pressão acima e além da pressão estática dada na Eq. (2.18) desempenha papel em “conduzir” o fluxo. O termo $\rho g z$ apenas contribui com a pressão estática, mas não contribui com a força motriz do fluxo, por isso, define-se uma pressão corrigida:

$$\mathcal{P}_c = \mathcal{P} - \rho g z \quad (2.19)$$

É comum utilizar z_0 em vez de usar o nível de superfície ($z = 0$) como o referência, de modo que quantidades iguais de óleo inicial no local fiquem acima e abaixo de z_0 . Nesse caso, a Eq. (2.19) assume a forma:

$$\mathcal{P}_c = \mathcal{P} - \rho g(z - z_0) \quad (2.20)$$

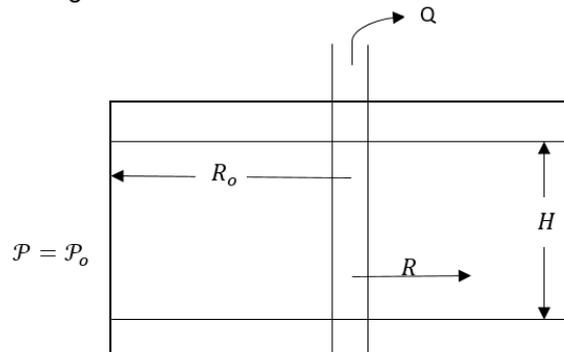
Sendo assim, em termos de pressão corrigida, a Lei de Darcy para, fluxo horizontal por exemplo, pode ser escrito como:

$$q_H = \frac{Q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{d\mathcal{P}_c}{dx} \quad (2.21)$$

Observemos agora a Fig. 1. Um reservatório de espessura H e permeabilidade horizontal k , totalmente penetrado por um poço vertical de raio R_w . Supondo que em certo raio R_o , a pressão permanece em seu estado sem perturbações, \mathcal{P}_o . Ao bombeamos óleo deste poço a uma vazão Q , a pressão do fluido irá mudar em função do tempo e variar espacialmente ao longo do reservatório, porém, eventualmente, a distribuição de pressão neste reservatório alcançará um estado estacionário, onde $d\mathcal{P}/dt = 0$. Neste estado estacionário, a vazão no reservatório em $R = R_o$ será exatamente igual a vazão no poço em $R = R_w$ (ZIMMERMAN, 2018). Analogamente à Eq. (2.16) temos:

$$Q = -\frac{kA}{\mu} \frac{d\mathcal{P}}{dR} \quad (2.22)$$

Figura 1 – Vista lateral de um reservatório.



Fonte: A autora (2021).

A área da seção transversal no raio R é essencialmente a área da superfície de um cilindro. Para um poço de espessura H , a área da seção transversal A é dada por:

$$A = 2\pi RH \quad (2.23)$$

Então:

$$Q = \frac{-2\pi kH}{\mu} R \frac{d\mathcal{P}}{dR} \quad (2.24)$$

Separando as variáveis da Eq. (2.24) e integrando a partir do limite externo ($R = R_o$):

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= \frac{-2\pi kH}{\mu Q} d\mathcal{P} \\ \int_{R_o}^R \frac{dR}{R} &= - \int_{\mathcal{P}_o}^{\mathcal{P}} \frac{2\pi kH}{\mu Q} d\mathcal{P} \\ \ln\left(\frac{R}{R_o}\right) &= \frac{-2\pi kH}{\mu Q} (\mathcal{P} - \mathcal{P}_o) \\ \mathcal{P} - \mathcal{P}_o &= \frac{-\mu Q}{2\pi kH} \ln\left(\frac{R}{R_o}\right) \\ \mathcal{P}(R) &= \mathcal{P}_o - \frac{\mu Q}{2\pi kH} \ln\left(\frac{R}{R_o}\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Analogamente, a queda de pressão no poço é encontrada definindo $R = R_w$ na Eq. (2.25):

$$\mathcal{P}_w = \mathcal{P}_o - \frac{\mu Q}{2\pi kH} \ln\left(\frac{R_w}{R_o}\right) \quad (2.26)$$

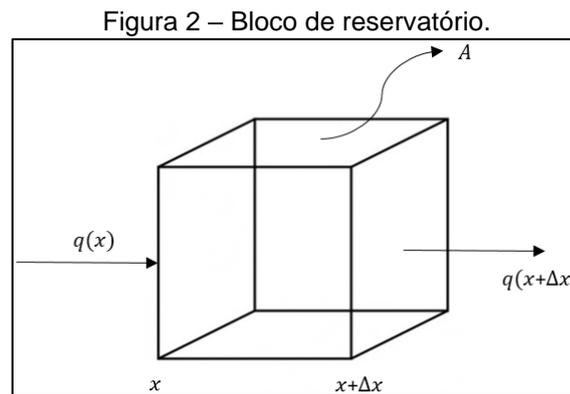
Observando as Eq. (2.25) e (2.26), é possível dizer que o fluido é bombeado do poço, então matematicamente Q é negativo porque o fluido está fluindo na direção oposta à direção da coordenada radial (R). Portanto, $\mathcal{P}(R)$ será menor do que \mathcal{P}_o para qualquer $R < R_o$. Contudo, usualmente a situação de interesse é aquela em que o fluido está fluindo em direção ao poço (em produção), então redefine-se Q como positivo para produção, e a Eq. (2.26) assume então a forma:

$$\mathcal{P}_w = \mathcal{P}_o + \frac{\mu Q}{2\pi kH} \ln\left(\frac{R_w}{R_o}\right) \quad (2.27)$$

2.5.2 Equações da Conservação de Massa

Para compreensão, consideremos um fluxo de fluido para dentro e para fora de um bloco de reservatório (Fig. 2). O fluxo é definido como a vazão de fluxo de massa por unidade de área de seção transversal normal à direção do fluxo. Suponhamos que o fluido flua para dentro do bloco $q(x)$ e para fora do bloco em $q(x + \Delta x)$. Por conservação de massa, temos a igualdade (FANCHI, 2001; LEE *et al.*, 2003; ZIMMERMAN, 2018):

$$\text{massa entrando no bloco} - \text{massa saindo do bloco} = \text{acúmulo de massa no bloco} \quad (2.28)$$



Fonte: A autora (2021).

Em outras palavras:

$$m_{entra} - m_{sai} = m_{acumulada} \quad (2.29)$$

Considerando o período de tempo entre t e $t + \Delta t$. Pode-se definir:

$$m_{entra} = A(x)\rho(x)q(x)\Delta t \quad (2.30)$$

e

$$m_{sai} = A(x + \Delta x)\rho(x + \Delta x)q(x + \Delta x)\Delta t \quad (2.31)$$

A quantidade de massa de fluido armazenada na região é definida por m , então a equação de conservação da massa assume a forma:

$$[A(x)\rho(x)q(x) - A(x + \Delta x)\rho(x + \Delta x)q(x + \Delta x)]\Delta t = m(t + \Delta t) - m(t) \quad (2.32)$$

Para fluxo 1D, como através de um núcleo cilíndrico, $A(x) = A = \text{constante}$. Neste caso, podemos fatorar A , dividir ambos os lados por Δt e deixar $\Delta t \rightarrow 0$ (ZIMMERMAN, 2018), então obtemos:

$$-A[\rho q(x + \Delta x) - \rho q(x)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = \frac{\partial m}{\partial t} \quad (2.33)$$

como $m = \rho V_p$ onde V_p é o volume poroso da rocha contido entre x e $x + \Delta x$. O volume poroso é por definição, igual ao volume macroscópico multiplicado pela porosidade, ϕ . Então:

$$m = \rho V_p = \rho \phi V = \rho \phi A \Delta x \quad (2.34)$$

Substituindo a Eq. (2.34) na Eq. (2.33):

$$-A[\rho q(x + \Delta x) - \rho q(x)] = \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} A \Delta x \quad (2.35)$$

Em seguida divide-se ambos os lados por $A \Delta x$ e tende $\Delta x \rightarrow 0$:

$$-\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} \quad (2.36)$$

A Eq. (2.36) é a equação básica de conservação de massa para fluxo linear 1D em um meio poroso, que relaciona a taxa espacial de mudança da massa armazenada à taxa temporal de mudança da massa armazenada (ZIMMERMAN, 2018).

2.5.3 Equação de difusão em coordenadas cartesianas

Embora matematicamente análoga às equações do tipo difusão que governam o fluxo de calor através de um corpo sólido, ou a difusão de partículas de soluto através de um líquido, por exemplo, pode ser interessante notar que, ao

contrário desses processos, a difusão de pressão em um reservatório é não é impulsionado por nenhum processo estocástico ou aleatório subjacente em escala molecular, mas é simplesmente impulsionado pela lei de Darcy (ZIMMERMAN, 2018).

Destacando o lado direito da Eq. (2.36), e usando a regra do produto e a regra da cadeia de diferenciação obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} &= \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \\
 \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} &= \rho \frac{d\phi}{d\mathcal{P}} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} + \phi \frac{d\rho}{d\mathcal{P}} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} \\
 \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} &= \rho\phi \left[\left(\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{d\mathcal{P}} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\mathcal{P}} \right) \right] \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} \\
 \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} &= \rho\phi (c_\phi + c_f) \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

onde c_f é a compressibilidade do fluido, e c_ϕ compressibilidade porosa da formação rochosa, também chamada de “Compressibilidade da Formação”. $c_\phi + c_f = c_t$ corresponde a compressibilidade total.

Em seguida destacamos o lado esquerdo da Eq. (2.36). O fluxo volumétrico por unidade de área, q , é dado pela lei de Darcy, Eq. (2.16) e, portanto, o lado esquerdo da Eq. (2.36) torna-se:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} \right] \\
 -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} &= \frac{k}{\mu} \left[\rho \frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} \right] \\
 -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} &= \frac{k}{\mu} \left[\rho \frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial\rho}{\partial\mathcal{P}} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} \right] \\
 -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} &= \frac{\rho k}{\mu} \left[\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\mathcal{P}} \right) \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x} &= \frac{\rho k}{\mu} \left[\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial x^2} + c_f \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Igualando as Eqs. (2.37) e (2.38) obtemos:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} + c_f \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \right)^2 = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (2.39)$$

Para líquidos, na Eq. (2.39) o segundo termo à esquerda é pequeno e pode ser negligenciado na prática, em comparação ao primeiro termo. Deste modo, a forma linearizada 1D da equação de difusão de pressão é:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{k}{\phi \mu c_t} \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} \quad (2.40)$$

onde $\frac{k}{\phi \mu c_t} = D_H$, é a difusividade hidráulica (m^2/s).

Como R é a distância percorrida por uma perturbação de pressão durante um tempo decorrido t :

$$R = \sqrt{4D_H t} = \sqrt{\frac{4kt}{\phi \mu c_t}} \quad (2.41)$$

Por outro lado, o tempo necessário para uma perturbação de pressão viajar a uma distância R do poço para o reservatório é dado por:

$$t = \frac{\phi \mu c_t R^2}{4k} \quad (2.42)$$

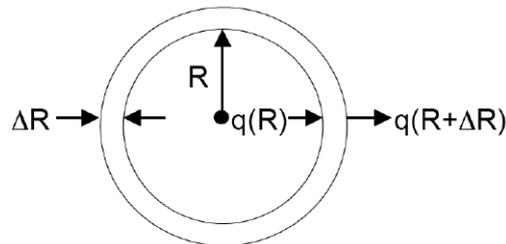
Os pulsos de pressão obedecem a equação de difusão. Quando se propagam, não viajam a uma velocidade constante, pois a velocidade diminui continuamente com o tempo. Para provar esta afirmação, basta derivarmos a Eq. (2.41):

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \left(2\sqrt{D_H t} \right) = 2\sqrt{D_H} \frac{1}{2} t^{-1/2} = \frac{\sqrt{D_H}}{\sqrt{t}} \quad (2.43)$$

2.5.4 Equação de difusão em coordenadas cilíndricas

Na Engenharia de Petróleo é mais conveniente usar coordenadas cilíndricas (radiais), em vez de coordenadas cartesianas. Para derivar a forma adequada da equação de difusão em coordenadas radiais, deve-se considerar o fluido fluindo em direção a, ou longe de, um poço vertical em um reservatório homogêneo de espessura uniforme H , de maneira radialmente simétrica (ZIMMERMAN, 2018). A Fig. 3 apresenta um balanço de massa em uma pequena região anular entre R e $R + \Delta R$.

Figura 3 – Região anular usada para derivar a equação de difusão de pressão em radial coordenadas.



Fonte: Zimmerman, 2018.

Utilizando a Eq. (2.32), substituímos x por R , e observamos que para a geometria anular, $A(R) = 2\pi RH$, obtendo assim:

$$[2\pi RH\rho(R)q(R) - 2\pi(R + \Delta R)H\rho(R + \Delta R)q(R + \Delta R)]\Delta t = m(t + \Delta t) - m(t) \quad (2.44)$$

Como antes, divide-se por Δt e tendemos $\Delta t \rightarrow 0$:

$$2\pi H[R\rho(R)q(R) - (R + \Delta R)\rho(R + \Delta R)q(R + \Delta R)] = \frac{\partial m}{\partial t} \quad (2.45)$$

Lembrando que:

$$m = \rho\phi V = \rho\phi A\Delta R = \rho\phi 2\pi RH\Delta R \quad (2.46)$$

Substituindo a Eq. (2.46) no lado direito da Eq. (2.45) obtemos:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\phi 2\pi R H \Delta R)}{\partial t} = 2\pi H R \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \Delta R \quad (2.47)$$

Igualando as Eqs. (2.45) e (2.47), divide por ΔR e toma-se o limite $\Delta R \rightarrow 0$.

$$-\frac{\partial(\rho q R)}{\partial R} = R \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \quad (2.48)$$

A Eq. (2.48) é a versão de fluxo radial para a equação de conservação de massa. Usando a lei de Darcy na forma da Eq. (2.22) para q no lado esquerdo da Eq. (2.48) e inserindo a Eq. (2.37) no lado direito obtemos:

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial R} \left(\rho R \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} \right) = \rho \phi c_t R \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (2.49)$$

Seguindo o mesmo procedimento que levou à Eq. (2.39), encontramos:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} \right) + c_f \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} \right)^2 = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (2.50)$$

Para líquidos, novamente negligenciamos o termo $c_f \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} \right)^2$, e por simplificação de notação, substituímos c_t por c :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} \right) = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \quad (2.51)$$

Esta é a equação governante para fluxo radial e transiente através da rocha porosa. É uma equação do tipo difusão que rege a mudança de pressão do fluido em função do tempo e varia espacialmente ao longo do reservatório (CRAFT e HAWKINS, 1990; LEE *et al.*, 2003; ZIMMERMAN, 2018). Para resolvê-la, precisamos saber como a pressão se comporta em tempos e distâncias específicas, ou seja, é necessário especificar condições para solucionar a equação. As condições especificadas em distâncias extremas diferentes são conhecidas como condições de limite, enquanto que a condição especificada no tempo inicial, $t = 0$, é conhecida como condição inicial (LEE *et al.*, 2003; ZIMMERMAN, 2018).

Devemos observar que a Eq. (2.51) é uma equação parcial diferencial de segunda ordem com respeito ao espaço (radial). Em outras palavras, nós pegamos a derivada parcial da pressão com respeito ao espaço (radial) duas vezes conforme é indicado no lado esquerdo da Eq. (2.51). Da mesma forma, a equação de difusividade é de primeira ordem com respeito ao tempo conforme é indicado no lado direito da Eq. (2.69) (LEE *et al.*, 2003).

Uma equação de segunda ordem requer duas condições para obter a solução, portanto, precisamos ter duas condições de limite. Em fluxo radial, normalmente especifica-se uma condição de pressão no poço (a condição de limite interno) e na borda da área de drenagem do reservatório (a condição de limite externo). Similarmente, uma equação diferencial de primeira ordem requer apenas uma condição, portanto, precisamos apenas de uma única condição para o tempo, isto é, a condição inicial (LEE *et al.*, 2003). No presente caso, essas condições são as seguintes:

- I. Condição inicial: Nós sempre assumimos que o reservatório inicialmente está com uma pressão constante e uniforme no tempo $t = 0$.

$$\mathcal{P}(R, t = 0) = \mathcal{P}_i \quad (2.52)$$

- II. Condições de limite externo: Há três casos para o limite externo do reservatório. O reservatório pode ter uma atuação infinita; o reservatório pode ser delimitado por um limite sem fluxo, isto é, um reservatório volumétrico; ou ainda, o reservatório pode ser delimitado por um limite de pressão constante, tal como um sistema reservatório/ aquífero. Aqui, consideraremos o caso em que o reservatório pode ter uma atuação infinita, ou seja, conforme o raio se torna muito grande, aproximando-se do infinito, a pressão vai se aproximando da pressão inicial, \mathcal{P}_i , para todos os tempos.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i \quad (2.53)$$

- III. Condições de limite no poço: Um poço pode estar produzindo a uma vazão constante ou a uma pressão constante. Consideremos aqui, o caso em que o

poço está produzindo a uma vazão constante, então a vazão de fluxo deve ser igual a Q em todos os tempos $t > 0$, definido aqui para $Q > 0$.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi kH}{\mu} R \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} \right) = Q \quad (2.54)$$

Para resolução deste problema, primeiro define-se uma nova variável n , que combina a variável espacial R e a variável de tempo t . Essa simplificação da equação de difusão foi descoberta pelo físico alemão Ludwig Boltzmann em 1894, e essa transformação é agora conhecida como transformação de Boltzmann (ZIMMERMAN, 2018):

$$n = \frac{\emptyset \mu c R^2}{k t} \quad (2.55)$$

Feito isso, assumimos que \mathcal{P} será uma função da variável n , ou seja, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n)$. Em seguida, reescrevemos a Eq. (2.51) em termos de n , e o lado direito transforma-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} = \frac{d\mathcal{P}}{dn} \frac{\partial n}{\partial R} = \frac{2\emptyset \mu c R}{k t} \frac{d\mathcal{P}}{dn} = \frac{\emptyset \mu c R^2}{k t} \frac{2}{R} \frac{d\mathcal{P}}{dn} = \frac{2n}{R} \frac{d\mathcal{P}}{dn} \quad (2.56)$$

Através da Eq. (2.56), observa-se que diferenciação com respeito a R é equivalente à diferenciação com respeito à n , seguido da multiplicação por $2n/R$. Portanto:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{2n}{R} \frac{d\mathcal{P}}{dn} \left(R \frac{2n}{R} \frac{d\mathcal{P}}{dn} \right) = \frac{4n}{R^2} \frac{d}{dn} \left(n \frac{d\mathcal{P}}{dn} \right) \quad (2.57)$$

Agora, olhando para o lado direito da Eq. (2.51), temos o seguinte:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{P}}{dn} \frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\emptyset \mu c R^2}{k t^2} \frac{d\mathcal{P}}{dn} = - \frac{n}{t} \frac{d\mathcal{P}}{dn} \quad (2.58)$$

E ainda:

$$\frac{\emptyset\mu c}{k} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\emptyset\mu c}{k} \frac{n}{t} \frac{d\mathcal{P}}{dn} = -\frac{\emptyset\mu c R^2}{kt} \frac{n}{R^2} \frac{d\mathcal{P}}{dn} = -\frac{n^2}{R^2} \frac{d\mathcal{P}}{dn} \quad (2.59)$$

Usando as Eqs. (2.57) e (2.59) na Eq. (2.51) temos:

$$\frac{d}{dn} \left(n \frac{d\mathcal{P}}{dn} \right) = -\frac{n}{4} \frac{d\mathcal{P}}{dn} \quad (2.60)$$

Uma vez que contém apenas uma variável independente, n , ao invés de duas variáveis independentes R e t , Eq. (2.60) é uma equação diferencial ordinária (ODE) para \mathcal{P} em função de n (ZIMMERMAN, 2018).

Agora devemos transformar as condições iniciais e de limite, de maneira que se apliquem a função $\mathcal{P}(n)$, observando que ambos os limites, $R \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow 0$, correspondem ao mesmo limite, $n \rightarrow \infty$. Portanto as Eqs. (2.53) e (2.54) assumem a forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(n) = \mathcal{P}_i \quad (2.61)$$

Usando a Eq. (2.56) na Eq. (2.54) temos:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(n \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial n} \right) = \frac{\mu Q}{4\pi k H} \quad (2.62)$$

O problema agora é um problema de valor de limite do tipo EDO de dois pontos definido pelas Eqs. (2.60) a (2.62) (ZIMMERMAN, 2018).

Se definirmos:

$$y = n \frac{d\mathcal{P}}{dn} \quad (2.63)$$

Então:

$$\frac{dy}{dn} = -\frac{y}{4} \quad (2.64)$$

Separando as variáveis da Eq. (2.64) e integrando de $n = 0$ até um valor arbitrário de n :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -\frac{dn}{4} \\ \int_{y(0)}^{y(n)} \frac{dy}{y} &= -\int_0^n \frac{dn}{4} \\ \ln \left[\frac{y(n)}{y(0)} \right] &= -\frac{n}{4} \\ \frac{y(n)}{y(0)} &= e^{-n/4} \\ y(n) &= y(0)e^{-n/4} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Note que a condição de limite, Eq. (2.62) é equivalente à:

$$y(0) = \frac{\mu Q}{4\pi kH} \quad (2.66)$$

Isso implica que a Eq. (2.66) pode ser escrita como:

$$y(n) = \frac{\mu Q}{4\pi kH} e^{-n/4} \quad (2.67)$$

Lembrando que y foi descrito pela Eq. (2.63), podemos então reescrever a Eq. (2.67) como:

$$\frac{dP(n)}{dn} = \frac{\mu Q}{4\pi kH} \frac{e^{-n/4}}{n} \quad (2.68)$$

Agora integramos a Eq. (2.68), iniciando em $n = \infty$, porque de acordo com a Eq. (2.61) a pressão em $n = \infty$ deve ser igual a pressão inicial no reservatório, P_i .

Então:

$$\begin{aligned}
d\mathcal{P} &= \frac{\mu Q}{4\pi kH} \frac{e^{-n/4}}{n} dn \\
\int_{\mathcal{P}_i}^{\mathcal{P}(n)} d\mathcal{P} &= \int_{\infty}^n \frac{\mu Q}{4\pi kH} \frac{e^{-n/4}}{n} dn \\
\mathcal{P}(n) &= \mathcal{P}_i + \int_{\infty}^n \frac{\mu Q}{4\pi kH} \frac{e^{-n/4}}{n} dn \\
\mathcal{P}(n) &= \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \int_n^{\infty} \frac{e^{-n/4}}{n} dn
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Como n foi expresso na Eq. (2.55), então substituímos no lado esquerdo da Eq. (2.69) e também no limite inferior da integral do lado direito, mas não dentro da integral porque neste caso n é apenas uma variável fictícia.

$$\mathcal{P}\left(\frac{\emptyset\mu cR^2}{kt}\right) = \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi H} \int_{\frac{\emptyset\mu cR^2}{kt}}^{\infty} \frac{e^{-n/4}}{n} dn \tag{2.70}$$

Para simplificar a integração da Eq. (2.70), definimos $u = n/4$, neste caso $dn/n = du/u$, e o limite inferior da integração passa a ser $u = \emptyset\mu cR^2/4kt$:

$$\mathcal{P}\left(\frac{\emptyset\mu cR^2}{4kt}\right) = \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \int_{\frac{\emptyset\mu cR^2}{4kt}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \tag{2.71}$$

A integral na Eq. (2.71) é a “função integral exponencial”, definida como:

$$-Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \tag{2.72}$$

Onde:

$$x = \frac{\emptyset\mu cR^2}{4kt} \tag{2.73}$$

Logo:

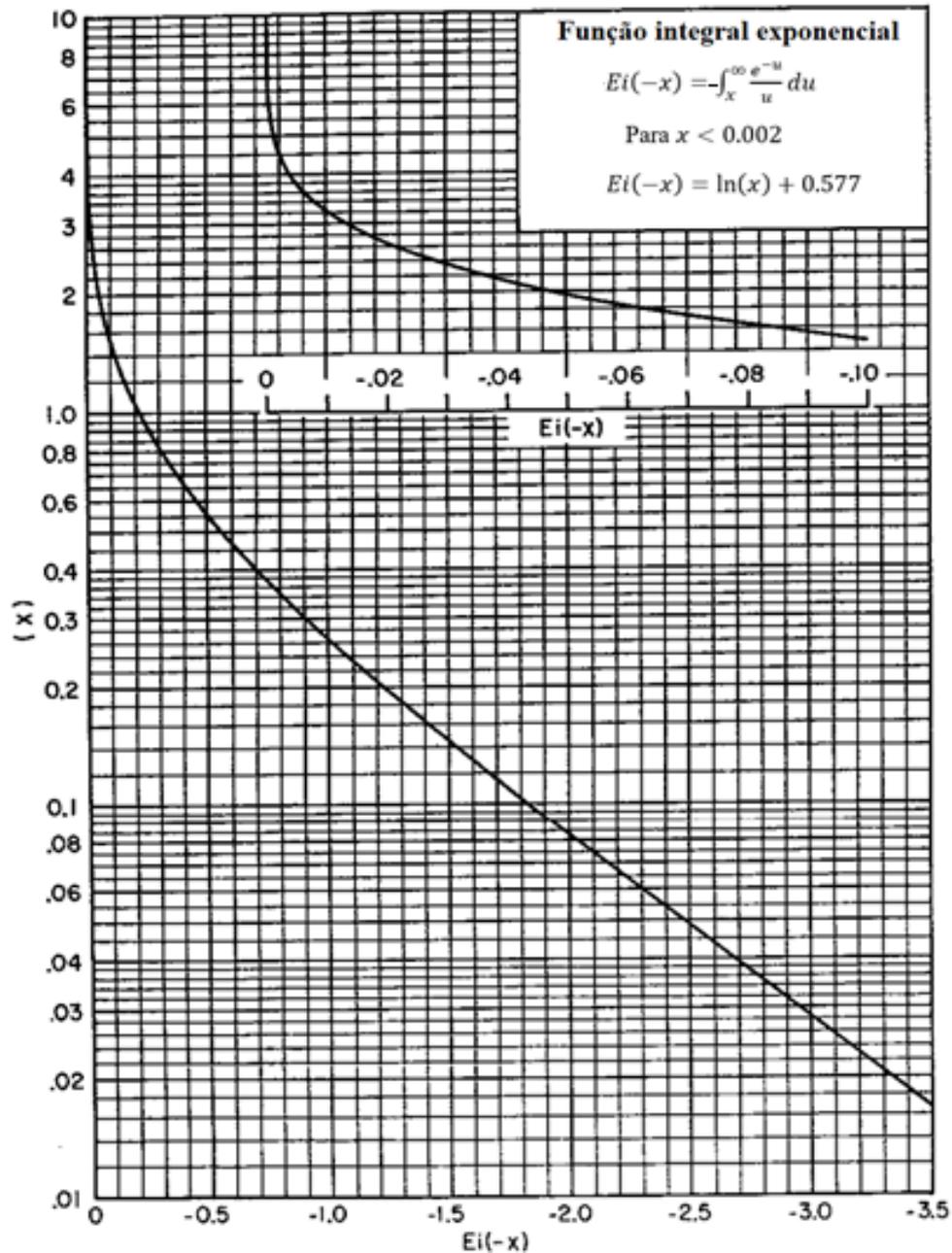
$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} Ei(-x) \tag{2.74}$$

A Eq. (2.74) expressa a pressão em função da distância do poço e do tempo decorrido desde o início da produção, dado por R e t . Nós usamos esses valores de R e t para calcular x da Eq. (2.73). Em seguida nós olhamos o valor de $-Ei(-x)$ na Tabela 1 ou no Gráfico 1 da função integral exponencial. Por fim, obtemos a pressão em (R, t) .

Tabela 1 – Função integral exponencial, $-Ei(-x)$.

x	$-E_i(-x)$	x	$-E_i(-x)$	x	$-E_i(-x)$
0.1	1.82292	4.3	0.00263	8.5	0.00002
0.2	1.22265	4.4	0.00234	8.6	0.00002
0.3	0.90568	4.5	0.00207	8.7	0.00002
0.4	0.70238	4.6	0.00184	8.8	0.00002
0.5	0.55977	4.7	0.00164	8.9	0.00001
0.6	0.45438	4.8	0.00145	9.0	0.00001
0.7	0.37377	4.9	0.00129	9.1	0.00001
0.8	0.31060	5.0	0.00115	9.2	0.00001
0.9	0.26018	5.1	0.00102	9.3	0.00001
1.0	0.21938	5.2	0.00091	9.4	0.00001
1.1	0.18599	5.3	0.00081	9.5	0.00001
1.2	0.15841	5.4	0.00072	9.6	0.00001
1.3	0.13545	5.5	0.00064	9.7	0.00001
1.4	0.11622	5.6	0.00057	9.8	0.00001
1.5	0.10002	5.7	0.00051	9.9	0.00000
1.6	0.08631	5.8	0.00045	10.0	0.00000
1.7	0.07465	5.9	0.00040		
1.8	0.06471	6.0	0.00036		
1.9	0.05620	6.1	0.00032		
2.0	0.04890	6.2	0.00029		
2.1	0.04261	6.3	0.00026		
2.2	0.03719	6.4	0.00023		
2.3	0.03250	6.5	0.00020		
2.4	0.02844	6.6	0.00018		
2.5	0.02491	6.7	0.00016		
2.6	0.02185	6.8	0.00014		
2.7	0.01918	6.9	0.00013		
2.8	0.01686	7.0	0.00012		
2.9	0.01482	7.1	0.00010		
3.0	0.01305	7.2	0.00009		
3.1	0.01149	7.3	0.00008		
3.2	0.01013	7.4	0.00007		
3.3	0.00894	7.5	0.00007		
3.4	0.00789	7.6	0.00006		
3.5	0.00697	7.7	0.00005		
3.6	0.00616	7.8	0.00005		
3.7	0.00545	7.9	0.00004		
3.8	0.00482	8.0	0.00004		
3.9	0.00427	8.1	0.00003		
4.0	0.00378	8.2	0.00003		
4.1	0.00335	8.3	0.00003		

Fonte: Craft e Hawkins, 1990.

Gráfico 1 – Função integral exponencial, $Ei(-x)$.

Fonte: Craft e Hawkins, 1990.

Analisando as Eqs. (2.71) a (2.74) é possível observar que, embora a pressão pareça depender de muitas variáveis e parâmetros, na verdade existem apenas duas variáveis matemáticas independentes e adimensionais na solução (AHMED e MCKINNEY, 2005; LEE *et al.*, 2003; ZIMMERMAN, 2018). Tradicionalmente, essas variáveis são definidas como o tempo adimensional:

$$\tau_D = \frac{k\tau}{\phi\mu cR^2} \quad (2.75)$$

e a redução de pressão adimensional:

$$\Delta\mathcal{P}_D = \frac{2\pi kH(\mathcal{P}_i - \mathcal{P})}{\mu Q} \quad (2.76)$$

Em termos desses parâmetros adimensionais, a solução assume a forma:

$$\Delta\mathcal{P}_D = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4t_D}\right) \quad (2.77)$$

Comparando as Eqs. (2.42) e (2.75), observa-se que, além do fator 4, o tempo adimensional a uma distância R do centro do poço é igual ao tempo físico real t , normalizado em relação ao tempo necessário para que o pico do pulso de pressão viaje do poço para a localização R .

$$t_R = \frac{\phi\mu c_t R^2}{4k} \rightarrow t_D = \frac{t}{4t_R} \quad (2.78)$$

Se $4t_D \ll 1$, corresponde a momentos em que o pulso de pressão ainda não chegou ao local R . Se $4t_D \gg 1$, corresponde a momentos em que o pulso de pressão penetrou muito mais longe do que uma distância R no reservatório.

2.5.5 Aproximação Logarítmica

Observemos agora a Eq. (2.72). Para valores suficientemente pequenos de x , ou seja, grandes valores de t , a integral exponencial essencialmente torna-se uma função logarítmica, o que a torna mais fácil de usar. Procedemos então da seguinte forma:

Para tempos grandes, x será pequeno, e podemos dividir a integral em duas partes:

$$-Ei(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (2.79)$$

Usando a série de Taylor para e^{-u} na primeira integração à direita temos:

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^1 \frac{1 - \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \dots}{u} du \quad (2.80)$$

Divide-se a integral do lado direito da Eq. (2.80) em uma série de integrais e avalio-as termo a termo:

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du &= \int_x^1 \frac{1}{u} du - \frac{1}{1!} \int_x^1 du + \frac{1}{2!} \int_x^1 u du + \frac{1}{3!} \int_x^1 u^2 du - \dots \\ \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du &= \ln u \Big|_x^1 - u \Big|_x^1 + \frac{1}{2!} \frac{u^2}{2} \Big|_x^1 - \frac{1}{3!} \frac{u^3}{3} \Big|_x^1 + \dots \\ \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du &= (\ln 1 - \ln x) - (1 - x) + \frac{1}{2!} (1 - x^2) - \frac{1}{3!} (1 - x^3) + \dots \\ \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du &= -\ln x + x - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots - \left\{ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Substituindo a Eq. (2.81) na Eq. (2.79) obtemos:

$$-Ei(-x) = -\ln x - \ln \gamma + x - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \quad (2.82)$$

onde:

$$\ln \gamma = \left\{ 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right\} - \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (2.83)$$

E $\ln \gamma$ é um número e não depende de x , então podemos avaliá-lo numericamente:

$$\ln \gamma = \ln(1.781) = 0.5772 \quad (2.84)$$

Se quisermos que os termos da série de potências sejam, por exemplo, duas ordens de magnitude menor que γ (que é aproximadamente de ordem 1), então:

$$t_D > 25 \quad (2.85)$$

e

$$x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots < x \quad (2.86)$$

onde:

$$x = \frac{\phi\mu cR^2}{4kt} < 0.01 \rightarrow \text{Pode ser negligenciado!} \quad (2.87)$$

então:

$$-Ei(-x) = -\ln x - \ln \gamma \quad (2.88)$$

Desta forma, se $t_D > 25$, temos a partir das Eqs. (2.74) e (2.82):

$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} (\ln x + \ln \gamma)$$

$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} \ln(x\gamma)$$

$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} \ln\left(\frac{\phi\mu cR^2\gamma}{4kt}\right)$$

$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \ln\left(\frac{4kt}{\phi\mu cR^2\gamma}\right)$$

$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \ln\left(\frac{2.246kt}{\phi\mu cR^2}\right) \quad (2.89)$$

$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \left[\ln\left(\frac{kt}{\phi\mu cR^2}\right) + 0.8097 \right] \quad (2.90)$$

A forma dada na Eq. (2.89) é usada na hidrologia de águas subterrâneas e é chamada de aproximação de Jacobiana; a forma equivalente da Eq. (2.90) é usada na engenharia de reservatórios de petróleo, onde é chamada de aproximação logarítmica (ZIMMERMAN, 2018). A forma adimensional da aproximação logarítmica é dada por:

$$\Delta\mathcal{P}_D = \frac{1}{2} [\ln(t_D) + 0.80907] \quad (2.91)$$

2.5.6 Pulso Instantâneo de Fluido Injetado

Se começarmos a injetar fluido a uma taxa $Q(m^3/s)$ no tempo $t = 0$, então a pressão a uma distância R no reservatório será dada pela Eq. (2.74). Se pararmos de injetar fluido depois de um pequeno intervalo de tempo, δt , isso equivale a injetar

fluido a uma taxa Q começando em $t = 0$, e depois produzir fluido à taxa Q (ou equivalente, injetar à taxa $-Q$) começando em δt . A queda de pressão no reservatório devido a esta produção fictícia seria dada pela mesma solução dada pela Eq. (2.74), exceto que (ZIMMERMAN, 2018):

1. Para extração do fluido devemos usar o sinal de " - " na frente da integral.
2. Se t é o tempo decorrido desde o início da injeção, então $t - \delta t$ será o tempo decorrido desde o início da extração do fluido (i.e. desde o final da injeção atual).

Portanto, a expressão completa para a pressão em R e no tempo t será:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R, t) &= \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} \int_{\frac{\emptyset \mu c R^2}{4kt}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \int_{\frac{\emptyset \mu c R^2}{4k(t-\delta t)}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ \mathcal{P}(R, t) &= \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} \int_{\frac{\emptyset \mu c R^2}{4kt}}^{\frac{\emptyset \mu c R^2}{4k(t-\delta t)}} \frac{e^{-u}}{u} du \end{aligned} \quad (2.92)$$

Se δt for pequeno, então os limites da integral são muito próximos, e podemos usar a seguinte aproximação:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx f(x_1)[x_2 - x_1] \quad (2.93)$$

Então:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R, t) &\approx \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} \frac{4kt}{\emptyset \mu c R^2} e^{-\frac{\emptyset \mu c R^2}{4kt}} \left[\frac{\emptyset \mu c R^2}{4k(t-\delta t)} - \frac{\emptyset \mu c R^2}{4kt} \right] \\ \mathcal{P}(R, t) &\approx \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi kH} \frac{4kt}{\emptyset \mu c R^2} e^{-\frac{\emptyset \mu c R^2}{4kt}} \left[\frac{\emptyset \mu c R^2 \delta t}{4kt^2} \right] \\ \mathcal{P}(R, t) &\approx \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q \delta t}{4\pi kH t} e^{-\frac{\emptyset \mu c R^2}{4kt}} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Para identificar o "momento em que o pulso de pressão chegou na localização R ", sendo este o momento em que o acúmulo de pressão atinge seu valor máximo em R , devemos configurar $\partial \mathcal{P} / \partial t = 0$ na Eq. (2.94):

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right|_R = \frac{\mu Q^*}{4\pi kH} \left[-\frac{1}{t^2} + \frac{\phi \mu c R^2}{4kt^3} \right] e^{-\frac{\phi \mu c R^2}{4kt}} = 0 \quad (2.95)$$

onde:

$$t = \frac{\phi \mu c R^2}{4k} \quad (2.96)$$

que fornece uma derivação da Eq. (2.42).

2.6 PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

As soluções para a equação de difusividade radial, apresentadas anteriormente, parecem ser aplicáveis apenas para descrever a distribuição de pressão em um reservatório infinito que foi causada pela produção constante de um único poço, porém, os sistemas de reservatório reais geralmente têm vários poços que estão operando em vazões variáveis, por isso, é necessária uma abordagem mais generalizada para estudar o comportamento do fluxo de fluido durante o período em que o fluxo não é constante (AHMED e MCKINNEY, 2005; CRAFT e HAWKINS, 1990).

O princípio da superposição é um conceito que nos permite usar a equação de difusividade desenvolvida para um único poço, em problemas que envolvem vários poços e vazões variáveis, especificamente para modelagem de testes de acúmulo. O termo superposição simplesmente significa a soma de todas as partes individuais que contribuem para o sistema total (LEE *et al.*, 2003).

Para que o princípio da superposição possa ser utilizado na construção de soluções para a equação, é necessário que possua linearidade, pois é a propriedade mais importante e útil que qualquer equação diferencial pode ter. O processo de diferenciação parcial é uma operação linear, uma vez que (ZIMMERMAN, 2018):

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{P}_1(R, t) + \mathcal{P}_2(R, t)] = \frac{d\mathcal{P}_1(R, t)}{dt} + \frac{d\mathcal{P}_2(R, t)}{dt} \quad (2.97)$$

e

$$\frac{d}{dt} [c\mathcal{P}_1(R, t)] = c \frac{d\mathcal{P}_1(R, t)}{dt} \quad (2.98)$$

A linearidade da equação de difusão implica que a queda de pressão, $\Delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_i - \mathcal{P}(R, t)$, satisfaz a mesma equação de difusão que $\mathcal{P}(R, t)$, uma vez que:

$$\frac{d[\mathcal{P}_i - \mathcal{P}(R, t)]}{dt} = \frac{d\mathcal{P}_i}{dt} - \frac{d\mathcal{P}(R, t)}{dt} = - \frac{d\mathcal{P}(R, t)}{dt} \quad (2.99)$$

A queda de pressão deve ser zero quando $t = 0$. Da mesma forma, a queda de pressão também é zero infinitamente longe do poço, então se duas funções de queda de pressão satisfazem a condição de contorno em $R = \infty$, sua soma também irá satisfazer esta condição de contorno de campo distante.

O princípio da superposição afirma que a queda de pressão total será a soma da queda de pressão obtida pelo fluxo do poço 1 e a queda de pressão causada pelo fluxo do poço 2:

$$\Delta\mathcal{P} = \Delta\mathcal{P}_1 + \Delta\mathcal{P}_2 \quad (2.100)$$

Cada um dos termos $\Delta\mathcal{P}$ individuais é dado pela Eq. (2.74) ou:

$$\Delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_i - \mathcal{P}_1(R, t) = - \frac{\mu Q}{4\pi k H} E_i \left(- \frac{\phi \mu c R^2}{4kt} \right) \quad p/t < t_1 \quad (2.101)$$

e

$$\Delta\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_i - \mathcal{P}_2(R, t) = \frac{\mu Q}{4\pi k H} E_i \left[- \frac{\phi \mu c R^2}{4k(t-t_1)} \right] \quad p/t > t_1 \quad (2.102)$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{P} &= - \frac{\mu Q}{4\pi k H} E_i \left(- \frac{\phi \mu c R^2}{4kt} \right) + \frac{\mu Q}{4\pi k H} E_i \left[- \frac{\phi \mu c R^2}{4k(t-t_1)} \right] \\ \Delta\mathcal{P} &= - \frac{\mu Q}{4\pi k H} \left\{ E_i \left(- \frac{\phi \mu c R^2}{4kt} \right) - E_i \left[- \frac{\phi \mu c R^2}{4k(t-t_1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Lembrando que $\Delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_i - \mathcal{P}(R, t)$, e que $\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i - \Delta\mathcal{P}(R, t)$, desta forma:

$$\mathcal{P}(R, t) = \mathcal{P}_i + \frac{\mu Q}{4\pi k H} \left\{ E_i \left(- \frac{\phi \mu c R^2}{4kt} \right) - E_i \left[- \frac{\phi \mu c R^2}{4k(t-t_1)} \right] \right\} \quad (2.104)$$

Se t for suficientemente grande, podemos usar a aproximação logarítmica para ambos os termos na Eq. (2.104), então:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(R, t) &= \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \left[\ln t + \ln \left(\frac{2.246 k}{\phi \mu c R^2} \right) - \ln(t - t_1) - \ln \left(\frac{2.246 k}{\phi \mu c R^2} \right) \right] \\ \mathcal{P}(R, t) &= \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} [\ln t - \ln(t - t_1)] \\ \mathcal{P}(R, t) &= \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \ln \frac{t}{(t - t_1)}\end{aligned}\quad (2.105)$$

A Eq. (2.105) é a equação para a pressão no poço durante um teste de acúmulo de pressão. No entanto, a notação comumente usada é:

$$\mathcal{P}_w = \mathcal{P}_i - \frac{\mu Q}{4\pi kH} \ln \left(\frac{t + \Delta t}{\Delta t} \right) \quad (2.106)$$

Onde t corresponde ao período de produção, em substituição ao termo t_1 presente na Eq. (2.105); e Δt é o período de fechamento, que substitui o termo " $t - t_1$ ", também presente na Eq. (2.105).

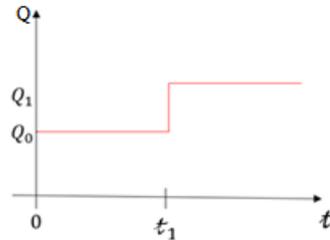
Se houver mais de dois poços produzindo no reservatório, para aplicar o método da superposição o procedimento é o mesmo, e a queda de pressão total é dada pela seguinte forma:

$$\Delta \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^{N_P} \Delta \mathcal{P}_j \quad (2.107)$$

As expressões matemáticas apresentadas anteriormente nesta seção requerem que os poços produzam a uma vazão constante durante os períodos de fluxo transiente. Praticamente todos os poços produzem em vazões variáveis e, portanto, é importante que sejamos capazes de prever o comportamento da pressão quando a vazão muda. Para este propósito, o conceito de superposição afirma que "Cada mudança de vazão de fluxo em um poço resultará em uma resposta de pressão que é independente das respostas de pressão causadas por outras alterações de vazões anteriores." Consequentemente, a queda de pressão total que ocorreu a qualquer momento é a soma das mudanças de pressão causadas separadamente por cada mudança de vazão de fluxo líquida (AHMED e MCKINNEY,

2005). Primeiro, imagine que a vazão de produção é dada pela Fig. 4 e pelas Eqs. (2.108) e (2.109):

Figura 4 – Vazão de produção alterada por quantidades menores em vários intervalos de tempo.



Fonte: A autora (2021).

$$Q = Q_0 \text{ para } 0 < t < t_1 \quad (2.108)$$

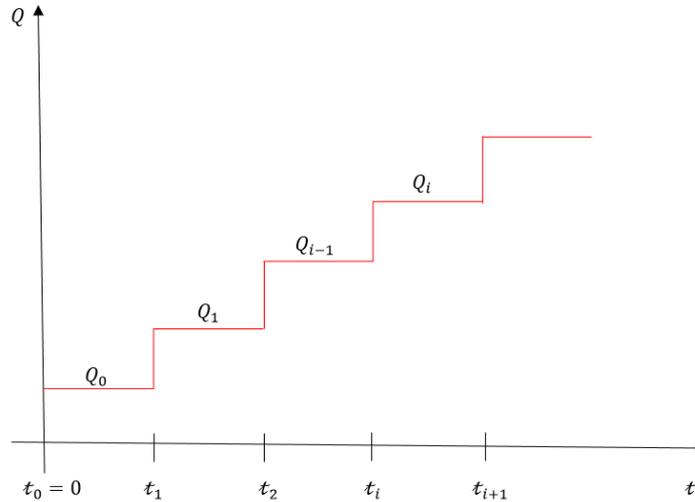
$$Q = Q_1 \text{ para } t > t_1 \quad (2.109)$$

Para encontrar a queda de pressão, superpomos a solução para produção na vazão Q_0 começando no tempo $t = 0$, mais a solução começando em t_1 , que corresponde ao incremento na produção, $Q_1 - Q_0$:

$$\Delta \mathcal{P}(R, t) = -\frac{\mu Q_0}{4\pi k H} E_i \left(-\frac{\phi \mu c R^2}{4kt} \right) - \frac{\mu(Q_1 - Q_0)}{4\pi k H} E_i \left[-\frac{\phi \mu c R^2}{4k(t-t_1)} \right] \quad (2.110)$$

No caso mais geral temos, temos o comportamento apresentado na Fig.5 e expresso pela Eq. (2.111):

Figura 5 – Vazão de produção alterada por quantidades menores em vários intervalos de tempo para o caso geral.



Fonte: A autora (2021).

$$\Delta\mathcal{P}(R, t) = -\frac{\mu Q_0}{4\pi kH} E_i\left(-\frac{\phi\mu cR^2}{4kt}\right) - \sum_{i=1} \frac{\mu(Q_i - Q_{i-1})}{4\pi kH} E_i\left[-\frac{\phi\mu cR^2}{4k(t-t_i)}\right] \quad (2.111)$$

Para simplificar a notação, definimos a queda de pressão por unidade de vazão de fluxo como $\Delta\mathcal{P}_Q(R, t) = 0$ quando $t < 0$.

$$\Delta\mathcal{P}_Q(R, t) \equiv \frac{\Delta\mathcal{P}(R, t; Q)}{Q} \equiv -\frac{\mu}{4\pi kH} E_i\left(-\frac{\phi\mu cR^2}{4kt}\right) \quad (2.112)$$

Para múltiplas vazões, podemos reescrever a Eq. (2.102) como:

$$\Delta\mathcal{P}(R, t) = Q_0\Delta\mathcal{P}_Q(R, t) + \sum_{i=1} (Q_i - Q_{i-1})\Delta\mathcal{P}_Q(R, t - t_i) \quad (2.113)$$

Quando $t > t_{k-1}$, a queda de pressão unitária em função do tempo será representada por $\mathcal{P}_u(t)$, e expressa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_u(\Delta t_k) &= \mathcal{P}_u(t - t_k) = \Delta\mathcal{P}_Q(R, t - t_k) \equiv \frac{\Delta\mathcal{P}(R, t - t_k)}{Q} \equiv -\frac{\mu}{4\pi kH} E_i\left(-\frac{\phi\mu cR^2}{4k(t-t_k)}\right) \\ \mathcal{P}_u(\Delta t_k) &= \mathcal{P}_u(t - t_k) = \frac{\mu}{4\pi kH} \left[\ln(\Delta t_k) + \ln\left(\frac{2.246 k}{\phi\mu cR^2}\right) \right] \\ \mathcal{P}_u(\Delta t_{k-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_k) &= \frac{\mu}{4\pi kH} \left[\ln(t - t_{k-1}) + \ln\left(\frac{2.246 k}{\phi\mu cR^2}\right) - \ln(t - t_k) - \ln\left(\frac{2.246 k}{\phi\mu cR^2}\right) \right] \\ \mathcal{P}_u(\Delta t_{k-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_k) &= \frac{\mu}{4\pi kH} \ln\left(\frac{t - t_{k-1}}{t - t_k}\right) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Na Eq. (2.114), t_k corresponde ao tempo no k -ésimo ciclo de controle; t representa o tempo final, onde por simplificação de notação e para futuras discussões técnicas, expressaremos como t_f . Reescrevendo a Eq. (2.114) temos:

$$\mathcal{P}_u(\Delta t_{k-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_k) = \frac{\mu}{4\pi kH} \ln\left(\frac{t_f - t_{k-1}}{t_f - t_k}\right) \quad (2.115)$$

Similarmente temos:

$$\mathcal{P}_u(\Delta t_{i-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_i) = \frac{\mu}{4\pi kH} \ln\left(\frac{t_f - t_{i-1}}{t_f - t_i}\right), \text{ onde } t_i > t_k. \quad (2.116)$$

Podemos então definir o Princípio da Superposição através das relações entre a derivada da vazão líquida média do poço produtor j no i -ésimo ciclo de controle ($\partial \bar{q}_i^{liq,Pj}$), com respeito às derivadas de pressão no k -ésimo ($\partial \mathcal{P}_{wf,k}$) e i -ésimo ($\partial \mathcal{P}_{wf,i}$) ciclos de controle, respectivamente:

$$\frac{\frac{\partial \bar{q}_i^{liq,Pj}}{\partial \mathcal{P}_{wf,k}}}{\frac{\partial \bar{q}_i^{liq,Pj}}{\partial \mathcal{P}_{wf,i}}} = \frac{\mathcal{P}_u(\Delta t_{k-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_k)}{\mathcal{P}_u(\Delta t_{i-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_i)} = \frac{\ln\left(\frac{t_f - t_{k-1}}{t_f - t_k}\right)}{\ln\left(\frac{t_f - t_{i-1}}{t_f - t_i}\right)} \quad (2.117)$$

A Eq. (2.117) será utilizada para calcular os valores de amortecimento na Técnica de Amortecimento apresentada na seção 4.2 deste trabalho.

2.6 MODELO DE CAPACITÂNCIA E RESISTÊNCIA (*CAPACITANCE RESISTANCE MODEL, CRM*)

O Modelo de Capacitância e Resistência (*Capacitance Resistance Model, CRM*) é uma técnica prática utilizada para quantificar a comunicação entre poços em um reservatório usando apenas dados de produção e de injeção de água (ALBERTONI e LAKE, 2003).

Com o CRM, o reservatório é visto como um sistema que processa um estímulo (injeção de água), considerado como dados de entrada, e retorna uma resposta (produção), tratada como dados de saída. No processo de injeção de água,

é comum existir vários poços injetores e produtores atuando ao mesmo tempo; além disso, o efeito do reservatório nos sinais de entrada / saída dependerá da localização e da orientação de cada par estímulo-resposta (ALBERTONI e LAKE, 2003).

Os primeiros estudos para estimar a comunicação entre um par de poços foram apresentados por Albertoni e Lake (2003), baseados em duas abordagens diferentes destinadas a resolver este problema: Regressão Linear Multivariada (*Multivariate Linear Regression* – MLR) e Regressão Linear Multivariada Balanceada (*Balanced Multivariate Linear Regression* – BMLR).

Quando a vazão de injeção é significativamente diferente da vazão de produção em todo o reservatório, a abordagem MLR deve ser usada. Neste modelo, a vazão de produção estimada de um produtor $q_j(t)$ é dada pela combinação linear da vazão dos injetores $q_i(t)$ mais uma constante β_{0j} que representa a falta de equilíbrio do sistema:

$$q_j(t) = \beta_{0j} + \sum_{i=1}^{N_I} \beta_{ij} q_i(t), \text{ com } j = 1, \dots, N_P \quad (2.118)$$

A Eq. (2.118) afirma que, a qualquer momento, a vazão de produção total no poço j é uma combinação linear das vazões de cada poço injetor mais um termo constante, β_{0j} . O fator β_{ij} representa os pesos de cada poço injetor em relação a cada poço produtor. Se as vazões de injeção são conhecidas, os fatores β_{0j} e β_{ij} são determinados através de uma solução de um problema de regressão linear multivariada, onde para resolver o problema, a variância (*var*) é minimizada entre as vazões de produção observada q_j^{obs} e calculada q_j^{calc} (JENSEN *et al.*, 1997):

$$\text{Minimize } var(q_j^{obs} - q_j^{calc}) \quad (2.119)$$

Já nos casos em que a vazão de injeção é aproximadamente igual a vazão de produção em todo o reservatório, a abordagem BMLR deve ser usada. Neste modelo a constante β_{0j} é nula:

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^{N_I} \beta_{ij} q_i(t), \text{ com } j = 1, \dots, N_P \quad (2.120)$$

A Eq. (2.120) novamente afirma que a qualquer momento a produção total no poço j é uma combinação linear das vazões de injeção de cada injetor, onde β_{ij} são os fatores de peso para cada injetor em relação ao produtor.

Albertoni e Lake (2003), utilizaram ainda, filtros difusivos para considerar o tempo de atraso e atenuação das mudanças que ocorrem entre o estímulo (injeção) e a resposta (produção). Os filtros tornam-se mais importantes para grandes distâncias entre injetores e produtores e para grande dissipação do meio.

Gentil (2005), em continuidade ao trabalho de Albertoni e Lake (2003), interpretou o significado físico dos parâmetros da equação da vazão de produção. Considerou um reservatório com um único injetor injetando a uma vazão q_i e os produtores produzindo a uma vazão q_j conectados entre si por caminhos arbitrários, a uma razão de contribuição β_{ij} , do injetor i em direção a cada produtor j . Estando o sistema equilibrado, a vazão de injeção total é igual a soma das contribuições do injetor para cada produtor:

$$I_i(t) = \sum_{j=1}^{N_P} q_{ij}(t) \quad (2.121)$$

e considerando também a contribuição de outros injetores possivelmente presentes, a vazão no produtor j é dada por:

$$q_j(t) = \sum_{i=1}^{N_I} q_{ij}(t) \quad (2.122)$$

Analisando as equações (2.120) e (2.122), os dois sistemas serão o mesmo se:

$$q_{ij}(k) = \beta_{ij} I_i(k) \quad (2.123)$$

Combinando as Eq. (2.121) e (2.123), temos:

$$I_i(t) = \sum_j \beta_{ij} I_i(t) \quad (2.124)$$

Reorganizando:

$$\sum_j \beta_{ij} = 1 \quad (2.125)$$

As interpretações físicas agora são obtidas diretamente. Da Eq. (2.124) obtemos:

$$\beta_{ij} = \frac{q_{ij}(t)}{I_i(t)} \quad (2.126)$$

Desta forma, Gentil (2005), demonstra que β_{ij} representa a razão da vazão de contribuição estabelecida entre um par de poços injetor (I_i) – produtor (q_j) e a vazão total injetada por esse injetor, e interpretou o seu significado físico como uma função diretamente proporcional a transmissibilidade e inversamente proporcional a distância entre os poços. Esse fator passou a ser chamado de conectividade.

Yousef (2006), introduziu o modelo de capacitância (*Capacitance Model* – CM) que quantifica a conectividade entre poços e o grau de armazenamento do fluido (compressibilidade) entre um par de poços. Este novo procedimento pode ser aplicado em reservatórios cujos poços são fechados frequentemente ou fechados por longos períodos de tempo, permite também a aplicação em campos onde as vazões têm uma produção remanescente, e ainda, tem a capacidade de usar dados de pressão do fundo do poço (se disponíveis) para melhorar a quantificação da conectividade entre poços.

Matematicamente, o CM apresentado por Yousef (2006) é um balanço de massa de fluido total com compressibilidade. Primeiro, considera-se um par de poços produtores de injetores em um volume de vazão. A equação diferencial governante do balanço de materiais nas condições do reservatório é dada por:

$$c_t v_p \frac{d\bar{p}}{dt} = q_i(t) - q_j(t) \quad (2.127)$$

Onde c_t é a compressibilidade total; v_p é o volume poroso e $\overline{d\mathcal{P}}$ é a pressão média em v_p . $q_i(t)$ e $q_j(t)$ correspondem, respectivamente, vazão de injeção total no tempo t e vazão de produção total no tempo t .

Nos casos em que houver múltiplos produtores e injetores atuando simultaneamente no reservatório, a vazão de produção total de um produtor é geralmente suportada por mais de um injetor. Assim, o modelo de capacitância, derivado na Eq. (2.127) para um par produtor e injetor, deve ser generalizado para descrever um sistema que consiste em um produtor e vários injetores. Para isso, define-se coeficientes ou pesos β_{ij} para representar o fato de que um injetor pode ser compartilhado por mais de um produtor. Portanto, a equação diferencial de balanço de materiais para os injetores i e produtores j é:

$$c_t v_p \frac{d\overline{\mathcal{P}}}{dt} = \sum_{i=1}^I \beta_{ij} q_i(t) - q_j(t) \quad (2.128)$$

Onde c_t, v_p e $\overline{d\mathcal{P}}$ estão relacionados ao volume drenado pelo produtor j quando todos os injetores estão ativos.

Para uma descrição totalmente baseada nas vazões, introduz-se um índice de produtividade:

$$q_j(t) = J_j (\overline{\mathcal{P}}(t) - \mathcal{P}_{wf}^j) \quad (2.129)$$

Onde J_j corresponde ao índice de produtividade do produtor j ; e \mathcal{P}_{wf}^j representa a pressão de fundo de poço (BHP) no produtor j . Eliminando a pressão média das Eqs. (2.128) e (2.129), obtemos:

$$\tau_j \frac{dq_j}{dt} + q_j(t) = \sum_{i=1}^I \beta_{ij} q_i(t) - \tau_j J_j \frac{\mathcal{P}_{wf}^j}{dt} \quad (2.130)$$

Onde τ é a "constante de tempo" do volume drenado, e é definido por:

$$\tau = \frac{c_t v_p}{J} \quad (2.131)$$

A Eq. (2.130) fornece um β_{ij} para cada par injetor-produtor, enquanto ele impõe a mesma constante de tempo para todos os pares de poços. Ou seja, não leva em conta os possíveis graus de atenuação entre os pares injetor-produtor. Portanto, Yousef (2006) desenvolveu um modelo que respeitasse o efeito de transmissibilidade bem como o efeito da capacitância para cada par injetor-produtor:

$$q_j(t) = \beta_p q_j(t_0) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} + \sum \beta_{ij} \left[e^{-\frac{t}{\tau_{ij}}} \int_{\xi=t_0}^{\xi=t} \frac{1}{\tau} e^{\frac{\xi}{\tau_{ij}}} q_{ij}(\xi) d\xi \right] + v_j \left[\mathcal{P}_{wf}^j(t_0) e^{-\frac{\Delta t}{\tau_p}} - P_{wf}^j(t) + \frac{e^{-\frac{t}{\tau_j}}}{\tau_j} \int_{\xi=t_0}^{\xi=t} e^{\frac{\xi}{\tau_j}} \mathcal{P}_{wf}^j(\xi) d\xi \right] \quad (2.132)$$

Onde β_p e τ_p representam a conectividade e constante do tempo para contribuição da produção primária, respectivamente; $q_j(t_0)$ é a vazão total inicial do produtor, τ_{ij} é a constante de tempo para o meio entre injetor i e o produtor j , ξ é uma variável de integração e v_j é um coeficiente que determina o efeito da mudança do BHP no produtor j , sendo aproximado por:

$$v_j = \sum_{i=1}^I J_{ij} \quad (2.133)$$

Sayarpour *et al.* (2007; 2009) incorporaram soluções analíticas das equações diferenciais do CRM baseados na superposição no tempo, e apresentaram soluções para três diferentes volumes de controle do reservatório:

1. O CRMP é baseado nos poços produtores. Através deste modelo é possível analisar e prever as vazões dos poços produtores separadamente.

2. O CRMT baseia-se em um modelo de reservatório que pode ser representado por um único produtor e um único injetor como um tanque, combinando todas as vazões de produção e injeção, respectivamente.
3. O CRMIP refere-se ao balanço volumétrico na condição do reservatório sobre o volume de poro afetado de qualquer par de injetor / produtor.

Weber (2009) e Weber *et al.* (2009) deduziram soluções analíticas para a equação de continuidade para uma variedade de controles. Apresentaram ainda, o modelo empírico de fluxo fracionário, explicando o procedimento para ajustar esse modelo usando regressão linear. Construíram o modelo para o valor presente líquido (VPL) da recuperação futura de petróleo e definiu o problema de otimização para maximizar o VPL alocando uma injeção de campo fixa.

Kim (2011) propôs duas soluções analíticas para o CRM. CRMP Linearmente Transformado (*Linearly Transformed CRMP*), cujos parâmetros podem ser estimados por regressão multivariada linear que minimiza a função objetivo, transformando-a numa função convexa; e o ICRM que integra a equação de balanço de massa para o volume de controle no CRMP no caso de recuperação primária e secundária e usa restrições lineares múltiplas (*Constrained Linear Multivariate Regression*, LMR) para melhorar a informação sobre tendências e preferências de permeabilidade e falhas no reservatório.

Moreno (2013) introduziu o CRM a um modelo de reservatório de múltiplas camadas, cujos parâmetros são calculados individualmente para cada camada, levando-se em consideração períodos de abertura e fechamento dos poços.

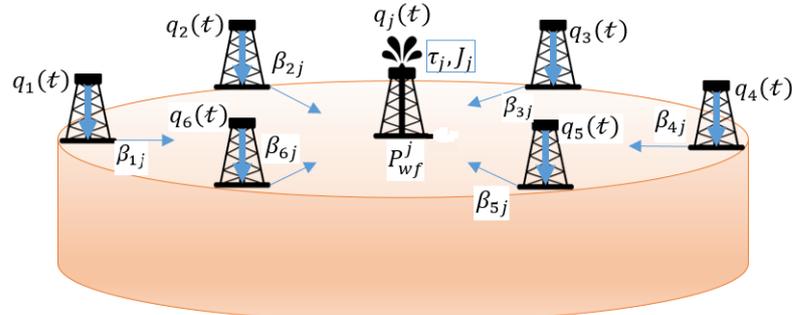
Diversos autores como Holanda (2015), Zhang *et al.* (2015), Lins (2018), Naudomsup e Larry (2019), Davudov *et al.* (2020), continuam realizando estudos utilizando o CRM como objeto de pesquisa, desenvolvendo diferentes soluções para as equações diferenciais do modelo original.

2.6.1 CRMP

Neste trabalho utilizou-se o CRMP, considerado necessário para analisar e prever as vazões dos produtores separadamente. A estratégia divide o reservatório em volumes de controle baseados em cada produtor e todos os injetores que influenciam na sua vazão de produção, como pode ser observado na Fig. 6.

Considera como parâmetros do modelo uma conectividade (β_{ij}) para cada par de injetor (i) e produtor (j) e uma constante do tempo (τ_j), assim como um índice de produtividade (J_j), para cada produtor.

Figura 6 – Representação esquemática do volume de controle para produtor j , CRMP.



Fonte: A autora (2021).

Integrando a Eq. (2.130) ao longo de um período de tempo discreto, Δt , sobre o qual as vazões de injeção de todos os injetores são assumidas constantes, a pressão do fundo do poço do produtor é assumida como variando linearmente, e admitindo uma vazão de produção inicial conhecida para todos os produtores, $q_{j(k-1)}$, nos fornece a seguinte solução analítica para a vazão de produção no período k :

$$q_{jk} = q_{j(k-1)} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \left(\sum_{i=1}^I \beta_{ij} q_{i,k} - \tau_j J_j \frac{\mathcal{P}_{wf}^{j(k)} - \mathcal{P}_{wf}^{j(k-1)}}{\Delta t} \right) \quad (2.134)$$

Analisando a Eq. (2.134) podemos observar que a vazão de produção é o resultado da soma dos efeitos dos três termos a direita, sendo:

1. O primeiro termo é a resposta inicial da vazão de produção associada com a produção primária, ou seja, a vazão em $t = t_0$.
2. O segundo termo está associado com a contribuição de injeção.
3. O terceiro termo representa a mudança de BHP nos produtores.

No cálculo das conectividades, duas estratégias propostas por Weber (2009) são adotadas. Na primeira estratégia não se impõe às restrições de desigualdade da soma das conectividades sendo apenas consideradas as restrições de limite, este

problema é conhecido como desacoplado e pode ser resolvido separadamente para cada produtor $j = 1, \dots, N_P$, gerando um ponto de partida adequado para o problema acoplado. O problema desacoplado pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } \sum_{k=1}^{N_c} (q_{j,k}^{obs} - q_{j,k}^{calc})^2, \quad j = 1, \dots, N_P \\
 & \text{Sujeito a: } 0 \leq \beta_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, N_I \\
 & \quad \tau_{min} \leq \tau_j \leq \tau_{max} \\
 & \quad J_{min} \leq J_j \leq J_{max}
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Onde $q_{j,k}^{obs}$ e $q_{j,k}^{calc}$ correspondem à vazão líquida observada e calculada do produtor j no tempo k , respectivamente.

Caso a solução do problema desacoplado esteja violando alguma restrição da função objetivo, utiliza-se um filtro para que o resultado dado pelo problema desacoplado passe a atender às restrições tornando o ponto de partida do problema acoplado uma solução viável. O filtro é dado por:

$$\begin{aligned}
 & \text{Se } \sum_{j=1}^{N_P} \beta_{ij} > 1, \\
 & \text{então } \overline{\beta}_{ij} \leftarrow \gamma \beta_{ij}, \\
 & \text{onde } \gamma = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N_P} \beta_{ij}}
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

e $\overline{\beta}_{ij}$ é o novo valor da conectividade entre o poço injetor i e o produtor j que será usado no problema acoplado.

A segunda estratégia é conhecida como problema acoplado, onde considera-se todas as restrições e que pode ser encontrado resolvendo o seguinte problema de mínimos quadrados restrito:

$$\text{Minimize } \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_P} (q_{j,k}^{obs} - q_{j,k}^{calc})^2$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^{N_P} \beta_{ij} \leq 1 \text{ para todo } i \quad (2.137)$$

$$0 \leq \beta_{ij} \leq 1 \text{ para todo } i \text{ e } j$$

$$\tau_{min} \leq \tau_j \leq \tau_{max}$$

$$J_{min} \leq J_j \leq J_{max}$$

O número de parâmetros desconhecidos do modelo depende da consideração de BHP constante ou variável, sendo menos incógnitas nos casos em que o BHP é considerado constante. Nos casos em que o BHP é considerado variável, o número de parâmetros, n_{par} , é dado por (LINS, 2018; TUEROS, 2019):

$$n_{par} = N_P(N_I + 2) \quad (2.138)$$

Neste trabalho, para o cálculo das conectividades entre os pares de poços, utilizou-se um conjunto de cinco realizações de dados de produção, sendo uma delas para o problema desacoplado e as demais para o problema acoplado. Os seguintes passos são necessários para o cálculo das conectividades (LINS, 2018; TUEROS, 2019):

1. Informar dados aleatórios de BHP dos poços produtores e vazões de injeção dos poços injetores, para o simulador de reservatórios, para obter resultados das vazões nos produtores. Esses dados são alterados a cada 30 dias durante a simulação e os resultados foram obtidos por dia.
2. Para cada intervalo de tempo, utilizando os dados correspondentes daquele intervalo, calcular os parâmetros através de otimização.
3. Partindo de um ponto inicial, utilizar o problema desacoplado descrito na Eq. (2.135), para minimizar a função objetivo, para cada poço produtor. O resultado do problema desacoplado é utilizado como ponto de partida para a resolução do problema acoplado, Eq. (2.137).
4. Caso a solução do problema desacoplado viole as restrições do problema, deve-se utilizar o filtro apresentado na Eq. (2.136), para ter uma solução viável como ponto de partida para o problema acoplado.

5. Utilizando como ponto de partida os resultados filtrados do problema desacoplado, resolver o problema acoplado para cálculo final dos parâmetros, descrito nas Eqs. (2.137) e (2.138).

Como resultado final do problema, teremos diferentes conjuntos de parâmetros para cada intervalo de tempo da simulação. Caso a simulação tenha apenas um intervalo de tempo, teremos um único resultado para os parâmetros.

3 MÉTODO BASEADO EM ENSEMBLE

Conforme comentado na seção 2.3, uma alternativa viável para o cálculo do gradiente é a utilização de metodologias que empregam o cálculo aproximado do gradiente pois nenhuma equação adjunta é necessária e as equações da física são simplificadas e os parâmetros necessários são inferidos de dados fornecidos do histórico. Neste trabalho, para o cálculo aproximado do gradiente, empregamos o Método Baseado em Ensemble.

Lorentzen *et al.* (2006), adotaram uma variante do *Ensemble Kalman Filter* (EnKF), para maximizar o VPL. Originalmente o EnKF foi desenvolvido para estimativa de variáveis de estado, porém no trabalho desenvolvido por Lorentzen *et al.* (2006), foi usado como uma rotina de otimização.

Nwaozo (2006), em continuidade ao trabalho apresentado por Lorentzen *et al.* (2006), também adotou o EnKF como alternativa para maximizar o VPL, tendo como variáveis de controle o BHP dos poços produtores. Neste estudo, Nwaozo (2006) adotou ainda a técnica de poços inteligentes (*smart wells*).

Chen e Oliver (2009) utilizam o método de otimização de circuito fechado (*closed-loop*) baseado em ensemble em um estudo de *Benchmark* do SPE aplicado a um reservatório de larga escala, o Brugge Field. Devido à complexidade deste caso, várias técnicas avançadas são utilizadas a fim de melhorar a solução da otimização em *closed-loop* baseada em ensemble. A normalização da saturação é usada para contabilizar a presença de regiões de rochas diferentes. A localização é usada na assimilação de dados de produção e sísmicos para aumentar o tamanho efetivo do ensemble e para aliviar o efeito de correlações espúrias resultantes de ensembles pequenos. As curvas de permeabilidade relativa e o contato inicial entre óleo e água são estimados juntamente com as propriedades da malha. Um fator de aumento da covariância é usado para manter a variabilidade desejada no ensemble.

Chen *et al.* (2009) propuseram um método de otimização *closed-loop* que combinou o *Ensemble Optimization Method* (EnOpt) com o *Ensemble Kalman Filter* (EnKF). O método proposto é bastante robusto, baseado apenas em dados de produção e pode ser usado com qualquer simulador de reservatório. O método de otimização de circuito fechado (*closed-loop*) baseado em ensemble é ilustrado com um exemplo de problema de injeção de água sujeito a incertezas. Os resultados são comparados com outros cenários de operação de reservatório possíveis, como

poços sem controles, controle reativo e otimização com geologia conhecida. A comparação mostra que a otimização *closed-loop* baseada em ensemble é capaz de combinar historicamente as principais características geológicas e aumentar o VPL para um nível comparável com o caso hipotético de otimização com base na geologia conhecida.

Su e Oliver (2010) empregaram o método baseado em ensemble em dois exemplos com válvulas de controle influxo (*Inflow Control Valve*, ICV). O primeiro exemplo, era um modelo com 200.000 células e dois poços horizontais, onde cem camadas foram usadas para capturar a heterogeneidade geológica do reservatório. Os dois poços foram perfurados paralelamente ao limite da água da borda. No segundo exemplo, o método baseado em ensemble também foi aplicado com sucesso a um caso 3D que consiste em 10 poços multilaterais com ICVs instalados em cada junção lateral. Em ambos os casos, o objetivo da otimização era minimizar a produção acumulada de água e o algoritmo de otimização apresentou-se bem-sucedido na redução da produção de água.

Chen e Oliver (2012) propuseram um método de localização que decompõe a função objetivo, por exemplo, o VPL do campo, em várias sub funções objetivas independentes, neste caso o VPL de cada poço. A covariância cruzada de VPL de campo para variáveis de controle pode, portanto, ser decomposta na soma das covariâncias cruzadas dos VPLs de poço para variáveis de controle. O método de localização proposto reduz o efeito de correlações espúrias e melhora o desempenho da função objetivo.

Dehdari e Oliver (2012) realizaram um comparativo entre os algoritmos de otimização para o gerenciamento ótimo de reservatórios, para isto, utilizaram a programação quadrática sequencial (SQP) e o método SA (*Steepest Ascent Method*). Para o cálculo do vetor gradiente aproximado, empregaram o método baseado em ensemble usando a técnica de localização, levando em consideração também o corte de água. Os melhores resultados foram obtidos através do SQP.

Alim (2013) se concentrou no uso do método baseado em Ensemble para melhorar o VPL como a função objetivo de um problema de injeção de água de um reservatório com uma falha selante em forma de L sob restrições. Os controles de otimização são vazões de injeção para a otimização como restrição de entrada e abertura de válvulas para a otimização como restrição de saída. As restrições são vazões de injeção de campo para a otimização restrita de entrada e vazão de

produção de campo para a otimização restrita de saída. Quatro métodos de otimização foram testados no MATLAB, SQP, Pontos Interiores (*Interior Point – IP*), Conjunto Ativo (*Active Set*) e Região de Confiança (*Trust region*), dos quais o método SQP obteve o melhor desempenho. A técnica de regularização (suavização) foi utilizada para ajudar a melhorar a função objetivo neste problema.

Do e Reynolds (2013) mostram que os algoritmos simplex, simplex pré-condicionado e EnOpt podem ser derivados diretamente de um algoritmo do tipo SPSA modificado (*Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation*). Também mostram que a expectativa de todos esses gradientes estocásticos pré-condicionados são uma aproximação de primeira ordem da matriz de covariância de pré-condicionamento vezes o gradiente verdadeiro, ou uma matriz de covariância ao quadrado vezes o gradiente verdadeiro.

Fonseca *et al.* (2015b) investigaram o escopo para melhorar a eficiência computacional do EnOpt por meio do uso da adaptação da matriz de covariância e referenciou-se como CMA-EnOpt. O método resultante é aplicado à otimização do problema de injeção de água de um pequeno modelo de teste multicamadas e uma versão modificada do modelo de *benchmark* do Brugge. Os controles usados são configurações de válvula de controle de influxo em intervalos de tempo predefinidos para injetores e produtores. Compararam o EnOpt e CMA-EnOpt a partir de matrizes de covariância idênticas. A possibilidade de adaptar a matriz de covariância e, portanto, o tamanho da perturbação, durante a otimização permite o uso de perturbações relativamente grandes inicialmente, para exploração rápida do espaço de controle, e pequenas perturbações posteriormente, para gradientes mais precisos próximos do ótimo. Os resultados demonstram que um dos principais benefícios do CMA-EnOpt é sua robustez com relação à escolha inicial da matriz de covariância. Uma má escolha da matriz inicial pode ser prejudicial para o EnOpt, enquanto o desempenho do CMA-EnOpt é quase independente da escolha inicial e produz valores de função objetiva mais altos sem nenhum custo computacional adicional.

Tueros *et al.* (2015) implementaram o método baseado em ensemble para otimização restrita do problema de injeção de água, onde a função objetivo é maximizar o VPL usando o algoritmo SQP, sujeito a restrições na produção total e nas vazões de injeção. Neste trabalho, investigaram o ajuste de parâmetros usados em Métodos Baseados em Ensembles para o cálculo de gradientes aproximados. Os parâmetros estudados foram o tamanho do ensemble, funções de correlações

esféricas e gaussianas, e tamanho das perturbações de controle. Verificaram que o uso da função de correlação gaussiana funciona melhor para ensembles maiores, enquanto a função de correlação esférica é mais eficaz para ensembles menores.

Tueros *et al.* (2016), apresentaram uma implementação do método baseado em ensemble para um problema de otimização de injeção de água, onde o VPL é maximizado utilizando o algoritmo SQP, sujeito as restrições de válvulas nos poços, a nível de poço e de campo. A aproximação do vetor gradiente é obtido através da soma das colunas da matriz de sensibilidade e o refinamento da matriz de sensibilidade é obtido através do estudo da dependência do VPL do poço com as variáveis de controle das válvulas.

Diversos estudos ainda foram realizados acerca do gradiente aproximado por ensemble como Chang *et al.* (2019), Tueros *et al.* (2018a, 2018b, 2020), Tueros (2019). A seguir é apresentado o cálculo do vetor gradiente adotado para a realização deste trabalho.

3.1 CÁLCULO DO VETOR GRADIENTE PARA O PROBLEMA DE INJEÇÃO DE ÁGUA

Nesta seção, apresentamos a metodologia para calcular o vetor gradiente aproximado utilizando a matriz de sensibilidade. Empregou-se o tradicional Método Baseado em Ensemble (*Ensemble Optimization Method – EnOpt*) de Chen e Oliver (2012) e o Gradiente Simplex (*Simplex Gradient – SG*) proposto por Do e Reynolds (2013). Ambas as ideias foram adaptadas e implementadas utilizando dados gerados pelo simulador de reservatórios IMEX (CMG, 2017).

No processo de otimização, usualmente é necessário otimizar um grande número de variáveis de controle, de modo que a correlação de qualquer uma delas com o VPL do campo geralmente é muito pequena. Uma estimativa da matriz de sensibilidade de um pequeno número de ensembles tende a ser tomada por correlações espúrias (CHEN e OLIVER, 2009, 2012; CHEN *et al.*, 2009; TUEROS, 2019).

Chen e Oliver (2012) propuseram decompor a função objetivo, neste caso o VPL do campo, em muitas funções subobjetivas independentes, neste caso o VPL de cada poço. É típico que a sensibilidade do VPL de um dado poço com as

variáveis de controle do mesmo poço é muito mais forte que a sensibilidade do VPL do campo com as demais variáveis de controle.

O VPL do campo para as variáveis de controle pode, portanto, ser decomposto como a soma dos VPLs de cada poço:

$$f(x) = \sum_{w=1}^{N_w} f_w(x) \quad (3.1)$$

No reservatório, o controle atual dos poços no ciclo de controle k depende do controle anterior. Por esse motivo, é necessário gerar controles correlacionados. Neste trabalho, a correlação é gerada individualmente para cada poço produtor e injetor. Para gerar as realizações de controle baseadas em ensemble, necessárias para o cálculo do vetor gradiente, os seguintes passos foram adotados:

1. Podemos usar a matriz de covariância gaussiana Eq. (3.2) (CHEN e OLIVER, 2012; DEHDARI e OLIVERA, 2012; TUEROS *et al.*, 2015; SU e OLIVER, 2010) ou a matriz de covariância esférica Eq. (3.3) (DO e REYNOLDS, 2013; FOROUZANFAR *et al.*, 2016; OLIVEIRA, 2014; TUEROS *et al.*, 2015):

$$C_m = \exp\left(\frac{-3(k_m - k_n)^2}{s^2}\right) \quad (3.2)$$

$$C_m = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{|k_m - k_n|}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{|k_m - k_n|}{s}\right)^3 & , \text{ se } 0 \leq |k_m - k_n| \leq s \\ 0 & , \text{ se } |k_m - k_n| > s \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $k_m - k_n$ é a diferença entre os ciclos de controle m e n ; e s é o tamanho da correlação temporal com relação ao número de ciclos de controle.

2. Calcular a decomposição de Cholesky da função de covariância utilizada:

$$LL^T = C_m \quad (3.4)$$

onde L e L^T são as matrizes triangular inferior e superior, respectivamente. Neste trabalho, usamos a triangular inferior.

3. Em seguida, informar valores iniciais para as variáveis de controle, $x_0 \in \mathbb{R}^{N_x}$, onde N_x corresponde ao número de variáveis de controle. O ponto inicial é utilizado para a primeira iteração, nas iterações seguintes utilizamos os pontos ótimos de iterações prévias, obtidos no processo da otimização.
4. Adota-se um desvio padrão para produzir perturbações sobre as variáveis de controle, α . A magnitude da perturbação precisa ser equilibrada. Se for muito pequena, haverá erros de truncamento e oscilações comprometendo a qualidade do gradiente. Se for muito grande, então a direção de busca da otimização pode perder a precisão ou não ser a ideal (SU e OLIVER, 2010).
5. Criar um vetor de variáveis aleatórias independentes com média zero e variância unitária, Z .
6. A realização das variáveis de controle, $\hat{x}_r \in \mathbb{R}^{N_x}$, é dado por:

$$\hat{x}_r = x_0 + \alpha LZ \quad (3.5)$$

Após gerar as realizações dos controles, calculamos o vetor gradiente aproximado. Neste trabalho, conforme comentado, empregou-se o tradicional EnOpt e o SG, adotando-se os seguintes passos para obtenção do vetor gradiente:

1. Gerar a matriz, $\hat{X} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_r}$, que representa o conjunto de realizações de controles viáveis e é expressa como:

$$\hat{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_r, \dots, \hat{x}_{N_r}] \quad (3.6)$$

onde N_r representa o número de realizações do controle.

2. Calcular a matriz de desvios, $\Delta X \in \mathbb{R}^{N_x \times N_r}$:

$$\Delta X = \hat{X} - \bar{X} \quad (3.7)$$

onde com EnOpt, \bar{X} corresponde à matriz com todas as colunas contendo o vetor médio de todas as realizações, estratégia proposta por Chen e Oliver, 2012. Com SG, \bar{X} é a matriz com todas as colunas contendo a solução ótima da iteração atual, proposto por Do e Reynolds, 2013.

3. Calcular a matriz pseudo-inversa.

3.1. Com EnOpt:

3.1.1. Primeiro é necessário decompor a matriz, \mathbb{A} , usando o Método dos Valores Singulares (*Singular Value Decomposition*, SVD) (MANDEL, 1982):

$$[\mathbb{U}]_{r,r} [\theta]_{r,p} [\mathbb{V}]_{p,p}^T = [\mathbb{A}]_{r,p} \quad \text{com} \quad \mathbb{A} = \sqrt{\frac{1}{N_r-1}} \Delta X \quad (3.8)$$

3.1.2. Calcular o valor singular:

$$(\theta)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \sigma & \text{se } i = j \end{cases} \Rightarrow \sigma \text{ é um valor singular de } \mathbb{A} \quad (3.9)$$

3.1.3. Criar a matriz de covariância entre os membros do ensemble, \mathcal{C}_{xx} , que pode ser obtida por:

$$\mathcal{C}_{xx} = \mathbb{A}\mathbb{A}^T \quad (3.10)$$

3.1.4. Obter a matriz pseudo-inversa, $\mathcal{C}_{xx}^{-1} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$, dada por:

$$\mathcal{C}_{xx}^{-1} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{u}_i \mathbb{u}_i^T \quad (3.11)$$

onde $\mathbb{u}_i = i$ – éximo vetor da matriz \mathbb{U} obtida se usar SVD.

3.2. Com SG:

3.2.1. Definimos $\mathbb{A} = \Delta X$.

3.2.2. Em seguida, calculamos o valor singular pela Eq. (3.9).

3.2.3. Na Eq. (3.11), substituímos σ^2 por σ , para obter a matriz pseudo-inversa, $\mathcal{C}_{xx}^{-1} \in \mathbb{R}^{N_r \times N_x}$.

4. Executar cada realização viável de controle, Eq. (3.6), no simulador de reservatórios para calcular o VPL da vazão líquida e injeção de água, por ciclos de controle. As respostas são armazenadas numa matriz $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{N_r \times (N_c(N_P \times N_I))}$. As linhas da matriz são as realizações dos controles, as colunas são o VPL de cada ciclo de controle para a vazão líquida e injeção de água. Isto é, primeiro a vazão líquida para todos os produtores e, em seguida, a injeção de água para todos os injetores. Logo, a matriz \mathcal{F} pode ser expressa como:

$$\mathcal{F} = [\mathcal{F}_w^{liq,k} \quad \mathcal{F}_w^{wi,k}] \quad (3.12)$$

onde $\mathcal{F}_w^{liq,k} \in \mathbb{R}^{N_r \times (N_c \times N_P)}$, representa a matriz do VPL da vazão líquida para todos os ciclos de controle dos produtores em todas as realizações; e $\mathcal{F}_w^{wi,k} \in \mathbb{R}^{N_r \times (N_c \times N_I)}$, é matriz do VPL da injeção de água para todos os ciclos de controle dos poços injetores em todas as realizações.

5. Calcular a matriz de desvios do VPL para cada fase.

$$\Delta \mathcal{F}_{w,k}^{liq} = \mathcal{F}_{w,k}^{liq} - \overline{\mathcal{F}_{w,k}^{liq}}$$

e (3.13)

$$\Delta \mathcal{F}_{w,k}^{wi,k} = \mathcal{F}_{w,k}^{wi,k} - \overline{\mathcal{F}_{w,k}^{wi,k}}$$

onde $\Delta \mathcal{F}_{w,k}^{liq} \in \mathbb{R}^{N_r \times (N_c \times N_P)}$, é a matriz de desvios do VPL da produção líquida; $\Delta \mathcal{F}_{w,k}^{wi,k} \in \mathbb{R}^{N_r \times (N_c \times N_I)}$, é a matriz de desvios do VPL da injeção de água.

Com EnOpt, $\overline{\mathcal{F}}_{w,k}^{liq}$ representa a matriz com todas as colunas contendo a média do VPL da vazão líquida por ciclos de controle dos produtores de todas as realizações e, $\overline{\mathcal{F}}_{w,k}^{wi}$ é a matriz com todas as colunas contendo a média do VPL da fase água por ciclos de controle dos injetores de todas as realizações.

Com SG, $\overline{\mathcal{F}}_{w,k}^{liq}$ e $\overline{\mathcal{F}}_{w,k}^{wi}$ são, respectivamente, os VPLs do atual poço de produção da vazão líquida e injeção de água na iteração atual.

6. Calcular a matriz de covariância cruzada entre o VPL de cada vazão líquida e injeção de água, com respeito a todos os controles.

- 6.1. Com EnOpt:

$$C_{x,k}^{liq} = \frac{1}{N_r-1} \Delta X(\Delta \mathcal{F}_{w,k}^{liq})$$

e (3.14)

$$C_{x,k}^{wi} = \frac{1}{N_r-1} \Delta X(\Delta \mathcal{F}_{w,k}^{wi})$$

onde $C_{x,k}^{liq} \in \mathbb{R}^{N_x \times (N_c \times N_P)}$ = matriz de covariância cruzada da vazão líquida em todos os ciclos de controle dos poços produtores com respeito as variáveis de controle; $C_{x,k}^{wi} \in \mathbb{R}^{N_x \times (N_c \times N_I)}$ = matriz de covariância cruzada da injeção de água em todos os ciclos de controle dos poços injetores com respeito as variáveis de controle.

- 6.2. Com SG:

$$C_{x,k}^{liq} = \Delta \mathcal{F}_{w,k}^{liq}$$

e (3.15)

$$C_{x,k}^{wi} = \Delta \mathcal{F}_{w,k}^{wi}$$

7. Calcular a matriz de sensibilidade por ciclos de controle para todos os poços com relação a todas as variáveis de controle.

$$\mathcal{S}_{x,k}^{liq} = \mathcal{C}_{xx}^{-1} \mathcal{C}_{x,k}^{liq} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{x_1,1}^{liq,P_1} & \dots & \mathcal{S}_{x_1,N_c}^{liq,P_1} & \mathcal{S}_{x_1,1}^{liq,P_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_1,N_c}^{liq,P_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_1,N_c}^{liq,N_P} \\ \mathcal{S}_{x_2,1}^{liq,P_1} & \dots & \mathcal{S}_{x_2,N_c}^{liq,P_1} & \mathcal{S}_{x_2,1}^{liq,P_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_2,N_c}^{liq,P_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_2,N_c}^{liq,N_P} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{S}_{x_n,1}^{liq,P_1} & \dots & \mathcal{S}_{x_n,N_c}^{liq,P_1} & \mathcal{S}_{x_n,1}^{liq,P_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_n,N_c}^{liq,P_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_n,N_c}^{liq,N_P} \end{bmatrix}$$

(3.16)

e

$$\mathcal{S}_{x,k}^{wi} = \mathcal{C}_{xx}^{-1} \mathcal{C}_{x,k}^{wi} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{x_1,1}^{wi,I_1} & \dots & \mathcal{S}_{x_1,N_c}^{wi,I_1} & \mathcal{S}_{x_1,1}^{wi,I_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_1,N_c}^{wi,I_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_1,N_c}^{wi,N_I} \\ \mathcal{S}_{x_2,1}^{wi,I_1} & \dots & \mathcal{S}_{x_2,N_c}^{wi,I_1} & \mathcal{S}_{x_2,1}^{wi,I_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_2,N_c}^{wi,I_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_2,N_c}^{wi,N_I} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathcal{S}_{x_n,1}^{wi,I_1} & \dots & \mathcal{S}_{x_n,N_c}^{wi,I_1} & \mathcal{S}_{x_n,1}^{wi,I_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_n,N_c}^{wi,I_2} & \dots & \mathcal{S}_{x_n,N_c}^{wi,N_I} \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{S}_{x,k}^{liq} \in \mathbb{R}^{N_x \times (N_c \times N_P)}$ = matriz de sensibilidade do VPL da produção líquida dos poços produtores, em relação a todas as variáveis de controle; $\mathcal{S}_{x,k}^{wi} \in \mathbb{R}^{N_x \times (N_c \times N_I)}$ = matriz de sensibilidade do VPL da injeção de água dos poços injetores, em relação às variáveis de controle. $x_n = n$ –ésima variável de controle; N_P e N_I representam os n –ésimos poços produtor e injetor, respectivamente.

8. Obter o vetor com a sensibilidade do VPL, $\mathcal{S}_x^{liq,P_j} \in \mathbb{R}^{N_x}$, do j^{th} poço produtor com relação a todos os controles, e o vetor com a sensibilidade do VPL do i^{th} poço injetor com relação a todos os controles, $\mathcal{S}_x^{wi,I_i} \in \mathbb{R}^{N_x}$. Para isso, soma-se as N_c colunas (produção líquida e água injetada) da matriz de sensibilidade, Eq. (3.16), com relação a todos os controles.

$$\mathcal{S}_x^{liq,P_j} = \sum_{k=1}^{N_c} \mathcal{S}_{x,k}^{liq,P_j}, \text{ com } j = 1, \dots, N_P$$

e

$$\mathcal{S}_x^{wi,I_i} = \sum_{k=1}^{N_c} \mathcal{S}_{x,k}^{wi,I_i}, \text{ com } i = 1, \dots, N_I$$

(3.17)

9. Por fim, o vetor gradiente aproximado por EnOpt e SG, $ga \in \mathbb{R}^{N_x}$, é obtido por:

$$ga = \sum_{j=1}^{N_P} \mathcal{S}_x^{liq, P_j} + \sum_{i=1}^{N_I} \mathcal{S}_x^{wi, I_i} \quad (3.18)$$

3.2 VANTAGENS E LIMITAÇÕES DO VETOR GRADIENTE APROXIMADO POR ENSEMBLES

As principais vantagens em utilizar o vetor gradiente aproximado por ensembles no problema de otimização é que a abordagem não necessita de nenhuma implementação de equações adjuntas, sendo de fácil implementação e possível de utilizar em qualquer simulador comercial tratado como uma “caixa preta”. Além disso, há uma redução do número de simulações durante o processo de otimização. (ALIM, 2013; CHEN e OLIVER, 2009; CHEN *et al.*, 2009; LORENTZEN *et al.*, 2006; NWAZO, 2006; TUEROS, 2019; TUEROS *et al.*, 2016, 2018a, 2018b, 2020; TUEROS e HOROWITZ, 2020).

Podemos destacar como uma desvantagem deste método, a presença de correlações espúrias quando o tamanho do ensemble é reduzido. Da mesma maneira, a variância cruzada entre as variáveis de controle e a função objetivo também é dominada por essas correlações espúrias, resultando em controles insatisfatórios. Em virtude disso, autores como Chen e Oliver (2012) propõem técnicas para reduzir os efeitos das correlações espúrias como o método de localização que atualiza os controles para otimizar a produção do campo enquanto reconcilia as informações de cada poço individual.

Outra desvantagem envolve o número de realizações, que é muito importante quando precisamos calcular o gradiente usando ensembles. Ao aumentar o número de realizações, melhoramos o VPL final e alcançamos uma convergência mais rápida, contudo, aumentar o número de realizações significa aumentar o número de vezes que o simulador deve ser chamado, aumentando assim o custo computacional (ALIM, 2013; DEHDARI e OLIVER, 2012).

Alim (2013) destaca como uma desvantagem do método, ter muitas variáveis de controle pois pode levar a valores mais baixos da função objetivo devido a imprecisões causadas pelos gradientes aproximados usados. A implementação da técnica de regularização (suavização) reduz os efeitos das correlações espúrias e ajuda a melhorar os valores da função objetivo, contudo, ter um processo de

regularização muito forte também é indesejável porque tornará a estratégia de solução muito suave e perderá alguns detalhes.

Ainda como desvantagem, Tueros (2019) ressalta que o método baseado em ensemble não leva em consideração as informações físicas do reservatório, por exemplo, poços separados por falhas selantes, canais de baixa e alta permeabilidade. Então, conseqüentemente, a matriz de sensibilidade não leva em consideração informações sobre fechamentos de poços produtores com alto corte de água, por exemplo, e manter a sensibilidade de poços fechados degrada a qualidade do vetor gradiente para novas iterações.

4 REFINAMENTO DA MATRIZ DE SENSIBILIDADE

Neste capítulo serão apresentadas as técnicas utilizadas na realização deste trabalho: Técnica do Truncamento; Técnica do Amortecimento; Técnicas de Localização que incluem a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos outros poços produtores e a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos poços injetores; e ainda as Técnicas de Regularização, sendo elas, a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores e a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos outros poços injetores.

Neste trabalho, refinamos a matriz de sensibilidade utilizando as quatro técnicas propostas para reduzir os efeitos das correlações espúrias na matriz de sensibilidade com o objetivo de melhorar o vetor gradiente, utilizando um pequeno número de ensembles. As técnicas de truncamento e amortecimento são aplicadas na Eq. (3.16), e as técnicas de localização e regularização são aplicadas na Eq. (3.17).

4.1 TÉCNICA DO TRUNCAMENTO

O VPL é uma combinação linear das vazões (produção e injeção), em todas os ciclos de controle. Assim, o gradiente do VPL em relação aos controles é uma combinação linear do gradiente de cada vazão de fluxo em cada ciclo de controle. As derivadas envolvidas em qualquer um desses gradientes representam a derivada de uma vazão de fluxo em um ciclo de controle particular k com respeito a todas as variáveis de controle. No entanto, a derivada de uma vazão de fluxo no ciclo de controle k em relação a uma variável de controle i em um ciclo de controle posterior, teoricamente e fisicamente, deve ser zero (LIU e REYNOLDS, 2020).

Isso quer dizer que o VPL do poço no atual ciclo de controle k , depende da variável de controle atual i e das variáveis de controle anteriores, não sendo dependente das variáveis de controle seguintes.

Aplicou-se a técnica do truncamento proposta por Liu e Reynolds (2020) na Eq. (3.16), para refinar a matriz de sensibilidade da vazão líquida, $\overline{\mathcal{S}}_{x_i, k}^{liq, P_j}$, e a matriz

de sensibilidade da vazão de injeção, $\widehat{\mathcal{S}}_{x_i,k}^{wl,I_i}$, com respeito a todas as variáveis de controle, expressas por:

$$\widehat{\mathcal{S}}_{x_i,k}^{liq,P_j} = \begin{cases} \mathcal{S}_{x_i,k}^{liq,P_j}, & \text{se } k \leq i \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad \text{com } k = 1, \dots, (i-1) \quad (4.1)$$

e

$$\widehat{\mathcal{S}}_{x_i,k}^{wi,I_i} = \begin{cases} \mathcal{S}_{x_i,k}^{wi,I_i}, & \text{se } k \leq i \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad \text{com } k = 1, \dots, (i-1) \quad (4.2)$$

As Tabelas 2 e 3 apresentam um exemplo ilustrativo da matriz de sensibilidade da vazão líquida sem o truncamento e a matriz de sensibilidade desta mesma vazão líquida com o truncamento, respectivamente. Para composição destas tabelas, adotou-se o modelo Brush Canyon Outcrop (BCO), que será apresentado em detalhe no Capítulo 5, e realizamos algumas modificações para simplificação do problema. Reduzimos a quantidade de poços produtores e injetores para dois poços cada, adotamos apenas 4 ciclos de controle, totalizando 16 variáveis de controle (para o cálculo das variáveis de controle adotou-se a Eq. (5.1)).

Observando a Tabela 2, verifica-se que a matriz de sensibilidade é composta por correlações espúrias. Tomemos como exemplo o poço produtor P1 no ciclo de controle 1 (P1 – 1C) com respeito a seus próprios controles. Neste ciclo de controle, com respeito a variável 1, o valor se mantém, porém, com respeito as demais variáveis de controle, este valor deveria ser 0 (zero). Após introduzirmos a técnica do truncamento, eliminamos estas correlações espúrias, conforme pode ser observado na Tabela 3, onde no ciclo 1 do poço P1 (P1 – 1C) com respeito a seus próprios controles, manteve-se o valor com respeito a variável 1, e com respeito as demais variáveis, o valor foi truncado à zero, conforme descrito na Eq. (4.1).

Tabela 2 – Matriz de sensibilidade da vazão líquida sem truncamento.

MATRIZ DE SENSIBILIDADE DA VAZÃO LÍQUIDA SEM TRUNCAMENTO									
VPL	Variável	P1-1c	P1-2c	P1-3c	P1-4c	P2-1c	P2-2c	P2-3c	P2-4c
Produtor 1	1	-0.0220	0.0028	-0.0005	-0.0004	-0.0009	-0.0003	-0.0021	-0.0013
	2	-0.0012	0.0006	0.0019	0.0007	0.0106	0.0028	-0.0013	0.0001
	3	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
	4	-0.0019	0.0001	-0.0127	-0.0060	-0.0001	-0.0008	-0.0004	0.0002
Produtor 2	1	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0012	-0.0006	-0.0019	-0.0007	-0.0106	-0.0029	0.0012	-0.0001
	3	-0.0019	0.0018	0.0037	0.0010	0.0039	-0.0083	-0.0077	-0.0012
	4	-0.0049	-0.0030	-0.0028	-0.0007	-0.0018	-0.0043	-0.0101	-0.0043
Injetor 1	1	0.0075	0.0087	0.0023	0.0006	0.0029	0.0054	0.0014	0.0002
	2	-0.0150	0.0027	0.0034	0.0005	0.0011	-0.0011	0.0012	0.0008
	3	0.0014	-0.0002	-0.0050	-0.0008	-0.0018	-0.0018	0.0002	0.0003
	4	-0.0083	-0.0014	-0.0007	0.0005	0.0016	-0.0021	-0.0029	-0.0008
Injetor 2	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0057	0.0054	-0.0011	-0.0003	-0.0011	0.0028	0.0014	0.0003
	3	-0.0006	-0.0027	-0.0017	-0.0006	0.0018	0.0034	0.0004	-0.0006
	4	0.0078	0.0077	0.0086	0.0020	-0.0033	-0.0062	-0.0013	0.0007

Fonte: A autora (2021).

Tabela 3 – Matriz de sensibilidade da vazão líquida com truncamento.

MATRIZ DE SENSIBILIDADE DA VAZÃO LÍQUIDA COM TRUNCAMENTO									
VPL	Variável	P1-1c	P1-2c	P1-3c	P1-4c	P2-1c	P2-2c	P2-3c	P2-4c
Produtor 1	1	-0.0220	0.0028	-0.0005	-0.0004	-0.0009	-0.0003	-0.0021	-0.0013
	2	0	0.0006	0.0019	0.0007	0	0.0028	-0.0013	0.0001
	3	0	0	-0.0000	0.0000	0	0	0.0000	-0.0000
	4	0	0	0	-0.0060	0	0	0	0.0002
Produtor 2	1	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0	-0.0006	-0.0019	-0.0007	0	-0.0029	0.0012	-0.0001
	3	0	0	0.0037	0.0010	0	0	-0.0077	-0.0012
	4	0	0	0	-0.0007	0	0	0	-0.0043
Injetor 1	1	0.0075	0.0088	0.0023	0.0006	0.0029	0.0054	0.0014	0.0002
	2	0	0.0027	0.0034	0.0005	0	-0.0011	0.0012	0.0008
	3	0	0	-0.0050	-0.0008	0	0	0.0002	0.0003
	4	0	0	0	0.0005	0	0	0	-0.0008
Injetor 2	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0	0.0054	-0.0011	-0.0003	0	0.0028	0.0014	0.0003
	3	0	0	-0.0017	-0.0006	0	0	0.0004	-0.0006
	4	0	0	0	0.0020	0	0	0	0.0007

Fonte: A autora (2021).

4.2 TÉCNICA DO AMORTECIMENTO

A técnica do amortecimento, é motivada por observações que a derivada da vazão de um poço específico na etapa de controle k em relação ao controle na etapa de controle i (posterior a etapa de controle k) geralmente é menor. Como a magnitude dos gradientes estocásticos geralmente não segue este comportamento, é desejável aplicar um fator de amortecimento para melhorar a qualidade do gradiente (LIU e REYNOLDS, 2020).

Desta forma, definimos por exemplo, o vetor $\mathcal{S}_{x_i, \overline{1:k}}^{liq, P_j}$, como a sensibilidade da vazão líquida do poço produtor j com respeito a i -ésima variável de controle para os primeiros k -ésimos ciclos de controle:

$$\mathcal{S}_{x_i, \overline{1:k}}^{liq, P_j} = \left[\mathcal{S}_{x_i, 1}^{liq, P_j}, \mathcal{S}_{x_i, 2}^{liq, P_j}, \dots, \mathcal{S}_{x_i, k-2}^{liq, P_j}, \mathcal{S}_{x_i, k-1}^{liq, P_j}, \mathcal{S}_{x_i, k}^{liq, P_j} \right]^T \text{ com } k \leq i \quad (4.3)$$

Onde $\mathcal{S}_{x_i, k}^{liq, P_j}$ é a sensibilidade do VPL da vazão líquida do poço produtor j em relação à variável de controle x_i no k -ésimo ciclo de controle.

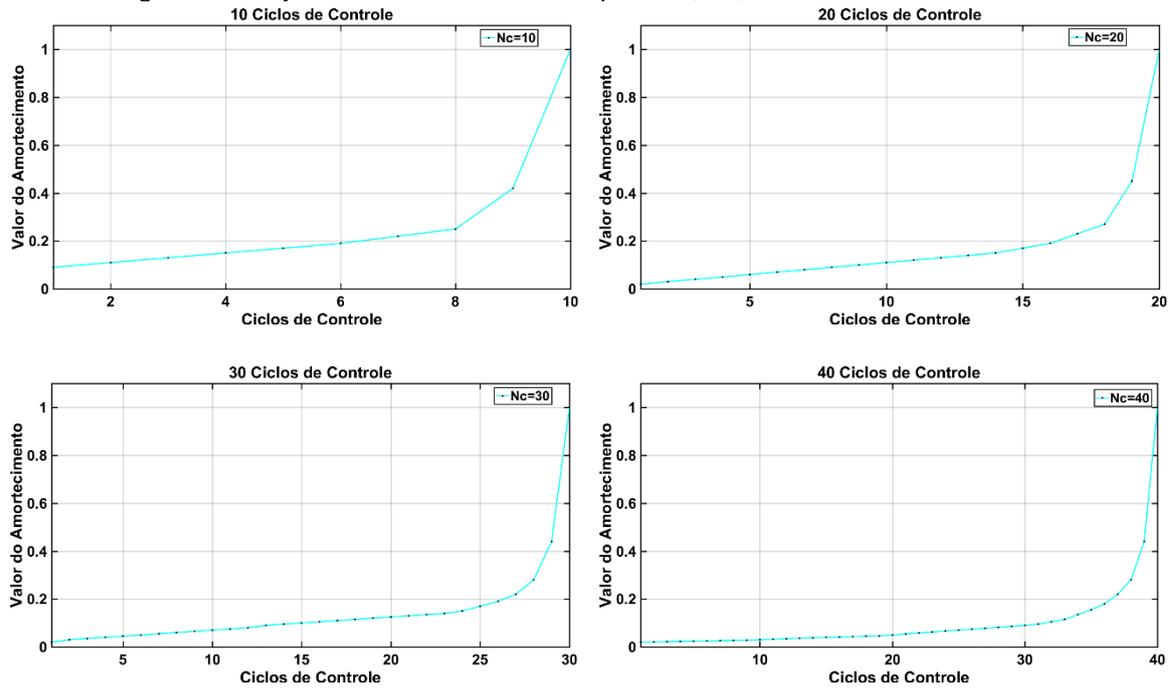
Segundo Liu e Reynolds (2020), a magnitude da sensibilidade na Eq. (4.3) tem o seguinte comportamento:

$$\left| \mathcal{S}_{x_i, k}^{liq, P_j} \right| > \left| \mathcal{S}_{x_i, k-1}^{liq, P_j} \right| > \left| \mathcal{S}_{x_i, k-2}^{liq, P_j} \right| > \dots > \left| \mathcal{S}_{x_i, 2}^{liq, P_j} \right| > \left| \mathcal{S}_{x_i, 1}^{liq, P_j} \right| \text{ com } k \leq i \quad (4.4)$$

A Eq. (4.4) nos diz que a magnitude das derivadas da vazão média do poço produtor j no ciclo de controle específico k em relação à própria variável de controle atinge o valor máximo neste ciclo de controle específico k e diminui em magnitude conforme os tempos dos ciclos de controle diminuem (LIU e REYNOLDS, 2020). Na Figura 7 mostramos um exemplo ilustrativo da trajetória do amortecimento para 10, 20, 30 e 40 ciclos de controle.

Ao utilizarmos o EnOpt e SG, não ocorre o comportamento descrito na Eq. (4.4). Em virtude disso, aplicamos a técnica do amortecimento proposta por Liu e Reynolds (2020) baseada no Princípio da Superposição proposto por Zimmerman (2018) e previamente descrito na seção 2.5.

Figura 7 – Trajetórias de amortecimento para 10, 20, 30 e 40 ciclos de controle.



Fonte: A autora (2021).

Para calcular o valor do amortecimento, usamos a equação simplificada de Zimmerman (2018):

$$D_{i,k} = \frac{\frac{\partial \bar{q}_i^{liq,P_j}}{\partial \mathcal{P}_{wf,k}}}{\frac{\partial \bar{q}_i^{liq,P_j}}{\partial \mathcal{P}_{wf,i}}} = \frac{\mathcal{P}_u(\Delta t_{k-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_k)}{\mathcal{P}_u(\Delta t_{i-1}) - \mathcal{P}_u(\Delta t_i)} = \frac{\ln\left(\frac{t_f - t_{k-1}}{t_f - t_k}\right)}{\ln\left(\frac{t_f - t_{i-1}}{t_f - t_i}\right)} \text{ com } k = 1 \dots (i - 1) \quad (4.5)$$

Onde $D_{i,k}$ é o valor do amortecimento para a i -ésima variável de controle em relação ao k -ésimo ciclo de controle e, $\partial \bar{q}_i^{liq,P_j}$ representa a derivada da vazão média do poço j no i -ésimo ciclo de controle. $\partial \mathcal{P}_{wf,k}$ e $\partial \mathcal{P}_{wf,i}$ correspondem as derivadas de pressão no k -ésimo e i -ésimo ciclos de controle, respectivamente. $t_f = 0.5(i + i + 1)$.

Quando $k = i$ o valor do amortecimento é igual a 1 (um), e os valores do amortecimento para os primeiros k -ésimos ciclos de controle são dados por:

$$D_{i,\overline{1:k}} = [D_{i,1}, D_{i,2}, \dots, D_{i,k-2}, D_{i,k-1}, 1]^T \quad (4.6)$$

Sendo assim, a maneira correta de inserir os valores de amortecimento na Eq. (4.3) é dada por:

$$\overline{S_{x_i,k}^{liq,P_j}} = \begin{cases} S_{x_i,k}^{liq,P_j} D_{i,k} & ; \text{ se } |S_{x_i,k}^{liq,P_j}| > D_{i,k} |S_{x_i,i}^{liq,P_j}| \\ S_{x_i,k}^{liq,P_j} & ; \text{ em outro caso} \end{cases}, \text{ com } k = 1 \dots (i-1) \quad (4.7)$$

Onde $\overline{S_{x_i,k}^{liq,P_j}}$ representa as sensibilidades do produtor j em relação às i -ésimas variáveis de controle para os primeiros k -ésimos ciclos de controle com valores de amortecimento.

A técnica do amortecimento para os outros poços é semelhante.

4.3 TÉCNICAS DE LOCALIZAÇÃO

As técnicas de localização são aplicadas para refinar a Eq. (3.17) e se baseiam nos coeficientes de competitividade, que correspondem a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito a todos os controles dos produtores, e no modelo de capacitância e resistência para poços produtores (CRMP), previamente descrito na seção (2.6.1), e que se refere a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito a todos os controles dos injetores.

Por simplificação de notação e para futuras discussões técnicas, a matriz de sensibilidade pode ser expressa como:

$$\mathcal{S}_{x,k}^{liq,P_j} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{x_P,k}^{liq,P_j} \\ \mathcal{S}_{x_I,k}^{liq,P_j} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Onde $\mathcal{S}_{x_P,k}^{liq,P_j}$ corresponde a sensibilidade do VPL da produção líquida do j -ésimo poço produtor com respeito aos controles dos outros poços produtores, no k -ésimo ciclo de controle e $\mathcal{S}_{x_I,k}^{liq,P_j}$ representa a sensibilidade do VPL da produção líquida do j -ésimo poço produtor em relação aos controles dos poços injetores, no k -ésimo ciclo de controle. E são definidas como:

$$\mathcal{S}_{x_p,k}^{liq,P_j} = \left[\mathcal{S}_{x_{p_1,k}}^{liq,P_j}, \mathcal{S}_{x_{p_2,k}}^{liq,P_j}, \dots, \mathcal{S}_{x_{p_{j-1},k}}^{liq,P_j}, \mathcal{S}_{x_{p_j,k}}^{liq,P_j}, \mathcal{S}_{x_{p_{j+1},k}}^{liq,P_j}, \dots, \mathcal{S}_{x_{N_p,k}}^{liq,P_j} \right]^T$$

e (4.9)

$$\mathcal{S}_{x_l,k}^{liq,P_j} = \left[\mathcal{S}_{x_{l_1,k}}^{liq,P_j}, \mathcal{S}_{x_{l_2,k}}^{liq,P_j}, \dots, \mathcal{S}_{x_{l_{j-1},k}}^{liq,P_j}, \mathcal{S}_{x_{l_j,k}}^{liq,P_j}, \mathcal{S}_{x_{l_{j+1},k}}^{liq,P_j}, \dots, \mathcal{S}_{x_{N_l,k}}^{liq,P_j} \right]^T$$

As variáveis x_{N_p} e x_{N_l} representam os n -ésimos poços produtor e injetor, respectivamente.

4.3.1 Sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos outros poços produtores $\left(\mathcal{S}_{x_p,k}^{liq,P_j} \right)$

Chen e Oliver (2012) propuseram um método baseado na localização e distância entre os poços. Em seus estudos, verificaram que a produtividade de um poço é fortemente influenciada por seus próprios controles e pelos controles de poços vizinhos.

Verificaram ainda que se um reservatório for razoavelmente bem conectado, então pode-se esperar que a influência da produção de poços distantes sobre o reservatório seja simplesmente a redução da pressão no reservatório. Como a pressão do reservatório influencia a produtividade dos poços, que por sua vez impacta o VPL, e embora o efeito de cada poço distante seja pequeno, o efeito total de todos os poços distantes é maior. Por essas razões, Chen e Oliver (2012) adotaram os efeitos médios para calcular a sensibilidade do VPL de um poço produtor com respeito aos controles de outros produtores.

Para reservatórios altamente heterogêneos ou que possuam falhas conhecidas, a correlação da produção de um poço com a produção de outro poço estará em função da conectividade, e não simplesmente da distância entre os poços. Portanto, não é necessário incluir a sensibilidade do VPL de um poço produtor com respeito aos controles de outros poços produtores que estejam do lado oposto da falha.

Tueros *et al.* (2018a) propuseram uma média ponderada dos coeficientes de competitividade para substituir a sensibilidade de um determinado poço produtor em relação a outros produtores. Porém, após a aplicação das técnicas de truncamento e amortecimento, não é necessário substituir a sensibilidade do VPL de um

determinado poço produtor em relação a outros produtores pela sensibilidade média com coeficientes de competitividade para não introduzir novas correlações espúrias.

Neste trabalho, propôs-se multiplicar os coeficientes de competitividade diretamente pelos valores de sensibilidade. E para o cálculo desses coeficientes, utilizou-se uma técnica de teste de interferência simulada com base nas seguintes etapas (TUEROS *et al.*, 2018a):

1. O reservatório deve ser mantido em equilíbrio, ou seja, sem picos de vazões de produção e injeção.
2. Fechar os poços produtores individualmente, um por um, com tempo de intervalo suficiente entre as operações de fechamento para que o reservatório se torne estável. Registrar as mudanças de BHP nos poços produtores em cada operação de fechamento.
3. Das respostas registradas das mudanças de BHP para o produtor $j = 1, \dots, N_p$.
 - 3.1. Determinar $\Delta P_j^{m\acute{a}x}$, que representa a máxima variação de BHP no produtor j devido ao fechamento de outros produtores.
 - 3.2. Determinar ΔP_j^r , para a mudança do BHP no produtor j devido ao fechamento do produtor r , onde $r = 1, \dots, N_p$ e $r \neq j$.
 - 3.3. Calcular os coeficientes de competitividade $\mathcal{W}_r^j = \frac{|\Delta P_j^r|}{|\Delta P_j^{m\acute{a}x}|}$.
4. O coeficiente de competitividade para o j -ésimo produtor é dado por:

$$\mathcal{W}^j = [\mathcal{W}_{P_1}^{P_j}, \mathcal{W}_{P_2}^{P_j}, \dots, \mathcal{W}_{P_{j-1}}^{P_j}, \mathcal{W}_{P_j}^{P_j}, \mathcal{W}_{P_{j+1}}^{P_j}, \dots, \mathcal{W}_{N_p}^{P_j}]^T \text{ com } j = 1, \dots, N_p \quad (4.10)$$

Onde $\mathcal{W}_{P_j}^{P_j}$ é igual a 1 (um).

Desta forma, a sensibilidade final do VPL dos poços produtores com respeito aos controles de outros produtores, incorporando os coeficientes de competitividade, $\overline{\mathcal{S}}_{x_p,k}^{liq,P_j}$, é expressa como:

$$\overline{\mathcal{S}}_{x_p,k}^{liq,P_j} = \mathcal{S}_{x_p,k}^{liq,P_j} \circ \mathcal{W}^j \quad (4.11)$$

4.3.2 Sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos poços injetores ($\mathcal{S}_{x_I,k}^{liq,P_j}$)

Chen e Oliver (2012) verificaram em seus estudos que em um reservatório, os injetores têm impacto direto na vazão de produção de todos os poços produtores e por isso, não utilizam a técnica da localização baseada na distância com $r = 0$ para calcular a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos poços injetores.

Tueros *et al.* (2018a) propuseram uma maneira de incorporar a conectividade entre os poços produtores e injetores, adotando uma matriz de localização, baseada na medida de “distância”, r . Em seus estudos, basearam esta medida no inverso da conectividade entre o par de poços e para o cálculo dos termos da matriz de localização utilizaram a Função Quártica (*Quartic function* – QUA) proposta por Biniaz Delijani *et al.*, (2014):

$$\rho_{ij} = \begin{cases} (1 - r(ij))^4, & \text{se } r(ij) \leq 1 \\ 0, & \text{se } r(ij) > 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Na Eq. (4.12), a medida de distância proposta é dada por:

$$r(ij) = \frac{\alpha}{100\beta_{ij}} \quad (4.13)$$

Onde β_{ij} representa a conectividade para cada par de poço injetor (i) e produtor (j) e foi apresentado com mais detalhes na seção (2.6.1); α é o valor do parâmetro de localização. Tueros *et al.* (2018a) recomendaram definir este valor para três ($\alpha = 3$). Isso faz com que a função de localização mude rapidamente de 1 (um) a 0 (zero)

quando a conectividade cai abaixo do valor limite de 3%. Em seus estudos, Tueros *et al.* (2018a) verificaram ainda que maiores valores de α tendem a diminuir o VPL ótimo e aumentam sua variabilidade.

A localização para o produtor j no ciclo de controle é dada por:

$$\rho_{ij} = [\rho_{1j}, \rho_{2j}, \dots, \rho_{ij}, \dots, \rho_{n_{ij}}]^T \text{ com } j = 1, \dots, N_p \quad (4.14)$$

Desta maneira, a sensibilidade final do VPL dos poços produtores com respeito aos controles dos poços injetores, incorporando a técnica da localização, $\widetilde{\mathcal{S}}_{x_{l,k}}^{liq,P_j}$, é expressa como:

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{x_{l,k}}^{liq,P_j} = \mathcal{S}_{x_{l,k}}^{liq,P_j} \rho_{ij} \quad (4.15)$$

4.4 TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO

As técnicas de regularização são aplicadas para refinar a Eq. (3.17), que correspondem a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores, e a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos outros poços injetores.

Por simplificação de notação e para futuras discussões técnicas, a matriz de sensibilidade pode ser expressa como:

$$\mathcal{S}_{x,k}^{wi,I_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{S}_{x_p,k}^{wi,I_i} \\ \mathcal{S}_{x_l,k}^{wi,I_i} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Onde $\mathcal{S}_{x_p,k}^{wi,I_i}$ corresponde a sensibilidade do VPL da injeção de água do i -ésimo poço injetor com respeito aos controles dos poços produtores, no k -ésimo ciclo de controle e $\mathcal{S}_{x_l,k}^{wi,I_i}$ representa a sensibilidade do VPL da injeção de água do i -ésimo poço injetor em relação aos controles dos outros poços injetores, no k -ésimo ciclo de controle.

4.4.1 Sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores $\left(\mathcal{S}_{x_p,k}^{w_i,l_i}\right)$

Tueros (2019) e Tueros *et al.*, (2018a; 2018b; 2020) realizaram estudos para verificar se existem problemas de vazão de injeção decorrentes das mudanças dos controles dos poços produtores. Para isso, alteraram a vazão de produção dos poços produtores, observando se a vazão de injeção dos poços injetores seria afetada e, observaram que o VPL dos poços injetores não é afetado pelos controles dos poços produtores. Nesse caso, não há problema de vazão de injeção.

Uma vez que o VPL dos poços injetores não é afetado pelos controles dos poços produtores, a técnica de regularização elimina estes termos da sensibilidade entre os poços injetores e produtores, e é expressa como:

$$\overline{\overline{\mathcal{S}_{x_p,k}^{w_i,l_i}}} = 0 \quad (4.17)$$

Onde $\overline{\overline{\mathcal{S}_{x_p,k}^{w_i,l_i}}}$ representa a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores incorporando a técnica de regularização.

4.4.2 Sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos outros poços injetores $\left(\mathcal{S}_{x_l,k}^{w_i,l_i}\right)$

Para esta análise, Tueros (2019) e Tueros *et al.*, (2018a; 2018b; 2020) realizaram estudos para verificar se um poço injetor i é afetado pelos controles de outros poços injetores alocados no mesmo reservatório. Basearam-se nas restrições do problema, selecionaram um poço injetor i e aumentaram sua vazão em 30% da vazão máxima permitida, enquanto os outros poços injetores continuaram atuando no limite da vazão máxima permitida. Observaram que após o incremento da vazão do poço injetor i , os outros poços continuaram respeitando a vazão máxima permitida. Concluíram então que não existem problemas de vazão de injeção, portanto, o VPL dos poços injetores é altamente dependente dos próprios seus controles (por este motivo, o valor de sensibilidade é mantido), não sendo afetado

pelos controles dos outros poços injetores (ou seja, o valor de sensibilidade com respeito aos outros poços injetores é zero).

Desta forma, a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos outros poços injetores incorporando a técnica de regularização, $S_{x_{I_n,k}}^{w_i,I_i}$, é dada por:

$$S_{x_{I_n,k}}^{w_i,I_i} = \begin{cases} S_{x_{I_n,k}}^{w_i,I_i} , & \text{se } i = n \\ 0 , & \text{se } i \neq n \end{cases} \quad (4.18)$$

Aplicadas as técnicas de truncamento e amortecimento na Eq. (3.16) e, localização e regularização na Eq. (3.17), prosseguimos utilizando as Eqs. (4.1), (4.2), (4.7), (4.11), (4.15), (4.17) e (4.18) no desenvolvimento deste trabalho para obter um gradiente refinado.

Para simplificação, atribuiu-se ao método baseado em ensemble refinado o nome REB, e ao gradiente simplex refinado atribuiu-se o nome RSG. As técnicas de refinamento abordadas neste capítulo, foram incorporadas aos gradientes REB e RSG, resultando em cinco refinamentos distintos (REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD), que serão apresentados com mais detalhes no Capítulo 5.

5 CASOS ESTUDADOS E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados dois modelos de reservatórios utilizados para comparar os refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD, conforme descritos na Tabela 4, propostos para o gerenciamento ótimo de reservatórios de petróleo. O primeiro modelo utilizado, trata-se de um reservatório simples, com sete poços produtores e cinco poços injetores. Já o segundo modelo possui vinte poços produtores e dez poços injetores. Além de uma descrição mais detalhada de cada modelo de reservatório, serão descritos os casos estudados, resultados observados e discussões.

Tabela 4 – Descrição dos refinamentos utilizados.

Refinamento	Descrição
REB	<i>Refined Ensemble Based Method</i> proposto por Tueros <i>et al.</i> (2018b).
REB*	Não utiliza a média de todas as realizações para calcular a matriz de desvios, utiliza apenas as perturbações.
REB+T	<i>Refined Ensemble Based Method</i> proposto por Tueros <i>et al.</i> (2018b) incluindo a técnica do truncamento proposta por Liu e Reynolds (2020).
RSG+T	<i>Simplex Gradient – SG</i> , proposto por Do e Reynolds (2013), incluindo a técnica do truncamento proposto por Liu e Reynolds (2020) e as técnicas de regularização e localização na matriz de sensibilidade do campo proposta por Tueros <i>et al.</i> (2018b).
RSG+TD	<i>Simplex Gradient – SG</i> , proposto por Do e Reynolds (2013), incluindo as técnicas de truncamento e fator de amortecimento proposto por Liu e Reynolds (2020), e ainda a técnica de localização e regularização na matriz de sensibilidade do campo proposta por Tueros <i>et al.</i> , (2018b).

Fonte: A autora (2021).

No processo de otimização para maximizar o VPL dos reservatórios, utilizou-se a Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*) do *Optimization Toolbox* disponível no *MATLAB* (2016). Além do SQP, utilizou-se também o *solver SQP/SNOPT (Sparse Nonlinear OPTimizer)* para problemas de larga escala (GILL *et al.* 2005). As simulações foram executadas usando o simulador de reservatórios *IMEX* do *Computer Modelling Group* (CMG, 2017).

As figuras contendo os resultados obtidos com os refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD, foram elaboradas utilizando o *MATLAB* (2016) e o *IMEX* (CMG, 2017).

Ainda com o *MATLAB* (2016) elaborou-se diagrama de caixas. Pelo padrão de apresentação, o diagrama de caixas é composto por uma linha vermelha indicando a mediana, e as bordas inferior e superior indicam o 25° e 75° percentis, respectivamente. As linhas se estendem até os valores mínimo e máximo do conjunto de valores, e caso haja *outliers*, ou seja, valores que estão distantes dos outros valores, os mesmos são plotados individualmente usando o símbolo '+

Para este trabalho, modificou-se o parâmetro de apresentação do diagrama de caixas. Ao invés de utilizar a mediana para realizar as análises dos conjuntos de valores obtidos nos processos de otimizações nos refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD, optou-se por utilizar a média destes resultados. Para isto, excluiu-se a linha vermelha que representa a mediana e adicionou-se os símbolos '□', '×', '☆', '▽', '◇', e ' ' correspondendo respectivamente às médias dos refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD.

5.1 MODELO *BRUSH CANYON OUTCROP* (BCO)

O primeiro modelo utilizado foi o reservatório sintético *Brush Canyon Outcrop* (BCO), este modelo foi inicialmente apresentado por Oliveira (2006). Este reservatório apresenta uma malha de 43 x 55 x 6 (m), possui doze poços verticais, sendo sete poços produtores e cinco poços injetores.

Apesar de se tratar de um caso sintético, o modelo foi construído a partir de técnicas de geoestatística e dados de afloramento, sendo bastante próximo de um modelo de reservatório real, reproduzindo um sistema deposicional turbidítico, típico de formações em águas profundas, representando o mais importante tipo de reservatório encontrado nas bacias sedimentares da costa brasileira (OLIVEIRA, 2006).

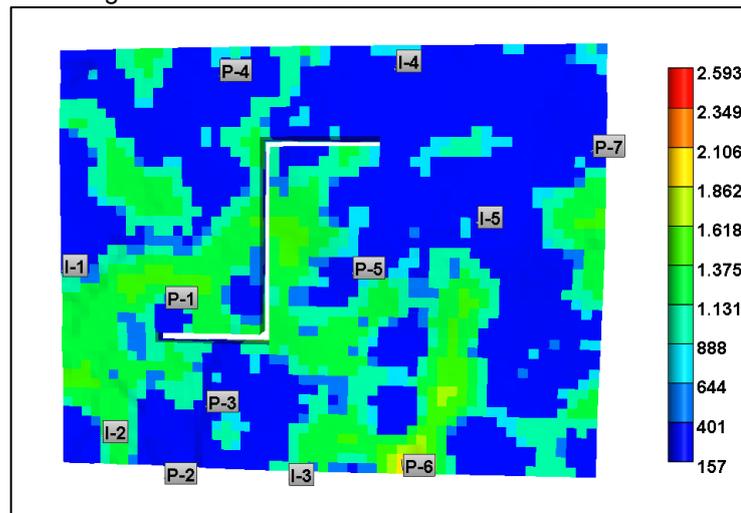
Posteriormente, Tueros *et al.* (2018b), modificou o modelo BCO introduzindo uma falha interna (Fig.8). As células que modelam a falha possuem permeabilidade, transmissibilidade e porosidade definidas como nula. O modelo modificado, intitulado BCO-Falha, será o objeto de estudo deste trabalho e suas principais características e propriedades são apresentadas na Tabela 5.

Cada um dos sete poços produtores atuam com uma vazão total líquida limitada à 900m³/dia, já cada um dos cinco poços injetores opera com uma máxima vazão de água injetada definida em 1500m³/dia. A máxima vazão de líquido

produzido no campo foi definida em 5000m³/dia, e a máxima vazão de injeção no campo foi especificada em 5750m³/dia.

O tempo de simulação é de 28 anos, sendo oito anos de histórico de produção e vinte anos para o processo de otimização. No histórico de produção, a produção líquida dos poços produtores foi fixada em 714m³/dia e a vazão de injeção 1150m³/dia. Os parâmetros econômicos adotados para o cálculo do VPL são apresentados na Tabela 6.

Figura 8 – Permeabilidade do modelo BCO-Falha.



Fonte: A autora (2021).

Tabela 5 – Características e propriedades do modelo BCO-Falha.

Parâmetros geofísicos	Dados	Unidade
Malha do reservatório	43 x 55 x 6	m
Poços produtores	7	-
Poços injetores	5	-
Permeabilidade horizontal (k_h)	157 - 2593	mD
Permeabilidade vertical (k_v)	30% de k_h	mD
Porosidade	16 - 28	%
Viscosidade	0.11	cP
Compressibilidade da rocha (1.019 kgf/cm ²)	$2,11 \times 10^{-7}$	(kgf/cm ²) ⁻¹
Razão Gás-Óleo (GOR)	78.1	m ³ /m ³ std

Fonte: A autora (2021).

Tabela 6 – Parâmetros econômicos adotados no modelo BCO-Falha.

Parâmetros econômicos	Valor
Preço do óleo (\$/m ³)	503,18
Custo da água produzida (\$/m ³)	31,45
Custo da água injetada (\$/m ³)	31,45
Taxa de desconto (%/ano)	10
Tempo de concessão (anos)	20

Fonte: A autora (2021).

5.1.1 Casos estudados e resultados

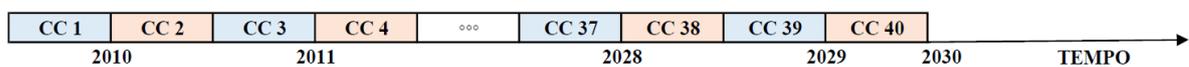
Com o objetivo de se obter comparações de maneira eficiente devido à natureza estocástica do método baseado em ensembles (TUEROS, 2019), para o estudo de caso do modelo BCO-Falha, por ser um reservatório mais simples, adotou-se apenas três refinamentos (REB, REB+T e RSG+T). Para cada refinamento, realizou-se 10 execuções do processo de otimização. Todos os procedimentos aqui descritos, foram adotados de maneira uniforme para os três refinamentos analisados.

Inicialmente definiu-se o tamanho do ensemble. Diferentes estudos foram desenvolvidos acerca do tamanho do ensemble, por exemplo When e Chen (2006), Chen e Oliver (2012), Dehdari e Oliver (2012), Alim (2013), Fonseca *et al.* (2015a), Tueros *et al.* (2015, 2018a, 2018b), Ramaswamy (2015) e Tueros (2019).

Para uma boa aproximação do vetor gradiente deve-se levar em consideração a influência da dimensão do ensemble. Comumente, com o incremento do número de realizações, é possível melhorar o VPL final, mas selecionando uma grande quantidade de realizações aumenta-se o número de execuções do simulador e, quando são usados ensembles com poucos membros se introduz correlações espúrias (TUEROS, 2019). Sendo assim, após alguns testes, utilizou-se ensembles com 15 realizações.

Para o processo de simulação do reservatório, adotou-se um período de 20 anos de produção, onde os controles são alterados a cada 6 meses, totalizando 40 ciclos de controle (CC) conforme demonstrado na Figura 9.

Figura 9 – Definição dos ciclos de controle do modelo BCO-Falha.



Fonte: A autora (2021).

Em seguida, calculou-se o número de variáveis de controle (N_x) através da equação:

$$N_x = \left(\sum_{p=1}^{N_p} + \sum_{i=1}^{N_I} \right) N_c \quad (5.1)$$

onde, N_p = número de poços produtores, N_I = número de poços injetores e N_t = número de ciclos de controle. O problema BCO-Falha apresenta 480 variáveis de controle ($N_p = 7, N_I = 5$ e $N_c = 40$).

Posteriormente, foi necessário informar os valores iniciais para as variáveis de controle. Este valor é utilizado apenas na primeira iteração pois nas iterações seguintes utiliza-se os pontos ótimos obtidos na iteração anterior (TUEROS *et al.*, 2015). Neste estudo, adotou-se como ponto inicial para os poços produtores e os poços injetores a taxa de 75% da máxima vazão de produção do campo e máxima vazão de injeção do campo, respectivamente.

Para regularização das variáveis de controle e para evitar mudanças abruptas dos controles no tempo, utilizou-se a função de covariância Gaussiana, com tamanho de correlação temporal igual a 8 ciclos de controle e desvio padrão de 7% dos controles normalizados.

Um resumo contendo todos os parâmetros adotados nos refinamentos REB, REB+T e RSG+T, é apresentado na Tabela 7.

Tabela 7 – Resumo dos parâmetros adotados no modelo BCO-Falha.

Parâmetros	Dados	Unidade
Máxima vazão líquida por poço produtor	900	m ³ /dia
Máxima vazão de injeção por poço injetor	1500	m ³ /dia
Máxima vazão líquida no campo para poços produtores	5000	m ³ /dia
Máxima vazão de injeção no campo para poços injetores	5750	m ³ /dia
Histórico de produção	8	anos
Otimização	20	anos
Execuções do processo de otimização	10	-
Tamanho do ensemble	15	-
Número de ciclos de controle	40	ciclos
Ponto inicial	75	%
Função de covariância	Gaussiana	-
Correlação temporal	8	ciclos
Desvio padrão	7	%

Fonte: A autora (2021).

Conforme comentado no início desta seção, para cada refinamento, executou-se o processo de otimização 10 vezes. Ao fim de cada processo de otimização, armazenou-se os resultados referentes ao VPL e chamadas de função na Tabela 8 com o intuito de facilitar sua visualização, destacando-se também, o melhor resultado obtido dentre as dez execuções de cada refinamento.

Avaliando a Tabela 8 e realizando um comparativo entre as médias obtidas dos VPLs dos refinamentos REB, REB+T e RSG+T, observa-se que o refinamento RSG+T apresenta o maior VPL atingindo uma média igual a $\$5.3370 \times 10^9$ com uma média de chamadas de função em torno de 38. O refinamento REB apresentou o segundo melhor resultado em termos de VPL, atingindo uma média de $\$5.3292 \times 10^9$, contudo obteve a maior média de chamadas de função ficando em torno de 56 chamadas de função. O refinamento REB+T ficou em terceiro lugar em termos de VPL com $\$5.1699 \times 10^9$, com uma média de chamadas de função aproximadamente de 38.

Ainda observando a Tabela 8, é possível verificar que com os refinamentos REB e RSG+T obteve-se uma variabilidade reduzida dos resultados. Já com o refinamento REB+T, nota-se um aumento na variabilidade dos resultados. A Figura 10 apresenta o diagrama de caixas elaborado com as informações disponíveis na Tabela 8, com o objetivo de facilitar uma comparação visual dos resultados dos refinamentos REB, REB+T e RSG+T.

Analisando a Figura 10, observa-se que o refinamento proposto RSG+T apresenta um ganho no VPL de 0,14% comparado ao refinamento REB e 3,13% comparado ao refinamento REB+T. Além do ganho em termos de VPL, o refinamento RSG+T apresentou uma redução na variabilidade dos resultados comparado aos demais refinamentos.

O melhor resultado obtido com o refinamento REB apresentou um VPL de $\$5.5995 \times 10^9$ em 17 iterações e 278 execuções do simulador (272 no processo de otimização, 5 no cálculo das conectividades e 1 para calcular os coeficientes de competitividade), levando uma média de 12 horas para resolução do problema. Com respeito ao melhor resultado obtido com o refinamento REB+T, este apresentou um VPL de $\$5.3755 \times 10^9$ em 9 iterações e 150 execuções do simulador (144 no processo de otimização, 5 no cálculo das conectividades e 1 para calcular os coeficientes de competitividade), levando uma média de 16 horas para resolução do problema. Já o melhor resultado obtido com o refinamento RSG+T, alcançou um VPL de $\$5.4674 \times 10^9$ em 19 iterações e 310 execuções do simulador (304 no processo de otimização, 5 no cálculo das conectividades e 1 para calcular os coeficientes de competitividade), levando uma média de 23 horas para resolução do problema. Os três melhores resultados aqui apresentados foram obtidos em uma máquina com

processador Intel® Core™ i7-7700 de 3.60GHz e 8.00GB de memória RAM com 4 núcleos.

A Figura 11 mostra o histórico da mudança do VPL a cada iteração para os melhores resultados dos refinamentos REB, REB+T e RSG+T.

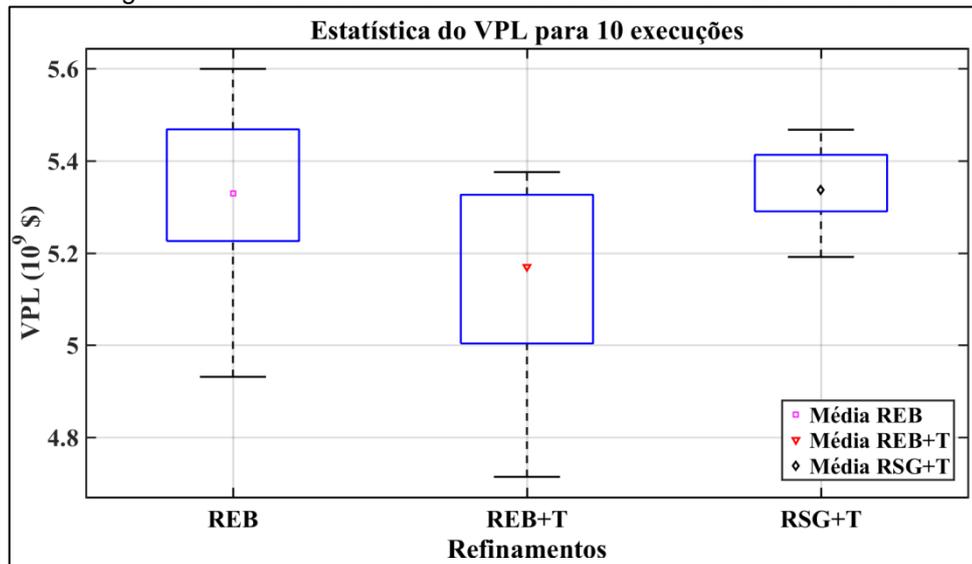
Tabela 8 – Resumo resultados finais modelo BCO-Falha.

TIPO	OTIMIZAÇÃO	VPL	MÉDIA VPL	CHAMADAS DE FUNÇÃO	MÉDIA CHAMADAS DE FUNÇÃO
REB	1	4.9312	5.3292	23	56
	2	5.4682		64	
	3	5.2259		85	
	4	5.1029		24	
	5	5.2523		38	
	6	5.4013		69	
	7	5.3349		86	
	8	5.4076		67	
	9	5.5995		41	
	10	5.5677		66	
REB+T	1	5.3755	5.1699	40	38
	2	4.7142		19	
	3	5.1244		24	
	4	5.0037		38	
	5	5.3732		27	
	6	5.2397		39	
	7	5.3263		82	
	8	5.0011		26	
	9	5.2859		20	
	10	5.2545		60	
RSG+T	1	5.3193	5.3370	63	38
	2	5.4354		39	
	3	5.3531		43	
	4	5.4130		29	
	5	5.1914		34	
	6	5.2902		28	
	7	5.3379		36	
	8	5.2929		23	
	9	5.2689		41	
	10	5.4674		47	

	Melhor resultado REB
	Melhor resultado REB+T
	Melhor resultado RSG+T

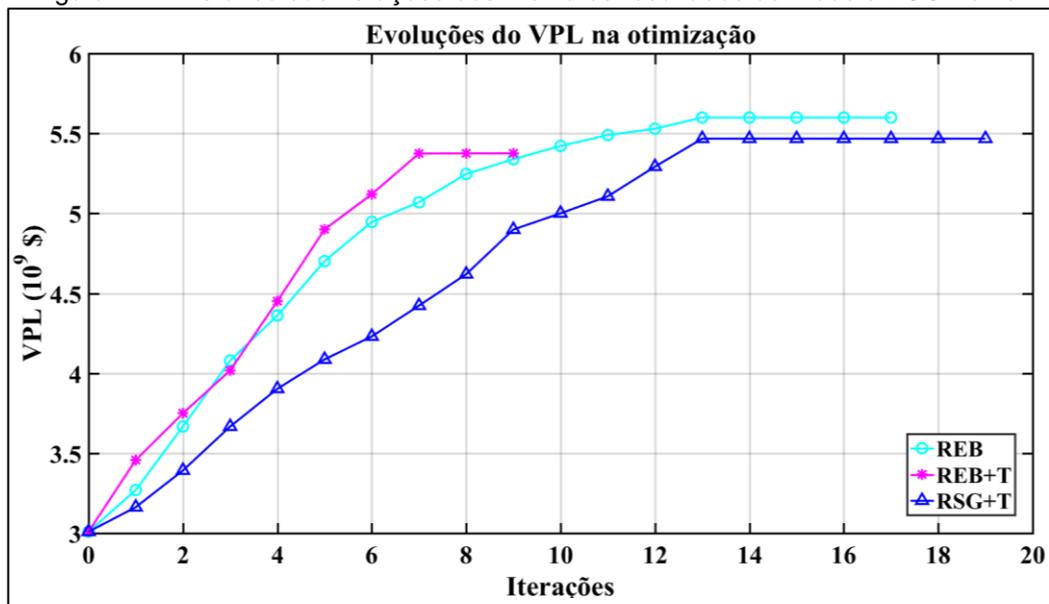
Fonte: A autora (2021).

Figura 10 – Resultados estatísticos do VPL do modelo BCO-Falha.



Fonte: A autora (2021).

Figura 11 – Histórico das iterações dos melhores resultados do modelo BCO-Falha.



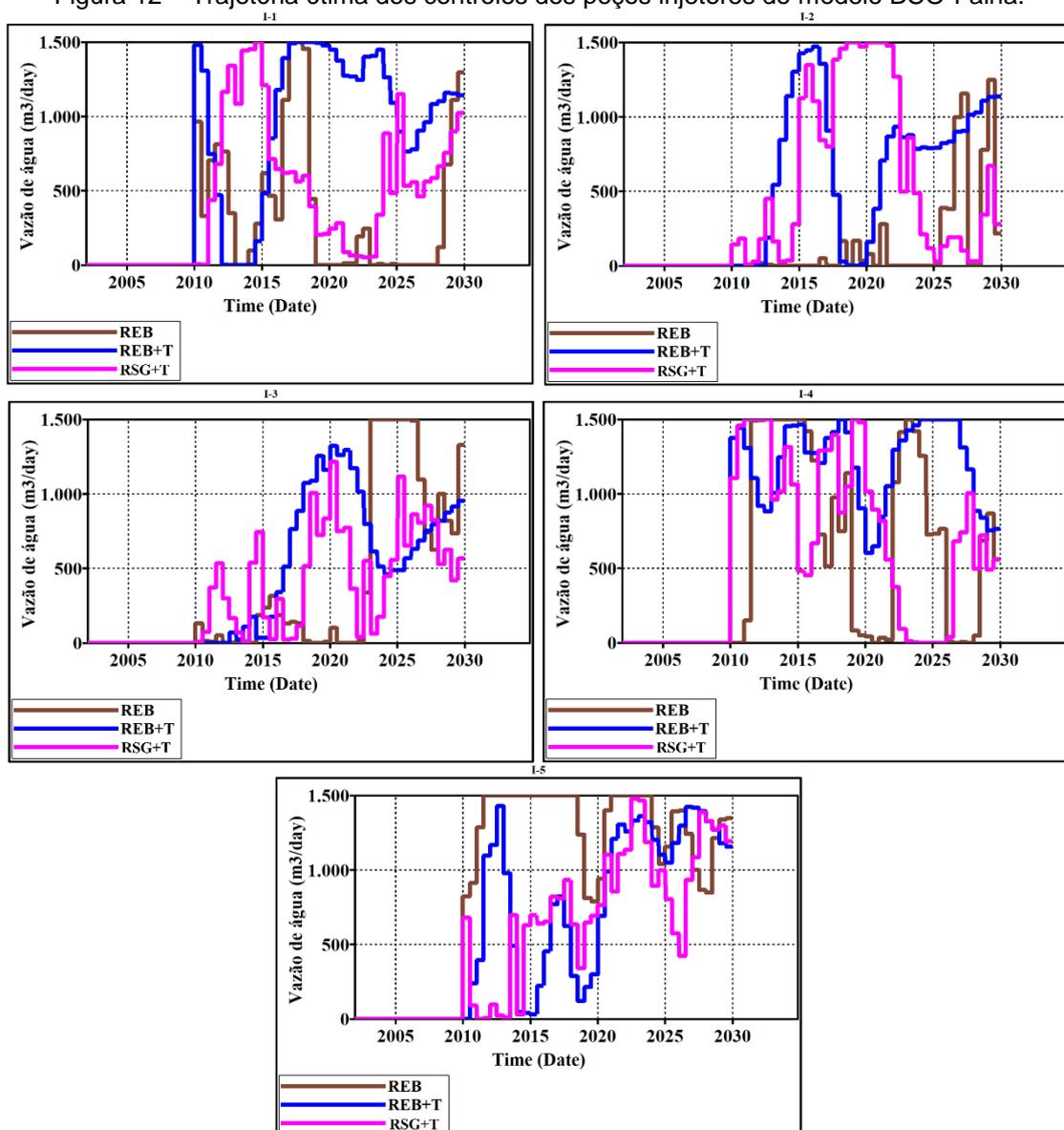
Fonte: A autora (2021).

As Figuras 12 e 13 representam, respectivamente, as trajetórias dos controles ótimos dos poços injetores e produtores após o processo de otimização para os três refinamentos analisados. É possível observar que, apesar dos refinamentos REB e RSG+T apresentarem os melhores resultados em termos de VPL, estes apresentam mudanças abruptas em seus controles. Isso pode ser justificado pelo fato de os poços serem controlados unicamente por vazão, não possuindo nenhuma restrição de BHP no simulador. Esses limites de vazão, estabelecidos para o processo de otimização e apresentados na Tabela 7, fazem com que os poços não possam

operar na sua máxima capacidade individual, deixando espaço para o problema de otimização de definir qual a melhor forma de distribuir essas vazões atendendo à capacidade da unidade de produção (OLIVEIRA, 2006). Uma alternativa para este problema é impor a reposição de vazios, usada por muitos pesquisadores como meio de manter o reservatório devidamente pressurizado (HOROWITZ *et al.*, 2013).

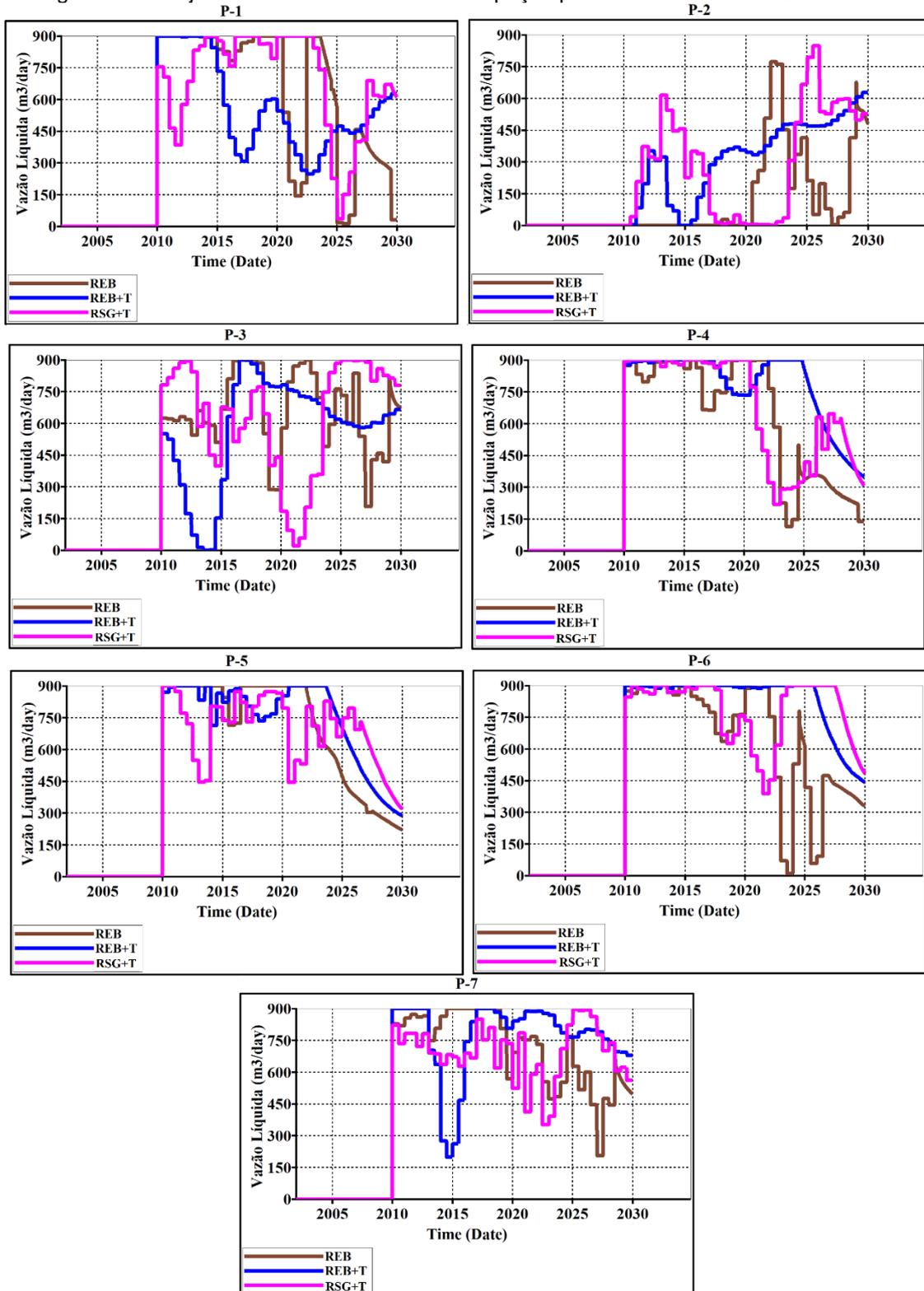
Ainda analisando as Figuras 12 e 13, observa-se que o refinamento REB+T apresentou maior suavidade em seus controles, apesar de ter alcançado a menor média em termos de VPL e maior variabilidade nos resultados.

Figura 12 – Trajetória ótima dos controles dos poços injetores do modelo BCO-Falha.



Fonte: A autora (2021).

Figura 13 – Trajetória ótima dos controles dos poços produtores do modelo BCO-Falha.



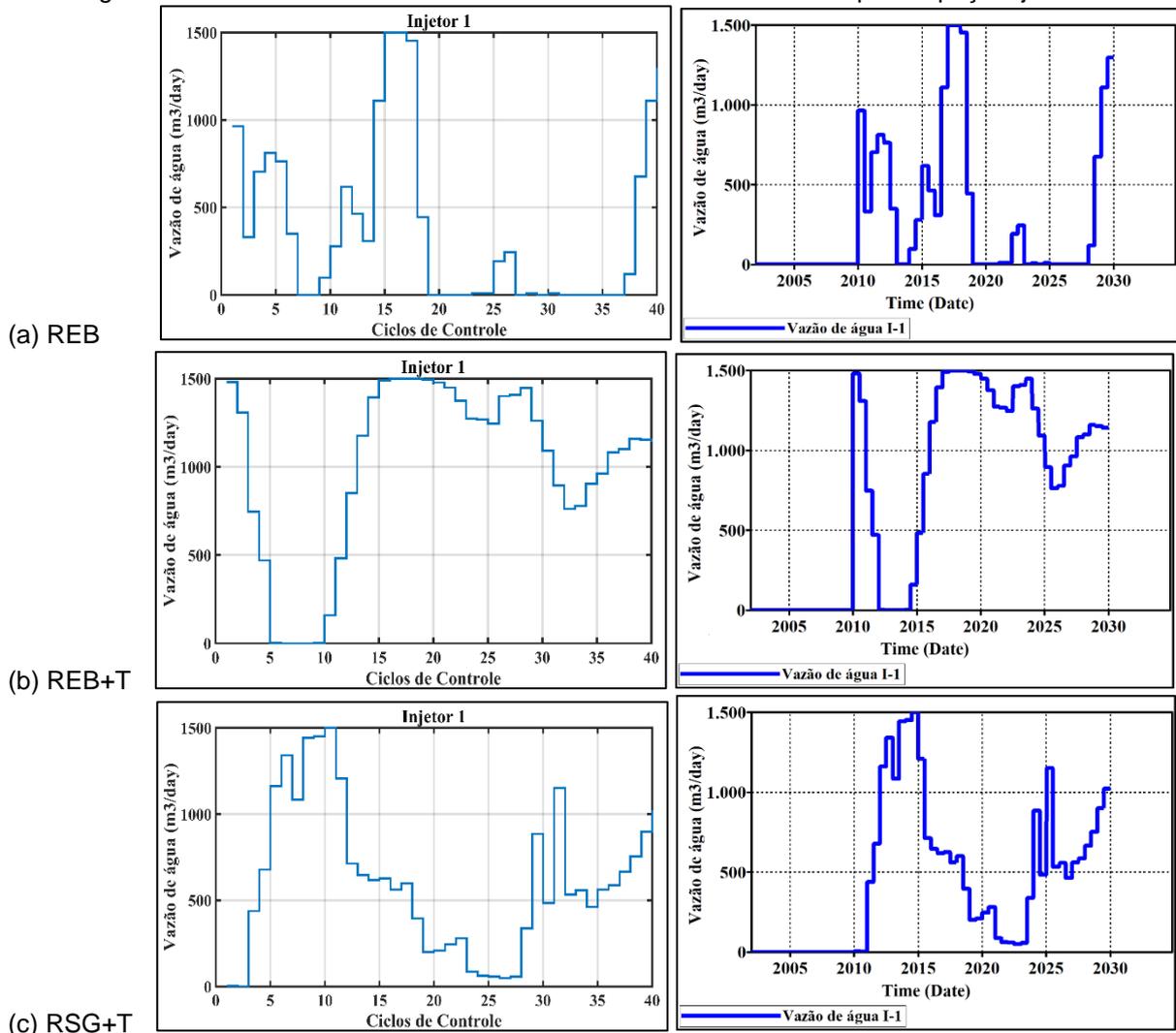
Fonte: A autora (2021).

Para melhor compreensão dos resultados obtidos no otimizador em comparação aos resultados obtidos no simulador, para os três refinamentos,

escolheu-se o poço injetor I-1 e o poço produtor P-1, conforme apresentados nas Figuras 14 e 15.

A Figura 14 faz um comparativo entre os resultados do poço injetor I-1. Os gráficos do lado esquerdo referem-se aos resultados obtidos no otimizador e os gráficos do lado direito referem-se aos resultados obtidos no simulador. Verifica-se que os controles passados do otimizador para o simulador são respeitados em todo o período de concessão.

Figura 14 – Resultado do otimizador *versus* resultado do simulador para o poço injetor I-1.



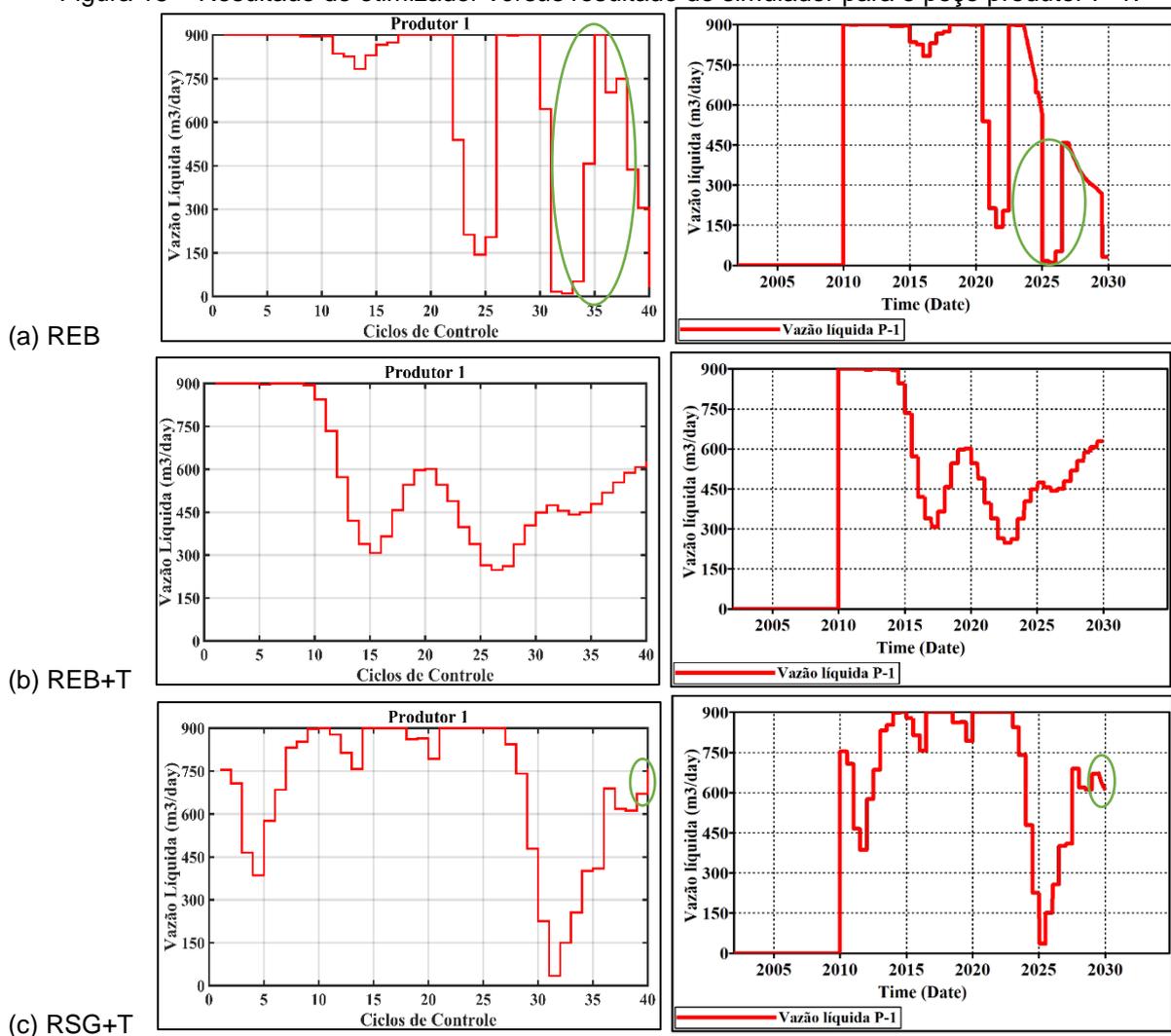
Fonte: A autora (2021).

Na Figura 15 destacou-se o período em que há diferença entre os resultados do otimizador e os resultados do simulador para o poço produtor P-1. No refinamento REB (Fig. 15(a)), verifica-se que nos últimos anos de concessão, o simulador não consegue respeitar os controles impostos pelo otimizador. Como

comentado, uma alternativa para manter o reservatório devidamente pressurizado é impor a reposição de vazios. No refinamento RSG+T (Fig. 15(c)), o simulador não consegue respeitar a restrição imposta pelo otimizador apenas no último ciclo de controle.

O refinamento REB+T (Fig. 15(b)) além de ter apresentado maior suavidade em seus controles, durante o período de concessão o simulador consegue respeitar as restrições impostas pelo otimizador. Isso pode ser destacado como uma vantagem deste refinamento.

Figura 15 – Resultado do otimizador *versus* resultado do simulador para o poço produtor P-1.

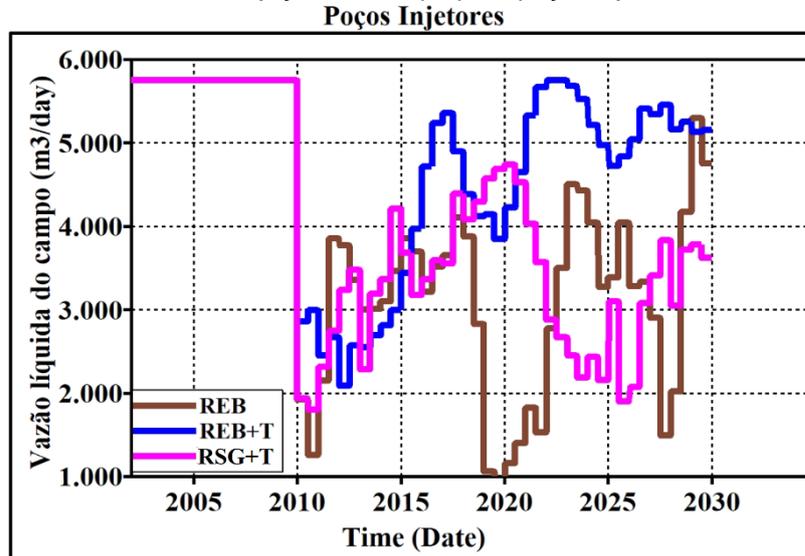


As Figuras 16 e 17 apresentam as restrições a nível de campo para os poços injetores e poços produtores, respectivamente. Observa-se na Figura 16 que apenas o refinamento REB+T se mantém mais próximo da máxima vazão de injeção para o

campo, chegando a atingir este limite no ano de 2022. Enquanto que, os refinamentos REB e RSG+T se mantêm sempre abaixo do máximo limite permitido.

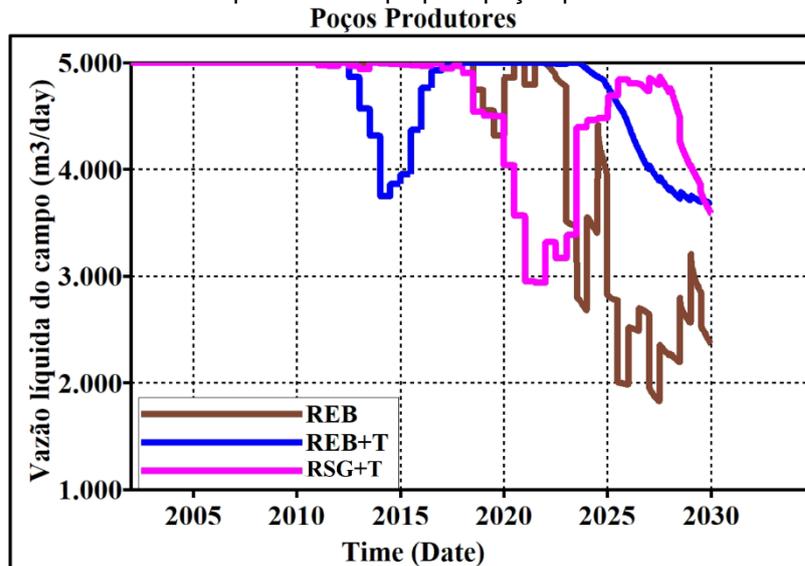
Analogamente, analisando a máxima vazão de produção no campo (Fig. 17), o refinamento REB+T se mantêm mais próximo do limite máximo de produção. Apesar disto, em todo tempo de concessão do reservatório, a fração de óleo produzido com o refinamento REB+T corresponde à 45,8% de todo o óleo presente no reservatório, ficando apenas 0,1% abaixo do refinamento RSG+T que obteve 45,9% e, 1,2% a mais do que o refinamento REB que alcançou 44,6%, conforme pode ser observado na Figura 18.

Figura 16 - Máxima vazão de injeção no campo para poços injetores modelo BCO-Falha.



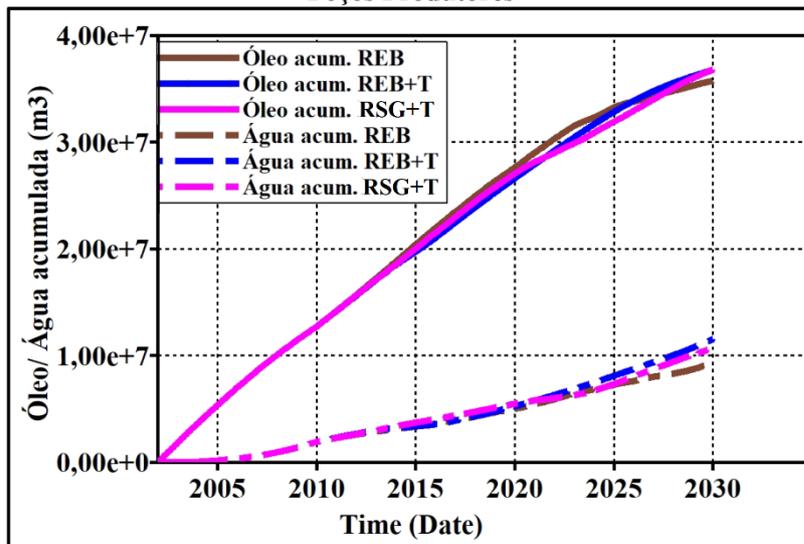
Fonte: A autora (2021).

Figura 17 - Máxima vazão líquida no campo para poços produtores modelo BCO-Falha.



Fonte: A autora (2021).

Figura 18 – Produção acumulada de óleo e água modelo BCO-Falha.
Poços Produtores

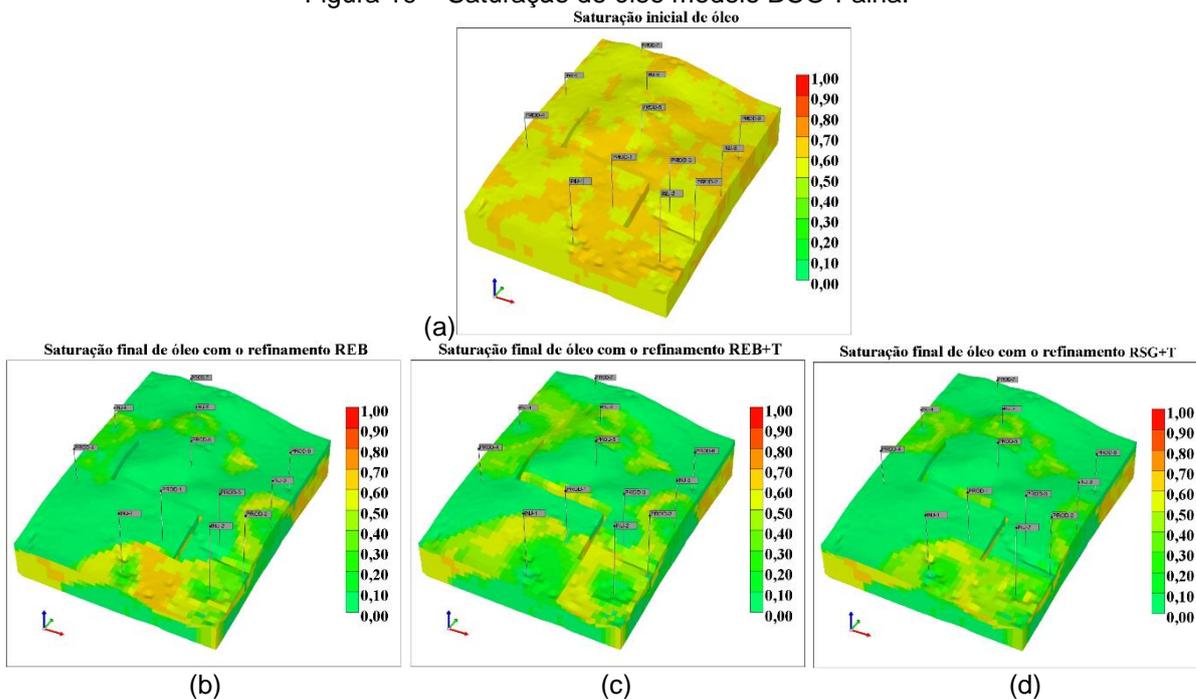


Fonte: A autora (2021).

Ainda avaliando a Figura 18, com relação à produção de água, o refinamento REB+T apresenta um aumento de 7,4% em sua produção comparado ao refinamento RSG+T e de 19,8% comparado ao refinamento REB.

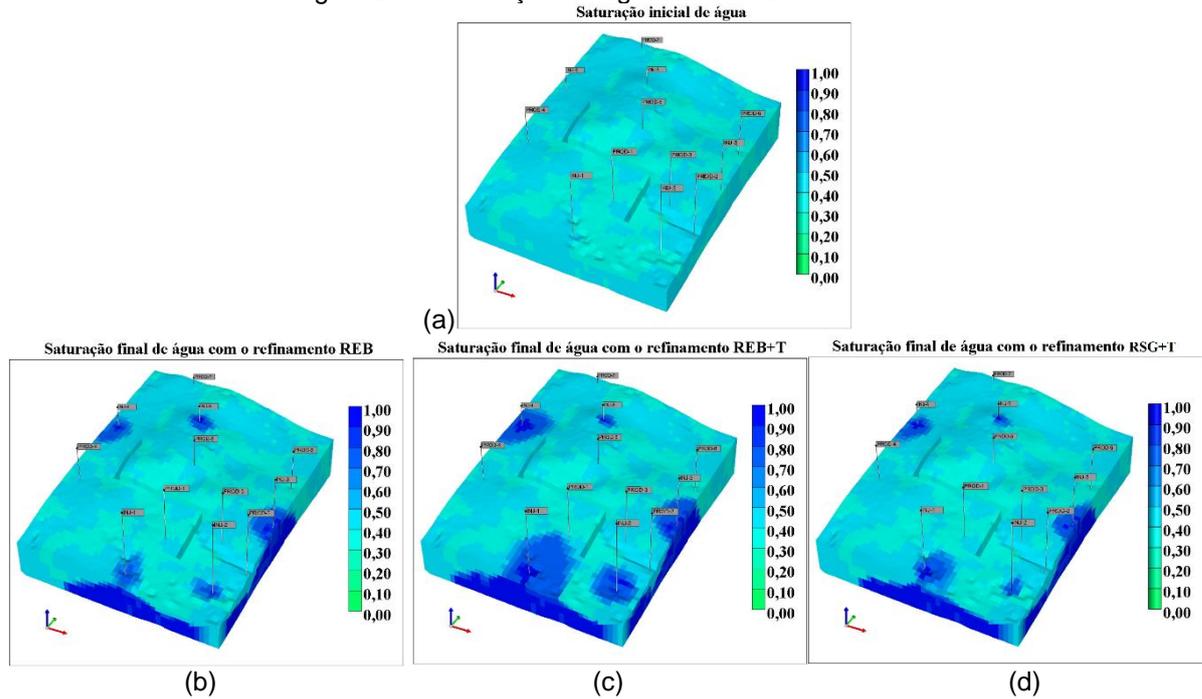
Com o objetivo de complementar visualmente as informações referentes à produção acumulada de óleo e água, são apresentadas nas Figuras 19 e 20 as saturações iniciais e finais, de óleo e água, respectivamente.

Figura 19 – Saturação de óleo modelo BCO-Falha.



Fonte: A autora (2021).

Figura 20 – Saturação de água modelo BCO-Falha.



Fonte: A autora (2021).

A Figura 19(a) representa a saturação inicial de óleo no reservatório, é possível verificar que a saturação estava entre 55% e 65%. As Figuras 19(b), 19(c) e 19(d) correspondem, respectivamente, as saturações finais de óleo com os refinamentos REB, REB+T e RSG+T.

Analisando a Figura 19(b), verifica-se que a região próxima aos poços injetores I-1 e I-2, ainda apresenta alta saturação de óleo, enquanto que, nas Figuras 19(c) e 19(d) a saturação de óleo desta mesma região é menor. Realizando um comparativo, da região em questão, apenas entre as Figuras 19(c) e 19(d), observa-se na Figura 19(c) que ao redor do poço injetor I-1 a saturação final de óleo está muito menor do que na Figura 19(d).

Por fim, a Figura 20(a) representa a saturação inicial de água no reservatório, observa-se que a saturação estava entre 35% e 45%. As Figuras 20(b), 20(c) e 20(d) correspondem as saturações finais de água com os refinamentos REB, REB+T e RSG+T, respectivamente.

Realizando um comparativo entre as Figuras 20(b), 20(c) e 20(d), observa-se que na Figura 20(c) houve maior injeção de água conforme pode ser analisado nas regiões em torno dos poços injetores com coloração azul mais escuro indicando maior presença de água. A saturação final de água do reservatório com o refinamento REB+T (Fig. 20(c)) foi 16,4% maior do que a saturação final de água

com o refinamento RSG+T (Fig. 20(d)) e, 19,6% maior do que a saturação final de água com o refinamento REB (Fig. 20(b)).

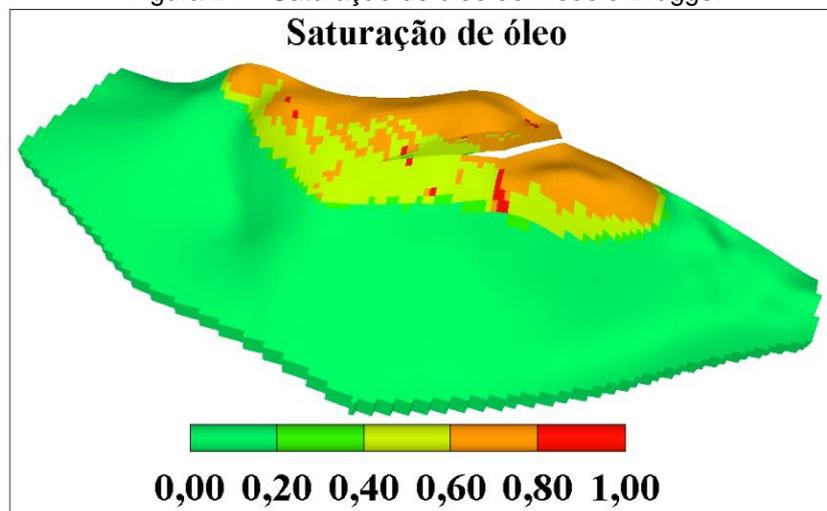
Conforme comentado anteriormente, a produção final de óleo ao utilizar o refinamento REB+T é muito próxima da produção final de óleo ao utilizar o refinamento RSG+T, sendo maior do que a produção final de óleo ao utilizar com o refinamento REB. Contudo, a produção de água no reservatório ao utilizar o refinamento REB+T também é maior comparada aos refinamentos REB e RSG+T, justificando o fato deste refinamento ter ficado em terceiro lugar quando comparou-se as médias dos VPLs dos três refinamentos após o processo de otimização.

5.2 MODELO BRUGGE FIELD

O modelo Brugge possui uma estrutura que consiste em uma meia cúpula alongada leste/oeste com uma grande falha de limite em sua borda norte e uma falha interna com um lance modesto em um ângulo de aproximadamente 20° com a falha de limite na borda norte (Fig. 21). As dimensões do campo são de aproximadamente 10 x 3 km (PETERS *et al.*, 2009).

O modelo é bifásico (óleo e água) e foi desenvolvido em 2008 para análise de ajuste de histórico e otimização da produção (*Closed-loop Optimization*), contendo 20 poços produtores e 10 poços injetores. O modelo tem um histórico de produção de 10 anos e o período de otimização corresponde aos próximos 20 anos.

Figura 21 – Saturação de óleo do modelo Brugge.



Fonte: A autora (2021).

Do conjunto de 104 realizações geológicas (60,000 células ativas), para este trabalho selecionou-se a realização de número 28. O modelo possui nove camadas, divididas em quatro zonas, conforme Tabela 9. A Figura 22 apresenta detalhes de cada camada, onde é possível observar alguns blocos inativos no interior do reservatório. As camadas 3, 4 e 5 apresentam as menores permeabilidades, enquanto que a camada 8 corresponde à maior permeabilidade.

A Tabela 10 lista alguns parâmetros geofísicos adotados no modelo Brugge. A listagem completa destes parâmetros pode ser encontrada em Peters *et al.*, (2009).

Tabela 9 – Distribuição das zonas de formação modelo Brugge.

Zonas de Formação	Camadas
<i>Schelde</i>	1 e 2
<i>Maas</i>	3, 4 e 5
<i>Waal</i>	6, 7 e 8
<i>Schie</i>	9

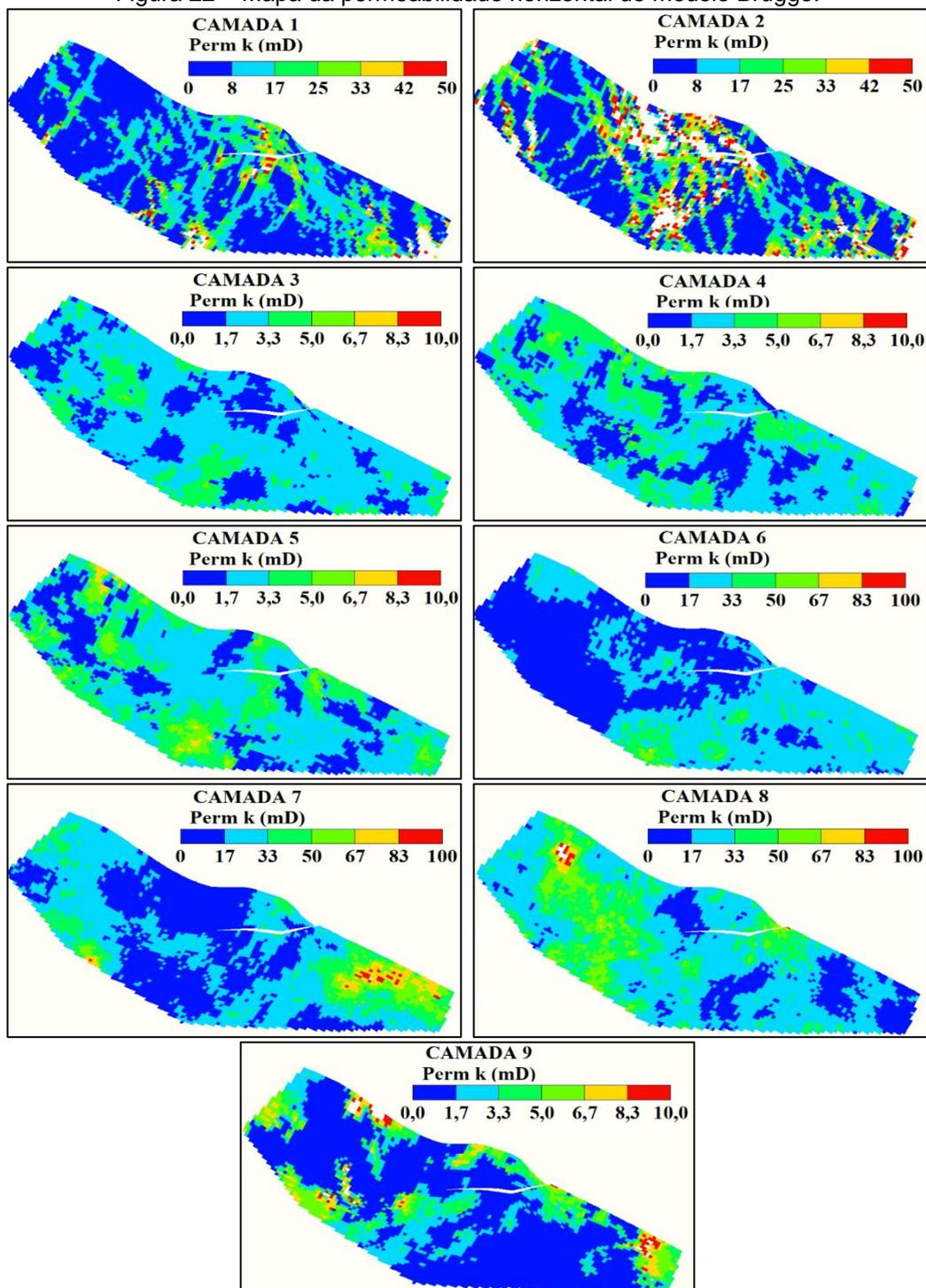
Fonte: A autora (2021).

Tabela 10 – Características e propriedades do modelo Brugge.

Parâmetros geofísicos	Dados
Malha do reservatório (m)	139 x 48 x 9
Poços produtores	20
Poços injetores	10
Inicialização	2.466 psi a 1700 m de profundidade nível de água livre a 1678 m
Compressibilidade da rocha	$3.5 \times 10^{-6} 1/\text{psi}$
Densidade do óleo (lbm/ft ³)	56
Densidade da água (lbm/ft ³)	62.6
Compressibilidade do óleo (1/psi)	9.26 E-06
Compressibilidade da água (1/psi)	3 E-06
Viscosidade do óleo (cp)	1.294
Viscosidade da água (cp)	0.32

Fonte: A autora (2021).

Figura 22 – Mapa da permeabilidade horizontal do modelo Brugge.



Fonte: A autora (2021).

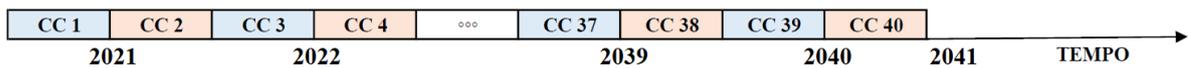
5.2.1 Casos estudados e resultados

Conforme comentado, o tempo de simulação é de 30 anos, sendo dez anos de histórico de produção e vinte anos para o processo de otimização. No histórico de produção (0-10 anos), os poços produtores operam a uma vazão de 3000 bbl/dia e

BHP mínimo de 725.3910 psi. Já os poços injetores operam a uma vazão de injeção de 4000 bbl/dia e seu máximo BHP de 2602.87 psi. A abertura e fechamento dos poços está descrito na Tabela 11.

No processo de otimização (10-30 anos), os ciclos de controle são alterados a cada seis meses conforme descrito na Figura 23, totalizando 40 ciclos de controle (CC) e 1.200 variáveis de projeto. A restrição imposta no otimizador para controle dos produtores é o BHP que varia entre [725.3910 – 2602.87] psi e a restrição imposta no simulador é a vazão máxima de 3000 bbl/dia. Para controle dos injetores, a restrição imposta no otimizador foi a vazão de injeção que varia entre [0 – 4000] bbl/dia e a restrição imposta no simulador foi o BHP máximo de 2602.87 psi. Neste problema não há restrições de capacidade.

Figura 23 – Definição dos ciclos de controle do modelo Brugge.



Fonte: A autora (2021).

Tabela 11 – Histórico de controle de produção por 10 anos do modelo Brugge.

Índice de tempo	Tempo (dias)	Poços em produção (3000 bbl / dia) e injeção (4000 bbl / dia)
1	30	P-5
2	120	P-5, P-10, P-11, P-12
3	210	P-5, P-10–P-15
4	300	P-5 P-10–P-18
5	390	P-1 P-5 P-10–P-20
6	480	P-1–P-5, P-10–P-20
7	570	P-1–P-8, P-10–P-20
8	660	Todos os produtores e I-1, I-2
9	750	Todos os produtores e I-1–I-5
10	840	Todos os produtores e I-1–I-8
11	930	Todos
12	1295	Todos
13	1660	Todos
14	2025	Todos
15	2390	Todos
16	2755	Todos
17	3120	P-15 fechado
18	3485	P-12 fechado
19	3650	P-20 fechado

Fonte: Adaptado de Tueros et al., 2020.

No estudo de caso do modelo Brugge, por se tratar de um reservatório mais complexo, empregou-se todos os refinamentos descritos na Tabela 4, propostos para o gerenciamento ótimo de reservatórios de petróleo. Desta forma, para os cinco refinamentos estudados (REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD) realizou-se 10 execuções do processo de otimização, utilizando ensembles com 30 realizações.

Neste trabalho, para os cinco refinamentos, adotou-se como ponto inicial para o processo de otimização a seguinte configuração: o controle para cada poço produtor é 20% da restrição primária (BHP) e 75% da máxima vazão de injeção para os poços injetores. Para regularização das variáveis de controle e para evitar mudanças abruptas dos controles no tempo, utilizou-se a função de covariância Gaussiana, com tamanho de correlação temporal igual a 10 ciclos de controle e desvio padrão de 1% para os poços produtores e 7% para os poços injetores.

Um resumo contendo todos os parâmetros adotados nos cinco refinamentos, é apresentado na Tabela 12 e os parâmetros econômicos adotados para o cálculo do VPL são apresentados na Tabela 13.

Tabela 12 – Resumo dos parâmetros adotados no modelo Brugge.

Parâmetros	Dados	Unidade
Restrição imposta no otimizador por poço produtor (BHP)	725.3910 - 2602.87	psi
Restrição imposta no simulador por poço produtor (Vazão de Produção)	3000	bbl/dia
Restrição imposta no otimizador por poço injetor (Vazão de injeção)	0 - 4000	bbl/dia
Restrição imposta no simulador por poço injetor (BHP)	2602.87	psi
Histórico de produção	10	anos
Otimização	20	anos
Execuções do processo de otimização	10	-
Tamanho do ensemble	30	-
Número de ciclos de controle	40	ciclos
Variáveis de projeto	1200	-
Ponto inicial para os produtores	20	%
Ponto inicial para os injetores	75	%
Função de covariância	Gaussiana	-
Correlação temporal	10	ciclos
Desvio padrão para os produtores	1	%
Desvio padrão para os injetores	7	%

Fonte: A autora (2021).

Tabela 13 – Parâmetros econômicos adotados no modelo Brugge.

Parâmetros econômicos	Valor
Preço do óleo (\$/bbl)	80
Custo da água produzida (\$/bbl)	5
Custo da água injetada (\$/bbl)	5
Taxa de desconto (%/ano)	10
Tempo de concessão (anos)	20

Fonte: A autora (2021).

Conforme comentado no início desta seção, para cada refinamento, executou-se o processo de otimização 10 vezes. Ao fim de cada processo de otimização, armazenou-se os resultados referentes ao VPL e chamadas de função na Tabela 14 com o intuito de facilitar sua visualização, destacando-se também, o melhor resultado obtido dentre as dez execuções de cada refinamento.

Avaliando a Tabela 14 e realizando um comparativo entre as médias obtidas dos VPLs dos refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD observa-se que o refinamento RSG+TD apresentou o maior VPL atingindo uma média igual a $\$2.7951 \times 10^9$ e uma média de chamadas de função em torno de 97. O refinamento RSG+T apresentou o segundo melhor resultado em termos de VPL, atingindo uma média de $\$2.6882 \times 10^9$, com uma maior média de chamadas de função ficando em torno de 101. O refinamento REB+T ficou em terceiro lugar em termos de VPL com uma média de $\$2.6208 \times 10^9$, obtendo a segunda maior média de chamadas de função, ficando em torno de 171. O refinamento REB ficou em quarto lugar em termos de VPL com $\$2.5646 \times 10^9$, e apresentou a menor média de chamadas de função ficando em torno de 80 chamadas de função. Em quinto lugar em termos de VPL, ficou o refinamento REB* com $\$2.5418 \times 10^9$, obtendo a maior média de chamadas de função, ficando em torno de 244.

Ainda observando a Tabela 14, é possível verificar que com o refinamento REB obteve-se uma maior variabilidade dos resultados. Já com o refinamento REB+T, nota-se uma variabilidade reduzida dos resultados. A Figura 24 apresenta o diagrama de caixas elaborado com as informações disponíveis na Tabela 14, com o objetivo de facilitar uma comparação visual dos resultados dos refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD.

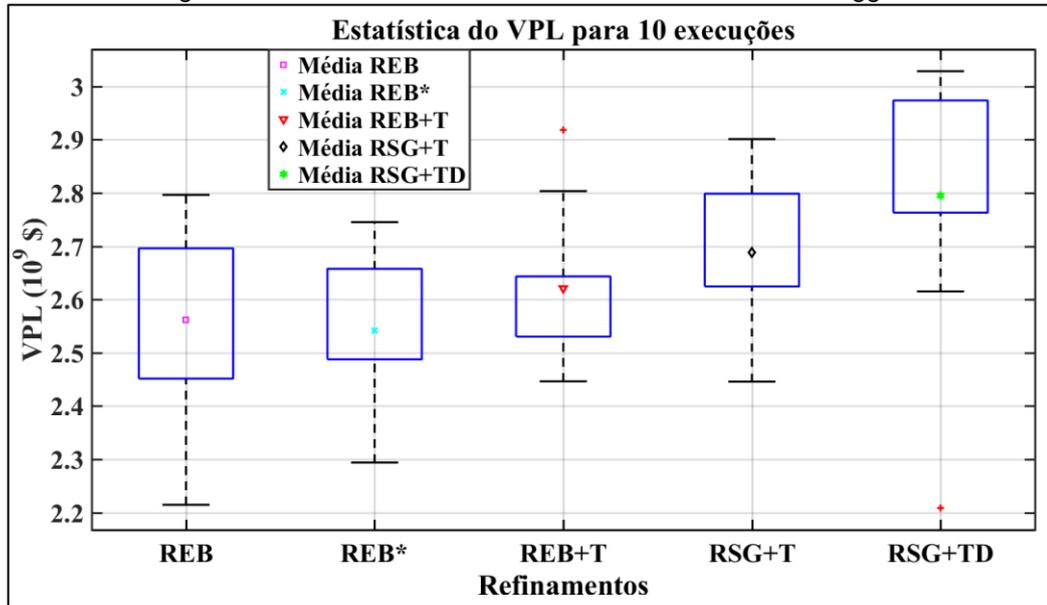
Tabela 14 – Resumo resultados finais modelo Brugge.

TIPO	OTIMIZAÇÃO	VPL	MÉDIA VPL	CHAMADAS DE FUNÇÃO	MÉDIA CHAMADAS DE FUNÇÃO
REB	1	2.5472	2.5646	92	80
	2	2.6386		94	
	3	2.7054		59	
	4	2.6005		75	
	5	2.4515		35	
	6	2.7963		88	
	7	2.6959		99	
	8	2.6579		97	
	9	2.3128		40	
	10	2.2147		120	
REB*	1	2.5324	2.5418	29	244
	2	2.5753		66	
	3	2.6576		108	
	4	2.2940		38	
	5	2.4178		60	
	6	2.5189		56	
	7	2.6860		58	
	8	2.7452		141	
	9	2.5033		28	
	10	2.4877		146	
REB+T	1	2.6405	2.6208	161	171
	2	2.5486		151	
	3	2.6169		103	
	4	2.5004		170	
	5	2.5606		136	
	6	2.5303		318	
	7	2.6432		207	
	8	2.8034		151	
	9	2.9181		149	
	10	2.4464		165	
RSG+T	1	2.7653	2.6882	64	101
	2	2.6919		71	
	3	2.7985		62	
	4	2.5219		147	
	5	2.6245		90	
	6	2.6578		146	
	7	2.9010		182	
	8	2.4459		85	
	9	2.8464		101	
	10	2.6287		57	
RSG+TD	1	2.6151	2.7951	68	97
	2	2.8225		74	
	3	2.9735		65	
	4	2.7794		137	
	5	2.7629		129	
	6	3.0284		82	
	7	2.2086		100	
	8	2.9123		101	
	9	2.8356		123	
	10	3.0124		87	

	Melhor resultado REB
	Melhor resultado REB*
	Melhor resultado REB+T
	Melhor resultado RSG+T
	Melhor resultado RSG+TD

Fonte: A autora (2021).

Figura 24 – Resultados estatísticos do VPL do modelo Brugge.



Fonte: A autora (2021).

Analisando a Figura 24 e a Tabela 14, observa-se que com o refinamento proposto RSG+TD obtém-se um ganho no VPL de 3,82% comparado ao refinamento RSG+T, 6,24% comparado ao refinamento REB+T, 8,25% comparado ao refinamento REB e 9,06% comparado ao refinamento REB*. É possível observar ainda que ao incluir as técnicas de truncamento e amortecimento na matriz de sensibilidade, obtém-se resultados mais satisfatórios do que utilizarmos apenas as técnicas de regularização, competitividade e localização na matriz de sensibilidade do campo.

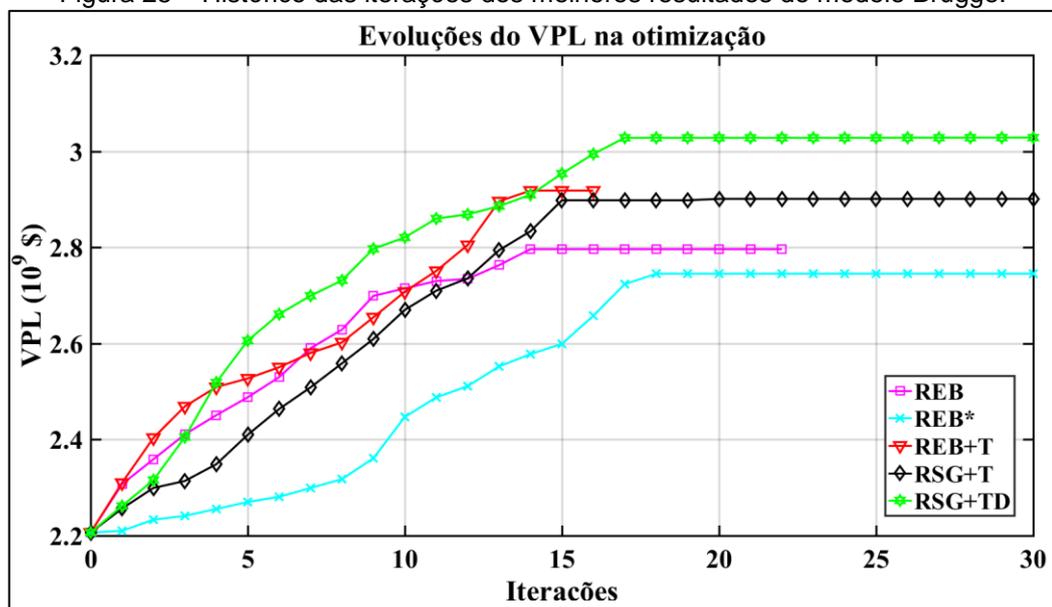
O melhor resultado obtido com o refinamento REB apresentou um VPL de $\$2.7963 \times 10^9$ em 22 iterações e 688 execuções do simulador (682 no processo de otimização, 5 no cálculo das conectividades e 1 para calcular os coeficientes de competitividade), levando uma média de 41 horas para resolução do problema. O melhor resultado obtido com o refinamento REB* apresentou um VPL de $\$2.7452 \times 10^9$ em 30 iterações e 936 execuções do simulador (930 no processo de otimização, 5 no cálculo das conectividades e 1 para calcular os coeficientes de competitividade), levando uma média de 63 horas para resolução do problema. Com respeito ao melhor resultado obtido com o refinamento REB+T, este apresentou um VPL de $\$2.9181 \times 10^9$ em 16 iterações e 502 execuções do simulador (496 no processo de otimização, 5 no cálculo das conectividades e 1 para calcular os coeficientes de competitividade), levando uma média de 50 horas para resolução do problema. Já o melhor resultado obtido com o refinamento RSG+T, alcançou um

VPL de $\$2.9010 \times 10^9$ em 30 iterações e 936 execuções do simulador (930 no processo de otimização, 5 no cálculo das conectividades e 1 para calcular os coeficientes de competitividade), levando uma média de 65 horas para resolução do problema. Por fim, o melhor resultado obtido com o refinamento RSG+TD, alcançou um VPL de $\$3.0284 \times 10^9$ em 30 iterações e 935 execuções do simulador (930 no processo de otimização e 5 no cálculo das conectividades), levando uma média de 40 horas para resolução do problema.

Os cinco melhores resultados aqui apresentados foram obtidos em uma máquina com processador Intel® Core™ i7-7700 de 3.60GHz e 8.00GB de memória RAM com 4 núcleos.

A Figura 25 mostra o histórico da mudança do VPL a cada iteração para o melhor resultado dos refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD. Observa-se que o refinamento RSG+T apresenta uma trajetória mais suave comparado aos refinamentos REB, REB*, REB+T, e RSG+TD.

Figura 25 – Histórico das iterações dos melhores resultados do modelo Brugge.



Fonte: A autora (2021).

Para representar a trajetória dos controles ótimos dos poços injetores e produtores, selecionou-se o poço injetor I-5 e o poço produtor P-2. A Figura 26 corresponde as trajetórias dos controles ótimos dos poços injetores representadas pelo poço injetor I-5. É possível observar que os refinamentos REB, REB* e REB+T apresentaram valores altos de injeção de água e mudanças abruptas em seus controles. Em geral, essa situação pode ocorrer quando as restrições especificadas

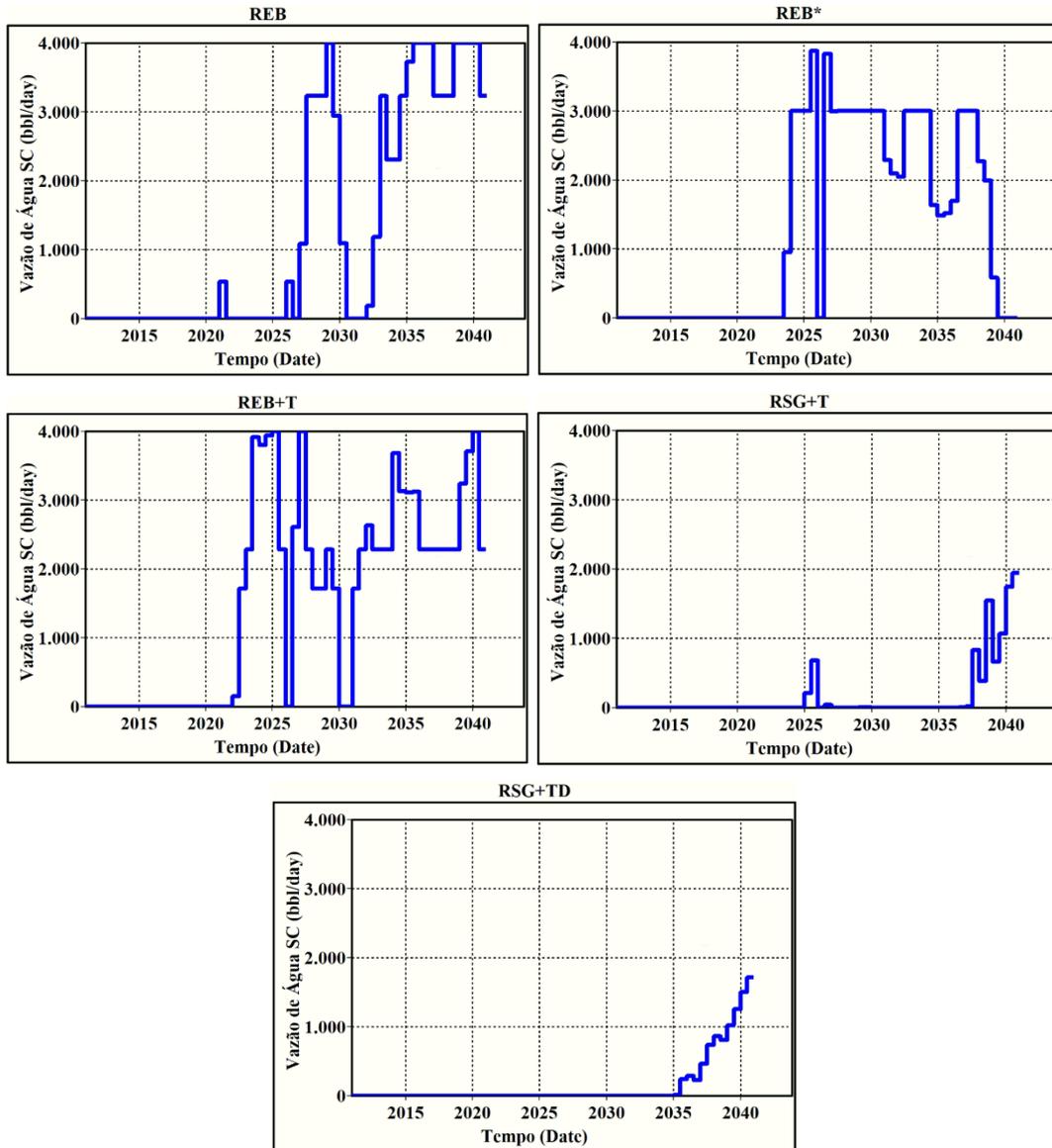
pelo otimizador não são respeitadas pelo simulador devido à perda de pressão no reservatório quando o BHP mínimo foi atingido. Uma alternativa para este problema, conforme comentado anteriormente, é impor a reposição de vazios, usada por muitos pesquisadores como meio de manter o reservatório devidamente pressurizado (HOROWITZ *et al.*, 2013).

Ainda analisando a Figura 26, verifica-se que os refinamentos RSG+T e RSG+TD apresentaram valores reduzidos de injeção de água e uma maior suavidade em seus controles.

A Figura 27 corresponde as trajetórias dos controles ótimos dos poços produtores representados pelo poço produtor P-2. É possível observar que os cinco refinamentos apresentaram mudanças abruptas em seus controles após o processo de otimização.

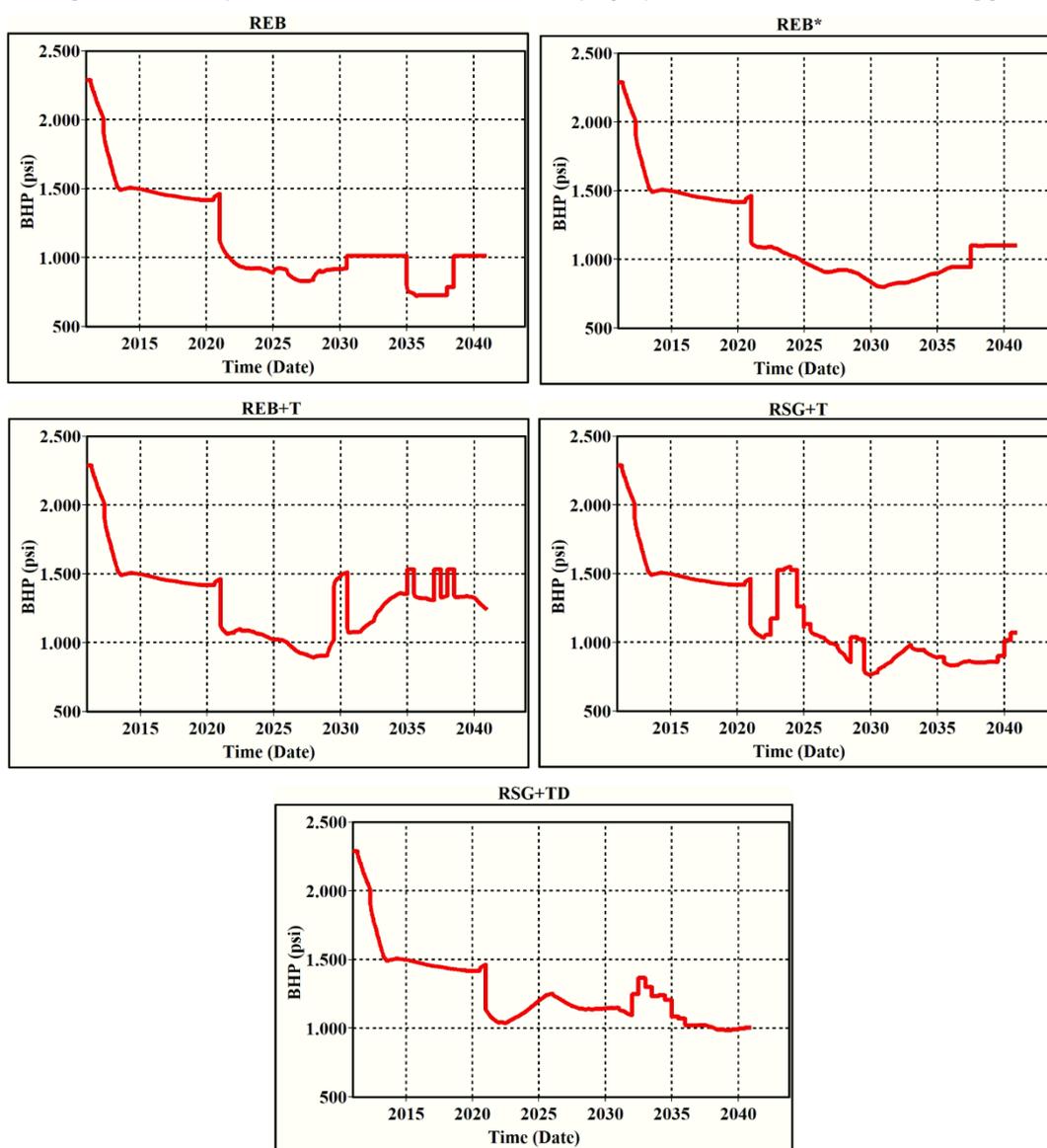
Ainda utilizando os poços I-5 e P-2, realizou-se um comparativo para os cinco refinamentos, entre os resultados obtidos no otimizador em comparação aos resultados obtidos no simulador, e os resultados são apresentados nas Figuras 28 e 29.

Figura 26 – Trajetória ótima dos controles do poço injetor I-5 do modelo Brugge.

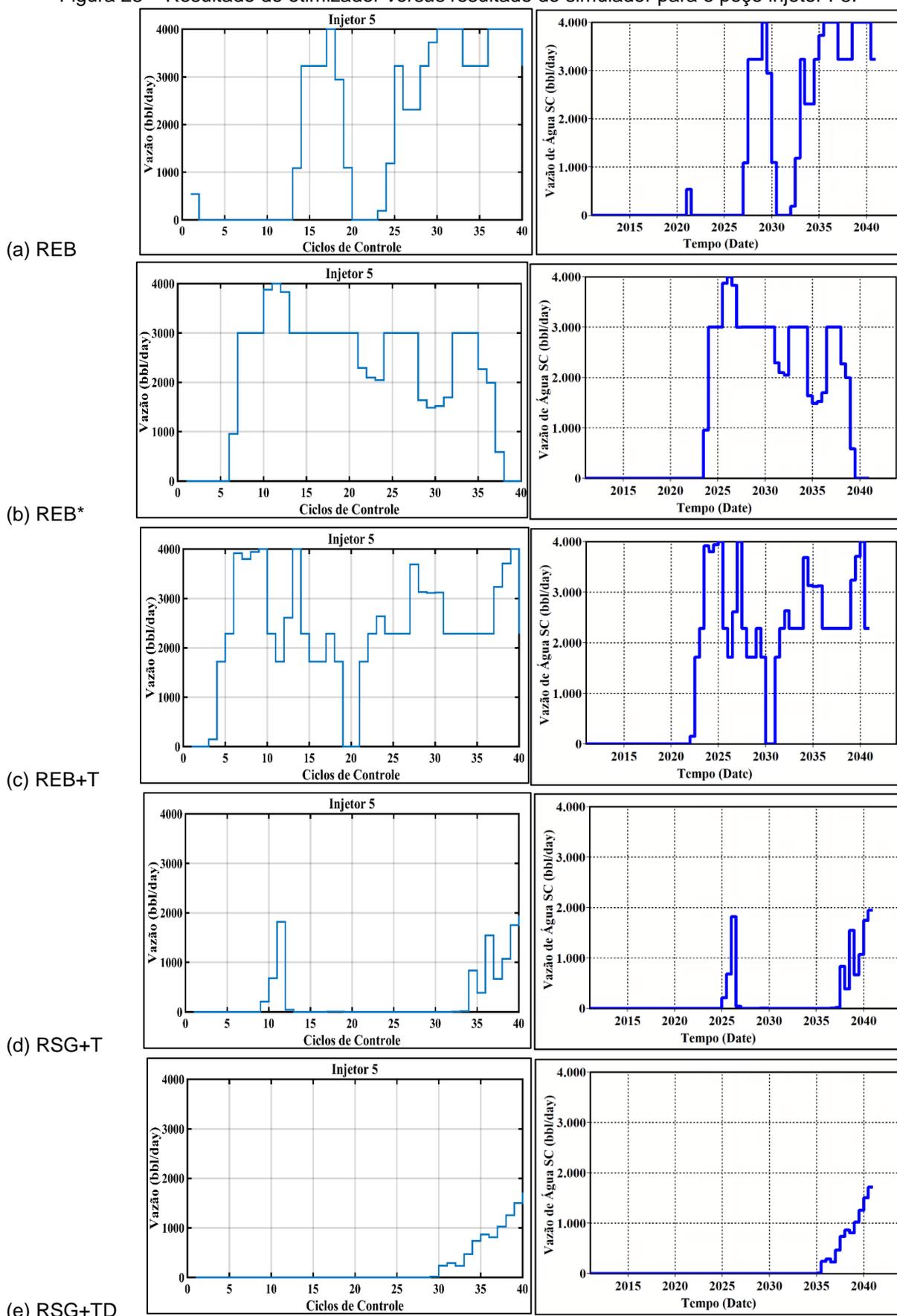


Fonte: A autora (2021).

Figura 27 – Trajetória ótima dos controles do poço produtor P-2 do modelo Brugge.

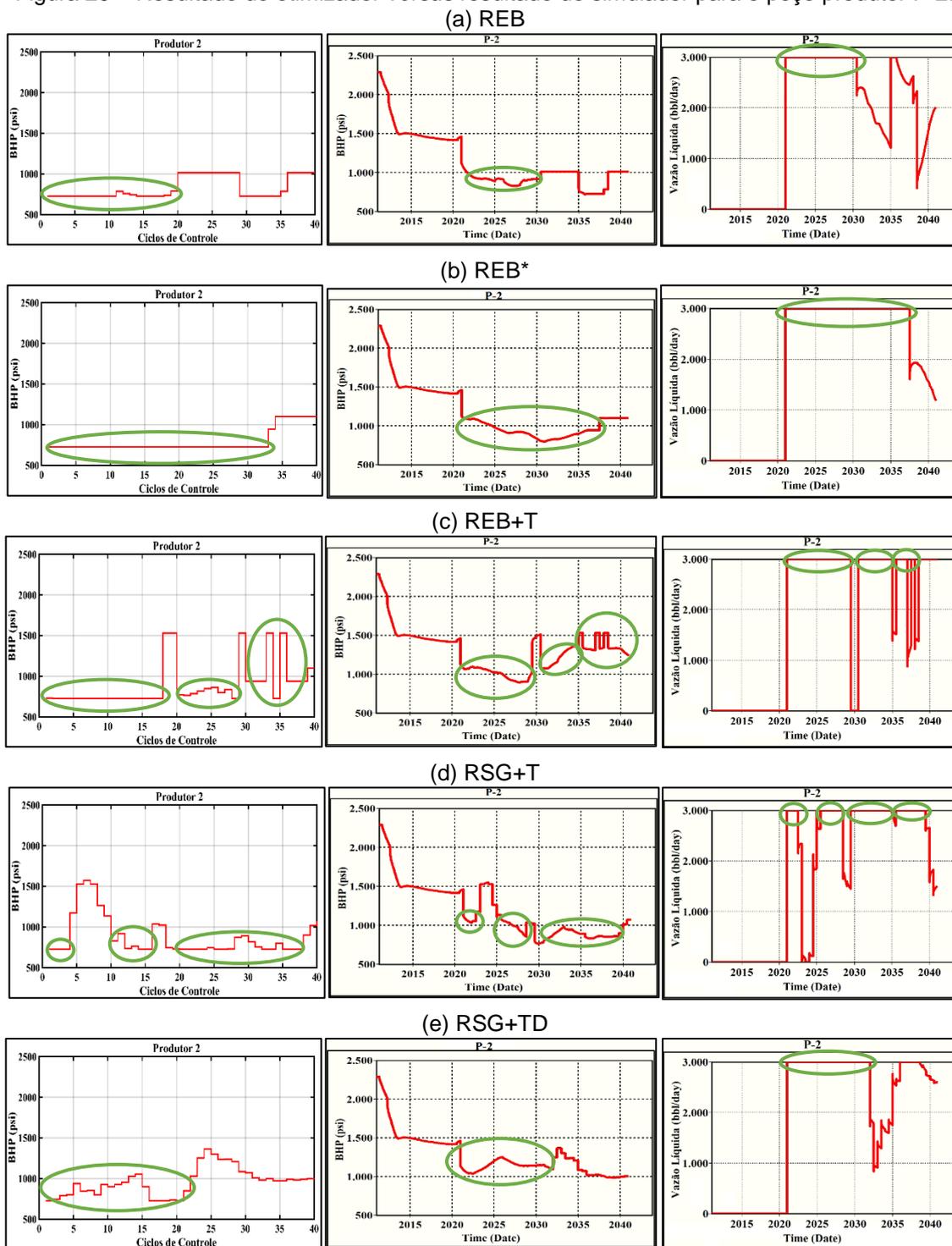


Fonte: A autora (2021).

Figura 28 – Resultado do otimizador *versus* resultado do simulador para o poço injetor I-5.

Fonte: A autora (2021).

Figura 29 – Resultado do otimizador versus resultado do simulador para o poço produtor P-2.



Fonte: A autora (2021).

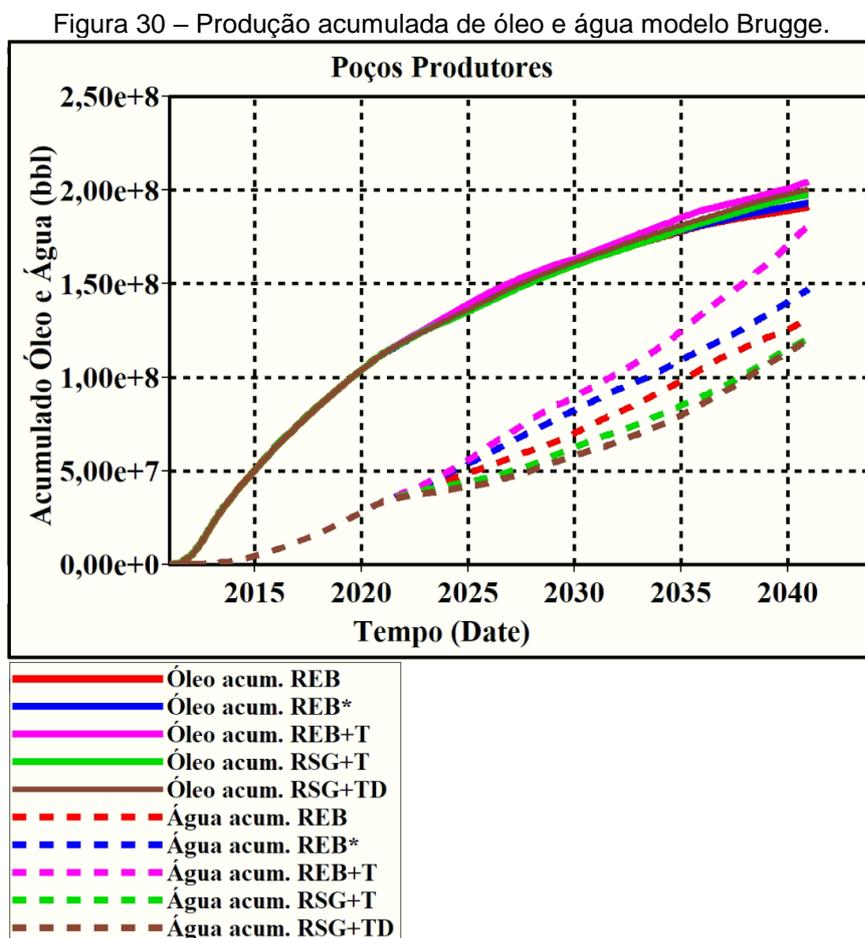
A Figura 28 faz um comparativo entre os resultados do poço injetor I-5. Os gráficos do lado esquerdo referem-se aos resultados obtidos no otimizador e os gráficos do lado direito referem-se aos resultados obtidos no simulador. Verifica-se que os controles passados do otimizador para o simulador são respeitados em todo o período de concessão.

As Figuras 29(a) a (e) trazem os resultados obtidos referente o poço produtor P-2. Para melhor compreensão, reunimos os resultados do BHP e da vazão líquida, onde os gráficos do lado esquerdo referem-se aos resultados obtidos no otimizador para o BHP, os gráficos que estão no centro referem-se aos resultados obtidos no simulador para o BHP, e os gráficos do lado direito referem-se aos resultados obtidos no simulador para a vazão líquida. Na análise de cada refinamento, destacou-se os períodos em que há diferença entre os resultados obtidos no otimizador e os resultados obtidos no simulador para o poço produtor P-2. No refinamento REB (Fig. 29(a)), verifica-se que nos primeiros 19 ciclos de controle, o simulador não consegue respeitar os controles de BHP impostos pelo otimizador. No refinamento REB* (Fig. 29(b)), do 1° ao 32° ciclos de controle, o simulador não consegue respeitar a restrição de BHP imposta pelo simulador. No refinamento REB+T (Fig. 29(c)), verifica-se que nos primeiros 18 ciclos de controle e nos ciclos de controle finais, o simulador não consegue respeitar os controles de BHP impostos pelo otimizador. No refinamento RSG+T (Fig. 29(d)), o simulador não consegue respeitar a restrição de BHP imposta pelo otimizador em diversos ciclos de controle. Já no refinamento RSG+TD (Fig. 29(e)), nos primeiros 22 ciclos de controle, o simulador não consegue respeitar a restrição de BHP imposta pelo otimizador. Observou-se que nos cinco refinamentos (REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD), o simulador não consegue respeitar as restrições de BHP impostas pelo otimizador exatamente nos períodos em que o poço P-2 atingiu a máxima vazão de produção, conforme é apresentado nos gráficos do lado direito das Figuras 29(a) a (e).

Ainda analisando os controles impostos pelo otimizador nas Figuras 29(a) a (e), verifica-se que os refinamentos RSG+T e RSG+TD apresentam controles mais suaves comparados aos refinamentos REB, REB* e REB+T.

A Figura 30 faz um comparativo entre as produções acumuladas de óleo e água para os cinco refinamentos analisados. Com relação à produção acumulada de óleo, o refinamento REB+T se destaca apresentando um aumento de: 2,02% comparado ao refinamento RSG+TD; 3,40% comparado do refinamento RSG+T; 5,64% comparado ao refinamento REB*; e 6,59% comparado ao refinamento REB. Porém, ao analisarmos a produção acumulada de água, o refinamento REB+T apresenta um aumento de: 18,93% comparado ao refinamento REB*; 27,46% comparado ao refinamento REB; 33,28% comparado do refinamento RSG+T; e de 33,75% comparado ao refinamento RSG+TD.

Com o objetivo de complementar visualmente as informações referentes à produção acumulada de óleo e água, são apresentadas nas Figuras 31 e 32 as saturações iniciais e finais, de óleo e água, respectivamente.

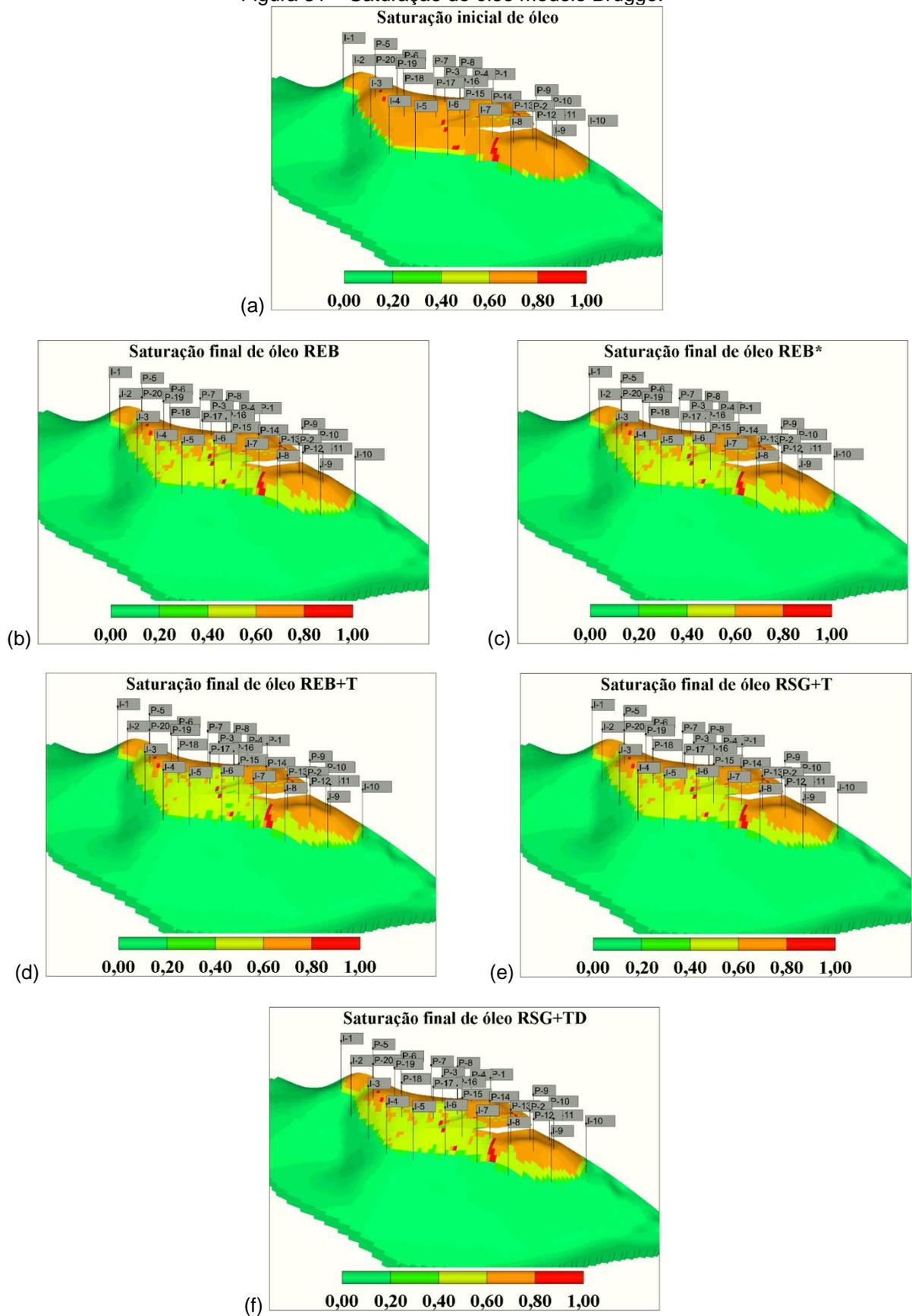


Fonte: A autora (2021).

A Figura 31(a) representa a saturação inicial de óleo no reservatório. É possível verificar que esta saturação se concentra na borda norte e encontra-se entre 50% e 80%, exceto nas regiões próximas dos poços: injetores 6 e 7, e produtores 14, 17 e 20, onde a saturação inicial era 100%. Na borda sul, a saturação de óleo é de 0%, ou seja, não há presença de óleo nesta região.

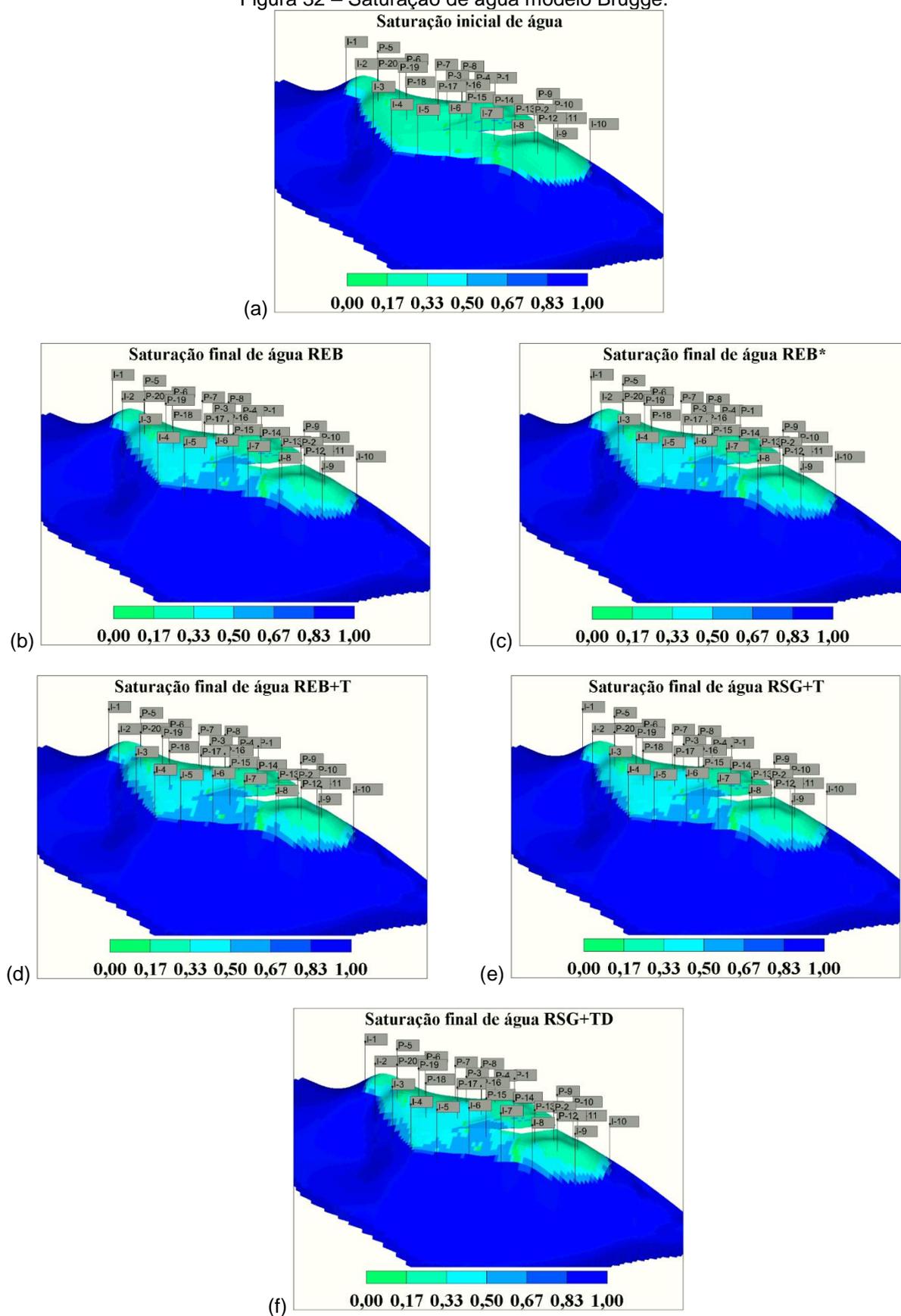
As Figuras 31(b) à (f) correspondem, respectivamente, as saturações finais de óleo com os refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD. Observa-se que com os cinco refinamentos, na região do extremo norte, ainda apresenta alta saturação final de óleo, isso pode ser justificado pelo fato desta região possuir apenas poços produtores, estando os poços injetores na direção oposta.

Figura 31 – Saturação de óleo modelo Brugge.



Fonte: A autora (2021).

Figura 32 – Saturação de água modelo Brugge.



Fonte: A autora (2021).

Por fim, a Figura 32(a) representa a saturação inicial de água no reservatório. Na borda sul, a saturação de água é de 100%, ou seja, não há presença de óleo conforme comentado anteriormente. Na borda norte, a saturação inicial de água encontra-se entre 20% e 50%, exceto nas regiões próximas dos poços: injetores 6 e 7, e produtores 14, 17 e 20, onde não há saturação de água devido a presença de óleo conforme observado e mencionado na análise da Figura 31(a).

As Figuras 32(b) à (f) correspondem, respectivamente, as saturações finais de água com os refinamentos REB, REB*, REB+T, RSG+T e RSG+TD. Comparando-se a saturação final de água do refinamento REB+T (Fig. 32(c)) com as saturações finais de água dos demais refinamentos, observa-se que no refinamento REB+T há uma maior saturação de água na região que se encontra entre os poços: injetor 4, 5, 6 e 7, e produtor 15. Isto se deve ao fato de que ao utilizar o refinamento REB+T, houve uma maior injeção de água no campo, obtendo-se desta forma, uma maior produção de água comparado aos demais refinamentos, conforme também foi comentado nas análises das Figuras 26 e 30.

Pode-se concluir que os refinamentos RSG+T e RSG+TD apresentaram resultados mais satisfatórios comparados aos demais refinamentos, pois alcançaram os maiores valores em termos de VPL, alta produção de óleo e baixa produção de água.

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões inerentes a este estudo, assim como será apresentada propostas para trabalhos futuros.

6.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, para o gerenciamento ótimo do problema de injeção de água em reservatórios sujeitos a restrições, apresentamos o Método Baseado em Ensembles com técnicas de refinamento aplicadas à Matriz de Sensibilidade, com o objetivo de maximizar o valor presente líquido (VPL). As estratégias propostas foram avaliadas em dois modelos de reservatórios realistas existentes na literatura, Brush Canyon Outcrop e Brugge. Entre as principais conclusões temos:

- O algoritmo de otimização selecionado, Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*), tornou-se eficiente para resolver o problema de injeção de água com centenas e milhares de variáveis de controle.
- A técnica de suavização foi utilizada em todos os estudos apresentados para reduzir as mudanças abruptas nas trajetórias dos controles entre ciclos de controle após o processo de otimização.
- Duas estratégias, Método Baseado em Ensemble (*Ensemble Optimization Method – EnOpt*) e o Gradiente Simplex (*Simplex Gradient – SG*), são usadas e comparadas para o cálculo aproximado do vetor gradiente no gerenciamento ótimo do problema de injeção de água. A primeira estratégia, baseia-se no cálculo da média das perturbações, enquanto que a segunda é baseada unicamente nas perturbações.
- O uso de pequenos ensembles nos métodos introduz correlações espúrias na matriz de sensibilidade, conseqüentemente, degrada a qualidade do vetor gradiente.

Para reduzir as correlações espúrias na matriz de sensibilidade foram utilizadas quatro técnicas de refinamento:

- **Truncamento:** esta técnica mantém a sensibilidade do VPL dos poços produtores e injetores no atual ciclo de controle com respeito aos controles anteriores, e elimina a sensibilidade do VPL nos ciclos de controle seguintes, ou seja, a sensibilidade é zero.
- **Amortecimento:** a técnica de amortecimento é aplicada após a estratégia de truncamento. Com sua implementação, regulariza-se a magnitude do valor da sensibilidade com respeito a seu atual ciclo de controle, que decresce em magnitude com respeito ao valor da sensibilidade dos ciclos de controle anteriores.
- **Localização:** esta estratégia abrange duas técnicas, onde os valores dos coeficientes de competitividade refinam a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito a todos os controles dos produtores, enquanto que as conectividades são obtidas através do modelo de capacitância e resistência para poços produtores (CRMP) que refinam a sensibilidade do VPL dos poços produtores com respeito a todos os controles dos poços injetores.
- **Regularização:** esta estratégia também compreende duas técnicas, onde o refinamento da sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos poços produtores, elimina os termos da sensibilidade entre os poços injetores e produtores, uma vez que o VPL dos poços injetores não é afetado pelos controles dos poços produtores. Já a sensibilidade do VPL dos poços injetores com respeito aos controles dos outros poços injetores, é mantida apenas em seus controles correspondentes, e elimina os termos da sensibilidade com respeito aos outros controles, visto que um determinado poço injetor não é afetado pelos controles de outros poços injetores alocados no mesmo reservatório.

Ao aplicarmos estas quatro técnicas para refinar a Matriz de Sensibilidade no Método Baseado em Ensemble e no Gradiente Simplex, obtivemos:

- **Método Baseado em Ensemble Refinado (REB):** inclui as técnicas de localização e regularização e utiliza a média de todas as realizações para calcular a matriz de desvios.

- **Método Baseado em Ensemble Refinado* (REB*):** inclui as técnicas de localização e regularização, porém não utiliza a média de todas as realizações para calcular a matriz de desvios, utiliza apenas as perturbações.
- **Método Baseado em Ensemble Refinado com Truncamento (REB+T):** inclui as técnicas de localização, regularização e truncamento, e utiliza a média de todas as realizações para calcular a matriz de desvios.
- **Gradiente Simplex Refinado com Truncamento (RSG+T):** inclui a técnica do truncamento e ainda as técnicas de regularização e localização na matriz de sensibilidade do campo.
- **Gradiente Simplex Refinado com Truncamento e Amortecimento (RSG+TD):** inclui as técnicas de truncamento e amortecimento, e ainda a técnica de localização e regularização na matriz de sensibilidade do campo.
- **Não** apresentamos o Método Baseado em Ensemble Refinado com Truncamento e Amortecimento (REB+TD) pois este não apresentou resultados satisfatórios em nosso estudo.

Ao compararmos as cinco estratégias de refinamento propostas, observou-se que o Gradiente Simplex Refinado produz melhores resultados comparado ao Método Baseado em Ensemble Refinado. Observou-se ainda que:

- Os resultados obtidos com as cinco estratégias de refinamento propostas, mostraram melhoria da qualidade do vetor gradiente e conseqüentemente melhoraram o valor final do VPL.
- Recomendamos o uso de 20 a 30 membros por ensemble com técnicas de refinamento para melhorar a qualidade do vetor gradiente e maximizar o VPL.
- O custo computacional de todos os refinamentos utilizados (conectividade, localização, amortecimento e truncamento), é equivalente a sete simulações. Onde cinco são para o cálculo das conectividades, uma para calcular os coeficientes de competitividade e uma para calcular o amortecimento e truncamento.
- No modelo BCO, com o Gradiente Simplex Refinado com Truncamento (RSG+T), obtivemos ganhos de 0,14% no VPL comparado ao Método Baseado em Ensemble Refinado (REB) e 3,13% comparado ao Método

Baseado em Ensemble Refinado com Truncamento (REB+T). Além do ganho em termos de VPL, o Gradiente Simplex Refinado com Truncamento (RSG+T) apresentou uma redução na variabilidade dos resultados comparado ao Método Baseado em Ensemble Refinado (REB) e Método Baseado em Ensemble Refinado com Truncamento (REB+T).

- No modelo de Brugge, com o Gradiente Simplex Refinado com Truncamento e Amortecimento (RSG+TD), obtivemos um ganho no VPL de 3,82% comparado ao Gradiente Simplex Refinado com Truncamento (RSG+T), 6,24% comparado ao Método Baseado em Ensemble Refinado com Truncamento (REB+T), 8,25% comparado ao Método Baseado em Ensemble Refinado (REB) e 9,06% comparado ao Método Baseado em Ensemble Refinado* (REB*).
- Por fim, recomendamos utilizar as técnicas de truncamento, amortecimento, localização e regularização na matriz de sensibilidade, para obter resultados satisfatórios.

6.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Baseado nos estudos desenvolvidos no presente trabalho, sugerimos algumas considerações para trabalhos futuros:

1. Aplicar o Método do Gradiente Simplex com técnicas de refinamento para resolver problemas de otimização considerando incertezas, otimização robusta.
2. Aplicar o Método do Gradiente Simplex com técnicas de refinamento em problemas de otimização quando ocorre injeção de água alternada com gás, WAG-CO₂.
3. Aplicar o Método do Gradiente Simplex com técnicas de refinamento para resolver problemas injeção de água quando apresenta restrições de estado.
4. Calcular os coeficientes de competitividade e conectividade utilizando inteligência artificial para refinar a matriz de sensibilidade, adotando dados do histórico de produção e injeção.

REFERÊNCIAS

- AHMED, T. **Reservoir engineering handbook - 4th ed.** Gulf Professional Publishing, Burlington, 2010.
- AHMED, T.; MCKINNEY, P.D. **Advanced Reservoir Engineering.** Gulf Professional Publishing, Burlington, 2005.
- ALIM, M. **Constraint Handling in Life-cycle Optimization Using Ensemble Gradient. Department of Geoscience & Engineering.** Delft University of Technology. The Netherland Thesis Report AES/PE/13-44. 2013.
- ANTONIOU, A.; LU, W. –S. **Practical Optimization: Algorithms and Engineering Applications.** New York. Springer Science+Business Media, LLC, 2007.
- BINIAZ DELIJANI, E.; PISHVAIE, M.R.; BOZORGMEHRY, R. **Distance Dependent Localization Approach in Oil Reservoir History Matching: A Comparative Study.** Iranian Journal of Chemistry and Chemical Engineering. http://www.ijcce.ac.ir/article_7199.html. 2014.
- BROUWER, D.R.; JANSEN, J.D. **Dynamic Optimization of Waterflooding With Smart Wells Using Optimal Control Theory.** SPE J.9(4), 391–402. SPE -78278-PA. <https://doi.org/10.2118/78278-PA>, 2004.
- CHANG, Y.; LORENTZEN, R.J.; NÆVDAL, G.; FENG, T. **OLYMPUS optimization under geological uncertainty.** *Comput Geosci* 24, 2027–2042. <https://doi.org/10.1007/s10596-019-09892-x>. 2019.
- CRAFT, B.C.; HAWKINS, M.F. **Applied Petroleum Reservoir Engineering.** Prentice Hall Inc., 2nd ed., 1990.
- CHEN, Y.; OLIVER, D.S. **Ensemble-Based Closed-Loop Optimization Applied to Brugge Field.** Paper presented at the SPE Reservoir Simulation Symposium, The Woodlands, Texas, February 2009. doi: <https://doi.org/10.2118/118926-MS>. 2009.
- CHEN, Y.; OLIVER, D.S.; ZHANG, D. **Efficient Ensemble-Based Closed-Loop Production Optimization.** *SPE J.* 14 (2009): 634–645. doi: <https://doi.org/10.2118/112873-PA>, 2009.
- CHEN, Y.; OLIVER, D.S. **Localization of Ensemble-Based Control-Setting-Updates for Production Optimization.** *SPE Journal.* Vol., 17, pp. 122–136. 2012.
- DAKE, L. P. **The Practice of Reservoir Engineering.** Elsevier, Amsterdam, 1994.
- DAVUDOV, D.; MALKOV, A.; VENKATRAMAN, A. **Integration of Capacitance Resistance Model with Reservoir Simulation.** Paper presented at the SPE Improved Oil Recovery Conference, Virtual. doi: <https://doi.org/10.2118/200332-MS>. August 2020.

DEHDARI, V.; OLIVER, D.S., **Sequential Quadratic Programming for Solving Constrained Production Optimization – Case Study from Brugge Field**. SPE Journal. Vol., 17, pp. 874–884. 2012.

DO, S. T.; REYNOLDS, A. C. **Theoretical connections between optimization algorithms based on an approximate gradient**. *Comput Geosci* 17, 959–973 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10596-013-9368-9>. 2013.

EDGAR, T. F.; HIMMELBLAU, D. M.; LASDON, L. S. **Optimization of chemical processes**. McGraw-Hill, 2nd ed., 2001.

FANCHI, J.R. **Principles of applied reservoir simulation - 2nd edition**. Gulf Publishing Company, Houston, TX, 2001.

FONSECA, R. M.; KAHROBAEI, S. S.; VAN GASTEL, L. J. T.; LEEUWENBURGH, O.; JANSEN, J. D. **Quantification of the Impact of Ensemble Size on the Quality of an Ensemble Gradient Using Principles of Hypothesis Testing**. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/173236-MS. 2015a.

FONSECA, R.M.; LEEUWENBURGH, O.; VAN DEN HOF, JANSEN, J. D. **Improving the Ensemble-Optimization Method Through Covariance-Matrix Adaptation**. *SPE J.* 20 (2015): 155–168. doi: <https://doi.org/10.2118/163657-PA>. 2015b.

FOROUZANFAR, F.; POQUIOMA, W. E.; REYNOLDS, A. C. **Simultaneous and Sequential Estimation of Optimal Placement and Controls of Wells With a Covariance Matrix Adaptation Algorithm**. *SPE J.* 21 (2016): 501–521. doi: <https://doi.org/10.2118/173256-PA>. 2016.

GENTIL, P.H. **The Use of Multilinear Regression Models in Patterned Waterfloods: Physical Meaning of the Regression Coefficients**, M.S. Thesis, The University of Texas at Austin, August, 2005.

GILL, P. E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M. A. **SNOPT: An SQP Algorithm for large-scale constrained optimization**. *SIAM Review*. Vol., 47, pp. 99-131. 2005.

GOLUB, G. **Numerical methods for solving linear least squares problems**. *Numer. Math.* 7, 206–216 (1965). <https://doi.org/10.1007/BF01436075>. 1965.

HOLANDA, R. W. **Capacitance resistance model in a control systems framework: a tool for describing and controlling waterflooding reservoirs**. M.S. Thesis, the University of Texas A&M, April, 2015.

HOROWITZ, B.; BASTOS AFONSO. S.; PAIVA DE MENDOÇA, C. **Surogate based optimal waterflooding management**. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Vol. 112, pp. 206-219. 2013.

IMEX. **User's guide**. Computer Modeling Group LTDA. Calgary, Canada. 2017.

JANSEN, J.D. **Adjoint-based optimization of multiphase flow through porous media – a review**. *Comput. Fluids*. 46(1), 40–51, 2011.

JENSEN, J.L.; LAKE, L.W.; CORBBETT, P.W.M.; GOGGIN, D.J. **Statistics for Petroleum Engineers and Geoscientists**, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey (1997).

KIM, J.S. **Development of Linear Capacitance-Resistance Models for Characterizing Waterflooded Reservoirs**. M.S. Thesis, The University of Texas at Austin, August, 2011.

LEE, J.; ROLLINS, J.B.; SPIVEY, J.P. **Pressure Transient Testing**. Society of Petroleum Engineers Inc., 2003.

LINS, H. K. F. **Métodos Baseados em Modelos de Capacitância e Resistência Dinâmicos em Reservatórios de Petróleo de Múltiplas Camadas**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Centro de Tecnologia e Geociências. Universidade Federal de Pernambuco, Recife/ PE, 2018.

LORENZENT, R.J.; BERG, A.M.; NAEVDAL, G.; VEFRING, E.H. **A new Approach for Dynamic Optimization of Waterflooding Problems**. Paper SPE 99690 presented at *the Intelligent Energy Conference and Exhibition, Amsterdam*, 11-13 April, 2006.

MANDEL, J. **Use of the Singular Value Decomposition in Regression Analysis**. *The American Statistician*, 36(1), 15-24. doi:10.2307/2684086. 1982.

MATLAB, version R2016a. The MathWorks Inc. 2016.

MITTELHAMMER, R. C.; MILLER, D. J.; JUDGE, G. G. **Econometric Foundations**. Cambridge: Cambridge University Press. pp. 197–198. ISBN 0-521-62394-4. 2000.

MORENO, G. **Multilayer capacitance–resistance model with dynamic connectivities**. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. Doi:109. 298-307. 10.1016/j.petrol.2013.08.009. 2013.

NAUDOMSUP, N.; LARRY, L.W. **Extension of Capacitance/Resistance Model to Tracer Flow for Determining Reservoir Properties**. *SPE Res Eval & Eng* 22 (2019): 266–281. doi: <https://doi.org/10.2118/187410-PA>. 2019.

NWAOZO, J. **Dynamic optimization of waterflood reservoir**. MS thesis, University of Oklahoma, Norman, Oklahoma. 2006.

OLIVEIRA, D. F. **Técnicas de otimização da produção para reservatórios de petróleo: abordagens sem uso de derivadas para alocação dinâmica das vazões de produção e injeção**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2006.

OLIVEIRA, D. F. **A New Hierarchical Multscale Optimization Method: Gradient And Non-Gradient Approaches For Waterflooding Optimization**. The University of Tulsa. Phd. dissertation, 2014.

OLIVEIRA, D. S.; HOROWITZ, B.; TUEROS, J. A. R. **Ensemble-based method with combined fractional flow model for waterflooding optimization**. Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles. <https://doi.org/10.2516/ogst/2020090>. 2021.

PETERS, E.; ARTS, R.J.; BROUWER, G.K.; GEEL, C.R. **Results of the Brugge Benchmark Study for Flooding Optimisation and History Matching**. Paper SPE 119094 presented at the *SPE Reservoir Simulation Symposium*, The Woodlands, Texas, USA, 2-4 February. doi: 10.2118/119094-MS. 2009.

QUEIROZ, B. A. **Comparação de técnicas de modelação de completações inteligente e sua aplicação na otimização**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2020.

RAMASWAMY, K. R. **Improved sampling for ensemble-based reservoir optimization with and without uncertainty**. Master thesis – Eindhoven University of Technology. Eindhoven, 2017.

SAYARPOUR, M.; ZULUAGA, E.; KABIR, C.S.; LAKE, L.W. **The use of capacitance-resistive models for rapid estimation of waterflood performance**, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers*, <https://doi.org/10.2118/110081-MS>. 2007.

SAYARPOUR, M.; ZULUAGA, E.; KABIR, C.S.; LAKE, L.W. **The use of capacitance-resistive models for rapid estimation of waterflood performance and optimization**, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 69 (3-4):227-238. <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>. 2009.

SU, H.J.; OLIVER, D.S. **Smart-Well Production Optimization Using an Ensemble-Based Method**. *SPE Res Eval & Eng* 13 (2010): 884–892. doi: <https://doi.org/10.2118/126072-PA>. 2010.

TORRES, J. S. **Otimização de Pórticos de Concreto Armado Utilizando o Sistema Computacional ANSYS**. 2001. Dissertação de Mestrado. Universidade de Pernambuco, Recife-PE, 2001.

TUEROS, J.A.R.; HOROWITZ, B.; WILLMERSDORF, R. **Numerical Experience With An Ensemble-Based Method For Constrined Waterflooding Optimization**, CILAMCE 2015, XXXVI Congresso Ibero Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia, Rio Janeiro, RJ, Novembro 22-25, 2015.

TUEROS, J.A.R.; HOROWITZ, B.; WILLMERSDORF, R. **Método baseado em ensemble com refinamento na matriz de sensibilidade para otimização de injeção água com poços inteligentes**. CILAMCE 2016, XXXVII Congresso Ibero Latino Americano em Métodos Computacionais em Engenharia, Brasília, DF, Novembro 6-9, 2016.

TUEROS, J.A.R.; HOROWITZ, B.; WILLMERSDORF, R.B.; OLIVEIRA, D.F.B. **Non-distance-based localization techniques for ensemble-based waterflooding optimization**, Journal of Petroleum Science and Engineering, online, ISSN 0920-4105, <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.06.089>. 2018a.

TUEROS, J.A.R.; HOROWITZ, B.; WILLMERSDORF, R.; OLIVEIRA, D. **Refined Ensemble-Based Waterflooding Optimization Subject To Field-Wide Constraints**. ECMOR XVI - 16th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Volume 2018, p.1 – 19. Barcelona, Spain, September 2018b.

TUEROS, J.A.R. **Refinamento do método baseado em ensembles para controle ótimo do problema de injeção de água**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2019.

TUEROS, J.A.R.; HOROWITZ, B.; WILLMERSDORF, R.B.; OLIVEIRA, D. F. B. **Refined ensemble-based waterflooding optimization subject to field-wide constraints**. *Comput Geosci* 24, 871–887 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10596-019-09866-z>. Published, August 2020.

TUEROS, J.A.R.; HOROWITZ, B. **Refined Ensemble-Based Method for Waterflooding Problem with State Constraints**. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202035040>. Published, September 2020.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design: with applications**. New York (N. Y.): McGraw-Hill Ryerson, Limited, 1984.

VANDERPLAATS, G. N.; SUGIMOTO, H. **Application of Variable Metric Methods to Structural Synthesis**. *Engineering Computations*, Vol. 2, N° 2, pp. 96-100, June, 1985.

VOLKOV, O.; BELLOUT, M.C. **Gradient-based production optimization with simulation-based economic constraints**. *Comput. Geosci.* 1385–1402. <https://doi.org/10.1007/s10596-017-9634-3>, 2017.

WEBER, D. **The Use of Capacitance-Resistance Models to Optimize Injection Allocation and Well Location in Waterfloods**. Ph.D dissertation, The University of Texas at Austin. 2009.

WEBER, D.; EDGAR, T.F.; LAKE, L.W.; LASDON, L.; KAWAS, S.; SAYARPOUR, M. **Improvements in Capacitance-Resistive Modeling and Optimization of Large Scale Reservoirs**. SPE-121299-MS. 2009.

WHEN, X.; CHEN, W. **Real-Time Reservoir Updating Using Ensemble Kalman Filter**. *SPE Journal*. Vol., 11. Doi: [10.2118/92991-MS](https://doi.org/10.2118/92991-MS). 2006.

YOUSEF, A. **Investigating Statistical Techniques to Infer Interwell Connectivity from Production and Injection Rate Fluctuations**. Ph.D dissertation, The University of Texas at Austin, 2006.

ZHANG, Z.; LI, H.M.; ZHANG, D. **Waterflooding Performance Prediction by Multi-Layer Capacitance-Resistive Models Combined With the Ensemble Kalman filter**, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 108, July 2013 Pages 107-117 ISSN 0920-4105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2015.01.020>. 2015.

ZIMMERMAN, R.W. **The Imperial College lectures in petroleum engineering – Fluid Flow in Porous Media**. Imperial College London, UK, 2018.