UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
DEPARTAMENTO DE
CURSO MATEMÁTICA - LICENCIATURA

MARIA LARISSA LOPES PEREIRA DA SILVA

ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA POR ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Caruaru
2019

MARIA LARISSA LOPES PEREIRA DA SILVA

ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA POR ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Graduada em Matemática-Licenciatura.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edelweis Jose Tavares Barbosa.

Caruaru

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S586a Silva, Maria Larissa Lopes Pereira da.
Análise dos erros cometidos na resolução de problemas de álgebra por alunos do 3º ano do ensino médio. / Maria Larissa Lopes Pereira da Silva. – 2019.
58 f. il. : 30 cm.

Orientadora: Edelweis Jose Tavares Barbosa.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Análise de erros (Matemática). 2. Álgebra – Estudo e ensino. 3. Ensino e aprendizagem. 4. Matemática – Estudo e ensino. I. Barbosa, Edelweis Jose Tavares (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-077)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro Acadêmico do Agreste

Núcleo de Formação Docente

Curso de Matemática - Licenciatura

ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA POR ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

MARIA LARISSA LOPES PEREIRA DA SILVA

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e APROVADA em 17 de junho de 2019.

Banca Examinadora:

____
Prof. Edelweis Jose Tavares Barbosa
(Orientador)

____
Profa. Jaqueline Ap. Foratto Lixandrão Santos
(Examinadora Interna)

____
Prof. Valdir Bezerra dos Santos Júnior
(Examinador Interno)

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

Em primeiro lugar a Deus, por me dar a vida e permitir que hoje esteja aqui finalizando mais essa etapa na minha vida e sei que Ele sempre me abençoou e protegeu durante essa caminhada.

Aos meus pais, José Carlos e Irene Lopes, por sempre me apoiar e incentivar a seguir o melhor caminho, segurando sempre em minha mão. Se hoje sou o que sou, e estou aqui, devo tudo isso a vocês.

Ao meu esposo, Luís Gustavo, por toda compreensão, incentivo e paciência para comigo em todo esse tempo em que muitas vezes estive ausente.

Ao meu irmão José Vitor, por sempre estar ao meu lado me apoiando em tudo.

As minhas amigas, Aline Soares, Gerliane Araújo e Luanna de Melo, meu muito obrigada por estarem sempre ao meu lado, alegrando minhas noites em todos esses anos de curso, pelas conversas, conselhos, pelos momentos de partilha e por me ajudarem de alguma forma a estar aqui. Vocês ficarão para sempre no meu coração.

Aos meus companheiros de viagens, aos que já se formaram e aos que permanecem nessa grande aventura, obrigada por tornarem as viagens menos cansativas e longas, em especial a minha amiga de infância Cibele Maria, em que dividimos muitos momentos juntas, desde a creche até o ensino superior.

Aos todos os meus professores, que de alguma forma me serviram de inspiração e que me motivaram a chegar ao fim desta jornada.

Ao meu orientador Edelweis Tavares por todos os ensinamentos e ajuda durante a construção deste trabalho, que com certeza ficarão marcados em minha vida acadêmica.

Aos professores Valdir Bezerra e Jaqueline Santos, pelas contribuições feitas para a melhoria deste trabalho.

“Me movo como educador, porque, primeiro, me movo como gente. ”

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho apresenta resultados de uma pesquisa qualitativa, que tem por objetivo analisar os principais tipos de erros relacionados à álgebra, a partir das concepções de álgebra de Usiskin (1995), em questões resolvidas por alguns alunos do 3º ano do Ensino Médio. Foi aplicado um questionário envolvendo questões de Álgebra Funcional, Álgebra Equacional, Álgebra Estrutural e Aritmética Generalizada, selecionadas em provas do SAEPE, ENEM e SSA, dos anos de 2015 a 2017, com 27 alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola pública no município de Passira – PE, a fim de analisar e categorizar os erros cometidos por esses alunos a partir do modelo empírico de categorização de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Incialmente buscou-se trazer um pouco dos aspectos históricos da álgebra, apresentamos o que afirma os documentos curriculares sobre o ensino de álgebra na educação básica, trazemos o que afirma Ribeiro e Cury (2015) e Santos (2014) sobre o ensino da álgebra e sobre a perspectiva do erro trouxemos Torre (2007) e Sanmarti (2009), a fim de apresentar o papel do erro dentro da sala de aula, no processo de ensino e aprendizagem de matemática. A partir disso, pudemos identificar que a principal dificuldade dos alunos em resolver problemas de álgebra se da a incompreensão dos dados fornecidos na questão, sendo esse um dos fatores, entre os demais que serão apresentados, que justificam os erros cometidos por esses alunos.

Palavras-chave: Análise de erros. Álgebra. Ensino e Aprendizagem. Matemática.

ABSTRACT

This work presents the results of a qualitative research, which aims to analyze the main types of errors related to algebra, from Usiskin's (1995) conceptions of algebra, in questions solved by some students of the 3rd year of High School. A questionnaire involving questions of Functional Algebra, Equation Algebra, Structural Algebra and Generalized Arithmetic, selected in SAEPE, ENEM and SSA, from the years 2015 to 2017, was applied, with 27 students from the 3rd year of high school in a public school in the in order to analyze and categorize the errors committed by these students from the empirical model of error categorization of Movshovitz-Hadar, Zaslavsky and Inbar (1987). Initially we tried to bring some of the historical aspects of algebra, we present what the curricular documents affirm about the teaching of algebra in basic education, we bring what affirms Ribeiro and Cury (2015) and Santos (2014) on the teaching of algebra and on the perspective of error we have brought Torre (2007) and Sanmarti (2009) in order to present the role of error within the classroom in the process of teaching and learning mathematics. From this, we were able to identify that the main difficulty of students in solving algebra problems is the incomprehension of the data provided in the question, being one of the factors, among others that will be presented, that justify the errors committed by these students.

Keywords: Error analysis. Algebra. Teaching and learning. Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1–	Tablete Babilônico...	15
Figura 2–	Papiro de Ahmes	16
Figura 3 –	Papiro de Moscou...	17
Figura 4 –	Decomposição do quadrado...	20
Figura 5 –	Questão com Concepção Álgebra como Aritmética Generalizada..	34
Figura 6 –	Questão com Concepção Álgebra como relação entre grandezas..	34
Figura 7 –	Questão com Concepção Álgebra como procedimentos para resolver problemas..	35
Figura 8 –	Questão com Concepção Álgebra como estudo das estruturas...	35
Gráfico 1 –	Distribuição das questões por concepção..........................	37
Gráfico 2 –	Concepções Identificadas - SAEPE..................................	38
Gráfico 3 –	Concepções Identificadas - SSA 2015 (Vestibular 2016)	38
Gráfico 4 –	Concepções Identificadas - SSA 2016 (Vestibular 2017)	39
Gráfico 5 –	Concepções Identificadas - SSA 2017 (Vestibular 2018)	39
Quadro 1 –	Erros identificados por classificação	40
Figura 9 –	Questão 4, aluno A27..	42
Figura 10 –	Questão 7, aluno A24..	43
Figura 11 -	Questão 9, aluno A16...	43
Figura 12 –	Questão 10, aluno A6..	44
Figura 13 –	Questão 3, aluno A14..	45
Figura 14 –	Questão 8, aluno A4...	46
Figura 15 –	Questão 2, aluno A5...	47
Figura 16 –	Questão 4, aluno A5..	47
Figura 17 –	Questão 1, aluno A18..	48
Figura 18 –	Questão 6, aluno A25..	49
Figura 19 –	Questão 5, aluno A1..	49
Quadro 2 -	Quantidade de questões erradas por concepção...............	50

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**..	**10**
1.1	OBJETIVOGERAL..	12
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
2	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**..	**14**
2.1	ÁLGEBRA: CONTEXTOS HISTÓRICOS	14
2.1.1	**Matemática dos Babilônios e Egípcios**..	**14**
2.1.2	**Matemática dos Gregos**	**18**
2.1.3	**Matemática dos Árabes e Hindus**	**20**
2.1.4	**Matemática Europeia de 500 a 1600**	**22**
2.2	O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	24
2.3	USISKIN (1995) E SUAS CONCEPÇÕES SOBRE A ÁLGEBRA	27
2.4	O PAPEL DO ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ……………………..........	29
3	**METODOLÓGIA**……………………………………….…...................	**33**
4	**ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS**………………………….......	**37**
4.1	ANÁLISE DAS PROVAS ……………………………………...........	37
4.2	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS ……………………………………	41
4.2.1	**Erros encontrados sobre Dados mal interpretados**.…………………...	**42**
4.2.2	**Erros encontrados sobre Linguagem mal interpretada**………………	**44**
4.2.3	**Erros sobre Inferência Logicamente Inválida** …………………….......	**44**
4.2.4	**Erros sobre Teorema distorcido ou definição** …………………………	**46**
4.2.5	**Erros sobre Solução não verificada** ………………………..................	**48**
4.2.6	**Erros sobre Erro Técnico** …………………………...............................	**49**
4.2.7	**Erros Incompreensíveis** …………………………..................................	**49**
5	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**52**
	REFERÊNCIAS	**54**
	APÊNDICE	**55**

1 INTRODUÇÃO

Na matemática o erro pode ser fruto de diversos fatores que podem influenciar o aluno a cometê-lo, sejam esses fatores relacionados à linguagem e interpretação de questões, dificuldade de compreensão do conteúdo ou até mesmo a falta de atenção na resolução de um problema, e dessa maneira pode comprometer a sua aprendizagem.

No ensino de álgebra, mesmo ela sendo vista pelos alunos desde os anos iniciais do ensino fundamental, até o ensino médio, em que é lhe ensinado um vasto conhecimento algébrico com o passar dos anos, ainda é possível perceber erros relacionados às simples operações em sala de aula, cometido por alunos do ensino médio, sendo esses erros referentes à incompreensão dos conceitos, nas dificuldades de manipulação simbólica e nas operações matemáticas que estão presentes nas questões.

A complexidade da matemática e a não identificação com a área por parte dos alunos pode causar os inúmeros erros que são encontrados em provas e atividades avaliativas. Analisar os erros cometidos pelos alunos nos dá uma possibilidade de investigar qual grau de dificuldade que aquele aluno se encontra, qual o tratamento correto que deve ser seguido pelo professor para fazer com que o aluno compreenda em que errou e como esse erro pode contribuir para a sua aprendizagem, de forma significativa.

No Ensino Médio, principalmente no 3º ano, há uma cobrança por parte dos professores acerca dos vestibulares e provas externas que acontecem nesse ano, e muitas vezes os erros cometidos por esses alunos em questões de matemática passam despercebidos ou até mesmo eles próprios não saibam em que estão errando por não se haver uma discussão e análise correta dos seus erros. Investigar esses erros, mesmo que os alunos estejam no último ano da educação básica, pode ajudá-los a compreender as questões de forma melhor, na preparação para os vestibulares, mesmo para aqueles que têm mais dificuldade com a matemática.

Ao pensar sobre o que investigar em meu projeto de pesquisa, me chamou a atenção a questão da análise dos erros na resolução de problemas e como nós professores e futuros podemos a partir desses erros planejar abordagens que possam contribuir para que estes sejam diminuídos.

Buscar metodologias que contribuam para a interação do professor com os alunos auxiliam para que o processo de aprendizagem tenha sucesso, visto que cada aluno tem sua forma de aprender e compreender os conceitos matemáticos. Apenas a explicação do conteúdo e resolver problemas sem expressar suas dúvidas e questionamentos não faz com que o aluno passe a compreender tal atividade, é necessário fazer à análise a respeito das dificuldades dos alunos e seus erros, de que partem e se há alguma relação com má interpretação de questões ou com fatores psicológicos relacionados ao medo e a complexidade que sentem da matemática.

Muitas vezes os professores não tendem a considerar e analisar o erro cometido pelo aluno e em atividades avaliativas não considera o que foi feito. Na maioria das vezes os professores não se preocupam em considerar nada do que foi desenvolvido pelo aluno (a), mas o que pode acontecer são erros simples que influenciam no resultado, seja em uma operação ou até confusão de números. Por outro lado, muitos alunos vêm desde o ensino fundamental com dificuldades que não são percebidas pelos professores e que com o passar dos anos pode atrapalhar no seu desempenho, muito mais ainda quando estão se preparando para vestibulares, o que pode interferir na sua vida acadêmica e até profissional.

Assim, em minha vivência de Estágio II, pude ter contato com alunos do 3º ano do Ensino Médio e ver que são realizados aulões e simulados de preparação para vestibulares e provas externas, com isso me veio uma pergunta em mente: Será que esses alunos estão realmente preparados para resolver problemas de álgebra? E quais os erros que eles ainda cometem? E pensando em trabalhar com questões que envolvam álgebra, vimos que os documentos afirmam da importância do ensino de álgebra e a contextualização desse conteúdo nas questões trabalhadas em sala de aula. Então, ao selecionar questões de álgebra que contemplem as concepções de Usiskin (1995), percebi na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática II que o autor afirma do uso das letras e sua função dentro dos conteúdos da matemática, mostrando a importância da álgebra dentro da educação básica.

Dessa maneira, o problema central dessa pesquisa pode ser apresentado da seguinte forma: **Quais os possíveis erros cometidos por alunos do 3° ano do Ensino Médio de uma escola pública de Passira em problemas de álgebra?**

Assim, temos como objetivo geral analisar tipos de erros relacionados à álgebra, a partir das concepções de álgebra de Usiskin (1995), em questões resolvidas por alguns alunos do 3º ano do Ensino Médio, e específicos:

- Localizar em provas do Sistema Seriado de Avaliação (SSA) da Universidade de Pernambuco (UPE) fases 1, 2 e 3; Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) questões de Álgebra que sejam classificadas dentre as concepções de Usiskin (1995);
- Identificar as principais dificuldades relacionadas à álgebra dos alunos;
- Verificar as estratégias utilizadas na resolução dos problemas algébricos;

- Identificar e caracterizar os principais tipos de erros cometidos pelos alunos a partir modelo empírico de categorização de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

Com isso, buscamos responder a partir das análises, visando fazer com que se possa pensar nas metodologias que nós como professores e futuros professores podemos, usar para identificar e tratar o erro como uma proposta de ensino inovadora em sala de aula, mostrando para os alunos que o erro não é ruim para a sua aprendizagem, mas que a partir dele podem aprender e compreender de melhor forma o conteúdo.

Além da presente introdução, nosso trabalho será composto por seis capítulos. No segundo capítulo apresento os objetivos. No terceiro capítulo buscamos suporte teórico para a pesquisa, em que apresento brevemente os seguintes tópicos: Álgebra contextos históricos, em que buscamos registros históricos de como álgebra se desenvolveu ao longo dos tempos em diferentes regiões do mundo; O Ensino de Álgebra na Educação Básica, em que buscamos trazer uma abordagem sobre o que afirmam os documentos e alguns autores sobre o ensino de Álgebra; Usiskin (1995) e suas concepções sobre a Álgebra, onde fazemos um breve resumo mostrando as quatro concepções do autor sobre a álgebra; e por fim, O papel do erro no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em que apresentamos como o erro pode facilitar o processo de ensino e aprendizagem.

No capítulo quatro apresento os aspectos metodológicos da pesquisa. No capítulo 5 a Análise e discussão dos resultados. E por fim, concluiremos nosso trabalho apresentando as considerações finais, em que apresentaremos quais erros, de acordo com o modelo de classificação, foram mais frequentes pelos alunos, e que o professor deve ficar atento para que esses erros sejam sanados de alguma forma.

1.1 OBJETIVO GERAL

- Analisar os tipos de erros relacionados à álgebra, a partir das concepções de álgebra de Usiskin (1995), em questões resolvidas por alguns alunos do 3º ano do Ensino Médio.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Localizar em provas do Sistema Seriado de Avaliação (SSA) da Universidade de Pernambuco (UPE) fases 1, 2 e 3; Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) e Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) questões de Álgebra que sejam classificadas dentre as concepções de Usiskin (1995);

- Identificar as principais dificuldades relacionadas à álgebra dos alunos;
- Verificar as estratégias utilizadas na resolução dos problemas algébricos;
- Identificar e caracterizar os principais tipos de erros cometidos pelos alunos a partir modelo empírico de categorização de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo discorreremos inicialmente sobre os aspectos históricos da álgebra, de seu desenvolvimento ao longo do tempo, de como surgiu e a sua importância para o desenvolvimento da sociedade. Logo em seguida, apresentamos a importância do ensino de álgebra na educação básica e o que trazem os documentos sobre a álgebra.

Apresentamos as concepções de Usiskin (1995), e posteriormente apresentamos a relação do erro com o ensino de matemática, como o erro pode auxiliar nesse processo de ensino e aprendizagem da matemática, o modelo de caracterização de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), o qual utilizaremos para as análises dos questionários respondidos pelos alunos.

2.1 ÁLGEBRA: CONTEXTOS HISTÓRICOS

A origem da palavra Álgebra vem de uma palavra árabe Al- jabr, que foi usada no título do livro Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em meados do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed em Bagdá, que significa reunir partes quebradas. Mas, muito antes disso a álgebra se originalizou por volta de 3000 a.C. na antiga Babilônia, onde os matemáticos existentes na época desenvolveram um sistema aritmético avançado, com o qual puderam realizar cálculos algébricos.

Muitos dos problemas matemáticos resolvidos na época eram provenientes da busca de resolver problemas do cotidiano, que pudessem ajudar de alguma maneira no desenvolvimento das sociedades.

Com isso, buscou-se fazer um breve estudo da evolução da matemática e principalmente da Álgebra ao longo dos milênios, iniciando com a Matemática dos Babilônios e Egípcios, Gregos, Árabes e Hindus, e por fim um pouco da matemática na Europa de 500 a 1600.

2.1.1 Matemática dos Babilônios e Egípcios

Com a evolução da sociedade, após a criação das escritas mesopotâmicas e egípcias, ainda existiam pessoas denominadas escribas que seu papel era fazer a contabilidade dos impostos, transações comerciais, contabilidade dos estoques de produtos da agricultura da época, que para isso precisavam fazer pequenos cálculos aritméticos e geométricos. Assim, a matemática primitiva se originou no Oriente Médio como uma ciência para auxiliar nas atividades relacionadas à agricultura e à engenharia (EVES, 2004).

Os arquitetos e engenheiros resolviam equações, em que as soluções dadas eram essencialmente práticas, sem fundamentação teórica. Garbi (2009, p.09), em O Romance das Equações Algébricas, afirma que "Por isso costuma-se dizer que os primeiros conhecimentos matemáticos foram sendo acumulados de maneira ***indutiva*** (ou empírica) e não dedutiva". (Grifo do autor)

Os documentos babilônicos mais antigos encontrados em meados do IV milênio a.C., com registros numéricos, são tabletes de barro, que precisamente ainda não podia se ver uma matemática, já que não continham operações com números, mas já em 2.200 a.C. é que podem ser encontrados alguns tabletes com sistema sexagesimal posicional. Em meados do século XIX foi encontrado um tablete de barro cozido babilônico, de cerca de 1.700 a.C., em que eram mostradas figuras geométricas como círculos, quadrados e triângulos que eram inscritos em quadrados maiores e esse mesmo tablete era repleto de exercícios matemáticos. "Um dos problemas propostos dizia: "O lado do quadrado equivale a 1. Desenhei quatro triângulos nele. Qual a área da superfície?"" (GARBI, 2009, p.10).

Figura 1 - Tablete Babilônico

Fonte: Garbi (2009, p. 10)

Os babilônios matemáticos e astrônomos de meados do II milênio a.C. já tinham conhecimento das propriedades do triângulo retângulo (conhecido hoje pelo teorema de Pitágoras), já resolviam equações de 1º e 2 º grau, faziam o cálculo de áreas e volumes e determinavam com precisão a raiz de 2. Pode-se dizer que pelo fato de os babilônios terem um avançado desenvolvimento econômico, isso influenciou para que a matemática fosse mais desenvolvida em relação à matemática dos egípcios. Com isso Eves (2014, p. 67) afirma que "a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica".

Os egípcios para registrar seus escritos usavam papiros e pedras. Dentre os documentos matemáticos mais famosos que tiveram resistência de chegar até os dias de hoje, já que o clima seco da região influenciou na sua durabilidade, são chamados de Papiro de Ahmes e Papiro de Moscou. O Papiro de Ahmes ou Rhind é de cerca de 1.650 a.C., em que nele foi encontrado 85 problemas de aritmética e geometria, escritos pelo matemático cujo nome se deu ao Papiro. Foi achado pelo inglês Rhind em meados do final do século XIX e hoje se encontra no Museu Britânico de Londres.

Figura 2 - Papiro de Ahmes

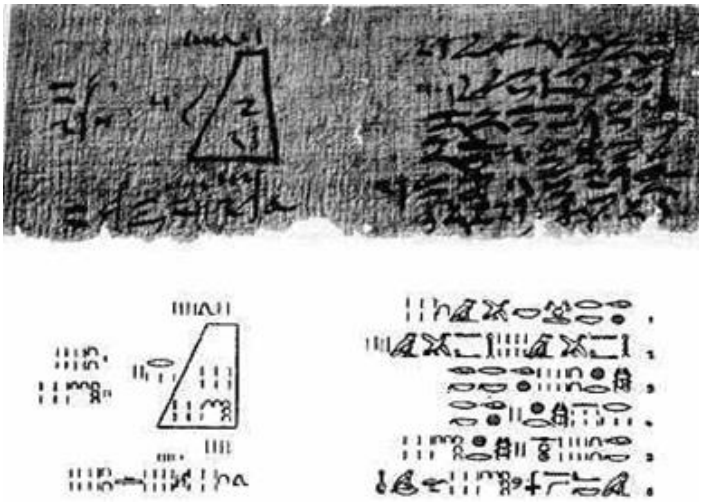
Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.html

Para Eves (2004, p.70)

> O Papiro de Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos.

O Papiro de Moscou é de cerca de 1.850 a.C. e nele contém uma escrita verbal de como se fazer o cálculo correto do volume de um tronco de pirâmide.

Figura 3 - Papiro de Moscou



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/papirode.htm

Em ambos os Papiros é notório a presença de equações do 1º grau, de forma tímida e disfarçada. Apenas os números eram representados por símbolos, e o desenvolvimento do problema era representado por palavras, do que hoje é conhecida por álgebra retórica. Um dentre os diversos problemas que estavam registrados no Papiro de Ahmes era: [...] "**"Uma quantidade, somada a seus 2/3, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é a sua quantidade?"**" (GARBI, 2009, p.12, grifo do autor).

Os Egípcios conseguiam resolver essas equações do 1º grau a partir de um artifício que hoje é conhecido como regra da falsa posição, por exemplo, qual o número que somado a seu dobro da 12?. Supondo inicialmente que seja 2 esse número, temos então que 2 somado ao seu dobro (2*2 = 4), irá dar 6, em que 6 é a metade de 12. Logo, o número que queremos encontrar é o dobro de 2, no caso, 4.

De forma algébrica como exemplo, poderíamos ter que x é o número e 2x o dobro desse número. Assim, teríamos que $x + 2x=12 \rightarrow 3x=12 \rightarrow x=12/3 \rightarrow x=4$. Disso podemos ver a relação da aritmética usada pelos egípcios de certa maneira com a álgebra, mesmo não tendo a noção do que seja uma equação e de como se resolver, em comparação ao modo que sabemos hoje, em que usamos incógnitas e no caso dos egípcios, usavam "esse valor de x" a ser encontrado como um valor falso para depois se obter o valor para a resposta correta, eles tinham um grande domínio para resolver esse tipo de problema.

Já os babilônios conseguiam trabalhar com a equação de 2º grau pelo raciocínio de complemento de quadrados.

> Embora os resultados fossem corretos, os tabletes que contêm soluções de equações do 2º grau apresentam, como todos os demais, apenas sequências do tipo "**faça isto**", "**faça aquilo**", "**este é o resultado**", sem qualquer justificativa lógica sobre o caminho seguido (GARBI, 2009, p.13, grifo do autor).

Com isso, pudemos perceber que na Matemática Babilônica a álgebra ficou mais evidente, em que os babilônios tiveram grande facilidade em resolver problemas algébricos. Dentre um dos tabletes encontrados, alguns tinham equações quadráticas, cúbicas e alguns problemas não resolvidos em equações simultâneas que posteriormente os levaram a resolver equações biquadradas. Os cálculos encontrados nos documentos babilônicos se baseiam na aplicação cotidiana, uma matemática cotidiana voltada para agricultura e comércio.

Já os egípcios sua matemática baseava-se de forma mais prática, e com isso partiam para o uso das ferramentas já apresentadas, como por exemplo a regra da falsa posição, em seus documentos haviam a presença de símbolos algébricos, diferentemente dos apresentados pelos babilônicos.

2.1.2 Matemática dos Gregos

A partir do comércio de produtos feitos no Mediterrâneo oriental por gregos, egípcios, sírios, fenícios e mesopotâmios, obtiveram permissão do governo para instalar um entreposto comercial e, foi a partir disso que os gregos tiveram primeiro contato com monumentos e pirâmides e começaram a aprender matemática. Sua matemática era mais voltada para uma geometria abstrata, muito avançada em relação à dos egípcios e babilônios.

Tales de Mileto foi o primeiro matemático grego, que por profissão era um grande comerciante, mas estudava Astronomia, Filosofia e Matemática. Em visita ao Egito e Babilônia, trouxe o estudo da Geometria. "[...] ao invés de apenas transmitir o que aprendera, introduziu um conceito revolucionário: ***as verdades matemáticas precisam ser demonstradas***." (GARBI, 2009, p.15, grifo do autor).

Tales de Mileto começou a fazer demonstrações de teoremas importantes hoje na geometria, provando que em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais, que o diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais, que em um semicírculo um ângulo inscrito é sempre reto, e por fim, que são formados segmentos proporcionais quando os feixes de retas paralelas são cortados por retas transversais. Segundo Silva (2017, p. 27) "Tales de Mileto mudou as perspectivas da Matemática, mostrando a importância das justificativas lógicas na Matemática e, assim, dando origem a uma Matemática solidificada nas demonstrações".

Logo em seguida, Pitágoras provou o até hoje famoso teorema dos triângulos retângulos. Acredita-se que o mesmo estudou com Tales ou com seus discípulos. Mesmo antes de ser provado o teorema, babilônios e chineses já tinham a compreensão do caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5, mas apenas Pitágoras apresentou a prova relacionando entre os catetos e hipotenusa de um triângulo. "**Em poucas décadas os pitagóricos espalharam por todo o mundo grego uma verdadeira febre pelo estudo da Matemática, colocando a civilização em um caminho que nos trouxe à era científico – tecnológica de hoje.**" (GARBI, 2009, p. 16, grifo do autor).

Os pitagóricos não se restringiram apenas à Geometria, mas fizeram importantes estudos relacionados a Aritmética, em que os primeiros passos para a teoria dos números foram dados pelos pitagóricos. Foi atribuído a Pitágoras a descoberta dos números amigáveis, que segundo Eves 2004 "Dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro" (p. 98). Também se atribuem a eles os números perfeitos, deficientes e abundantes. Diz-se perfeito se é igual à soma de seus divisores próprios, números deficientes se a soma de seus divisores excede e por fim abundante se o número é menor que a soma de seus divisores.

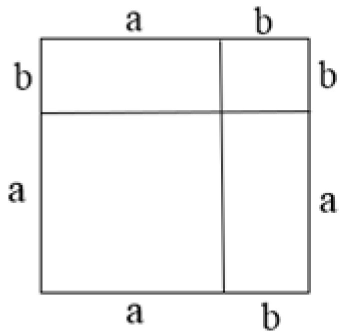
Em 300 a.C., Euclides revelou seu talento pela área da Matemática, de onde escreveu vários livros. Manteve o mesmo conceito de Tales ao demonstrar as verdades, criando a Matemática dedutiva, mas Euclides afirmou que nem todas as verdades podem ser provadas, que algumas devem ser admitidas sem demonstração.

A álgebra geométrica pode ser atribuída aos pitagóricos que se pode achar espalhado pelos livros dos Elementos de Euclides. Relacionam a álgebra à geometria ao fazer decomposições de figuras geométricas e que envolvem identidades algébricas, como por exemplo a soma do quadrado de dois termos, que é conhecido também como Produto Notável.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Essa identidade algébrica vem do Enunciado de Euclides, que para a decomposição de um quadrado de lado a + b em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2, b^2, ab e ba a proposição é: " *Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes*" (EVES, 2004, p. 108).

Figura 4 - Decomposição do quadrado



Fonte: Autor

O principal foco dos trabalhos gregos era na geometria, mas o exercício com a álgebra e as equações evoluíram significativamente a partir dos trabalhos nos Elementos de Euclides e com isso, se desenvolveram trabalhos da álgebra com a aritmética (SILVA, 2017, p.29).

Ao contrário dos Egípcios e Babilônios que possuem uma fonte primária para a Matemática, a matemática grega teve uma maior dificuldade para se identificar a fonte primitiva, mas apesar disso os estudos feitos são apoiados em manuscritos e relatos escritos por sábios, muito tempo depois dos relatos originais terem sido produzidos.

Por fim, podemos concluir que a Grécia foi o berço da matemática demonstrativa e a partir de Tales, Pitágoras e Euclides, os principais matemáticos da época, contribuíram para a matemática de forma geral, mas principalmente para a geometria e apresentando mais características algébricas.

2.1.3 Matemática dos Árabes e Hindus

Pouco se sabe da matemática hindu no seu desenvolvimento, mas antes do Império Muçulmano surgir, já se havia começado a evoluir a matemática hindu. O território Indiano sofreu diversas invasões estrangeiras que pode tornar da Índia um centro de diversos saberes. Vários matemáticos destacaram-se por volta do fim do século XV, sendo eles dois Aryabhatas, Brahmagupta e Mahavira, e Bhaskara, famoso pela "fórmula de Bhaskara" conhecida até hoje e muito importante na resolução de equações quadráticas. Mas, quem descobriu o método não foi Bhaskara, e sim o matemático hindu Sridhara.

Analisando o desenvolvimento da matemática hindu e principalmente da álgebra, os hindus foram hábeis no trabalho com a aritmética. Entre 250 a.C., símbolos matemáticos dos quais se originam os algarismos de hoje, começaram a ser usados durante o reinado do imperador Açoka. Já por volta do século V d.C., o sistema de numeração tornou-se posicional, e sendo empregado dez símbolos de zero a nove, onde o zero era chamado de “sunya”, vazio. (GARBI, 2009).

Muitos dos problemas resolvidos por eles eram a partir do método da falsa posição. Outro método usado para resolver problemas pelos hindus era o método de inversão, em que a partir do enunciado era proposto que se resolvesse substituindo a operação pela sua inversa e operando de trás para frente. Resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos e faziam a soma de progressões aritméticas e geométricas.

Na álgebra, os hindus aceitaram números negativos e irracionais, e sabiam que na equação de 2º grau era possível encontrar duas raízes formais, com respostas reais. De acordo com Eves (2004), “Os hindus revelaram notável habilidade em análise indeterminada, sendo talvez os primeiros a descobrir métodos gerais do ramo da matemática. ” (p. 256). Buscavam encontrar todas as soluções inteiras possíveis, ao contrário de Diofanto, matemático grego considerado o “pai da álgebra”, que buscava encontrar uma qualquer das soluções racionais. Na geometria era possível encontrar traços algébricos quanto à utilização do teorema de Pitágoras e o uso da simbologia.

Assim, pôde-se perceber que na matemática hindu a álgebra e o uso das equações quanto aos avanços que se deram aos trabalhos com as equações quadráticas foram bastantes significativos, na aritmética com o uso da simbologia numérica, o que hoje é os algarismos, e na geometria pouco desenvolvida em comparação com a grega.

Os Árabes se empossaram da cultura e do saber dos gregos e hindus, de modo que muitos trabalhos foram traduzidos para o Árabe. Em meados de 766, trabalho de Brahmagupta foram levados para Bagdá durante o reinado de Al-Mansur, que desejou transformar a cidade em uma nova Alexandria, atraindo diversos sábios para o local e muitos deles escreveram seus trabalhos sobre Astronomia e Matemática, mas o mais famoso de todos foi Maomé, que escreveu um livro sobre os numerais hindus e um tratado de álgebra.

Muitos outros ilustres matemáticos muçulmanos contribuíram com trabalhos voltados para a álgebra. No século X, Abû’l-Wefâ (940-998) tornou-se conhecido por introduzir a função tangente em trigonometria e por uma tábua de senos e tangentes. “Para tanto ele aperfeiçoou o método de Ptolomeu, obtendo sen 30’ com nove casas decimais” (EVES, 2004, p. 261).

Respectivamente nos séculos X e XI, Abû Kamil e al-Karkhî, desenvolveram trabalhos sobre a álgebra, que Abû Kamil escreveu sobre a álgebra de Al-Khowârizmî e que posteriormente foi usado pelo matemático europeu Fibonacci (1202), mas a mais profunda contribuição algébrica dos muçulmanos foi na resolução geométrica de uma equação cúbica, feita pelo matemático Omar Khayyam em 1100, que também foi conhecido pela reforma no calendário. (EVES, 2004)

Na aritmética árabe, eram usadas regras para efetuar cálculos modelados com algoritmos hindus (EVES, 2004), mas aos árabes se deve o uso do noves fora para testar cálculos aritméticos e o uso das regras de falsa posição e falsa posição dupla. Na álgebra, contribuíram no campo da álgebra geométrica, pois resolviam equações lineares e cúbicas, e na resolução dos problemas pouco se usava cálculos algébricos, mas sim uma interpretação mais geométrica e uso de técnicas aritméticas.

2.1.4 A Matemática Europeia de 500 a 1600

Trazendo um pouco do desenvolvimento da álgebra na Europa de 500 a 1600 vimos que Adelard de Bath (1.075-1.160) ao viajar por muitos países do mundo muçulmano trouxe para a Inglaterra cópias dos Elementos de Euclides e tabelas astronômicas selecionadas por Al-Khwarizmi, informações sobre o sistema de numeração indo-arábico. Todos esses materiais foram traduzidos para o Latim, e com isso colocou a Inglaterra em conexão com a matemática grega (GARBI p. 28).

No início do século XIII nascia a figura de Leonardo Fibonacci (1175-1250), as atividades de comércio desempenhada por seu pai Bonaccio, lhe despertou um grande interesse pela aritmética. Em 1202 ao voltar de viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde teve contato com a matemática árabe, publicou a obra Liber abaci. Em 1228 escreveu a Pratica Geometriae, que segundo Eves (2004, p.293) "O trabalho se ocupa de aritmética e álgebra elementares e, embora em essência uma pesquisa independente, mostra a influência das álgebras de al-Khowârizmî e Abû Kâmil".

Luca Pacioli (1455-1514) foi um grande matemático, interessado bastante pela Aritmética e com isso foi considerado o pai da contabilidade moderna. Suas obras publicadas em Veneza tinham por título *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*.

Girolamo Cardano (1501-1576) era médico, mas dedicava-se a matemática estudando, ensinando e escrevendo. Um dos seus livros mais importantes é *Ars Magna*, dedicado exclusivamente à álgebra, publicado em Nurenberg na Alemanha em 1545. Foi Astrólogo do Vaticano, protegido pelo Papa Gregório XIII, e acusado de heresia por ter divulgado o horóscopo de Jesus Cristo.

Nicolò Fontana (Tartaglia), nascido em 1501, mostrou desde cedo interesse pelos estudos, mas por sua mãe não ter condições suficientes para pagar sua escola, continuou a estudar sozinho. Sem dinheiro para comprar papel, pena e tinta, escrevia nas lápides dos túmulos no cemitério. Suas disputas com Cardano sobre as equações do 3º grau o colocou nos anais da Matemática.

Suas disputas eram em torno de uma fórmula para a solução geral para as equações do 3º grau. Em 1510 um professor de Matemática da Universidade de Bolonha Scipione del Ferro, encontrou uma forma geral de resolver esse tipo de equação, que não chegou a publicar, mas seu aluno Antonio Maria Fior adquiriu notoriedade a descoberta do estre e desafiou Tartalia a resolver questões do tipo $x^3 + px + q = 0$, que somente ele tinha a solução. Sabendo do método que o adversário iria lhe propor, sentiu-se ameaçado e relatou "***"mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535"***" (GARBI, 2009, p. 37, grifo do autor).

Tartalia resolveu corretamente o desafio e nessa mesma época Cardano escreveu um livro contendo Álgebra, Aritmética e Geometria, pediu para Tartalia publicar a solução no determinado livro, mas o mesmo não concordou, pois pretendia publicar futuramente. Com os juramentos de Cardano diante da Bíblia, Tartalia lhe revelou tudo. Cardano não cumpriu a promessa e Tratalia publicou um livro com a nova versão dos fatos e denunciando Carnado.

De acordo com Silva (2017, p. 35),

> A partir dessas descobertas evidenciou-se um novo marco na Matemática, não só pelo que diz respeito aos trabalhos empenhados por Ferro, Tartaglia e Cardano na resolução das equações de grau 3 ou na resolução das equações de grau 4 por Ferrari, mas também porque observavam-se detalhes importantes na resolução dessas equações, em especial as de grau 3, proporcionando vários questionamentos a cerca da raiz quadrada de números negativos. Esses questionamentos viriam a se transformar o universo da Matemática com grandes novas pesquisas que se seguiriam.

O descobridor da solução da equação do 4º grau, Ludovico Ferrari (1522-1560) foi o mais famoso discípulo de Cardano. Tornou-se professor de Matemática na Universidade de Bolonha logo após ter sua inteligência reconhecida por seu mestre. Após inúmeras tentativas de resolver equação $x^4 + 6x^2 - 36 = 0$ proposta por Zuanne de Tonini da Coi, Cardano passou para que Ferrari resolvesse e de imediato encontrou o método geral para a solução, que posteriormente foi publicado por Cardano na ARS MAGNA, dando continuidade às soluções dadas por Tartalia, sendo a equação do tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Podemos ver que todos esses matemáticos foram de suma importância para o desenvolvimento dos trabalhos algébricos da época. Discutindo a resolução de equações de 3º e 4º grau, equações lineares e quadráticas, na Aritmética e geometria, com sistema de contagem em dedos, os sistemas aritméticos. A Álgebra ganha um simbolismo próprio e deixa de ser a antiga Álgebra retórica dos babilônios e passa ser Álgebra simbólica.

3.2 O ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A linguagem algébrica é introduzida no universo escolar desde o Ensino Fundamental anos iniciais, quando é ensinado aos alunos problemas que envolvem as quatro operações com a ideia de complemento, como, por exemplo, ___+3=5, e com o passar dos anos escolares o aluno vai percebendo uma nova maneira de ver a Álgebra, em que são usadas as "letras", que são chamadas de incógnitas ou variáveis, dependendo do problema proposto.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), "o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas". (BRASIL, 1998, p. 115)

Apesar do que se afirma nos documentos, o ensino de álgebra nem sempre é concretizado de forma que os alunos desenvolvam sua capacidade de resolver situações-problemas. Na maioria das vezes, o que acontece é a explicação do conteúdo de forma básica de seus conceitos e procedimentos, seguidos da resolução de alguns exemplos e por fim a aplicação de exercícios de fixação, não existindo contextualização com o cotidiano do aluno. Assim, quando em algum momento ele se depara com uma questão que apresente contextualização, sente dificuldade em interpretar, e passar da linguagem usual apresentada no problema para a linguagem algébrica.

Professores seguidores da ideia de que a Álgebra é apenas um cálculo com letras não utilizam de metodologias e alternativas diferenciadas para trabalhar com o ensino de álgebra, por não conhecerem essas metodologias ou não se sentirem preparados para usa-las, seguindo apenas o que é proposto nos livros didáticos. Podemos dizer que esta forma de ensinar é uma "tradição" que por muitos anos vem sendo seguida e pensar em mudar essa maneira de ensinar é bastante difícil, como ressalta Lins e Gimenez (1997, p.106),

> [...] seria ingenuidade pensar que a enorme aceitação dessas práticas "letristas" ocorre apenas por resignação dos professores: é preciso entender que elas correspondem bem a uma certa visão da atividade

> algébrica, caso contrário, não sobreviviam. [...] é preciso ter consciência de que qualquer proposta de mudança vai ter de passar por convencer muita gente de que a atividade algébrica não é "cálculo literal", e falamos aqui de fazer bem mais do que pressioná-los a mudarem a rotina.

O ensino de álgebra é por vezes relacionado apenas a equações e representações simbólicas, onde há um uso exagerado de fórmulas, mas na verdade a álgebra é muito mais que isso, pois existem inúmeras relações que a interligam com os diversos conteúdos matemáticos trabalhados durante toda a educação básica, como por exemplo a Geometria e sendo possível trabalhar com contextualizações.

Santos (2014, p.17) afirma que, "[...] o ensino da Álgebra é visto como um ente Matemático que não se relaciona com a contextualização de conteúdos, ignora-se totalmente a formação das ideias em que a Álgebra se apoia".

Nessa pesquisa, a autora realizou uma análise acerca dos conhecimentos de álgebra de egressos do ensino médio, alunos do 1º período do curso de Matemática de uma Universidade Pública de Pernambuco, a partir de uma discussão dos erros cometidos, cujo objetivo é analisar os erros cometidos em questões Algébricas por estudantes do curso de Matemática - Licenciatura.

Com resultado, Santos (2014, p. 56) aponta que "se essas dificuldades não forem discutidas no curso de Licenciatura, serão levadas adiante, para a própria sala de aula do futuro professor, trazendo como consequência um ensino frágil, que pode levar seus alunos a erros do mesmo tipo".

É essencial para o aluno que desde cedo seja estimulado o desenvolvimento do pensamento algébrico no decorrer de toda a educação básica, para que ao chegar ao ensino médio consiga interpretar questões matemáticas aplicadas à realidade, utilizando as estratégias, conceitos e procedimentos afim de resolver problemas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018, 535),

> [...] os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Do ponto de vista histórico a Álgebra nada mais é do que a evolução da Aritmética e da Geometria, visto que em muitos problemas e exercícios propostos precisavam de generalizações e a partir da Álgebra isso foi possível. Para Santos (2014, p. 16),

> Não há como pensar em ensinar aritmética sem pensar em Álgebra, pois existe uma conexão matemática determinada entre ambas desde o início da alfabetização matemática do aluno. A Álgebra, no contexto essencialmente Matemático, não passa de uma aritmética generalizadora ou a estrutura da aritmética, criada para suprir as necessidades que a simples aritmética não conseguia suprir.

Assim, durante a educação básica e principalmente no Ensino Médio, é importante propor condições para que o aluno possa compreender a maneira que a Álgebra pode estar relacionada com os outros ramos da Matemática, do modo de resolver, até a compreensão. A BNCC ressalta que se deve destacar as inter-relações entre os campos da matemática, como por exemplo, a Álgebra e a Geometria. “A própria ideia de medida pode ser definida como uma função que associa um número real positivo (correspondente a certa quantidade de unidades) a um comprimento, área ou volume ” (BRASIL, 2018, p. 521).

Apesar disso, muitos alunos ainda sentem dificuldade em compreender o verdadeiro sentido que a Álgebra tem dentro da matemática, seja ela consequência de um ensino defasado, de uma má interpretação dos conceitos ou de um tratamento sem contexto dado ao ensino algébrico.

É imprescindível que o aluno compreenda a noção de variável durante a educação básica para facilitar na resolução de operações simbólicas e desta forma simplificando o trabalho com modelos matemáticos, para que ao chegar no ensino superior o aluno compreenda a ideia de variação no estudo do Cálculo (RIBEIRO, CURY; 2015).

No ensino médio essa dificuldade começa a recair sobre os alunos que buscam de alguma forma tentar supri-las para quando resolverem problemas matemáticos na sala de aula que visam os vestibulares e provas externas, mas em muitos casos não conseguem pelo curto tempo que possuem para tentar revisar ou aprender o determinado conteúdo, sendo isso um dos fatos preocupantes. Cabe aos professores identificarem essas dificuldades, não deixando que essa defasagem prejudique o aprendizado e a construção do pensamento matemático do estudante, que de certa forma irá influenciar na sua vida acadêmica e profissional.

2.3 USISKIN (1995) E SUAS CONCEPÇÕES SOBRE A ÁLGEBRA

As concepções de Usiskin (1995) sobre a Álgebra tratam sobre o uso das variáveis e a compreensão do seu significado dentro da Educação Básica. O uso dessas variáveis apresenta papéis diferentes dentro do contexto matemático. Usiskin (1995, p. 12) afirma que, "[...] as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra. "

Dessa maneira, o conhecimento algébrico sobre o uso das variáveis é classificado em quatro concepções: A álgebra como aritmética generalizada; A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; A álgebra como estudo de relações entre grandezas; e por fim, A álgebra como estudo das estruturas. Apresentaremos um breve resumo sobre cada concepção, a partir das ideias de Usiskin (1995).

- *A álgebra como aritmética generalizada*

Nessa concepção as variáveis têm por característica principal a generalização de propriedades aritméticas. É fundamental seu uso em problemas que necessitam de modelagem matemática. A linguagem algébrica é usada para resolver problemas do tipo,

$$n + (a + b) = (n + a) + b$$

A instrução adequada para essa concepção é *"traduzir e generalizar".*

- *A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*

Ou simplesmente, Álgebra Equacional, nessa concepção as variáveis são ou incógnitas ou constantes. Destaca-se na resolução de problemas com uso das letras como incógnitas, tendo como finalidade encontrar, por exemplo, o valor de *x* para que a sentença apresentada seja verdadeira. Como na equação,

$$ax + b = 0, para\ a = 2\ e\ b = 6$$

Temos uma equação de 1° grau, em que se busca determinar o valor de x, para que a igualdade seja correta. A instrução adequada para essa concepção é *"simplificar e resolver"*.

- *A álgebra como estudo de relações entre grandezas*

Nessa concepção há um tipo especial de generalização, correspondendo as fórmulas, mas neste caso as variáveis *variam* diferente da concepção de aritmética generalizada. Fórmulas como a da área de um retângulo é um exemplo, onde se expressa relações entre grandezas.

$$A = b \cdot h$$

A variável assume papel de *parâmetro*, quando apresenta um número que depende dos outros, e *argumento*, quando representa os valores que determinam o domínio de uma função (USISKIN, 1995). Como por exemplo,

$$f(x) = 4x + 2$$

Apenas nessa concepção que surgem a ideia de variável dependente e independente. A instrução adequada é *relacionar*.

- *A álgebra como estudo das estruturas*

Também conhecida como Álgebra Estrutural, nessa concepção as variáveis assumem papel de símbolos arbitrários, está relacionada com a Álgebra do ensino superior, abrangendo o estudo com anéis, corpos e grupos.

> A concepção de variável nesse caso não coincide com nenhuma daquelas discutidas anteriormente. Não se trata de nenhuma função ou relação; a variável não é um argumento. Não há equação alguma a ser resolvida, de modo que a variável não atua como uma incógnita. Também não há nenhum modelo aritmético a ser generalizado. (USISKIN, 1995, p.18)

Um dos exemplos é a fatoração de um polinômio, onde não se busca encontrar nenhum valor, as variáveis não têm relação com generalizações aritméticas. Busca-se na verdade simplificar a expressão ou sentença apresentada. A instrução adequada nesta última concepção é *manipular e justificar*.

A partir dessas concepções podemos identificar as questões a serem trabalhadas em sala de aula e qual a concepção adequada, buscando compreender a ênfase que Usiskin dá ao uso das letras para distinguir suas concepções, tendo em vista que cada letra assume um papel e significado diferente dentro do ensino da álgebra.

2.3 O PAPEL DO ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Os erros cometidos por alunos na resolução de problemas matemáticos podem estar relacionados a diversos fatores que comprometem a aprendizagem dos mesmos, sejam referentes a não gostarem de matemática ou até mesmo da dificuldade de compreender o conteúdo.

Um dos fatores que se pode fazer com que os alunos rejeitem a Matemática é a repetição de diversos exercícios de forma mecanizada, estratégia usada por professores que buscam evitar o erro do aluno, ou até mesmo, tentar solucionar o problema dos erros encontrados com essa "metodologia de repetição".

> Conhecer os erros dos alunos é importante, uma vez que fornece informações sobre suas interpretações e compreensões, bem como, sobre eventuais dificuldades de manipulação simbólica dos estudantes e, a partir destes diagnósticos se pode avaliar as atuais abordagens, bem como, planejar outras mais promissoras, que minimizem estas dificuldades. (BECHER; GROENWALD, 2010, p.01)

Em muitos casos, o erro é considerado algo ruim e por esse motivo muitos alunos tendem a se considerar menos inteligentes e incapazes de aprender, e muitas vezes tem receio de se expressar acerca de suas dificuldades. Segundo Torre (2007, p. 90), "o erro informa ao aluno de que algo falhou na realização da tarefa ou na solução de problema e, por isso mesmo, o aluno deve mudar de enfoque ou estratégia no modo de abordá-la". Do mesmo modo, o professor deve identificar qual estratégia metodológica deve-se seguir a partir da identificação do erro cometido pelo aluno.

Uma das formas é trabalhar o erro de forma construtiva, por exemplo, em um teste de Matemática em que o aluno apresenta erro em uma determinada questão o professor deve se perguntar *"Por que o aluno errou? ", "O que o aluno não compreendeu com o conteúdo e por consequência o fez errar?", "Até que ponto posso considerar correta a questão?", "Como avaliar o desempenho do aluno nesta questão?"*. São questionamentos como este que podem fazer com que o professor procure entender as dificuldades do aluno e não eliminar o erro de forma que não contribua para a aprendizagem do mesmo.

Sanmarti em seu livro, *Avaliar para Aprender* afirma que:

> o erro é um indicador dos obstáculos com os quais se defronta o pensamento do aluno ao resolver as questões acadêmicas. Nosso desafio é compreender suas causas, porque somente ajudando-os a reconhecê-las será possível corrigi-los. (SANMARTI, 2009, p. 42)

Usar o erro como metodologia dentro da sala de aula pode ter a participação direta do aluno de maneira que o mesmo consiga identificá-lo, e que juntamente com o professor possa intervir de maneira correta. Cury (2007, p. 81-82), afirma que, “Quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, está sendo considerada a possibilidade de que este erro se transforme em um problema para que os alunos (e o professor) se debrucem sobre ele e tentem inventar soluções que promovam o aprendizado”.

No presente estudo iremos caracterizar os erros cometidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio, tomando como base o modelo empírico de categorização de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Esse modelo foi obtido a partir de uma análise de teste aplicado com cerca de 20.000 estudantes que estavam concluindo a Educação Básica em Israel. Segundo os autores, à análise foi feita de forma empírico, mostrando que os erros não são produzidos de forma acidental. A partir disso, os autores chegaram a seis categorias diferentes em que os erros encontrados podem ser classificados:

- <u>Perdendo informações (dados mal interpretados)</u> – Esse tipo de erros pode acontecer no início da resolução, quanto durante o processo. Essa categoria inclui os erros que podem ser identificados quando ocorre uma não compreensão do enunciado, um desentendimento dos dados fornecidos, em que o aluno adiciona dados irrelevantes para a solução.

Como exemplo, trazemos que ao se resolver o problema que a partir dos dados pedi para o aluno encontrar a vasão do escoamento da água de uma cisterna em função do tempo, por exemplo, o aluno utiliza os dados de forma incorreta do que seria correto para o que se pedi na questão.

- <u>Linguagem mal interpretada</u>- Essa categoria inclui os erros que podem ser identificados quando se ocorre a interpretação da linguagem simbólica ou natural matemática utilizada, quando se utilizam símbolos para realizar uma operação, mas opera-se como se a situação fosse outra.

Como exemplo temos que, em um problema da seguinte forma: *O dobro de um número mais 4 é igual a 30. Qual é esse número?*. O aluno nesse problema pode cometer o erro a partir da não interpretação da linguagem matemática apresentada, não conseguindo “traduzir” para linguagem simbólica e dessa forma não consegue resolver o problema de forma correta.

- <u>Inferência logicamente inválida</u> - Essa categoria inclui aqueles erros que lidam com raciocínios enganosos, que geram erros na resolução do problema.

Os alunos ao responderem problemas cometem erros desse tipo quando, por exemplo, afirma que 2= -2, sendo que isso não acontece, então ele teve um pensamento equivocado e enganoso.

- Teorema ou definição distorcido – Essa categoria inclui erros que ocorrem quando há uma distorção do teorema, regra, princípio ou definição.

Os alunos cometem erros desse tipo quando utilizam, por exemplo, fórmulas que seriam incorretas para a resolução do problema proposto. Então quando o problema pedi para se calcular a média aritmética de um determinado conjunto, o aluno calcula a mediana, assim ele erra ao distorcer a definição do que seria média.

- Solução não verificada – Essa categoria inclui erros que ocorrem quando o aluno segue os passos corretos para que a solução esteja certa, mas o resultado não é uma solução para o problema proposto. Esse erro pode ser evitado caso o aluno verifique a solução cuidadosamente.

Como exemplo simples desse tipo de erro, temos que ao se resolver uma expressão numérica 50+ (5*4) -12, o aluno resolve os passos da questão corretamente, mas por descuido apresenta o resultado incorreto, sendo isso evitado se ele voltar a sua resolução, conferir e perceber que há algo errado.

- Erro Técnico- Nesta última categoria são classificados os erros que ocorrem quando há erro na execução ou manipulação algébricas dos símbolos e outros erros de algoritmos que são estudados na matemática.

Por fim, trazendo como exemplo desse tipo de erro, utilizando a expressão numérica apresentada anteriormente, 50+ (5*4) – 12, o aluno resolve o problema ser inicialmente resolver o que está dentro dos parênteses, concluindo a questão de forma errada. Então, ele erra ao fazer ao fazer ao fazer as operações de forma adequada.

Nitsa Movshovitz-Hadar et al (1987, p.13, tradução nossa)[1]

> O modelo proposto pode ajudar os professores a prever dificuldades e obstáculos e usar essa habilidade no planejamento de seu ensino, de modo a evitar o maior número possível deles. Os professores também podem usar o modelo para identificar uma tendência persistente de

[1] "The proposed model may help teachers foresee difficulties and obstacles and use this ability in planning their teaching so as to prevent as many of them as possible. Teachers may also use the model to identify a persistent tendency of individual students to make a certain type of error across several mathematical topics".

> alunos individuais para fazer um certo tipo de erros em vários tópicos matemáticos.

Dessa forma, iremos utilizar esse modelo empírico de classificação de erros, a fim de que possamos identificar e compreender os erros cometidos pelos alunos, discutindo sobre o tratamento correto a ser tomado, buscando evitar que esses erros possam influenciar na aprendizagem do aluno de forma negativa durante sua vida acadêmica.

3 METODOLOGIA

Nossa pesquisa contempla uma abordagem qualitativa, em que visa conduzir o pesquisador na realização da investigação da sua pesquisa, e mostrando como agir na coleta de dados, não interessando apenas com os números, mas sim em entender a realidade humana. Borba (2014, p.3) ao falar de pesquisa qualitativa, afirma,

> [...] estou falando de um forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento.

As etapas desta pesquisa se constituíram na seleção das provas a serem analisadas, o seguindo da análise das questões, identificando-as em qual concepção se enquadra, após isso a aplicação do questionário que é nosso instrumento de coleta, e por fim a comparação e classificação dos erros encontrados de acordo com o modelo de caracterização de erros a ser usado.

Elaboramos um teste (APÊNDICE) com questões selecionadas das provas do SAEPE[2], ENEM[3] e SSA[4] (1ª, 2ª e 3ª fase) dos anos 2015, 2016, 2017. Escolhemos utilizar as questões desses documentos a partir das observações feitas durante o estágio supervisionado II em uma escola estadual do município de Passira –PE, e a partir de questionamentos sobre a preparação desses alunos para resolver os problemas apresentados nessas provas, visto que no 3º ano do Ensino Médio há uma cobrança maior para que eles consigam resolver essas provas, resolvemos analisar e selecionar as questões para comporem o questionário a ser aplicado e visando apenas esse intervalo de tempo de 2015 à 2017, já que cada prova apresenta um bom número de questões matemáticas.

Com isso, analisamos 300 questões das respectivas provas e classificadas dentro das concepções propostas por Usiskin (1995). Com isso, 75 questões com concepções foram identificadas entre as demais. Das 75 foram selecionadas 10 questões subdivididas em 2 de Álgebra como Aritmética Generalizada, 3 de Álgebra Equacional, 3 de Álgebra Funcional e 2 de Álgebra Estrutural. Esse critério de escolha foi pelo fato de que as concepções de Álgebra Funcional e Álgebra Equacional foram mais identificadas entre as demais.

---

[2] Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco
[3] Exame Nacional do Ensino Médio
[4] Sistema Seriado de Avaliação

Dentre as 10 questões selecionadas, segue uma questão referente a cada uma das quatro concepções.

Figura 5- Questão com Concepção Álgebra como Aritmética Generalizada

-SSA2 (2015) Brincando de construir sequências numéricas, Marta descobriu que em uma determinada progressão aritmética, a soma dos cinquenta primeiros termos é $S_{50} = 2\ 550$. Se o primeiro termo dessa progressão é $a_1 = 2$, qual o valor que ela irá encontrar fazendo a soma $S_{27} + S_{12}$?

A) 312

B) 356

C) 410

D) 756

E) 912

Fonte: (SSA 2, 2015)

Figura 6- Questão com Concepção Álgebra como relação entre grandezas

-SAEPE (2015) Um laboratório realizou um experimento com uma cultura de bactérias. Esse experimento iniciou com 80 bactérias e seu crescimento é dado pela função $P(t) = 80 \cdot 2^{\frac{t}{8}}$, na qual P(t) representa a quantidade de bactérias após t horas do início do experimento. Sob condições ideais, qual é o número de bactérias após 24 h do início desse experimento?

A) 480

B) 640

C) 1 600

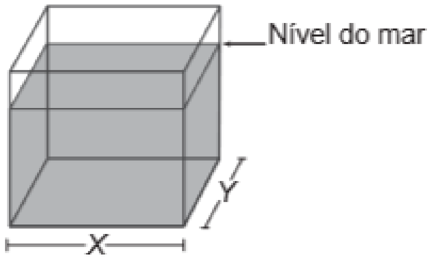
D) 1 920

E) 81 920

Fonte: (SAEPE, 2015)

Figura 7- Questão com Concepção Álgebra como procedimentos para resolver problemas

ENEM (2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

A) 1 e 49
B) 1 e 99
C) 10 e 10
D) 25 e 25
E) 50 e 50

Fonte: (ENEM, 2017)

Figura 8- Questão com Concepção Álgebra como estudo das estruturas

ENEM (2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t > 1$?

A) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8\,000$

B) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$

C) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$

D) $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$

E) $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

Fonte: (ENEM, 2015)

O questionário foi aplicado com a turma do 3º ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual, localizada no município de Passira – PE, no mês de abril de 2019. Participaram desta pesquisa 27 alunos, com faixa etária de 16 e 17 anos. A escola funciona em 3 turnos, abrangendo alunos desde o Ensino Fundamental II, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos (EJA), Travessia e o Projovem Urbano, com um total de 811 alunos, 25 turmas, tendo 4 turmas do 3° ano do Ensino Médio. Os sujeitos participantes foram nomeados de A1 à A27, preservando a identidade dos mesmos e seguindo a numeração dos questionários aplicados. A escolha dessa escola deu-se por ser a que estudei do Ensino Fundamental II até o Ensino Médio.

Após aplicação as questões foram analisadas de acordo com o modelo de caracterização apresentado anteriormente, tendo a seguinte classificação:

- Dados mal interpretados;
- Linguagem mal interpretada;
- Inferência logicamente inválida;
- Teorema distorcido ou definição;
- Solução não verificada;
- Erro técnico.

Dentre o modelo de classificação de erros apresentado, após análise das respostas sentimos a necessidade de acrescentar uma nova classificação para as questões analisadas, que chamamos de **Erro Incompreensível.** As questões que se classificam nesse tipo são as que não foi possível classificar de acordo com o modelo de classificação de erros de Movshovitz-Hadar, et al (1987) e que não foi possível compreender de que forma o aluno utilizou os dados para resolver o problema.

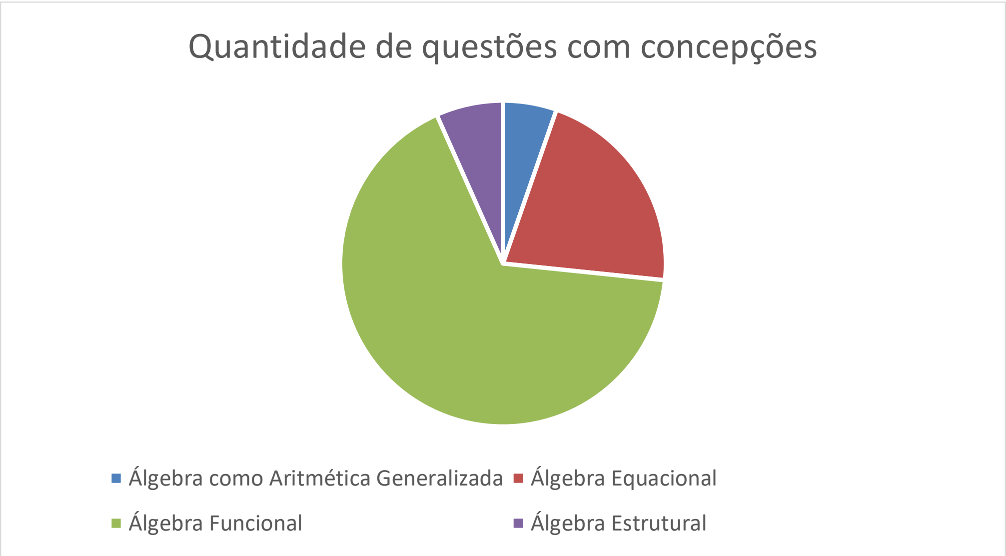
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos as análises feitas nas provas do SAEPE, ENEM e SSA baseada nas concepções de Usiskin (1995), os resultados sobre as resoluções dos 10 problemas feitos pelos alunos, fazendo considerações sobre os erros encontrados nas questões resolvidas.

5.1 ANÁLISE DAS PROVAS

Ao analisar as provas de 2015 à 2017 e classificá-las de acordo com as concepções de Usiskin (1995), observamos um total de 75 questões que foram encontradas, sendo 66,67% de Álgebra como estudo de relações entre grandezas, ou simplesmente Álgebra Funcional; 21,3% de Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, ou Álgebra Equacional; 6,67% de questões que contém Álgebra como estudo de estruturas e 5,3% de questões com Álgebra como aritmética generalizada.

Gráfico 1 - Distribuição das questões por concepção

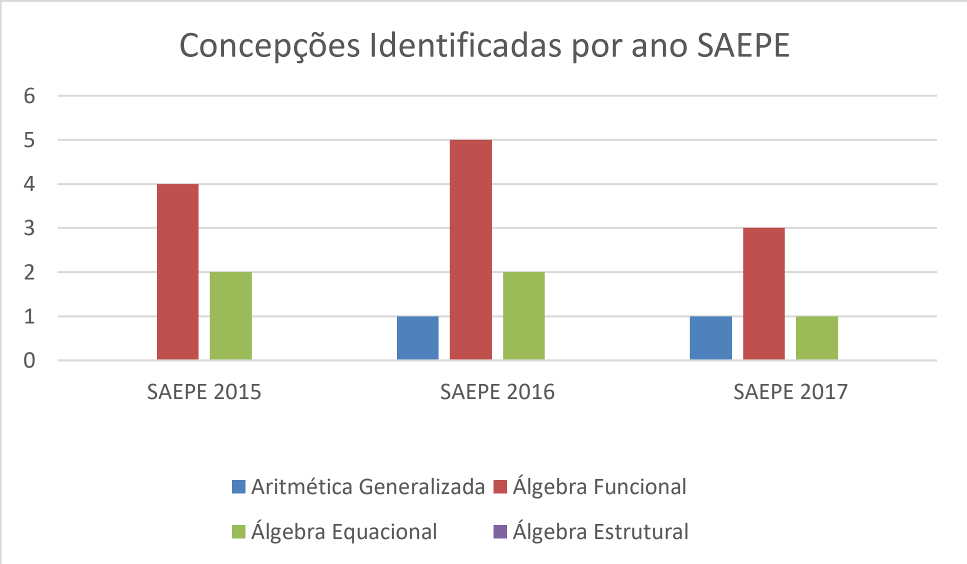


Fonte: Autor

Como é possível perceber dentre todas as questões a concepção mais presente é a Álgebra Funcional. Dentre as provas está também foi a concepção mais encontrada, sendo nas provas do ENEM 2015 e 2016 o maior número. Álgebra Equacional foi mais encontrada nas provas do SSA e SAEPE; Aritmética Generalizada encontrada apenas nas provas do SAEPE, e do mesmo modo Álgebra Estrutural.

Segue abaixo o gráfico em que apresenta com mais clareza a distribuição das concepções encontradas nas provas do SAEPE 2015, 2016 e 2017.

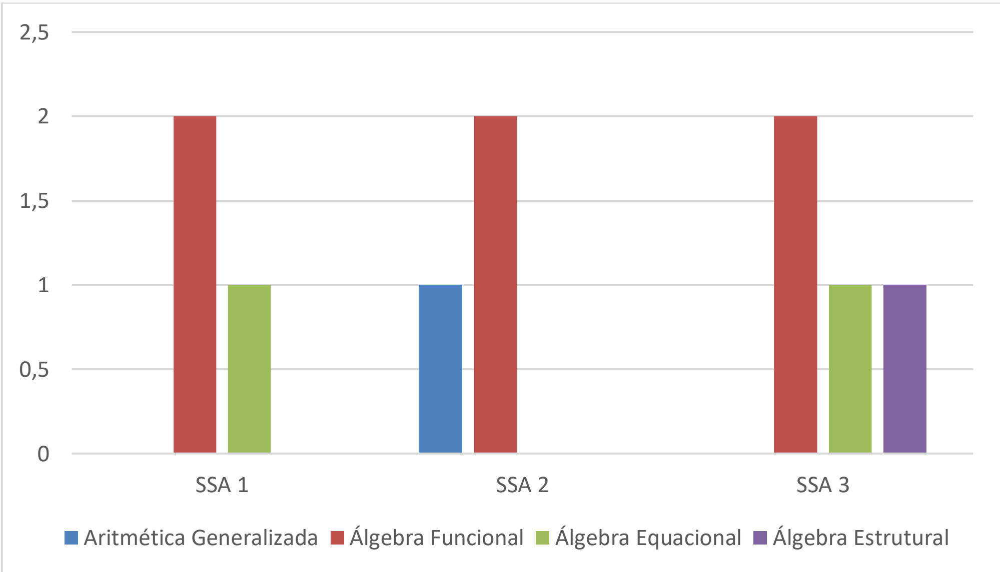
Gráfico 2 - Concepções Identificadas – SAEPE



Fonte: Autor

Segue a distribuição por ano das provas do SSA, em que são apresentadas as quantidades de concepções identificadas.

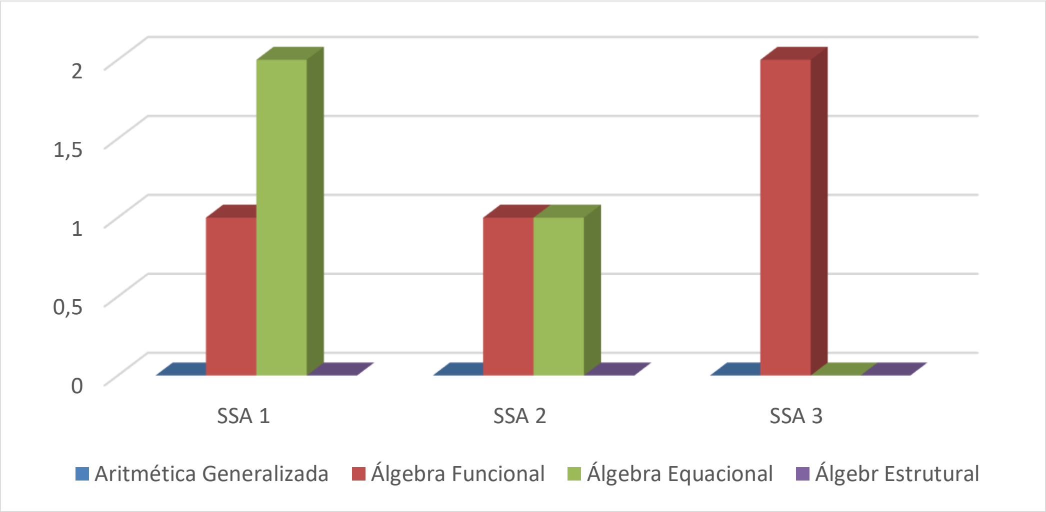
Gráfico 3 - Concepções Identificadas-SSA 2015 (Vestibular 2016)



Fonte: Autor

No caderno de provas do ano de 2015 é possível perceber que na etapa 3 desse vestibular foi identificada um maior número de questões com as concepções, e que na etapa 2 é a única em que foi identificada a concepção de Aritmética Generalizada e da mesma forma na etapa 3 que foi identificada a concepção de Álgebra Estrutural. Em todas as etapas deste ano foi identificado uma maior quantidade de questões com a concepção de Álgebra Funcional.

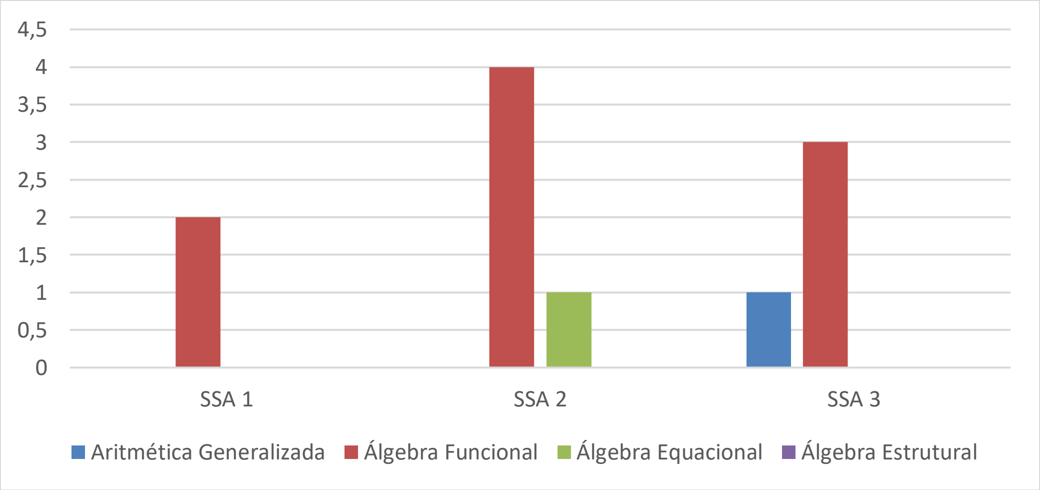
Gráfico 4- Concepções Identificadas-SSA 2016 (Vestibular 2017)



Fonte: Autor

No ano de 2016 da respectiva prova foi possível identificar um menor número de questões com alguma das quatro concepções, sendo nesse caso não identificada nenhuma de Aritmética Generalizada e Álgebra Estrutural, o que difere no quadro anterior, onde apresenta um número com relação a esse um número maior de questões com as concepções. Da mesma forma o maior número de questões identificadas com a concepção de Álgebra Funcional.

Gráfico 5- Concepções Identificadas-SSA 2017 (Vestibular 2018)

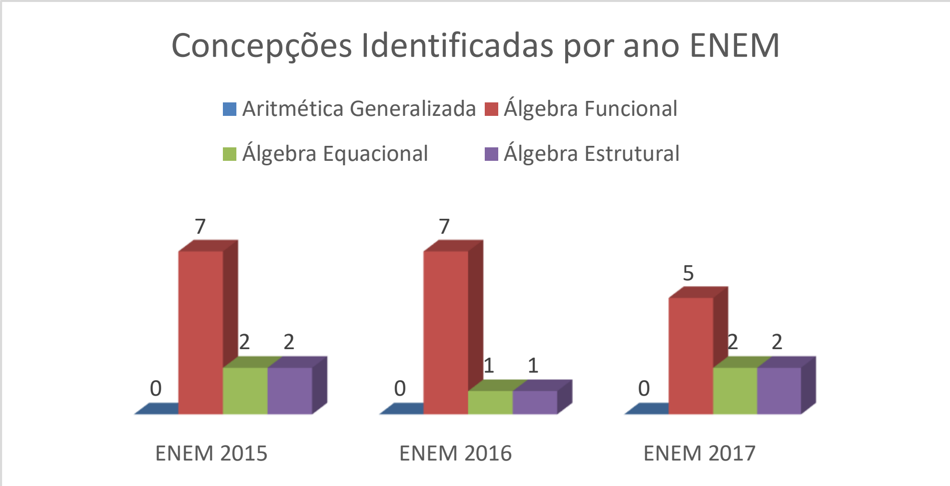


Fonte: Autor

No SSA do ano de 2017 não foi identificada nenhuma questão com a concepção de Álgebra Estrutural, e novamente questões com a concepção de Álgebra Funcional se destacaram entre as demais.

Por fim, fizemos o levantamento da prova do ENEM 2015, 2016 e 2017 e identificamos a distribuição das seguintes concepções:

Gráfico 6 - Concepções Identificadas – ENEM



Fonte: Autor

Como é possível identificar a partir do gráfico, dentre as demais questões e concepções a mais identificada foi a concepção de Álgebra Funcional, nenhuma questão com a concepção de aritmética generalizada, e as concepções de Álgebra Equacional e Álgebra Estrutural foram identificadas o mesmo número de questões.

A partir de toda análise destas questões, foi possível identificar que as questões de Álgebra que tratam sobre o estudo das grandezas, a Álgebra Funcional, estão mais sendo propostas nas determinadas provas e assim podemos nos fazer um questionamento, *Será que as questões desse tipo estão realmente sendo trabalhadas em sala de aula da forma com que são cobradas nessas provas?* A seguir, iremos apresentar as análises e classificações dos erros encontrados nos questionários respondidos pelos alunos, buscando entender a partir das respostas quais os tipos de erros e as dificuldades os alunos apresentam, e das concepções quais os erros foram mais identificados.

5.2 DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

Ao fazer a análise das resoluções desconsideramos as questões corretas, já que o foco da nossa pesquisa é analisar apenas os erros, as questões em que os alunos apenas marcaram X na opção e as que não existia a presença de nenhuma resolução a ser analisada. Foram analisadas 40 questões incorretas, distribuídas em 18 questionários.

A seguir temos um quadro em que estão presentes as quantidades de erros encontrados de acordo com cada classificação e em quais questões esses erros puderam ser encontrados e sua quantidade por questão.

Quadro 1: Erros identificados por classificação

CLASSIFICAÇÃO DOS ERROS	QUANTIDADE	QUESTÕES
Dados mal interpretados	14	**2º** (1), **3º** (3), **4º** (6), **7º** (2), **9º** (1) e **10º** (1)
Linguagem mal interpretada	4	**6º** (1), **7º** (1) e **10º** (2)
Inferência logicamente inválida	6	**3º** (1), **4º** (1), **5º** (1) e **8º** (3)
Teorema distorcido ou definição	4	**2º** (1), **4º** (3)
Solução não verificada	2	**1º** (2)
Erro técnico	6	**1º** (2), **3º** (2), **5º** (1) e **6º** (1)
Erro incompreensível	4	**5º** (3) e **2º** (1)
TOTAL	**40**	**-**

Fonte: Autor

Podemos perceber que existe uma grande quantidade de alunos que são souberam interpretar os dados fornecidos nas questões, os levando ao erro, sendo esse um fator bastante relevante nesta análise. Os erros sobre a manipulação algébrica ou na execução da questão e os erros sobre a suposição ou pensamentos sobre a resolução do problema de forma incorreta tiveram a mesma quantidade de erros. Em seguida, os erros sobre distorção dos teoremas e definições matemáticas e os erros que não foram possíveis de identificar. Por fim, dentre as classificações, apenas a não verificação da solução feita apresentou um número consideravelmente baixo em relação as outras.

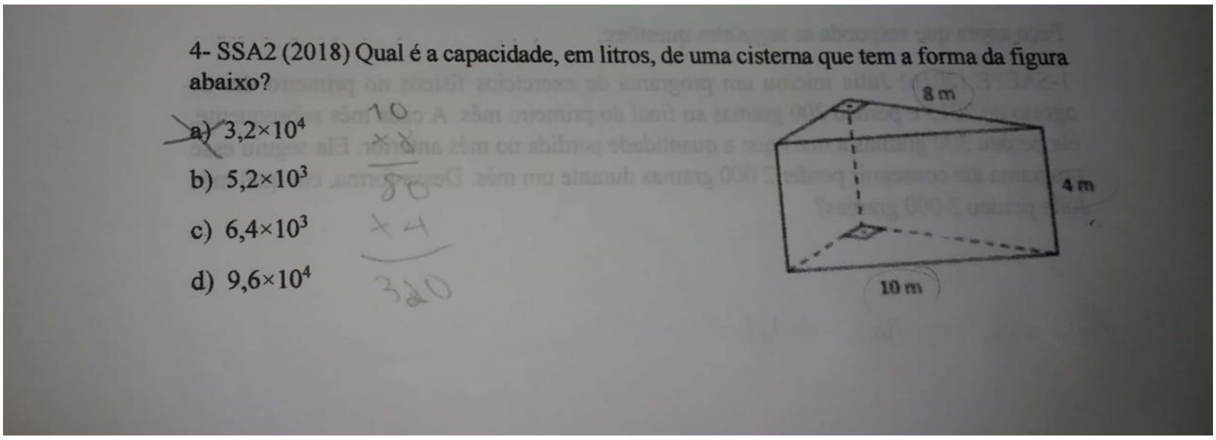
Iremos apresentar alguns exemplos abaixo de questões em que encontramos erros que foram classificados de acordo com o modelo de categorização de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).

5.2.1 Erros encontrados sobre Dados mal interpretados

Dentre as demais, essa classificação sobre dados mal interpretados foi a mais encontrada dentre as resoluções, tendo um total de 14 questões com erros desse tipo. Analisamos que esse fato aconteceu devido ao uso dos dados fornecidos na questão incorretamente, ou até mesmo utilizou de dados que não estavam presentes no problema.

Um exemplo bastante encontrado nas resoluções com esse tipo de erro, foi na 4ª questão e também foi onde se apresentou uma maior frequência dessa classificação, apresentando 6 questionários com esse erro, em que a maioria das soluções incorretas os alunos utilizavam os dados presentes na questão, calculava o volume que era pedido, mas não da forma correta.

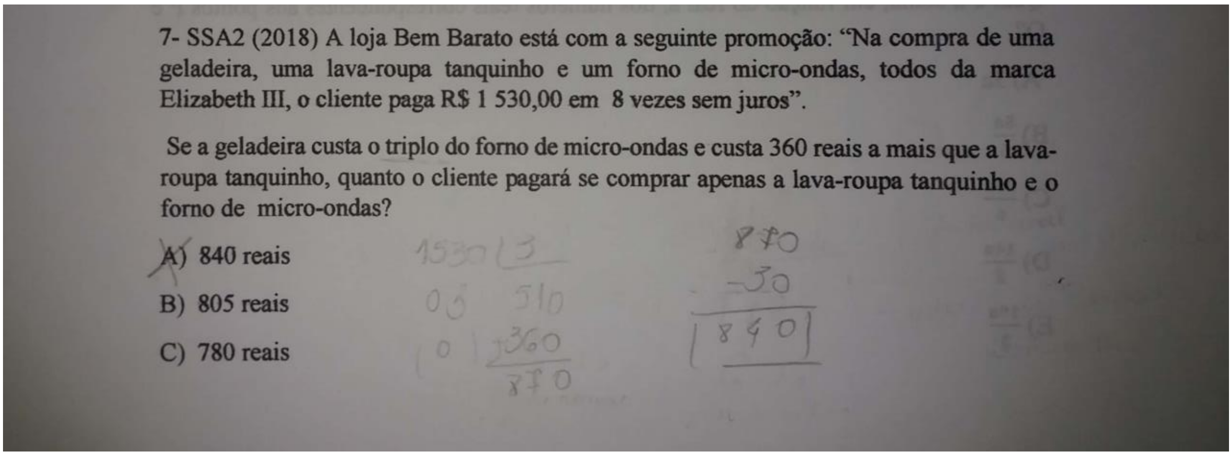
Figura 9- Questão 4, aluno A27



Fonte: Autor

Nesse caso o aluno fez multiplicações com os dados apresentados, não calculando de forma correta o volume do prisma de base triangular. A partir da resolução é possível perceber que o aluno possivelmente desconhece a forma correta de calcular o volume pedido. Esperava-se que o aluno pudesse inicialmente identificar que precisaria utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar o valor referente a um dos lados do triângulo retângulo, não percebendo que necessitaria fazer outra ação para resolver o problema corretamente.

Figura 10- Questão 7, aluno A24



7- SSA2 (2018) A loja Bem Barato está com a seguinte promoção: "Na compra de uma geladeira, uma lava-roupa tanquinho e um forno de micro-ondas, todos da marca Elizabeth III, o cliente paga R$ 1 530,00 em 8 vezes sem juros".

Se a geladeira custa o triplo do forno de micro-ondas e custa 360 reais a mais que a lava-roupa tanquinho, quanto o cliente pagará se comprar apenas a lava-roupa tanquinho e o forno de micro-ondas?

A) 840 reais

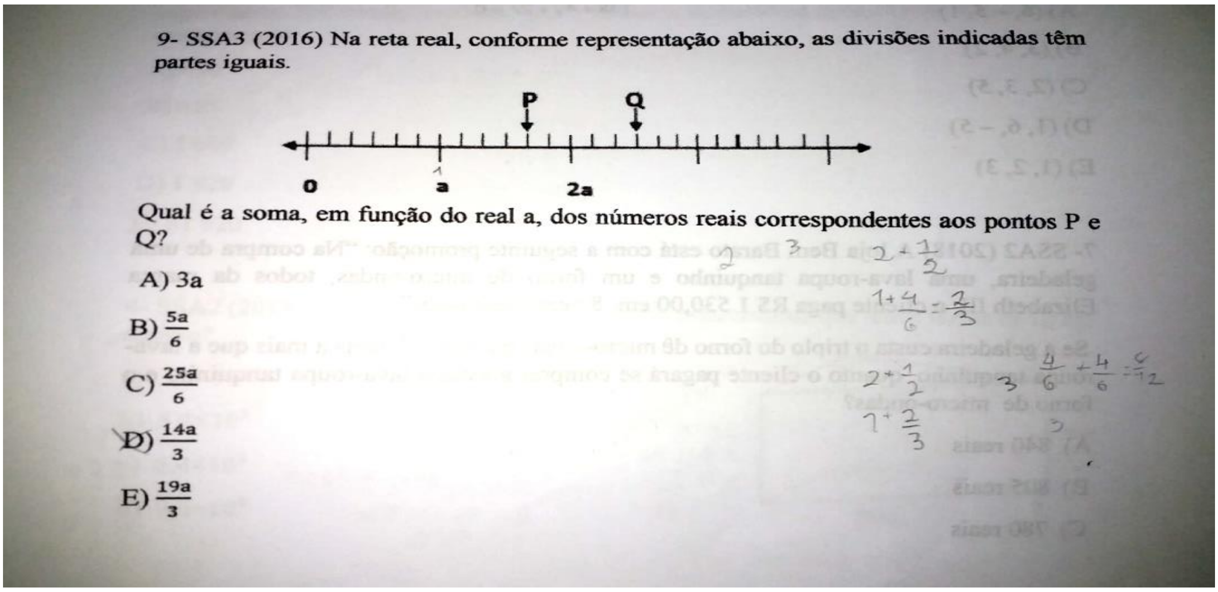
B) 805 reais

C) 780 reais

Fonte: Autor

Sobre o uso de dados mal interpretados foi possível de se identificar também na 7ª questão, da mesma maneira utilizou os dados do problema de forma inadequada e além disso adicionou dados irrelevantes que não estavam sendo informados, como por exemplo, subtraiu 30 de 870, sendo que esse valor (trinta) não estava sendo apresentado no problema. Esperava-se que o aluno compreendesse que precisaria utilizar os dados, a partir do que era proposto no problema, inicialmente para estruturar as equações e com base nisso encontrar os valores necessários para que a questão estivesse correta.

Figura 11- Questão 9, aluno A16



9- SSA3 (2016) Na reta real, conforme representação abaixo, as divisões indicadas têm partes iguais.

Qual é a soma, em função do real a, dos números reais correspondentes aos pontos P e Q?

A) 3a

B) $\frac{5a}{6}$

C) $\frac{25a}{6}$

D) $\frac{14a}{3}$

E) $\frac{19a}{3}$

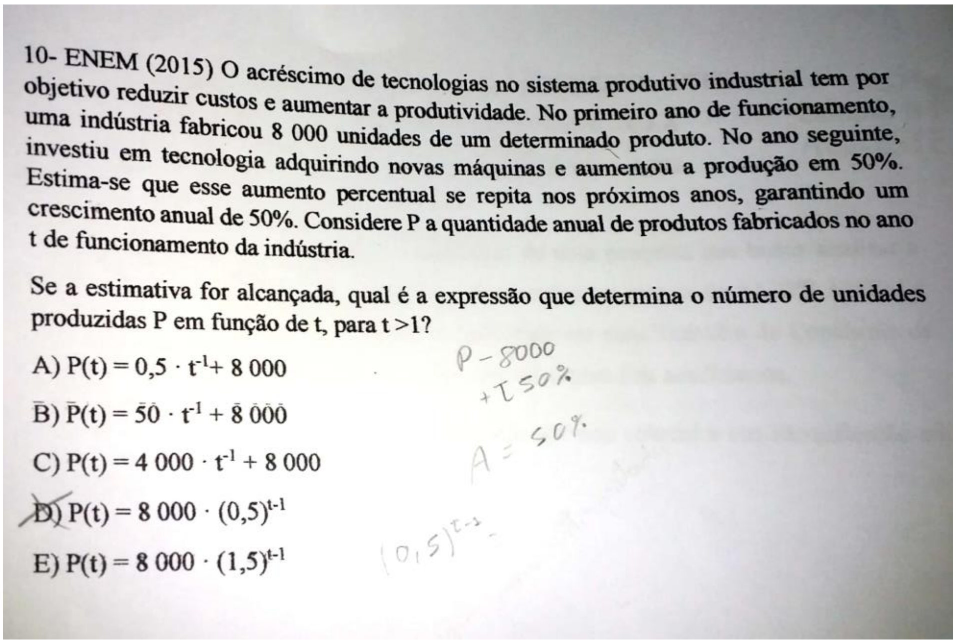
Fonte: Autor

Na questão apresentada acima o aluno utilizou os dados de forma inadequado quando interpretou de forma incorreta os valores indicados na reta real, tendo isso prejudicado na resolução do problema. Esperava-se que o aluno percebesse que o valor de *a* não é *1* como ele imaginou e contasse os tracinhos e a partir desses dados apresentados concluir corretamente a questão.

5.2.2 Erros encontrados sobre Linguagem mal interpretada

Sobre os erros de Linguagem mal interpretada, foi possível perceber que os alunos sentiram dificuldade em traduzir o que se pedia no problema, ou seja a linguagem natural, para a linguagem matemática e assim conseguir resolver corretamente.

Figura 12- Questão 10, aluno A6



10- ENEM (2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para t >1?

A) $P(t) = 0{,}5 \cdot t^{-1} + 8\,000$

B) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\,000$

C) $P(t) = 4\,000 \cdot t^{-1} + 8\,000$

~~D)~~ $P(t) = 8\,000 \cdot (0{,}5)^{t-1}$

E) $P(t) = 8\,000 \cdot (1{,}5)^{t-1}$

P - 8000
+ T 50%

A = 50%

$(0{,}5)^{t-1}$

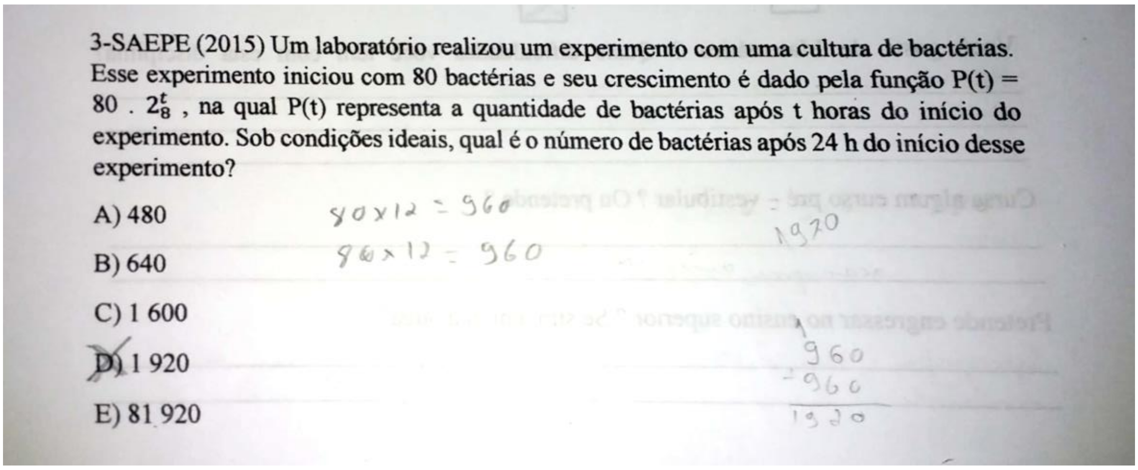
Fonte: Autor

Nesta questão foi possível identificar que o aluno não conseguiu interpretar a linguagem dos dados fornecidos na questão e traduzi-los para a linguagem matemática, não conseguindo identificar a expressão correta que satisfaz o que se pedi na questão. Esperava-se que o aluno percebesse que era necessário interpretar a linguagem matemática apresentada na questão, para em seguida traduzir para a linguagem simbólica e com isso conseguir determinar a expressão correta.

5.2.3 Erros sobre Inferência logicamente inválida

Os erros encontrados nessa classificação sobre inferência logicamente inválida são sobre o raciocínio enganoso do determinado problema ou solução. Na seguinte questão pôde-se perceber um erro que se encaixa nessa classificação, em que o aluno se enganou ao utilizar os dados fornecidos no problema e dessa maneira não conseguiu alcançar o resultado correto, supondo ao fazer a multiplicação de 80x12 e somando o seu resultado duas vezes teria 1920 e assim, supôs que a resposta seria essa.

Figura 13- Questão 3, aluno A14



3-SAEPE (2015) Um laboratório realizou um experimento com uma cultura de bactérias. Esse experimento iniciou com 80 bactérias e seu crescimento é dado pela função $P(t) = 80 \cdot 2^{\frac{t}{8}}$, na qual P(t) representa a quantidade de bactérias após t horas do início do experimento. Sob condições ideais, qual é o número de bactérias após 24 h do início desse experimento?

A) 480 80x12 = 960

B) 640 80x12 = 960

C) 1 600

D) 1 920

E) 81 920

1920

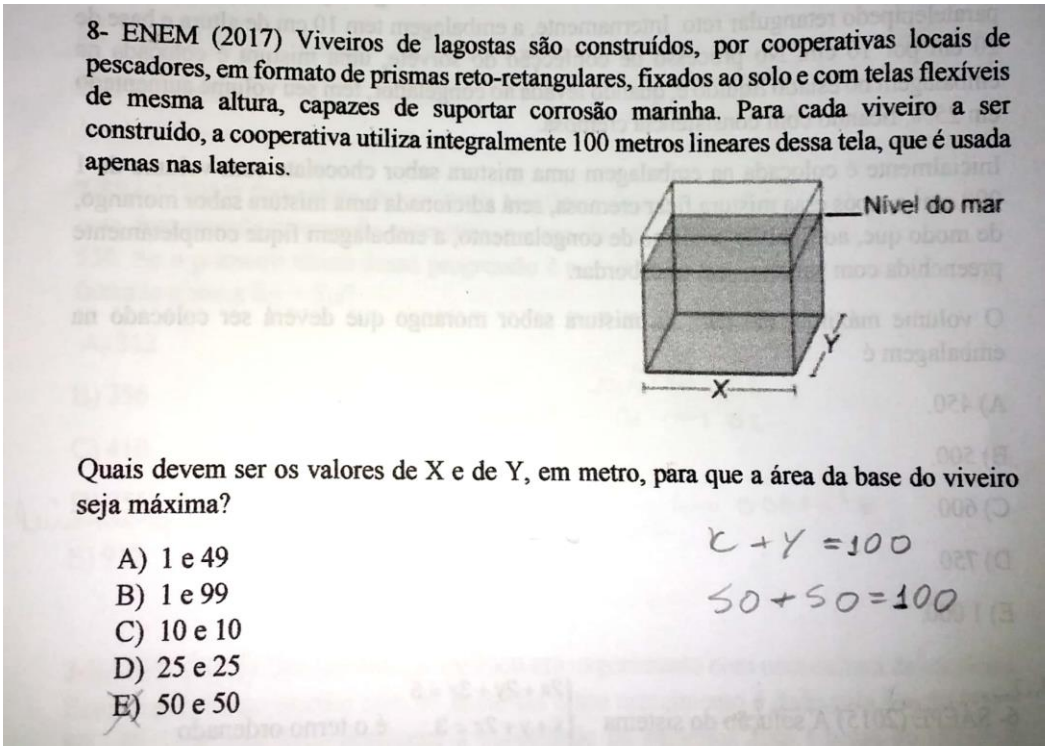
$$\begin{array}{r} 960 \\ +960 \\ \hline 1920 \end{array}$$

Fonte: Autor

Como foi possível ver o aluno supôs que ao multiplicar o valor de 80 por 12 duas vezes e somar o resultado teria a resposta correta. Ao analisar a resolução, percebemos que ao multiplicar por 12 e depois somar, o aluno inferiu que daria o valor referente ao se multiplicar por 24, que é dado na questão. Ao somar os resultados verificou que o valor estava em uma das alternativas, e assim finalizou a resolução. Esperava-se que ele percebesse que necessitaria utilizar a fórmula da soma dos n termos de uma PA e com isso conseguir encontrar o valor pedido na questão.

Em outra questão essa classificação também pôde ser encontrada.

Figura 14- Questão 8, aluno A4



8- ENEM (2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

A) 1 e 49
B) 1 e 99
C) 10 e 10
D) 25 e 25
E) 50 e 50

$x + y = 100$

$50 + 50 = 100$

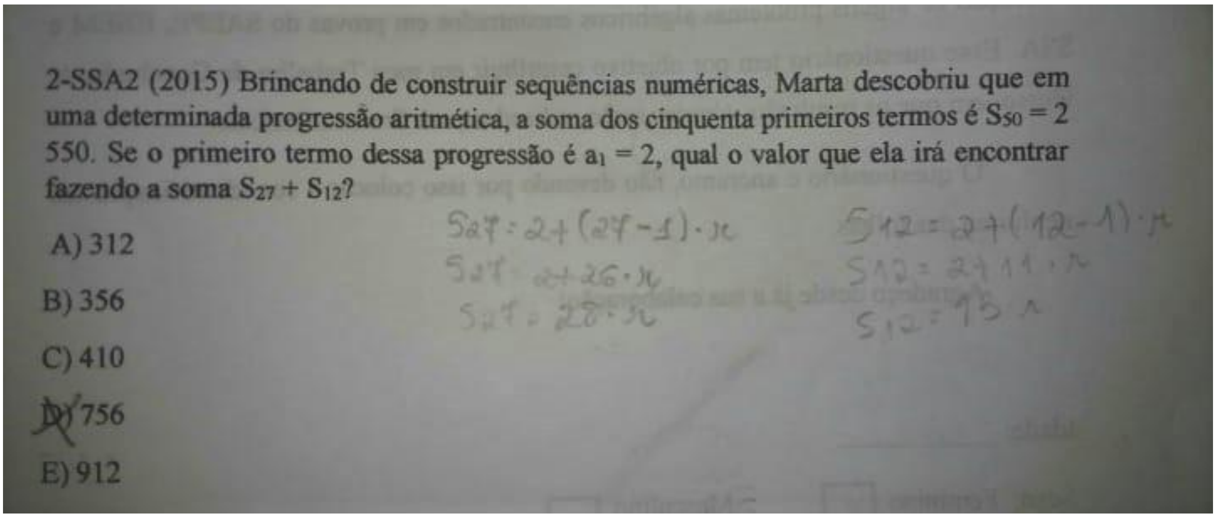
Fonte: Autor

Neste caso, o aluno concluiu que o perímetro seria X+Y=100, então 50+50=100, como a base é um quadrado, e X e Y teriam valores iguais, logo o valor dos lados seria 50 e 50, sendo que esse raciocínio para o que se pedi na questão está errado, aparentemente não conhecendo a verdadeira forma de se calcular o perímetro de uma figura. Esperava-se que ele percebesse que precisaria encontrar o valor de X e Y a partir de manipulações algébricas a partir da fórmula da área da base $A=b*h$ ou simplesmente $A= x*y$, e fazer as substituições a partir dos valores dados, supondo que se $2x+2y=100$, então $x + y=50$, e com isso concluir corretamente a questão.

5.2.4 Erros sobre Teorema distorcido ou definição

Nessa classificação sobre Teorema distorcido ou definição foram possíveis encontrar os erros referente ao uso de definições, fórmulas ou propriedades que não se aplicassem no problema. Dois exemplos bastante pertinentes de apresentar são erros na 2ª questão e 4ª questão.

Figura 15- Questão 2, aluno A5


2-SSA2 (2015) Brincando de construir sequências numéricas, Marta descobriu que em uma determinada progressão aritmética, a soma dos cinquenta primeiros termos é $S_{50} = 2\ 550$. Se o primeiro termo dessa progressão é $a_1 = 2$, qual o valor que ela irá encontrar fazendo a soma $S_{27} + S_{12}$?

A) 312

B) 356

C) 410

D) 756

E) 912

$S_{27} = 2+(27-1)\cdot r$

$S_{27} = 2+26\cdot r$

$S_{27} = 28\cdot r$

$S_{12} = 2+(12-1)\cdot r$

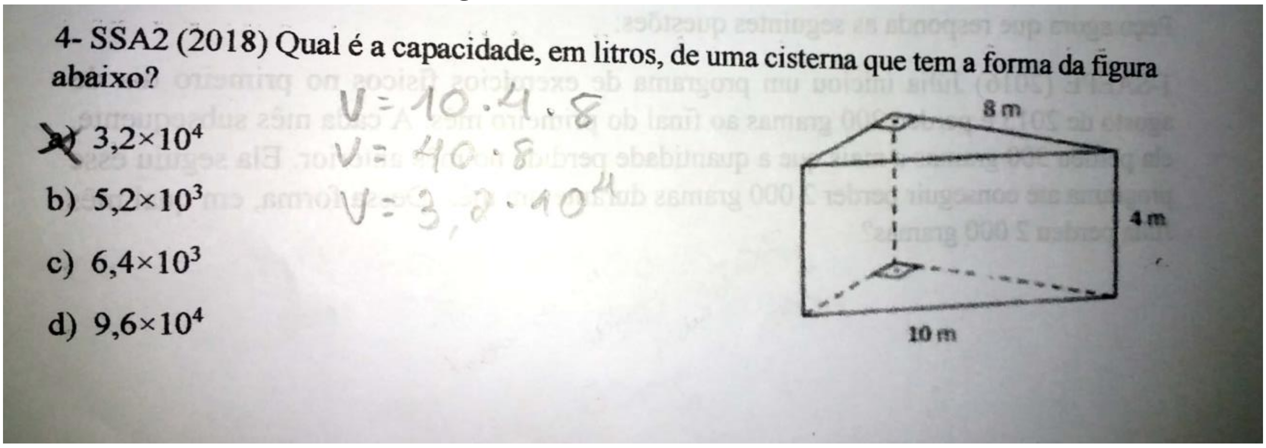
$S_{12} = 2+11\cdot r$

$S_{12} = 13\cdot r$

Fonte: Autor

Na resolução acima é perceptível que o aluno utilizou a fórmula incorreta para a solução da questão. A fórmula utilizada não é da soma dos n termos de uma Progressão Aritmética (PA), mas sim uma eventual adaptação da fórmula do termo geral de uma PA, de maneira incorreta.

Figura 16- Questão 4, aluno A5


4- SSA2 (2018) Qual é a capacidade, em litros, de uma cisterna que tem a forma da figura abaixo?

a) $3{,}2\times10^4$

b) $5{,}2\times10^3$

c) $6{,}4\times10^3$

d) $9{,}6\times10^4$

$V = 10\cdot4\cdot8$

$V = 40\cdot8$

$V = 3{,}2\cdot10^4$

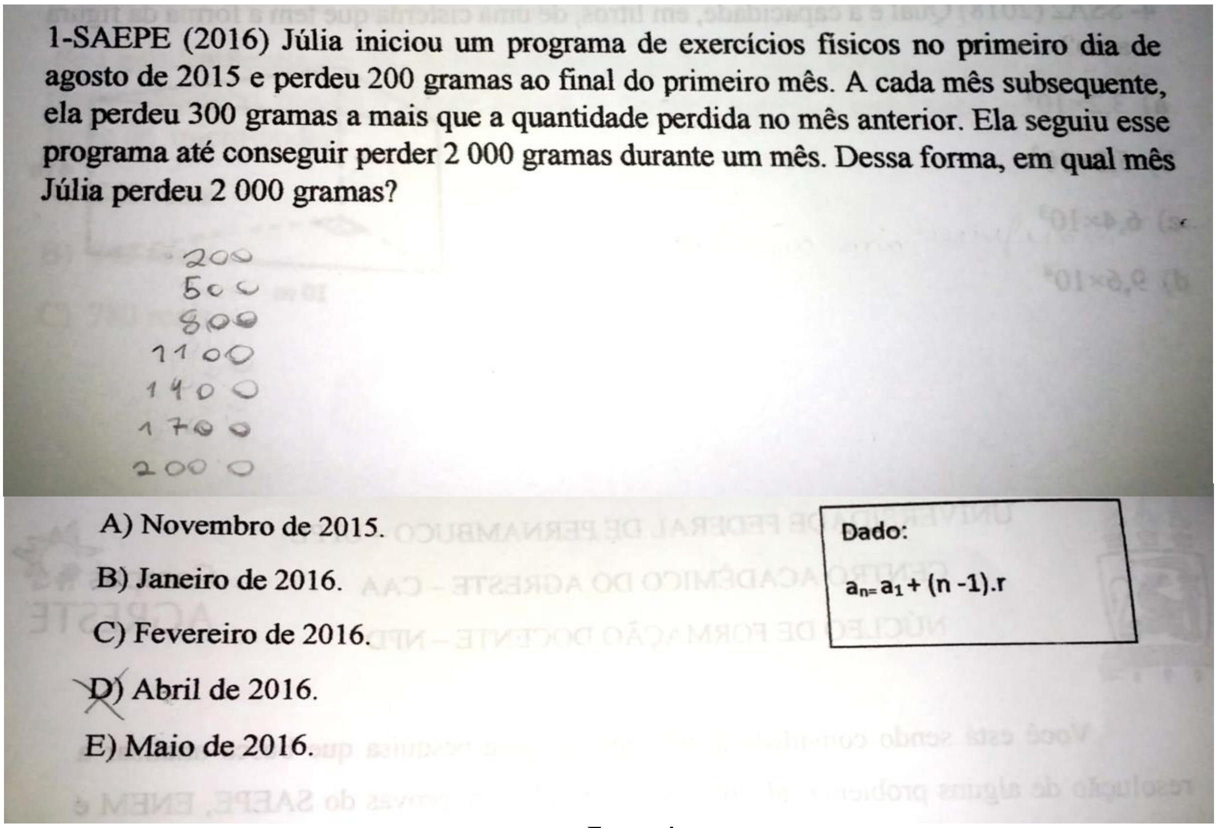
Fonte: Autor

Na questão 4 que foi citada, o aluno utilizou a fórmula para calcular o volume de um paralelogramo ao invés de calcular o volume do prisma de forma correta. Percebeu-se que o aluno conhecia a maneira como calcular o volume de um paralelogramo, mas ocorreu distorção da definição ao considerar que também poderia calcular o volume do prisma desta forma.

5.2.5 Erros sobre Solução não verificada

Para essa classificação sobre Solução não verificada foi possível encontrar apenas duas resoluções e apenas na 1ª questão. O aluno não conferiu a sua resolução e com isso assinalou a resposta incorreta.

Figura 17- Questão 1, aluno A18



1-SAEPE (2016) Júlia iniciou um programa de exercícios físicos no primeiro dia de agosto de 2015 e perdeu 200 gramas ao final do primeiro mês. A cada mês subsequente, ela perdeu 300 gramas a mais que a quantidade perdida no mês anterior. Ela seguiu esse programa até conseguir perder 2 000 gramas durante um mês. Dessa forma, em qual mês Júlia perdeu 2 000 gramas?

200
500
800
1100
1400
1700
2000

A) Novembro de 2015.
B) Janeiro de 2016.
C) Fevereiro de 2016.
D) Abril de 2016.
E) Maio de 2016.

Dado:
$a_n = a_1 + (n-1).r$

Fonte: Autor

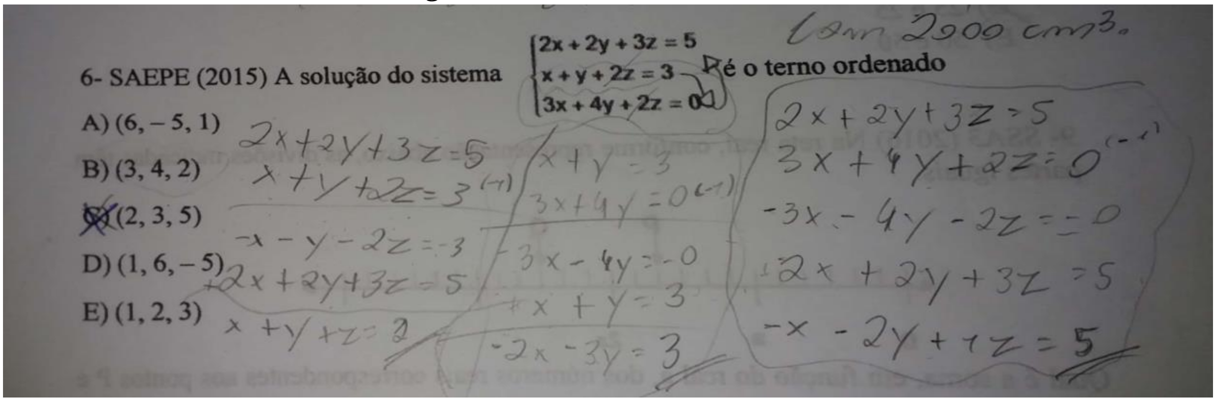
O aluno listou as possibilidades de Júlia perder 300 gramas ao fim de cada mês corretamente, mas ao fazer a contagem dos meses assinalou a resposta incorreta, Abril de 2016, passando 2 meses a mais do mês correto que é Fevereiro de 2016. Se ele voltasse a ler a questão e fazer a contagem da sua listagem de forma correta iria perceber que Júlia perdeu 2000 gramas 7 meses após o início da dieta, no caso em fevereiro.

Outro aluno respondeu da mesma forma com a listagem, mas ao invés de somar a mais, ele somou possivelmente a menos, com sua listagem correta, mas marcando o mês incorreto, Janeiro de 2016.

5.2.6 Erros sobre Erro Técnico

Os erros encontrados nas questões que pertencem a essa classificação foram erros de manipulação incorreta dos dados fornecidos no problema, não apresentando corretamente as operações algébricas.

Figura 18- Questão 6, aluno A25



6- SAEPE (2015) A solução do sistema $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5 \\ x + y + 2z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ é o terno ordenado

A) (6, – 5, 1)

B) (3, 4, 2)

C) (2, 3, 5)

D) (1, 6, – 5)

E) (1, 2, 3)

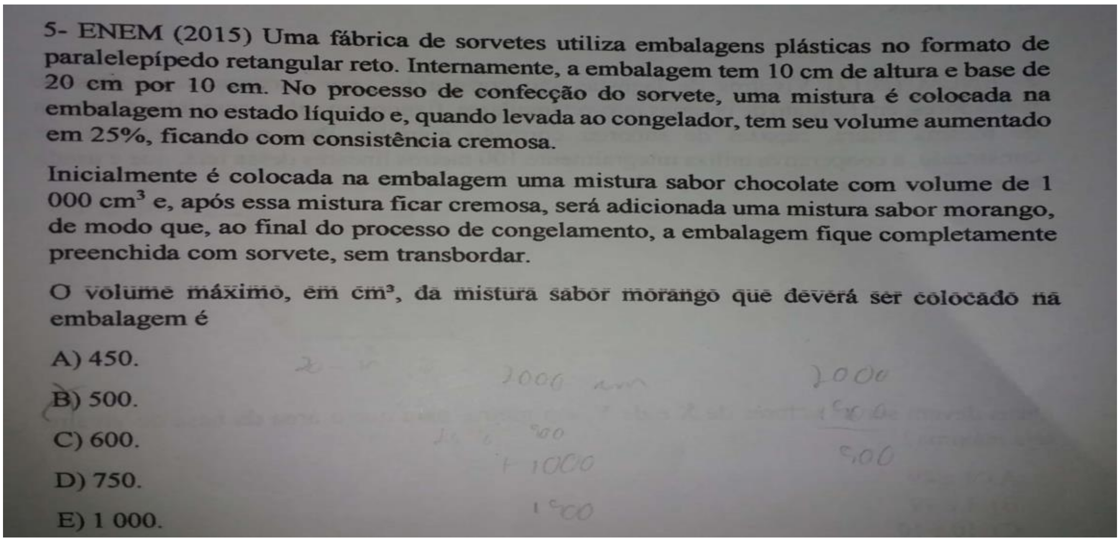
Fonte: Autor

Nesse problema o aluno fez os cálculos incorretos do sistema, manipulando as expressões de forma incorreta, somando as incógnitas de maneira errada, não determinando o valor dos termos.

5.2.7 Erros Incompreensíveis

Nessa última classificação podemos perceber que em algumas resoluções não foi possível identificar o porquê do erro do aluno, sendo esse erro não classificável entre os demais tipos.

Figura 19- Questão 5, aluno A1



5- ENEM (2015) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

A) 450.

B) 500.

C) 600.

D) 750.

E) 1 000.

Fonte: Autor

O aluno utilizou os dados fornecidos na questão e não foi possível inferir o que realmente o aluno fez para que a solução estivesse incorreta e qual forma poderia ter feito para que a solução fosse correta.

Quanto aos erros classificados, verificamos os erros de acordo as concepções de Usiskin (1995) e apresentaremos a quantidade de questões que foram resolvidas de forma incorreta.

Quadro 2: Quantidade de questões erradas por concepção

QUESTÕES	CONCEPÇÃO	QUANTIDADE
1	Aritmética Generalizada	4
2	Aritmética Generalizada	3
3	Álgebra Funcional	6
4	Álgebra Funcional	10
5	Álgebra Funcional	5
6	Álgebra Equacional	2
7	Álgebra Equacional	3
8	Álgebra Equacional	3
9	Álgebra Estrutural	1
10	Álgebra Estrutural	3

Fonte: Autor

Podemos perceber que o maior índice de erro foi nas questões de Álgebra Funcional, em que nessa concepção a álgebra está presente nas relações entre grandezas, que é apresentado por Usiskin (1995). As questões que apresentaram a concepção de aritmética generalizada ao analisar todos os questionários, vimos que na 1ª questão houve um alto índice de acertos e apenas 4 alunos erraram.

Nas questões de álgebra equacional e álgebra estrutural apresentaram baixo índice de acertos, e muitos alunos deixaram principalmente as questões 9 e 10 em branco, apenas 2 alunos conseguiram resolver corretamente, um em cada questão. Da mesma forma, as questões 6, 7 e 8 poucos alunos responderam, deixando principalmente as questões 7 e 8 em branco, mas na questão 6 o índice de acertos foi maior em consideração as outras duas.

Muitos alunos não responderam completamente os questionários deixando principalmente a partir da questão 6 em branco. Acreditamos que não responderam por não saberem ou por utilizarem mais tempo respondendo as questões iniciais, apesar do tempo de 2 horas aulas fornecidas pela professora, e com isso em apenas um questionário pudemos identificar erros de diferentes classificações, principalmente nas primeiras cinco questões tiveram mais respostas e consequentemente mais questões erradas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi possível perceber com base nas análises, que a grande dificuldade dos alunos foi na interpretação do problema proposto, podemos supor que o ensino de álgebra para esses alunos pode ter sido de forma mecanizada. Outro fator importante a ser ressaltado, é que os alunos ainda confundem conceitos básicos dos conteúdos matemáticos, como por exemplo área de figuras planas, que é um grande problema a ser solucionado em sala de aula.

Então, a partir das análises feitas podemos perceber que ainda os alunos apresentam grande dificuldade em resolver esses problemas relacionados a álgebra presentes nos vestibulares, provas externas e o ENEM, apesar de toda preparação pelos professores e da escola, não estão realmente preparados como esperam.

Analisar os erros dos alunos de forma minuciosa é uma das alternativas de identificar quais as principais dificuldades que os mesmos apresentam, para que ao chegar no Ensino Médio principalmente, os alunos tenham facilidade na interpretação de questões contextualizadas, que são as mais frequentes nos exames e vestibulares. Como professores e formadores desses alunos, precisamos nos questionar se realmente eles estão preparados para resolver esses problemas apresentados nos vestibulares e provas externas.

Uma das alternativas para que ainda sejam sanadas de alguma forma esses erros durante o Ensino Médio e também durante a educação básica, seria o trabalho do professor no uso dos erros como forma didática, compreendendo que podem ser trabalhados de forma positiva, fazendo uma observação detalhada, a fim de entender a solução do problema e o que o aluno pensou quando resolveu, utilizando esses erros como uma ferramenta indispensável para o processo de ensino e aprendizagem.

Outro ponto importante seria o professor compreender as diferentes estruturas da álgebra dentro das concepções de Usiskin (1995) e pensar em atividades que possam ser trabalhadas em sala de aula a fim de apresentar essas concepções aos alunos e levar em conta a concepção apresentada na proposição de problemas e discutir as diferentes estruturas da álgebra a partir das concepções.

Propor atividades em que os alunos possam auto avaliar-se e discutir os erros apresentados em suas resoluções, é uma alternativa importante para que se estimule a participação dos alunos em sala de aula para exporem suas dificuldades e questionamentos e que vejam o erro como uma nova forma de aprender em sala de aula.

Visamos por meio deste trabalho responder à seguinte pergunta, Quais os erros mais cometidos por alunos do 3° ano do Ensino Médio de uma escola pública de Passira em problemas de álgebra?, para isto fizemos a aplicação de um questionário com questões de álgebra, selecionadas nas provas do SAEPE, ENEM e SSA dos anos de 2015 à 2017, questões essas identificadas a partir das concepções de Usiskin (1995) e analisando os erros e os classificando a partir do modelo de caracterização de Movshovitz-Hadar, et al (1987).

Com isso vimos que os erros cometidos por esses alunos em problemas de álgebra são provenientes da má manipulação dos dados e na manipulação simbólica, que são cometidos a partir da interpretação das questões de forma equivocada e ainda alguns erros nas operações básicas.

Consideramos portanto, que a pesquisa nos trouxe grandes questionamentos com relação aos erros em álgebra dos alunos, percebemos que é uma problemática a ser solucionada pelos professores de forma adequada, não só nos últimos anos da educação básica, mas sim no decorrer de toda vivência escolar e que a partir desses erros podemos conseguir identificar qual a dificuldade que o aluno apresenta na resolução dos problemas e no entendimento do conteúdo.

Os dados apresentados nessa pesquisa podem servir para refletir e investigar sobre novas abordagens a serem tomadas em sala de aula, e buscar identificar os erros cometidos pelos alunos em outros conteúdos e eixos matemáticos, utilizando o modelo de caracterização proposto, ou até outro que sirva para compreender, a partir das análises, os erros dos alunos na resolução dos problemas matemáticos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental Parâmetros Curriculares Nacionais – terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental Matemática. Brasília: MEC, SEF, 1998.

BECHER, Ednei Luís; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Erros Algébricos de Estudantes do 1º ano do Ensino Médio. In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. 2010, Salvador – BA.

BORBA, Marcelo C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: Anais da 27ª reunião anual da Anped. 2014. Caxambu-MG.

CURY, Helena Noronha. Análise de erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

GARBI, G. G. O romance das equações algébricas. 3. ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus, 1997.

MOVSHOVITZ-HADAR, Nitsa; ZASLAVSKY, Orit; INBAR, Shlomo. An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics, Israel, 1987.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. CURY, Helena Noronha. Álgebra para a formação de professores: Explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

SANMARTI, Neus. O erro é útil para regular a aprendizagem. In: Avaliar para Aprender. Tradução Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SANTOS, Fabiane Pereira dos. Conhecimento de Álgebra de Futuros Professores de Matemática: Uma discussão sobre os erros cometidos por egressos do Ensino Médio. 2014. Monografia – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru.

SILVA, José Edmilson Melo Da. Investigando A Noção De Equação No Livro Didático De Matemática. 2017. Monografia – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru.

TORRE, Saturnino de La. Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança. Tradução Ernani Rosa. – Porto Alegre: Artmed, 2007

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. (org.); SHULTE, Albert P. (org.). As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

APÊNDICE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO – UFPE

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE – CAA

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE – NFD

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa que busca analisar a resolução de alguns problemas algébricos encontrados em provas do SAEPE, ENEM e SSA. Esse questionário tem por objetivo contribuir em meu Trabalho de Conclusão de Curso, em que os resultados obtidos serão utilizados para fins acadêmicos.

O questionário é anónimo, não devendo por isso colocar a sua identificação em nenhuma das folhas.

Agradeço desde já a sua colaboração!

Idade: ___________

Sexo: Feminino ☐ Masculino ☐

Peço agora que responda as seguintes questões:

1-SAEPE (2016) Júlia iniciou um programa de exercícios físicos no primeiro dia de agosto de 2015 e perdeu 200 gramas ao final do primeiro mês. A cada mês subsequente, ela perdeu 300 gramas a mais que a quantidade perdida no mês anterior. Ela seguiu esse programa até conseguir perder 2 000 gramas durante um mês. Dessa forma, em qual mês Júlia perdeu 2 000 gramas?

A) Novembro de 2015.

B) Janeiro de 2016.

C) Fevereiro de 2016.

D) Abril de 2016.

E) Maio de 2016.

Dado:

$a_{n=} a_1 + (n - 1) r$

2-SSA2 (2015) Brincando de construir sequências numéricas, Marta descobriu que em uma determinada progressão aritmética, a soma dos cinquenta primeiros termos é $S_{50} = 2\ 550$. Se o primeiro termo dessa progressão é $a_1 = 2$, qual o valor que ela irá encontrar fazendo a soma $S_{27} + S_{12}$?

A) 312

B) 356

C) 410

D) 756

E) 912

3-SAEPE (2015) Um laboratório realizou um experimento com uma cultura de bactérias. Esse experimento iniciou com 80 bactérias e seu crescimento é dado pela função P(t) = 80 . $2^{\frac{t}{8}}$, na qual P(t) representa a quantidade de bactérias após t horas do início do experimento. Sob condições ideais, qual é o número de bactérias após 24 h do início desse experimento?

A) 480

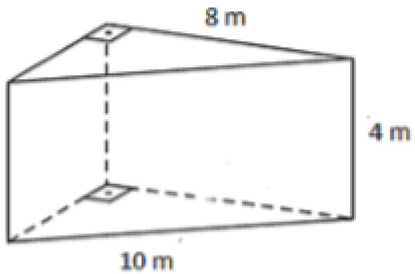
B) 640

C) 1 600

D) 1 920

E) 81 920

4- SSA2 (2018) Qual é a capacidade, em litros, de uma cisterna que tem a forma da figura abaixo?



a) $3{,}2 \times 10^4$

b) $5{,}2 \times 10^3$

c) $6{,}4 \times 10^3$

d) $9{,}6 \times 10^4$

e) $10{,}5 \times 10^4$

5- ENEM (2015) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

A) 450.

B) 500.

C) 600.

D) 750.

E) 1 000.

6- SAEPE (2015) A solução do sistema $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5 \\ x + y + 2z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ é o terno ordenado

A) (6, – 5, 1)

B) (3, 4, 2)

C) (2, 3, 5)

D) (1, 6, – 5)

E) (1, 2, 3)

7- SSA2 (2018) A loja Bem Barato está com a seguinte promoção: “Na compra de uma geladeira, uma lava-roupa tanquinho e um forno de micro-ondas, todos da marca Elizabeth III, o cliente paga R$ 1 530,00 em 8 vezes sem juros”.

Se a geladeira custa o triplo do forno de micro-ondas e custa 360 reais a mais que a lava-roupa tanquinho, quanto o cliente pagará se comprar apenas a lava-roupa tanquinho e o forno de micro-ondas?

A) 840 reais

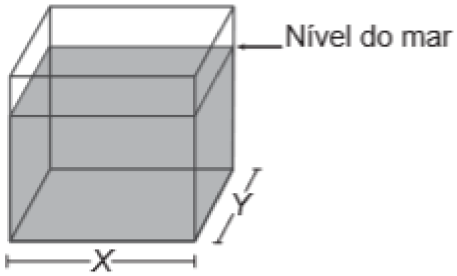
B) 805 reais

C) 780 reais

D) 750 reais

E) 720 reais

8- ENEM (2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

A) 1 e 49

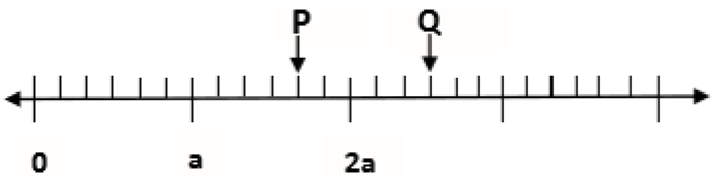
B) 1 e 99

C) 10 e 10

D) 25 e 25

E) 50 e 50

9- SSA3 (2016) Na reta real, conforme representação abaixo, as divisões indicadas têm partes iguais.



Qual é a soma, em função do real a, dos números reais correspondentes aos pontos P e Q?

A) 3a

B) $\frac{5a}{6}$

C) $\frac{25a}{6}$

D) $\frac{14a}{3}$

E) $\frac{19a}{3}$

10- ENEM (2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para t >1?

A) $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8\ 000$

B) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8\ 000$

C) $P(t) = 4\ 000 \cdot t^{-1} + 8\ 000$

D) $P(t) = 8\ 000 \cdot (0,5)^{t-1}$

E) $P(t) = 8\ 000 \cdot (1,5)^{t-1}$