UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

JÉSSICA RAIANNE DE LIMA SILVA

# A EXPERIÊNCIA GEOMÉTRICA SOBRE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS DE UM GRUPO DE ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Caruaru - PE

2019

JÉSSICA RAIANNE DE LIMA SILVA

# A EXPERIÊNCIA GEOMÉTRICA SOBRE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS DE UM GRUPO DE ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de graduação em Matemática - Licenciatura.

**Área de concentração**: Ensino/ Matemática

**Orientador**: Profº. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior

Caruaru - PE

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S586e Silva, Jéssica Raianne de Lima.
A experiência geométrica sobre quadriláteros notáveis de um grupo de estudantes do 9o Ano do ensino fundamental. / Jéssica Raianne de Lima Silva. – 2019.
40 f. il. : 30 cm.

Orientador: Valdir Bezerra dos Santos Júnior.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Ensino fundamental. 3. Quadrilátero. I. Santos Júnior, Valdir Bezerra dos (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-096)

JÉSSICA RAIANNE DE LIMA SILVA

**A EXPERIÊNCIA GEOMÉTRICA SOBRE QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS DE UM GRUPO DE ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de graduação em Matemática.

Aprovada em: 26/06/2019

**BANCA EXAMINADORA**

____________________________________________________
Profº. Dr. Valdir Bezerra dos Santos Júnior (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____________________________________________________
Profª. Drª Cristiane de Arimatéa Rocha (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

____________________________________________________
Profº. MSc. Luan Danilo Silva dos Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ser sempre tão bondoso, nunca ter me abandonado nessa caminhada longa e por ter me dado o privilégio de nascer em uma família tão linda e que em todos os momentos esteve ao meu lado, me incentivando e levantando meu astral. Aos meus pais e irmão, sempre serei muito grata.

Agradeço ao meu orientador Valdir, por toda a paciência, tempo dedicado, ideias e conhecimento compartilhado para realização dessa pesquisa. Confesso que esse trabalho não teria caminhado de forma tranquila, sem suas orientações.

Agradeço também a todos os professores que contribuíram muito por todo conhecimento, visão crítica e por toda cobrança.

À Erica que durante nossas viagens de ida e volta para a universidade me escutou, aconselhou e teve bastante paciência meu muito obrigada.

À minhas amigas Letícia e Teófila, por todo companheirismo, incentivo, carinho, dedicação, conhecimentos compartilhados, risadas, choros, torcida e pela irmandade, eu amo vocês.

Aos meninos, João Victor, Jailson, Mateus, Adelson por ter me aguentado em todas as situações e por todas as risadas, levarei vocês sempre comigo.

À todas as pessoas que contribuíram para chegar até aqui sou e serei muito grata. Obrigada meu Deus!

**RESUMO**

Esta pesquisa teve como objetivo analisar a experiência geométrica sobre quadriláteros notáveis de um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental durante o processo da construção do Origami. Fundamentamos o trabalho nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática que ressalta a importância da utilização em sala os materiais manipuláveis, nos Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio que descreve quais as expectativas de aprendizagem para cada nível de escolaridade nos diferentes eixos de conhecimento e na teoria dos van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa pesquisa contém um caráter qualitativo, em que através de uma entrevista semiestruturada realizada com quatro estudantes de uma escola pública do município de Bezerros – PE analisamos quais os níveis de pensamento geométrico que os participantes apresentam bem como as estratégias de justificativas utilizadas para argumentar suas respostas. Os resultados indicam que no geral o nível de pensamento geométrico apresentado pelos participantes é na construção do nível 1.

**Palavras-chave:** Teoria de van Hiele. Quadriláteros. Ensino Fundamental Anos Finais.

## ABSTRACT

This research had the objective of analyzing the geometric experience about remarkable quadrilaterals of a group of students of the 9th grade of elementary school with the use of paper folding. We base the work on the National Curriculum Parameters: Mathematics that emphasizes the importance of being used inside the classroom the manipulable materials in the Mathematics Curriculum Parameters for Elementary and Middle School that describes the learning expectations for each level of schooling in each axis, in Van Hiele theory on the development of geometric thinking. This research has a qualitative character, in which through a semi - structured interview with four students of a public school in the city of Bezerros - PE, we analyze the levels of geometric thinking that the participants present as well as the strategies of justifications used to argue their answers . The results indicate that in general the level of geometric thinking presented by the participants is in the construction of level 1..



Keywords: Van Hiele theory. Quadrilaterals. Elementary School

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A utilização de diversos recursos dentro de sala de aula pode potencializar o aprendizado dos conceitos matemáticos. Observamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), um dos documentos que norteia a Educação Básica, que é proposto a utilização de recursos como o material manipulável, tecnologia, jogos entre outros (BRASIL, 1997). Especificamente para o ensino da Geometria, o PCN aborda a importância desse conteúdo para o cotidiano, pois é através dele que se desenvolve o pensamento que permite compreender, desenvolver, descrever e representar de forma organizada situações do mundo em que vive. (BRASIL,1997)

Ainda sobre as contribuições do desenvolvimento do pensamento geométrico temos no PCN (BRASIL, 1997, p. 83):

> As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de complementos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenhos ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos como dobraduras [...].

Um dos métodos que foram inseridos na Educação Básica com o objetivo de ajudar no desenvolvimento do pensamento geométrico é a utilização de da arte de dobrar papel chamada Origami. Acredita-se que sua utilização como recurso didático pode influenciar na aprendizagem, dando o significado naquilo que se objetiva aprender, em relação à geometria, fazendo ligação da Arte com os conceitos geométricos envolvidos.

Rêgo e Gaudêncio (2003) reforçam, a importância da utilização do Origami para dar sentindo na compreensão de conceitos geométricos e destacam a interdisciplinaridade entre os conteúdos, como Geometria e a Arte.

> O Origami pode representar para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte. (RÊGO, RÊGO E GAUDÊNCIO, 2003, p.18, apud. SILVA, 2011, p.11)

Temos ainda nomes como Friedrich Froebel (1782 – 1852), Humioki Huzita (1970) e o matemático Thomas Hull que contribuíram para a utilização do origami dentro da Matemática. Friedrich Froebel foi o responsável por introduzir o Origami no jardim de infância como recurso didático para compreensão da Geometria, já Humioki Huzita percebeu a presença de vários conceitos geométricos nas dobraduras e então criou seis axiomas, onde destaca o que pode ser construído com apenas uma dobra e Thomas Hull de acordo com Kawano (2015) diz que "Os pesquisadores foram atraídos provavelmente porque o Origami instigou seus talentos matemáticos e científicos", logo o Origami tornou-se objeto de estudo para os acadêmicos matemáticos.

Apesar de existir vários teóricos que abordam sobre a utilização do Origami para estudos matemáticos, durante a busca sobre pesquisas acadêmicas houve certa dificuldade para encontrar e notou-se que os trabalhos existentes são recentes. Temos pesquisas como as de Glowecki (2015), Melo (2016), Menezes (2014), Sheng et. al. (2005), Silva (2014) e Victorio (2018) que mostram algumas formas de se utilizar o Origami para o ensino de Geometria.

Por exemplo, Victório (2018) ressalta a importância da demonstração na hora da apresentação de um novo conceito matemático e utiliza o Origami para demonstrar de forma empírica conceitos geométricos e a partir disso desenvolver a capacidade de visualização e construção do conhecimento. Temos também, possibilidade de oficinas ou minicursos propostos por Glowecki (2015) e Sheng et. al. (2005) os quais utilizam o Origami como uma ferramenta para ajudar a desenvolver o pensamento geométrico. Silva (2014) buscou comparar dois grupos, no primeiro é abordado o conteúdo com a utilização do origami e o segundo sem Origami e constatou que os alunos do primeiro grupo com a intervenção com Origami melhoraram as médias bimestrais.

Aliado as indicações da utilização de Origami no processo de ensino dos conceitos geométricos temos também o porquê escolhemos tratar sobre esta temática. A ideia de pesquisar sobre o tema partiu de uma curiosidade de saber como eram feitas as dobraduras e ao realizar uma busca na internet e construir um Origami notei que durante as etapas de construção a presença de conceitos matemáticos associados às técnicas utilizadas. Logo, considerando a inquietação pessoal e verificando na literatura que há possibilidade de utilização da arte Origami no ensino de Geometria chegamos ao seguinte questionamento de pesquisa: Como revela-se a experiência geométrica sobre quadriláteros de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na construção de um Origami?

Para responder ao questionamento de pesquisa nós temos como objetivo geral: Analisar a experiência geométrica sobre quadriláteros notáveis de um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental com o processo da construção do origami.

Para ajudar a atingirmos o objetivo geral pensamos também em objetivos subjacentes:

- Identificar os níveis de pensamento geométrico que os participantes apresentam;

- Verificar quais as estratégias de justificativa os estudantes utilizam para explicar propriedades dos quadriláteros notáveis.

Este trabalho foi dividido em sete capítulos. No capítulo dois apresentamos a teoria do pensamento geométrico do casal Van Hiele, fazendo as descrições dos níveis, das propriedades e das fases de aprendizagem da teoria. Essa teoria serviu como base para o desenvolvimento deste trabalho. Ainda como parte da fundamentação teórica. No capítulo três trazemos as definições segundo Dolce e Pompeo (2005) dos quadriláteros notáveis e em seguida relacionamos a definição com cada nível proposto na teoria de Van Hiele.

No capítulo quatro, como utilizamos Origami como recurso para de suporte a entrevista que propomos para o trabalho, trazemos uma breve introdução histórica sobre o Origami e como foi a inserção deste como recurso para o ensino de geometria. No capítulo cinco, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados, como também apresentamos a natureza de nosso trabalho e o método aplicado para a realização desta pesquisa. E no capítulo seis, trazemos os dados obtidos, assim como a análise e discussão dos mesmos, com base nos níveis do pensamento geométrico, em seguida, no capítulo sete, apresentamos nossas considerações finais com base nas análises realizadas.

# 2 TEORIA DE VAN HIELE

Neste capítulo, abordaremos sobre a Teoria do pensamento geométrico desenvolvida pelo casal Van Hiele, o qual serviu como fundamentação teórica deste trabalho.

## 2.1 O DESENVOLVIMENTO DA TEORIA

Os professores Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele - Geldof, preocupados com o ensino da geometria, buscaram encontrar uma solução para dificuldade dos alunos em aprender conceitos geométricos e esse foi o tema de suas teses de doutorado, em que segundo Villiers (2010), Dina Van Hiele abordava de que forma deveria ser organizado o conteúdo e as atividades para melhorar na aprendizagem do aluno enquanto Pierre Van Hiele focava em saber o porquê os alunos tem dificuldades em aprender a geometria. Logo após publicarem o resultado da pesquisa Dina Van Hiele faleceu e Pierre Van Hiele acaba dando continuidade com a pesquisa no qual ficou conhecida como a teoria de Van Hiele (VILLIERS, 2010).

Essa teoria é composta por fases sobre o desenvolvimento do pensamento geométricos. A intenção de cada fase é identificar os níveis de maturidade dos alunos e um fator que contribui bastante para este desenvolvimento é o ensino. Essa maturidade é o que contribui para ser avançado o nível. Os Van Hiele dizem que o desenvolvimento do pensamento geométrico é subdivido em 5 níveis, em que segue um modelo sequencial e hierárquico, segundo Braga e Dorneles (2011, p. 2) que cita Pereira, Silva e Motta (2005), esse modelo é

> Sequencial, porque o estudante não atinge um determinado nível sem ter passado pelos níveis anteriores. Hierárquico, porque a progressão dos níveis depende do desenvolvimento do conteúdo e de como foi compreendido, não havendo relação com a idade cronológica do indivíduo.

Um exemplo seria o estudo dos Triângulos, é sequencial pois para que o estudante consiga classificar o Triângulo com relação a seus lados ou ângulos, deve ter o conhecimento do que é um triângulo, como também reconhecer seus elementos, como lados, ângulos e é hierárquico, pois para que se consiga demonstrar que o triângulo é isósceles, o estudante tem que ter compreendido bem o conceito de triângulos, seus elementos e classificações.

## 2.2 OS NÍVEIS DE VAN HIELE

Essa teoria é baseada em cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, no qual esses níveis seguem um modelo sequencial e hierárquico, onde os estudantes iniciam no nível básico (nível um) e conforme o seu pensamento geométrico for se desenvolvendo, ele vai subindo de nível, podendo chegar ao nível avançando.

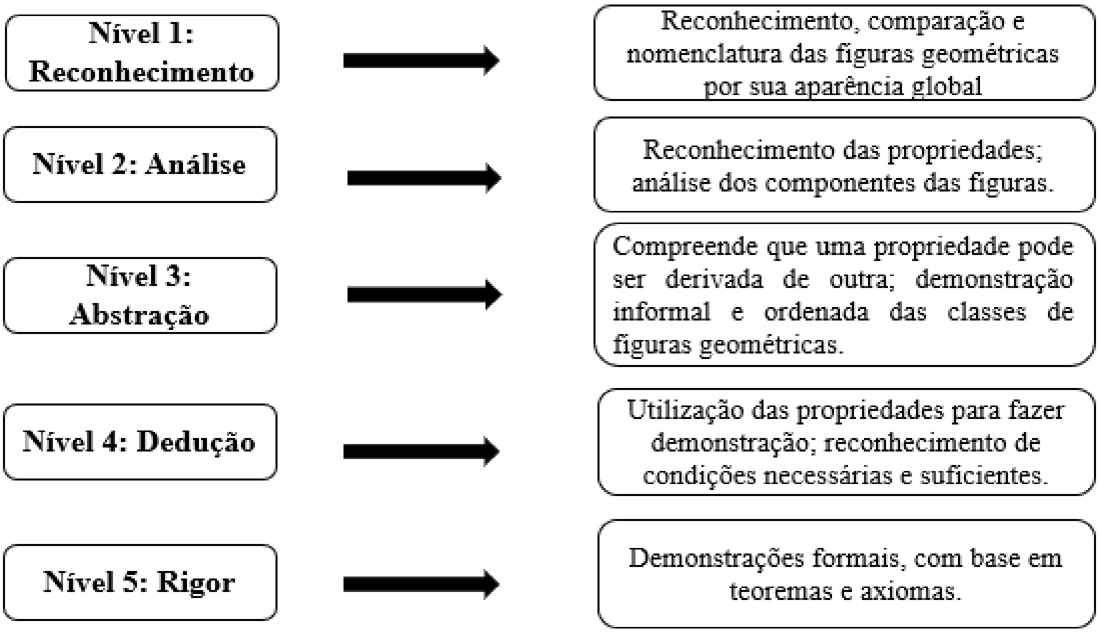
Esses níveis são classificados de um a cinco, no qual vai de visualização dos entes geométricos até a demonstração desses entes. E de acordo com Nasser e Tinoco (2011) os níveis têm as seguintes características, no nível inicial, denominado como o nível do reconhecimento, partindo da observação da aparência da figura geométrica o estudante consegue reconhecer, comparar e dizer a nomenclatura correspondente. No nível posterior, o da análise, o estudante analisa os conceitos geométricos, faz reconhecimento das propriedades e as utilizam para solucionar problemas.

No nível três, o da abstração, o estudante percebe a importância de uma definição e tem noção que uma propriedade pode resultar de outra, como também reconhece e consegue ordenar as classes de figuras geométricas. No nível quatro, Dedução, nesse nível o aluno já tem o domínio do processo dedutivo de demonstrar, utilizando os axiomas necessários. consegue demonstrar e entende a diferença entre a afirmação e sua recíproca. E o último nível, classificado como o quinto e denominado como o do rigor, o aluno já consegue trabalhar utilizando os axiomas, consegue compreender as geometrias não euclidianas. É o nível de abstração maior da geometria.

Nasser e Tinoco (2011), destacam também que os dois últimos níveis por vários pesquisadores podem ser considerados como um só, o da dedução formal e complementa dizendo que para Van Hiele, o quinto nível é muito difícil ser atingindo por alunos do ensino básico.

Abaixo segue o quadro em que resume os níveis de Van Hiele:

Quadro 1: Níveis de Van Hiele com base em Nasser e Tinoco (2011)




Fonte: A autora (2019)

## 2.3 AS PROPRIEDADES DA TEORIA

Em seguida, Nasser e Tinoco (2011) apresentam as propriedades da teoria de Van Hiele que podem servir como base para os educadores tomar decisões quanto ao ensino. São elas: Hierarquia, Linguística, Conhecimentos intrínsecos, Nivelamento e Avanço. Na Hierarquia respeita a ordem dos níveis, ou seja, para que aconteça o avanço de nível o aluno tem que ter passado por todos os outros anteriores. Sobre a linguística, diz que em cada nível a linguagem é própria e o conjunto de relações e de símbolos também, isto é, um estudante que esteja no nível de analise não adianta utilizar linguagem de um nível superior pois não vai haver compreensão na comunicação.

Sobre os Conhecimentos Intrínsecos, Nasser e Tinoco (2011) falam que aqueles que estão implícitos em um nível se tornam explícitos no nível superior, por exemplo, um estudante que consegue listar as propriedades do quadrado e do retângulo sem perceber a relação entre elas no próximo nível já consegue afirmar que todo quadrado é um retângulo, mas que a reciproca não é necessariamente verdadeira.

Logo após eles descrevem o Nivelamento, o qual destacam que os níveis de raciocínio entre professor e aluno tem que ser o mesmo, para que aconteça a compreensão do que está sendo discutido e assim contribua para que ocorra o avanço de nível, isto é, o professor solicitar ao  estudante que está no nível do reconhecimento para listar as propriedades de quadrado que isso não irá acontecer, pois o estudante não tem domínio sobre a análise das propriedades. E por fim fala sobre o Avanço que aborda sobre o progresso dos níveis, em que depende dos métodos e instruções utilizadas, ou seja, o aluno vai mudar de nível se for trabalhado com ele atividades que contribua para que aconteça esse avanço.

## 2.4 AS FASES DA APRENDIZAGEM

Nessa teoria aborda as fases da aprendizagem que é proposta para os professores, com o intuito de contribuir para a mudança de nível dos alunos. Nasser e Tinoco (2011), diz que essas fases de aprendizagem são subdivididas em cinco fases, a primeira fase é a da informação, isto é, o professor e os alunos conversam sobre o objeto que será estudado. Na fase dois, da orientação dirigida, o professor seleciona atividades para que os estudantes explorem, atividades adaptadas para cada nível.

Na fase da explicação, os alunos expõem e modifica suas opiniões sobre o que foi estudado. Na fase quatro, da orientação livre, os alunos procuram suas próprias soluções diante de problemas que admitem mais de uma solução e podem ganhar a experiência de ter encontrado uma solução diferente dos demais. A última fase é a da integração, o qual o aluno recapitula tudo o que aprendeu, tendo uma visão geral objetos e relações. Se o aluno conseguiu realizar todas essas fases então pode-se dizer ele alcançou um novo nível de pensamento geométrico.

Para auxiliar os professores na hora de avaliar em qual nível o seu aluno se encontra, os Van Hiele desenvolvem testes para identificar os níveis de raciocínio geométrico existentes, esses testes são fundamentais para acompanhar o rendimento do aluno, quando se escolhe trabalhar com essa teoria.

O teste pode ser realizado de duas formas: oral e escrita. A forma oral, é através de entrevistas individuais entre o professor e o aluno, esse modo é mais complexo, pois o professor não disponibiliza de muito tempo para realizar com uma grande quantidade de alunos, mas esse seria o método mais confiável. A escrita seria através de questões de múltipla escolha ou questões abertas. (RODRIGUES, 2005).

Realizando esses testes facilita mais a visão do professor perante a turma, ajuda na comunicação entre professor - aluno e  na seleção de atividades com o intuito de diminui a diferença de níveis existentes, de modo a começar com um nível básico ou o mais próximo do nível que a turma apresentou, para que aconteça a compreensão da atividade e o desenvolvimento no pensamento geométrico e o professor mediando a todo momento.

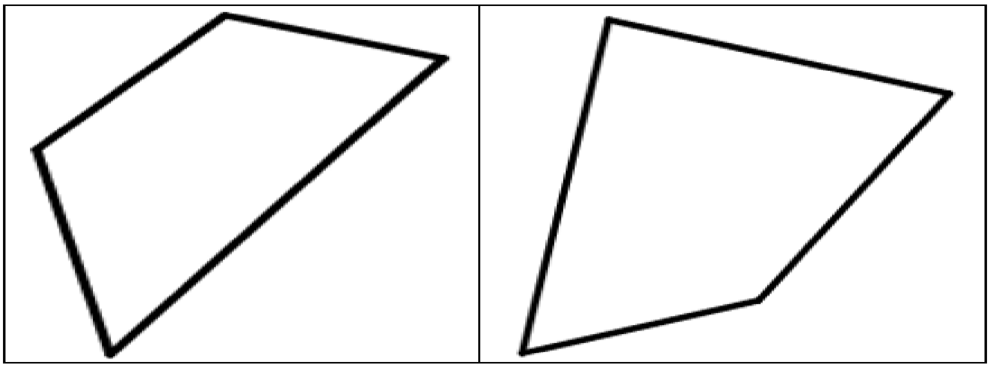
# 3 QUADRILÁTEROS E A TEORIA DE VAN HIELE

Apresentaremos a seguir a definição do Quadrilátero e em seguida ressaltaremos com base na teoria de Van Hiele os conhecimentos dos estudantes com relação aos quadriláteros notáveis em cada nível de pensamento geométrico.

## 3.1 QUADRILÁTEROS

Consideremos os pontos A, B, C e D, coplanares, distintos e três deles não colineares. Sejam os segmentos de reta AB, BC, CD e DA que se unem apenas em suas respectivas extremidades, o conjunto desses quatros segmentos forma um quadrilátero, Dolce e Pompeo (2005). Alguns exemplos são:

Figura 1: Quadriláteros



Fonte: A autora (2019)

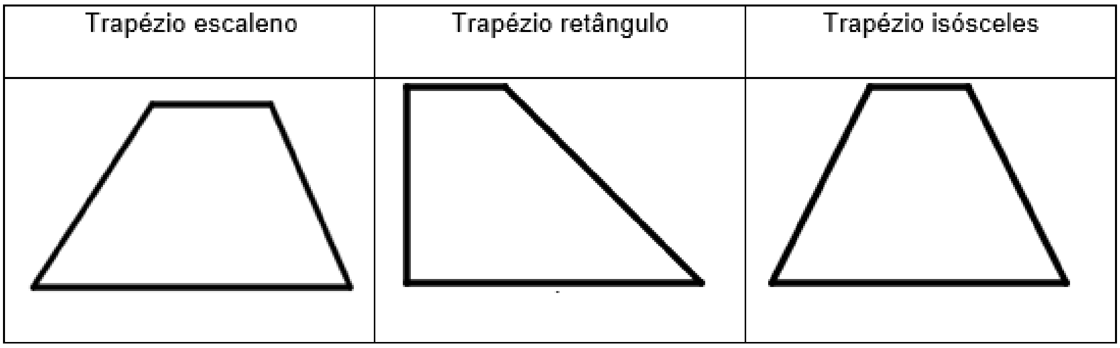
Podemos classificar os quadriláteros como notáveis e não notáveis. Os quadriláteros notáveis são constituídos pelo conjunto dos paralelogramos, trapézios, retângulos, losangos e quadrados. Os quadriláteros não convexos denominaremos como quadriláteros não notáveis. Observando os quadriláteros acima, podemos classificar a figura do lado esquerdo como um quadrilátero notável e a figura do lado direito como quadrilátero não notável.

Segundo Dolce e Pompeo (2005), as propriedades dos quadriláteros são: Polígono simples que possui quatro lados, quatro ângulos internos; possui duas diagonais e a soma de seus ângulos internos é igual a 360º.

### 3.1.1 Trapézio

Um Trapézio, tal como define Dolce e Pompeo (2005), é todo quadrilátero que possui um par de lados paralelos. Chamaremos de base do trapézio os lados paralelos. Podemos classificar os trapézios observando seus dois lados não paralelos, como: trapézio isósceles, escaleno ou retângulo. Os trapézios isósceles possuem esses lados congruentes, enquanto o trapézio escaleno não congruentes. Chamaremos de trapézio retângulo o que possui dois ângulos internos retos. Segue abaixo exemplos dos trapézios.

Figura 2: Trapézios




Fonte: A autora (2019)

Em um trapézio qualquer, os ângulos adjacentes a uma mesma transversal são suplementares. Destacaremos também duas propriedades do trapézio isósceles, que são: os ângulos que possui a base em comum são congruentes e as diagonais são iguais.

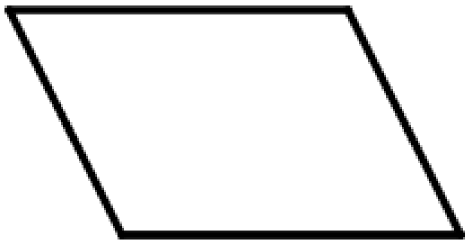
Considerando a teoria de Van Hiele e seus níveis podemos afirmar que no nível um os estudantes são capazes de identificar que a figuras expostas na figura 2 são trapézios, ou seja, visualizando a aparência nesse nível o estudante consegue correlacionar apenas a figura com seu nome. No nível seguinte, o da análise, o estudante vai listar as propriedades do trapézio, como: é uma figura que possui lados paralelos, contêm quatro lados, quatro vértices, quatro ângulos, duas bases, mas não consegue classificar os trapézios por isósceles, escaleno ou retângulo.

No nível três, houve a compreensão que para descrever uma figura geométrica não é mais necessário listar todas as propriedades que determina a figura ser trapézio, isto é, apenas dizer que é um quadrilátero que possui dois lados paralelos. No próximo nível, o estudante consegue de forma ordenada demonstrar utilizando as propriedades necessárias, por exemplo, que “em todo trapézio isósceles, os ângulos de uma mesma base são congruentes” (BONJORNO et. al., 2014). No nível cinco, o do rigor, já atingiu um nível de pensamento geométrico abstrato, então o estudante que chega nesse nível consegue demonstrar utilizando axiomas e teoremas que qualquer trapézio é um quadrilátero.

### 3.1.2 Paralelogramo

Um paralelogramo é todo quadrilátero que possui seus lados opostos paralelos (DOLCE; POMPEO, 2005). Segue abaixo exemplo de um paralelogramo qualquer,

Figura 3: Paralelogramo



Fonte: A autora (2019)

Todo paralelogramo contém essas propriedades: possui lados opostos congruentes; suas diagonais se cruzam no ponto médio; os ângulos opostos são congruentes; os ângulos não opostos são suplementares e as diagonais se cruzam nos seus respectivos pontos médios. (DOLCE; POMPEO, 2005).

De acordo com a teoria de Van Hiele e as características associadas aos níveis do pensamento geométrico, temos que no nível um o estudante consegue reconhecer a figura 3 como um paralelogramo. No nível seguinte, elenca as propriedades associadas ao paralelogramo, como já foi realizado acima com base em Dolce e Pompeo (2005).

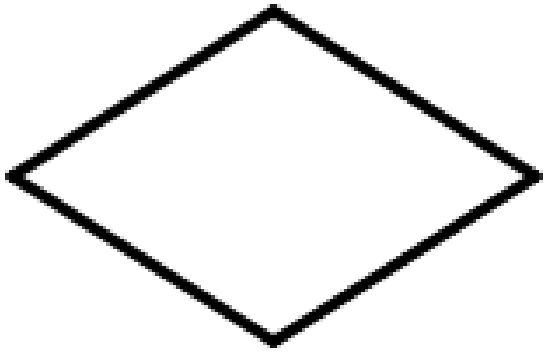
Segundo Souza (2014), no nível três é desenvolvido a capacidade de analisar as propriedades mínimas associadas a figura geométrica estudada, mas não relacionar com outras figuras e nem demonstrar. Neste nível espera-se que o estudante descreva o paralelogramo, por uma figura que possui dois pares de lados paralelos e congruentes.

Atingindo o nível quatro, o estudante já possui um domínio no processo dedutivo e consegue demonstrar o porquê uma figura que possui seus lados opostos paralelos e congruente é um paralelogramo. Já no nível cinco é realizado a demonstração formal de que todo paralelogramo é quadrilátero ou que determinada figura é um paralelogramo.

### 3.1.3 Losango

Todo quadrilátero que possui seus lados congruentes é chamado de Losango. Sua representação,

Figura 4: Losango



Fonte: A autora (2019)

E possui as seguintes propriedades, suas diagonais são perpendiculares e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos (BONJORNO, 2014). Ele é classificado como um tipo de paralelogramo, por possui propriedades em comum, como: lados opostos congruentes e paralelos, suas diagonais se interceptam no ponto médio e os ângulos opostos são congruentes.

O losango nos níveis do Pensamento geométrico de Van Hiele, seria definido da seguinte forma, no nível um, o estudante evidenciaria que a figura 4 é um losango, apenas por sua aparência. No nível dois, diz algumas propriedades que pertencem ao losango, por exemplo, possui quatro lados, quatro ângulos internos, duas diagonais e etc. No nível seguinte, compreende que determinadas propriedades conseguem definir a figura geométrica como um todo e as demais estão implícitas, isto é, o losango é uma figura que possui quatro lados congruentes. No nível quatro, o losango já é demonstrado formalmente, utilizando as propriedades necessárias, para provar por exemplo, que “todo losango tem diagonais perpendiculares” (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 109). No nível cinco, é o nível do rigor matemático, no qual o losango seria definido e posteriormente demonstrado baseado em axiomas e teoremas.

### 3.1.4 Retângulo

Definiremos como retângulo, todo quadrilátero que possui seus ângulos congruentes, ou seja, ângulos retos (90º). Logo abaixo segue sua representação,

Figura 5: Retângulo

Fonte: A autora (2019)

Todo retângulo possui diagonais congruentes, além do mais todas as propriedades do paralelogramo também são válidas para o retângulo, assim afirma Dorneles (2011) todo retângulo é um paralelogramo. Vale ressaltar que nem todo paralelogramo é um retângulo e isso implica dizer que nem todo paralelogramo possui diagonais congruentes.

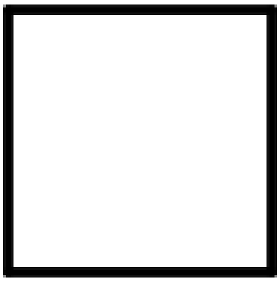
Segundo os níveis de Van Hiele, temos que no nível um, os estudantes reconhecem a figura acima como um retângulo, sem evidenciar suas propriedades, já no nível seguinte, conseguem definir o retângulo listando suas propriedades, por exemplo, é uma figura geométrica composta por lados opostos congruentes e paralelos, possui seus ângulos internos de 90º, ou seja, evidenciar as propriedades que reconhecem ao olhar para sua representação.

No próximo nível, dedução abstração, os estudantes conseguem estabelecer relações entre as propriedades da figura e lista apenas a propriedade necessária para definir o retângulo, como: um retângulo é um paralelogramo que possui quatro ângulos retos. No nível quatro, o estudante já compreende o processo dedutivo da demonstração e consegue utilizar as propriedades para mostrar por que a figura é um retângulo. E no nível cinco, é o nível do rigor matemático, o qual o aluno utilizaria os axiomas e teoremas para demonstrar que determinada figura é retângulo.

### 3.1.5 QUADRADO

Chamaremos de quadrado todo quadrilátero que possui quatro ângulos e lados congruentes. Sua representação é,

Figura 6: Quadrado



Fonte: A autora (2019)

Destacamos que o quadrado é um retângulo e losango, por conter seus lados opostos paralelos, suas diagonais se interceptarem no ponto médio e por possuir ângulos internos opostos congruentes. Assim, podemos classificar o quadrado como um paralelogramo. No quadrado suas diagonais são congruentes, perpendiculares entre si e bissetriz dos seus ângulos internos.

No nível um, segundo os Van Hiele, o estudante conseguiria apenas nomear a figura 6 como um quadrado, ao avançar para o nível da análise, a definição de quadrado seria a partir da listagem das propriedades que os compõe, ou seja, quatro ângulos retos, quatro lados congruentes e paralelos, duas diagonais. No nível seguinte, a referência ao quadrado seria de forma mais sucinta, isto é, o quadrado é uma figura geométrica composta por quatro ângulos retos e quatro ângulos iguais. No nível quatro, o estudante é capaz de demonstrar as propriedades do quadrado. E no último nível, o estudante seria capaz de demonstrar de forma dedutiva e ordenada que determinada figura é um quadrado.

Apresentamos abaixo o quadro que descreve todos os quadriláteros notáveis com base nos níveis da teoria de Van Hiele:

Quadro 2: Descrição dos Quadriláteros nos Níveis

| | **Trapézio** | **Paralelogramo** | **Losango** | **Retângulo** | **Quadrado** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nível 1: Reconhecimento** | Trapézio | Paralelogramo | Losango | Retângulo | Quadrado |
| **Nível 2: Análise** | Possui quatro lados, quatro ângulos, duas bases. | Ângulos opostos iguais, quatro lados, lados opostos iguais, lados opostos paralelos. | Possui quatro lados, quatro ângulos, seus lados são iguais. | Lados opostos iguais e paralelos, possui quatro ângulos, quatro lados, seus ângulos medem 90°. | Quatro ângulos retos, quatro lados iguais, lados opostos paralelos, duas diagonais. |
| **Nível 3: Abstração** | Quadrilátero que possui um par de lados paralelos. | Uma figura que possui um par de lados paralelos e congruentes. | Uma figura que possui quatro lados congruentes. | Uma figura que possui quatro ângulos retos. | Possui quatro ângulos retos e quatro lados iguais. |
| **Nível 4: Dedução** | Demonstra utilizando as propriedades da figura. Por exemplo: "em todo triângulo isósceles, os ângulos de uma mesma base são congruentes" (BONJORNO et. al., 2014) | Demonstrar o porque o paralelogramo possui seus lados opostos paralelos e congruentes. | Demonstra que "todo losango tem diagonais perpendiculares". (DOLCE; POMPEO, 2005) | Utiliza as propriedades para demonstrar que tal figura é um retângulo. | Demonstra com base nas propriedades que o quadrilátero é um quadrado. |
| **Nível 5: Rigor** | Utilização de axiomas e teoremas de forma ordenada para demonstração que a figura é um trapézio. | Demonstração utilizando axiomas e teoremas, por exemplo: "todo paralelogramo é quadrilátero". | Demonstra o porque o losango é um quadrilátero. | Com base em axiomas e teoremas, demonstra formalmente que tal figura é um retângulo. | De forma ordenada utiliza axiomas e teoremas para demonstrar que tal figura é um quadrado. |

Fonte: A autora (2019)

# 4 ORIGAMI

Abordaremos de forma breve sobre a História de Origami e sua utilização na educação matemática, especificamente, para os estudos de conceitos geométricos.

## 4.1 HISTÓRIA DO ORIGAMI

A Palavra Origami é de origem japonesa que tem significado *Ori*= dobrar e *Kami*= papel e é conhecido popularmente como a arte de dobrar papel. Inicialmente essa arte era utilizada pela elite, pois o papel não era acessível. Antigamente o Origami era utilizado em cerimônias para Deuses, segundo Ueno (2003), talvez a mais antiga utilização do Origami foi em cerimonias religiosas, pois a palavra *kami* tem dois significados que é “papel” e “Deus” ou “espírito”. Com a acessibilidade do papel as dobraduras começaram a se difundir, suas instruções eram passadas de geração para geração, em que as dobras mais difíceis acabavam sendo esquecidas, restando apenas o que a população lembrava. (UENO, 2003).

No Brasil essa arte chegou com a invasão dos colonizadores portugueses e pelos europeus que vieram orientar as famílias portuguesas. Em 1908, chega no país alguns japoneses em que contribuem para difusão dessa arte. (UENO, 2003).

Existem alguns tipos de Origamis, temos o Origami tradicional, que é construído apenas utilizando folhas de papel quadrada, onde é feito uma sequência de dobras para chegar ao resultado esperado e não pode ser utilizada tesoura e nem cola para sua construção, para estimular a nossa criatividade. Um exemplo, que é bastante popular é a garça (tsuru), é uma das dobras mais conhecida no Japão e é vista como símbolo de sorte, longevidade, felicidade.

Temos também o Origami modular, onde sua construção é a composição de vários módulos e cada um desses módulos são encaixados formando o Origami em três dimensões. Para construção desses módulos são utilizadas apenas técnicas do Origami.

## 4.2 A INSERÇÃO DO ORIGAMI PARA ESTUDO DA GEOMETRIA

O Origami passa a ser inserido dentro do currículo escolar a partir do século VIII d.C. pelos Mouros, mas eles foram proibidos de utilizar essa arte por sua religião, pois diziam que não poderiam cultuar figuras simbólicas e assim começou a ser estudada a Geometria que fazia parte do conjunto de dobras. A partir daí o Origami começa a ser utilizado como ferramenta pedagógica. Friedrich Froebel (1782-1852) um pedagogo alemão, foi primeiro a criar o jardim de infância e a utilizar o Origami como uma ferramenta nas aulas de Geometria. (UENO, 2003).

Humioki Huzita em 1970, faz um estudo do Origami com Geometria abstrata e descreve seis axiomas, o qual segundo Barreto (2013, p.23), “se tornou a primeira descrição formal do tipo de construções geométricas possíveis com o origami”. Os axiomas são equivalentes ao descritos por Euclides, na dissertação de mestrado de Glowecki (2015), cujo título o Uso de dobraduras como recurso para o estudo do conceito geométricos, ele descreve os axiomas, mostrando o exemplo com as dobraduras.

O origami é uma ferramenta pedagógica de baixo custo e sua utilização nas aulas pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Segundo Guimarães (2015, p. 30),

> O Origami é capaz de despertar a criatividade e facilitar o entendimento de conceitos matemáticos, na geometria auxilia na aprendizagem, saindo do abstrato e incluindo o concreto com a manipulação de simples pedaços de papel. (...) A dobradura pode ser utilizada como recurso na exploração das principais propriedades geométricas de figuras planas e espaciais.

Ele pode ser um ótimo recurso para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, onde por meio das dobraduras ajuda na visualização do que está sendo abordado de forma mais dinâmica e significativa para os estudantes. Imenes (1988), em seu livro Vivendo a Matemática: geometria das dobraduras, propõe o estudo das retas, de figuras geométricas, polígonos, poliedros, ângulos e sua bissetriz, utilizando as dobraduras. Logo após as instruções, faz questionamentos sobre o conteúdo abordado, remetendo a alguma dobra que foi realizada.

Em capítulos anteriores, a Teoria de Van Hiele sobre os níveis de pensamento geométrico podem ser utilizados para avaliar os níveis dos estudantes, e também como base para os professores contribuírem para o avanço desses níveis. O Origami pode ser utilizado para visualização dos conceitos geométricos, podendo contribuir para o avanço desses níveis.

# 5 METODOLOGIA

Como já foi citado, o objetivo geral dessa pesquisa é analisar a experiência geométrica sobre quadriláteros notáveis de um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental com o recurso da dobradura de papel. Destacamos que ela tem natureza qualitativa, em que segundo Neves (1996, p. 1) na análise qualitativa “é frequente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir, daí situe sua interpretação dos fenômenos estudados”. Diante disso, temos o intuito de fazer uma análise das respostas apresentadas pelos estudantes diante dos questionamentos realizados baseando a análise numa categorização prévia, que no caso são os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele.

Como estratégia para reunir os dados, buscamos por meio de uma entrevista coletar os dados. De acordo com Colognese e Mélo (1998, p. 143), a entrevista é “um processo de interação social, no qual o entrevistador tem por objetivo a obtenção de informações por parte do entrevistado”, a entrevista nos possibilita recolher informações sobre os participantes com um grau maior de confiabilidade dos dados.

Utilizamos a entrevista semiestruturada, em que esse tipo de entrevista, segue um roteiro de perguntas pré-determinadas e possibilita o entrevistador adaptar os questionamentos a partir das respostas do entrevistado para assim obter o máximo de descrição das figuras que apareciam diante das sequências de dobras (COLOGNESES; MÉLO, 1998).

Essa pesquisa foi realizada com um grupo composto por quatro alunos do 9º ano do ensino fundamental, pois segundo Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio é esperado que os alunos saibam para obter sucesso na próxima fase, classificar, comparar, representar, relacionar figuras planas como também identificar elementos das figuras (PERNAMBUCO, 2012). Esse grupo de alunos foi selecionado pelo professor de matemática dos participantes, no qual foi solicitado que escolhessem quatro estudantes, dois que tivessem, na opinião do professor, mais aptidão com a matemática o qual vamos nos referir como E1 e E2, e dois que apresentassem dificuldade, os que chamamos na análise de E3 e E4.

Os questionamentos feito aos participantes na entrevista foram realizados de maneira sequencial seguindo os níveis de pensamento geométrico, com intuito de identificar qual o nível que o estudante apresentava diante dos quadriláteros que apareciam. Os questionamentos tinham até o nível três, o de abstração, pois os últimos níveis requerem uma linha de pensamento indutiva e a utilização da linguagem adequada dos níveis, o que na maioria das vezes não é compreendida entre os alunos.

Nasser e Tinoco (2011) destacam que os Van Hiele concordam com essa ideia, no qual afirma que é muito difícil estudantes do ensino fundamental atingir o quinto nível. E seguindo esse pensamento, não solicitamos para que os estudantes demonstrassem informal ou formalmente as figuras geométricas.

A pesquisa ocorreu em uma escola do município de Bezerros em que possui nota 4,2 no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) do ano de 2017. A escolha dessa escola se deu por ser a mais próxima de onde a autora principal do trabalho reside e por ter sido o meu primeiro ambiente escolar.

A coleta dos dados aconteceu durante uma aula do professor de Matemática da turma e um pouco da aula do professor subsequente, em média cada estudante participou da entrevista por 13 minutos. A entrevista ocorreu em dois ambientes, iniciou-se na biblioteca e tivemos que concluir no refeitório, visto que após o intervalo na biblioteca tinha alguns estudantes, o que poderia interferir nos dados.

A entrevista foi realizada individualmente, em que foi entregue uma folha de ofício A4, para construirmos um módulo do cubo utilizando a técnica do Origami. Escolhemos abordar os quadriláteros notáveis com base na construção que iríamos utilizar que foi a construção do modulo de um cubo. Durante a sequência de dobras aparecem os seguintes quadriláteros notáveis: retângulo, trapézio, quadrado, losango e paralelogramo, conforme fossem aparecendo essas figuras geométricas os estudantes eram questionados o qual seguia o roteiro pré-determinado. Segue abaixo o roteiro:

**Retângulo**

1. Essa folha tem o formato de qual figura geométrica?
2. Por que essa figura é chamada assim? Quais características você observa nessa figura?

**Trapézio**

1. Olhando para o papel, você saberia me dizer o nome dessa figura geométrica?

2. Por que essa figura é chamada assim? Quais características você observa nessa figura?

**Quadrado**

1. E agora, que figura geométrica tu consegues identificar?
2. Por que essa figura é chamada assim? Quais características você observa nessa figura?
3. (mostrando a folha A4 e o quadrado obtido) Podemos dizer que todo quadrado é retângulo?

**Losango**

1. Você consegue me dizer o nome dessa figura geométrica? (rotacionando o quadrado para que o estudante possa associar ao Losango).
2. Essa figura continua sendo um quadrado? Por quê?

**Paralelogramo**

1. Qual nome dessa figura?
2. Você consegue destacar algumas características dessa figura?

Justificamos as perguntas para cada figura com o objetivo de buscar verificar se o estudante consegue reconhecer a figura por sua nomenclatura, verificar se o estudante consegue listar as propriedades que compõem a figura e temos também a terceira pergunta feita ao se obter o quadrado em que nosso objetivo foi verificar se o estudante consegue estabelecer correlações entre as propriedades do retângulo e quadrado.

# 6 DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo é destinado a análise dos dados coletados na entrevista. Com intuito de verificar o nível de pensamento geométrico dos participantes buscamos analisar as figuras separadamente com finalidade de identificar quais figuras os participantes apresentam maior nível de conhecimento geométrico, visando também evidenciar as estratégias utilizadas pelos estudantes para justificar a validade de suas respostas.

## 6.1 SOBRE O RETÂNGULO

Inicialmente abordamos a figura geométrica que está presente no formato da folha A4, o retângulo, no qual foi possível perceber que apenas um participante, o E1, consegue reconhecer a figura por sua nomenclatura e também listar algumas de suas propriedades, por exemplo: os lados apresentarem tamanhos distintos, os seus lados opostos serem iguais e conter quatro ângulos de 90º.

Já o participante E2, nomeia a figura por “paralelepípedo”, como estamos abordando apenas as figuras planas, essa nomenclatura acaba sendo inadequada para a pesquisa, mas ao ser questionado sobre as propriedades existentes o participante apresenta dificuldade na hora de listar, em que consegue apenas evidenciar que os lados opostos são semelhantes. Importante destacar que, a nomenclatura dada pelo participante E2, não está equivocada quando tratamos de figuras espaciais o que é o caso da folha de papel, no entanto mesmo sabendo o “real” nome da figura o participante mostra não conseguir listar propriedades da figura que reconhece.

O participante E3 diz que reconhece a figura, mas não lembra o nome e consegue identificar que contém lados de tamanhos diferentes e que seus lados opostos são iguais. Temos o participante E4 que apresentou dificuldade na compreensão na linguagem utilizada pelo entrevistador e solicitou que lhe dissesse exemplos de algumas figuras geométricas, após os exemplos, E4 diz que a figura geométrica presente é “uma esfera, um círculo” e ao questionado sobre o porquê de ele nomear dessa forma, o estudante não sabe justificar.

Podemos perceber que três dos entrevistados sentem dificuldade no reconhecimento e na análise das características de um retângulo. E diante dos níveis de Van Hiele, observando apenas os dados apresentados dessa figura, podemos classificar apenas o participante E1 no nível dois, o da análise, em que nesse nível o estudante descreve as propriedades da figura, e os demais na construção do nível um, o do reconhecimento da figura geométrica, apesar de alguns deles ter conseguido listar poucas das propriedades da figura.

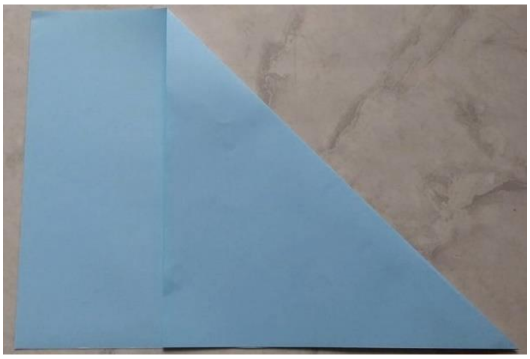
Verificamos que as estratégicas utilizadas pelos participantes para justificar seus argumentos foi a de indicação dos lados ou ângulos, quando mencionados. Diante disso, temos que E1 ao se referir ao formato da folha A4, dizendo que identificava como retângulo e ser questionado o porquê dele nomear dessa forma, ele lista a seguinte característica “pelo aqui ser maior que aqui e quatro lados”, nesse momento o participante indica os lados maiores e menores da figura para justificar seu argumento.

Assim como E1, o participante E2 também faz indicação dos lados ao dizer “o lado desse é semelhante a esse...” faz referência aos lados menores “...e esse a esse”, e aqui aos lados maiores. E3 utiliza o mesmo método de argumentação e E4 não consegue reconhecer a figura.

## 6.2 SOBRE O TRAPÉZIO

Em seguida, realizamos a primeira dobra em que obtemos um trapézio retângulo. Como segue na figura abaixo,

Figura 7: Trapézio Retângulo - Dobradura



Fonte: A autora (2019)

Com relação a essa figura, os participantes E1 e E4 e conheceram pela mesma nomenclatura, o triângulo que aparece na figura 7 ao realizar a dobradura. O participante E1, ao ser questionado “ o todo é um triângulo?”, nesse momento o pesquisador direciona a mão para toda a folha, e o participante responde “é” e em seguida justifica dizendo que a figura é um triângulo “por ter três lados, dois maiores e um menor”, enquanto o E4, a princípio diz que é um tri ângulo, pois está se referindo apenas a parte menor do papel que está dobrado e não ao todo, mas posteriormente ao ser evidenciado qual a parte do papel em questão, o participante consegue perceber que não é um triângulo e não sabe o nome dessa nova figura, ele identifica que nenhum dos lados são parecidos, mas não consegue destacar nada sobre os ângulos.

Temos o E3 que apresenta bastante dificuldade ao ser questionado sobre essa figura, ele relata que “pelo nome não consigo lembrar o nome das figuras não.”, mesmo assim o pesquisador insistir e pergunta “mais com relação aos lados, o que tu pode me dizer? Quantidade de lados, o que eles têm em comum, o que não tem?” logo em seguida o participante consegue identificar que a figura possui lados com tamanhos distintos e não destaca nada sobre ângulos. Entretanto o participante E2, reconhece a figura 7 por sua nomenclatura, mas apresenta dificuldades com relação as suas características e através de algumas perguntas consegue destacar que a figura possui quatro lados, que seus lados são diferentes e a presença de dois ângulos de 90º.

Após o que foi discutido acima, verificamos que apenas o E2 reconhece a figura e lista algumas de suas propriedades, enquanto os demais participantes não reconhecem a figura 7 e as características mencionadas por eles surgiram após questionamentos do entrevistador. E comparando os dados apresentados diante dessa figura geométrica com os níveis de Van Hiele, podemos classificar os participantes E1, E3 e E4 na construção do nível um, pois não há nem o reconhecimento da figura por sua nomenclatura e o E2 no nível dois, pois apresentou um grau de conhecimento maior sobre o trapézio.

Um ponto importante a destacar refere-se que os estudantes não conseguem nem mesmo trazer a forma mais genérica de nomear a figura, que neste caso seria um quadrilátero. Tal situação pode indicar que, às vezes, os estudantes são apresentados mais os casos específicos, que a característica principal que é ter quatro lados.

Indicamos que para justificar seus argumentos, assim como no retângulo, os participantes utilizaram como estratégia a indicação dos lados ou ângulos quando mencionados. Destacamos o participante E1, o qual identifica a figura 7 como um triângulo e percorre o dedo sobre toda a dobra para mostrar que estava se referindo a toda aquela região e justifica dizendo: “três lados, dois maiores e um menor”.

As justificativas dos participantes E3 e E4 foram semelhantes, em que indica os lados maiores e menores do trapézio para identificar que o trapézio possui lados de tamanhos distintos, mas apenas E4 consegue afirmar isso, e para verificar ele rotaciona a figura 7. E por fim, temos E2 que apenas argumenta com a fala, mas o entrevistador solicita que o participante mostrasse ao que estava se referindo e assim ele começou a indicar os lados e ângulos.

## 6.3 SOBRE O QUADRADO

Dando continuidade a sequência de dobras, chegamos a um quadrado. O qual está representado na figura 8 abaixo,

Figura 8: Quadrado - Dobradura

Fonte: A autora (2019)

Evidenciamos que após a sequência de dobras E2 e E4 incialmente não conseguem relacionar a figura 8 com o quadrado. Temos que E2 após abrir a folha de papel coloca ela inclinada sobre a mesa e ao ser questionado sobre que figura era aquela não consegue identificar (pois usualmente é a posição que encontramos o losango), até que o entrevistador rotaciona e coloca na posição tradicional (na mesma posição que a figura 8) e em seguida o participante consegue reconhecer e E4 visualiza logo os dois triângulos, o entrevistador evidencia que era o nome de toda aquela região e logo após E2 consegue reconhecer e nomear corretamente a figura. Com relação aos participantes E1 e E3, eles reconhecem a figura 8 por sua nomenclatura, quadrado.

Ao serem questionados sobre o porquê da figura 8 ser um quadrado, os quatro lista a propriedade de possui todos os lados congruentes, apenas um complementa evidenciando a quantidade de lados. Destacamos que apenas a propriedade elencada pelos participantes sobre o quadrado, não define necessariamente a figura em questão e percebemos que diante dos questionamentos houve uma dificuldade por parte de todos os estudantes com relação a visualização de mais características do quadrado.

Questionamos também sobre a marca realizada na figura 8 durante a sequência de dobras, com o intuito de observar se os participantes reconhecem qual a função dela e o seu nome. Diante disso, podemos destacar que E2 e E4 percebem que a marca no meio da figura divide ela em dois triângulos iguais, o qual se referiam, respectivamente, como “listra” e “divisória”. Em seguida foi solicitado a E2 para que justificasse sobre o porquê daqueles dois triângulos serem iguais e ele não consegue responder, enquanto E4, diz que a divisória divide o quadrado em dois triângulos iguais e ao ser perguntando sobre o porquê de serem iguais, ele responde “porque quando dobra está na mesma medida” e sobrepõe um triângulo sobre o outro, como na imagem a seguir:

Figura 9: Estratégia de justificativa utilizada por E4

Fonte: A autora (2019)

Ressaltamos que apenas o participante E4 manipula a folha de papel e utiliza como estratégia para justificar o seu argumento e o que é interessante é que ele, até o momento, é o que mais apresenta dificuldade para nomear as figuras, enquanto os demais apenas utilizam a indicação para justificar suas respostas.

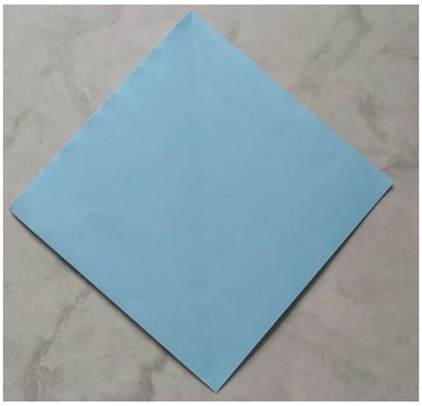
Posteriormente mostramos aos participantes o quadrado e o retângulo, para identificar se eles conseguem fazer a correlação entre as propriedades da figura e se reconhecem um quadrado como um retângulo e que nem todo retângulo é um quadrado, em que são característica do nível três, o de abstração.

Verificamos que nenhum deles conseguem relacionar as propriedades do retângulo e do quadrado e apenas E1 e E4 justifica suas respostas, em que E1 diz “essa é menor (quadrado) e do que essa (retângulo)” e E4 “ Não, porque esse (quadrado) foi cortado e esse daqui (retângulo) é maior", ou seja, apenas destacam a área da figura e não as suas propriedades. Através do que foi apresentado acima, podemos classificar todos os estudantes na construção do Nível dois da teoria do pensamento geométrico de Van Hiele, pois reconhecem a figura por sua nomenclatura e apenas conseguem listar a propriedades de ter todos os lados iguais, o que por si só não classifica a figura ser definitivamente um quadrado.

## 6.4 SOBRE O LOSANGO

Abordamos o losango a partir do quadrado, inclinamos a figura da como podemos ver na figura 10. Fizemos isto baseado que os losangos são costumeiramente apresentados nesta posição aos estudantes.

Figura 10: Losango - Dobradura



Fonte: A autora (2019)

E questionamos que figura geométrica eles identificavam, todos os participantes não reconhecer essa figura por Losango. Temos que E1 associa a figura a dois triângulos, isso porque observa apenas a marca feita pela sequência de dobras e os demais afirma que a figura 10 continua sendo um quadrado e E2 justifica dizendo que a figura 10 continua sendo a mesma "porque independente da forma que colocar ela, ela sempre será a mesma coisa" e ao ser questionado que 'mesma coisa' seria essa, ele responde "a mesma figura", ou seja, um quadrado. Os estudantes E3 e E4 evidenciam que apenas houve a modificação da posição da figura, o que não iria interferir na sua forma.

Observamos que os participantes não fazem referência a relação entre quadrado e losango, isto é, não indicam conhecer que todo quadrado é losango, mas que nem todo losango é quadrado. Diante das características apresentadas através dessa figura, observamos que nenhum dos estudantes sabem reconhecê-las por sua nomenclatura, mesmo sendo apresentada da forma mais comum, e nem lista algumas de suas propriedades o que nos levar a classificá-los na construção do nível um. E as estratégias utilizadas para justificar suas respostas foram apenas argumentando, em momento algum fazem uso de outras estratégias.

## 6.5 SOBRE O PARALELOGRAMO

A última figura geométrica abordada na sequência de dobras foi o paralelogramo. Na configuração que mostramos na figura 11.

Figura 11: Paralelogramo - Dobradura

Fonte: A autora (2019)

Os participantes não reconhecem essa figura por sua nomenclatura, três deles relatam que conhecem, mas não lembra o nome. Eles conseguiram listar algumas características correspondente a figura 11. E1 ao ser questionado se mesmo sem referir-se a figura pelo seu nome saberia lista algumas de suas características, ele relata que “o fato dela ter dois lados mais deitados e de ser o mesmo tamanho”, E3 e E4 faz associação aos lados opostos serem iguais, E3 também aponta para as extremidades da figura, se referindo aos ângulos que ali estão presentes. Enquanto E2, mesmo o entrevistador tentando fazer com que o participante idealizasse uma situação ao qual ele teria que descrever a figura 11, para que outra pessoa a desenhasse, não soube como descreveria, essa situação tínhamos como intuito fazer com que o participante listasse algumas características da figura 11.

A partir do que foi descrito, podemos perceber que os estudantes não lembram ou realmente não conhecem a nomenclatura associada a essa figura, mas conseguem listar algumas características visíveis e associando aos níveis de Van Hiele é possível classificar os participantes na construção do Nível um. Percebemos que as estratégias utilizadas para justificar suas respostas por E2, apenas a argumentação, em contrapartida, E1, E3 e E4 utiliza a indicação dos lados ou ângulos.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo foi analisar a experiência geométrica sobre quadriláteros notáveis de um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental com o recurso da dobradura de papel, em que buscamos responder, como revela-se a experiência geométrica sobre quadriláteros de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental na construção de um Origami, com base nas respostas de um grupo de estudantes de uma escola do município de Bezerros.

Baseando-se na teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico do casal Van Hiele, procuramos identificar os níveis de pensamento geométrico que os participantes apresentam com relação a cada figura presente na sequência de dobras realizadas para construção do modulo de um cubo. E diante dos níveis apresentados em cada quadrilátero, percebemos que os níveis dos alunos que na opinião do professor tem um bom desempenho em Matemática em comparação com aqueles dois que sentem mais dificuldade, são basicamente o mesmo em todas as figuras geométricas abordadas.

Destacamos algumas respostas dos participantes em que apresentam dificuldades para nomear as figuras como por exemplo: E2 nomeia o retângulo como um paralelepípedo ou E1 reconhecer o trapézio como triângulo e ainda justificar sua resposta utilizando a quantidade de lados, não percebendo que a figura em questão tem uma quantidade maior de lados do que o triângulo. Com relação ao quadrado, E2 inicialmente sente dificuldade para reconhecer pois não estava em posição usualmente apresentada pelos livros e professores, o que nos levar a pensar na importância de trabalhar em sala com as figuras geométricas de forma rotacionada, ou seja, em posição diferente da “tradicional”. Observando os níveis apresentados em cada quadrilátero abordado, percebemos que o nível geral dos participantes está na construção do nível um, pois os mesmos sentem dificuldades para nomear e listar características das figuras.

Paralelo a isso, verificamos quais as estratégias de justificativa os estudantes utilizam para explicar propriedades dos quadriláteros notáveis em que tivemos o intuito de analisar se os participantes utilizam o recurso da dobradura para assegurar suas respostas. Notamos que a estratégia mais usada pelos participantes foi a indicação das características das figuras e que apenas o participante E4, o qual é apresentado pelo professor como um dos participantes que sentem dificuldade em matemática, faz uso do recurso da dobradura para justificar o porquê os dois triângulos são iguais.

Como nosso foco foi nos quadriláteros notáveis, não alongamos nos questionamentos sobre o triângulo. E apesar de ser realizada uma sequência de dobras para se obter o quadrado ou paralelogramo, os participantes não fazem uso desse meio para justificar o porquê tal ângulo mede 90º, que o segmento que liga os dois pontos opostos de um quadrado é a diagonal ou até mesmo sobrepor um lado sobre o outro para mostrar que eles possuem o mesmo tamanho.

Observando o trabalho com um todo refletimos chegando ao seguinte questionamento: será que utilizando o recurso da dobradura de papel desde o início do conteúdo isso iria contribuir para a compreensão das propriedades das figuras geométricas?. Não é nosso objetivo responder a tal questionamento, mas essa dúvida surge no contexto no qual os estudantes aqui analisados mostraram muita dificuldade para reconhecer e listar alguns dos quadriláteros notáveis.

## REFERÊNCIAS

BARRETO, C.A. **A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.

BONJORNO, J. R.; SOUSA, P.R. C.; BONJORNO, R. F. S. A.; GUSMÃO, T. C. R. S. **Projeto Athos:** Matemática. 1. Ed. São Paulo: Editora FTD, 2014.

BRAGA, E. R.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n.2, p. 273-289, 2011.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHIZZOTTI, A.; A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. **Revista Portuguesa de Educação**, p. 221-236, 2003. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37416210> Acesso em: 12 Abril 2019

COLOGNESE, S. A.; MÉLO, J. L. B. **Pesquisa Social empírica:** Métodos e Técnicas – Cadernos de Sociologia. Porto Alegre: UFRGS- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1998.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8 ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

GLOWECKI, K. C. B. D. **O uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos geométricos.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2015.

GUIMARÃES, V. G. **Ensinando a Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental por Meio de Recursos Manipuláveis**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Viçosa, 2015.

IMENES, L. M. **Geometria das dobraduras**. São Paulo: Editora Scipione, 1988.

INEP. **Resultados do Ideb.** 24 de set. de 2018. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/ideb/resultados>. Acesso em: 13 maio 2019.

KAWANO, C. **A Matemática do Origami**. 2015. Disponível em: < http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT516776-2680,00.html >. Acesso em: 22 maio 2018.

MELO, D. D. **Uma Reflexão sobre o Ensino de Geometria e a Arte das Dobraduras como Ferramenta de Ensino.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Parnaíba, 2016.

MENEZES, D. B. **O Uso de Dobraduras como Recurso para o Ensino da Geometria Plana:** História, Teoremas e Problemas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.
NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso Básico de Geometria**: Enfoque Didático. Rio de Janeiro: Editora IM/ UFRJ, 2011.

NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa – Características, usos e possibilidades. **Caderno de Pesquisa em Administração,** São Paulo, v. 1, n. 3, 1996.

PEREIRA, G.A.; SILVA, S.P.; MOTTA, W.S. O Modelo Van Hiele de Ensino de Geometria aplicado à 5º e 6º séries do Ensino Fundamental. **FAMAT em Revista**. Uberlândia: FAMAT, 2005, p. 21-50.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife, 2012.

RÊGO,R.G. do; RÊGO,R.M.; GAUDÊNCIO,S.J. **A Geometria do origami**. João Pessoa, PA: Editora Universitária/UFPB,2003.

RODRIGUES, S. S. A. **A Teoria de Van Hiele aplicada aos triângulos:** uma sequência didática para o 8º ano do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015.

SHENG, L. Y. et al. Utilização da Arte do Origami no Ensino de Geometria. In: Encontro Regional de Professores de Matemática, 18., 2005, Campinas. **Anais...** Campinas: UNICAMP, 2005. Disponível em: < https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/c3.pdf >. Acesso em: 25 fev. 2019

SILVA, E. S. R. I. T. C. P. **O Uso de Dobraduras e Origami no ensino de Geometria Plana.** Monografia (curso de Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos de Goytacazes, 2011.

SILVA, M. S. **A Influência do Origami no Processo Ensino – Aprendizagem da Geometria do 9º ano – Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

UENO, T. **Do origami tradicional ao origami arquitetônico***:* uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações do design contemporâneo. Dissertação (Mestrado em desenho industrial)- Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação, UNESP, Bauru, 2003.

VICTÓRIO, J. R. S. **Abordagens do Origami e Dobraduras no Ensino de Geometria.** Dissertação ( Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

VILLIERS, M. de. Algumas reflexões sobre a teoria de van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, v.12, n. 3, p. 400-431, 2010.