UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

JAILSON FRANCISCO DA SILVA

UMA ANÁLISE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PROBABILÍSTICOS DE UMA TURMA DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Caruaru - PE
2019

JAILSON FRANCISCO DA SILVA

UMA ANÁLISE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PROBABILÍSTICOS DE UMA TURMA DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática. Área de concentração: Ensino/Matemática Orientador: Profº. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho

Caruaru - PE

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S586a Silva, Jailson Francisco da.
Uma análise de resolução de problemas probabilísticos de uma turma do terceiro ano do ensino médio. / Jailson Francisco da Silva. – 2019.
50 f. il. : 30 cm.

Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Probabilidade. 2. Ensino médio. 3. Educação básica. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de (Orientador). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-103)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico Do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso De Matemática – Licenciatura

UMA ANÁLISE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PROBABILÍSTICOS DE UMA TURMA DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

JAILSON FRANCISCO DA SILVA

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e aprovada em 13 de junho de 2019.

Banca Examinadora

____
Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Prof. Drª. Cristiane de Arimatéa Rocha (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Prof. Luan Danilo Silva Santos (Examinador Externo)
Programa de pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática - UFPE

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me proporcionado a realização de um sonho em cursar uma faculdade.

Aos meus pais, Heleno e Amara, aos meus irmãos Silvânia, Carlos, Joelson e Leonildo que deram muito apoio para chegar até aqui, o último entre meus irmãos que foi mencionado não está mais presente entre nós, mas tenho a certeza que está orando por mim com papai do céu e aos meus sobrinhos Matheus Fernandes e Emanuel.

Ao meu orientador, Ivanildo de Carvalho, quer desde do início teve um papel de suma importância nesse trabalho, pois com sua paciência, compreensão e ajuda contribuiu e muito para minha formação profissional.

Agradeço a todos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado nessa batalha, em especial, Jéssica Raiane, Teófila Mendes, Letícia Raquel, Luana Alves, Aline Lucena, Janaína Fonsêca, Josivânio Almeida, Carlos, Daiane Tales, Erivaldo Lopes pessoas estas que levarei para o resto da minha vida, só tenho que agradecer a Deus por ter colocado elas no meu caminho.

Aos professores, que sem eles não estávamos aqui, Ivanildo de Carvalho, Cristiane Rocha, Marcelo Miranda, Paulo Câmara, Simone Moura, Jeremias, Ana Lúcia, Marcos Fabiano, Ana Cristina, Jefferson, Lucivânia, Elizabeth Lacerda, Cleiton Ricardo, Marcos Henrique, Amanda, Edelweis Tavares, Dilson Cavalcanti entre outros.

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e o programa de residência pedagógica e aos meus coordenadores (Paulo Peixoto) e (Simone Moura) respectivamente pelas experiências e aprendizagens.

“A educação é a arma mais poderosa que pode

mudar o mundo”

(Nelson Mandela)

RESUMO

Nosso trabalho teve como foco verificar quais as dificuldades que os alunos do terceiro ano do ensino médio têm em resolverem problemas probabilísticos. Para isso elaboramos um questionário com cinco questões e aplicamos com 37 alunos de uma escola estadual situada em Gravatá-PE. Escolhemos os conceitos de Batanero (2005) para dar embasamento na nossa análise. Percebemos um conceito recorrente no decorrer da atividade que foi o laplaciano, todos sem exceção exploraram esse conceito. Vimos também que o ensino de probabilidade é pouco explorado na educação básica. Dados apontados pelos os alunos revelaram que ao se tratar de espaço amostral de um evento estão restritos a dados e moedas. Foi notório vermos que eles chegam no final da educação básica sem terem domínio de alguns conceitos de probabilidade, mas esse fato deve ao pouco contato que tiveram no decorrer da trajetória escolar, visto que a maioria até afirmam terem visto, mas salientam que lembram muito pouco dessas aulas. Em nossa atividade na qual envolvia situação de aleatoriedade, união de eventos, definição de espaço amostral, em determinados momentos eles mostravam alguns equívocos tanto no que se refere a definição como também nas resoluções dos problemas. É importante salientar que nenhum deles conseguiu resolver as cinco questões, no máximo foram três questões entre as cinco propostas na atividade.

Palavras-chave: Probabilidade. Fenômenos Aleatórios. Ensino Médio. Educação Básica.

ABSTRACT

Our work focused on checking the difficulties that the students of the third year of high school have in solving probabilistic problems. For this we elaborated a questionnaire with five questions and applied with 37 students of a state school located in Gravatá-PE. We chose the concepts of Batanero (2005) to support our analysis. We perceived a recurring concept in the course of the activity that was the Lapplacian, all without exception explored this concept. We have also seen that probability teaching is little explored in basic education. Data pointed out by the students revealed whether it is the sample space of an event are restricted to data and coins. It was notorious to see that they arrive at the end of basic education without mastery of some concepts of probability, but this fact owes to the little contact that they had during the course of the school, since most even claim to have seen, but they point out that they remember very little of these classes. In our activity involving randomness, union of events, definition of sample space, at certain moments they showed some misunderstandings both regarding the definition as well as in the resolutions of the problems. It is important to note that none of them could solve the five questions, maximum were three of five proposed in the activity.

Keywords: Probability. Random Phenomena. High school. Basic education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Exemplo 6: Significado geométrico	18
Quadro 1 –	Questão 1	29
Gráfico 1 –	Dados da questão 1	29
Figura 2 –	Resposta do A31 para questão 1	30
Figura 3 –	Resposta do A3 para questão 1..	30
Figura 4 –	Resposta do A7 para questão 1..	31
Quadro 2 –	Questão 2	31
Gráfico 2 -	Dados da questão 2	32
Figura 5 –	Resposta do A7 para questão 2..	33
Figura 6 –	Resposta do A29 para questão 2	33
Figura 7 –	Resposta do A27 para questão 2......................................	34
Quadro 3 –	Questão 3	34
Gráfico 3 -	Dados da questão 3	35
Figura 8 –	Resposta do A10 para questão 3	35
Figura 9 –	Resposta do A15 para questão 3	36
Figura 10 –	Resposta do A1 para questão 3..	36
Figura 11 –	Resposta do A3 para questão 3..	37
Figura 12 –	Resposta do A7 para questão 3	37
Figura 13 –	Resposta do A24 para questão 3......................................	38
Quadro 4 –	Questão 4	38
Gráfico 4 -	Dados da questão 4	39
Figura 14 –	Resposta do A6 para questão 4..	40
Figura 15 –	Resposta do A13 para questão 4......................................	40
Figura 16 –	Resposta do A31 para questão 4	41
Figura 17 –	Resposta do A16 para questão 4	41
Quadro 5 –	Questão 5	42
Gráfico 5 –	Dados da questão 5	42
Figura 18 –	Resposta do A24 para questão 5	43
Figura 19 –	Resposta do A27 para questão 5	44

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**10**
2	**OBJETIVOS**	**12**
2.1	OBJETIVO GERAL	12
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
3	**BREVE DISCUSSÃO HISTÓRICA DA PROBABILIDADE E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS.**	**13**
3.1	UM POUCO DA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE	13
3.2	SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE	14
4	**ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE**	**20**
5	**METODOLOGIA**	**27**
6	**ANÁLISE DOS DADOS**	**29**
7	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**45**
	REFERÊNCIAS	**47**
	ANEXO A - QUESTIONÁRIO	**49**

1. INTRODUÇÃO

Sabemos que a matemática não é bem vista pelos alunos, eles acham uma disciplina difícil, talvez seja porque eles veem a matemática de forma que não faça sentido aprendê-la para ser utilizada no seu cotidiano. Comigo não foi diferente, sempre vi, desde dos anos iniciais os professores de matemática trabalharem o conteúdo de maneira que não fazia sentido para mim, pois eles apenas reproduziam o que estavam nos livros didáticos. Quando ingressei na universidade tive algumas disciplinas que me fizeram ter uma visão melhor para a matemática, pude ver que a matemática é algo além de reproduzir. É pensar de maneira diferente.

Dessa forma, resolvi pesquisar sobre o conhecimento probabilístico dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio, pois acredito que este conteúdo deve ser mais explorado pelos professores da educação básica, Mais não é o que acontece hoje nas escolas e até na graduação.

Usamos a probabilidade e estatística em praticamente tudo em nosso dia a dia. Ao lermos uma notícia sobre índice de desemprego, entrevista em jornal, ou mesmo quando assistimos jornais, lemos um artigo e dele extraímos informações, temos que estar imbuídos desses conceitos para entendê-los. Podemos afirmar, que a estatística e probabilidade são conteúdos que devem ser bastante explorados pois estão presentes em nossas vidas. Nas escolas desde a alfabetização os professores sempre diziam e dizem até hoje para os alunos que a matemática é exata, o que gera uma ideia equivocada para os alunos, pois a matemática é utilizada em diversas áreas, entre elas temos a probabilidade usada nos diversos jogos de azar, em que aparecem situações problemas que não podemos conceituar como exata, mesmo sendo este conteúdo um matemático.

Um dos conteúdos poucos explorados nas escolas são a Probabilidade e a Estatística algo sempre presentes no nosso dia a dia. Muitos alunos saem da educação básica com dificuldades com e nesses conteúdos. Quando eles veem esse assunto são apenas reproduções dos livros didáticos que os professores passam para eles, segundo Lopes (2011, p.627) "o que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno e não a memorização de fórmulas. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio e a aquisição do conhecimento são para a vida toda", ou seja, devemos ensinar os alunos pensarem em resolver o problema e não decorar fórmulas como os professores são habituados a fazerem.

Santana (2011, p.14) conceitua que "a probabilidade torna indispensável ao cidadão nos dias de hoje e em tempos futuros, pois a sociedade contemporânea requer habilidades que permitam uma leitura ampla da realidade e capacidade de intervenção nas ações sociais". Assim faz com que os alunos tenham mais senso crítico e capacidade de raciocínio, tendo mais poder de decisão.

Para Rezende (2013, p.13), “O Ensino de Probabilidade que o professor recebe em sua formação inicial - quando existe - geralmente não é tratado de forma a privilegiar uma discussão metodológica na qual o desenvolvimento do pensamento probabilístico tenha papel de destaque”. Percebemos que muitos professores não passam esse assunto por várias razões. Entre elas, podemos elencar que muito deles não tem um domínio suficiente deste conteúdo e quando eles passam este assunto é sempre usando fórmula sem um contexto que faça o aluno pensar como resolver problemas que envolvam probabilidade.

Como justificativa pessoal foi o interesse de pesquisar mais sobre probabilidade, conteúdo esse pouco explorado no ensino básico, pelo lado social vejo as dificuldades que muitas pessoas têm em resolver problemas que envolva tal assunto e como justificativa acadêmica foram alguns referenciais teóricos como Rezende (2013), Lopes (2011), Batanero (2005) entre outros que contribuíram muito para ensino e aprendizagem de probabilidade. Esta pesquisa busca responder a seguinte pergunta: **Como podemos verificar qual (is) a (s) dificuldade (s) que os alunos do terceiro ano do ensino médio têm em resolverem problemas probabilísticos?** No decorrer do nosso trabalho iremos trazer uma breve discussão histórica da probabilidade e seus diferentes significados, revisão de alguns documentos oficiais a respeito do Ensino e Aprendizagem da probabilidade, a metodologia adotada nesse trabalho, análise e discursões dos dados e por fim as considerações finais

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

- Analisar o desempenho dos estudantes do terceiro ano do ensino médio nas resoluções de problemas probabilísticos.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar a vivência a partir da fala dos alunos sobre a probabilidade na sua trajetória escolar;
- Compreender as concepções dos alunos ao resolverem problemas que envolvam aleatoriedade;
- Identificar quais os conhecimentos prévios em probabilidade eles têm para resolver problemas.

3. BREVE DISCUSSÃO HISTÓRICA DA PROBABILIDADE E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS

Ao discutirmos sobre a probabilidade devemos ter um pouco do conhecimento da sua origem. Pensando nisso, fizemos uma breve pesquisa sobre seu surgimento e alguns dos seus conceitos.

3.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Até hoje não sabemos o momento certo que surgiu a tal probabilidade, sabemos que, com as diversas pesquisas relacionadas ao tema, segundo Biajoti (2013), provavelmente ela apareceu com estudioso das civilizações antigas, tenham percebido algumas existências de “regularidades” em fenômenos improváveis. Ela já era praticada a muito tempo pelos hindus e árabes onde eles já tinham um certo domínio de jogos que envolvia azar. Os romanos eram amantes dos jogos de dados e de cartas, mais ao longo da idade média essa civilização foi impedida de praticar esses jogos pela Igreja cristã. Devido essas proibições impostas pela igreja, historiadores creem que possam ter desaparecido alguns registros de jogos que eram praticados por essas civilizações.

Segundo Biajoti (2013) há pesquisas que nos mostram que os jogos de azar eram praticados pelos o egípcios há 3500 a.C., sendo que eles já praticavam jogos com ossos. Se tem registro que em meados de 1200 a.C. os jogos de aposta eram feitos com um pedaço de osso que tem uma aparência de uma dado chamado de (astragulus) um osso do calcanhar, ele faz uma ressalva a esse tipo de dado em que suas faces não era iguais contribuindo para que não acontecesse uma certa regularidade ao lançar um dado desse formado, diferentemente dos dados atuais não “viciados”.

Podemos perceber que a probabilidade surgiu a partir de jogos de azar e como parte da matemática só em meados do século XV depois que os matemáticos italianos começaram a estudar com afinco os jogos de azar. Os jogos ditos de azar dependem em muito dos casos da sorte, neste caso desconsiderando as estratégias de cada jogador. Ao lançar uma moeda podemos supor que ela poderá sair cara ou coroa, mas não podemos ter a certeza de qual irá sair mesmo tendo duas possibilidade (VIALI, 2008, p. 144), ao praticar um jogo de azar “os fatores que determinam um destes particulares resultados não podem ser identificados e caso isto ocorra não são passíveis de controle”.

De acordo com VIALI (2008), os jogos com ossos serviam para previsões futuras, decisão de disputa e partilha de herança. A partir dessas descobertas sobre o jogos de azar se deu início ao o estudo da probabilidade, grande matemáticos como Galileu Galilei (1564-1642), Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662), Jacob Bernouli (1654-1705), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) dentre outros, deram grande contribuição para as pesquisas relacionadas a Probabilidade.

Podemos dizer que a Probabilidade é a parte da matemática que estuda o acaso/azar. Conteúdo bastante significativo nos PCN, pois possibilita os alunos serem mais críticos no dia a dia, visto que é um assunto que está atrelado a diversas áreas do conhecimento nos jogos, nos jornais, na medicina, enfim em tudo em qualquer lugar ela está.

3.2 SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE

Nesse subcapítulo trataremos de alguns significados de probabilidade precisamente os conceitos de Batanero (2005) que são os significados: intuitivo, laplaciano, frequentista, subjetivo, axiomático, além do geométrico definido por Amâncio (2012).

Com respeito ao Significado Intuitivo, discorremos que embora algumas pessoas, crianças e até as pessoas adultas, que não tiveram contato formal com a probabilidade, mesmo assim, como elas tiveram certas experiências com jogos de azar, apostas, elas adquiriram certas habilidades através de expressões coloquiais que possibilitaram a justificativa de aceitar certas situações movido pela crença.

Até então não se tinha uma preocupação em se dar um número de ocorrências para certas situações, mas percebeu-se que ao passar do tempo, para lidar com problemas envolvendo jogos era preciso atribuir um número a essas ocorrências, isso fez com que ao decorrer do tempo, as teorias existentes até então receberam diversos significados sobre a sua natureza objetiva ou subjetiva da probabilidade (BATANERO, 2005).

Exemplo 1: O jogo de dominó: Ao ter certa experiência nesse jogo você passa a dominar melhor qual jogada deve fazer em determinadas situações. Não basta apenas conhecimento matemático para vencer uma partida de dominó, mas experiência no jogo.

Com relação ao significado laplaciano a autora define como sendo uma fração em que o numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de casos possíveis, esse conceito poderá resolver alguns casos onde temos um finito número de possibilidades como no caso do lançamento de um dado onde temos mesma chance para quaisquer que seja o números que se deseja tirar, caso contrário essa teoria não pode ser utilizada. “Tal definição foi inadequada, circular e restritiva e não definia o que é probabilidade é apenas um método rápido de solucionar o problema" (BATANERO, 2005, p.8) – ("tradução nossa").

De acordo com a definição temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

P(A) representa a possibilidade do evento A acontecer, n(A) representa os casos favoráveis e n(Ω) são todo os casos possíveis do espaço amostral.

Exemplo 2: Uma bola será retirada de um cesto contendo 3 bolas amarelas, 2 bolas azuis e 5 bolas pretas. Ao ser retirada essa bola, qual será a probabilidade de ela ser azul?

Nesse exemplo temos como os casos favoráveis n(A) = 2 e n(Ω) = 10, já que temos 10 bolas no cesto. Nesse caso, P(A) seria igual a 1/5, ou ainda 20%.

Sobre o significado frequentista Batanero (2005) comenta quer "Bernoulli sugeriu que podemos atribuir a probabilidade aos sucessos aleatórios que aparecem em diversos campos a partir da frequência relativa observada em uma série grande de ensaios de experiência". Ao se realizar um evento com as mesma condições e mesmo molde percebeu-se que se ele fosse realizado poucas vezes não temos uma frequência estável que seria a probabilidade de um determinado evento acontecer, mais se este mesmo evento fosse realizado diversas vezes poderíamos facilmente perceber que a frequência tende a um número N tal que este número seria a provável probabilidade deste evento acontecer, tal número ficou conhecido na probabilidade como Lei do Grande números.

Matematicamente podemos representar essa definição como:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

Onde P(A) é o número que representa, quantitativamente, a probabilidade do evento A ocorrer; N_A é o quantitativo favorável ao acontecimento do evento A e N expressa a quantidade total de eventos ocorridos no experimento.

Exemplo 3: Em um lançamento de uma moeda podemos ter como resultado cara ou coroa. Se fizermos mil lançamentos qual a probabilidade de sair só coroa? Teríamos então uma resposta que tenderia a algo próximo de ½, que é a probabilidade de sair cara ou coroa jogando uma única vez uma moeda.

Esse é um tipo de problema mesmo sendo realizado nas mesmas situações não podemos garantir a qual será mais provável sair, se cara ou coroa. Resolveremos esse tipo de situação fazendo uma tabela e anotando a ocorrência de cada evento, depois de vários lançamentos iremos perceber a probabilidade do evento ocorrer, ela irá se estabilizar próximo de um determinado número fixo.

No significado subjetivo podemos supor um evento a priori, ou seja, antes de realizar o evento devido alguns conhecimentos que a pessoa tem com determinado acontecimento. Imagine uma partida de vôlei em que se a equipe A joga em casa ela tem noventa 90% de chance de ganhar e caso não jogue em casa ela tem dez 10% de chance de ganhar, logo devido essa observação a priori podemos deduzir que jogando em casa é mais certo da equipe A vencer a partida.

Mas essa análise, a priori, poderá alterar a análise da probabilidade posteriori a depender de quem fez a observação a priori, pois, ela deve ter certos conhecimentos prévios do evento, pois, caso contrário, não devemos perguntar a uma pessoa se uma equipe de futebol têm mais chance de vencer de que a outra se a pessoa não possuir conhecimento algum sobre futebol, além disso em um jogo de futebol N fatores pode decidir o resultado. "... a probabilidade de um evento é sempre condicionada para um determinado sistema de conhecimento e pode ser, portanto, diferente para pessoas diferentes". (BATANERO 2005, p. 8-9) – (tradução nossa). Portanto, segundo essa definição nos traz que não podemos generalizar a probabilidade de um determinado evento como fizemos outrora, pois esse tipo de probabilidade depende do quanto uma pessoa sabe/entende acerca do evento observado, e como pessoas diferentes têm visões diferentes, isso implica que diversos resultados podem surgir.

Exemplo 4: Em uma partida de futebol entre a seleção brasileira e argentina, sabemos que quando essas duas seleções se enfrentam há uma rivalidade. Qual é a probabilidade de o Brasil sair vitorioso dessa partida?

Esse tipo de problema é típico do conceito subjetivo, visto que, em uma partida de futebol muitos fatores podem ocorrem como o clima, condições do gramado, condições físicas dos atletas entre outros. Então, podemos concluir que, em suma, não há a possibilidade de reproduzirmos uma mesma partida de futebol nas mesmas condições duas vezes, pois todos os fatores envolvidos mencionados podem sofrer alterações, implicando na mudança do quadro geral da partida.

Podemos citar também, no âmbito da natureza subjetiva, que ao indagar sobre o resultado do jogo a mais de uma pessoa, devemos observar qual conhecimento prévio cada pessoa indagada possui, por exemplo, a nossa "vó" que nunca assistiu futebol na vida não teria a mesma propriedade que "Tino Marcos" teria ao responder essa mesma pergunta.

Ao longo do século XX vários autores deram grande contribuição, entres eles Borel que descreveu a probabilidade como um certo tipo especial de medida e o modelo utilizado por Kolmogorov foi fundamental na teoria dos Conjuntos, essa teoria, diferente do caso clássico que tem um espaço finito de possibilidades, nessa teoria podemos calcular casos favoráveis em um espaço amostral infinitos de possibilidades. A probabilidade é um meio pelo qual podemos descrever e interpretar caso de aleatoriedade em vários meios humanos como na ciência, tecnologia, política etc. esse é a definição axiomática adotada pelas escolas independentemente do significado filosófico dado à natureza da probabilidade. (BATANERO, 2005, p.9) – (“tradução nossa”).

Trataremos agora, de forma resumida, os principais axiomas que foram construídos e aceitos:

I) $P(\Omega) = 1$;

II) $P(A) \geq 0$;

III) $P(A \cup B) = P(A) + P(B), P(A) \cap P(B) \neq 0$.

Exemplo 5: Um dado viciado tem o triplo de chance de sair o número 4 em relação às outras faces. E as outras faces têm a mesma probabilidade de saírem. Nesse dado, qual a probabilidade de sair o número 2?

Usando o axioma (I), temos:

$$P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

Onde a soma das probabilidades de cada evento somadas resulta na totalidade de eventos, que é 1.

Para simplificar nosso raciocínio, vamos atribuir o valor de x para cada uma das probabilidades que têm a mesma chance de acontecer, seguindo esse raciocínio, temos então que $P(4) = 3x$. Com isso, observamos o axioma (II), já que $3x \geq 0$.

Por fim, usamos o axioma (III), quando afirmamos que a união de todos os eventos resulta na soma da probabilidade de cada evento. No nosso caso, temos então que:

$$P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) =$$
$$= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

Como se trata de eventos que possuem interseção vazia entre eles (um dado não mostra a face 3 e 5 ao mesmo tempo, por exemplo) não há necessidade de subtrairmos nada.

Substituindo os valores que atribuímos para cada uma dessas probabilidades, obtemos:

$$x + x + x + 3x + x + x = 1$$
$$8x = 1$$
$$x = 1/8$$

Logo, temos que $P(2) = 1/8$.

Amâncio (2012) comenta que o significado geométrico está diretamente ligado com clássico de probabilidade onde podemos atribui à uma grandeza geométrica, a probabilidade de um determinado evento ocorrer.

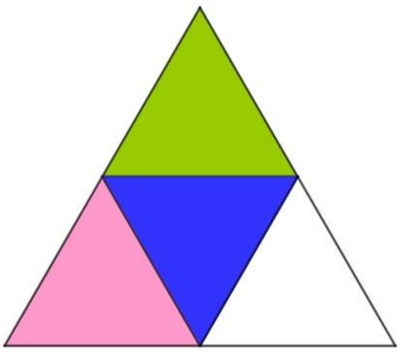
Para calcularmos um evento com um pensamento geométrico temos que,

$$P(A) = \frac{med\ A}{med\ S}$$

Dizemos que *med* é uma grandeza que representa volume, área ou comprimento e deve pertencer a uma determinada região S. Para o evento A ocorrer ele deve pertencer a essa região S, e essa tem que pertencer a A.

Exemplo 6: A figura abaixo representa um triangulo equilátero cujo sua parte interna está dividida em quatro triângulos menores de mesmas dimensões e um não está pintada, qual o porcentual que corresponde a parte não pintada da figura?

Figura 1. Exemplo 6: Significado geométrico



Fonte: autor

Pela definição a probabilidade será igual a P (A) = $\frac{1}{4}$ que corresponde a 25% da figura. Onde *med (a)* = 1 e *med (s)* = 4.

Vimos que há muitos significados sobre a probabilidade mais cada uma tem sua aplicabilidade de acordo com os problemas os quais se pretende resolver. No decorrer do ensino médio esses significados deverias ser mais explorados com os alunos, e observamos também quer a autora salientar que o significado axiomático ou formal é o mais recorrente nas aulas de probabilidade, mais apesar dele ser o mais adotado nas aulas acreditamos quer os outros também deveriam ser trabalhados. Com isso os alunos ao saírem do ensino médio teriam um melhor embasamento com esse conteúdo o qual está presente em nosso cotidiano.

4. ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE

Nesse capítulo abordamos um pouco de alguns teóricos que falam na importância do ensino de probabilidade. Para muitos esses conteúdos deve ser cobrado desde os anos iniciais, mas que seja de maneira gradativa. Algo que foi constatado por muitos, é que esse conteúdo é pouco cobrado nos anos iniciais refletindo nos anos subsequentes uma defasagem de conhecimentos probabilístico.

O estudo de probabilidade na escola deve começar a partir de jogos que despertem a curiosidade e interesse para resolver problemas. Quando proporcionamos ao estudante experimentar a probabilidade através de atividades lúdicas, estamos criando situações que favoreçam o desenvolvimento do pensamento, não estamos apenas proporcionando atividades de jogos e entretenimentos, mas estamos criando situações que favoreçam o desenvolvimento do pensamento e o senso crítico fazendo com que o aluno desenvolva seu poder de raciocínio (LOPES, 2003).

A probabilidade está em tudo que nos cerca desde uma reportagem em um jornal que nos fala sobre a estimativa de vida, as pesquisas de votos em uma eleição, a quantidade de casos de uma doença em determinadas épocas do ano, na previsão do tempo. Enfim, em praticamente tudo que tem a ver em uma vida cotidiana. “A vida em sociedade é caracterizada como um ambiente sujeito a elevados níveis de incerteza, onde a capacidade de analisar, interpretar e transmitir informações adequadamente é fundamental à vida cotidiana”. (REZENDE, 2013, p.17).

Santana (2011) em seu trabalho sobre as concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental fez uma pesquisa com professores da rede pública do Recife que lecionavam nas séries iniciais e finais do ensino fundamental. Esse trabalho foi realizado com oito professores, quatro deles lecionavam nas séries inicias e quatro nas séries finais do ensino fundamental, os professores das séries iniciais tinham Licenciatura em Pedagogia e os das séries finais eram Licenciatura em Matemática, a autora queria saber como estava o ensino de probabilidade em diversos níveis como também ele era propostos nos parâmetros curriculares nacionais.

A autora, por meio de nove questões retiradas dos livros didáticos pode analisar as diferentes noções de probabilidades entre os professores entrevistados. Por meio de uma entrevista semi- estruturada a autora foi capaz de analisar o perfil de cada professor e suas concepções sobre o ensino de probabilidade. No resultado Santana (2011, p.88- 89) constatou por meio das respostas de cada professor que muitos têm dificuldades em ensinar esse conteúdo aos alunos principalmente os professores das séries inicias, pois, eles apresentam dificuldades na própria compreensão do conceito de probabilidade, os professores dos anos finais que são formado em Matemática, mas mesmo assim eles não se encontraram, preparados para lecionarem esse conteúdo em sala de aula "devido às dificuldades encontradas na elaboração de conceito que exigem construção reflexiva sobre a ideia de acaso e aleatoriedade". Segundo argumentos dos professores eram que nas suas formações iniciais não foram orientados para trabalhar com esse conceito.

Em seu trabalho, Santos (2013) pesquisou o pensamento probabilístico que seus alunos apresentavam, ela observou que os alunos apresentavam os registros escritos de forma mais sucinta de que na comunicação oral, aqui eles conseguiam relatarem suas ideias de forma mais clara e detalhada, ela salienta a importância de atividades que contribuam para os alunos se expressarem de maneira espontânea.

Outra análise sobre o pensamento probabilístico fez Biajoti (2013) em sua dissertação de mestrado analisou o pensamento probabilístico de seus alunos. Notou-se que durante as atividades os alunos mostraram-se participativos. Nesse estudo ele enfatiza a importância de uma sequência didática e a maneira como o conteúdo devem ser desenvolvidos para o interesse e entendimento do aluno.

Marocci (2011) pesquisou os processos de elaboração conceitual probabilística dos estudantes quando inseridos num ambiente de resolução de problemas e o autor mencionar que os alunos progrediram em relação a seu processo de elaboração conceitual.

Em uma sequência didática envolvendo situações problemas em uma oficina realizada para professores, estudante de graduação e pós graduação Junqueira, Campos e Watabe (2011), propôs situação que envolvessem conceito clássico, frequentista e geométrico com um jogo chamado "o jogo da roleta" para dar início as atividades foram realizados um pré-teste para observar os conhecimento dos alunos e em seguida foi feito os pós-teste.

Foram desenvolvidas três atividades a primeira dela foi um círculo trigonométrico no papel, esse círculo foi de divido em partes maiores e menores onde se pôs um ponteiro no centro onde, ao girar o ponteiro, era observado onde teria mais chance de o ponteiro parar. Nessa atividade se buscou trabalhar a razão na qual está associada a probabilidade clássica, na segunda atividade foi visto o mesmo jogo só que agora no computador onde era realizado sorteio para ser observado a chance de determinado evento ocorrer, mais eles eram orientados que repetissem cada experimentos no mínimo cinquentas vezes para ser observado a frequência relativa e por fim foi explorada a probabilidade geométrica e suas propriedades.

Nessa oficina na qual foi realizada situação problemas eles concluíram que "...a probabilidade geométrica utilizada no trabalho com a Roda da Fortuna permite relacionar conceitos geométricos e probabilidade, aproveitando o caráter lúdico do jogo." E ainda elencar que essa atividade pode ser trabalhada em diversos níveis de escolaridades. (JUNQUEIRA; CAMPOS; WATABE, 2011, p.9).

Coutinho (2007) fez um levantamento histórico sobre o surgimento dos conceitos probabilísticos que são mais utilizados pelos professores propostos no Parâmetros Curriculares Nacionais no tocante o ensino de probabilidade. Para chega a uma conclusão ele fez um levantamento históricos dos primeiros indícios dos casos de aleatoriedades. Até o momento se sabe que ela surgiu a parti de jogos de azar que para muitos na época eram visto como passa tempo mais para outros era tido como coisa do "Diabo".

Mais ao longo do tempo foram aparecendo estudiosos que buscaram entender as chance de se ganha no jogo de azar, e descobriram que por trás desses jogos ocorria um certo tipo de regularidade, uns dos primeiro conceitos descoberto por eles e utilizado até hoje é o clássico no qual é representado por uma razão em que o numerador é chamado de caso favorável e o denominador são os casos possíveis.

Apesar de Coutinho (2007) mencionar na sua pesquisa os três principais conceitos de probabilidades que são propostos nos parâmetros Curriculares Nacionais que são o clássico, frequentista e o subjetivo, ele dá ênfase no clássico e no frequentista e conclui que:

> A partir destas reflexões, propomos, para trabalho em sala de aula, um raciocínio de modelagem para o qual a avaliação de uma probabilidade simples em uma situação de sucesso-fracasso é feita a partir da análise da urna de Bernoulli que representa essa situação (contexto de sorteio aleatório com reposição em uma população pré-determinada). (COUTINHO, p.66, 2007).

Podemos observar na sua pesquisa que os conceitos mais utilizados até hoje no ensino de probabilidade são os mesmos que eram vistos no surgimento da probabilidade, a grande diferença é que no início não tínhamos um conceito formal algo que foi sendo formalizado ao passar do tempo.

Um estudo realizado por Silva, Carvalho e Paraíba (2016) sobre a probabilidade nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental foi constatado que as três coleções de livros analisados não mostravam uma regularidade dos conteúdos entre o 6º ao 9º, dentre as coleções apenas uma teve uma melhor distribuição dos conteúdos por série. Algo que chamou atenção foram os conceitos abordados nas coleções. Tomaram como apoio para análise das coleções os cincos conceitos de Batanero (2005), o intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e formal.

Dentre os cinco conceitos que deram apoio a pesquisa apenas o clássico e frequentista foram encontrados nas coleções analisadas, mas com uma ressalva, a maiorias das questões encontradas eram classificadas como do conceito clássico. Segundo eles cerca de 87,15% eram do significado clássico.

Segundo Silva, Carvalho e Paraíba (2016) o mais indicado para as coleções dos livros didáticos seria "...uma abordagem espiralada, ou seja, que as coleções apresentassem em todos os seus volumes atividades de probabilidade e que estas atividades aumentassem o grau de aprofundamento gradativamente".

Amâncio (2012) acompanhou um planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBIB, cujo o objetivo era observa a importância do PIBID nas escolas, como também avaliar os conhecimentos sobre conceitos de probabilidades dos pibidianos.

Percebeu-se que os pibidianos que participavam das atividades tiverem um melhor desenvolvimento com conteúdo, principalmente aqueles que aplicavam as atividades para os alunos, diferentemente daqueles pibidianos que apenas auxiliavam os outros colegas nas atividades quando comparado o antes e depois das atividades desenvolvidas

Ao observa os alunos que participaram das atividades, e vale lembra que nem todos os alunos da escola participavam devidos essas atividades serem no contraturno contribuindo assim por uma quantidade mínima de alunos nas atividades do PIBID. Essas atividades tinham como intuito oferecer aos alunos um conhecimento introdutório sobre os conhecimentos probabilísticos. A sequência didática desenvolvida pelos pibidianos foi satisfatória, isso foi percebido no decorrer das atividades que os alunos iam fazendo.

Nota-se nesse trabalho da autora que o PIBID é de suma importância tanto para os futuros professores como também aos alunos que participavam do projeto. Valem lembra que esse trabalho se deu no âmbito do ensino médio e com licenciando de matemática, a autora propõe também que esse trabalho seja desenvolvido em todos os níveis da educação, "...sugerimos que o PIBID possa ser utilizado como campo de pesquisa ou objeto de pesquisa para diversos estudos vinculados aos saberes docentes e à aprendizagem matemática".

Fernandes (1999), vem dizer que "A educação em probabilidades deve, então, ajudar a estruturar as ideias intuitivas de modo a passar-se de um mundo de intuições vagas para um outro ordenado" aqui ele quer dizer o seguinte como convencer alguém que ganha um jogo mesmo tomando escolha errada e perde mesmo tomando decisões certas, algo que foi apontado por ele no trabalho. Imagine no lançamento de dois dados, se uma pessoa escolher par e a outra ímpar ambas pensando que terão as mesmas chances, só que a chance de sair par será maior, então como devemos fazer para eles entenderem o que está ocorrendo nesse evento? Devemos criar estratégias que possibilitem o entendimento do aluno nesse tipo de situação.

Os parâmetros curriculares nacionais (PCN), apresentam um questionamento quando se trata da seleção dos conteúdo matemático, porque já há um consenso nas escolha dos conteúdos dos quais podemos destacar: Geometria, Aritmética e da Álgebra, mais o desafio dessa escolha é saber se esses conteúdo será relevante para os alunos apreenderem, pois há assunto que não tem um bloco específicos para eles mais devem serem explorados nas escolas com a probabilidade e a estatística, são conteúdo que estimulam o raciocínio lógico matemático.

O PCN também enfatiza que o ensino de probabilidade tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo do estudante proporcionando o pensamento crítico, também desempenha um papel instrumental porque é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

A probabilidade tem por finalidade a construção de conhecimento para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados que seja capaz de descrever e interpretar sua realidade, utilizando conhecimentos matemáticos, ele também a aponta que os alunos deveram conhecerem as noções básicas de probabilidade já nos anos iniciais, pois no segundo ciclo eles já devem "identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situações-problemas, utilizando recursos estatísticos" (BRASIL, 1997, p.56).

Neste momento o aluno já deve aprender um pouco sobre alguns acontecimentos como palavra chaves como provavelmente, entres outras, no ciclo seguinte o mesmo diz que o aluno deve "construir tabelas de frequência e representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos" e "resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão", (BRASIL, 1997, p.65), ou seja, possa identifica em um lançamento de uma dado a probabilidade de sair um cinco é um sexto que é representado pela fração, caso favorável dividido pelo os caso possíveis. Já no último ciclo o intuito é "construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizado o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de um sucesso de um evento" (BRASIL, 1997, p.82).

Os parâmetros curriculares de Pernambuco (PCPE) vem falar que a probabilidade seja estendida para o ensino médio de maneira que o aluno,

> Seja capaz de estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento. O conceito pode ser ampliado também para situações em que seja necessário identificar a probabilidade da união e da interseção de eventos, os eventos disjuntos e o conceito de independência de eventos. (PERNAMBUCO, 2012, p.126).

Aqui o aluno deve ser capaz de diferenciar que um evento disjunto está associado a união de um evento, ou seja, a probabilidade de A mais a probabilidade de B, já os eventos independentes estejam associado a intercessão dos eventos, ou seja, a probabilidade de C, vezes a probabilidade de D.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) também reforça a ideia que durante o ensino médio os alunos devem:

> Exercitar a crítica na discussão de resultados de investigações estatísticas ou na avaliação de argumentos probabilísticos que se dizem baseados em alguma informação. A construção de argumentos racionais baseadas em informações e observações, veiculando resultados convincentes, exige o apropriado uso de terminologia estatística e probabilística. É também com a aquisição de conhecimento em estatística que os alunos se capacitam para questionar a validade das interpretações de dados e das representações gráficas, veiculadas em diferentes mídias, ou para questionar as generalizações feitas com base em um único estudo ou em uma pequena amostra, (BRASIL,2006, p.79).

Podemos perceber que os documentos oficiais apontam indícios que a probabilidade deva ser trabalhada pelos professores desde os anos iniciais com os alunos, porque quando eles chegarem ao o ensino médio já tenha um pouco de conhecimento estatístico e probabilístico, segundo os documentos oficiais esse conteúdo é muito importante para ser explorado, visto que, ajuda os alunos a resolverem problemas do cotidiano e também propicia um senso crítico neles para fazerem certos questionamentos quando assim acharem necessários.

Base Nacional Curricular Comum (BNCC), no tópico a matemáticas e suas tecnologias no ensino médio mostras as competências especificas e as habilidades que serão propostas, dentre as competências temos várias habilidades. Mais como nosso foco é o ensino de probabilidade no ensino médio iremos elencar o que a ela diz a respeito ao tema especifico da probabilidade, a mesma diz que os alunos devem “Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades” mais também “Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos” (BNCC, p.528).

Diante do que a BNCC expõe nota-se algumas sugestões de como deveremos trabalhar com esse conteúdo, e em linhas gerais os documentos oficiais acham que o ensino de probabilidade e estatística deve ser ensinado desde de cedo.

Observamos ao longo desse capítulo nos artigos, nas teses e nos documentos oficiais a importância de se trabalhar esse conteúdo, notamos também quer os autores mencionam quer ele deve ser trabalhado já nos anos iniciais, quer algumas coleções adotadas não possuem uma regularidade desse conteúdo nos livros dos anos finais do ensino fundamental, vimos também quer muitos professores tiveram formação para trabalharem à probabilidade principalmente os professores do anos iniciais.

5. METODOLOGIA DA PESQUISA

Nossa pesquisa teve como objetivo analisar o desempenho dos alunos do terceiro ano do ensino médio nas resoluções de problemas probabilísticos. Achamos melhor escolhermos uma turma do terceiro ano por ser o último ano do ensino médio, pois acreditamos que nesse momento eles já teriam visto probabilidade. Para tanto, elaboramos um questionário perguntas que possibilitassem a identificação das maiores dificuldades que alunos tem na resolução de problemas probabilísticos.

Escolhemos o questionário com questões aberta porque proporcionar a eles maior liberdade nas suas respostas. Gil (2008, p.141) fala que um questionário com questões abertas "...possibilita ampla liberdade de resposta", ou seja, que o pesquisado tem a liberdade de responder conforme seu conhecimento, mas ao mesmo tempo ele faz uma ressalva que "...nem sempre as respostas oferecidas são relevantes para as intenções do pesquisador" porque nem sempre teremos a reposta que esperamos do pesquisado.

Para nossa análise adotamos os conceitos de Batanero (2005).

No trabalho é pautado em uma pesquisa qualitativa a qual é definida por Godoy (1995, p.6), como sendo "... o ambiente natural como fonte diretas de dados e o pesquisador como instrumento fundamental". Ou seja, o pesquisador analisa os dados de acordo com as reposta de cada um e tira suas conclusões em relação ao que ele tem em mãos.

Nossa atividade foi aplicada no mês de maio de 2019 no turno da manhã com duração de uma hora e quarenta minutos, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio com 37 alunos que estavam presentes no dia de um total de 45 alunos. Desses presentes 16 eram do sexo feminino, 16 do sexo masculino e 5 não identificaram o sexo e idade. A turma tem uma média de idade de 16 anos.

Para coleta de dados aplicamos um questionário com cinco questões, duas delas foram de autoria própria e as outras três foram retiradas do trabalho de Fernandes (1999, p.383) Carvalho (2017, p.126) e Biajoti (2013, p.34).

Cada questão foi pensada nos objetivos de nossa pesquisa, tivemos como objetivos específicos Identificar a abordagem que os alunos têm com a probabilidade na sua trajetória escolar, Compreender as concepções que os alunos encontram ao resolverem problemas que envolvam aleatoriedade e Identificar quais os conhecimentos probabilísticos eles têm em resolverem problemas, na questão 1 buscamos saber se eles teriam visto probabilidade no decorrer da sua trajetória escolar, na questão 2 procuramos identificar neles as concepções sobre aleatoriedade, acontecimento possível (mas não certo), impossível e certo, na questão 3 pedimos para eles explicarem espaço amostral e darem exemplos. Questão 4 trabalhamos união de eventos. Questão 5 teve como objetivo compreender se eles conseguiam enxergar que em uma aposta uma pessoa pode ter mais chance de que a outra.

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

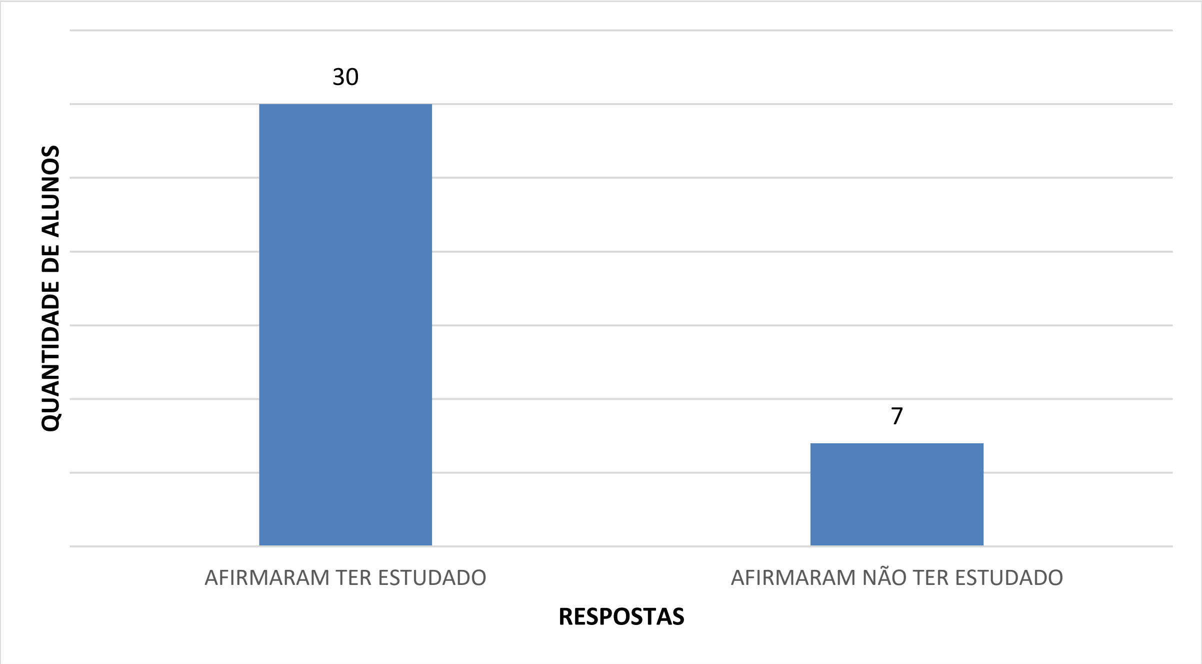
Nossa pesquisa foi realizada em uma escola estadual na cidade de Gravatá-PE, em uma turma do terceiro ano do ensino médio, a turma tem 45 alunos desses apenas 37 estavam presentes no dia que o questionário foi aplicado, os alunos tem idade que variam entre 16 a 25 anos com uma média de idade de 16 anos, nossa atividade foi desenvolvida para tentar descobrir como estão o conhecimento sobre probabilidade desses alunos, foram apenas cincos questões a serem resolvidas. Quando nos referimos a alunos, iremos utilizar a sigla A1 para aluno 1, A2 para aluno 2, A3 para aluno 3, ... A37.

Quadro 1: Questão 1

1. Ao longo de sua trajetória escolar você já estudou probabilidade, sim ou não? Se sim, como você recorda dessas aulas? Se não, você hoje sente a necessidade de ter visto esse conteúdo?

Elaboramos essa questão com o intuito de averiguar se eles já estudaram probabilidade, então optamos em categorizar como aqueles alunos que afirmaram terem estudados e aqueles que afirmaram não terem estudos, confiram os dados no gráfico abaixo.

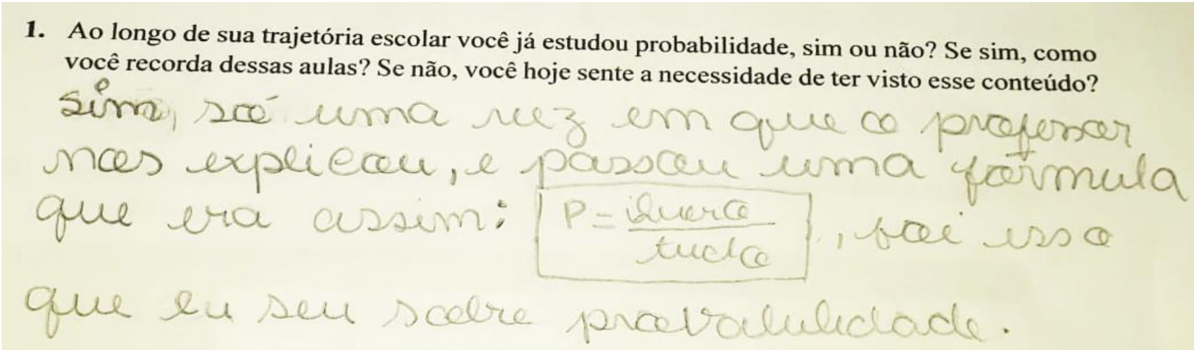
Gráfico 1: dados da Questão 1.



Fonte: O autor, 2019.

Observe no gráfico 1 que 30 (81%) afirmaram ter estudado probabilidade. Enquanto os 7 (19%) do restante afirmaram não ter estudado. Ao vermos os resultados tivemos a surpresa de alguns alunos não terem visto ainda, no qual esperávamos que todos já teriam visto, já que estão no terceiro ano do Ensino Médio.

Figura 2: Resposta do A31 para questão 1.

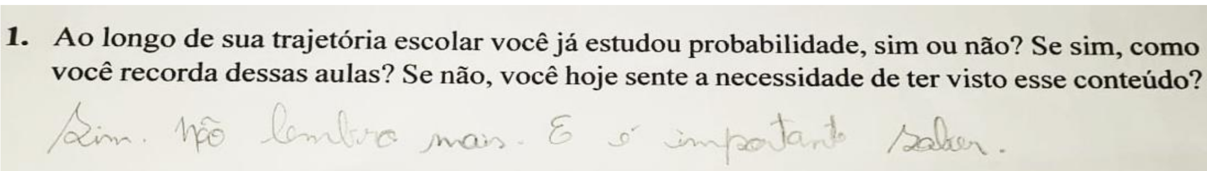

1. Ao longo de sua trajetória escolar você já estudou probabilidade, sim ou não? Se sim, como você recorda dessas aulas? Se não, você hoje sente a necessidade de ter visto esse conteúdo?

sim, só uma vez em que o professor nos explicou, e passou uma fórmula que era assim: $\boxed{P = \frac{\text{queria}}{\text{tudo}}}$, foi isso que eu sei sobre probabilidade.

Fonte: O autor, 2019.

De acordo com a fala do A31 mesmo respondendo que já tinha visto esse conteúdo ele afirma lembrar só da fórmula de probabilidade e ainda mostrar como aprendeu, percebe-se na fala dele o pouco contato com a probabilidade, visto que ele ficou restrito o uso da fórmula. Isso acontece porque segundo Rezende (2013, p.12), “o ensino de probabilidade que o professor recebe em sua formação inicial – quando existe- geralmente não é tratado de forma a privilegiar uma discussão metodológica na qual o desenvolvimento do pensamento probabilístico tenha papel de destaque” consequentemente é o que ocorre em sala de aula. Os professores ficam encontrando técnicas de memorização para os alunos compreenderem.

Figura 3: Resposta do A3 para questão 1.

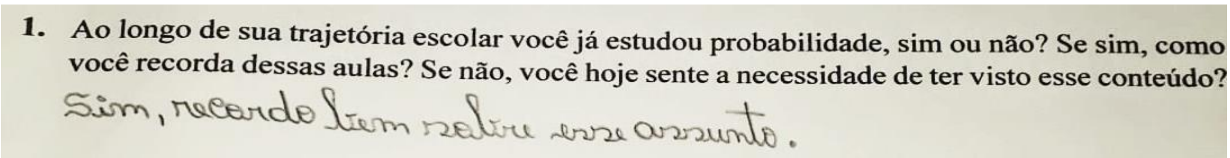

1. Ao longo de sua trajetória escolar você já estudou probabilidade, sim ou não? Se sim, como você recorda dessas aulas? Se não, você hoje sente a necessidade de ter visto esse conteúdo?

Sim. Não lembro mais. É só importante saber.

Fonte: O autor, 2019.

O A3 também afirma ter viso, apenas não lembra como foi esse contato com a probabilidade, mais afirma a importância de ser estudada, talvez ele tenha respondido dessa forma porque em algum momento ele se deparou com alguma situação de probabilidade e não soube resolver.

Figura 4: A7: Questão 1


1. Ao longo de sua trajetória escolar você já estudou probabilidade, sim ou não? Se sim, como você recorda dessas aulas? Se não, você hoje sente a necessidade de ter visto esse conteúdo?
Sim, recordo bem sobre esse assunto.

Fonte: O autor, 2019.

Esse aluno apesar de ser bem direto em sua resposta de dizer que estudou e lembra bem, não podemos dizer realmente se ele sabe a fundo devido sua resposta oferecer poucas informações que nos permitam analisar melhor essa afirmação, mas podemos relacionar o trabalho de Santos (2013) com a fala desse aluno em que ela percebeu que os alunos apresentavam os registros escritos de forma mais sucinta de que na comunicação oral, já que ele afirma recordar bem.

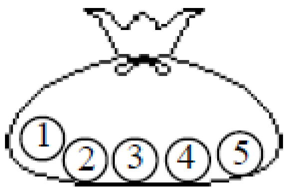
Para questão 1 optamos pela fala desses três alunos os quais julgamos interessante analisa suas respostas. Os demais que afirmaram já terem estudados tem respostas semelhantes a esses que vimos nas falas acima.

Percebemos na questão 1 que uma boa parte dos alunos já estudaram Probabilidade, mas comentam que lembram muito pouco desse conteúdo.

A seguir iremos analisar e discutirmos a questão 2.

Quadro 2: Questão 2

2. Num saco há cinco bolas todas iguais numeradas de 1 a 5, conforme se mostra na figura seguinte. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



Fonte: Fernandes, 1999, p. 365.

Observando o saco e considerando que se tira apenas uma bola, defina:

a) Um acontecimento possível (mas não certo);
b) Um acontecimento impossível;
c) Um acontecimento certo.

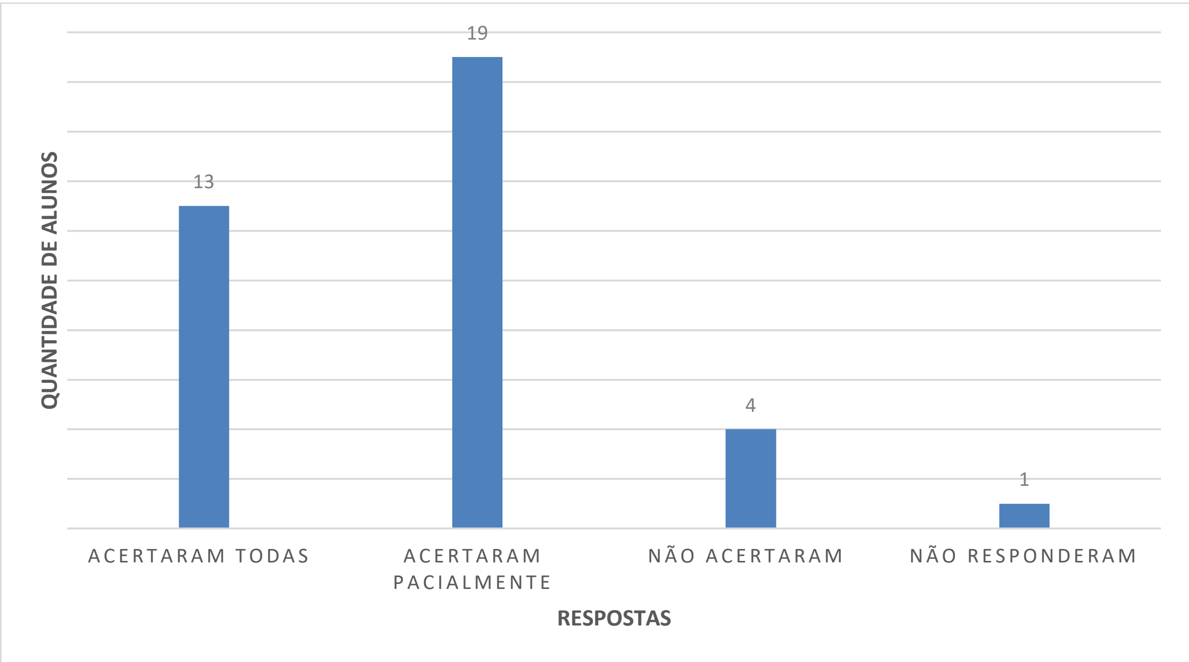
Essa atividade foi retirada do trabalho de Fernandes (1999, p.383) e teve o propósito de saber as concepções dos alunos em resolverem situações que envolvessem aleatoriedade e alguns acontecimentos que podem ocorrem em o evento.

Esperamos algumas respostas do tipo: para letra a) de saí uma bola ímpar, percebam que saí uma bola ímpar é um acontecimento possível mas não certo, pois não podemos garantir que sempre irá sai um bola ímpar primeiro. Na b) saí uma bola que não esteja no saco, por exemplo uma maior que 6. E para letra c) saí qualquer bola entre um e cinco.

Categorizamos da seguinte forma alunos que acertaram todas, acertaram parcialmente, não acertaram e não responderam.

Vejamos agora como eles se saíram:

Gráfico 2: Dados da questão 2.

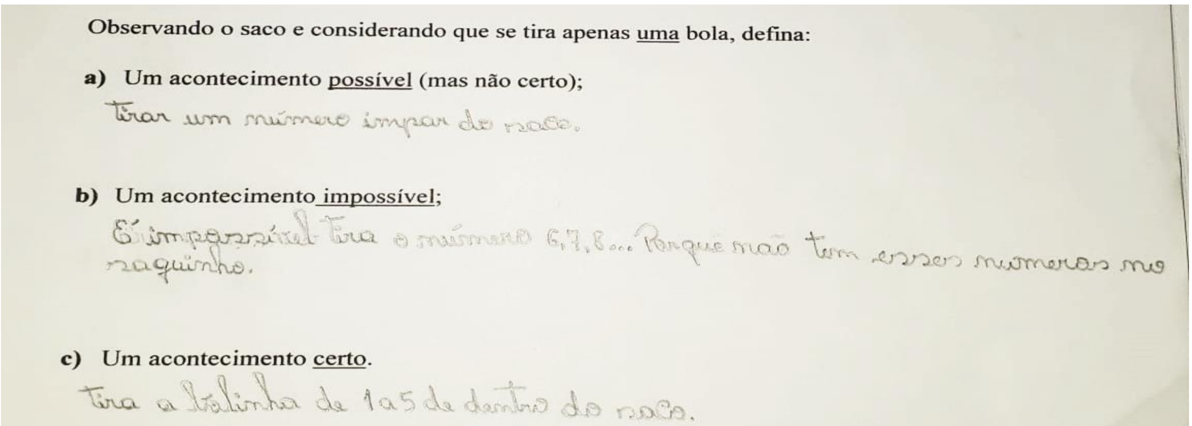


Fonte: O autor, 2019.

Na questão 2, 13 (36%) acertaram a letra a, b e c, 19 (52%) acertaram parcialmente, ou seja, acertaram pelo menos 2 alternativa e dentre alternativas (a), (b) e (c) obtiveram mais êxito na letra (b), 4 (10%) não acertaram e 1 (2%) não responderam. Aqueles que não acertaram foram os que fizeram todas alternativas mais de forma errada.

Vejamos a fala de alguns alunos nas figuras abaixo:

Figura 5: Resposta do A7 para questão 2.



Observando o saco e considerando que se tira apenas <u>uma</u> bola, defina:

a) Um acontecimento <u>possível</u> (mas não certo);

Tirar um número impar do saco.

b) Um acontecimento <u>impossível</u>;

É impossível tira o número 6,7,8... Porque não tem esses números no saquinho.

c) Um acontecimento <u>certo</u>.

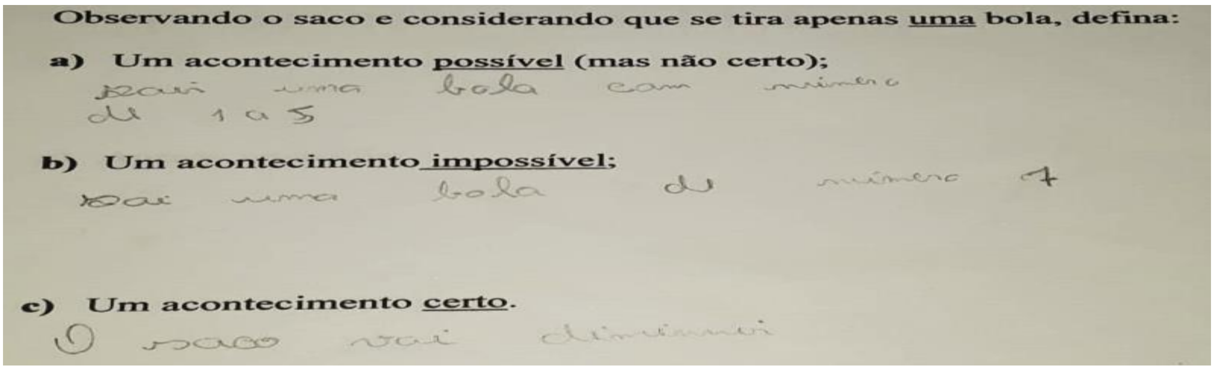
Tira a bolinha de 1 a 5 de dentro do saco.

Fonte: O autor, 2019.

O A7 em sua fala foi correto na sua resposta e aparentemente tem um certo conhecimento sobre aleatoriedade, analisando as alternativas, na letra (a) ele diz tirar uma bola ímpar, o que ele quis dizer com sua fala foi o seguinte: poderá sair uma bola ímpar mas também pode sair uma par, está correta sua colocação; na (b) de se tira uma bola maior que cinco, sua resposta foi também correta, visto que o saco só conta com número entre 1 e 5, na (c) tira uma bola entre um e cinco novamente sua resposta condiz com a pergunta da questão.

Os demais alunos que responderam de forma correta têm respostas semelhantes a do A7.

Figura 6: Resposta do A29 para Questão 2



Observando o saco e considerando que se tira apenas <u>uma</u> bola, defina:

a) Um acontecimento <u>possível</u> (mas não certo);

Sair uma bola com número de 1 a 5

b) Um acontecimento <u>impossível</u>;

Sai uma bola de número 7

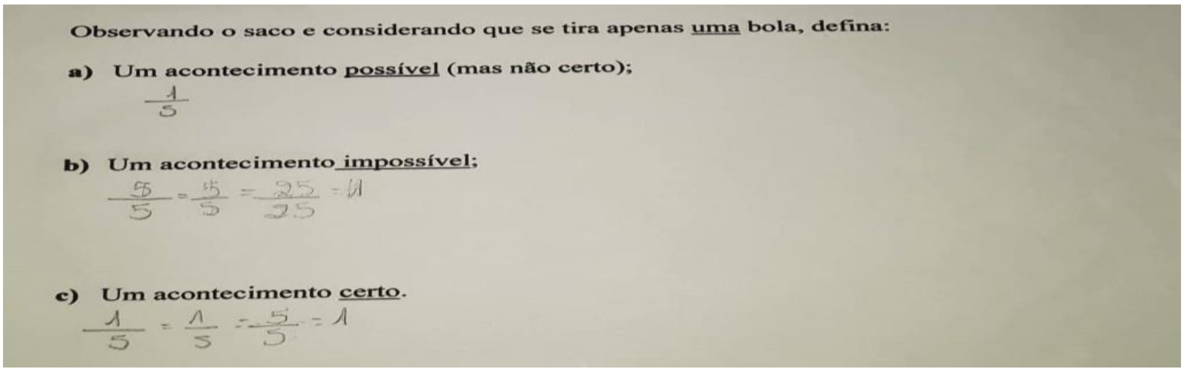
c) Um acontecimento <u>certo</u>.

O saco vai diminuir

Fonte: O autor, 2019.

O A29 não respondeu todas corretamente, na letra (a) apesar de ter respondido, ele equivocou-se nas alternativas. Observe que as resposta da letra (a) seriam uma possível resposta para letra c), já na letra b) de um sete sair, realmente é acontecimento impossível de acontecer, na letra c) que o saco vai diminuir, achamos ele confuso com essa afirmação.

Figura 7: Resposta do A27 para questão 2.



Fonte: O autor, 2019.

O A27 não acertou nenhuma das alternativas, ele até tentou responder pelo o conceito clássico de probabilidade onde é representado por o números de caso favoráveis dividido pelo número de casos possíveis, esse aluno talvez não tenha visto nada sobre aleatoriedade na sua trajetória escolar e o que tenha visto foi a utilização de formula para resolver questões que envolvam probabilidade, haja vista que todas as questões fez da mesma maneira.

O A5 foi o único que não respondeu nenhuma das alternativas.

Podemos concluir com base nas repostas dos alunos sobre aleatoriedade que eles ainda têm muita dificuldade em resolver questões desse tipo, alguns tiveram problemas em relacionar os acontecimentos cobrados na questão com o espaço amostral.

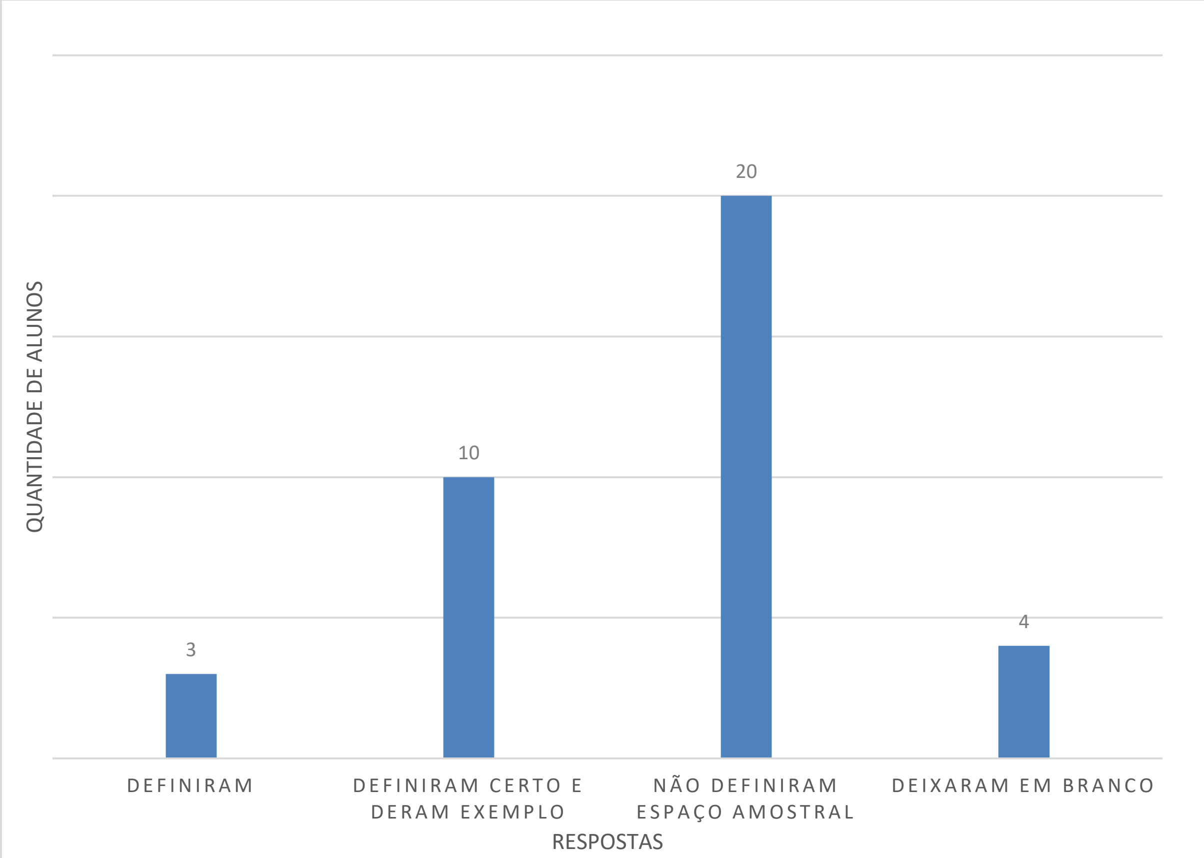
Adentramos a seguir na análise da questão 3.

Quadro 3: Questão 3

3. Explique o que é espaço amostral? E dê um exemplo.

Nesta questão nosso intuito era saber dos alunos qual (is) conceitos eles têm sobre espaço amostral. Categorizamos essa questão da seguinte forma: os alunos que definiram, definiram certo e deram exemplo, não definiram espaço amostral e os que deixaram em branco, vejamos agora como eles se saíram.

Gráfico 3: Dados da questão 3.



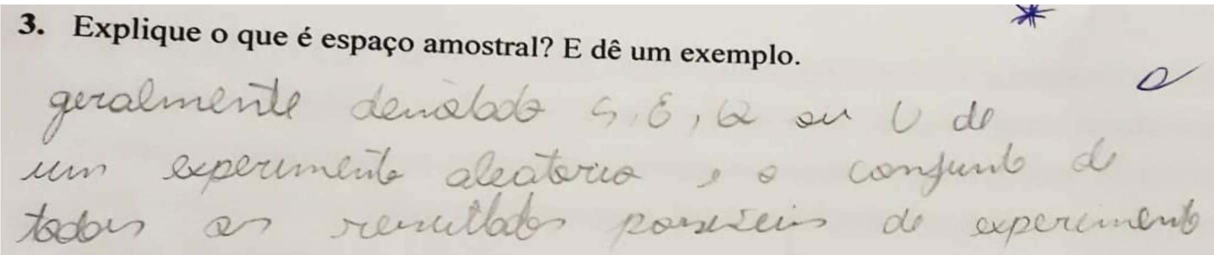
Fonte: O autor, 2019.

Observe no gráfico acima as respostas que obtivemos 3 (8%) definiram certo mas não deram exemplos, 10 (27%) definiram certo e deram exemplos, ou seja, esses além de darem a definição correta deram também os exemplos corretos, 20 (54%) não conseguiram definir espaço amostral corretamente e os 4 (10%) restantes deixaram em branco.

Segundo os dados obtidos percebe-se aqui a grande dificuldade deles na elaboração da definição, indicando a definição ou exemplo, exemplos esses que ficaram restrito a evento que podem ocorre em um dado ou em uma moeda.

Temos abaixo a fala de alguns alunos:

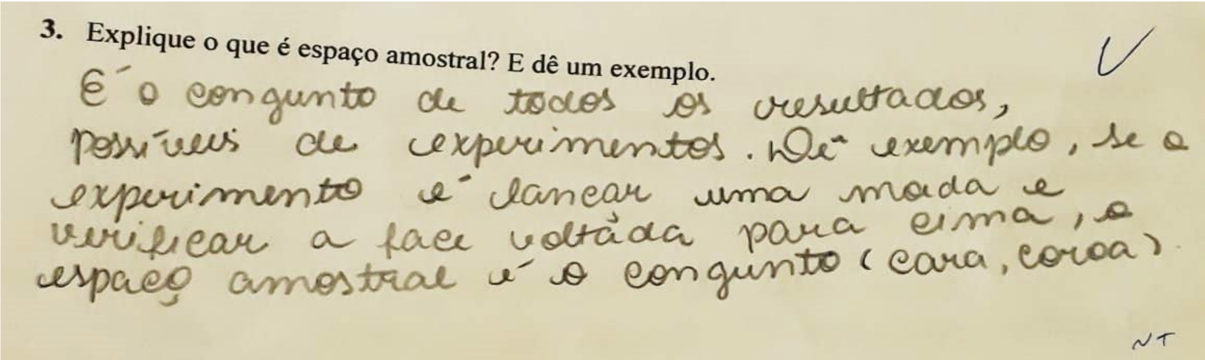
Figura 8: Resposta do A10 para questão 3.



Fonte: O autor, 2019.

O A10 deu a definição mais não deu exemplo, mais podemos perceber em sua fala que ele tem um certo conhecimento em relação a definição de espaço amostral, o caso dele não ter dado exemplo não implica dizer que ele saiba, talvez ele não quis fazer por acha que sua definição era suficiente.

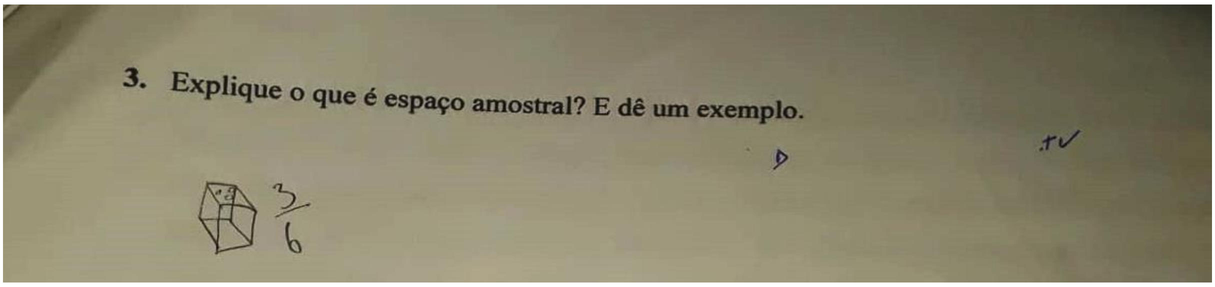
Figura 9: Respostado A15 para questão 3.


3. Explique o que é espaço amostral? E dê um exemplo.
É o conjunto de todos os resultados, possíveis de experimentos. Por exemplo, se o experimento é lançar uma moeda e verificar a face voltada para cima, o espaço amostral é o conjunto (cara, coroa).
NT

Fonte: O autor, 2019.

O A15 teve sua definição em comum com o aluno acima, a diferença foi que ele deu exemplo e o outro não. Ele além de dar uma moeda como exemplo fala nas possibilidades que poderá ocorrer no lançamento de uma moeda.

Figura 10: Resposta do A1 para Questão 3


3. Explique o que é espaço amostral? E dê um exemplo.
3/6

Fonte: O autor, 2019.

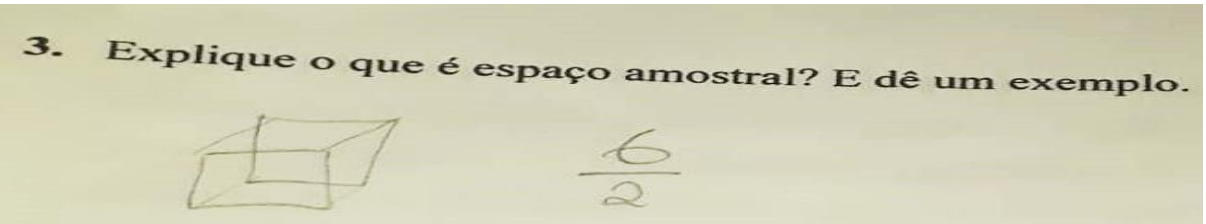
O A1 não definiu espaço amostral apenas deu um exemplo de um dado, e a probabilidade de um evento ocorrer.

Esses alunos talvez até saibam da definição de espaço amostral só que não consegui registrar por inscrito então tentou explicar com esse exemplo. Veja que ele fez o desenho de um dado, marcar três pontinhos em uma das faces do dado e em seguida dar a chance de o evento acontecer.

Esse aluno trás o conceito intuitivo e o laplaciano definido por Batanero (2005) aquele que diz o seguinte, em bora o sujeito não tenha um contato formal com a probabilidade ele adquirem certas habilidades devido a algumas experiências vivida, esse a probabilidade de evento ocorrer é representado por uma fração no qual o numerador representa os casos possíveis e o denominador os casos favoráveis.

O que podemos concluir é que apesar de não dar a definição ele consegue de forma intuitiva explicar, pois ele tem a concepção que em um dado o espaço amostral é 6 como o fez no exemplo acima. Agora suponha que ele queria que a face voltada para cima fosse 3 então desenho três pontinhos. Para representa o evento disse que a chance seria de 3/6, nesse caso ele se equivocou, pois a chance seria 1/6 de sair o número 3.

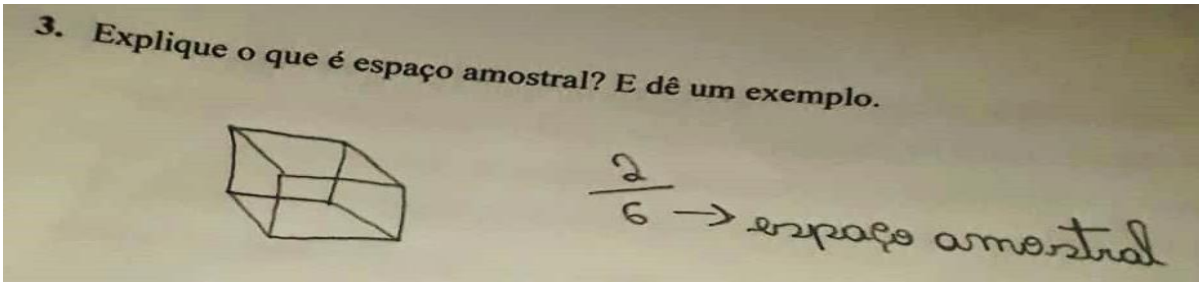
Figura 11: Resposta do A3 para questão 3.



Fonte: O autor, 2019.

O A3 tem resposta semelhante o aluno A1, o equívoco tá em ele representar os casos possíveis e os casos favoráveis e além disso não deu indício de qual evento ocorra.

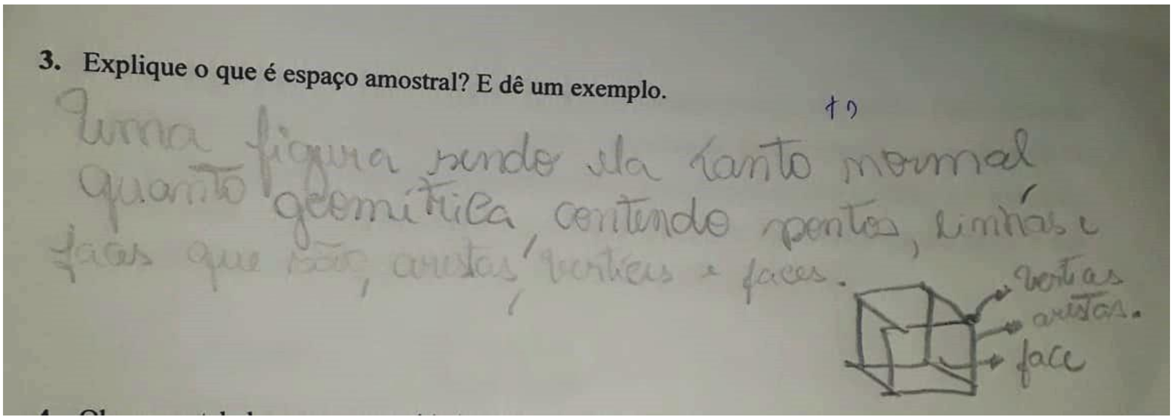
Figura 12: resposta do A7 para questão 3.



Fonte: O autor, 2019.

Já o A7 também não definiu, dar o mesmo exemplo dos dois anteriores mais análogo ao a A3 não fornece de forma clara o porquê de a chance do evento ser de 2/6.

Figura 13: Resposta do A24 para questão 3.



Fonte: O autor, 2019.

Diferente dos três anteriores mostrados nas figuras acima, A24 tentou explicar falando de figuras geométricas, dizendo os elementos que compõe um cubo como faces, arestas, vértices, mas também não defini, talvez ele não tenha intendido a pergunta.

Podemos verificar segundo a fala deles a respeito dessa questão o seguinte: Mesmo tendo cerca de 90% respondido ou pelo menos tentado, no geral tiveram muitas dificuldades em explicarem. Talvez uns dos problemas podem ser o que Santos (2013) aponta em seu trabalho em que os alunos têm muita de dificuldades em se expressarem por escrito, ao contrário do acontecem se pedimos para eles responderem oralmente.

Analisando questão 4 retirada da tese de Carvalho (2017, p.126) com adaptação.

Quadro 4: Questão 4

4. Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocados em uma caixa. O total de peças é 80.

	Triangulares	Circulares	Retangulares
Brancas	12	10	6
Pretas	15	11	7
Amarelas	8	9	2

Fonte: carvalho, 2017, p. 122.

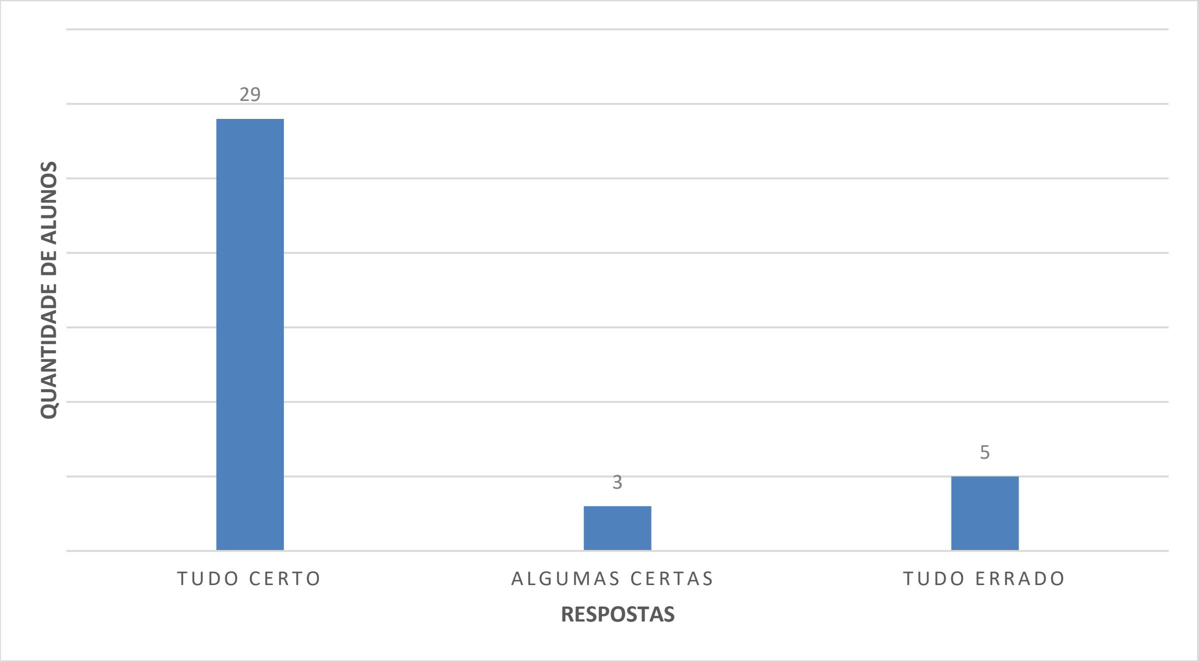
Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que a peça seja:

a) Amarela e retangular
b) Apenas amarela
c) Apenas retangular

Para item a) esperamos que os alunos percebessem a união dos dois eventos (amarelo e retangular) e em seguida fazer o cálculo, obtendo como resposta, 2/80 = 2,5%. No item b) realizar a soma da terceira linha (peças amarelas), tendo como resposta, 19/80 = 23, 75% e c) soma a terceira coluna (peças retangulares), tendo como resposta, 15/80 = 18,75%.

Categorizamos essas questões da seguinte forma (tudo certo, tudo errado, acertaram algumas).

Gráfico 4: Dados da questão 4.

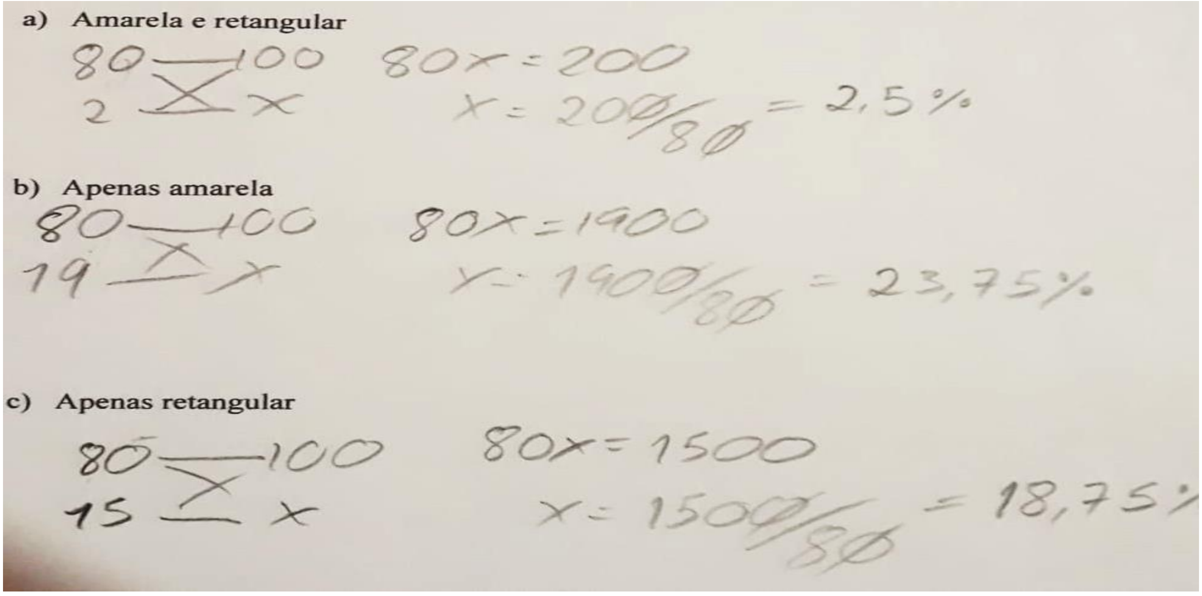


Fonte: O autor, 2019.

Na questão 4 temos 29 (78%) responderam tudo certo, 5 (13,5%) fizeram tudo errado e os 3 (8%) dentre as três alternativas proposta nos problemas acertaram duas.

Traremos a segui a fala de quatro alunos que achamos oportuno analisá-las.

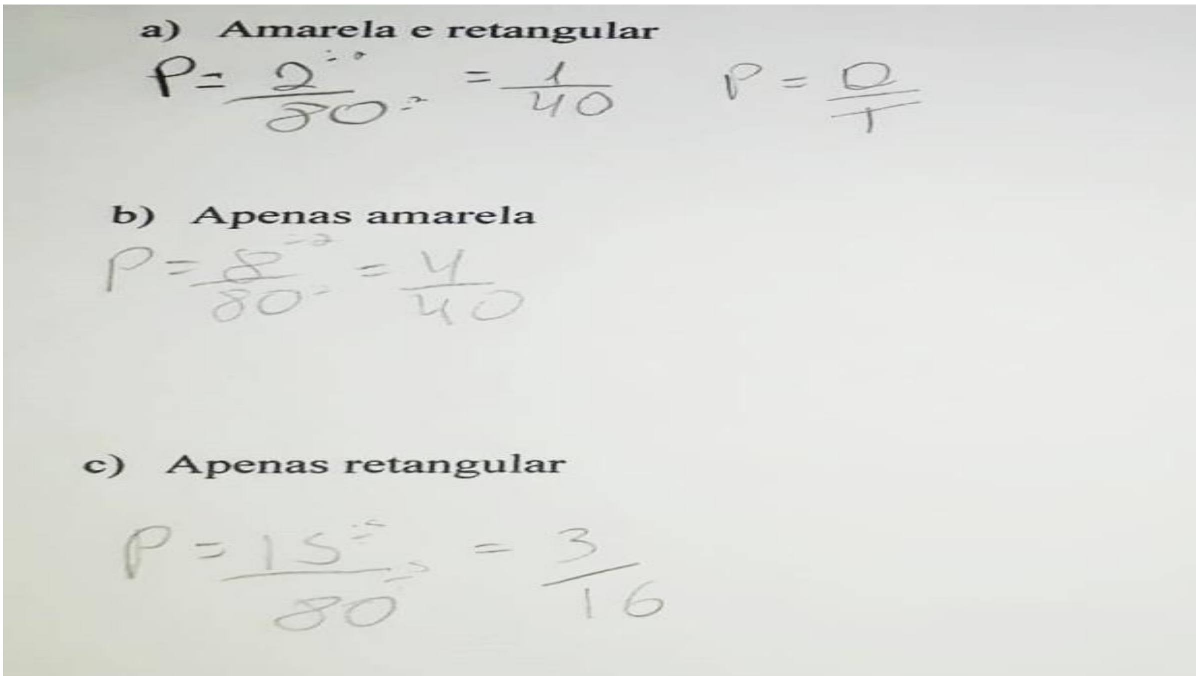
Figura 14: Resposta do A6 para questão 4.



Fonte: O autor, 2019.

O A6 conseguiu fazer os itens a), b) e c) como esperado, ele percebeu a união dos eventos, o espaço amostral e em seguida fez os cálculos obtendo as probabilidades de cada eventos.

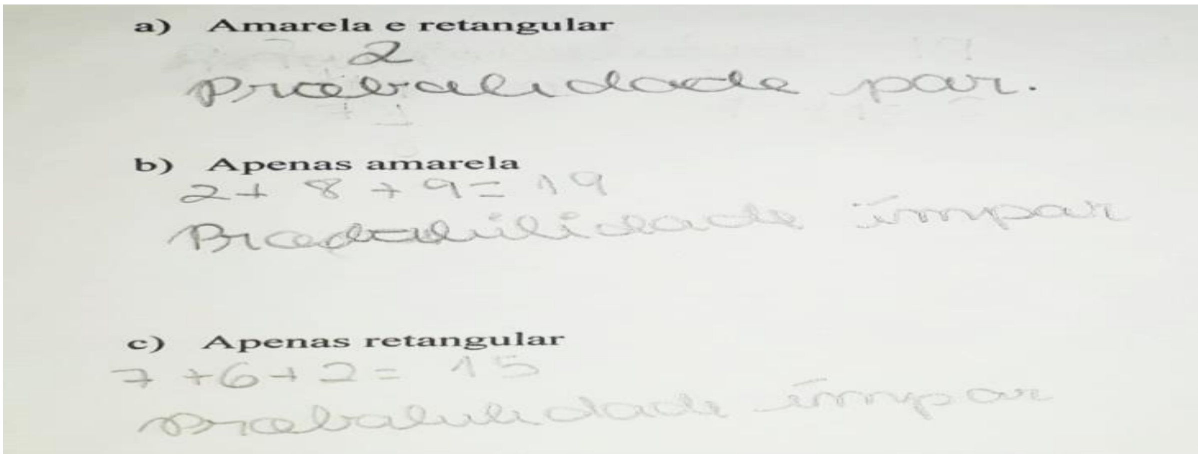
Figura 15: Resposta do A13 para questão 4.



Fonte: O autor, 2019.

O A13 cometeu alguns equívocos, na letra a) ele percebe a união dos eventos e em seguida desenvolve o cálculo como esperado. Na b) não somou a terceira linha como era esperado e na c) somou a terceira coluna como também fez o cálculo corretamente.

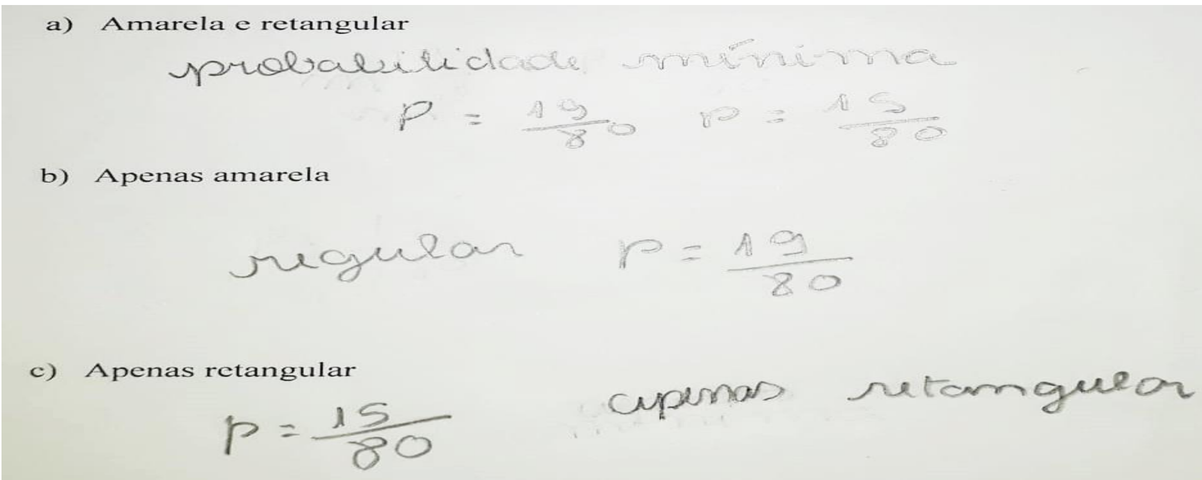
Figura 16: resposta do A31 para questão 4.



Fonte: O autor, 2019.

O A31 até enxerga a união dos eventos e as condições estabelecidas para letras b) e c) de soma a terceira linha (peças amarelas) e soma terceira coluna (peças retangulares) respectivamente, mas não realizar o cálculo da ocorrência do evento apenas diz ser par ou ímpar.

Figura 17: Resposta do A16 para questão 4.



Fonte: O autor, 2019.

O A17 fez as letras b) e c) de forma correta, o equívoco foi a letra a) talvez ele não tenha entendido o comando da questão e associou o resultado da a) seria a probabilidade encontrada na letra b) e da c).

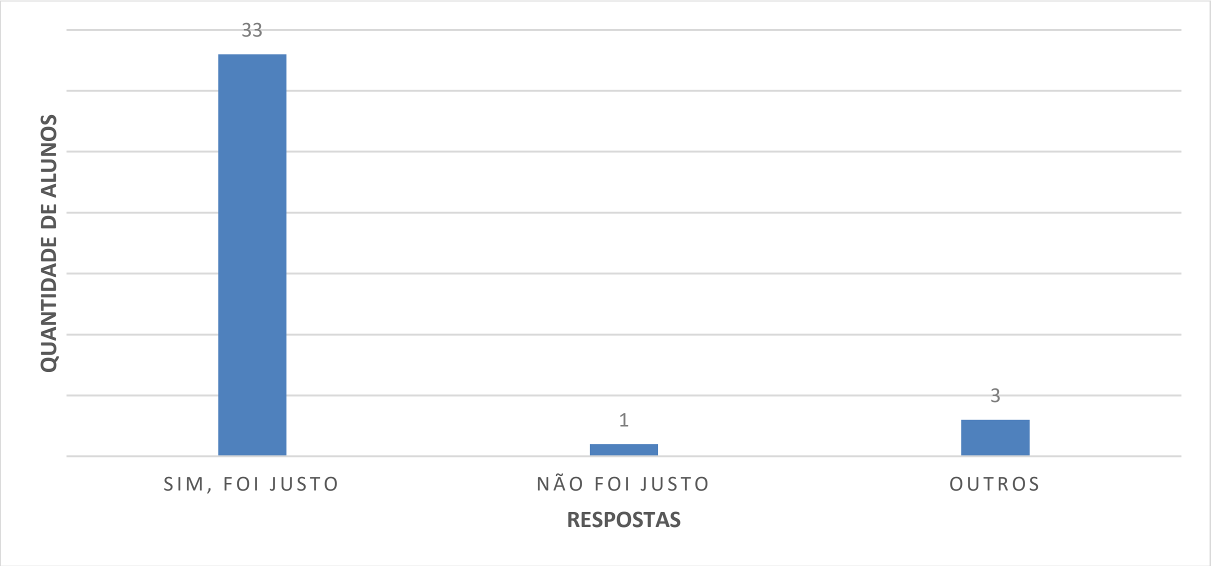
Analisando e discutindo a questão 5.

Quadro 5: Questão 5

5.	(Biajoti, 2013, p.34) Suco ou refrigerante? Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se a soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco. Será que Paulo fez uma proposta justa a seu colega? Explique.

Questão foi retirada da dissertação de mestrado de Biajoti (2013), teve como objetivo identificarmos se eles conseguiam observarem a ocorrência de eventos que normalmente fazem parte do cotidiano, como lançarmos duas moedas e serem perguntado se chance de sai par ou ímpar é a mesma. Pretendemos ter como resposta que saí o número par seja maior, porque se saí par e ímpar (2 + 5 = 7) ímpar, se saí par e par (4 + 6 = 10) par, e sai ímpar e ímpar (1 + 3 = 4) par, percebemos que a chance de saí par é maior. Achamos conveniente em categorizarmos em alunos que acham sim, serem justo a proposta, os que não acharam justo e os outros que foram aqueles que deixaram em branco, ou não deram nenhuma explicações, apenas dizem sim ou não.

Gráfico 5: Dados da questão 5.

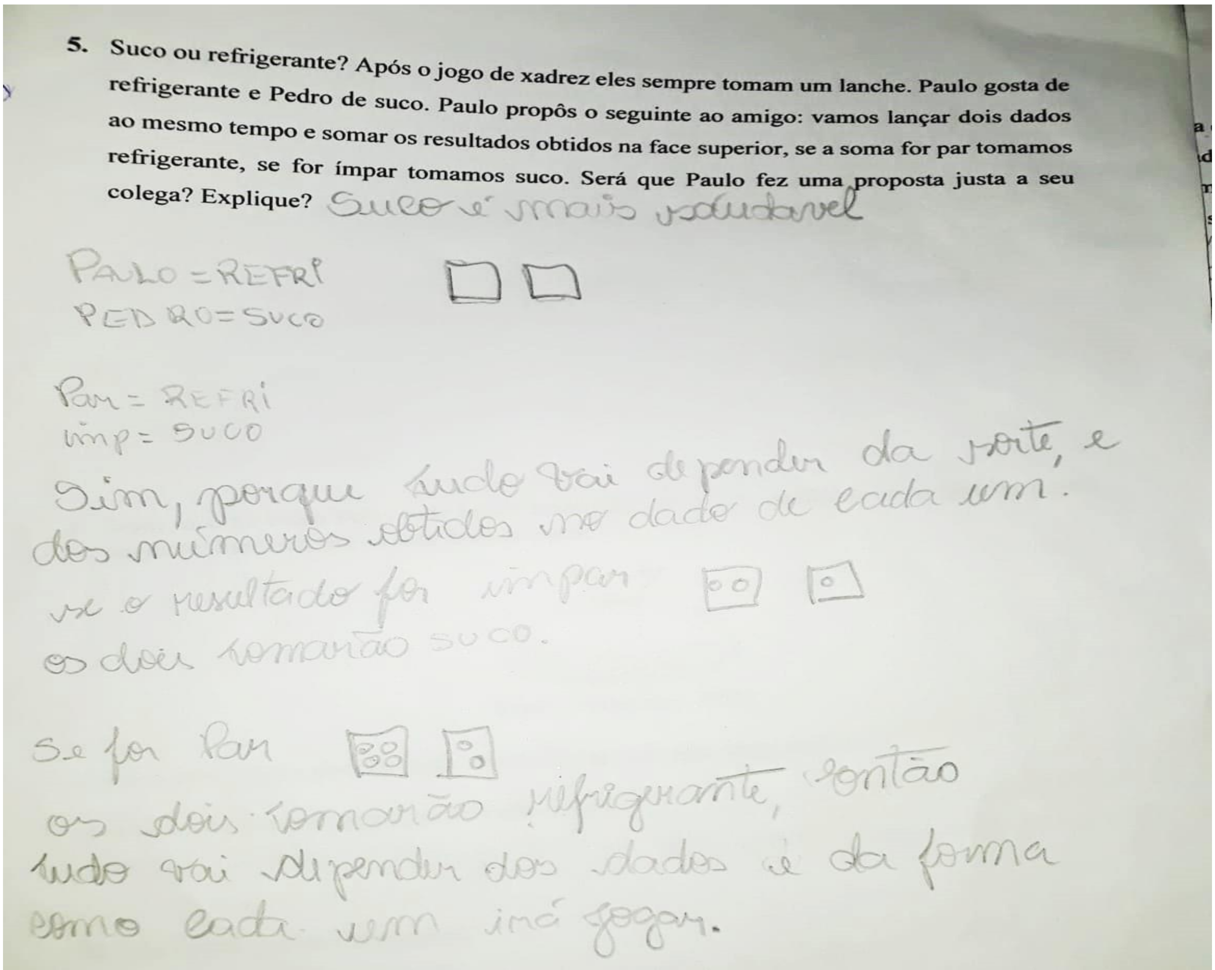


Fonte: O autor, 2019.

Na questão 5 obtivemos um quantitativo de 33 (89%) de alunos que acharam a proposta justa, 1 (2%) acharam não serem justa e 3 (8%) deram outras respostas.

Iremos ver a fala de dois alunos. Um que diz ser justa e outro não ser justa.

Figura 18: Resposta do A24 para questão 5.



5. **Suco ou refrigerante? Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se a soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco. Será que Paulo fez uma proposta justa a seu colega? Explique?** Suco é mais saudavel

PAULO = REFRI
PEDRO = SUCO

Par = REFRI
imp = SUCO

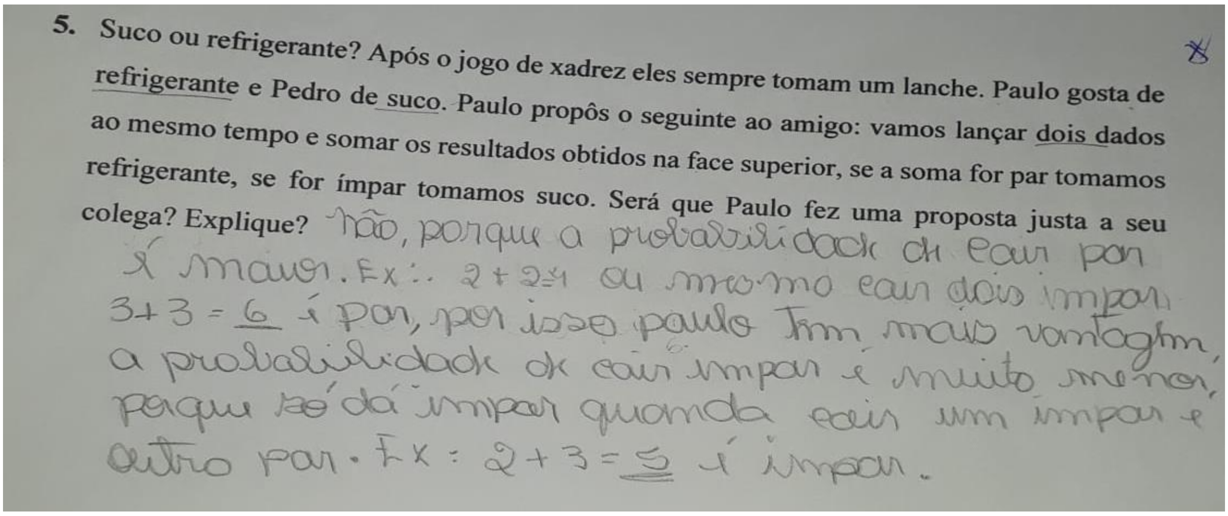
Sim, porque tudo vai depender da sorte, e dos números obtidos no dado de cada um.
se o resultado for impar
os dois tomarão suco.

Se for Par
os dois tomarão refrigerante, então
tudo vai depender dos dados e da forma
como cada um irá jogar.

Fonte: O autor, 2019.

O A24 afirma ser justo e até fala que irá depender da sorte, não diferente desse aluno os demais que afirmaram serem justam se justificam dizendo que a chance é igual para ambos, a chance será de 50% para cada um, o resultado aqui foi o mesmo já esperado no trabalho de Biajoti (2013) que eles diriam que ambos teriam a mesma chance

Figura 19: Resposta do A27 para questão 5.



5. Suco ou refrigerante? Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se a soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco. Será que Paulo fez uma proposta justa a seu colega? Explique? Não, porque a probabilidade de cair par é maior. Ex: 2+2=4 ou mesmo cair dois impar 3+3 = 6 é par, por isso paulo tem mais vantagem, a probabilidade de cair impar é muito menor, porque só dá impar quando cair um impar e outro par. Ex: 2+3 = 5 é impar.

Fonte: O autor ,2019.

O A27 fez como era esperado, disse em não ser susta a proposta e deu exemplo do porquê não ser.

Para Fernandes (1999) os resultados apontam para uma grande dificuldade ainda dos alunos com noção de aleatoriedade, união de eventos, espaço amostral e alguns conceitos de probabilidades.

Podemos observarmos que os exemplos dados por eles eram sempre de cubo ou a moeda, talvez realmente não sabem outros que não seja dados ou cubos.

Outro fato, não menos importante de salientar foi como eles responderam a maioria das questões. Foi mais frequente o conceito laplaciano de Batanero (2005) que adotamos para dar embasamento no nosso trabalho, em que a probabilidade é dada por uma fração em que o numerador representa os casos favoráveis e o numerador os casos possíveis de um evento acontecer.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa partiu da inquietação de verificar qual dificuldade que os alunos do terceiro ano do ensino médio têm em resolverem problemas probabilísticos. Essa curiosidade se deu pelo fato de hoje em dia cada vez mais usamos a probabilidade tanto na área da matemática como em outras áreas das ciências. Então achamos importante sabermos dos alunos que estão saindo da educação básica quais as dificuldades e concepções sobre ela.

Antes procuramos pesquisa em artigos, teses e documentos oficiais o que estão sendo estudados e orientados para o ensino e aprendizagem de Probabilidade. Alguns autores como Santos (2013) apontam para que sejam utilizados maneira mais dinâmica com atividades que envolvam situações do cotidiano e que eles possam responderem de maneira espontâneas oralmente, pois segundo sua pesquisa os alunos muitas vezes têm dificuldades em registram por escrito o que sabem.

Para dar embasamento a nossa pesquisa escolhemos os conceitos de Batanero (2005), conceitos esses que achamos de suma importância para o ensino de probabilidade.

Ficou perceptível que os alunos não tiveram um contato contínuo com a probabilidade e com isso foi contribuído para que eles chegassem ao terceiro ano do Ensino Médio com pouca compreensão desse conteúdo qual julgamos ser muito importante saberem, visto que a probabilidade está em praticamente tudo em nosso cotidiano.

Observamos que, na sua maioria eles conseguiam identificar o espaço amostral corretamente, mas se equivocavam em resolver o problema por completo, ou seja, ao pedimos à eles para dar um acontecimento possível (mas não certo), impossível e certo, eles demostraram confusão nas suas respostas, nessa atividade 19 (52%) dos 37 alunos não conseguirem fazerem por completo a questão.

Foram identificados que eles estão restritos a resolverem problemas utilizando conceito laplaciano, e o intuitivo, porque alguns alunos, como o A1, que mesmo não dando a definição de espaço amostral que a situação solicitava, tentou explicar de forma intuitiva, visto que aparentemente ele não tinha a definição formal de probabilidade.

Algumas observações que achamos pertinentes abordarmos foram que pouco alunos deram respostas como eram esperados para as questões um, dois, três, quatro e cinco e um ponto importante que notamos também nenhum teve deles tiveram respostas como esperados em todas as questões, e salientamos também que entres todos que participaram da pesquisa nenhum fizeram mais de três questões corretas e o um dentre eles foi o que teve maior dificuldade, das cinco questões fez apenas uma e as demais deixou em branco.

Certos fatores podem ter contribuído para que os alunos chegassem ao final da Educação Básica com pouco conhecimento de probabilidade podemos destacarmos professores não capacitados para trabalharem esse conteúdo, falta de atividades que explorem o cotidiano dos alunos, falta de regularidade nos livros didáticos segundo dados apontados por Carvalho, Silva e Paraíba (2016), as poucas vezes que é trabalhado em sala de aula as atividade é sempre voltada para situações que envolvam dados ou moedas algo que ficou bem claro nas respostas deles, pois ao pedimos para darem alguns exemplo de algum espaço amostral eram os únicos apontados, com certeza esse fato está atrelado as aulas que tiveram, tudo isso colaboram para a não aproximação do aluno com a probabilidade.

Diante do exposto, nossos objetivos de verificar as dificuldades dos alunos resolverem problemas probabilísticos foram alcançados, no qual detectamos a grande dificuldades deles em conceitos de probabilidades, eventos, espaço amostral, aleatoriedades, contudo essa dificuldade está relacionada ao pouco contato quer tiveram com ela na educação básica, uma vez que apesar de os documentos oficiais orientarem a importância de ser trabalhado em sala de aula, na prática não é o que parecer ao analisamos os conhecimentos desses alunos.

Esperamos que nosso trabalho tenha contribuído de maneira significativa e possa auxiliar em futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

AMÂNCIO, Juliana Ramos. **Planejamento e Aplicação de uma Sequência Didática Para o Ensino de Probabilidade no Âmbito Do PIBID.** Dissertação (Mestrado) –Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

BATANERO, Carmen. **Significados de La Probabilidad en La Educación Secundária.** Revista Latinoamericana de Matemática Educativa - Relime vol. 08. num 3. p. 247-263. Nov. 2005.

BIAJOTI, Emerson Donizeti. **Experimentos probabilísticos: noções de probabilidades no ensino fundamental II.** 2013. 107 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e cultura (MEC). Secretaria da Educação Básica (SEB)**. Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. 2006. Brasília: MEC/SEB.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC):** Ensino Médio. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** *Matemática.* (1º e 4º série). v.3. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** *Matemática.* (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v.3. Brasília: MEC, 1997.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. **Um Estudo Sobre os Conhecimentos Didáticos-Matemáticos de Probabilidade com Professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental.** Tese (Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo. Programa de Pós-Graduação Em Educação Matemática. São Paulo, 2017.

CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de.; SILVA, César Diogo Bezerra da.; PARAÍBA, Tiago dos Santos. **Um Estudo Sobre Probabilidade nos Livros Didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental:** Significados, Representações E Contextos. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo: XII ENEM, 2016.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Conceitos probabilísticos:** quais contextos a história nos aponta? In: REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.3, p.50-67, UFSC: 2007.

FERNANDES, José Antônio da Silva. **Intuições e Aprendizagem De Probabilidades:** Uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9º Ano de Escolaridade. Tese (Doutorado) – Universidade do Minho. Metodologia do Ensino da Matemática, Braga, 1999.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6ª ed. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2008.

GODOY, Arilda Schmidt. **Uma revisão histórica dos principais autores e obras que refletem esta metodologia de pesquisa em Ciências Sociais.** Revista de Administração de Empresas. São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63. Mar./Abr. 1995

JUNQUEIRA, Ana Lúcia N.; CAMPOS, Maria Lucian Tavares de; WATABE, Leika. **Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica:** o jogo da roleta. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatísticas e probabilidade na educação infantil.** Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Educação. Campinas –SP, 2003.

LOPES, José Marcos. **Uma proposta didático-pedagógica para o estudo da concepção clássica de probabilidade.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, p. 607-628, ago. 2011.

PEREIRA, Polion Barboza de Souza e Silva.; NASCIMENTO, Geovana Ferreira do.; SIBO, Gabriel de Amaral.; GOULART, Amari. **Definição Clássica e Definição Frequentista de Probabilidade:** Uma Abordagem Em Sala De Aula. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, São Paulo: XII ENEM, 2016.

PERNAMBUCO, Secretária de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife, 2012.

REZENDE, Fernanda Monteiro de Castro. **Desenvolvimento Profissional e Pensamento Probabilístico: estudo do processo vivido por um grupo de professores de Matemática de Conselheiro Lafaiete (MG).** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Ouro Preto, 2013.

SANTANA, Michaelle Renata Moraes de. **O acaso, o provável, o determinístico: Concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, PE. Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2011.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental.** Secretária Estadual de Ensino do Estado de São Paulo (SEE/SP) e Instituto de Ensino Superior de Itapira (IESI), 2013.

VIALI, Lorí. **Algumas considerações sobre a origem da teoria da Probabilidade.** Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 8, nº 16 (outubro/2008 -março/2009), p. 143-153, 2008.

ANEXO A - QUESTIONÁRIO

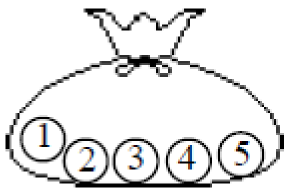
Aluno: ____.

Idade: ___________.

Sexo:____________.

1. Ao longo de sua trajetória escolar você já estudou probabilidade, sim ou não? Se sim, como você recorda dessas aulas? Se não, você hoje sente a necessidade de ter visto esse conteúdo?

2. Num saco há cinco bolas toda iguais numeradas de 1 a 5, conforme se mostra na figura seguinte. Sem ver, tira-se uma bola do saco.



Fonte: Fernandes, 1999, p. 365.

Observando o saco e considerando que se tira apenas uma bola, defina:

a) Um acontecimento possível (mas não certo);

b) Um acontecimento impossível;

c) Um acontecimento certo.

3. Explique o que é espaço amostral? E dê um exemplo.

4. Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocados em uma caixa. O total de peças é 80.

	Triangulares	Circulares	Retangulares
Brancas	12	10	6
Pretas	15	11	7
Amarelas	8	9	2

Fonte: carvalho, 2017, p. 122.

Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que a peça seja:

a) Amarela e retangular
b) Apenas amarela
c) Apenas retangular

5. (Biajoti, 2013, p.32) Suco ou refrigerante? Após o jogo de xadrez eles sempre tomam um lanche. Paulo gosta de refrigerante e Pedro de suco. Paulo propôs o seguinte ao amigo: vamos lançar dois dados ao mesmo tempo e somar os resultados obtidos na face superior, se a soma for par tomamos refrigerante, se for ímpar tomamos suco. Será que Paulo fez uma proposta justa a seu colega? Explique?