UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

JOÃO PAULO DE LIMA REGO

INVESTIGANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO EM ALUNOS DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CARUARU
2019

JOÃO PAULO DE LIMA REGO

INVESTIGANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO EM ALUNOS DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a graduação em Licenciatura em Matemática.

Área de concentração:

Ensino/Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Simone Moura Queiroz

CARUARU

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

R343i Rego, João Paulo de Lima.
Investigando o conceito de função em alunos do 9° ano do ensino fundamental. / João Paulo de Lima Rego. – 2019.
73 f. il. : 30 cm.

Orientadora: Simone Moura Queiroz.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Álgebra. 2. Funções. 3. Ensino fundamental. 4. Educação matemática. I. Queiroz, Simone Moura (Orientadora). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-066)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática - Licenciatura

INVESTIGANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO EM ALUNOS DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

JOÃO PAULO DE LIMA REGO

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e APROVADO em 30 de maio de 2019.

Banca examinadora:

_____
Profa. Simone Moura Queiroz
(Orientadora)

_____
Profa. Lidiane Pereira de Carvalho
(Examinadora Externa)

_____
Prof. Marcilio Ferreira dos Santos
(Examinador Interno)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me dar forças através das minhas orações na busca dos meus objetivos e nos momentos mais difíceis da minha vida pessoal e da acadêmica.

Aos meus pais, por sempre acreditarem que meus sonhos iriam ser realizados através dos meus esforços, principalmente ao meu pai João pela disponibilidade de sempre está deslocando-se comigo durante os vestibulares que fiz antes de entrar na UFPE e por está sempre preocupado com meus estudos, pois ele só conseguiu estudar até a antiga quarta série e sempre teve o sonho de um dia continuar seus estudos, mas por vir de uma família muito humilde e com muitos irmãos em sua família, infelizmente teve que deixar a escola e ir trabalhar desde cedo para poder sobreviver junto com seus familiares. De antemão, agradeço imensamente tanto ao meu pai e minha mãe Maria, por está ao meu lado em todas as fases da minha vida.

A minha avó Nicinha, por sempre me colocar em suas orações em todas as provas de vestibulares que ia fazer, pedindo a Deus e a Nossa Senhora que intercedessem por mim naquele momento de grande tensão, não só nessas provas, mas sim em todos os caminhos que percorri até momento.

A minha esposa Eduarda, que quando entrei na Universidade ainda namorávamos e ela não gostava da ideia em que todas as noites de segunda a sexta eu estaria ocupado indo estudar, mas depois que ela se acostumou, começou a se interessar e interagir com minhas atividades acadêmicas.

A minha filha Fernanda, por nascer nessa fase da minha vida durante meus estudos nesta instituição, e em alguns momentos mais complicados que passei na UFPE, sempre olhava para ela e a partir disso, me fortalecia mais ainda perante o rumo que tomei.

Aos meus irmãos Victor e Jônatas, por se espelharem em mim no sentido de um dia conseguirem entrar em um curso de nível superior, sendo alcançado por Victor, pois o Jônatas ainda é estudante do ensino fundamental.

Aos meus amigos, vizinhos e familiares que participaram de alguns momentos durante minha vida escolar e acadêmica. Exclusivamente, a todos que fizeram e faz parte da turma de Matemática-Licenciatura 2015.1, na qual sempre vou fazer parte, e levarei todas as experiências vivenciadas dentre e fora da sala de aula por toda minha vida.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, sendo eles, da educação infantil, ensino fundamental I e II, ensino médio, cursinho pré-vestibular, e os grandes professores da UFPE.

A minha orientadora Profª. Drª. Simone Moura Queiroz, por está sempre me auxiliando na elaboração do meu Trabalho de Conclusão de curso, além de contribuir bastante com suas aulas nas disciplinas de Estágio Supervisionado II e na eletiva de Lógica, nas quais, presenciei todas as suas reflexões sobre a Educação Matemática e os conteúdos abordados nestes componentes curriculares.

E por fim, agradeço a todos que fazem parte da Universidade Federal de Pernambuco – Campus Agreste, e levarei para sempre todos os ensinamentos que adquiri por lá.

RESUMO

Na educação básica encontramos em alguns estudantes, dificuldades na compreensão de conteúdos abordados na disciplina de matemática. Destacamos o estudo de funções polinomiais do 1° grau, pois alguns concluem o ensino médio sem compreender os conceitos básicos para o entendimento de funções. Assim como as noções de interpendência comentada por Caraça (1951) em nosso trabalho e as diferenças entre as definições de incógnitas e variáveis. Nossa pesquisa visa investigar as concepções da álgebra em alunos do 9° ano do Ensino Fundamental com relação ao conceito de funções polinomiais do 1° grau. Desta forma, realizamos nossa pesquisa em duas turmas de 9° ano de uma escola da rede pública municipal localizada no agreste pernambucano. Adotamos como instrumento para produção de dados o questionário, em que aplicamos com 79 estudantes dessa instituição. Usamos as concepções da álgebra de Usiskin (1995) como suporte na análise e discussão dos dados. Por meio desta pesquisa observamos que os alunos fazem pouco uso da álgebra na resolução de problemas voltados a funções. Destacando assim, o uso da aritmética generalizada para determinar tais soluções.

Palavras-chave: Álgebra. Variáveis. Função polinomial do 1° grau. Anos finais do Ensino Fundamental. Educação Matemática.

ABSTRACT

In basic education we find in some students difficulties in understanding the contents addressed in the mathematics discipline. We highlight the study of polynomial functions of the 1st degree, because some conclude high school without understanding the basic concepts for the understanding of functions. As well as the notions of interpendence commented on by Caraça (1951) in our work and the differences between the definitions of unknowns and variables. Our research aims to investigate the conceptions of algebra in students of the 9th year of elementary school in relation to the concept of polynomial functions of the 1st degree. In this way, we conducted our research in two classes of 9th grade of a public school in the city of Pernambuco. We adopted as instrument for data production the questionnaire, in which we apply with 79 students of this institution. We use the conceptions of Usiskin's algebra (1995) as support in the analysis and discussion of the data. Through this research, we observed that students make little use of algebra in solving problems related to functions. Highlighting like this, the use of generalized arithmetic to determine such solutions.

Keywords: Algebra. Variables. Polynomial functions of the 1st degree. Years of Elementary School. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tábula Babilônica (Plimpton) 17
Figura 2 – Representação Gráfica de Oresme 18
Figura 3 – Série de Fourier 22
Figura 4 – Balança de Pratos 30
Figura 5 – Resposta do aluno A8 48
Figura 6 – Resposta do aluno A9 48
Figura 7 – Resposta do aluno 17 49
Figura 8 – Resposta do aluno 21 50
Figura 9 – Resposta do aluno 40 50
Figura 10 – Resposta do aluno A58 na questão 2a 54
Figura 11 – Resposta do aluno A17 em 2b 56
Figura 12 – Resposta do aluno A3 em 2b 56
Figura 13 – Respostas do aluno A9 no quadro da questão 3 58
Figura 14 – Justificativa do aluno A55 em 3a 60
Figura 15 – Resposta do aluno A50 em 3b e 3c 62
Figura 16 – Resposta do aluno A58 em 3b e 3c 62
Figura 17 – Resposta do aluno A8 em 4b 66
Figura 18 – Resposta do aluno A40 em 4b 66
Figura 19 – Resposta do aluno A58 em 4b 67

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Respostas da primeira parte da questão 1 47
Quadro 2 – Resultados da letra “a” da questão 2 51
Quadro 3 – Respostas da letra “b” da questão 2 55
Quadro 4 – Resultados obtidos a partir do quadro da questão 3 57
Quadro 5 – Total dos alunos que responderam as questões 3b e 3c 62
Quadro 6 – Resultados da questão 4 63

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Percentual da primeira parte da questão 1 47
Gráfico 2 – Explicações sobre a diferença entre incógnitas e variáveis 49
Gráfico 3 – Percentual dos resultados da última parte da questão 1 51
Gráfico 4 – Respostas da letra “a” da questão 2 52
Gráfico 5 – Principais motivos pelos erros da questão 2a 53
Gráfico 6 – Percentual dos resultados da letra b da questão 2 55
Gráfico 7 – Motivos dos erros da questão 2b 56
Gráfico 8 – Resultados referentes ao quadro da questão 3 58
Gráfico 9 – Respostas referentes à questão 3a 59
Gráfico 10 –Percentual dos resultados das questões 3b e 3c 61
Gráfico 11 –Resultados da letra “a” da questão 4 64
Gráfico 12 –Técnicas usadas pelos 73 alunos que acertaram a questão 4a 65
Gráfico 13 –Resultados da questão 4b 66
Gráfico 14 –Resultados da questão 4c 67
Gráfico 15 –Técnicas usadas pelos 42 alunos que responderam corretamente a questão 4c 68

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

3 ENSINO DE FUNÇÕES 25

4 PESQUISAS RELACIONADAS A FUNÇÕES 35

5 METODOLOGIA DA PESQUISA 41

5.1 SUJEITOS DA PESQUISA 42

5.2 OBJETIVOS E PROPÓSITOS DAS QUESTÕES 43

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 47

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 69

REFERÊNCIAS 71

1 INTRODUÇÃO

O ensino de funções é um dos conteúdos que precisa de mais atenção no Ensino Médio, pois é a partir do 1° ano que os professores começam a formalizar seus conceitos com a noção de conjuntos. Sendo assim, para garantir o desenvolvimento dos ingressantes desse novo ciclo, é preciso que eles compreendam o processo da construção do seu conceito.

Trabalhar com funções na Educação Básica acaba sendo um desafio para alguns professores, pois os alunos que possuem dificuldade com a álgebra terão esta intensificada, quando os professores começarem a introduzir as primeiras noções de funcionalidade. Desse modo, alguns professores começam a criar estratégias para sua compreensão como, por exemplo, antes de expor sua definição formal, começar apresentando situações sobre o assunto, buscando fazer algumas relações com o cotidiano de seus alunos.

Diante das estratégias utilizadas para o ensino de função, os alunos ainda mostram dificuldades na resolução de problemas e na compreensão de seu conceito. Além disso, alguns deles não veem função nos anos finais do Ensino Fundamental, criando assim, um impacto no início do seu ensino médio.

Minha justificativa a esta pesquisa advém de observações (empíricas) vivenciadas ou observadas. Nesse processo de ensino e aprendizagem, tive contato com alguns pais que me procuraram para dar aulas de reforço em matemática para seus filhos. E com relação as minhas experiências no reforço, notei que a maior dificuldade encontrada nos alunos do 1° ano do ensino médio estava relacionada as noções básicas de funções.

Diante disto, perguntava a esses estudantes se eles tiveram contato com funções no 9° ano do Ensino Fundamental. Alguns disseram que não, enquanto outros falaram que viram, porém não compreenderam esse assunto no ano anterior. Dessa forma, sempre questionei onde estava a falta desses alunos com relação à compreensão do assunto de funções nos anos finais do Ensino Fundamental.

Quando eu estudava 9° ano, o meu professor de matemática introduziu no 4° bimestre do ano escolar as noções de funções polinomial do 1° e 2° grau, buscando esclarecer suas ideias iniciais sobre variáveis dependentes e independentes, valor numérico de uma função, determinação de suas raízes, estudo de sinais de uma função e construção de seus gráficos, porém, como foi visto em pouco tempo, a maioria dos alunos da turma não compreendeu suas noções, mas levei comigo todos esses ensinamentos.

Ao chegar no 1° ano do ensino médio, percebi que os colegas de sala não compreendiam com clareza o que o professor estava ensinando na sala, e como sempre fui

interessado nos conteúdos da disciplina de matemática, não tinha tanta dificuldade sobre o assunto. Entretanto, durante o ensino médio, notei esses bloqueios de aprendizagem sobre o conteúdo de funções em meus colegas, com isso eu buscava aprender mais, principalmente no preparatório para os vestibulares no 3° ano, que frequentei, assim como em toda minha vida acadêmica.

Com essas perspectivas, Zuffi e Pacca (2002, p. 2) relatam que "[...] a ideia de variação não é suficiente para, sozinha, caracterizar por completo o conceito matemático de função". A diferença entre incógnita e variável pode contribuir para esta dificuldade, pois são necessários outros conhecimentos, como por exemplo, em alguns casos temos que ter noção que o conceito de funções parte da relação entre elementos de dois conjuntos.

A partir disso, sabemos que o conceito de funções está dentro da álgebra, que de costume lembramos como uso de letras para definir um número que está faltando numa expressão qualquer. Mas, ao referir-se a esse tema, não podemos definir uma letra como *um* número ausente, pois assim, estaríamos falando de incógnita. Logo, ao considerar uma equação com duas ou mais letras distintas, a chamaremos de variáveis, em que a mesma letra pode assumir valores diferentes, havendo também termos dependentes e independentes destas letras.

Equações com duas incógnitas são estudadas inicialmente no 7° ano do Ensino Fundamental, de forma que, os professores trabalham com os alunos questões do tipo:

1) Qual o valor de y na equação $2y - 4x = 12$ para $x = 5$? Ou,

2) Quais são os valores de x e y para que o sistema a seguir seja satisfeito:

I. $x + 2y = 12$

II. $3x - y = 15$

Note que na questão 1 foi usada a ideia de variáveis dependentes e independentes, sendo y uma variável que depende do valor atribuído a x. A questão 2, é um sistema de equações com duas incógnitas, que tem uma relação com o cálculo que determina o ponto de interseção entre duas funções polinomiais do 1° grau, no qual é encontrado a partir de sua resolução, o ponto de encontro entre duas funções, ou seja, o valor de x e y (o par ordenado (x,y) sendo estas duas equações uma reta) para que o sistema seja satisfeito.

Algumas situações do cotidiano podem ser relacionadas diretamente como uma função, por exemplo, numa situação que demonstre o valor a ser pago por uma corrida de táxi tendo como exemplo: *Em uma cidade, a bandeirada de uma corrida de táxi custa R$ 8,00 e o valor por cada quilômetro rodado é de R$ 3,00. Qual o valor a ser pago por uma pessoa que percorreu 40 quilômetros em uma corrida de táxi nesta cidade?*

Todavia, não podemos esquecer-nos do uso da formalidade nos conteúdos matemáticos. Segundo Karnal (2012), é indispensável o professor entrar em algum assunto sem expor suas definições formais, pois segundo o autor, a formalidade dos conteúdos de qualquer disciplinar escolar, se torna essencial para um bom desenvolvimento dos alunos sobre o assunto.

Atualmente o processo de ensino e aprendizagem de funções, ocorre desde os anos iniciais do Ensino Fundamental com a exposição de vários conceitos, e assim suas concepções vão progredindo usando como exemplo, as definições propostas por Usiskin (1995), principalmente pela álgebra como aritmética generalizada, sendo formalizada com algumas definições mais avançadas apenas no 9° ano do Ensino Fundamental com a sua terceira concepção, que se trata do estudo da álgebra como relações entre grandezas.

Com essas perspectivas, surge a pergunta norteadora desta pesquisa: Quais são as concepções algébricas que alunos do 9º ano do Ensino Fundamental possuem com relação ao estudo de funções polinomiais do primeiro grau?

Nessas circunstâncias, nossa pesquisa irá focar nas concepções da álgebra de Usiskin (1995), partindo de suas definições de variáveis, como método básico para a compreensão do conceito de função. Também iremos discutir os trabalhos de Zuffi (2016), Zuffi e Pacca (2002), Ponte (1990), Caraça (1951) entre outros autores.

Nossa pesquisa tem como objetivo geral: Investigar as concepções da álgebra em alunos do 9° ano do Ensino Fundamental com relação ao estudo e ao conceito de funções polinomiais do 1° grau. Desse modo, temos como objetivos específicos: Identificar a noção intuitiva de funções nos estudantes diante as concepções da álgebra de Usiskin (1995); Verificar nos alunos as definições que possuem sobre variáveis; Averiguar a noção de função, a partir dos conhecimentos algébricos dos estudantes com relação ao conteúdo.

Nosso trabalho está dividido em 7 capítulos, no primeiro, está uma breve introdução que servirá para informar o leitor aos procedimentos da pesquisa. No segundo, abordaremos o processo histórico do conceito de função, através de autores como Boyer (1951) e Zuffi (2016), que discutiram sobre a evolução do conceito de função em seus trabalhos.

No terceiro capítulo, falaremos sobre o ensino de funções, baseados nos documentos oficiais sobre a educação. Focaremos nos arquivos que tratam da noção de funções nos anos finais do Ensino Fundamental, desse modo, será aberta uma discussão de como é abordado nosso objeto de pesquisa através desses documentos.

No quarto capítulo, apresentaremos algumas pesquisas já realizadas com o conceito e a noção de função.

O próximo capítulo será a exposição da metodologia por nós abordada, sendo dividido em dois subcapítulos. No primeiro apresentamos os sujeitos da pesquisa e no segundo o instrumento, por nós utilizado, seguido das etapas metodológicas.

Em seguida vem o capítulo contendo a análise e discussão dos dados, em que iremos discutir os resultados obtidos na coleta de dados pelos questionários aplicados na escola. E para finalizar temos as considerações finais e as referências que foram utilizadas.

2 PROCESSO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Para que o conceito atual de função chegasse à formalidade que conhecemos hoje, passou-se por um processo histórico. Segundo Caraça (1951), o conceito de funções parte das leis da natureza, a partir de duas características fundamentais. A primeira é a de *Interdependência* onde ele diz que "todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta *Realidade* em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros." (p. 109, grifo do autor). A segunda é a de *Fluência* na qual ele fala que "o Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo *flue*, tudo *devém*" (p. 110, grifo do autor).

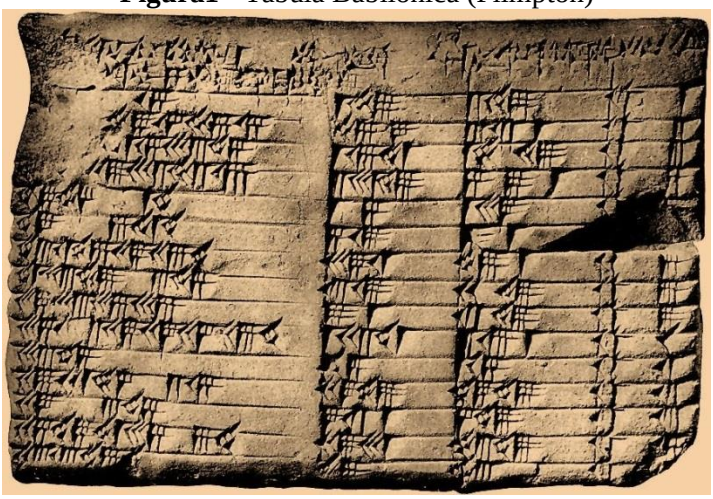
Não se sabe a origem exata do conceito de função, mas através dessas hipóteses podemos dizer que "[...] o surgimento do conceito de função, emergiu da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências de variáveis e generalizar em leis quantitativas que se expressam analiticamente." (SANTOS et al., 2004, p.5).

Com essas perspectivas, podemos dizer que a ideia intuitiva de funções está presente no nosso cotidiano: na maioria das tarefas que fazemos; numa simples comparação entre a previsão do tempo de uma região em relação com outra; entre diversas ações presentes no nosso dia-a-dia.

A partir dessas concepções, o homem na idade da pedra já fazia relações matemáticas com a ideia de contagem, assim como afirma Boyer (1974), pois os mesmos faziam relações entre tamanhos de objetos, animais, árvores, entre outras coisas. Eles também faziam correlações com os dedos das mãos e dos pés para comparar com o total de ovelhas em seu rebanho, ou então com um conjunto de pedras, ou algo do tipo.

Segundo Zuffi (2016, p. 2, grifo da autora), a ideia de funcionalidade, surgiu há "[...] cerca de 2000 a.C., em cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como 'funções tabuladas', destinadas a um fim prático". Embora não exista na época a noção de função, mas de forma intuitiva, nota-se que os babilônios já tinham um pensamento funcional notável naquela época, pois eles já faziam relações entre números em suas tabelas, mostrando assim uma percepção com relação a variáveis.

Figura1 - Tábula Babilônica (Plimpton)



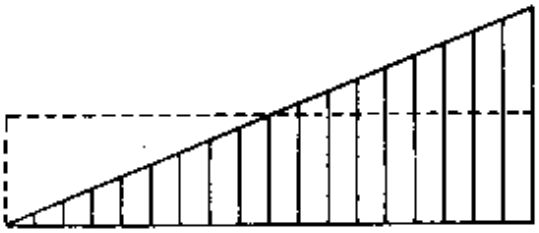
Fonte: https://sites.google.com/site/historiadamatematicaalkam/home/plimpton-322, acesso online em: 21 out. 2018.

Segundo Oliveira (1997) encontravam-se alguns fatos da noção de função na Grécia Antiga, em algumas tabelas gregas da área da astronomia, onde eles faziam relações com a matemática. A autora também afirma que a ideia de função também era encontrada entre os pitagóricos "[...] no estudo da interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas, como por exemplo, o comprimento e a altura da nota emitida por cordas da mesma espécie, pinçadas com tensões iguais" (p. 14-15). Ela também afirma que há registros em papiros egípcios de tabelas apresentando correspondências. Perante todos esses registros encontrados na Antiguidade, não foram achados registros que comprovassem a ideia de variável nem de algum conceito atual de função.

Já na Idade Média, tem um registro na França de um matemático chamado de Nicole Oresme (1320-1382) que, por volta de 1361, construiu um gráfico da velocidade em função do tempo, onde é descrito um movimento de um corpo com aceleração constante. Oresme fez o seguinte procedimento (BOYER, 1974):

> Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. (p.192).

Figura 2 – Representação Gráfica de Oresme



Fonte: BOYER (1974, p.193)

Ao passar dos tempos, com a evolução das concepções algébricas, vários matemáticos passaram a dedicar-se à álgebra. E assim no século XVI, o matemático francês François Viète (1540-1603) trouxe algumas contribuições para a álgebra. Conforme Damazio e outros (2012), Viète determinou que as letras do alfabeto, representariam incógnitas e coeficientes de equações, além disso, ele também contribuiu com os sinais de "+" e "-", utilizados atualmente na resolução de equações ou na representação algébrica de uma função.

Cruz (2015) se posiciona sobre Viète dizendo que: "[...] seus estudos permitiram que relações fossem expressas por meio de fórmulas algébricas, ainda que seu interesse maior estivesse em problemas particulares e não na ideia de relacionar grandezas que variam" (p. 80). Damazio e outros (2012) relata que, em 1557, o matemático Robert Recorde (1510-1558) definiu o sinal "=", para representar a igualdade em uma determinada equação. Logo, esses fatos ocorridos nessa época, facilitaram a evolução em relação ao estudo algébrico.

Ainda falando sobre a evolução da álgebra, Cruz (2015), em sua dissertação relatou que o matemático Thomas Harriot (1560-1621) também contribuiu para a evolução do conceito de função, mas de forma indireta. Pois ele foi o fundador da escola de algebristas ingleses, além disso, ele propôs vários símbolos utilizados atualmente pela álgebra como os símbolos de ">" e "<", mais conhecidos como "maior que" e "menor que", respectivamente, tal como o sinal "×", para representar uma multiplicação (BOYER, 1974).

Dando continuidade ao estudo de funções, iremos falar um pouco sobre as contribuições de Galileu Galilei (1564-1603), nesse processo histórico. De uma forma geral, ele "[...] utilizava a matemática para modelar os fenômenos da natureza, uma forma de modelar relações de variáveis que dependiam de outra" (MACIEL, 2011, p. 13). Oliveira (1997) complementa dizendo que o movimento, tais como a velocidade, aceleração e distância percorrida, eram tidos como objetos de estudo de Galileu. Ainda segundo a autora, suas ideais foram essenciais para a concepção de variável dependente.

Através dessas perspectivas, Cruz (2015) ainda relata que, Galileu com seus estudos em relação ao "[...] movimento dos corpos em queda a partir do repouso, introduziu o aspecto

quantitativo nas representações gráficas, expressando relações funcionais sobre as comparações entre causas e efeitos através da linguagem das proporções" (p. 81). Nessa época, nota-se que o conceito de função já estava sendo explorado de forma indireta pelos matemáticos, principalmente por Oresme e Galileu, ao estudarem o movimento dos corpos, dando início a noção de variáveis.

Continuando a história, Fermat (1607-1665) foi conselheiro e advogado, que se dedicou a estudar a literatura clássica, com exclusividade, a ciência e a matemática. Por volta de 1629, ele se propôs a reconstruir a obra "Lugares Planos de Apolônio", que segundo o autor, nesse processo de reconstrução, em 1636, ele acabou descobrindo o teorema fundamental da geometria analítica, que vem enunciado da seguinte forma: "Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva" (BOYER, 1974, p. 253).

Fermat escreveu um tratado que não foi publicado, chamado de: "Método para achar máximos e mínimos", ele considerava lugares por equações do tipo $y = x^n$, onde na geometria analítica, temos que quando $n > 0$ teremos as chamadas "parábolas de Fermat" e quando $n < 0$, as "hipérboles de Fermat" (BOYER, 1974). Embora Fermat não tivesse o conceito de limite, contribuiu bastante com esse método de achar máximos e mínimos, observando as variáveis sobre o seguinte procedimento:

> Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou um modo muito engenhoso para achar pontos em uma função assume um máximo ou um mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor $f(x + E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo ou de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação, por isso Fermat, depois de dividir tudo por E, fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. (BOYER, 1974, p. 255).

Ainda com os avanços da Geometria Analítica, destaca-se René Descartes (1596-1650). Seus estudos avançavam-se, no mesmo período em relação ao de Fermat, mas segundo Boyer (1974), Fermat foi o que deu início aos estudos da área. Entretanto, Descartes a partir de sua obra "La géométrie" desenvolvia um estudo sobre equações indeterminadas, e nisso, ele acabou observando que equações com duas variáveis, poderiam ser representadas geometricamente por uma curva, sendo assim, um meio para representar uma relação de dependência entre quantidades variáveis (CRUZ, 2015).

Segundo Maciel (2011), esse avanço da Geometria Analítica tida principalmente por Fermat e Descartes foi essencial para a criação do Cálculo Diferencial e Integral, onde seu desenvolvimento decorreu por Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático Leibniz (1646-1716). O autor relata que, embora Newton tenha se dedicado em pesquisas na área da Física, ele fez uma breve contribuição para o avanço do conceito de função "[...] sendo o primeiro matemático a mostrar que uma função poderia ser descrita como série de potência e foi ele quem introduziu o termo 'variável independente'." (p. 14, grifo do autor).

Relembrando a definição de Caraça (1951) sobre *fluência* no início deste capítulo: "Newton também começou a pensar, em 1665, na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes – tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas" (BOYER, 1974, p. 287). Com essas perspectivas, ele interligou o método de séries infinitas com o de fluentes, e essa junção foi chamada de "meu método".

De acordo com Boyer (1974), James Gregory (1638-1675), também havia descoberto que uma função poderia ser expressa por meio de uma série infinita, mas Newton não sabia dessas pesquisas de Gregory na Itália. Em 1667 ele publica uma obra chamada de "Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura", trazendo assim, uma definição de função: "Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b,... se x resulta de a, b,... pelas quatros operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável" (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p. 136).

Dando continuidade, Zuffi (2016) alega que foi Leibniz que usou o termo "função" pela primeira vez, para mencionar que o comprimento de alguns segmentos de retas dependia de retas relacionadas às curvas. Segundo Oliveira (1997), essa definição de função, foi encontrada em artigos de Leibniz publicados por volta de 1692 e 1694, mas outros consideram outras datas. Ponte (1990) também relatou que Leibniz contribuiu com as definições de "constante", "variável" e "parâmetro", junto com seus estudos sobre curvas.

Jean Bernoulli (1667-1748) veio de uma grande família de matemáticos, e trouxe várias contribuições para a definição de função. Segundo Boyer (1974) em 1692, quando se encontrava em Paris, ele ensinou uma nova disciplina chamada de "leibniziana" a um jovem marquês francês, conhecido como Marquês de L'Hospital (1661-1704). Segundo o autor, Jean Bernoulli fez um trato com L'Hospital onde, em troca de um salário regular, ele tinha que enviar suas descobertas na matemática ao Marquês para que fossem usadas do jeito que quisesse.

Nessas descobertas, Jean Bernoulli trouxe uma grande contribuição em 1694 que ficaria mais conhecida como a regra de L'Hospital para sobre formas indeterminadas. Além

dessa descoberta, ele utilizou o termo "ϕx", para representar uma função em x. Diante de Boyer (1974), o conceito de função dado por Bernoulli era expresso como "[...] uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável e constantes quaisquer" (p. 311).

Leonhard Euler (1707-1783) trouxe várias contribuições na área da matemática, como por exemplo: o uso da letra da letra grega "π" para representar a razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro; o símbolo "i" para caracterizar a √-1; o uso da letra ∑ para representar uma adição; e vários outros símbolos utilizados na geometria, álgebra, trigonometria e na análise; vale destacar que, Euler foi quem usou pela primeira vez a notação $f(x)$ para representar uma função em x (BOYER, 1974).

Analisando as ideias de Newton e Leibniz, Euler juntou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e criou a "análise". Desta época em diante, a noção de função tornou-se fundamental para a análise. Em uma de suas obras publicada em 1748 "Introductio in analysin infinitorum", ele:

> [...] define função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". (Às vezes Euler pensava em função menos formalmente e mais geralmente como a relação entre as duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada à mão livre sobre um plano.) Hoje tal definição é inaceitável, pois não explica o que é "expressão analítica." (BOYER, 1974, p. 327, grifo do autor).

De acordo com Zuffi (2016), Euler também passou a estudar as funções seno e cosseno para números complexos, e com os estudos de D'Alembert (1717-1783), também sobre essa área, contribuíram para o desenvolvimento da teoria de Cauchy (1789-1857) sobre funções de variáveis complexas. D'Alembert, com seus estudos sobre cordas vibrantes, conseguiu resolver uma equação diferencial e a chamou de equação da onda.

Segundo Oliveira (1997), citaremos mais um matemático, mais conhecido como Condorcet (1743-1794). Ele usou pela primeira vez o termo "função analítica" para definir uma função de natureza arbitrária, assim o termo "analítico", era aplicado em todas as funções estudadas em análise matemática.

Continuando o processo da adequação do seu conceito, segundo Boyer (1974), Lagrange (1752-1833) trouxe algumas contribuições em meio ao estudo de funções, tais como a notação $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^n(x)$, para a 1ª, 2ª, até a enésima derivada de uma função. Ele também trabalhou expandindo funções em séries de potência, mas ainda segundo o autor, nem todas as funções poderiam ser expandidas em sua teoria, pois o mesmo deixou lapsos em questão à convergência de séries infinitas.

Segundo Zuffi (2016), Lagrange fez algumas publicações sobre mecânica e teoria das equações, onde trouxe algumas contribuições, como: o "método da variação dos parâmetros para a solução de equações diferenciais lineares não homogêneas, e os "multiplicadores de Lagrange", para determinar máximos e mínimos condicionados de uma função *f* (x,y,z,w), onde com essa última definição eram inclusas funções de várias variáveis.

De acordo com Sá, Souza e Silva (2003), Benhard Bolzano (1781-1848) em 1817, publica "Functionlehre", contendo uma definição de continuidade muito próxima da que temos hoje. Ele também demonstrou o teorema do valor médio, usado nos cursos de cálculo e conhecido como "Teorema de Lagrange". Após 4 anos, em 1821, August Louis Cauchy (1789-1857) publicou *Cours d'analyse*, definindo função da seguinte forma:

> Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável. (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p. 133).

Em seguida se destaca o matemático Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que estudando problemas de condução de calor em objetos materiais, também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função. Ele considerava a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis (PONTE, 1990). Em 1822 publicou *La Theorie Analique de La Chaleur*, onde ele afirmou que toda função poderia ser representada através de uma série trigonométrica, que hoje a chamamos de série de Fourier, muito utilizada nos cursos superiores na área de exatas.

Figura 3 – Série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_N \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right]$$

Fonte: SÁ; SOUZA; SILVA, 2003, p. 137

Dando continuidade em 1837, Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859) trouxe o seguinte conceito de função: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado o valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x" (BOYER, 1974, p. 405). Ele simplesmente separou o conceito de função de sua representação

analítica, "[...] formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos." (PONTE, 1990, p. 4).

Dirichlet também aprimorou o problema de Fourier e foi o primeiro a conseguir uma demonstração rigorosa da série de Fourier para uma função. Com isso, ele notou que essa série nem sempre converge para o valor da função da qual deriva, desta forma, ele provou-a com algumas restrições, chamadas de condições de Dirichlet (BOYER, 1974). Suas concepções influenciaram os estudos dos matemáticos Dedekind (1831-1916) e Riemann (1826-1866) em relação ao desenvolvimento do conceito de função.

O conceito de função foi amplamente desenvolvido, a partir do século XIX com a aritmetização da análise, e alguns matemáticos se destacaram principalmente no ano de 1872 com suas contribuições no desenvolvimento de função. Um deles foi Dedekind, chegando à conclusão que "[...] a essência da continuidade de um segmento de reta não é a ideia vaga de 'estar próximo', mas uma propriedade oposta, em certo sentido: a natureza da divisão do segmento em duas partes, por um ponto do segmento" (ZUFFI, 2016, p. 6, grifo do autor). Contribuindo também com a definição de conjunto infinito.

Nesse mesmo ano, Riemann estudando as ideias de Dirichlet sobre sua prova para a série de Fourier, desenvolveu o conceito de integral, ficando conhecida como "integral de Riemann" (BOYER, 1974). Outras contribuições vieram com Heine (1821-1881), trazendo as definições de limite em ε's e δ's vistos atualmente, podemos falar também de Georg Cantor (1845-1918), desenvolvendo a teoria dos conjuntos, destacando-se com a ideia de infinito (ZUFFI, 2016).

Outro protagonista desta época foi Karl Theodor Weierstrass (1815-1897), que também no ano de 1872, desvinculou o conceito de continuidade do de diferenciabilidade, apresentando uma função contínua que não era diferenciável. Além disso, ele conceituou função como uma série de potências juntamente com todas que podem ser obtidas através delas por prolongamento analítico (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003).

Segundo Zuffi (2016), Giuseppe Peano (1858-1932) também contribuiu para o conceito definitivo de função, pois ele estabeleceu três conceitos primitivos da aritmética: "[...] o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de 'ser sucessor de', os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais" (ZUFFI, 2016, p. 7).

Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos de Cantor no século XIX, um grupo de matemáticos franceses chamados de Boubarkianos aprimorou a teoria dos conjuntos, e a partir daí, passou-se a formalizar o conceito de função como vimos hoje. Em 1939 a escola

conhecida como “Nicolas Bourbarki”, publicaram diversos livros numa coleção chamada de “Éléments de Mathématique”, sendo eles: Teoria dos conjuntos; Álgebra; Topologia real; Funções de variável real; Espaços vetoriais topológicos; Integração (Boyer, 1974). Esses livros foram referentes à Parte I da coleção, tendo então, vários outros livros publicados por eles. Esse grupo de matemáticos lançou a seguinte definição para função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre a variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F , se, qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento de y de F que está na relação considerada com x. (BOURBAKI, 1939, p. 6 apud SANTOS, 2010, p.24).

Nota-se que essa definição é bem semelhante à que usamos hoje quando definimos uma função. Com isso, percebemos que o conceito de função, passou-se por várias definições até chegar a sua noção mais concisa, todavia, precisou-se da evolução de várias áreas da matemática, como: o princípio da contagem praticado no começo da humanidade; os variados estudos na área da álgebra, tanto na sua simbologia como nos seus conceitos e definições; a criação da geometria analítica; do cálculo diferencial e integral; da análise; e por último da teoria dos conjuntos. A partir da união desses conceitos, com o Movimento da Matemática Moderna nos anos 60 do século XX, foi adotada a concepção estrutural de função dos Bourbakis, sendo assim, classificada como o conceito formal de função.

3 ENSINO DE FUNÇÕES

O ensino de funções dentro da matemática escolar evolui gradativamente até os dias atuais. Sempre com novas perspectivas e técnicas diferentes de serem ensinadas no ensino básico. Os documentos oficiais nacionais trazem algumas concepções sobre o ensino de funções, orientando os professores e tentando buscar meios e práticas que facilitam a compreensão dos alunos sobre os conteúdos da matemática no Ensino Fundamental e médio. De acordo com os PCN+:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problemas, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL, 2002, p. 121).

Ao referir-se a formalidade de algum conceito, Leão e Bisognin (2009) comenta que "[...] a definição de um conceito é pessoal e, muitas vezes, pode não ser compatível com a definição formal encontrada em muitos manuais escolares, mas pode ser rica por incluir diferentes experiências, propriedades e impressões." (p. 29). Assim notamos que, ao definir funções, não podemos restringir apenas a sua definição formal, mas sim, levar situações do cotidiano para sala de aula, pois a noção de funcionalidade não surge apenas de suas definições formais, mas sim da evolução de nossos conhecimentos.

Todavia, temos como principal objetivo a preocupação do entendimento dos alunos em vista ao conceito de função, pela dificuldade gerada a partir do estudo de conteúdos da álgebra, pois no currículo da matemática no Brasil, a noção de funções é inserida através de conceitos algébricos, tais como suas simbologias, como uma simples manipulação algébrica para determinar os zeros ou um valor numérico de uma função. Entretanto, visamos que:

> [...] o avanço de um educando em direção a um conhecimento maior do conceito de função deverá levá-lo a uma compreensão melhor de seu dia-a-dia, disponibilizando lhe ferramentas úteis ao exercício de sua cidadania como, por exemplo, o reconhecimento de variáveis em situações do cotidiano e o estabelecimento de relações entre elas. (BRAGA, 2006, p. 17).

A partir dessas concepções, Caraça (1951) considera que o conceito de funções foi inserido "[...] no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis." (p. 129). Essa definição é semelhante à terceira concepção de Usiskin (1995), em que o autor define algumas concepções da álgebra, como o estudo de relações entre grandezas.

De acordo com Braga (2006):

> O processo de inserção do tema função entre os conteúdos da nossa matemática do secundário está diretamente vinculado à criação, concretizada no ano letivo de 1929, de uma nova disciplina escolar do ensino brasileiro, denominada matemática, resultante da unificação de três outras, até então, independentes: a aritmética, a álgebra e a geometria. (p. 25).

Esse processo comentado por Braga (2006) veio a partir do movimento adotado por Felix Klein (1849-1925), que ocorreu entre o final do século XIX e início do século XX. Seu objetivo era implantar no ensino secundário o estudo sobre Cálculo Infinitesimal para que garantisse um melhor desempenho dos alunos ao ingressarem no ensino superior (BRAGA, 2006). Ainda segundo o autor, esse movimento ocorreu na Alemanha, onde Klein defendia que o estudo sobre funções era essencial para a introdução do Cálculo Infinitesimal no ensino secundário, mas era muito criticado pelos matemáticos da época, pois não concordavam com a implantação do Cálculo no ensino secundário.

Conforme Braga (2006), Klein era um líder reformista na época. Ele queria entrelaçar os vários ramos da matemática escolar. Com o conceito de função, ele pretendia unificar suas diversas representações como a tabular, a algébrica e a gráfica. Como já comentado, Klein defendia que o sucesso dos alunos estaria interligado com o bom domínio dos mesmos em relação as funções. Com isso, tinha a necessidade de buscar o pensamento funcional dos estudantes, pois só assim, eles teriam sucesso ao estudarem o Cálculo, já que ele pretendia cobrar dos alunos, na matemática escolar, o estudo sobre: limite de uma função, derivada de uma função num ponto, função derivada, função primitiva, integral de uma função, entre outros conteúdos ligados a funções.

Sobre o pensamento funcional, Braga (2006) comenta que suas ideias deveriam ser cultivadas desde as séries iniciais com a noção de variação e dependência e aos poucos fossem implantadas suas diversas representações. Logo os alunos teriam êxito em sua formação diante o pensamento funcional.

As ideias revolucionárias de Klein chamaram a atenção do matemático brasileiro Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1890-1950), que era professor e diretor do Colégio Pedro II do Rio de Janeiro, e em 1929, foi publicado o volume I do Curso de Matemática Elementar de Euclides Roxo, esse livro didático era considerado revolucionário diante a educação escolar da época, pois trazia a unificação da aritmética, álgebra e geometria como uma única disciplina chamada de matemática. (BRAGA, 2006).

Segundo o autor, no ano de 1929, foi implantado no Colégio Pedro II, essa nova disciplina escolar chamada “matemática”, sendo seu volume I adotado pelos 1° anos na escola secundária, e o volume II em 1930, pelos alunos do 2° ano, e assim foi sucessivamente. De acordo com Braga (2006), essa unificação trouxe principalmente duas concepções modernizadoras:

> A primeira delas referia-se à exigência de se estabelecerem conexões entre os diversos ramos da matemática escolar. Dessa forma, sempre que possível, dever-se-iam fazer entrelaçamentos e paralelos entre a aritmética, a álgebra e a geometria. A segunda concepção delegava à noção de função com suas representações algébrica, geométrica e tabular [...]. (p. 69).

No início dos anos 1930, o Brasil era considerado como um país rural, pois cerca de 70% de sua população viviam na zona rural, havia muita pobreza na época e partir desse cenário, foi decretada a Reforma Francisco Campos com abrangência nacional, onde, diante as concepções das reformas modernizadoras do Colégio Pedro II, foi de cunho obrigatório à adaptação dessas concepções no ensino da matemática secundária em todo o país. (BRAGA, 2006).

De acordo com Braga (2006), as ideias modernizadoras de Roxo, não estariam concentradas apenas no matemático Klein, mas também no pensamento funcional explorado por Erns Breslich (1874-1966), que era um alemão naturalizado americano, onde terminou seu doutorado pela Universidade de Chicago em 1926. Segundo o autor, Breslich também ressaltava que a utilização de função, teria um princípio unificador nos Estados Unidos para reorganizar o ensino secundário, onde ele afirma que o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, tinha caráter prioritário em sua formação, pois lhe dariam uma visão e compreensão da matemática adequada naquela época, propondo também, a unificação da aritmética, álgebra e geometria, como ferramentas de uso constante no seu desenvolvimento.

Considerando o pensamento funcional estudado por Breslich, Braga (2006) afirma que ele não estava apenas descrito em formas verbais, mas também concentrados nas equações, nos polinômios, nas razões, proporções, entre outros casos, principalmente na representação gráfica, pois ao obterem um pensamento gráfico-funcional analisando gráficos, consiga interpretá-los, obter conclusões e estabelecer relações e conexões com outras representações matemáticas. Breslich considerava que as ideias de correspondência, dependência e relações funcionais fazem parte do dia a dia dos alunos e são simples de ser compreendida.

Pode se perceber as conexões das ideias de Roxo com as de Klein e Breslich, através do livro “A Matemática na Escola Secundária”, onde Roxo traz as seguintes conclusões:

> 1. A noção de função deve ser adotada como ideia axial no ensino da matemática, capaz de estabelecer um elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária e de modo ser a alma do corpo em que se organiza a matéria.
> 2. Além da aptidão para ligar os vários assuntos em um todo, a educação do pensamento funcional merece ser feita na escola secundária, não só tendo em vista as exigências práticas e culturais da vida moderna, como pela aptidão para constituir um meio altamente educativo do pensamento lógico e um verdadeiro método de estudo.
> 3. A ideia de função vem ainda dar ao ensino da matemática secundária mais vida e mais interesse, permitindo não só tratar de questões de maior realidade para o aluno, como estabelecer conexões a outras matérias mais concretas.
> 4. O desenvolvimento da ideia de função é perfeitamente acessível ao estudante do curso secundário (de 11 a 16 anos) desde que se atenda às normas que se seguem.
> 5. A ideia de funcionalidade, a ser desenvolvida *paulatim et gradatim*, da 1° à última série do curso, deve penetrar todo o ensino, trazida constantemente em foco, na infinidade de ocasiões que se apresenta para isso, no estudo de todas as partes da matéria.
> 6. Começando pela simples e vaga ideia de dependência, passar-se-á depois à de relacionalidade e à de funcionalidade, apresentadas sob o tríplice aspecto (tabelar, gráfico e algébrico), evitando-se de começo as definições formais e as demonstrações rigorosas. (ROXO, 1937, p. 193-194 apud BRAGA, 2006, p. 85-86, grifo do autor).

Contudo, o pensamento funcional era muito importante naquela época, pois a própria matemática estava passando por um processo de evolução em relação aos estudos sobre o Cálculo Diferencial e Integral, desenvolvidos a partir das ideias de Newton e Leibniz, onde o conceito de funções era essencial para garantir o desenvolvimento dos alunos no ensino superior.

Esses fatos ocorreram antes do movimento da matemática moderna, quando a álgebra era trabalhada com ênfase na resolução de problemas. Segundo Gomes (2013), os conteúdos da álgebra eram expostos pelos professores, daí eles ensinavam algumas técnicas de resolução sobre o assunto estudado, e em seguida, os conteúdos algébricos eram aplicados e estudados com a resolução de problemas.

Gomes (2013) ainda faz algumas declarações de como os conteúdos da álgebra eram vistos durante e após o movimento da matemática moderna, logo, ela fala que durante esse movimento no Brasil que ficou marcado entre o fim dos anos 1950 ao fim dos anos 1970, era priorizado os aspectos lógicos e estruturais da Matemática, todas as técnicas utilizadas anteriormente principalmente na álgebra, deveriam ser justificadas, logo, "[...] capacitaria o estudante a aplicar essas estruturas nos diferentes contextos a que estivessem subjacentes." (p. 36). A autora também ressalta que foi nesse período em que surgiram alguns conteúdos algébricos, como: funções, funções do 1° e 2° grau, entre outros.

Após o movimento da matemática moderna, surgiram várias críticas no Brasil e no mundo, entretanto, manifestaram-se novas perspectivas sobre o ensino da álgebra, houve a junção da forma em que era ensinada antes e durante o movimento, voltando assim, o método de resolução de problemas, mas com as marcas do movimento, justificando as respostas sempre que necessário (GOMES, 2013).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), trazem algumas concepções sobre a educação algébrica encontrada nesses três momentos citados anteriormente. Antes do movimento da matemática moderna, eles nomearam de *linguístico-pragmática*, afirmando que a álgebra era utilizada como instrumento de resolução de problemas, sendo assim, os alunos a compreendia de forma mecânica, utilizando técnicas propostas pelos professores.

Já a segunda concepção segundo os autores, veio para contrapor a *linguístico-pragmática*, assim a chamaram de *fundamentalista-estrutural*, eles afirmam que "[...] o papel pedagógico dessa disciplina passa a ser o de fundamentador dos vários campos da matemática escolar." (p. 84), pois priorizava a introdução de propriedades estruturais, para a construção de seus conhecimentos lógico-estruturais, diante os conteúdos abordados.

Como depois do movimento da matemática moderna a álgebra ficou sendo vista como uma síntese das duas fases anteriores, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) a determinaram como uma concepção fundamentalista-analógica, pois além de prevalecer o modo de resolução de problemas vista antes do movimento, também foram consideradas as formas de justificação sobre o que está fazendo.

Diante o pensamento algébrico, Usiskin (1995) também apresenta algumas concepções sobre a álgebra tratando como principal meio para definir suas concepções, a noção de variáveis, onde o mesmo afirma em seu artigo, que a compreensão e o significado das letras são essenciais para a compreensão desses conceitos. Com isso, ele descreve alguns exemplos sobre a utilização de letras em expressões, sendo elas:

I. A = b.h: nesta, ele a classifica como uma "fórmula", onde as letras A, b e h representam respectivamente a área, a base e altura em relação a uma determinada figura geométrica;
II. 40 = 50x: ele afirma que essa expressão é uma "equação", logo teremos o pensamento que "x" representa uma incógnita;
III. sen x = cos x . tg x: essa expressão, ele qualifica como "identidade", onde x representa um argumento de uma função;

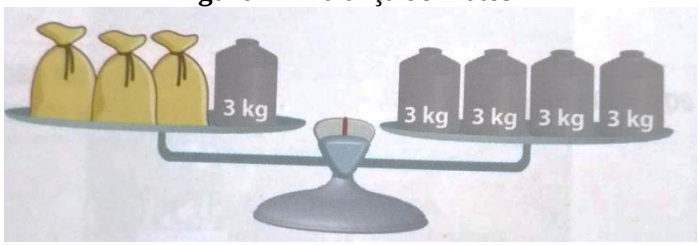
IV. 1 = n.(1/n): o autor chama essa expressão de “propriedade”, fazendo uma distinção em relação às anteriores, pois ela traz uma generalização de um modelo aritmético, onde “n” tem o papel de uma representação desse modelo;

V. y = kx: ele classifica essa expressão como sendo “equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta” (p.10)., nesse caso, a letra “x” está trazendo um caráter de variabilidade, onde podemos dizer que “x” representa o termo variável.

A partir dessas visões, Usiskin (1995) dividiu em cinco suas concepções sobre a álgebra. Logo, temos:

Concepção 1: *A álgebra como aritmética generalizada*: Essa concepção abrange o conceito de variáveis como generalizadoras de modelos, onde podemos pegar por exemplo, um aluno que não conhece meios algébricos para determinar uma equação, mas consegue simplesmente resolvê-la de tal forma, que ela esteja expressa como as típicas questões que envolvam balança de pratos.

Figura 4 - Balança de Pratos



Fonte: Souza e Parato (2013)

Em um tipo de questão que peça para calcular quantos quilogramas contém cada saquinho tendo como base a Figura 4, em que basta os alunos terem conhecimento do uso da balança de pratos, que em seguida eles irão distinguir que cada saquinho têm 3 kg de massa, eles também poderiam montar a expressão: 3 + 3 + 3 + 3 = 3 + 3 + 3 +3, em que nela, os algarismos sublinhados representam os saquinhos. Se eles fossem montar a equação: x + x + x + 3 = 3 + 3 + 3 + 3 => 3x + 3 = 12, onde “x” representa a massa do saquinho, teria um pouco mais de trabalho para resolver essa equação, pois assim utilizaria manipulações algébricas para resolvê-la, ao invés de deduzir a massa pedida na questão, apenas com seus conhecimentos aritméticos.

Concepção 2: *A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*: Nessa concepção, a álgebra é vista como método de resolução de problemas e segundo Usiskin (1995), muitos alunos têm dificuldades ao se depararem com esse pensamento, pois é considerada como a passagem da aritmética para álgebra, logo, os

estudantes terão que resolver, por exemplo, uma equação não pelo meio de identificar sua incógnita por tentativa ou então pela lógica, mas sim utilizando manipulações algébricas, simplificando a equação até chegar em seu resultado. Para essa concepção, podemos ter uma situação do tipo: *A soma do triplo da idade de Adriano com 18 é igual a 63. Qual a idade de Adriano?*

Logo, os alunos teriam que chegar à equação: $3x + 18 = 63$. Em seguida, teriam que resolvê-la usando manipulações algébricas, fazendo uso das operações inversas, portanto, eles iriam precisar primeiramente, somar ambos os lados por -18, obtendo: $3x + 18 + (-18) = 63 + (-18) \Rightarrow 3x = 45$, e por fim dividindo ambos os lados por 3, tendo como resultado: $3x : 3 = 45 : 3 \Rightarrow x = 15$, assim, os alunos chegariam a idade de Adriano. Nota-se que nessa concepção, não foram utilizados meios aritméticos para resolver a equação, bastando algumas regras de manipulações algébricas para conseguir chegar ao resultado, sem precisar deduzir a possível resposta.

Concepção 3: *A álgebra como estudo de relações entre grandezas:* Com essa concepção, chegamos ao estudo de funções, Usiskin (1995) fala que nela as variáveis são tratadas de forma diferente em relação as anteriores, pois agora, elas realmente variam. O autor descreve certa situação em que ele pergunta o que acontece com 1/x quando "x" vai ficando cada vez maior, logo o mesmo afirma que os estudantes terão muitas dúvidas em relação aos resultados, pois o "x", não terá mais um valor fixo, e poderá variar de acordo com o que se pede.

> A notação funcional (como em $f(x) = 3x + 5$) é uma ideia nova quando os alunos a veem pela primeira vez: $f(x) = 3x + 5$ parece e dá uma sensação diferente de $y = 3x + 5$. (A propósito, uma das razões pelas quais $y = f(x)$ pode confundir os alunos é a função f, e não o argumento x, ter se tornado o parâmetro). (USISKIN, 1995, p. 16).

Entretanto, em vista da notação funcional, Usiskin (1995) mostra como exemplo, um problema em que está pedindo para achar a equação da reta que passe pelo ponto (6,2) e tenha inclinação 11, logo, os alunos teriam como base uma equação do tipo $y = ax + b$, mas segundo o autor, eles teriam dificuldades em identificar o argumento ou o parâmetro, e tendo como consequência, o resultado final errado da questão.

Concepção 4: *A álgebra como estudo das estruturas:* Essa concepção, é voltada para o estudo da álgebra no ensino superior, quando nos deparamos com algumas estruturas algébricas como anéis, grupos, corpos, entre outros. No ensino básico, podemos notar essa concepção, quando estudamos fatoração de polinômios, logo, o autor a resume como o ato de

manipular e justificar. De antemão, as concepções da álgebra de Usiskin (1995), também faz um resumo do ensino da álgebra, como citado anteriormente, por determinados períodos de tempo que ficaram marcados na história da matemática.

Documentos oficiais orientam os professores para que haja uma melhoria no ensino da matemática em geral, e em vista dos conteúdos da álgebra, encontramos algumas orientações sobre o ensino de funções. Normalmente, nos deparamos com a formalização de funções no ensino médio, mas suas ideias iniciais são vistas desde o Ensino Fundamental, quando começamos a estudar situações que encontramos a interdependência entre variáveis. Geralmente, temos suas primeiras concepções, no estudo de equações com duas variáveis no 7° ano, alguns professores trabalham com situações-problemas em que são cobradas dos alunos resolução de sistemas lineares, assim, eles terão pela primeira vez, contato com relações entre grandezas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), em relação à matemática, divide os anos finais do Ensino Fundamental em dois ciclos, sendo nomeados de "Terceiro Ciclo" onde são abordados assuntos do 6° e 7° ano, e o "Quarto Ciclo", vindo por fim, o 8° e 9° ano. Tratando-se do Terceiro Ciclo, temos alguns objetivos da matemática sobre o pensamento algébrico, e um deles é: "[...] traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras." (BRASIL, 1998, p. 64). Podemos fazer uma relação com a segunda concepção de Usiskin (1995), onde ele afirma que ela se identifica como a passagem da aritmética para a álgebra.

> É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo. (BRASIL, 1998, p.68).

Logo, o estudo sobre funções no Terceiro Ciclo, vem como um estímulo para os alunos compreenderem a noção de variação entre grandezas e notar variáveis pela percepção da interdependência. No Quarto Ciclo, os PCN afirma que a História da Matemática pode servir como uma fonte de interesse para os estudantes, pois permite reflexões sobre o que está sendo exposto no momento da aula, visto que essa é uma fase onde a maioria dos alunos tem a sensação que a matemática é difícil, que tudo precisa ser decorado e que nada daquilo visto

em sala de aula será utilizado em seu dia a dia, desse modo, a sugestão dada é que os conteúdos algébricos devem ser estudados com cautela, fazendo comparações com situações do cotidiano da turma quando necessário.

Nesse ciclo, também é descrito um objetivo do pensamento algébrico voltado ao conceito de função, sendo ele: "[...] observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis." (BRASIL, 1998, p. 81). Podemos traduzi-lo, como o procedimento de determinar uma função por meio de sua representação algébrica, observando suas regularidades através de situações propostas pelo professor.

> Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). (BRASIL, 1998, p. 84).

Os professores da rede pública de ensino do estado de Pernambuco, também têm documentos oficiais para orientarem os professores com relação à educação básica das escolas do estado. Eles dividem esses documentos em duas partes para cada disciplina, na primeira orientam os professores sobre objetivos e metas que devem ser alcançados em sala de aula durante o ano letivo de cada série, e a segunda expõem os conteúdos que precisam ser abordados por bimestre em cada ano do Ensino Fundamental e médio, logo os professores terão uma base dos conteúdos que são exigidos a cada período descrito no documento. Para turmas de 9° anos do Ensino Fundamental, os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio orientam:

> O estabelecimento de relações entre grandezas deve ser tomado como ponto de partida para o estudo da noção de função. O aprofundamento dessa noção deve ter sua origem em atividades ligadas a situações do cotidiano do estudante, evitando-se a sistematização precoce. Situações que envolvam a proporcionalidade também podem ser aprofundadas nessa fase. Em particular, a articulação de problemas envolvendo proporcionalidade com o estudo da função linear constitui um tópico relevante. (PERNAMBUCO, 2012, p. 103).

Com essas perspectivas, temos uma grande influência da terceira concepção da álgebra de Usiskin (1995) nesse contexto, pois o estudo sobre relações entre grandezas nesse documento é considerado, essencial para o início da noção de funções em estudantes de 9° anos do Ensino Fundamental. Também há um laço forte em questão de trabalhar essas noções com situações que envolvam o cotidiano dos alunos, pois assim, estarão se familiarizando com mais facilidade no determinado assunto que está sendo passado.

Todavia, sabemos que o conceito de funções é formalizado apenas no ensino médio, mas suas noções iniciais vistas no Ensino Fundamental principalmente, quando são propostas situações-problema com ênfase na noção de variável abrangendo relações funcionais, faz com que os alunos tenham capacidade de compreender suas particularidades quando ingressarem no ensino médio, já que no primeiro ano, terão contato com conhecimentos adquiridos anteriormente.

4 PESQUISAS RELACIONADAS A FUNÇÕES

Diante as várias repercussões sobre o ensino e aprendizagem de funções na educação básica, escolhemos alguns trabalhos já realizados na área, para termos uma noção de como pesquisadores estão realizando essas pesquisas, analisando os resultados obtidos pelos autores e as metodologias por eles abordadas. Acreditamos que a aprendizagem dos conteúdos da matemática da Educação Básica surge a partir do incentivo de seus professores e da dedicação de cada um dos alunos sobre a disciplina.

Zuffi (2016) faz uma abordagem histórica do desenvolvimento do conceito de função, descrevendo seus principais fatos que ficaram marcados na história. E diante de sua pesquisa bibliográfica, ela concluiu que embora os professores de matemática do ensino médio tenham passado por vários processos em sua carreira profissional e na sua formação acadêmica, os professores não trazem reflexões adequadas sobre a linguagem matemática, principalmente no fato de desconhecerem os principais acontecimentos com relação ao desenvolvimento histórico de cada conteúdo da matemática escolar.

De antemão, abordar a história da matemática em sala de aula, pode ser um recurso enriquecedor tanto para os alunos quanto para os professores, podemos notar essas afirmações diante da dissertação de mestrado de Maciel (2011) e no artigo de Maciel e Cardoso (2014), que é uma adaptação da dissertação de mestrado publicado na Revista Bolema, eles elaboraram uma pesquisa com alunos do 1° ano do ensino médio, onde suas atividades ficaram divididas em: “1) Aplicação do Pré-Teste; 2) exibição do Vídeo; 3) Resolução do Caderno de Atividades e 4) aplicação do Pós-Teste.” (MACIEL, 2011, p. 52).

As aplicações do Pré-Teste e Pós-Teste, serviram para auxiliar os pesquisadores nos seus resultados finais, e os vídeos passados (foram 4 vídeos), apresentava os principais pontos da história da matemática com a perspectiva de ajudar os alunos durante a aplicação das atividades.

Após a análise dos dados obtidos, Maciel (2011) e Maciel e Cardoso (2014), concluíram que os alunos se mostraram interessados quando utilizaram o vídeo em sala de aula, contribuindo para um melhor entendimento sobre o conceito de função, mas salientaram que na correção do Caderno de Atividades notaram a falta de conhecimentos básicos da matemática para o entendimento de funções, todavia, tiveram êxito em seus objetivos.

Perante o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, Neves e Resende (2016) elaborou uma pesquisa investigativa com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, sendo programada e aplicada uma sequência de atividades baseada na Teoria Histórico-

Cultural. Dividiram a sala em cinco grupos de seis alunos cada, analisando apenas os grupos 1 e 5, por terem sido os mais participativos durante as intervenções.

Foram propostas quatro atividades, onde além de observarem as respostas encontradas nos grupos, eles também verificaram a interação entre os integrantes dos grupos, pois mesmo que alguns cometessem erros no momento dos exercícios, outros consertavam imediatamente essas falhas, destacando-se então, a importância do trabalho coletivo. Essas atividades foram divididas em três conjuntos e 12 encontros, sendo elas: 1) Relações e Funções; 2) Funções e Expressões Algébricas; 3) Funções e Expressões Gráficas. Contudo, notou-se que o trabalho em grupo e a interação do professor como mediador das atividades propostas, serviram para um bom desenvolvimento da pesquisa, pois o questionamento dos alunos durante as intervenções foi fundamental para a avaliação dos resultados obtidos na pesquisa.

Temos também de grande importância para o ensino de funções além da história da matemática e da Teoria Histórico-Cultural usada por Neves e Resende (2016), o método de resolução de problemas, onde os alunos são instigados a compreenderem o conteúdo através de situações-problemas que envolvam casos do cotidiano ou conhecimentos afins. De antemão, devemos ter alguns cuidados ao usarmos esse método em sala, pois alguns alunos poderão se confundir nas interpretações das questões propostas pelo professor, e assim, não aprenderem o conteúdo.

Tratando-se desse método descrito anteriormente, podemos citar o artigo de Leão e Bisognin (2009), em que a Resolução de Problemas é tratada pelos autores como ponto principal de sua pesquisa. Eles desenvolveram e aplicaram quatro problemas envolvendo gráficos e situações do seu dia a dia em uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental, a sala foi dividida em grupos e a interação entre os integrantes dos grupos foi essencial para os resultados da pesquisa, os dados foram registrados no Diário de Campo do pesquisador.

Após a análise dos resultados, constatou-se que os alunos conseguiram assimilar o conceito de função através dessa metodologia, com destaque nos problemas que envolviam situações do cotidiano com suas diferentes representações, além disso, as discursões na sala de aula entre os grupos proporcionaram o entendimento do que ainda eles não tinham compreendido através dos questionamentos, debates e dúvidas pelo assunto.

Continuando os relatos sobre a metodologia de Resolução de Problemas, Souza (2016) em sua dissertação de mestrado, aplicou uma sequência de atividades em duas turmas de 9° ano com essa metodologia. Ela aplicou seis atividades, sendo composta de dois questionários e 11 problemas, de início investigou os conceitos básicos de funções adquiridos durante a trajetória escolar dos alunos, para isso, separou as turmas em grupos para os alunos discutirem

e responderem suas atividades, depois desse processo, a pesquisadora formalizou o conceito de função, ensinando para eles noções de domínio, contradomínio, imagem, variável, dependência e chamou a atenção deles para a formação de leis matemáticas que representassem certas situações.

Em seguida, com os novos conhecimentos obtidos pelos alunos, Souza (2016) dividiu as turmas nos mesmos grupos e passou mais alguns problemas, logo após aplicou o segundo questionário encerrando assim as intervenções. Em suas aplicações, a pesquisadora percebeu a falta de compreensão dos alunos em alguns problemas, com isso, ela reformulou alguns deles para que obtivesse um resultado final mais satisfatório, e assim como Leão e Bisognin (2009), que obtiveram êxito usando a metodologia de Resolução de Problemas em sua pesquisa, os resultados das atividades aplicadas por Souza (2016), usando a mesma metodologia com problemas envolvendo situações do dia a dia, também foram de grande importância tanto para os alunos quanto para a pesquisadora.

> Observa-se que introduzir o conteúdo de maneira informal causou maior interesse e menor rejeição da parte dos alunos pois eles não "sentiam" que estavam estudando um conteúdo matemático, mas sim tentando resolver questões que existem no dia a dia. A formalização do conceito também tornou-se um momento mais prazeroso para os alunos pois, foi feita com a participação ativa dos mesmos através de exemplos dados por eles. (p. 73).

Nas suas considerações finais, Souza (2016) destaca a ideia de dependência, relatando que embora seja de fácil compreensão para nós professores, não parece ser tão óbvio para os estudantes enxergarem tal concepção, inclusive àqueles que não tiveram conhecimentos anteriores em relação aos conteúdos. Contudo, através da discussão dos alunos e sua participação na pesquisa, concluiu-se que esses fatos levaram a compreensão dos estudantes ao conceito de função.

Na pesquisa de Chaves e Carvalho (2004) envolve uma turma com 35 alunos do 1° ano do ensino médio, foram elaboradas "[...] em fichas mimeografadas o conteúdo sob forma de lacunas, tabelas e diagramas para completar, problemas para traduzir e resolver, cujo objetivo era levar o aluno a conceituar, identificar e aplicar funções em situações do cotidiano." (p. 10). A partir disso, essas atividades foram aplicadas em sala e analisadas pelos pesquisadores. Em vista de suas experiências como professores e em pesquisas relacionadas à Educação Matemática, eles relataram que tais conceitos relacionados a funções eram de difícil compreensão para a maioria dos alunos, pois alguns estudantes saem do Ensino Médio e entram numa Universidade sem saber os conceitos básicos sobre tal conteúdo.

Após a análise dos dados, os pesquisadores orientaram que para introduzir o conceito de função, precisaria começar com a noção de dependência, para em seguida estudá-las na forma analítica e algébrica, ou através de gráficos e tabelas. Eles também mostraram a importância de serem trabalhadas questões contextualizadas com problemas envolvendo situações do cotidiano dos alunos, pois segundo os mesmos, essa relação de alguma maneira contribui para aproximar o saber escolar do saber cotidiano.

De antemão, trabalhar com a noção de função não está diretamente restrito apenas ao 9° ano do Ensino Fundamental ou ao Ensino Médio em si, mas também são estudadas em outros anos da Educação Básica utilizando, por exemplo, os conceitos da aritmética generalizada de Usiskin (1995). A partir dessas concepções sobre o estudo de funções, Schönardie (2011) trouxe em sua pesquisa de mestrado, uma sequência de atividades utilizando planos de operadoras de celulares para construir junto com seus alunos do 7° ano do Ensino Fundamental, o conceito de funções por meio da Modelagem Matemática.

Em primeira mão, ela comunicou a escola e os pais dos alunos sobre tal pesquisa a ser realizada, e em seguida depois das autorizações, ela dividiu a sala em seis grupos e deixou dois grupos responsáveis para pesquisarem planos oferecidos pela operadora Vivo, dois com a Claro, um com a Oi e o último com a Tim. Ao decorrer dos encontros e dos resultados apresentados pelos grupos, a pesquisadora propôs que esses grupos comparassem os planos das operadoras, e definisse qual traria a melhor oferta por minutos. Com isso, os alunos começaram a comparar as ofertas de cada operadora e mesmo que os valores cobrados por minutos em cada uma delas não fossem semelhantes começaram a calcularem tais resultados com relação à dos outros grupos, trabalhando assim, a noção de variáveis dependentes e independentes.

Depois de terem essas noções, a pesquisadora entregou algumas atividades para os alunos com questões utilizando a Modelagem Matemática, abrangendo situações do dia a dia dos alunos, onde ela analisou as respostas obtidas pelos grupos. Foram propostas questões que buscassem a formação de leis matemáticas que representassem tais situações, ou seja, começaram a compreender como representar os problemas propostos por meio de formas algébricas construindo assim, as leis de formação das funções representadas nas questões. Todavia, por meio da Modelagem Matemática, a pesquisadora alcançou os objetivos que havia proposto em sua pesquisa, construindo junto com seus alunos um pensamento funcional, podendo ser utilizado em vários momentos de suas vidas, ela também notou que alguns alunos mostraram interesse pela matemática depois dessas atividades, tornando-se mais participativos em suas aulas e tendo um novo olhar sobre a disciplina.

Saindo um pouco dos meios mais tradicionais, iremos descrever duas pesquisas em que os autores utilizaram softwares matemáticos no ensino de funções com ênfase na construção de gráficos. Com isso, Calil, Veiga e Carvalho (2010) utilizaram software no estudo de funções polinomiais do 1° grau com duas turmas do 9° ano do Ensino Fundamental. Os autores aplicaram quatro questionários, com os seguintes propósitos:

> O primeiro questionário foi elaborado de forma a nos fornecer um perfil dos alunos, informando seus conhecimentos prévios em informática, suas familiaridades com o computador e *softwares* matemáticos ou simplesmente programas de edição de textos, internet entre outros. Possibilitando visualizar como estes alunos utilizam o computador ou se utilizam. O segundo questionário procura verificar qual a associação que o aluno faz entre educação e informática, e se tem ou não experiência com informática e educação. O terceiro e quarto questionários verificaram a aceitação ou não dos alunos após a utilização da tecnologia de informação no desenvolvimento e construção de conceitos matemáticos. (CALIL; VEIGA; CAVALHO, 2010, p. 21, grifo do autor).

Após a aplicação do primeiro questionário, os pesquisadores escolheram o 9° ano A para a apresentação e aplicação do software Graphmatica nas aulas do conteúdo de funções polinomiais do 1° grau, e os alunos da turma do 9° ano B com a utilização de lápis e papel, tendo como objetivo, comparar o desenvolvimento dos alunos que trabalharam o software e os que tiveram apenas aulas tradicionais.

A partir dos resultados obtidos, os pesquisadores perceberam que os alunos do 9° ano A, tiveram um melhor desempenho nas atividades analisadas pelos autores, mostrando assim, a importância do uso de tecnologias como objeto de estudo dos conteúdos da matemática, pois os alunos se sentem motivados a aprenderem de uma forma diferente das que os mesmos têm costume, todavia, sabemos que esse método de ensino é restrito em algumas ocasiões, pois algumas escolas não contam com salas de informáticas com acesso a internet, ou até possuem, mas como em muitos casos não realizam a manutenção das máquinas contidas na instituição, os professores acabam ficando limitados as aulas tradicionais.

Com uma metodologia semelhante ao trabalho de Calil, Veiga e Carvalho (2010), destaca-se a pesquisa de Tenório, Costa e Tenório (2014) em que aplicaram em duas turmas do 1° ano do Ensino Médio, tendo como principal objetivo, a comparação dos resultados obtidos a partir da resolução de exercícios e problemas com e sem o uso do software GeoGebra em relação a função polinomial do 1° grau.

Em primeira mão, começaram com aulas expositivas ministradas em sala de aula sobre o conteúdo abordado no trabalho, e em seguida, aplicaram um questionário chamado de Pré-teste nas duas turmas com exercícios e problemas. Após esses procedimentos, os autores

ministraram um reforço pedagógico com os alunos da pesquisa, mas assim como o trabalho descrito anteriormente, escolheram uma turma para aplicação do GeoGebra como ferramenta principal na resolução dos exercícios e problemas propostos pelos os mesmos, e os alunos da outra turma, ficaram apenas com o meio tradicional. Seguidamente, aplicaram um Pós-teste para a finalização da pesquisa.

Após a análise dos resultados obtidos, constataram que os alunos tinham dificuldades na interpretação dos enunciados com relação a descreverem os problemas na sua forma algébrica. Eles também constataram que o reforço pedagógico foi essencial para o desenvolvimento dos alunos na resolução de problemas, e que não houve uma vantagem ao aplicarem o software durante as atividades, entretanto, os pesquisadores relataram que os alunos da turma em que utilizaram o GeoGebra, resolveram com mais facilidades os exercícios.

Em geral, as metodologias dos trabalhos utilizados nesse capítulo sobre funções em turmas do 9° ano do Ensino Fundamental e do 1° ano do Ensino Médio, trazem resultados satisfatórios em suas pesquisas realizadas, destacando-se os diferentes modos empregados nesses estudos, pois o ato de inovar é o que fez a diferença nos resultados encontrados pelos investigadores.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

Optamos por uma pesquisa qualitativa, pois iremos analisar a compreensão dos alunos em relação ao nosso estudo sobre funções, de tal forma a compreender o processo que eles obtiveram no processo de coleta de dados. Diante dessas perspectivas, Gerhardt e Silveira (2009) mencionam que uma pesquisa qualitativa "[...] não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc." (p. 31). As autoras também descrevem algumas características desse tipo de pesquisa:

> As características da pesquisa qualitativa são: objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de *descrever*, *compreender*, *explicar*, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências. (p. 32, grifo das autoras).

Logo uma pesquisa qualitativa tem como principal objetivo analisar o objeto pesquisado de tal forma a compreendê-lo de diferentes maneiras, levando em consideração os processos sociais e culturais de seu determinado grupo ou sociedade onde estão inseridos.

Dando continuidade, escolhemos como instrumento de coleta de dados o questionário por ser uma forma vantajosa de obtermos as informações que precisamos, pois ele nos traz o conhecimento de um determinado grupo, de uma forma mais ágil em relação a outros métodos adotados em pesquisas. Mas não podemos afirmar que esse seja o melhor método a ser adotado, tudo dependerá do objeto de estudo e da finalidade da pesquisa. Gil (2008) define o questionário como uma:

> [...] técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc. (p. 121).

O autor comenta algumas vantagens a respeito da utilização do questionário como instrumento de coleta de dados em pesquisas científicas, onde uma delas diz sobre a forma que: "[...] possibilita atingir grande número de pessoas, mesmo que estejam dispersas numa área geográfica muito extensa, já que o questionário pode ser enviado pelo correio." (p. 122). Por outro lado, ele expõe algumas limitações nessa técnica, pois:

> a) exclui as pessoas que não sabem ler e escrever, o que, em certas circunstâncias, conduz a graves deformações nos resultados da investigação.
> b) impede o auxílio ao informante quando esse não entende corretamente as instruções ou perguntas;
> c) impede o conhecimento das circunstâncias em que foi respondido, o que pode ser importante na avaliação da qualidade das respostas.
> d) não oferece a garantia de que a maioria das pessoas devolvam-no devidamente preenchido, o que pode implicar a significativa diminuição da representatividade da amostra. [...]. (p. 122).

De antemão, utilizaremos como método investigativo na análise de dados, as concepções da álgebra de Usiskin (1995), em que ele traz alguns conceitos essenciais para o nosso estudo. Além disso, discutiremos algumas questões do nosso questionário em vista ao *pensamento funcional* dos estudantes, com os conceitos assim descritos, no referencial teórico do nosso trabalho.

5.1 SUJEITOS DA PESQUISA

Os questionários foram distribuídos em uma escola da rede municipal de ensino em um município do agreste pernambucano. Essa escola atende os três turnos, sendo que no primeiro turno tem, como prioridade, os alunos da zona rural próxima ao bairro, mas também há estudantes que residem no bairro. O segundo turno atende o restante dos alunos do bairro, onde nestes dois turnos que foram citados, é oferecido Ensino Fundamental, tendo turmas do 5° ao 9° ano. O terceiro turno é na parte da noite, onde traz a Educação de Jovens e Adultos (EJA), priorizando as pessoas que trabalham ou que não tiveram a chance de estudar ou terminar seus estudos.

Foram aplicados 79 questionários distribuídos em 2 turmas do 9° ano referente ao primeiro turno, sendo 37 na turma A e 42 na turma B. Havia mais uma turma de 9° ano na escola no turno da tarde, mas optamos por escolhermos os 9° anos da manhã, por ser o mesmo professor nas mesmas. Para análise de dados, classificamos os estudantes no conjunto formado por {A1. A2, ..., A79}, ou seja, o "Aluno 1" será chamado de A1, e assim por diante.

Como o nosso objetivo era investigar as concepções da álgebra em alunos do 9° ano do Ensino Fundamental com relação ao estudo e ao conceito de funções polinomiais do 1° grau, optamos por não comparar os resultados obtidos entre as duas turmas, e sim, fazer a análise em geral. Além destas perspectivas, para que não houvesse constrangimento sobre o nosso trabalho perante a escola e os alunos, mantivemos o sigilo da instituição e dos alunos da pesquisa.

5.2 OBJETIVOS E PROPÓSITOS DAS QUESTÕES

Elaboramos o questionário com questões referente à função do 1° grau, com o intuito de analisar nos estudantes, noções algébricas a respeito do conteúdo, tais como: resoluções de equações; determinação dos coeficientes de uma função; cálculo de raízes e valor numérico de uma função; definições de incógnitas e variáveis; resoluções de problemas envolvendo funções. Objetivando analisar o *pensamento funcional* dos alunos.

O questionário foi composto de quatro questões abertas, com o propósito de investigar os conhecimentos que os alunos têm a respeito do conceito de funções polinomiais do 1° grau. Assim, buscamos primeiro saber se o professor já havia ensinado o conteúdo abordado na pesquisa, obtendo uma resposta afirmativa, ele já estava no conteúdo de funções polinomiais do 2° grau.

Logo, segue a primeira questão do questionário:

Questão 1: Observe as seguintes expressões:

a) $v = 5 + 8t$

b) $3x – 2y = 12$

c) $3a = 15$

d) $y = x - 3$

e) $P = 8 + 2,5z$

f) $2x – 1 = 9$

Indique em quais das alternativas as letras representam:

Variáveis:

Incógnitas:

Explique qual a diferença entre incógnita e variável:

Observando a letra a e d, escreva quais são seus coeficientes (angular e linear):

Nessa questão, buscamos *averiguar se os alunos sabem diferenciar incógnita de variável e identificar os coeficientes de uma função do primeiro grau.* Assim, colocamos algumas alternativas sendo elas definidas da letra *a* até a *f*. Nas alternativas *a, b, d* e *e,* encontramos equações em que suas letras representam variáveis, tendo assim, uma noção de interdependência entre os termos contidos em cada expressão, e nas alternativas *c* e *f,* as letras de suas expressões, representam equações do 1° grau, pois as mesmas, estão referindo-se a

incógnitas. Desse modo, pedimos para que os alunos identificassem quais das alternativas as letras das expressões representavam incógnitas e quais variáveis, e para evitar possíveis "chutes" por falta de conhecimento dos alunos, solicitamos que eles justificassem expondo a diferença entre elas. Depois dessas indagações, solicitamos que os alunos identificassem quais eram os coeficientes angulares e lineares das alternativas *a* e *d*, deixando claro que essas correspondiam a funções.

Para garantir uma análise mais precisa sobre nossos objetivos, dividimos essa primeira questão em quatro partes, sendo: a primeira de 1.1 para a indicação das alternativas que contenha variáveis; a segunda de 1.2 para as alternativas com representação de incógnitas; a terceira de 1.3 para a explicação da diferença entre incógnitas e variáveis; e a quarta de 1.4 para descreverem os coeficientes angulares e lineares das alternativas *a* e *d*.

Segue a segunda questão:

Questão 2: Severino foi a um parque de diversões, onde pagava-se uma taxa fixa de R$ 30,00 na entrada, mas, mesmo com esse valor, ele não poderia correr em todos os brinquedos. Nos demais brinquedos, cobrava-se uma taxa de R$ 5,00 por cada corrida. Dessa forma, responda o que se pede:
a) Se ele andasse 7 vezes nos brinquedos que estão fora do pacote da taxa fixa, quanto ele pagará no total? E se forem 20 vezes? E se forem "x" vezes?
b) Suponha que ele pagou R$ 75,00, desse modo, em quantos brinquedos restritos do valor inicial Severino correu?

Nessa questão, pretendíamos primeiro *Identificar a noção intuitiva de funções segundo as três primeiras concepções da álgebra de Usiskin (1995)*, onde conseguimos trabalhar com as três nas alternativas *a* e *b*, além disso, em vista da contextualização do problema, visávamos *Investigar se os alunos conseguem relacionar o conteúdo de função com situações relacionadas ao cotidiano*, e *Observar se por meio da indução o aluno consegue elaborar uma representação envolvendo variáveis*, sendo o último especificamente relacionado à letra *a.* Na letra b os alunos podem resolver intuitivamente pela *aritmética generalizada* ou utilizando *A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*, sendo essas, concepções da álgebra de Usiskin (1995).

Para a análise dos dados da questão dois, dividimos primeiramente a letra *a* da segunda questão em três partes, sendo: a primeira 2.a1 relacionada a pergunta do total a ser pago na situação; a segunda 2.a2 pelo questionamento de brincarem 20 vezes; e a terceira 2.a3 por irem x vezes. Já a letra *b* estará representada por 2b.

A terceira questão trouxe uma tabela para que os alunos a preenchessem diante as informações seguintes:

Questão 3: Preencha o quadro abaixo de acordo com as funções exposta em cada linha e depois responda às questões:

Função	***Raiz (zero da função)***	***Termo independente (Coeficiente linear)***
$f(x) = -3x - 6$		
$g(x) = 4x + 2$		
$h(x) = x - 2$		
$t(x) = -2x + 4$		
$s(x) = -x$		

a) Como você identificou as raízes e os termos independentes das funções?

b) Determine o valor de x para que h(x) =3.

c) Encontre o valor de g(5) e de t(3).

Com essa questão buscamos *Averiguar a noção algébrica dos alunos em relação à identificação de imagens e raízes de uma função polinomial do 1° grau*. Além disso, ela visa entender se os alunos estão familiarizados com alguns termos que usamos quando estamos estudando funções, como a identificação de uma raiz, sendo esta, proposta na tabela, assim como, seus valores numéricos (imagens de uma função), como no exemplo da letra *c*, tais como o valor de seu domínio, este solicitado na letra *b*, e a identificação de seus termos independentes, solicitado na tabela.

Para a análise dos dados na tabela da questão 3, separamos as respostas e representamos respectivamente as raízes e os termos independentes de: *f*(x) por 3.11 e 3.12; *g*(x) por 3.21 e 3.22; *h*(x) por 3.31 e 3.32; *t*(x) por 3.41 e 3.42; *s*(x) por 3.51 e 3.52. Em seguida a letra *a* da mesma questão por 3a, a letra *b* por 3b e a letra *c* por 3c.

A quarta questão, foi aplicada da seguinte forma:

Questão 4: Observe a tabela abaixo, que representa a vazão de um furo numa caixa d'água:

Tempo (hora)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Vazão (litros)	*20*	*40*	*60*	*80*	*100*

a) Quantos litros de água serão despejados em 9h de vazão?

b) Observando o quadro acima, escreva uma relação matemática que corresponda à vazão da água em litros em função do tempo.
c) Sabendo que a capacidade dessa caixa d'água é de 500 litros, calcule quanto tempo será necessário para que ela esvazie, considerando que o furo foi na parte debaixo da caixa.

Essa questão traz uma tabela onde está expressa a vazão da água causada por um furo numa determinada caixa em função do tempo, logo, buscamos mais uma vez, fazer relações com as concepções da álgebra de Usiskin (1995), trazendo como ponto principal, a investigação da sua terceira concepção que trata *A álgebra como estudo de relações entre grandezas*. E para análise dos dados obtidos na questão 4, representamos as letras *a*, *b* e *c* respectivamente por 4a, 4b e 4c.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Perante o levantamento dos dados atingidos na nossa pesquisa, buscamos analisar cada questão dos 79 questionários aplicados. De tal forma a discutirmos minuciosamente cada resposta dada pelos alunos, a fim de justificarmos os possíveis erros e acertos obtidos pelos estudantes.

Como já discutimos anteriormente, para a análise da primeira parte da questão 1, buscamos averiguar se os alunos sabiam diferenciar incógnita de variável, logo obtivemos os seguintes resultados:

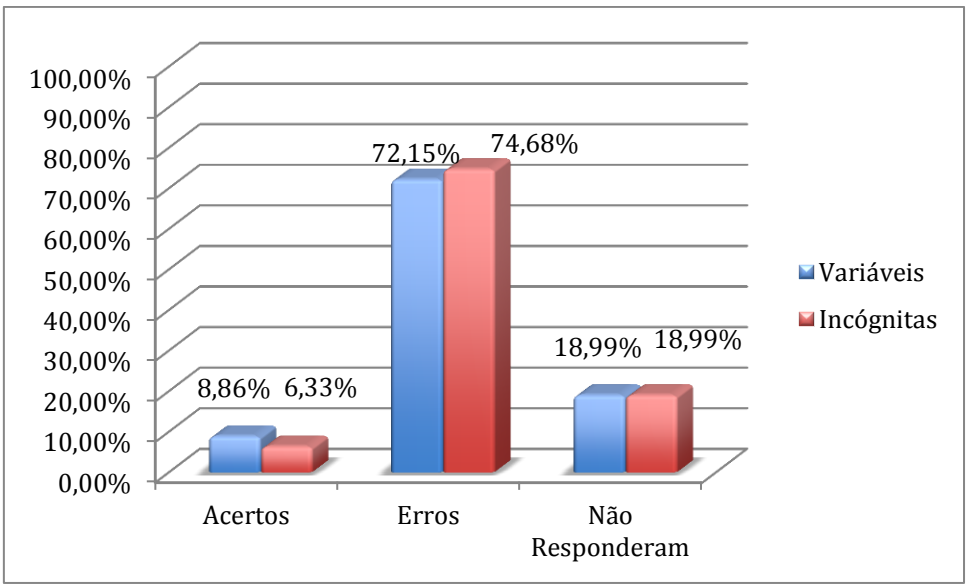
Quadro 1 - Respostas da primeira parte da questão 1

Questão	Acertos	Erros	Não responderam	Total
1.1	7	57	15	79
1.2	5	59	15	79

Fonte: o autor (2019)

Representando da forma percentual, temos:

Gráfico 1 - Percentual da primeira parte da questão 1



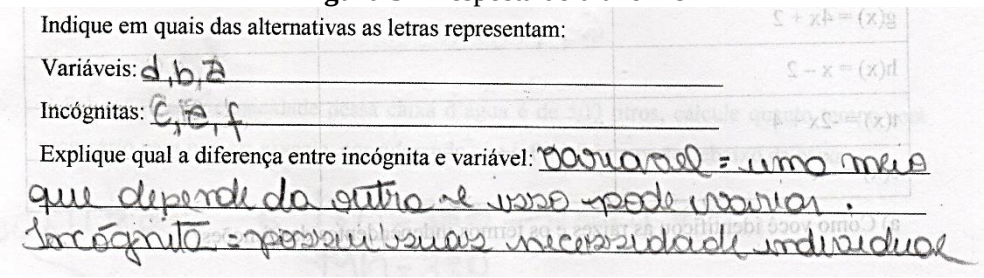
Fonte: o autor (2019)

Nessa questão solicitamos que os alunos selecionassem quais das alternativas as letras das expressões dadas correspondiam a incógnitas e quais a variáveis. Desse modo representamos através do Quadro 1 a pergunta relacionada a variáveis por 1.1, e a 1.2 a correspondente a incógnitas.

Assim, notou-se um alto índice de erros nessas questões. Muito deles vieram por meio de tentativas, pois grande parte das respostas estava subdividida por igual entre 1.1 e 1.2, ou seja, das 6 alternativas, 3 estavam em 1.1 e 3 em 1.2. Em contrapartida, poucos alunos conseguiram separar as alternativas nas respostas corretas, pois talvez não assimilaram ainda por completo suas definições e também a estrutura algébrica que cada expressão representa. Sendo assim, podemos ter como outra possibilidade, o não conhecimento ou o esquecimento de suas definições.

Com essas perspectivas, vamos observar as respostas dos alunos 8 e 9:

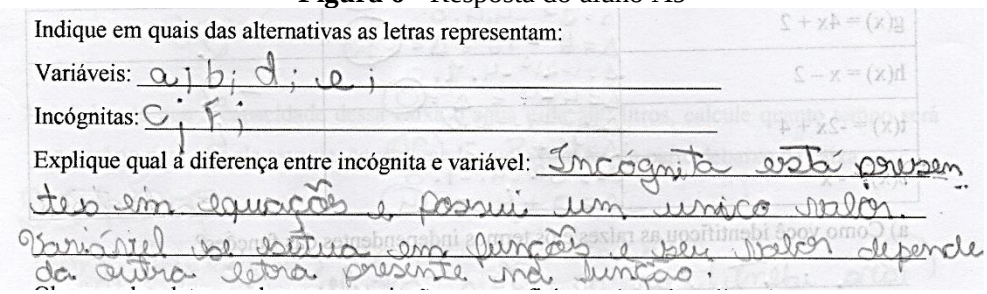
Figura 5 - Resposta do aluno A8


Indique em quais das alternativas as letras representam:
Variáveis: d, b, z
Incógnitas: c, e, f
Explique qual a diferença entre incógnita e variável: variavel = uma coisa que depende da outra e isso pode variar. Incógnita = possui valores necessidade individual

Fonte: O autor (2019)

Observa-se que o aluno 8 acertou as alternativas em que correspondia a variáveis, mas colocou como incógnita a letra “e”, sendo que a mesma é dada pela expressão P = 8 + 2,5z, dando sentido de uma função “P” que depende da variável “z”, em contrapartida, ele soube dar uma resposta concisa sobre a diferença entre esses termos.

Figura 6 - Resposta do aluno A9

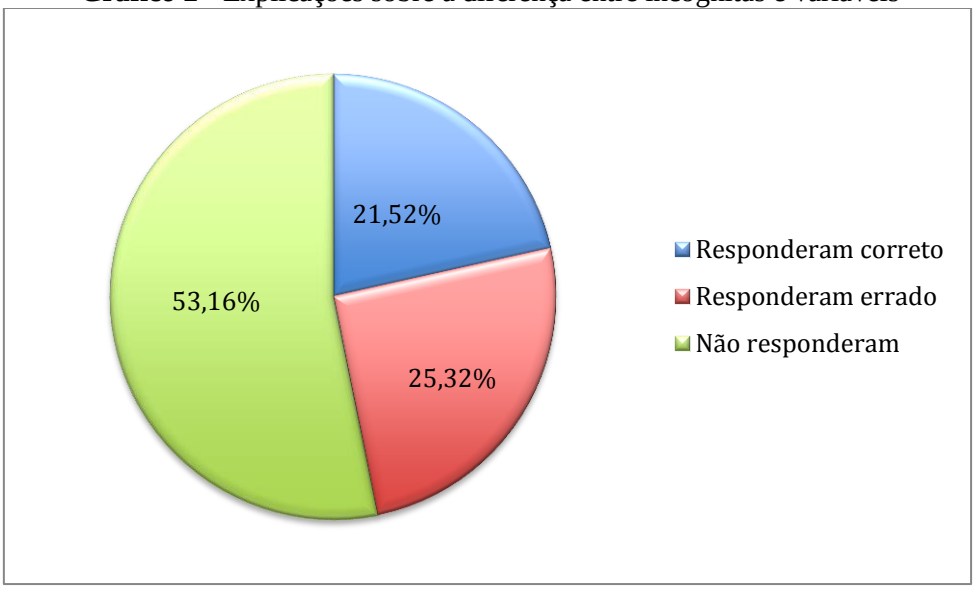

Indique em quais das alternativas as letras representam:
Variáveis: a; b; d; e;
Incógnitas: c; f;
Explique qual a diferença entre incógnita e variável: Incógnita está presente em equações e possui um único valor. Variável se estiva em funções e seu valor depende da outra letra presente na função.

Fonte: O autor (2019)

Diante as respostas dadas pelo aluno 9, percebe-se um certo domínio sobre o conteúdo, além de acertar as alternativas que correspondiam a variáveis e incógnitas, ele trouxe uma explicação clara e objetiva sobre essa situação, expondo com suas palavras que incógnitas pertenciam a equações e variáveis a funções, trazendo também a noção de dependência entre as variáveis, assim como discutimos nos capítulos anteriores. Contudo,

diante as explicações dadas pelos alunos perante a diferença entre esses dois termos, obtivemos os seguintes resultados:

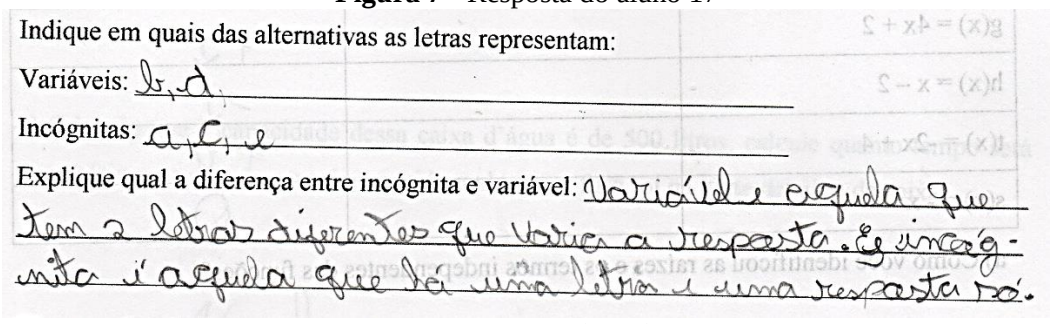
Gráfico 2 - Explicações sobre a diferença entre incógnitas e variáveis



Fonte: O autor (2019)

A partir desse gráfico, notamos um percentual de 53,16% que não responderam essa indagação. Poderíamos então comparar com o Gráfico 1, pois mais de 70% dos estudantes não acertaram as questões de variáveis e incógnitas. Dessa forma, foram distribuídos entre essas três situações, pois, muitos que erraram nessa primeira parte da questão 1, conseguiram dar uma explicação sobre a diferença entre incógnita e variável, podemos observar como exemplo a resposta do aluno 17:

Figura 7 - Resposta do aluno 17


Indique em quais das alternativas as letras representam:

Variáveis: b, d

Incógnitas: a, c, e

Explique qual a diferença entre incógnita e variável: Variável é aquela que tem 2 letras diferentes que varia a resposta. Já incógnita é aquela que tá uma letra e uma resposta só.

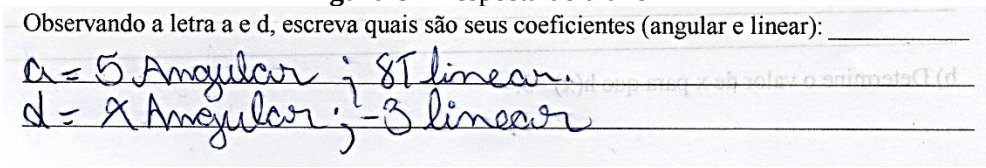
Fonte: O autor (2019)

Embora que o aluno 17 não conseguiu separar as alternativas anteriores corretamente, ele conseguiu explicar o que se pedia de uma forma correta, mostrando assim, uma

compreensão sobre o que já havia estudado em sala de aula, que seja pelas suas séries anteriores ou pelo professor de matemática do 9° ano.

Em seguida, solicitamos que os alunos observassem as alternativas “a” e “d”, e depois separassem seus coeficientes angulares e lineares, portanto, observamos que a maioria dos alunos invertia as ordens. Relembrando as expressões propostas, temos que a alternativa “a” foi dada por $v = 5 + 8t$ e a “d” por $y = x - 3$, ambas já estavam com suas variáveis dependentes isoladas, para garantir melhor a análise pelos alunos, mas o que veio a ocorrer, foi a inversão de seus resultados, pois alguns indicaram que os coeficientes angulares seriam 5 e x e os lineares 8t e -3, e em outros casos eles acertavam a ordem, mas traziam junto com os coeficientes angulares suas variáveis independentes assim como na primeira situação, podemos notar esses fatos, nas respostas dos alunos 21 e 40:

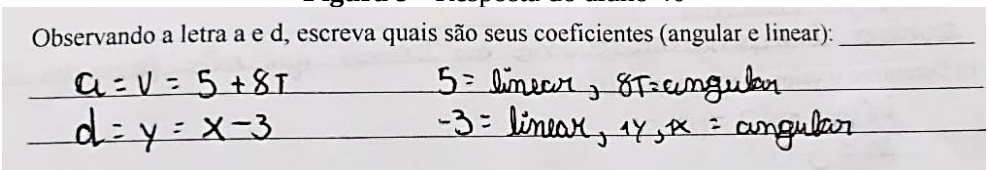
Figura 8 - Resposta do aluno 21



Fonte: O autor (2019)

Observamos que o aluno 21 seguiu a ordem dada na expressão, colocando os primeiros termos como coeficientes angulares e os segundos termos como lineares, mas como já discutido, ele trouxe junto com os coeficientes das funções, suas respectivas variáveis independentes, não compreendendo que os mesmos representavam apenas os números que acompanham as variáveis, assim como o aluno 40:

Figura 9 - Resposta do aluno 40

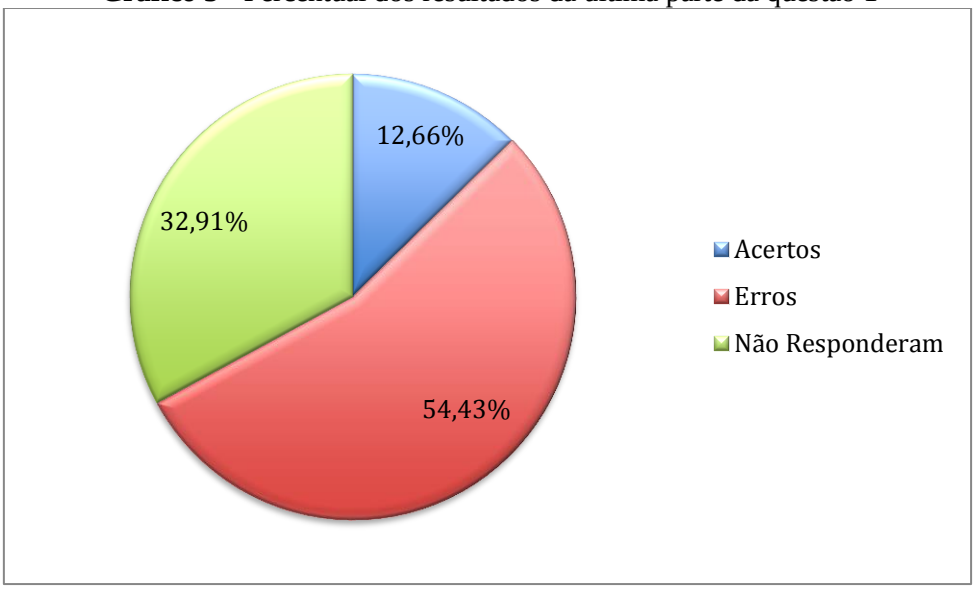


Fonte: O autor (2019)

Esse aluno da Figura 9 compreendeu que os coeficientes lineares são os que não estão acompanhados das letras (variáveis) e os angulares acompanham, mas cometeu o mesmo erro do aluno da Figura 8, pois considerou o “x” e o “8t” como os que representavam esses coeficientes, e também podemos notar, que esse aluno pôs “1y” como angular, logo podemos afirmar que ele compreende como se fosse angular, todos aqueles que estão acompanhados

das letras, não entendendo a relação de interdependência dada por Caraça (1951) nos capítulos anteriores. Segue abaixo o gráfico dos resultados desse quesito:

Gráfico 3 - Percentual dos resultados da última parte da questão 1



Fonte: O autor (2019)

Notemos que apenas 12,66% dos alunos acertaram essa questão e que mais de 50% não tiveram êxito, e grande parte desses erros, foram através dos comentados nos parágrafos anteriores. Além do mais, obtivemos 32,91% que não responderam esse quesito, podendo considerar a não compreensão ou a não importância sobre nossa pesquisa.

Na questão 2, apresentamos uma situação-problema envolvendo uma ida a um parque de diversões, contudo, como já comentado na metodologia, objetivamos analisar nesse quesito, as concepções da álgebra de Usiskin (1995), além de averiguar se os sujeitos da pesquisa conseguiriam fazer uma representação algébrica a partir da leitura do problema indicado.

Para facilitar a análise da segunda questão e compreender com mais detalhes o desempenho dos alunos na mesma, dividimos a letra "a" em três partes, sendo essas chamadas de 2.a1, 2.a2 e 2.a3, referindo-se respectivamente a primeira, a segunda e a terceira pergunta contida nela. A partir dessas perspectivas, segue o quadro dos resultados da letra "a" da questão 2:

Quadro 2 - Resultados da letra "a" da questão 2

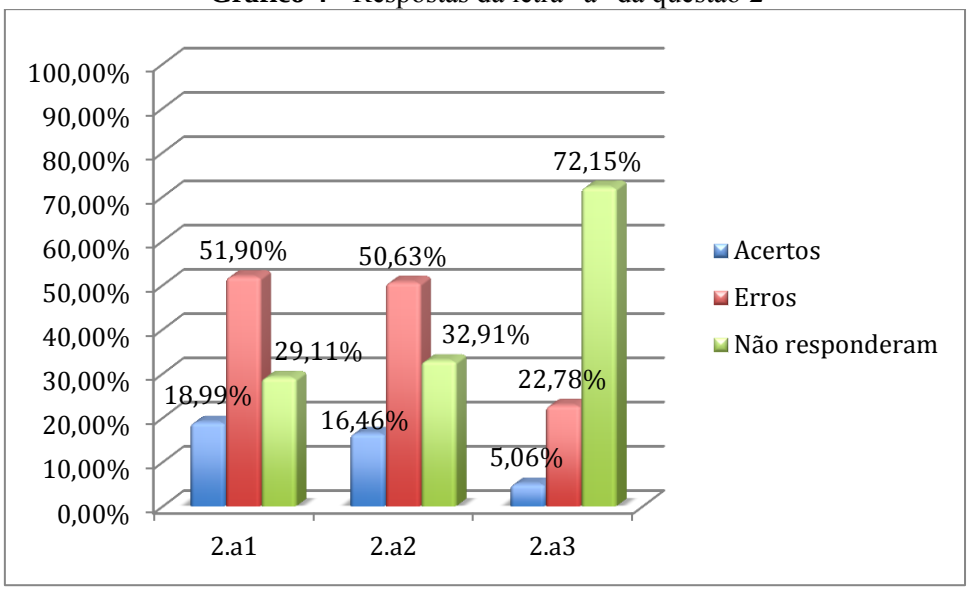
Questão	Acertos	Erros	Não Responderam	Total
2.a1	15	41	23	79
2.a2	13	40	26	79

2.a3	4	18	57	79

Fonte: O autor (2019)

Representando graficamente, temos:

Gráfico 4 - Respostas da letra "a" da questão 2



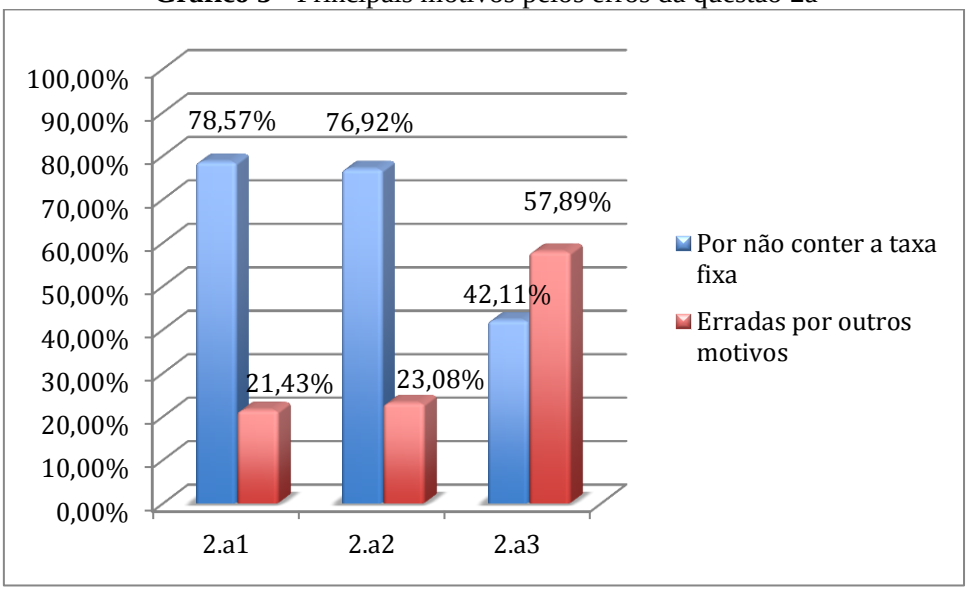
Fonte: O autor (2019)

Em geral, notamos um baixo índice de acertos perante as três perguntas da letra "a" da segunda questão. Podendo ser uma possível causa a falta de compreensão na leitura do suposto problema. De antemão, essa questão trouxe como principal ideia as concepções da álgebra de Usiskin (1995), tendo como nosso maior foco analisar as respostas dos estudantes diante suas perspectivas. Sendo assim, eles teriam que resolver esse quesito perante suas três primeiras concepções, utilizando a *álgebra como aritmética generalizada, como método de resolver alguns tipos de problemas, e a álgebra como estudo de relações entre grandezas*.

Ao se tratar de uma situação na qual poderíamos representá-la na forma de y = ax + b, sendo "a" e "b" os coeficientes angular e linear, respectivamente, e as letras "y" e "x" as variáveis dependentes e independentes do problema. Contudo, antes de responderem a letra a, os alunos ao lerem o enunciado da questão, poderiam montar a representação algébrica da situação, em que poderíamos nos deparar com uma função do tipo: V(x) = 5x + 30, com 30 sendo o valor fixo pago na entrada do parque, e "x" a quantidade de vezes em que o sujeito do problema brincou nos parques que estavam fora do pacote.

Segue abaixo, o gráfico contendo informações sobre os erros cometidos pelos alunos na questão 2ª:

Gráfico 5 - Principais motivos pelos erros da questão 2a



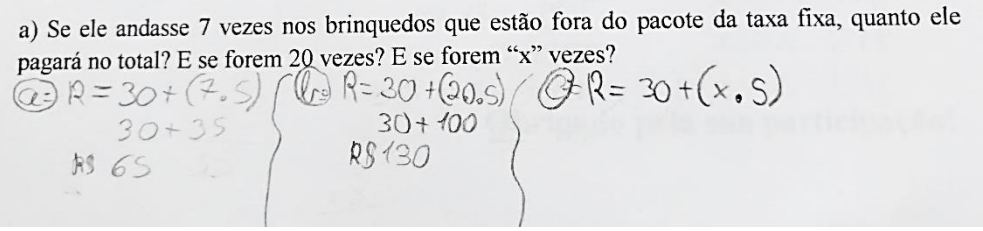
Fonte: O autor (2019)

Observa-se um grande percentual com relação a não compreensão que os 30 reais que representava a taxa fixa da presente função, seria somada com o valor da multiplicação da quantidade de brinquedos específicos por 5, que seria o valor de cada parque, portanto, os alunos que estão representados pela cor azul no Gráfico 5, obtiveram como respostas da: 2.a1 => 7 x 5 = 35; 2.a2 => 20 x 5 = 100; 2.a3 => 5x, ou seja, não somaram com a taxa fixa dada no problema. Sobre as que estão no gráfico anterior como "Erradas por outros motivos", estavam expostas por 7 x 20 = 140 ou então outros resultados que não correspondiam a resposta correta da questão, notando assim, a falta de atenção dos estudantes durante sua leitura.

Presenciamos nas respostas obtidas nas questões 2.a1 e 2.a2 que os alunos se utilizaram da primeira concepção da álgebra de Usiskin (1995), pois ao tentarem encontrar as respostas do presente quesito, usaram-se da *aritmética generalizada*, pois em momento algum, relacionaram seu raciocínio com a álgebra, mas sim com cálculos aritméticos. Todavia, diante das respostas corretas analisadas no questionário, notamos também, que os alunos também resolveram as questões 2.a1 e 2.a2 com a concepção 1 de Usiskin (1995), sem se preocuparem em montar uma representação algébrica para chegarem em seus resultados.

Diante um percentual de 5,06 % de acertos em 2.a3 como está exposto no Gráfico 4, notamos que apenas 1 aluno relacionou a álgebra como o *estudo de relações entre grandezas*, referindo-se assim, a terceira concepção da álgebra de Usiskin (1995). Segue abaixo as respostas desse aluno:

Figura 10 - Resposta do aluno A58 na questão 2a



Fonte: O autor (2019)

Observa-se que o aluno 58, dividiu as três perguntas em "a", "b" e "c", e em primeira mão, montou uma representação algébrica para questão, sendo descrita por: R = 30 + (x.5), percebe-se que o "R" estava representando o valor pago em reais, por isso se utilizou dessa letra, e x estava representando a quantidade de vezes em que se andava nos brinquedos específicos, com isso, notemos a presença da Concepção 2 e 3 perante as respostas desses alunos, pois a partir que ele montou essa relação e a resolveu por meio de manipulações algébricas, podemos dizer que ele utilizou a álgebra como forma de resolver alguns problemas.

Como já discutido anteriormente, a concepção 2 de Usiskin (1995), é conhecida como a passagem da aritmética para a álgebra, e que os alunos por serem do último ano do Ensino Fundamental, já deveriam estar com esse nível de conhecimento, entretanto, reconhecemos as dificuldades dos alunos em meio aos conhecimentos algébricos, e por isso, não devemos unificar os conhecimentos dos alunos em nosso trabalho, já que objetivamos investigar esses conceitos sem generalizar os resultados da pesquisa.

Contudo, perante a resposta do aluno da Figura 10, também observamos a presença do pensamento funcional do estudante com relação ao problema exposto, além do mais, também podemos considerar que ele se desfrutou da terceira concepção de Usiskin (1995), pois ele conseguiu relacionar o valor pago em reais com a quantidade de brinquedos específicos como mencionado no problema. Desse modo, temos que também consideramos como respostas corretas na questão 2.a3, as expressões dadas por: 5x + 30, pois eles conseguiram notar que multiplicando a quantidade de corridas no parque por 5 e somando o resultado por 30, apresentava uma relação matemática considerável para a questão, faltando apenas, representar a outra grandeza por alguma letra, tendo como principal exemplo a resposta do aluno da figura anterior.

Na letra b da segunda questão, objetivamos analisar o método em que os alunos conseguiram solucionar tal problema, entretanto, se os alunos erraram a questão 2.a, ficaria difícil acertar essa situação, então, se eles tivessem o conhecimento da lei de formação da

função como foi demonstrada pelo aluno A58, ficaria mais fácil de solucionar o problema proposto, mas como vimos anteriormente, apenas 1 sujeito conseguiu chegar nessa relação, mesmo que os demais tenham conseguido chegar ao resultado por outros meios. Logo, segue abaixo o quadro dos resultados da questão 2b:

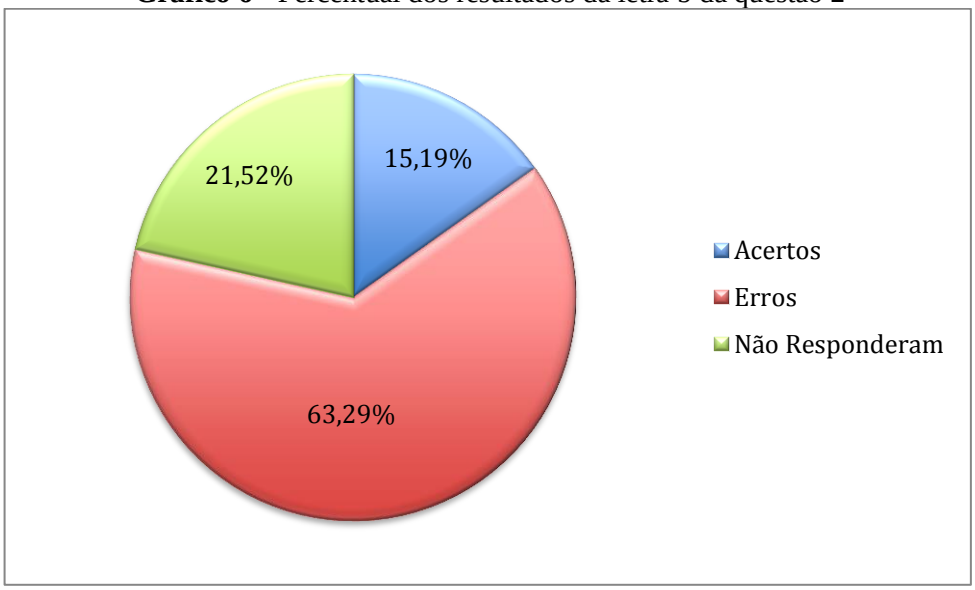
Quadro 3 - Respostas da letra "b" da questão 2

Acertos	Erros	Não responderam	Total
12	50	17	79

Fonte: O autor (2019)

Do total de alunos que participaram da pesquisa, apenas 12 acertaram essa questão, e 17 não responderam, tendo uma grande quantidade de erros, pois como já mencionados anteriormente, precisaria que os estudantes tivessem o conhecimento da lei de formação da função, para que conseguissem assimilar e responder corretamente a mesma. A partir dessas perspectivas, segue abaixo o gráfico com o percentual dos resultados desse quesito:

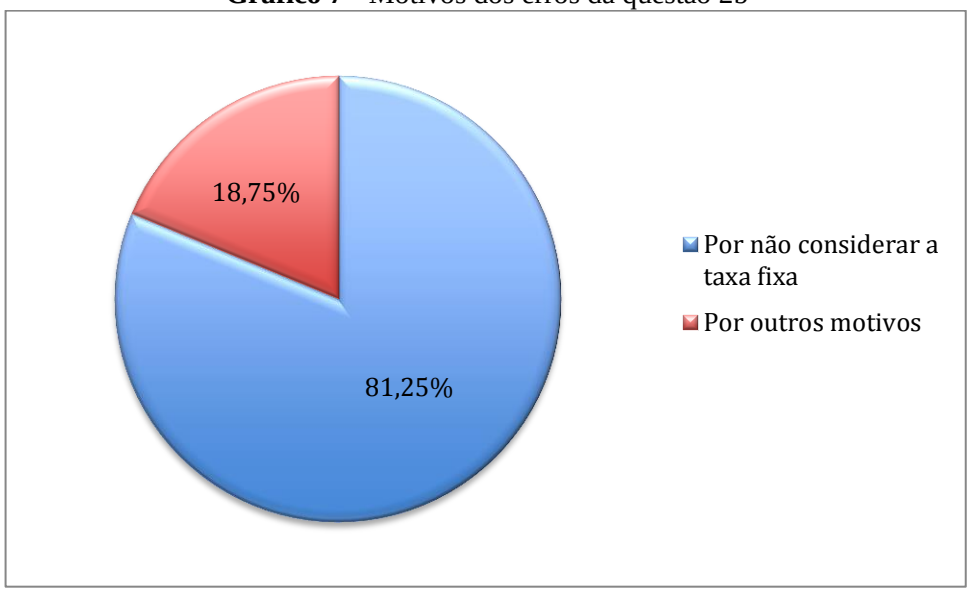
Gráfico 6 - Percentual dos resultados da letra b da questão 2



Fonte: O autor (2019)

Como já comentado nota-se no gráfico anterior, um baixo índice de acertos nessa parte da questão 2, pois os alunos não conseguiram assimilar que havia um valor fixo no problema, então, a maioria dos erros ocorreram pelo fato dos alunos dividirem 75 por 5, obtendo como resultado 15. E apenas 15,19% dos alunos chegaram a concepção que deveria subtrair 15 de 75, e depois dividir o resultado por 5, obtendo-se 9 brinquedos como resposta. Portanto, segue o gráfico referente ao motivo dos erros desse quesito:

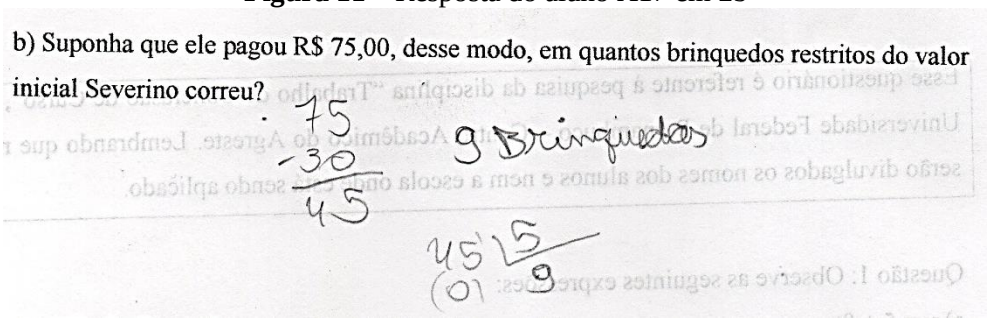
Gráfico 7 - Motivos dos erros da questão 2b



Fonte: O autor (2019)

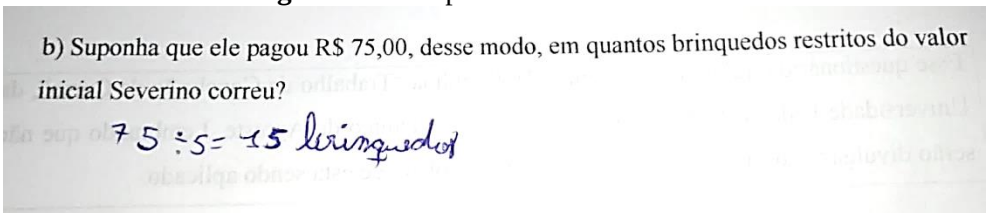
Nota-se no Gráfico 7 que 81,25% dos erros dos estudantes nessa questão, foram por não considerar a taxa fixa descrita no problema, logo como comentado anteriormente, grande maioria dos alunos não tinham acertado a letra "a" do mesmo quesito, sendo esse resultado esperado por nós durante a análise.

Figura 11 – Resposta do aluno A17 em 2b



Fonte: O autor

Figura 12 – Resposta do aluno A3 em 2b



Fonte: O autor (2019)

Na Figura 11, presenciamos noção de um aluno que conseguiu identificar a parte fixa da função exposta no problema, já na Figura 12 temos um estudante que possivelmente não compreendeu essa taxa cobrada na entrada do parque. Diante dos resultados gerais obtidos nessa questão, notamos que poucos alunos conseguem perceber a presença da álgebra contida numa situação-problema, pois através de suas anotações, notamos que eles estão ainda muito presos ao uso da primeira concepção de Usiskin (1995), sendo ela a aritmética generalizada. Logo, perante o pensamento funcional comentado no capítulo 3 desse trabalho, ainda está um pouco distante dos conhecimentos obtidos até o momento pelos alunos.

Na terceira questão, levamos por meio do questionário um quadro com diversas questões e solicitamos que eles determinassem através das funções expostas, suas raízes e seus termos independentes. Infelizmente, não obtivemos resultados satisfatórios com relação à identificação das raízes de uma função, acreditamos que os alunos não compreenderam o que estava pedindo no quadro, ou estavam esquecidos ou confundiram o processo para encontrarem suas respectivas raízes. Segue abaixo, o quadro referente aos resultados obtidos:

Quadro 4 – Resultados obtidos a partir do quadro da questão 3

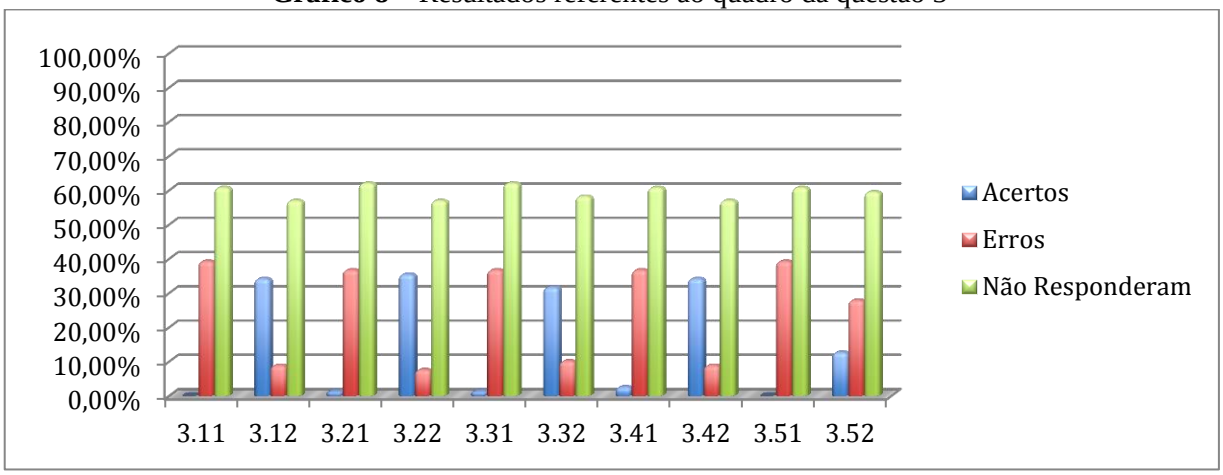
Localização	Acertos	Erros	Não Responderam	Total
3.11	0	31	48	79
3.12	27	7	45	79
3.21	1	29	49	79
3.22	28	6	45	79
3.31	1	29	49	79
3.32	25	8	46	79
3.41	2	29	48	79
3.42	27	7	45	79
3.51	0	31	48	79
3.52	10	22	47	79

Fonte: O autor (2019)

Os respectivos resultados na área da localização fazem respeito ao local referente ao quadro da questão 3, por exemplo, 3.11 é relativo aos resultados da raiz da primeira função, e 3.12 é referente ao termo independente da primeira questão, logo, o primeiro algarismo depois do ponto faz menção com a ordem das funções dadas no quadro, e o segundo algarismo após o ponto representa os resultados referente as raízes(1) e aos termos independentes(2).

A partir dessas informações, temos abaixo o gráfico referente aos resultados do quadro da questão 3:

Gráfico 8 – Resultados referentes ao quadro da questão 3

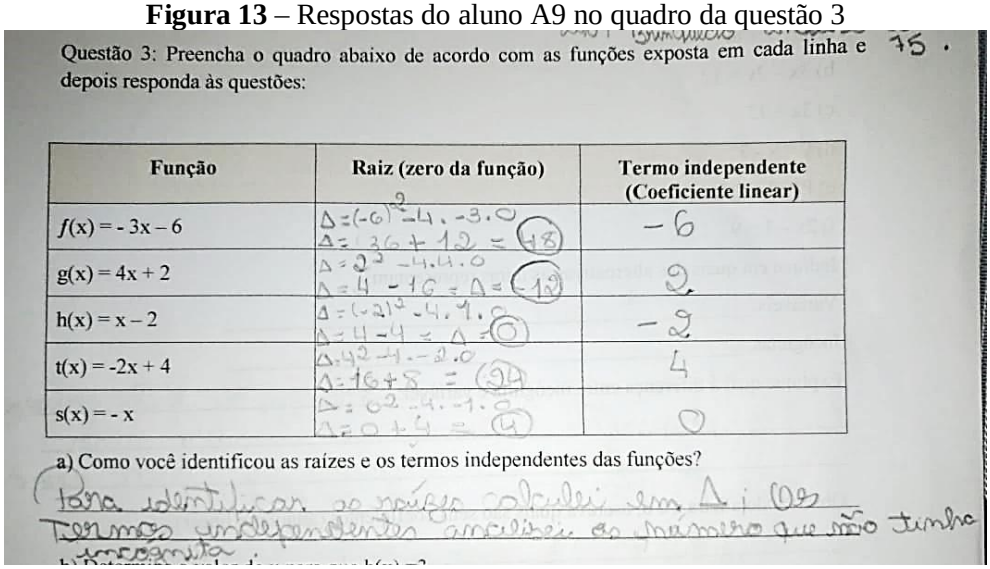


Fonte: O autor (2019)

Diante do exposto, observa-se que muitos alunos não compreenderam a finalidade do quadro da questão 3, desse modo, obtivemos uma média de aproximadamente 60% que não responderam o que estava proposto nele, e os que tentaram responder não obtiveram êxito. Assim, observando o Quadro 4, notemos que a variação foi de 1 ou 2 alunos que responderam corretamente as respectivas raízes das funções, a grande maioria sabia apenas identificar os termos independentes das respectivas expressões.

Uma coisa que chamou atenção em uma das respostas dos alunos foi o caso de um deles tentar achar as raízes das questões usando uma expressão que é utilizada em um dos passos para encontrarem os zeros de uma equação do 2° grau (assunto que estava sendo visto no período da aplicação do questionário da pesquisa), sendo adotado para ele o valor do "delta" como resultados das raízes:

Figura 13 – Respostas do aluno A9 no quadro da questão 3



Questão 3: Preencha o quadro abaixo de acordo com as funções exposta em cada linha e depois responda às questões:

Função	Raiz (zero da função)	Termo independente (Coeficiente linear)
$f(x) = -3x - 6$	$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot -3 \cdot 0$ $\Delta = 36 + 12 = 48$	-6
$g(x) = 4x + 2$	$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0$ $\Delta = 4 - 16 = \Delta = -12$	2
$h(x) = x - 2$	$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0$ $\Delta = 4 - 4 = \Delta = 0$	-2
$t(x) = -2x + 4$	$\Delta = 4^2 - 4 \cdot -2 \cdot 0$ $\Delta = 16 + 8 = 24$	4
$s(x) = -x$	$\Delta = 0^2 - 4 \cdot -1 \cdot 0$ $\Delta = 0 + 4 = 4$	0

a) Como você identificou as raízes e os termos independentes das funções?

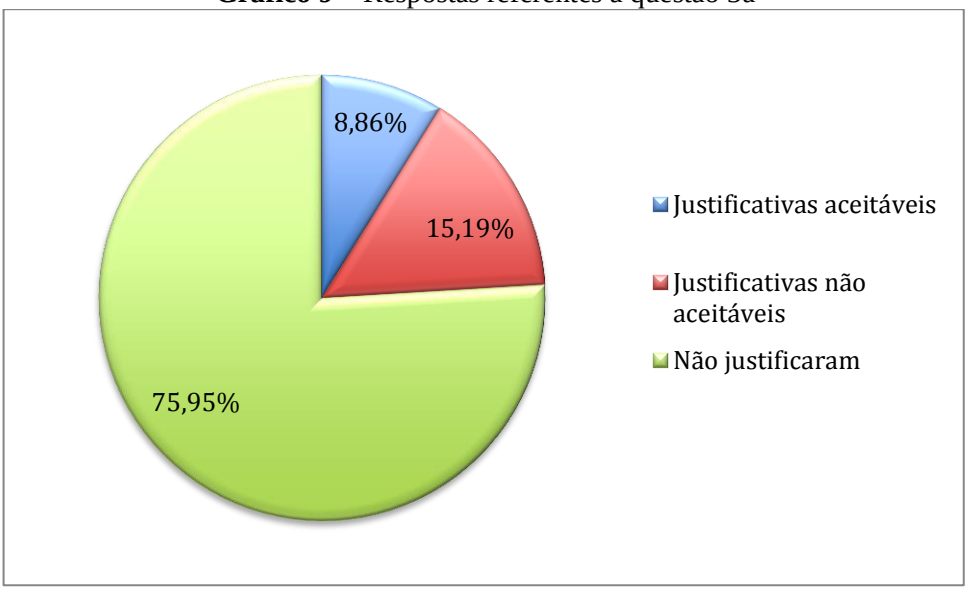
Para identificar as raízes calculei o Δ; os termos independentes analisei o número que não tinha incógnita

Fonte: O autor (2019)

Ao observar as respostas do aluno A9, percebemos que ele conseguiu acertar todos os valores referentes aos termos independentes das questões, mas como já comentado anteriormente, ele usou a expressão para calcular o "delta" de uma função polinomial do segundo grau, em vez de igualar as funções a zero e isolar o "x" nas equações para obterem os respectivos valores dos zeros. Esses fatos também podem ser observados pela própria justificativa dada por ele na letra "a" do mesmo quesito, no qual afirmou que usou o "delta" para achar as raízes e o termo que não havia "incógnita" para representar os termos independentes da questão.

Como exposto na Figura 13, pedimos na letra "a" da questão 3 que os alunos justificassem como conseguiram obter os resultados do quadro, com isso, construímos o seguinte gráfico representando o percentual dos que conseguiram dar uma justificativa aceitável, os que não conseguiram e o total dos que não responderam este quesito:

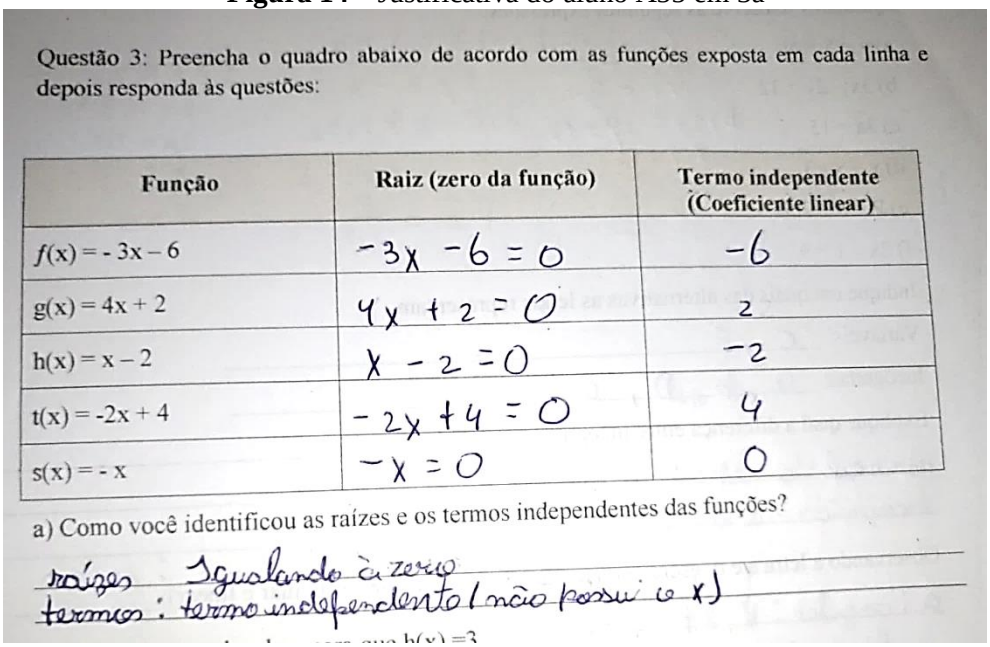
Gráfico 9 – Respostas referentes à questão 3a



Fonte: O autor (2019)

Como visto 75,95% não justificaram esse quesito, isto pode ter vindo a partir da concepção que os alunos podem não ter compreendido o que o quadro estava propondo. Todavia, obtemos um percentual de apenas 8,86% que conseguiram dar uma justificativa aceitável a questão. Desse modo, observemos na Figura 14 uma justificativa aceitável dado pelo aluno A55.

Figura 14 – Justificativa do aluno A55 em 3a



Questão 3: Preencha o quadro abaixo de acordo com as funções exposta em cada linha e depois responda às questões:

Função	Raiz (zero da função)	Termo independente (Coeficiente linear)
$f(x) = -3x - 6$	$-3x - 6 = 0$	-6
$g(x) = 4x + 2$	$4x + 2 = 0$	2
$h(x) = x - 2$	$x - 2 = 0$	-2
$t(x) = -2x + 4$	$-2x + 4 = 0$	4
$s(x) = -x$	$-x = 0$	0

a) Como você identificou as raízes e os termos independentes das funções?

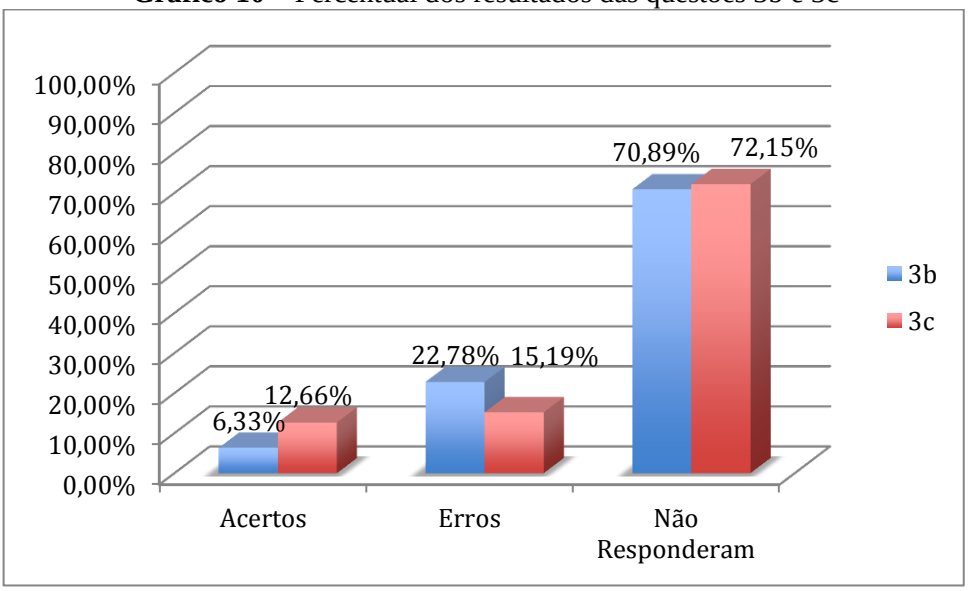
raízes: igualando à zero
termos: termo independente (não possui o x)

Fonte: O autor (2019)

Observem que esse aluno teve a noção de calcular as raízes das funções igualando-as primeiramente a zero, mas, embora que ele não tenha desenvolvido as equações o aluno A55 conseguiu uma justificativa aceitável para a identificação das raízes de funções polinomiais do 1° grau, contudo, ele também informou que os termos independentes das funções são os que não estão acompanhados do "x", logo, podemos considerar que esse estudante conseguiu justificar com êxito essa questão.

Com o propósito de investigar os conhecimentos algébricos dos alunos em questão do cálculo para determinar alguns elementos do domínio e imagem de uma função polinomial do primeiro grau, propomos na letra "b" da questão 3, que através da expressão exposta no quadro por $h(x) = x - 2$, eles calculassem o valor "x" para $h(x) = 3$, e na letra "c" do mesmo quesito, pedimos-lhe que determinassem o valor de $g(5)$ e $t(3)$, das expressões $g(x) = 4x + 2$ e $t(x) = -2x + 4$, respectivamente. Logo, obtemos os seguintes resultados:

Gráfico 10 – Percentual dos resultados das questões 3b e 3c



Fonte: O autor (2019)

Nessa questão, não conseguimos colher uma amostra significante diante o questionário, pois como demonstrado no gráfico, 70,89% dos alunos não responderam a letra "b" dessa questão, e 72,15% deixaram sem responder a letra "c", sendo essa uma das desvantagens do nosso objeto de coleta de dados (o questionário) citadas por Gil (2008), pois conforme o autor, o questionário enquanto técnica de pesquisa "[...] não oferece a garantia de que a maioria das pessoas devolvam-no devidamente preenchido, o que pode implicar a significativa diminuição da representatividade da amostra." (p. 122). Logo, a partir dos resultados obtidos, nota-se a falta de compreensão dos alunos na hora de colocar em prática seus conhecimentos algébricos em vista do conteúdo, e no caso propostos por 3b e 3c, bastava apenas que eles compreendessem onde iriam substituir os valores dados em cada expressão.

Segue no quadro abaixo, o total das pessoas que responderam essas questões corretamente e incorretamente:

Quadro 5 – Total dos alunos que responderam as questões 3b e 3c

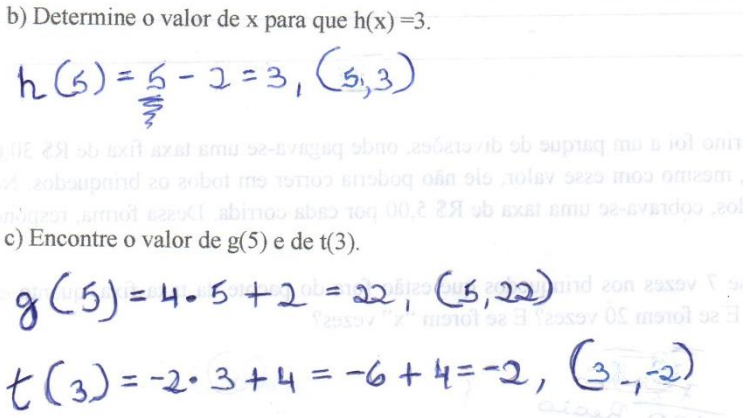
Questão	Acertos	Erros	Total
3b	5	18	23
3c	10	12	22

Fonte: O autor (2019)

Desse modo, temos que de um total de 79 alunos, apenas 23 tentaram responder 3b e 22 se esforçaram para dar uma resposta em 3c. Assim, perante as análises dos questionários, obtemos que 19 alunos que se empenharam para responder a letra "b", também tentaram

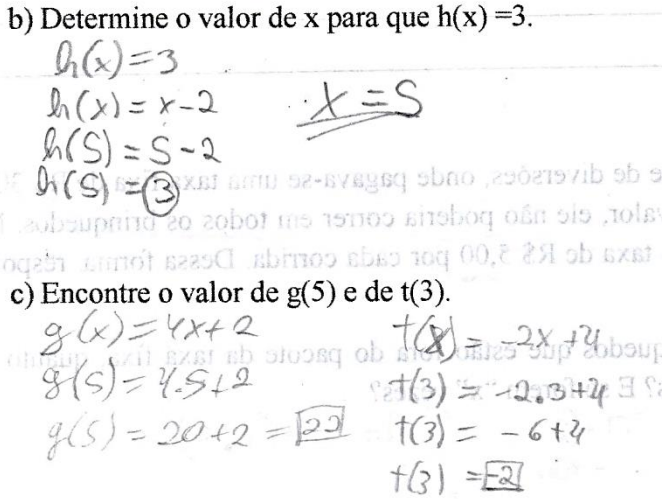
chegar à resposta de “c”, e apenas 3 conseguiram responder corretamente “b” e “c”. Com essas perspectivas, separamos as respostas dos alunos A50 e do A58:

Figura 15 – Resposta do aluno A50 em 3b e 3c



Fonte: O autor (2019)

Figura 16 – Resposta do aluno A58 em 3b e 3c



Fonte: O autor (2019)

A partir das Figuras 15 e 16, que representam as respostas dos alunos A50 e A58 respectivamente, constata-se que ambos responderam corretamente as letras “b” e “c”, além do mais, também podemos notar nas respostas do aluno A50, a noção de par ordenado presente nas suas referidas respostas, logo podemos dizer que, esse aluno tem o conhecimento da representação de um ponto num plano cartesiano que faça parte da função expressa na sua forma algébrica, sendo uma razão muito importante para seu desenvolvimento com relação ao estudo dos variados tipos de funções vistos no Ensino Médio, pois essa ideia de relação entre dois elementos a partir de pares ordenados servirá principalmente para o entendimento da

definição formal de funções, pois como discutido no capítulo 2, os Bourbakianos definiram funções partindo da relação funcional das variáveis x e y de dois conjuntos.

Desse modo, também podemos observar a presença da primeira concepção de Usiskin (1995) diante as respostas desses estudantes em 3b, pois tanto A50 como A58, só a responderam por meio da substituição do algarismo 5 no lugar de "x", e não na substituição de 3 no local de h(x). De fato, se eles não agissem através de suas intuições, chegariam a equação: $x - 2 = 5$, sendo assim, tinham que usarem seus conhecimentos sobre manipulações algébrica para chegarem no possível resultado. Essa técnica, foi utilizada por todos os 5 estudantes que acertaram essa questão, e a maioria de seus erros, ocorreram por substituírem 3 no lugar de "x", tendo como resultado 1, sendo essa a ideia para responder apenas a letra a deste quesito. De antemão, conseguimos identificar a segunda concepção de Usiskin (1995) em poucas respostas dos alunos, entretanto eles ainda estão muito presos a sua primeira concepção.

Na quarta questão, buscamos investigar as concepções algébricas de Usiskin (1995) a partir de uma situação-problema envolvendo intuitivamente sua terceira concepção, que trata *a álgebra como estudo de relações entre grandezas,* logo obtivemos alguns resultados positivos e outros negativos principalmente quando pedimos a notação funcional do problema, mas como já citado anteriormente, os alunos ao se depararem com essa notação, passarão por várias dificuldades até o seu entendimento. Com essas perspectivas, dividimos a quarta questão em 4a, 4b e 4c, representado respectivamente as letras a, b e c do referido quesito. Segue abaixo o quadro correspondente aos resultados desta questão:

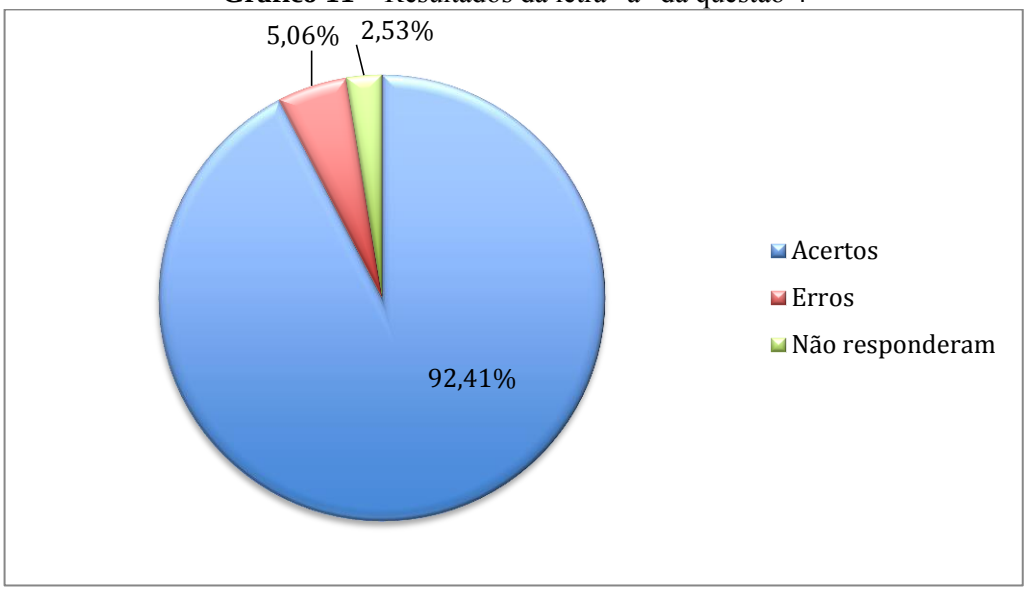
Quadro 6 – Resultados da questão 4

Questão	Acertos	Erros	Não responderam	Total
4a	73	4	2	79
4b	2	35	42	79
3c	42	12	25	79

Fonte: O autor (2019)

Dessa forma, colocamos em 4a um quadro com a descrição de uma situação que envolvia um furo numa caixa d'água, e pedimos que eles calculassem quantos litros de água seria desperdiçado em 9h de vazão. Logo, obtemos os seguintes resultados representados no gráfico abaixo:

Gráfico 11 – Resultados da letra “a” da questão 4

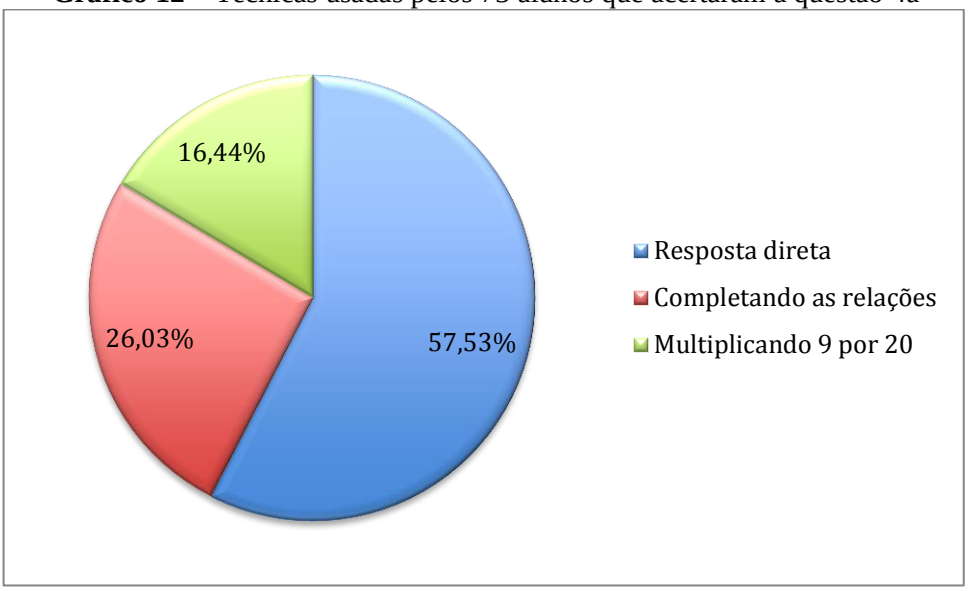


Fonte: O autor (2019)

Diferente das demais questões, essa trouxe uma relação matemática envolvendo uma função polinomial do 1° grau em que não havia um valor fixo como foi dado na questão 2, dessa forma, ao pedirmos por meio do questionário para que determinassem a quantidade de água despejada em 9h de vazão, eles agiram intuitivamente por meio da sequência, mesmo ignorando a parte algébrica da questão, eles conseguiram seguir esse procedimento até chegar a seu determinado resultado.

Considerando a ideia de sequência obtida pelos alunos, podemos considerar as noções básicas para a compreensão do conceito de função conforme as concepções de Caraça (1951), pois ao retratarmos da relação entre as horas de vazão pela quantidade de litros de água derramada pela caixa d’água, estávamos explorando a noção de *interdependência*, no qual ele afirma que na natureza há uma relação entre todos os fenômenos, ou seja, cada objeto que nela existe está relacionado com outro, todavia, também podemos notar sua concepção sobre *fluência*, em que ele declara que o mundo sempre está em constante evolução, ou seja, tudo na natureza modifica-se. Diante as respostas corretas, dividimos as técnicas em que os estudantes utilizaram para responderem a letra “a” da questão 4 no gráfico abaixo:

Gráfico 12 – Técnicas usadas pelos 73 alunos que acertaram a questão 4a



Fonte: O autor (2019)

As “respostas diretas” representadas no gráfico acima são referentes àqueles alunos que colocaram apenas o resultado final que seria 180, pois, por ser uma questão de fácil compreensão, temos como possibilidade, o desenvolvimento do cálculo mental pelos alunos. As que estão como “completando as relações” são relativos aos estudantes que deixaram escrito a relação de cada hora com a quantidade de água despejada, ou seja, continuaram associando cada hora seguinte pelo determinado volume de água desperdiçada. E a respeito do “multiplicando 9 por 20”, vieram a partir da multiplicação da hora pedida no quesito pelo total de água despejado por cada hora.

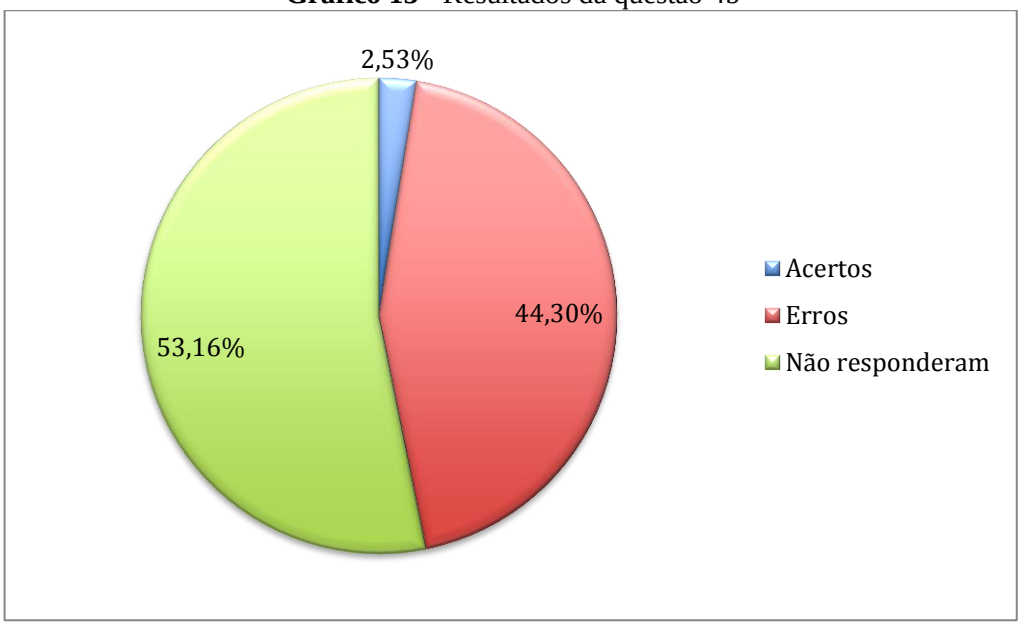
As respostas foram dadas através da concepção 1 de Usiskin (1995), embora que não utilizaram de meios algébricos para resolverem a questão 4a, esses alunos conseguiram generalizar suas respostas chegando indiretamente a sua terceira concepção. Considerando a noção de *fluência* descrita por Caraça (1951), os estudantes desempenharam essa ideia com clareza levando consigo, as considerações do despejamento de água em um determinado período.

Na letra “b” da questão 4, pedimos para que eles desenvolvessem uma relação matemática que representasse a situação dada pelo problema, desse modo, tentamos induzi-los a construírem a partir do enunciado dado, uma função do 1° grau na sua forma algébrica que representasse a vazão de água em função do tempo. Todavia, não obtivemos resultados bons resultados nessa questão, pois os alunos tiveram muita dificuldade em expor essa representação, e com isso, consideramos como certa, apenas a resposta de dois alunos nessa questão. Entretanto, alguns alunos ao tentarem responder esse quesito, informaram que a cada

hora que se passava, eram despejados 20 litros de água, porém não conseguiram representar algebricamente.

Segue abaixo o gráfico com as informações dos resultados da letra “b” da questão 4:

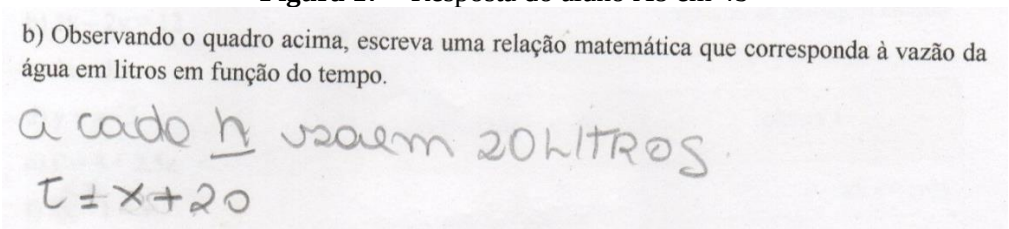
Gráfico 13 - Resultados da questão 4b



Fonte: O autor (2019)

53,16% dos alunos não responderam essa questão, e como já descrito anteriormente, 2,53% a acertaram. Logo, quando falamos da álgebra como relação entre grandezas, poucos alunos conseguiram ter a concepção das noções algébricas contidas na questão. Segue abaixo algumas respostas dados pelos alunos nessa questão:

Figura 17 – Resposta do aluno A8 em 4b

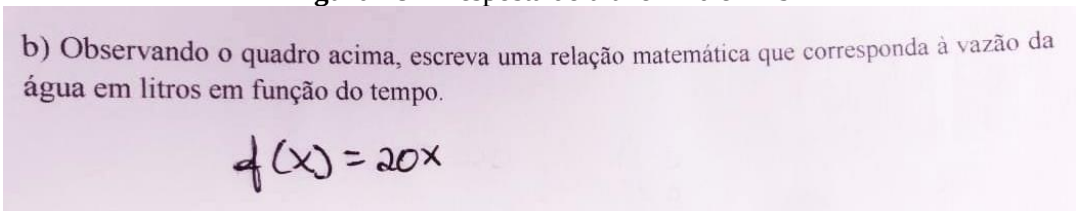

b) Observando o quadro acima, escreva uma relação matemática que corresponda à vazão da água em litros em função do tempo.

a cada h vazam 20 LITROS

$t = x + 20$

Fonte: O autor (2019)

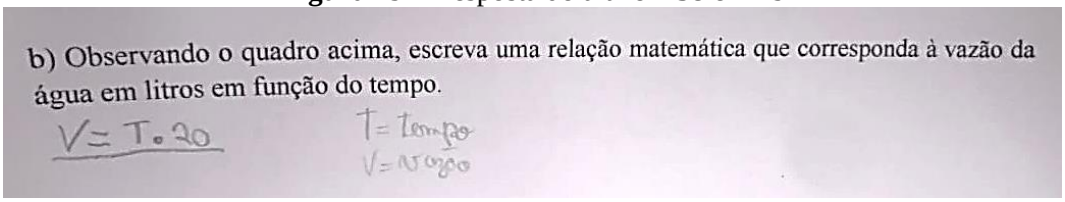
Figura 18 – Resposta do aluno A40 em 4b


b) Observando o quadro acima, escreva uma relação matemática que corresponda à vazão da água em litros em função do tempo.

$f(x) = 20x$

Fonte: O autor (2019)

Figura 19 – Resposta do aluno A58 em 4b

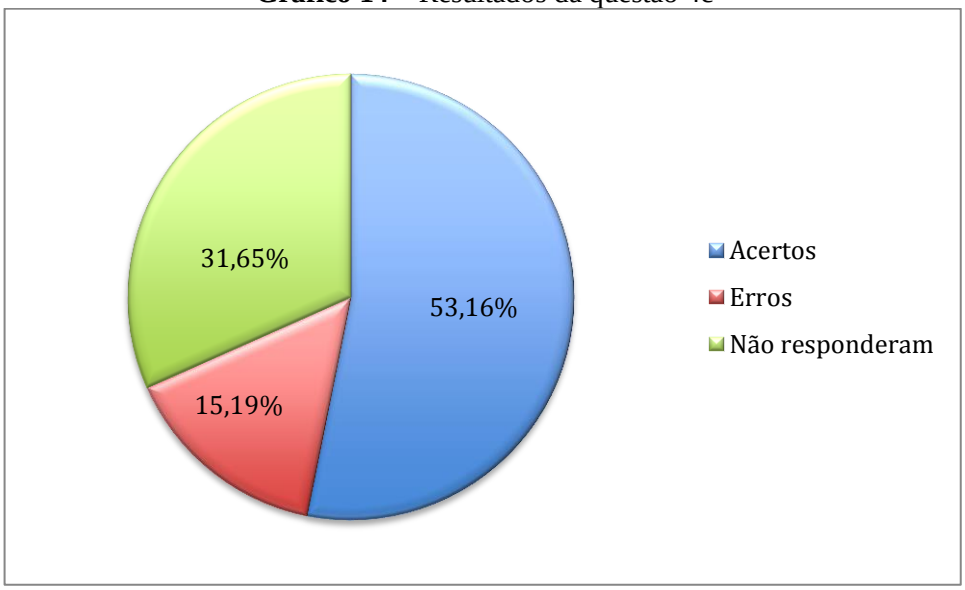


Fonte: O autor (2019)

Observe que na Figura 17 o estudante compreendeu a noção do problema, mas não conseguiu dar a sua representação algébrica, diferente dos alunos representados pelas figuras 18 e 19, pois esses últimos conseguiram generalizar o problema e representar a situação por meio da álgebra, logo, notamos a presença da terceira concepção de Usiskin (1995), que trata a álgebra como o estudo de relação entre grandezas. Todavia, diante os erros encontrados nesta questão, apenas 3 estudantes tentaram apresentar essa relação por meio de uma expressão algébrica.

Depois de tentarmos instigar os alunos a encontrarem uma expressão matemática que descrevesse o problema dado na questão 4, sugerimos que eles calculassem quantas horas seria necessário para que essa caixa esvaziasse sendo sua capacidade de 500 litros. Desse modo, obtivemos os seguintes resultados:

Gráfico 14 – Resultados da questão 4c

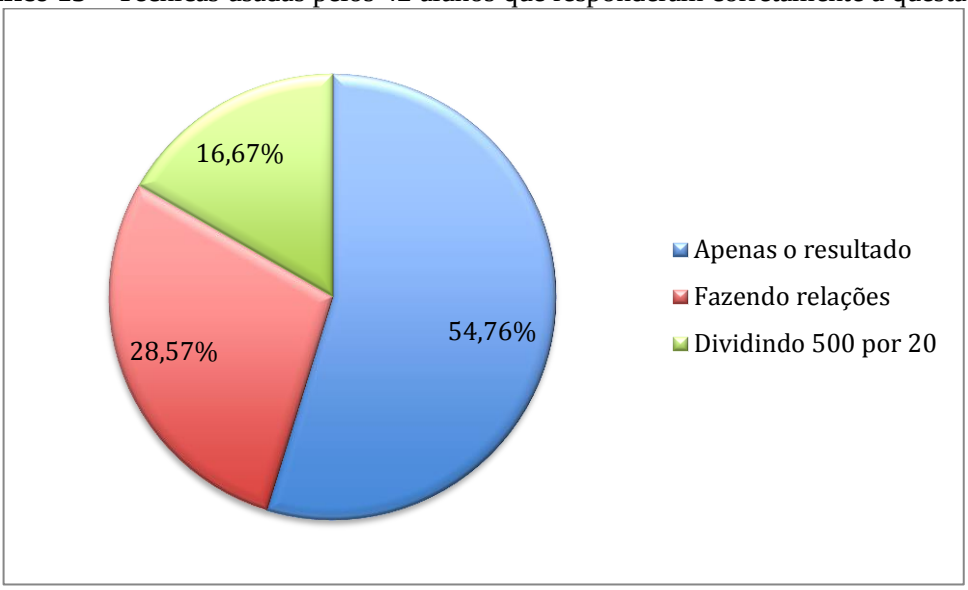


Fonte: O autor (2019)

Observemos que 53,16% dos alunos acertaram essa questão, nesses, alguns deixaram descrita essa situação como a divisão de 500 por 20, outros continuaram fazendo relações até

chegar o resultado e os restantes colocaram apenas o resultado final que seria 25 horas. De antemão, destacamos mais uma vez, a presença da concepção 1 de Usiskin (1995) ao utilizarem a álgebra como aritmética generalizada neste quesito. Com essas circunstâncias, colhemos a partir das respostas corretas os seguintes resultados:

Gráfico 15 – Técnicas usadas pelos 42 alunos que responderam corretamente a questão 4c



Fonte: O autor (2019)

Como já discutido anteriormente, observamos acima as formas em que os alunos deixaram por escrito nas respostas respondidas corretamente, com isso, podemos concluir que os alunos não conseguiram enxergar o problema dado com a perspectiva de responderem essas questões através de expressões algébricas, porém, sentimos que há entre eles um pensamento funcional notável descrito em suas respostas, no qual podemos considerar que alguns já estão preparados para encararem a formalidade do conceito de funções nos anos seguintes de sua vida escolar.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de investigar concepções da álgebra com relação ao estudo de funções polinomiais do 1° grau envolvendo estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental concluímos que poucos alunos compreendem noções algébricas perante algumas situações que envolvam os conceitos básicos de funções. Também analisamos por meio do questionário, as concepções da álgebra de Usiskin (1995) através das respostas dos alunos, com isso, após uma análise minuciosa no que deixaram registrado no nosso objeto de coleta de dados, notamos uma grande concentração em sua primeira concepção da álgebra, que se trata do estudo da álgebra como aritmética generalizada.

A partir dessas perspectivas, sentimos falta principalmente da sua segunda concepção, pois a maioria dos alunos que participou dessa pesquisa não tentou solucionar os problemas propostos através do uso de expressões algébricas e nem de suas simplificações. Logo sentimos que eles ainda têm um grande laço referente à resolução de problemas algébricos por meio da aritmética generalizada, esquecendo assim do uso de incógnitas e variáveis em sua composição.

Desta forma, acreditamos que alguns alunos optam por não trabalharem com os conhecimentos algébricos adquiridos nos anos anteriores na sua vida escolar, todavia, sabemos das dificuldades encontradas por muitos na disciplina de matemática durante toda a Educação Básica. Desse modo, não podemos generalizar os resultados obtidos nesta pesquisa, pois nossa coleta de dados abrangeu apenas um pequeno quantitativo de estudantes em uma determinada escola. Portanto nossa pesquisa buscou apenas compreender essas concepções perante um público específico e não na educação em geral. Contudo, vale salientar que muitos alunos conseguiram responder corretamente o questionário aplicado.

De antemão, se tratando da compreensão de funções polinomiais do 1° grau relacionada à terceira concepção de Usiskin (1995), observamos que poucos alunos conseguem enxergar o estudo da álgebra como relação entre grandezas. Porém, quando colocamos na questão 4 uma situação tratando-se das relações entre o total de água despejado em função do tempo, mais de 90% dos alunos conseguiram compreender esse problema e resolvê-lo corretamente, sendo observado entre eles um notável pensamento funcional. Mas, como discutido anteriormente, não alcançaram sua representação por meio de uma expressão algébrica, generalizando a situação através de seus conhecimentos aritméticos.

No entanto, os conteúdos da álgebra na disciplina de matemática durante a Educação Básica são de difícil compreensão para muitos estudantes, pois o ato de representar variáveis e

incógnitas através do uso de letras do nosso alfabeto acarreta, para alguns, uma confusão no entendimento de muitos conceitos algébricos estudados na escola. Principalmente no ato da utilização das manipulações algébricas ensinadas pelos professores, ou seja, eles têm dificuldades nas simplificações que usamos na resolução de alguns problemas, como por exemplo, na determinação dos zeros de uma função.

Também podemos levar em consideração com relação à falta de compreensão dos alunos diante o conceito de função, todo o processo da formalização de sua definição descrito neste trabalho. Pois como o seu desenvolvimento durou quase 600 anos partindo do primeiro registro encontrado na França por Nicole Oresme em 1361 e formalizado apenas no século XX pelos Bourbakianos, temos que ter relevância em querer fazer muita cobrança dos alunos para o entendimento desse conteúdo em seu primeiro contato que geralmente ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental.

Contudo nosso trabalho abre um leque para que novas pesquisas sejam realizadas com o propósito de obterem novos resultados e novas concepções sobre o conceito de função na Educação Básica. Novos questionamentos poderão surgir a partir dos resultados obtidos nesta pesquisa. Com isso, esperamos que nosso trabalho possa servir de suporte para novas investigações sobre o conteúdo abordado, pois considerando a noção de *fluência* discutida nos capítulos anteriores por Caraça (1951), novas variáveis irão surgir.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRAGA, C. **Função a alma do ensino da matemática.** São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Ensino fundamental. Terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC /SEF, 1998.

CALIL, A. M; VEIGA, J; CARVALHO, C. V. A. Aplicação do software GRAPHMATICA no ensino de funções polinomiais de 1º grau no 9º ano do ensino fundamental**. Revista Práxis**, Volta Redonda (RJ), ano II, n.4, 2010. Disponível em: http://www.researchgate.net/publication/259460509_Aplicacao_do_Software_GRAPHMATICA_no_Ensino_de_Funcoes_Polinomiais_de_1o_grau_no_9o_ano_do_Ensino_Fundamental. Acesso em: 08 ago. 2018.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da álgebra.** 1. ed. Lisboa: [s.n.], 1951.

CHAVES, M. I. A; CARVALHO, H. C. Formalização do conceito de função no ensino médio: uma sequência de ensino-aprendizagem. Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., 2004, Recife**. Anais** [...] Recife: SBEM, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC15184188215.pdf. Acesso em: 20 ago. 2018

CRUZ, P. J. D. **Interdisciplinaridade como prática para a construção do conceito de função**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Mossoró, 2015.

DAMAZIO, A; ROSA, J. E; PEREIRA, L. L; BANHARA, E. V. A concepção de álgebra na proposição de Davydov para o ensino de número. **Unisul**, Tubarão, v. 5, n. 9, p. 280-299, Jan./Jun., 2012.

GERHARDT, T. E (org); SILVEIRA, D. T (org). **Métodos de Pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. E-book. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 28 nov. 2018.

GIL, A. C; **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOMES, M. L. M. **Álgebra e funções na educação básica.** Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas (SP), v. 4, n. 1 [10], mar, 1993, p. 78-91. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1761/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf. Acesso em: 14 out. 2018.

KARNAL, L. **Conversas com um jovem professor.** São Paulo: Contexto, 2012.

LEÃO. A. S. G; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia da resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista** - RS, n. 10, v. 1, p. 27-35, 2009. Disponível em: http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/article/viewFile/19/18. Acesso em: 20 ago. 2018.

MACIEL, P. R. C. **A construção do conceito de função através da história da matemática.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2011.

MACIEL, P. R. C; CARDOSO, T. F. L. C. A História do Conceito de Função em Vídeo: uma proposta para a aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, 2014, p. 1348-1367.

NEVES, J. D; RESENDE, M. R. O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, 2016, p. 599-625.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 1997.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife: SEE, 2012. Disponível em: http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/matematica_ef_em.pdf. Acesso em: 23 abr. 2019.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 15, 1990, p. 3-9.

SÁ, P. F; SOUZA, G. S; SILVA, I. D. B. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. **Traços** (UNAMA), Belém, v. 6, n. 11, 2003, p. 123-140.

SANTOS, M. B; KOEFENDER, H; JELINEK, K; GODOY, M; JARDIM, R. A construção do conceito de função no ensino fundamental. Encontro Nacional de Educação Matemática, 8., 2004, Recife**. Anais** [...]. Recife: SBEM, 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/1MC21923175068.pdf. Acesso em: 15 jun. 2018.

SCHÖNADIER, B. **Modelagem Matemática e introdução da função afim no Ensino Fundamental.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

SOUZA, J. R; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática 7° ano**, FTD, 1. ed., São Paulo, 2013.

SOUZA, R. P. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia.** 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes (RJ), 2016.

TENÓRIO, A; COSTA, Z.S.S; TENÓRIO, T. Resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1° grau com e sem o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra**, São Paulo (SP), v. 3, n. 2, 2014, p. 104-119.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações de variáveis. In: **As ideias da álgebra.** Organizadores: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

ZUFFI, E. M.. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Revista Hipátia**, Campos do Jordão (SP), v. 1, n. 1, 2016, p. 1-10.

ZUFFI, E. M; PACCA, J. L. A. O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências**. Revista Ciência & Educação**, Bauru (SP), v. 8, n. 1, 2002, p. 1-12.