UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

RAYZA SILVA MAGALHÃES

INVESTIGANDO O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE NO USO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Caruaru
2019

RAYZA SILVA MAGALHÃES

INVESTIGANDO O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE NO USO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Cristiane de Arimatéa Rocha.

Caruaru

2019

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 – 1242

M188i Magalhães, Rayza Silva.
Investigando o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele no uso do teorema de Pitágoras por alunos do 1o ano do ensino médio. / Rayza Silva Magalhães. – 2019.
71 f. il. : 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2019.
Inclui Referências.

1. Educação básica. 2. Geometria – Estudo e ensino. 3. Pitágoras, Teorema de. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2019-186)

RAYZA SILVA MAGALHÃES

INVESTIGANDO O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE NO USO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovada em: _18_/_06__/_2019__.

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

____
Profº. Me. Renato Alves de Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Ma. Ana Paula Barbosa de Lima (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor, meu Deus, por me conceder paz, saúde, força e sabedoria ao longo de toda essa jornada, me fazendo superar todos os obstáculos.

Aos meus pais, Luciene Maria Silva Magalhães e Renato Ramos Magalhães, que nunca mediram esforços, me incentivando e apoiando durante toda minha vida.

À minha orientadora, Cristiane de Arimatéa Rocha, por toda paciência, dedicação e momentos de aprendizagem, os quais foram fundamentais para a realização desta pesquisa.

Ao meu marido, Gabriel Lima, pela paciência, companheirismo, ajuda e colaboração durante toda trajetória deste curso.

Ao meu filho, Noan Rafael, que em meio a tanta correria, era o meu sossego e minha calmaria, onde eu encontrava forças para prosseguir.

Aos meus amigos de curso, Danielle Tavares, Monyck Ferreira, Adeilton Cordeiro, Aquiles Santos e Marina Carvalho, por estarem comigo durante todo o curso, pelas longas conversas, momentos de aprendizagem e principalmente por cada momento de diversão que, com certeza, ficarão para sempre em nossas lembranças. Obrigada pela amizade de cada um de vocês.

Por fim, quero agradecer a cada um que, de alguma forma, contribuiu para a realização desse trabalho.

RESUMO

A partir de observações e da vivencia de sala de aula, foi possível notar a dificuldade de alguns alunos em Geometria, principalmente nos anos finais do Ensino Fundamental. Essa dificuldade faz com que os alunos cheguem no Ensino Médio sem conseguir elaborar um raciocínio geométrico, apresentando dificuldades em resolver algumas situações que envolvem a geometria. Com isso, o presente trabalho teve como objetivo principal investigar o nível de pensamento geométrico dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, na resolução de questões que envolve o Teorema de Pitágoras, um dos principais conteúdos vistos no Ensino Fundamental - anos finais. É esperado que no 1º ano do Ensino Médio, os alunos já tenham adquirido um certo conhecimento sobre o teorema. Nesse sentido a Teoria de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele é o nosso principal referencial teórico. Para a coleta de dados, foi elaborado três tipos de questionários, aplicados em duas turmas na primeira unidade do ano letivo. Todos os questionários foram compostos por questões envolvendo o Teorema de Pitágoras, baseados nos diferentes níveis de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele. A pesquisa teve a participação de sessenta alunos. Na análise dos dados, foi constatado que a maioria dos alunos foi classificada no nível de visualização, bem como, muitas respostas em branco também foram encontradas, o que pode revelar uma certa dificuldade do aluno ao trabalhar com o Teorema. Consideramos também uma pesquisa francesa de Berté (1995 apud BASTIAN, 2000), na qual o autor identifica os principais erros cometidos por alunos franceses na aplicação do Teorema de Pitágoras. Os questionários também foram construídos baseados em algumas questões trabalhadas por Berté (1995), na expectativa de analisar se os mesmos erros seriam cometidos por alunos brasileiros. Nesse sentido, ao pensar um conteúdo geométrico nos três níveis de pensamentos geométricos ligados ao Teorema de Pitágoras, permitiu-se observar o nível de pensamento geométrico que foi desenvolvido, gerando discussões que podem ser aproveitadas na formação inicial de professores de matemática, a fim de diminuir as dificuldades apresentadas por meio de novas maneiras de trabalhar o desenvolvimento do pensamento geométrico nas aulas da disciplina, tornando-as mais atrativas.

Palavras-chave: Educação básica. Geometria. Pensamento geométrico. Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

In the course of some classroom experiences, it was possible to note the difficulty of some students in Geometry in Basic Education especially in the final years. What causes the students to arrive in High School without being able to elaborate a geometric reasoning, thus having a difficulty in solving some geometric situations. This work aims to investigate the geometric thinking level of the students of the 1st year of High School when solving questions related to the Pythagorean Theorem. The Pythagorean Theorem is one of the main contents seen in elementary school years, with it is expected that in the 1st year of high school, students have already acquired a certain knowledge about it. The Van Hiele Geometric Thought Development Theory is our main theoretical framework. In order to collect data, we developed three types of questionnaires, applied in two classes in the first unit of the academic year, all of them composed of questions involving the Pythagorean Theorem, based on the different levels of geometrical thoughts of the Van Hiele Theory. The research consisted of sixty students. In the analysis of the data it was verified that the majority of the students were classified at the visualization level, and many blank answers were also found which makes us perceive a certain difficulty of the student when working with the Theorem. We also consider a French research by Berté (1995, apud Bastian, 2000), in which Berté identifies the main mistakes made by French students in the application of the Pythagorean Theorem, the questionnaires were also constructed based on some questions worked by Berté, in the expectation of to analyze if the same mistakes would be made by Brazilian students. We also consider that when we think of a geometric content in the three levels of geometric thinking linked to the Pythagorean Theorem, we can observe the level of geometric thinking that has been generated, generating discussions that can be used in the initial formation of mathematics teachers in order to reduce the difficulties presented and found ways to work on the development of geometric thinking in math classes more attractively.

Keywords: Geometry. Pythagorean theorem. Geometric Thinking. Basic education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é considerada um dos principais meios de conhecimento que o ser humano deve adquirir. Todavia, ainda é uma realidade distante de muitos alunos que não conseguem compreendê-la ao decorrer do percurso escolar. Muitas vezes, isso acontece pelo fato de que a matemática é trabalhada de forma abstrata, fazendo com que o aluno não compreenda alguns dos seus conceitos. Segundo Rabaiolli et al (2008, p. 1), a dificuldade de desenvolver uma aprendizagem significativa da matemática advém, nesses casos, "principalmente pelo fato de o aluno não conseguir associar o conteúdo abordado em sala de aula com uma situação que possa surgir na sua vida".

Em relação à Geometria, além de ser uma das áreas mais antigas da matemática, é também um dos melhores meios de matematizar a realidade. A partir desse campo do saber é possível trabalhar vários métodos relacionados à nossa realidade diária, abordando situações concretas para, posteriormente, levar a situações mais abstratas. Desse modo, Bulos (2011) enfatiza que:

> A geometria pode ser o caminho para desenvolvermos habilidades e competências necessárias para a resolução de problemas do nosso cotidiano, visto que o seu entendimento nos proporciona o desenvolvimento da capacidade de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair (BULOS, 2011, p. 5).

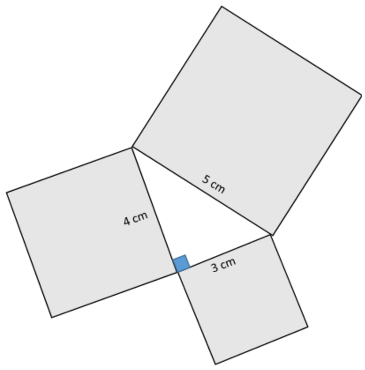
A Geometria está inclusa nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), devendo ser abordada durante todo o ano, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, relacionada com outras áreas de conhecimento. Não obstante, mesmo com a inclusão da geometria nos PCN's, ainda fica a critério do professor trabalhar esse campo matemático na sua sala de aula. Dessa forma, conforme Luz et al (2007):

> Durante o ano letivo da disciplina de matemática do ensino fundamental, grande parte dos professores não consegue administrar o seu plano curricular, pois seu tempo se torna escasso. Consequentemente a geometria não será estudada. Isso acarretará deficiências para as séries posteriores. Tais deficiências tornar-se-ão uma "bola de neve" prejudicando imensamente no que concerne ao desenvolvimento da inteligência espacial do educando. O qual chegará ao ensino médio sem o conhecimento prévio da geometria (LUZ et al, 2007, p. 7).

O que nos faz entender o porquê muitas vezes a geometria é trabalhada apenas superficialmente nas aulas de matemática, fazendo com que os alunos permaneçam ao longo da vida escolar com essa dificuldade. Um dos principais objetivos da Geometria é fazer com que o aluno desenvolva um pensamento geométrico, baseado em teoremas e propriedades específicas de figuras geométricas. Segundo Rabaiolli et al (2008, p. 3), “o ensino da geometria deve ser cumprido no planejamento escolar e ao mesmo tempo em que este conteúdo deve ser abordado, há a necessidade de não ser só mais uma mera repetição de conceitos e teoremas lineares, sequenciais e planos”.

Nessa perspectiva, um dos conteúdos da geometria trabalhados no Ensino Fundamental - anos finais - é o Teorema de Pitágoras. Na maioria dos livros didáticos, suas definições são apresentadas como “o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” (BASTIAN, 2000, p. 10), ou através da imagem abaixo (Figura 1), na qual visivelmente conseguimos relacionar o Teorema de Pitágoras a triângulos retângulos.

Figura 1 - Representação do Teorema de Pitágoras



Fonte: A autora (2019).

O Teorema de Pitágoras descreve uma relação existente no triângulo retângulo e é considerado um dos principais conteúdos ensinados na Educação Básica. Segundo a pesquisa realizada por Bastian (2000), existe uma grande dificuldade dos alunos à aplicação do Teorema, tanto na resolução de problemas, como na aprendizagem de outros conceitos. Para Leivas (2012):

> [...] o Teorema de Pitágoras é um dos principais assuntos a ser tratado na Escola Básica e, consequentemente, deve ter uma atenção especial nos cursos de formação de professores de Matemática. Segundo nossa vivência como professor de diversos níveis de ensino, não ocorre uma generalização do teorema, o que deixa os estudantes com uma concepção única de como ele se apresenta e se aplica a diversas situações (LEIVAS, 2012, p. 644).

Os alunos veem a matemática, muitas vezes, como fórmulas que precisam ser decoradas e apenas aplicadas. Isso é o que acontece no estudo do Teorema de Pitágoras, o aluno memoriza a fórmula e apenas visualiza quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo. Leivas (2012, p. 644) específica isso dizendo que o aluno "memoriza uma fórmula e uma visualização de quadriculados postados sobre os lados de um triângulo retângulo e cria, na maioria das vezes, obstáculos epistemológicos por envolver e não distinguir aspectos geométricos de aspectos numéricos".

Diante dos aspectos mencionados, essa pesquisa teve como principal objetivo investigar o nível do pensamento geométrico dos alunos do 1º ano do Ensino Médio ao resolver questões relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Como objetivos específicos, temos os seguintes:

a) Analisar as estratégias e os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras;
b) Identificar os níveis de pensamentos geométricos em que os alunos se encontram.

Para tanto, o trabalho está organizado da seguinte maneira: no segundo capítulo apresentamos o modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, exemplificando como este pode ser usado, as diferenças entre níveis do pensamento geométrico e, ainda, de que modo os níveis foram denominados e definidos.

No Capítulo 3, destacamos um pouco da história do Teorema de Pitágoras, as definições que englobam o teorema, as diversas demonstrações, principalmente a mais tradicional entre elas, discorrendo também acerca das relações métricas de um triângulo retângulo.

No quarto capítulo, apresentamos a metodologia utilizada para nossa investigação, focalizando os participantes da pesquisa e os instrumentos de investigação utilizados. No capítulo cinco, foi realizada a análise da investigação e a discussão sobre os dados coletados. Por fim, concluímos com as considerações finais, na qual foi realizada uma análise geral dos dados coletados na pesquisa, chegando aos resultados finais.

2 O MODELO DE VAN HIELE DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

De acordo com Crowley (1994), a Teoria de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele teve origem através das teses de doutorado do casal holandês Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, que na Universidade de Utrecht, no ano de 1957, apresentaram um modelo de ensino e aprendizagem de geometria. Pouco tempo depois do falecimento de Dina, Pierre esclareceu, aperfeiçoou e promoveu a teoria.

O modelo pode ser usado tanto para orientar a formação quanto também para avaliar as habilidades dos alunos em geometria, e consiste em cinco níveis de raciocínio e aprendizagem de conteúdos geométricos. São eles: a) visualização, b) análise, c) dedução informal, d) dedução formal e e) rigor. Segundo Van de Walle (2009), cada um dos cinco níveis descreve os processos de pensamento usados em contextos geométricos. Ademais, pode também descrever como pensamos e os tipos de ideias geométricas em cada nível.

2.1 OS NÍVEIS DE VAN HIELE

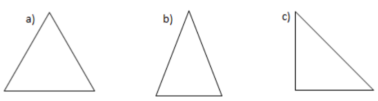
Os níveis da Teoria de Van Hiele estão enumerados de 0 a 4. A literatura tem apresentado várias nomenclaturas sobre os níveis, como será exposto nos tópicos abaixo. As considerações realizadas foram baseadas nos estudos de Van de Walle (2009). Ainda, para exemplificar, apresentamos algumas situações nas quais estão em evidência cada um desses níveis.

a) Nível 0 – Visualização

Os objetos de pensamento nesse nível são as formas e “o que elas parecem”, enquanto os produtos de pensamento são as classes ou agrupamentos de formas que são “parecidas”.

Exemplo:

Quadro 1 - Questão 1 - Questionário Tipo 1

Questão 1
Identifique em qual dos triângulos abaixo podemos aplicar o Teorema de Pitágoras? Justifique sua resposta.


Fonte: A autora (2019).

A questão exemplificada é uma das que compõem um dos questionários construídos nessa pesquisa, baseando-se no nível 0 (visualização), na qual o único instrumento de informação são as imagens apresentadas na questão.

b) Nível 1 – Análise

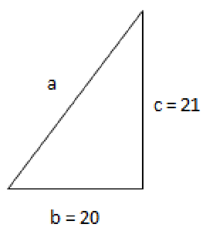
Os objetos de pensamento são as classes de formas, mais do que as formas individuais, e como produtos de pensamentos nesse nível estão as propriedades das formas.

Exemplo:

Quadro 2 - Questão 4 - Questionário Tipo 2

Questão 4

Fábio respondeu à questão abaixo:



$$21^2 = 20^2 + a^2$$
$$441 = 400 + a^2$$
$$a^2 = 441 - 400$$
$$a^2 = 41$$
$$a = \sqrt{41}$$

O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras feita por Fábio?

Fonte: A autora (2019).

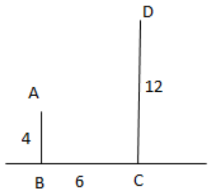
A questão apresentada também compõe um dos questionários eleitos nesse estudo, e tem como base o nível 1 (análise), no qual o aluno precisa de uma atenção maior, ao analisar o que foi proposto na questão, bem como, ao justificar sua resposta, é necessário ter conhecimento das definições do Teorema.

c) Nível 2 – Dedução informal

Os objetos de pensamento nesse nível são as propriedades das formas, e os produtos de pensamento são as propriedades dos objetos geométricos.

Exemplo:

Quadro 3 - Questão 6 - Questionário Tipo 2

Questão 6
Dadas as medidas dos lados AB, BC, CD, ache a distância de AD. 

Fonte: A autora (2019).

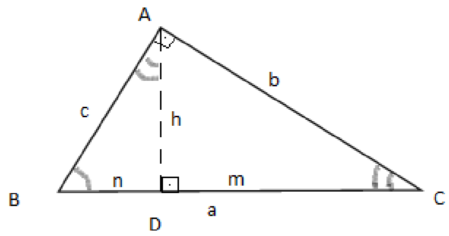
A questão 6 exige do aluno um conhecimento mais avançado, para que ele possa visualizar o triângulo retângulo na figura apresentada, sem algumas medidas serem projetadas. Essa questão também está entre as questões aplicadas nos questionários desse trabalho. Além disso, baseia-se no nível 2 (Dedução informal).

d) Nível 3 - Dedução

Os objetos do pensamento são as relações entre as propriedades dos objetos geométricos, e os produtos de pensamento são sistemas axiomáticos dedutivos para a Geometria.

Exemplo:

Figura 2 - Triângulo retângulo - Relações métricas



Fonte: A autora (2019)

Segundo Barbosa (1993 apud SANTOS et al, 2012), nos cursos tradicionais de Geometria Plana, bem como, nos livros sem preocupação educacional, a prova empregada é a prova por semelhança de triângulos. Para Lima (2006 apud SANTOS et al, 2012), esta é a prova mais curta e a mais conhecida. No triângulo ABC, retângulo em A (Figura 2), a altura AD (perpendicular à BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD =, complemento de CÂD =, complemento de). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total.

A expressão acima fornece $c^2 \ = an$ e $b^2 \ = am$, conhecidas como relações métricas de Euclides. Adicionando-as, obtemos $b^2 + c^2 = am + na = a(m + n) = a\,x\,a = a^2$ (BARBOSA, 1993 apud SANTOS et al, 2012, p. 5). Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar outras relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, as quais deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$ e $h^2 = mn$.

e) Nível 4 - Rigor

Os objetos do pensamento são sistemas dedutivos axiomáticos para a Geometria, e os produtos de pensamento são comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da Geometria.

Nesta pesquisa, como o público alvo foi composto de alunos do 1º ano do Ensino Médio, realizou-se uma análise baseada apenas nos três primeiros níveis de pensamento geométrico. O nível base é a *visualização*, que tem como expectativa que o aluno que esteja nesse nível consiga identificar algumas propriedades apenas com o que ele está visualizando, exemplo seria ele conseguir identificar triângulos retângulos, triângulos equiláteros, entre outros. O segundo nível é o de *análise,* quem tem como expectativa que o aluno consiga classificar as figuras através de propriedades, por exemplo, classificar figuras planas ou espaciais. Já no terceiro nível, caracterizado pela *dedução informal*, o que se espera do aluno é que ele consiga aplicar algumas teorias informalmente, definindo algumas propriedades na hora de resolver uma questão, justificando-se através de definições.

Nesse contexto, Leivas (2012, p. 645) conclui que:

> Aspectos de imaginação, intuição e visualização estão intimamente ligados e constituem, atualmente, elementos que podem contribuir para uma educação geométrica e um melhor desempenho em geometrias, segundo nossa forma de conceber a Geometria atual e futuramente.

Portanto, acreditamos que atividades que desenvolvam formas de representações geométricas do Teorema de Pitágoras, possam contribuir para o processo de desenvolvimento dos níveis da Teoria de Van Hiele.

3 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Um dos mais famosos teoremas estudados nas disciplinas de matemática, no Brasil, é o Teorema de Pitágoras. O mesmo foi desenvolvido por Pitágoras, dizem as histórias que enquanto ele passava pelo Egito e ficou encantado com as pirâmides. Muito pouco se sabe da vida desse matemático, pois nada ficou registrado por escrito. Contudo, de acordo com Kamers (2008, p. 8), “existem, no entanto, indícios de que o chamado Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$) já era conhecido dos Babilônios em 1600 a. C.”. Entretanto, Pitágoras foi o primeiro a desenvolver uma demonstração.

O Teorema de Pitágoras pode ser definido como “o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” (BASTIAN, 2000, p. 10), podendo ser compreendido por meio de vários métodos de demonstrações. O teorema descreve uma relação existente no triângulo retângulo e é considerado um dos principais conteúdos ensinados na Educação Básica.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN’s) (BRASIL, 1998), os conteúdos de Matemática que estão destinados ao Ensino Fundamental se apresentam organizados em quatro blocos, sendo eles “Números e Operações”, “Espaço e Formas”, “Grandezas e Medidas” e “Tratamento de Informação”. A respeito dessa organização, o referido documento assinala que:

> É uma organização dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da Matemática. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo um pré-requisito para o que vai sucedê-lo (BRASIL, 1998, p. 22).

O Teorema de Pitágoras está localizado no bloco Espaço e Forma, segundo os PCN’s (BRASIL, 1998, p. 89), que destacam as “verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.” No que diz respeito a esse bloco, encontramos que:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p. 51).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2016, p. 7) “é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica”.

São denominadas três etapas na estrutura da BNCC, são elas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Na BNCC o Ensino Fundamental está organizado em cinco áreas de conhecimento, cada uma delas estabelece competências especificas da área. Nas áreas que abrigam mais de um componente curricular, também são definidas competências especificas de componentes. Nos anos iniciais, temos as turmas de 1º ao 5º ano, e os anos finais, turmas de 6º ao 9º ano. De acordo com esse documento (2016, p. 29 grifos nossos), "[...] as **unidades temáticas** definem um arranjo dos **objetos de conhecimento** ao longo do Ensino Fundamental, adequado às especificidades dos diferentes componentes curriculares". Ainda, esclarece que "as **habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares".

Ainda em relação à Base Nacional Comum Curricular, nos anos finais, especificamente no 9º ano, na unidade temática da Geometria, encontramos o Teorema de Pitágoras como um dos objetos de conhecimento, o qual visa desenvolver as seguintes habilidades: "resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes" (BRASIL, 2016, p. 317). Com base no que diz o referido documento, sabendo que o Teorema de Pitágoras está incluso na grade curricular dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental - anos finais -, os questionários foram aplicados em turmas do 1º ano do Ensino Médio, para identificarmos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos.

De qualquer modo, a aplicação do Teorema de Pitágoras produz grandes dificuldades de ensino e aprendizagem por parte de alunos e professores dentro de sala de aula. Bastian (2000), em uma das fases de seu trabalho, o qual teve como foco o processeco de ensino e aprendizagem do Teorema de Pitágoras, elaborou e aplicou uma sequência didática com um público alvo alunos do 1º ano do Ensino Médio. Essa sequência está dividida em duas partes, sendo a primeira voltada para aplicação do teorema, assim como a outra, porém em situações problemas, pode-se também verificar através da resolução de problemas se os alunos conseguiram compreender o uso do Teorema ou apenas tiveram o intuito de memorizar a fórmula, apenas aplicando os valores. Enfatizou-se, dessa forma, a importância dos livros didáticos perante o Teorema de Pitágoras, conforme Bastian (2003) afirma:

> [...] Para melhor compreensão do significado do Teorema almejou-se com isso que eles o entendessem não como uma simples fórmula a memorizar, mas sim como ferramenta utilizável na resolução de inúmeros problemas de geometria. [...] (BASTIAN, 2003, p. 45).

Bastian (2000) refere-se à pesquisa francesa de Annie Berté (1995), na qual a autora realizou um levantamento diagnóstico, identificando quais os erros mais frequentes cometidos por alunos franceses ao utilizar o Teorema de Pitágoras. De acordo com Bastian (2000, p. 3 apud BERTÉ, 1995, p. 119), os erros citados são os seguintes:

1) utilização do teorema para calcular o terceiro lado de um triângulo não retângulo;

2) sendo **c** o comprimento da hipotenusa e **a** e **b** catetos, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ sem perceberem que essa conclusão contradiz a condição de existência de triângulo;

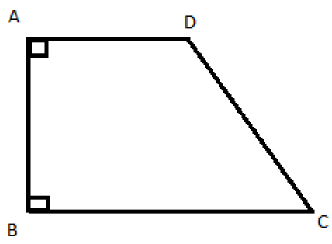
3) ao calcular um dos catetos, alguns alunos escrevem que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto;

4) os alunos escrevem essa relação corretamente (item 3), mas justificam dizendo que aplicaram o "recíproco" do Teorema;

5) na verificação para decidir se um triângulo é ou não retângulo, muitos alunos e mesmo alguns docentes (segundo Berté) afirmam ter aplicado o recíproco quando concluem que, se a relação não é verificada, o triângulo não é retângulo;

6) em classe do 3ème (alunos com aproximadamente 14 anos, o correspondente à 8a série do ensino fundamental no Brasil) foi proposto o seguinte exercício: "Dados AD, AB e BC, calcular DC". Erro encontrado: segundo o Teorema de Pitágoras, $DC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2$.

Figura 3 - Trapézio ABCD



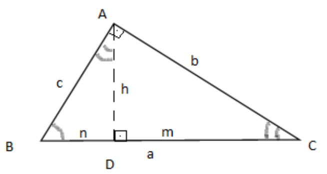
Fonte: A autora (2019).

Nos questionários construídos na presente pesquisa, a qual buscou investigar os níveis de pensamentos geométricos da Teoria de Van Hiele alcançados pelos alunos, procurou-se também identificar se algum dos erros apontados por Berté seriam cometidos também na nossa realidade. O que de fato ocorreu e será retomado no capítulo 5, no qual foi analisado e discutidos os resultados obtidos.

Segundo Santos et al (2012, p. 1), para uma melhor formalização e fixação do Teorema de Pitágoras em um contexto geral, seria interessante que os professores de Matemática abordassem com os alunos algumas demonstrações desse teorema. Porém para isso, é necessário que o professor tenha um certo domínio sobre essas demonstrações, para que consiga explanar de uma melhor maneira mais dinâmica e siginificativa para os seus alunos e, por conseguinte, fazer com que eles consigam compreender todo o contexto de demonstração do teorema. Nesse contexto, independente de qual demonstração foi trabalhada, o que realmente importa é a compreensão e participação do aluno.

Uma das demonstrações consideradas tradicionais, encontradas em diversos livros didáticos, é a do triângulo retângulo, com as projeções dos catetos e a altura (figura 4), sendo deduzidas as relações métricas.

Figura 4 - Relações métricas no triângulo retângulo



$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \; e \; \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Fonte: A autora (2019).

A expressão acima fornece $c^2 = an$ e $b^2 = am$, conhecidas como relações métricas de Euclides. Adicionando-as, obtemos $b^2 + c^2 = am + na = a\ (m + n) = a \text{ x } a = a^2$ (SANTOS et al, 2012 apud BARBOSA, 1993). Segundo Santos et al (2012):

> Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar outras relações importantes do triângulo retângulo. Além das duas relações, que deram origem à demonstração do teorema, obtemos a relação $bc = ah$ e $h^2 = mn$ (SANTOS et al, 2012, p. 5 apud BARBOSA, 1993, p. 5).

Além da demonstração citada acima, um grande número de demonstrações do Teorema de Pitágoras está descrito no livro do professor de Matemática Elisha Scott Loomis, do Estado de Ohio, Estados Unidos, publicado em 1927. O livro reúne 230 demonstrações do supracitado teorema. Em sua segunda edição, em 1940, ampliou-se esse número para 370 (SANTOS et al, 2012 apud BARBOSA, 1993). Faltou encerrar esse parágrafo.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Primeiramente, este trabalho originou-se e desenvolveu-se a partir das vivências da pesquisadora em salas de aula de 9º ano do Ensino Fundamental, onde percebeu-se uma grande dificuldade dos alunos para trabalharem especificamente com conteúdo geométricos, muitas vezes, por não conseguir relacionar esses saberes com a sua realidade. Em relação ao do Teorema de Pitágoras, foi notado a falta de compreensão em propriedades básicas da geometria, surgindo então a necessidade de começar a compreender o pensamento desses alunos, e buscar relacionar com os níveis de pensamento geométrico de Van Hiele.

Dessa forma, serão apresentados, a seguir, os participantes e o tipo de pesquisa utilizado para coletas de dados. O principal objetivo da pesquisa foi verificar os meios de pensamentos que serão utilizados pelos alunos na resolução de questões relacionadas ao Teorema. Buscando analisar as estratégias e procedimentos utilizados por eles na justificativa de cada questão. Na coleta de dados, buscou-se dar um foco maior ao processo de (de que???) cada aluno na resolução de cada questão. Assim, mesmo a questão estando respondida de forma incorreta, nos cabe analisar e identificar qual o sentido daquele erro e sua importância.

Nesse sentido, aos professores, convém investigar o que pode ser realizado para que próximos alunos não venham a cometer o mesmo erro na abordagem dos conceitos geométricos e sua aplicação. Sobre isso, Bento (2012, p. 1) afirma que "a investigação educacional desenvolve novos conhecimentos acerca do ensino, da aprendizagem e da administração educacional".

Segundo o autor (2012, p. 1), "a investigação educacional tem sido descrita como quantitativa ou qualitativa. Estes termos referem as duas tradições diferentes de investigação, cada uma com a sua terminologia, métodos e técnicas". Nesta coleta de dados, desenvolvemos uma investigação qualitativa, já que o que nos interessa são as estratégias e os procedimentos pensados pelos alunos ao responder o questionário. De acordo com Bento (2012):

> A investigação qualitativa foca um modelo fenomenológico no qual a realidade é enraizada nas percepções dos sujeitos; o objetivo é compreender e encontrar significados através de narrativas verbais e de observações em vez de através de números (BENTO, 2012, p. 1).

De acordo com o exposto, escolhemos o questionário como coleta de dados, pois através do mesmo foi possível analisar os níveis de pensamentos apresentados pelos alunos, assim como as estratégias e procedimentos utilizados por cada um ao justificar suas respostas. O questionário desse estudo foi elaborado com base nos níveis de pensamento geométrico de Van

Hiele, que conta com três tipos de questionários, denominados como tipo 1, tipo 2 e tipo 3. Cada questionário possui 6 questões, e estão divididos nas duas primeiras questões baseadas no nível 0: Visualização, as 3º e 4º questões no nível 1: Análise e duas últimas questões no nível 2: Dedução forma. Esses questionários foram aplicados em duas turmas (A e B) do 1º ano do Ensino Médio, basedo no fato deles já terem estudado sobre o teorema nas no ano anterior ao 9º ano do Ensino Fundamental.

O campo de pesquisa escolhido foi uma Escola da Rede Estadual de Ensino localizada no Município de São Caitano – PE, a escolha foi feita por ser uma escola localizada na cidade da pesquisadora e, , por uma grande parte dos alunos dessas turmas terem sido alunos da mesma no ano anterior (9º ano). Participaram da pesquisa 30 alunos da aplicação durante a aula de matemática, a aplicação foi realizada no mês de março.

Após a aplicação dos questionários, foi feita a análise dos dados coletados, verificando as estratégias e os procedimentos utilizados pelos alunos em cada tipo de questão. Sabendo que as questões foram divididas de duas em duas para cada tipo de nível, a saber: visualização, análise e dedução informal, respectivamente, os alunos foram sendo analisados de acordo com suas respostas e cada resposta sendo classificada com base nos níveis da Teoria de Van Hiele.

De acordo com o estudo de Van Hiele, o aluno não consegue se encaixar no nível 2 sem passar pelo nível 1, porém, foi notado que alguns alunos conseguem compreender algumas questões relacionadas ao nível 1, enquanto alguns não conseguiram compreender as questões do nível 0. Há várias maneiras de justificar essa situação, uma delas seria o fato de alguém ter mencionado a resposta correta e o aluno apenas copiou, ou até por falta de atenção dele na hora da interpretação do enunciado.

4.1 OS INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

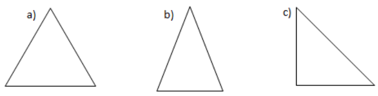
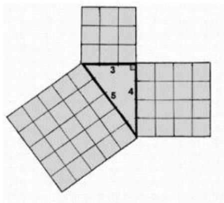
Foram elaborados três questionários (tipo 1, tipo 2 e tipo 3), que foram aplicados com os alunos na aula de matemática.

Cada questionário conteve 6 questões, divididas de acordo com os três diferentes níveis de pensamento geométricos relacionados ao Teorema de Pitágoras, sendo questões que precisavam de certas justificativas, no intuito de analisar suas estratégias e procedimentos. Os níveis são os que foram considerados para nossa pesquisa, sendo o nível 0, nível 1 e nível 2, respectivamente.

Os questionários foram aplicados individualmente em duas turmas diferentes do 1º ano do Ensino Médio, e foram compostos de 6 questões cada um, todas as questões eram diferentes, algumas semelhantes, porém todas com o mesmo objetivo. As questões estão apresentadas abaixo.

4.1.1 Questionário tipo 1

Quadro 4 - Questões 1 e 2 – Questionário Tipo 1

Questão 1	**Questão 2**
Identifique qual dos triângulos abaixo podemos aplicar o Teorema de Pitágoras? Justifique sua resposta. 	Observe a imagem e verifique se a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual a areá do quadrado da hipotenusa. 

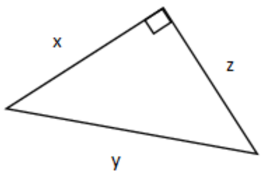
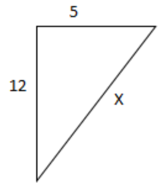
Fonte: A autora (2019).

As questões 1 e 2 foram elaboradas com base no nível 0 (visualização) da Teoria de Van Hiele, e tinham como objetivo investigar se os alunos iriam conseguir identificar visualmente o que se estava pedindo.

Na questão 1 o objetivo era que os alunos conseguissem visualizar o triângulo retângulo entre os demais triângulos (isósceles e equilátero) colocados na questão e como eles justificariam quais dos três triângulos poderiam ser utilizados no Teorema de Pitágoras.

Já na questão 2 o objetivo era que os alunos visualizassem e identificassem a imagem do teorema de Pitágoras, e conseguissem observar os quadrados da área dos catetos e os quadrados da área da hipotenusa.

Quadro 5 - Questões 3 e 4 – Questionário Tipo 1

Questão 3	Questão 4
Aplique o Teorema de Pitágoras no triangulo abaixo: 	Rosa aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo abaixo e obteve:  $12^2 = 5^2 + x^2$ $144 = 25 + x^2$ $x^2 = 144 - 25$ $x^2 = 119$ $x = \sqrt{119}$ Para você a aplicação do Teorema de Pitágoras está correta? Por quê?

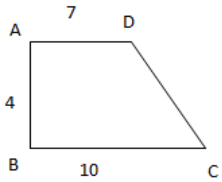
Fonte: A autora (2019).

As questões 3 e 4 foram elaboradas com base no nível 1 (análise) da Teoria Van Hiele. Os seus objetivos consistiam em verificar se o aluno conseguiria identificar através de observações expostas nas questões, algumas propriedades da geometria relacionas ao Teorema de Pitágoras.

Na questão 3, a expectativa era que o aluno conseguisse analisar e definir o teorema de Pitágoras, identificando também a hipotenusa e os catetos. Sendo a hipotenusa o maior lado do triangulo retângulo e o lado oposto ao ângulo reto.

Na questão 4, a proposta era o aluno analisar e identificar o erro cometido por Rosa, ao considerar o **x** como um cateto, substituindo de forma incorreta os valores na fórmula de Pitágoras.

Quadro 6 - Questão 5 e 6 – Questionário Tipo 1

Questão 5	Questão 6
Marcos aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo isósceles de medidas 9,9,3 e observou: $9^2 = 9^2 + 3^3$ $81 = 81 + 9$ $81 \neq 90$	Dados AD, AB e BC, calcular DC. 

Fonte: A autora (2019).

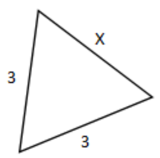
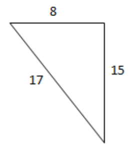
As questões 5 e 6 foram elaboradas com base no nível 2 (Dedução formal) da Teoria de Van Hiele, com o objetivo de que os alunos consigam utilizar algumas propriedades para responder e justificar suas observações em cada questão.

Na questão 5, o esperado era que os alunos conseguissem perceber que as medidas dadas dos triângulos nas questões não correspondiam a um triângulo retângulo e sim a um triângulo isósceles. Logo, a aplicação do Teorema de Pitágoras neste tipo de triângulo estaria incorreta.

Na questão 6, o aluno precisaria perceber que ao tracejar uma reta vertical saindo do ponto D, conseguiria encontrar um triângulo retângulo, e também teria que identificar medidas para os catetos, e descobrir a medida da distância DC (hipotenusa) através do teorema de Pitágoras.

4.1.2 Questionário tipo 2

Quadro 7 - questões 1 e 2 – questionário Tipo 2

Questão 1	Questão 2
Maria aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo abaixo e obteve x = 0. Para você, Maria aplicou o teorema corretamente? Por quê? 	Claudia observou o triângulo abaixo e aplicou o Teorema de Pitágoras, considerando a = 8, b= 15, c = 17. Na sua opinião, as medidas consideradas por Claudia estão corretas? 

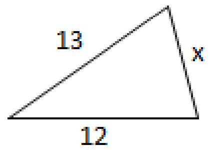
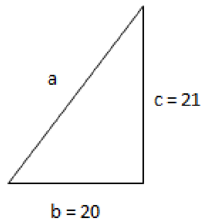
Fonte: A autora (2019)

As questões 1 e 2 foram elaboradas com base no nível 0 (visualização) da Teoria de Van Hiele, com o objetivo de que os alunos conseguissem visualizar os tipos de triângulos que estavam sendo expostos em cada questão, identificando-os e, com isso, justificando suas respostas.

Na questão 1, o objetivo era de que ele apenas visualizasse que o triângulo apresentado na questão era um triângulo equilátero (os três lados iguais). Portanto, o valor de **x** seria igual a 3, logo, o teorema não precisaria ter sido aplicado.

Na questão 2, o objetivo era que o aluno visualizasse como Claudia considerou os catetos e a hipotenusa de maneira errada, já que ela considerou a hipotenusa **a**, como o menor lado do triângulo retângulo.

Quadro 8 - questões 3 e 4 – Questionário Tipo 2

Questão 3	Questão 4
Observando o triângulo abaixo, João aplicou o Teorema de Pitágoras e obteve:  $13^2 = x^2 + 12^2$ $x^2 = 13^2 - 12^2$ $x^2 = 25$ $x = 5$ Para você a aplicação do Teorema de Pitágoras foi correta? Por quê?	Fábio respondeu à questão abaixo:  $21^2 = 20^2 + a^2$ $441 = 400 + a^2$ $a^2 = 441 - 400$ $a^2 = 41$ $a = \sqrt{41}$ O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras feita por Fábio?

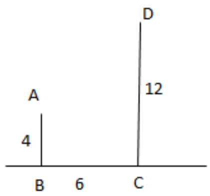
Fonte: A autora (2019).

As questões 3 e 4 foram elaboradas com base no nível 1 (análise) da Teoria de Van Hiele, com o objetivo de que os alunos conseguissem analisar os cálculos propostos pelos exercícios e, através da análise, conseguissem identificar se as resoluções da amostra estavam corretas ou não, justificando-as.

Na questão 3, as expectativas seriam que os alunos analisassem o cálculo feito por João, identificassem que ele está correto, sendo também preciso analisar a imagem do triângulo e identificar que o mesmo não se tratava de um triângulo retângulo, logo o Teorema não poderia ser aplicado.

Na questão 4, o objetivo era de que os alunos percebam o erro de Fábio, ao aplicar o Teorema de Pitágoras, considerando a hipotenusa **a** como cateto. Da forma que foi utilizado o teorema, tem-se que $c^2 = b^2 + a^2$ (incorreto).

Quadro 9 - Questões 5 e 6 – Questionário Tipo 2

Questão 5	Questão 6
Márcio aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero e observou: $a^2 = b^2 + c^2$ $6^2 = 6^2 + 6^2$ $36 = 36 + 36$ $36 \neq 72$ O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero?	Dadas as medidas dos lados AB, BC, CD, ache a distância de AD. 

Fonte: A autora (2019).

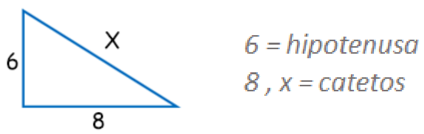
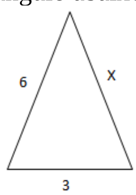
As questões 5 e 6 foram elaboradas com base no nível 2 (dedução formal) da Teoria de Van Hiele, com o objetivo de que os alunos conseguissem utilizar propriedades geométricas para responder e justificar suas respostas.

Na questão 5, o objetivo foi de que eles conseguissem justificar através de propriedades o porquê do cálculo feito por Márcio não estar correto. Ele teria que, mais uma vez, lembrar da definição de um triângulo equilátero (triângulo com os três lados iguais), logo, não se faz necessária a aplicação do Teorema de Pitágoras, que tem como objetivo identificar medidas desconhecidas do lado de um triângulo, especificamente o retângulo.

Na questão 6, o objetivo era de que o aluno conseguisse utilizar de outros métodos para encontrar a medida de AD. Por exemplo, traçar uma reta horizontal saindo do ponto A até a reta DC, e conseguir identificar catetos e suas medidas. Com isso, iria descobrir a medida da hipotenusa ao aplicar o Teorema de Pitágoras, que seria justamente a medida de AD.

4.1.3 Questionário tipo 3

Quadro 10 - questões 1 e 2 – Questionário Tipo 3

Questão 1	Questão 2
Observando o triângulo abaixo, Lucas definiu, de acordo com o Teorema de Pitágoras, as seguintes medidas:  Na sua opinião, as medidas estão definidas corretamente?	Na aula de matemática, a professora pediu para que os alunos achassem a medida do terceiro lado do triângulo abaixo.  Júlia aplicou o Teorema de Pitágoras e obteve $x = \sqrt{27}$. Na sua opinião, ela aplicou o Teorema de Pitágoras corretamente? Justifique sua resposta.

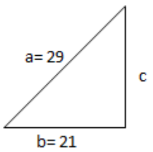
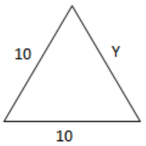
Fonte: A autora (2019).

As questões 1 e 2 foram elaboradas com base no nível 0 (visualização) da Teoria de Van Hiele, com o objetivo principal de que os alunos identificassem visualmente os catetos e hipotenusas, bem como, os triângulos retângulos e triângulos isósceles.

Na questão 1, o objetivo seria que os alunos identificassem o erro, já que Lucas considera a hipotenusa como o menor lado do triângulo retângulo. Assim, esperava-se que ele identificasse que a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo e que ele deve estar oposta ao ângulo reto.

Na questão 2, o objetivo era de que os alunos identificassem que o triângulo apresentado na questão tratasse de um triângulo isósceles, logo, o Teorema de Pitágoras não deveria ser utilizado no mesmo. Logo, o teorema não foi aplicado corretamente.

Quadro 11 - Questões 3 e 4 – Questionário Tipo 3

Questão 3	Questão 4
Gustavo respondeu à questão abaixo:  $a^2 = b^2 + c^2$ $29^2 = 21^2 + c^2$ $c^2 = 29^2 - 21^2$ $c = \sqrt{29^2 - 21^2}$ $c = 29 - 21$ $c = 8$ Para você, a resolução do Teorema de Pitágoras foi correta? Por quê?	Caio, ao tentar resolver uma questão que envolve um triangulo equilátero, representado na imagem abaixo, aplicou o Teorema de Pitágoras da seguinte maneira:  $10^2 = 10^2 + y^2$ $100 = 100 + y^2$ $y^2 = 100 - 100$ $y = 0$ O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero?

Fonte: A autora (2019).

As questões 3 e 4 foram elaboradas com base no nível 1 (análise) da Teoria de Van Hiele, com o objetivo de que os alunos identificassem os erros cometidos nas resoluções propostas e conseguissem, mais uma vez, identificar o tipo de triângulo apresentado nas questões, justificando suas respostas de uma maneira relevante.

Na questão 3, o objetivo geral era de que os alunos analisassem o passo a passo da resolução feita por Gustavo e identificassem o erro, que está no fato de onde ele cancela a raiz com as potências, assim, tendo um resultado incorreto para a medida do cateto c. Ele poderia justificar sua resposta fazendo a resolução corretamente.

Na questão 4, mais uma vez, o objetivo era o mesmo da questão 1 (Tipo 2), ou seja, que o aluno identificasse que se tratava de um triângulo equilátero, logo, o terceiro lado **y** seria igual a 10, e justificasse, de maneira correta, que o Teorema de Pitágoras não é valido para outro tipo de triângulo que não seja o triângulo retângulo.

Quadro 12 - Questões 5 e 6 – Questionário Tipo 3

Questão 5	Questão 6
Represente, abaixo, um triângulo de acordo com as seguintes medidas: hipotenusa = 3,7, cateto, c = 3,5 e cateto b = 1,2.	Qual a definição que você usaria para o Teorema de Pitágoras?

Fonte: A autora (2019).

As questões 5 e 6, foram elaboradas com base no nível 2 (dedução formal) da Teoria de Van Hiele, com o objetivo de que os alunos soubessem definir a propriedade do Teorema, e também com o uso de instrumentos matemáticos, nesse caso a régua, conseguissem representar um triângulo retângulo através de desenhos com as medidas apresentadas. Mesmo que não fossem um triângulo feito com régua, mas que chegasse o mais próximo de uma definição de triângulo retângulo e que ele conseguisse localizar corretamente as medidas dos catetos e da hipotenusa.

Na questão 5, são dadas as medidas para os catetos e a hipotenusa, pedindo-se que o aluno desenhe um triângulo com as seguintes medidas: hipotenusa = 3,7 e catetos c = 3,5 e b = 1,2. Com isso, o objetivo esperado foi de que os alunos utilizassem a régua, e representassem na imagem um triângulo retângulo, e que localizassem corretamente as medidas apresentadas, seguindo as propriedades do Teorema.

Na questão 6, que se trata de uma questão aberta, pede-se para que os alunos definam o Teorema de Pitágoras. Com isso, espera-se que eles o definam de maneira correta e com propriedades bem definidas.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO

Nesta parte da pesquisa, foi realizada a análise das respostas obtidas pelos participantes da pesquisa, discutindo-se e classificando os níveis de pensamento geométrico baseados na Teoria de Van Hiele, sob os quais os alunos se encontram, de acordo com as estratégias e procedimentos utilizados por eles ao justificarem suas respostas. Buscamos responder nosso problema de pesquisa, que consistiu em: Em que nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele no uso do Teorema de Pitágoras estão os alunos do 1º ano do Ensino Médio?

Nos três tipos de questionários, as questões 1 e 2 tinham como principal fonte de informação a visualização, em que foram elaboradas com base no nível 0 (visualização) da Teoria de Van Hiele. Apesar de algumas delas terem, além da imagem, alguns dados de medidas, elas tinham como objetivo principal fazer com que os alunos, ao visualizarem a imagem, conseguissem identificar o tipo de triângulo que estava sendo apresentado, bem como, também conseguissem visualizar o erro cometido na resolução de algumas questões, como colocar a hipotenusa como o menor lado do triângulo retângulo.

Nos três tipos de questionários, as questões 3 e 4 tinham como base o nível 1 (análise) da Teoria de Van Hiele. Os objetivos dessas questões eram de que os alunos conseguissem analisar os erros cometidos, propostos nas questões, além da imagem. Muitas vezes, a imagem estava de acordo com triângulos retângulos, com dados verídicos, porém, ao analisar a solução proposta pela questão, identificava-se o erro cometido, alguns trocando a hipotenusa pelo cateto, ou algum erro na resolução de potências.

Nos três tipos de questionários, as questões 5 e 6 tinham como base o nível 2 (dedução) da Teoria de Van Hiele. Os objetivos esperados para cada uma delas, era de que os alunos conseguissem justificar com algumas propriedades as suas análises, seja com uma definição ou com uma demonstração. No decorrer da análise, foram identificados poucos alunos nesse nível, muitas das questões baseadas no nível 2 (dedução) foram deixadas em branco, ou de acordo com a resposta dada pelo aluno, o nível não foi alcançado.

Ao analisar as justificativas dadas pelos alunos participantes, foi possivel verificar se eles conseguiram ou não perceber o que estava sendo proposto nas questões e, assim, identificar o nível de pensamento geométrico que o aluno se encontra. Ainda, dependendo de suas justificativas, se eles se encontravam em um nível mais avançado ou em um nível retrógado. Foi considerado também que o aluno poderia não alcançar nenhum nível apresentado, como pode ser observado nas tabelas a seguir. Destacamos que os questionários foram aplicados em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio, sendo a Turma A e a turma B, logo, os alunos foram identificados por A_1 até A_{30} e por B_1 até B_{30}. Ademais, em todas as tabelas apresentadas a seguir, o “-“ indica que o estudante não alcançou nenhum dos níveis propostos ou deixou a questão em branco.

5.1 NÍVEIS DE PENSAMENTOS GEOMÉTRICOS IDENTIFICADOS NO QUESTIONÁRIO TIPO 1

Para apresentar essa discussão, iniciamos com a sistematização dos níveis obtidos em cada dupla de questões por turma, já que estas são baseadas nos mesmos níveis de pensamentos geométricos. Em seguida, apresentamos alguns exemplos para indicação desses níveis.

Nesta seção, serão apresentados por turma (A e B, respectivamente) os resultados obtidos por cada aluno, em cada questão do questionário Tipo 1. Os alunos que responderam o questionário de Tipo 1 foram denominados de A_1 a A_{10} e de B_1 a B_{10}.

Na turma A, temos 30 alunos, denominados de A_1 a A_{30}. A turma é composta por 15 meninos e 15 meninas. No momento da aplicação, a maioria dos alunos confirmaram que já haviam estudado o Teorema de Pitágoras ou já teriam ouvido falar, alguns poucos alunos disseram não ter visto o conteúdo em séries anteriores.

Na turma B temos também 30 alunos, denominados de B_1 a B_{30}. A turma é composta por 18 meninas e 12 meninos. No momento da aplicação do questionário, a maioria dos alunos afirmou ter estudado ou ouvido falar sobre o teorema, uma minoria de alunos afirmou não ter visto o conteúdo em séries anteriores. De modo que cada tipo de questionário foi aplicado e dividido de tal maneira:

Quadro 13 - Turma A e Turma B

	TIPO 1	TIPO 2	TIPO 3
TURMA A	$A_1 – A_{10}$	A_{11} - A_{20}	$A_{21} – A_{30}$
TURMA B	$B_1 – B_{10}$	B_{11}- B_{20}	$B_{21} – B_{30}$

5.1.1 Turma A

No quadro 13, são apresentados os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos ($A_1 – A_{10}$) nas questões 1 e 2, baseadas no nível 0, do questionário Tipo 1.

Quadro 14 - Níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 1 e 2

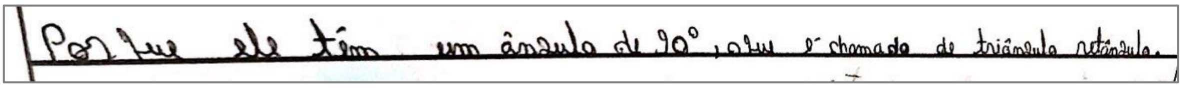
	QUESTÃO 1	QUESTÃO 2
A1	Visualização	Análise
A2	Análise	Análise
A3	Visualização	Análise
A4	Visualização	Análise
A5	Visualização	Análise
A6	Análise	Visualização
A7	Visualização	Visualização
A8	Visualização	Análise
A9	Visualização	-
A10	Análise	Análise

Fonte: A autora (2019).

De acordo com os dados expostos no quadro 13, na questão 1, as respostas de sete alunos foram classificadas no nível de Visualização (que era o nível base da questão) e três alunos foram classificados no nível Análise.

Na questão 2, dois alunos foram classificados no nível Visualização, sete foram classificados no nível Análise e um aluno não alcançou nenhum dos níveis apresentados. Para exemplificar, vamos apresentar a resposta do aluno A10 (Figura 5), que foi classificado no nível Análise na questão 1, pois, usa de justificativa considerável que vai além da visualização como única forma de informação.

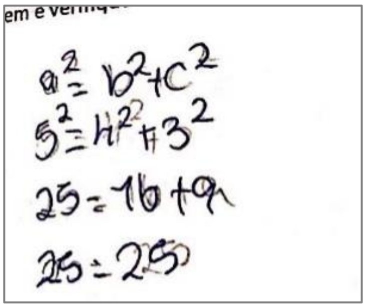
Figura 5 - Resposta do aluno A10 - Questão 1 - Tipo 1



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Na questão 2, vamos apresentar a resposta do aluno A_4 (Figura 6), que foi classificado no nível de Análise, quando também usa uma justificativa que vai além da visualização, pois aplica o Teorema corretamente, de acordo com as medidas apresentadas na questão.

Figura 6 - Resposta aluno A4 - Questão 2 - Tipo 1



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 14, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (A_1 – A_{10}) nas questões 3 e 4, baseadas no nível 1, do questionário Tipo 1.

Quadro 15 - Níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 3 e 4

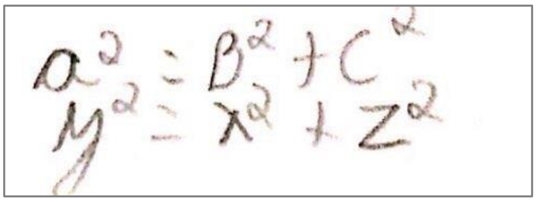
	QUESTÃO 3	**QUESTÃO 4**
A1	Análise	Visualização
A2	Análise	Análise
A3	-	Visualização
A4	Análise	Visualização
A5	Visualização	Análise
A6	Análise	Visualização
A7	-	Visualização
A8	Análise	Análise
A9	Visualização	Visualização
A10	Análise	Visualização

Fonte: A autora (2019).

Os dados expostos no quadro 14 informam que, na Questão 3, apenas dois alunos foram classificados no nível de Visualização, seis alunos foram classificados no nível de Análise (nível base da questão) e dois alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 4, sete alunos foram classificados no nível de Visualização e três alunos foram classificados no nível de Análise. Para exemplificar, apresentamos a resposta do aluno A_2 (Figura 7), que foi classificado no nível de Análise na questão 3, na qual aplica corretamente o Teorema de Pitágoras, identificando a hipotenusa e os catetos.

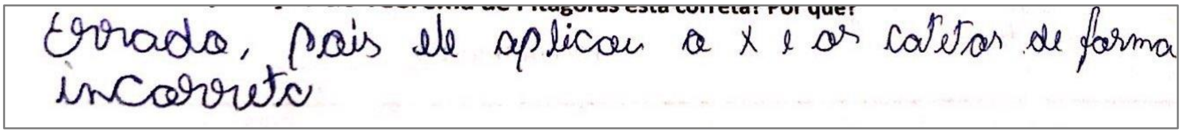
Figura 7 - Resposta do aluno A_2 - Questão 3 - Tipo 1


$a^2 = B^2 + C^2$
$y^2 = x^2 + z^2$

Fonte: Acervo da pesquisadora (2019).

Na questão 3, apresentamos a resposta do aluno A_2 (Figura 8), que foi classificado mais uma vez no nível de Análise, em que ele afirma que a questão está incorreta e justifica, apontando o erro cometido. É válido destacar que, tanto a questão 3 como a questão 4, têm como base o nível 1 (Análise), nível alcançado pelo aluno A*2*. Mas o que isso quer dizer? Segundo seu referencial esses dados poderiam ser mais abordados aqui.

Figura 8 - Resposta do aluno A_2 - Questão 3 - Tipo 1


Errado, pois ele aplicou a x e os catetos de forma incorreta

Fonte: Acervo da pesquisadora (2019).

No quadro 15, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos ($A_1 – A_{10}$), nas questões 5 e 6 baseadas no nível 2, do questionário Tipo 1.

Quadro 16 - Níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 5 e 6

	QUESTÃO 5	**QUESTÃO 6**
A1	Visualização	-
A2	Dedução informal	-
A3	-	Visualização
A4	Dedução informal	Visualização
A5	Visualização	-
A6	-	Visualização
A7	Visualização	-
A8	Análise	Visualização
A9	Visualização	Visualização
A10	Análise	Visualização

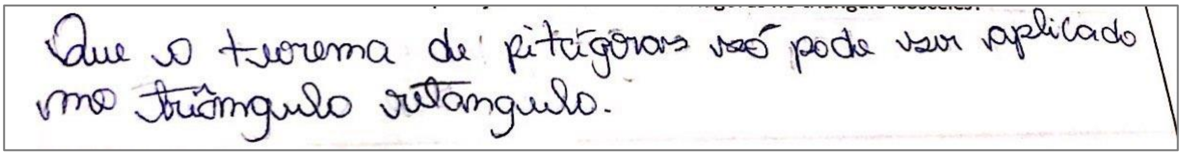
Fonte: A autora (2019).

No quadro 15, os dados apresentados revelam que, na questão 5, quatro alunos foram classificados no nível de Visualização, dois alunos foram classificados no nível de Análise, dois alunos foram classificados no nível de Dedução informal (nível base da questão) e dois alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 6, seis alunos foram classificados no nível de Visualização e quatro alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Para exemplificar, temos a resposta do aluno A4 (Figura 9) na questão 5, que foi classificado no nível de Dedução informal, tendo em vista que, ele afirma que a aplicação do Teorema só é válida no triângulo retângulo.

Figura 9 - Resposta do aluno A4 - Questão 5 - Tipo 1


Que o teorema de pitágoras só pode ser aplicado no triângulo retângulo.

Fonte: Acervo da pesquisadora (2019).

Na questão 6, não temos nenhuma resposta válida para ser apresentada, pois as poucas respostas obtidas não tinham coerência com o que se foi pedido. Ou seja, temos um problema na abordagem desse conteúdo, pois os alunos não conseguem alcançar níveis mais elevados.

5.1.2 Turma B

No quadro 16, apresentamos os níveis de pensamentos geométricos alcançados pelos alunos (B_1 – B_{10}) nas questões 1 e 2, baseadas no nível 0, do questionário Tipo 1.

Quadro 17 - Níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 1 e 2

	QUESTÃO 1	QUESTÃO 2
B1	Análise	Análise
B2	Análise	Visualização
B3	Análise	-
B4	Dedução informal	Análise
B5	Visualização	Análise
B6	Visualização	-
B7	Visualização	-
B8	Visualização	Análise
B9	Análise	Análise
B10	Análise	Análise

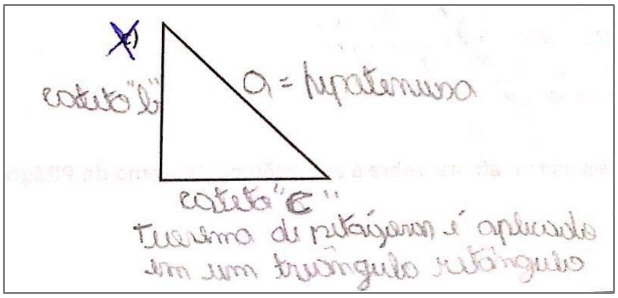
Fonte: A autora (2019).

Os dados expostos no quadro 16 mostram que, na questão 1, quatro alunos foram classificados no nível de Visualização (nível base da questão), cinco alunos foram classificados no nível de Análise, e um aluno foi classificado no nível de Dedução informal.

Na questão 2, um aluno foi classificado no nível Visualização, seis alunos foram classificados no nível de Análise e três alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Exemplificando, vamos apresentar a resposta obtida pelo aluno B4 (Figura 10), na questão 1, em que o aluno foi classificado no nível de Dedução informal, porém, é valido destacar que a questão tinha como base o nível 0 (Visualização). O aluno foi além das informações visuais, identificando os catetos e a hipotenusa, fazendo uso de uma justificativa que ia além da visualização.

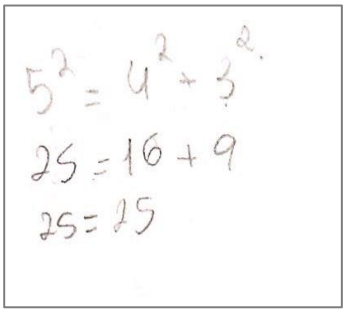
Figura 10 - Resposta do aluno B4 - Questão 1 - Tipo 1



Fonte: Acervo da pesquisadora (2019).

Na questão 2, iremos apresentar a resposta obtida pelo aluno B1 (Figura 11), que foi classificado no nível de Análise, ao aplicar o teorema de Pitágoras, para confirmar a sua resposta.

Figura 11 - Resposta do aluno B1 - Questão 2 - Tipo 1



Fonte: Acervo da pesquisadora (2019).

No quadro 17, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (B1 – B10), nas questões 3 e 4 baseadas no nível 1, do questionário Tipo 1.

Quadro 18 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 3 e 4

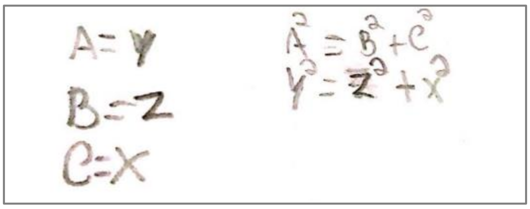
	QUESTÃO 3	QUESTÃO 4
B1	-	Visualização
B2	Análise	Visualização
B3	Análise	Visualização
B4	Análise	Análise
B5	Análise	Visualização
B6	-	-
B7	Visualização	Visualização
B8	Análise	Visualização
B9	Visualização	-
B10	-	Visualização

Fonte: A autora (2019).

Os dados do quadro 17 revelam que, na questão 3, dois alunos foram classificados no nível de Visualização, cinco alunos foram classificados no nível de Análise (nível base da questão) e três alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 4, sete alunos estão classificados no nível de Visualização, um aluno foi classificado no nível de Análise e dois alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Exemplificando, apresentamos a resposta do aluno B8 (Figura 12), na questão 3, que representa a maioria das respostas obtidas, aplicando corretamente o Teorema de Pitágoras, ou seja, classificado no nível de Análise.

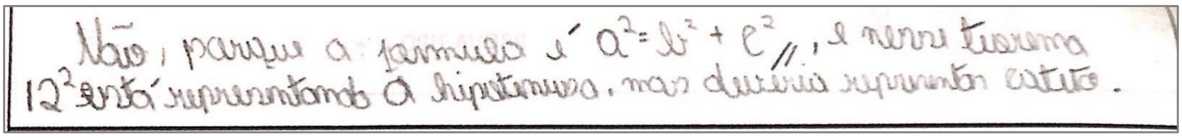
Figura 12 - Resposta do aluno B8 - Questão 3 - Tipo 1



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

A resposta do aluno B4 (Figura 13) na questão 4, levou-o a ser classificado no nível de Análise, em que ele justifica sua resposta, destacando os erros cometido na resolução apresentada.

Figura 13 - Resposta do aluno B4 - Questão 4 - tipo 1



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 18, são apresentados os níveis de pensamentos geométricos alcançados pelos alunos (B1 – B10) nas questões 5 e 6, baseadas no nível 2, do questionário Tipo 1.

Quadro 19 - níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 5 e 6

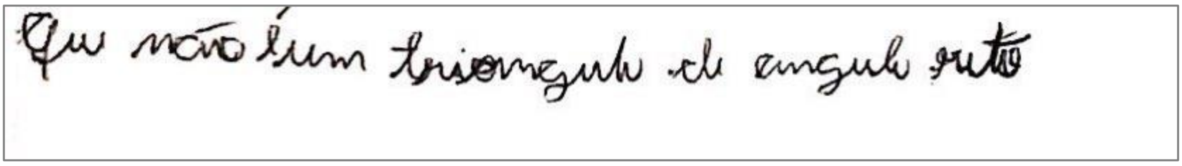
	QUESTÃO 5	**QUESTÃO 6**
B1	Visualização	Visualização
B2	Análise	-
B3	Visualização	Visualização
B4	Visualização	Visualização
B5	Visualização	Visualização
B6	-	-
B7	Visualização	Visualização
B8	-	-
B9	-	Visualização
B10	-	-

Fonte: A autora (2019).

De acordo com o quadro 18, os dados apresentados nos informam que, na questão 5, cinco alunos foram classificados no nível de Visualização, um aluno foi classificado no nível de Análise e quatro alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 6, seis alunos foram classificados no nível de Visualização e quatro alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. As questões tinham como base o nível 2 (Dedução informal), notando-se que nenhum aluno foi classificado nesse nível, devido uma grande evasão nas questões apresentadas. Exemplificando, apresentamos a resposta obtida pelo aluno B2 (Figura 14) na questão 5, a partir da qual foi classificado no nível de Análise, em que o aluno conseguiu analisar que os dados apresentados não são correspondentes a um triângulo retângulo. Na questão 6, não há nenhuma resposta apresentada, pelo fato das poucas respostas obtidas não ter coerência com o que era proposto.

Figura 14 - Resposta do aluno B2 - Questão 5 - Tipo 1



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

5.2 NÍVEIS DE PENSAMENTOS GEOMÉTRICOS IDENTIFICADOS NO QUESTIONÁRIO TIPO 2

Nesta seção, serão apresentados por turma (A e B, respectivamente) os resultados obtidos por cada aluno em cada questão, do questionário Tipo 2. Os alunos que responderam o questionário de Tipo 2 foram denominados de A11 a A20 e de B11 a B20.

5.2.1 Turma A

No quadro 19, iremos apresentar os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (A11 – A20) nas questões 1 e 2, baseadas no nível 0, do questionário Tipo 2.

Quadro 20 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 1 e 2

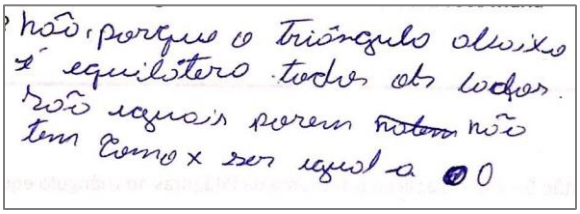
	QUESTÃO 1	**QUESTÃO 2**
A11	-	Visualização
A12	Visualização	-
A13	Visualização	Análise
A14	-	Visualização
A15	Análise	-
A16	Visualização	Visualização
A17	-	Análise
A18	Visualização	Visualização
A19	Visualização	-
A20	-	Análise

Fonte: A autora (2019).

No quadro 19, através dos dados coletados, podemos identificar que, de acordo com as respostas obtidas na questão 1, cinco alunos foram classificados com o nível de Visualização (nível base da questão), um aluno foi classificado no nível de Análise e quatro alunos não alcançaram nenhum dos níveis proposto.

Na questão 2, temos quatro alunos classificados no nível de Visualização, três alunos classificados no nível de Análise e três alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Para exemplificar, apresentamos a resposta do aluno A15 (Figura 15) na questão 1, em que ele conseguiu analisar que o triângulo apresentado na questão se tratava de um triângulo equilátero, fazendo uma justificativa coerente e, portanto, classificada no nível de Análise.

Figura 15 - Resposta do aluno A15 - Questão 1 - Tipo 2

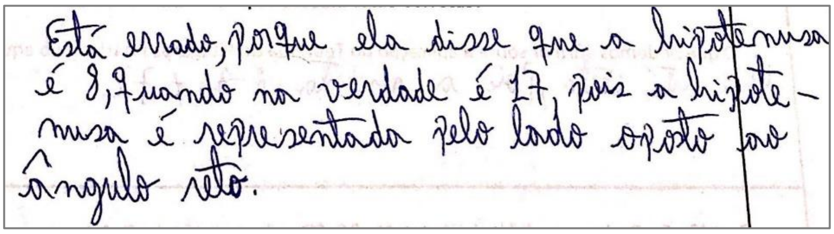


não, porque o triângulo abaixo é equilátero todos os lados são iguais porem ~~todos~~ não tem como x ser igual a 00

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Apresentamos também a resposta do aluno A17 (Figura 16) na questão 2, que foi classificada também no nível de Análise, pois, o mesmo identifica corretamente as medidas dos catetos e da hipotenusa, justificando ainda a medida da hipotenusa como o lado oposto ao ângulo reto.

Figura 16 - Resposta do aluno A17 - Questão 2 - Tipo 2



Está errado, porque ela disse que a hipotenusa é 8, quando na verdade é 17, pois a hipotenusa é representada pelo lado oposto ao ângulo reto.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 20, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (A11 – A20), nas questões 3 e 4 baseadas no nível 1, do questionário Tipo 2.

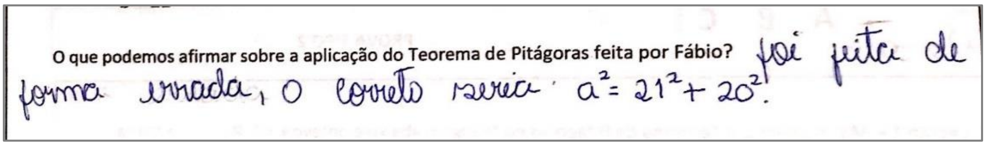
Quadro 21 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 3 e 4

	QUESTÃO 3	**QUESTÃO 4**
A11	Visualização	Visualização
A12	Visualização	Visualização
A13	Visualização	Visualização
A14	Visualização	Visualização
A15	Visualização	Visualização
A16	Visualização	Análise
A17	Visualização	Visualização
A18	Visualização	Visualização
A19	Visualização	Análise
A20	Visualização	Visualização

Fonte: A autora (2019).

No quadro 20, temos os dados das questões 3 e 4, sendo que, na questão 3, todos os alunos foram classificados no nível de Visualização. Já na questão 4, oito alunos foram classificados no nível de Visualização e dois alunos foram classificados no nível de Análise (nível base da questão). Exemplificando algumas respostas obtidas pelos alunos, apresentamos a resposta do aluno A19 (Figura 17), na questão 4, que foi classificado no nível de Análise, pois, conseguiu identificar o erro apresentado na questão, corrigindo-a de maneira correta. Sobre a questão 3, não foi obtida nenhuma resposta válida de acordo com os níveis propostos.

Figura 17 - Resposta do aluno A19 - Questão 4 - Tipo 2


O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras feita por Fábio? foi feita de forma errada, o correto seria: $a^2 = 21^2 + 20^2$.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 21, são apresentados os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (A11 – A20) nas questões 5 e 6, baseadas no nível 2, do questionário Tipo 2.

Quadro 22 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 5 e 6

	QUESTÃO 5	QUESTÃO 6
A11	Análise	Visualização
A12	-	Visualização
A13	-	-
A14	-	-
A15	-	-
A16	Análise	Visualização
A17	Visualização	Visualização
A18	-	-
A19	Dedução informal	Dedução informal
A20	Visualização	Visualização

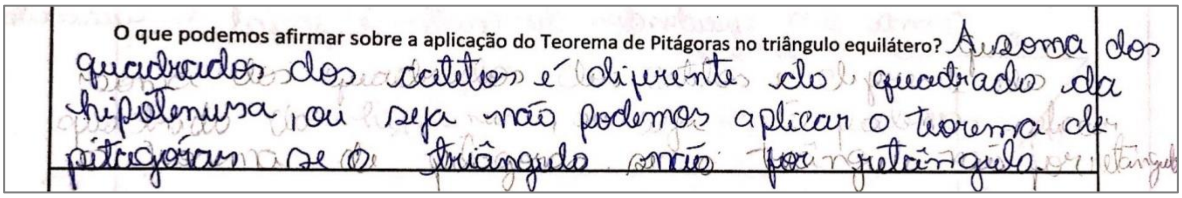
Fonte: A autora (2019).

No quadro 21, os dados apresentados informam que, na questão 5, dois alunos foram classificados no nível de Visualização, dois alunos foram classificados no nível de Análise, um aluno foi classificado no nível de Dedução informal (nível base da questão) e cinco alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 6, cinco alunos foram classificados no nível de Visualização, um aluno foi classificado no nível de Dedução informal e quatro alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Para exemplificar as respostas obtidas, apresentamos, as respostas do aluno A19, na questão 5 (Figura 18), classificando-a no nível de Dedução informal. O aluno, ao responder à questão 5, utiliza a linguagem matemática, pois, faz uso da definição do Teorema de Pitágoras para justificar o erro cometido, além de identificar que o triângulo não se trata de um triângulo retângulo.

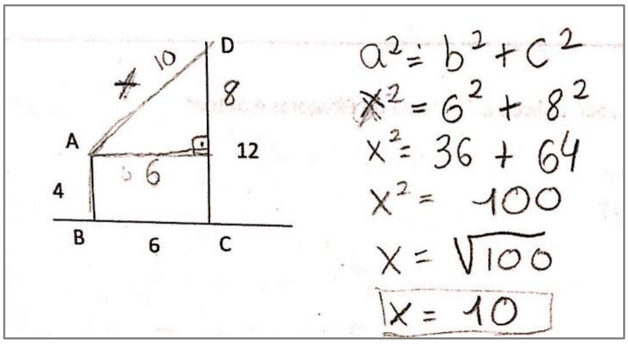
Figura 18 - Resposta do aluno A19 - Questão 5 - Tipo 2


O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero? A soma dos quadrados dos catetos é diferente do quadrado da hipotenusa, ou seja não podemos aplicar o teorema de pitágoras se o triângulo não for retângulo.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Observando o aluno A19, também na questão 6 (Figura 19), o classificamos no nível de Dedução informal, pois, na questão 6, o aluno foi único a conseguir fazer uma análise correta da figura e também o único a chegar no resultado esperado.

Figura 19 - Resposta do aluno A19 - Questão 6 - Tipo 2



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

5.2.2 Turma B

No quadro 22, iremos apresentar os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (B11 – B20) nas questões 1 e 2, baseadas no nível 0, do questionário Tipo 2.

Quadro 23 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 1 e 2

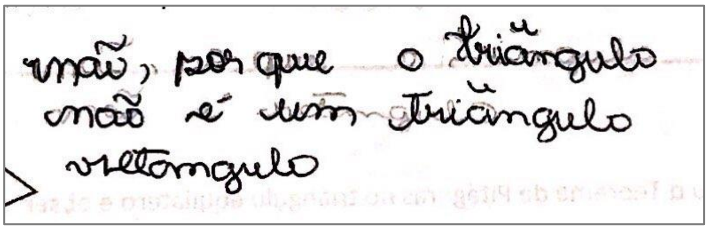
	QUESTÃO 1	QUESTÃO 2
B11	-	Visualização
B12	Visualização	Visualização
B13	-	Visualização
B14	-	-
B15	Visualização	Visualização
B16	-	-
B17	Visualização	Visualização
B18	-	-
B19	Visualização	Visualização
B20	Visualização	Visualização

Fonte: A autora (2019).

No quadro 22, os dados mostram que, na questão 1, cinco alunos foram classificados no nível de Visualização (nível base da questão) e cinco alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 2, sete alunos foram classificados no nível de Visualização e três não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Para exemplificas os tipos de respostas obtidas, apresentamos as respostas do aluno B12 na questão 1 (Figura 20).

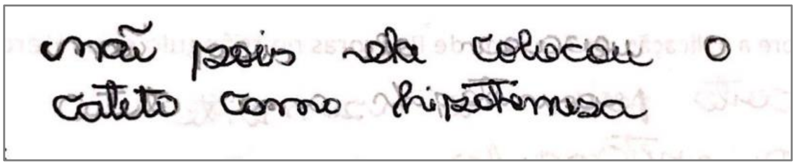
Figura 20 - Resposta do aluno B12 - Questão 1 - Tipo 2



Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

Na questão 2 (Figura 21), ambas foram classificadas no nível de Visualização. O aluno que respondeu à questão 1, conseguiu apenas com a visualização da imagem identificar que não se trata de um triângulo retângulo. Já na questão 2, ele consegue perceber o erro cometido na resolução apresentada.

Figura 21 - Resposta do aluno B12 - Questão 2 - Tipo 2



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 23, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (B11 – B20), nas questões 3 e 4 baseadas no nível 1, do questionário Tipo 2.

Quadro 23 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 3 e 4

	QUESTÃO 3	QUESTÃO 4
B11	-	Visualização
B12	Visualização	Visualização
B13	Visualização	Visualização
B14	Visualização	Visualização
B15	Visualização	-
B16	Visualização	-
B17	-	Visualização
B18	-	-
B19	-	-
B20	Visualização	-

Fonte: A autora (2019).

No quadro 23, os dados apresentados revelam que, na questão 3, seis alunos foram classificados no nível de Visualização e quatro não conseguiram alcançar nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 4, cinco alunos foram classificados no nível de Visualização e cinco alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Ao analisar as poucas das respostas obtidas, foi notado que nenhuma das respostas foi válida para o contexto pesquisado, tendo em vista que, são respostas sem nenhum tipo de fundamento específico. Destaca-se que as questões tinham como base o nível 1 (Análise).

No quadro 24, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (B11 – B20) nas questões 5 e 6, baseadas no nível 2, do questionário Tipo 2.

Quadro 24 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 5 e 6

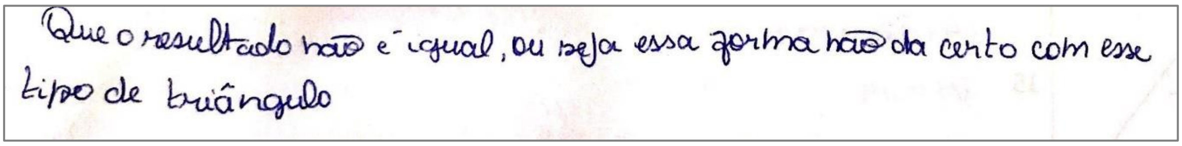
	QUESTÃO 5	QUESTÃO 6
B11	Visualização	Visualização
B12	Análise	-
B13	-	Visualização
B14	Visualização	-
B15	Visualização	Visualização
B16	-	-
B17	-	-
B18	-	-
B19	-	Visualização
B20	Análise	-

Fonte: A autora (2019).

No quadro 24, os dados apresentados mostram que, na questão 5, três alunos foram classificados no nível de Visualização, dois foram classificados no nível de Análise e cinco não alcançaram nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 6, quatro alunos foram classificados no nível de Visualização e seis alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. As questões foram baseadas no nível 2 (Dedução informal). Exemplificando, mostramos a resposta obtida pelo aluno B20 (Figura 22), na questão 5, em que o aluno identifica que o tipo de triângulo proposto não satisfaz o teorema. A questão 6 não será apresentada, pelo fato das poucas respostas obtidas não possuírem nenhum fundamento específico.

Figura 22 - Resposta do aluno B20 - Questão 5 - Tipo 2


Que o resultado não é igual, ou seja essa forma não da certo com esse tipo de triângulo

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

5.3 NÍVEIS DE PENSAMENTOS GEOMÉTRICOS IDENTIFICADOS NO QUESTIONÁRIO TIPO 3

Nesta seção, serão apresentados por turma (A e B, respectivamente) os resultados obtidos por cada aluno em cada questão do questionário Tipo 3. Os alunos que responderam o questionário de Tipo 3 foram denominados de A21 a A30 e de B21 a B30.

5.3.1 Turma A

No quadro 25, são apresentados os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (A21 – A30) nas questões 1 e 2, baseadas no nível 0, do questionário Tipo 3.

Quadro 25 - Níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 1 e 2

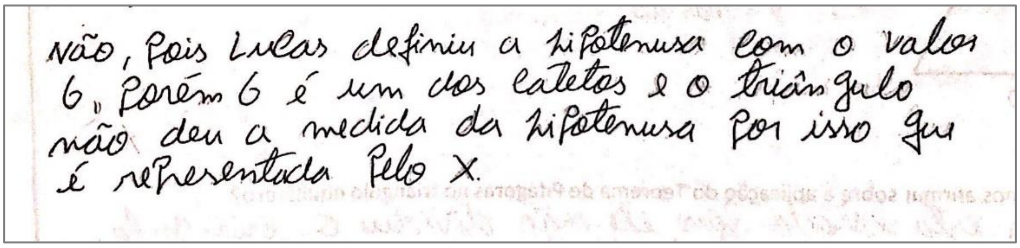
	QUESTÃO 1	QUESTÃO 2
A21	Visualização	-
A22	Visualização	-
A23	Visualização	Visualização
A24	Visualização	Visualização
A25	Visualização	Visualização
A26	Análise	Visualização
A27	Visualização	Visualização
A28	Análise	Dedução informal
A29	Visualização	Visualização
A30	Visualização	Análise

Fonte: A autora (2019).

Os dados apresentados no quadro 25 revelam que, sobre a questão 1, oito alunos foram classificados no nível de Visualização (nível base da questão) e dois alunos foram classificados no nível de Análise.

Já na questão 2, seis alunos foram classificados no nível de Visualização, um aluno foi classificado no nível de Análise, um aluno foi classificado no nível de Dedução informal e dois alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Exemplificando, apresentamos as respostas do aluno A28, na questão 1 (Figura 23), em que foi classificado no nível de Análise, pois, justificou corretamente sua resposta, utilizando de outras informações, além da visualização.

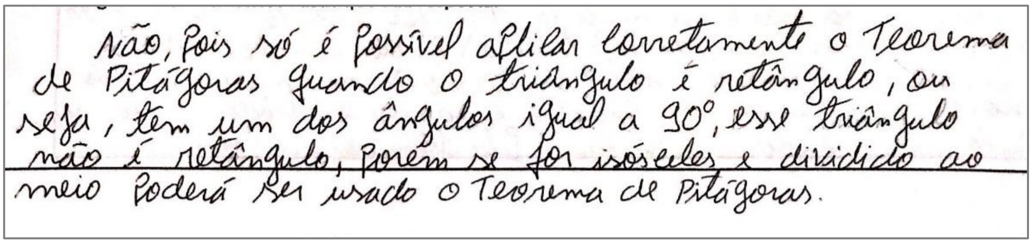
Figura 23 - Resposta do aluno A28 - Questão 1 - Tipo 3


Não, Pois Lucas definiu a hipotenusa com o valor 6, Porém 6 é um dos catetos e o triângulo não deu a medida da hipotenusa Por isso que é representada Pelo X.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Na questão 2 (Figura 24), a qual foi classificada no nível de Dedução informal, a justificativa do aluno vai além do esperado, pois, ele identifica que não é um triângulo retângulo, com um ângulo de 90º, chamando a atenção ao analisar que, ao dividir o triângulo isósceles ao meio, verticalmente, obteremos um triângulo retângulo.

Figura 24 - Resposta do aluno A28 - Questão 2 - Tipo 3


Não, Pois só é possível aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras quando o triângulo é retângulo, ou seja, tem um dos ângulos igual a 90°, esse triângulo não é retângulo, porém se for isósceles e dividido ao meio poderá ser usado o Teorema de Pitágoras.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 26, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (A21 – A30) nas questões 3 e 4, baseadas no nível 1, do questionário Tipo 3.

Quadro 26 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 3 e 4

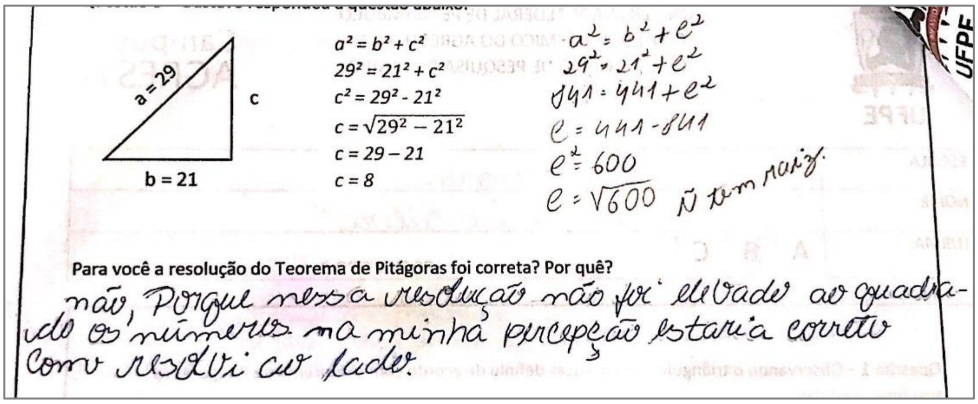
	QUESTÃO 3	**QUESTÃO 4**
A21	Visualização	-
A22	Visualização	-
A23	Análise	Visualização
A24	Visualização	Visualização
A25	Visualização	Visualização
A26	Análise	-
A27	Análise	Visualização
A28	Visualização	Análise
A29	Análise	Visualização
A30	Visualização	Dedução informal

Fonte: A autora (2019).

Observando os dados no quadro 26, notamos que, na questão 3, seis alunos foram classificados no nível de Visualização e quatro alunos foram classificados no nível de Análise (nível base da questão).

Na questão 4, notamos que, cinco alunos foram classificados no nível de Visualização, um aluno foi classificado no nível de Análise, um aluno foi classificado no nível de Dedução informal e três alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Destacamos a resposta do aluno A29 (Figura 25), na questão 3, que foi classificada no nível de Análise, em que ele identifica o erro cometido pela resolução apresentada, resolvendo a questão, considerando os valores dos catetos e da hipotenusa corretamente. Apesar de cometer um erro na subtração dos valores, o conceito do Teorema de Pitágoras é visível que ele domina.

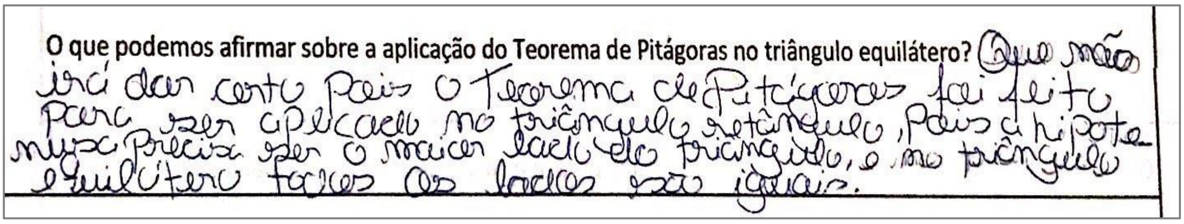
Figura 25 - Resposta do aluno A29 - Questão 3 - Tipo 3



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

A resposta do aluno A30 (Figura 26), na questão 4, foi classificada no nível de Dedução informal, pois, o aluno afirma mais uma vez que o Teorema só deve ser aplicado no triângulo retângulo, e que a hipotenusa é o maior lado do triângulo. Identifica ainda que se trata de um triângulo equilátero e que os três lados têm a mesma medida.

Figura 26 - Resposta do aluno A30 - Questão 4 - Tipo 3



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 27, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (A21 – A30) nas questões 5 e 6, baseadas no nível 2, do questionário Tipo 3.

Quadro 27 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 5 e 6

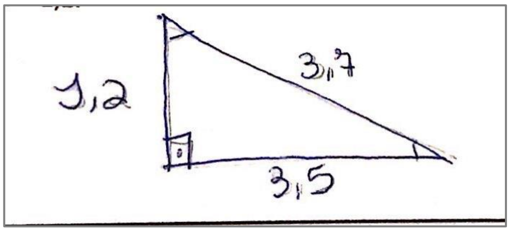
	QUESTÃO 5	QUESTÃO 6
A21	-	-
A22	Visualização	-
A23	Visualização	-
A24	Visualização	-
A25	Visualização	-
A26	Visualização	-
A27	Visualização	Visualização
A28	Visualização	Dedução informal
A29	Visualização	Análise
A30	Análise	Dedução informal

Fonte: A autora (2019).

Os dados do quadro 27 revelam que, na questão 5, oito alunos foram classificados no nível de Visualização, um aluno foi classificado no nível de Análise e um dos alunos não alcançou nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 6, apenas um aluno foi classificado no nível de Visualização, um aluno foi classificado no nível de Análise, dois foram classificados no nível de Dedução informal (nível base da questão) e seis alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Destacamos a resposta do aluno A30 (Figura 27), na questão 5, classificada no nível de Análise, pois o aluno considera as medidas dos catetos e da hipotenusa corretamente, sendo o maior lado do triângulo a hipotenusa, porém, não foi usado o instrumento de medida (régua).

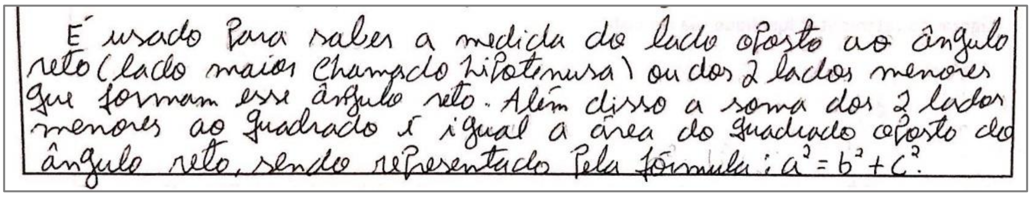
Figura 27 - Resposta do aluno A30 - Questão 5 - Tipo 3



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Ainda na questão 6, destacamos a resposta do aluno A28 (Figura 28), em que ele define e explica como é usado o Teorema de Pitágoras.

Figura 28 - Resposta do aluno A28 - Questão 6 - Tipo 3


É usado Para saber a medida do lado oposto ao ângulo reto (lado maior Chamado hipotenusa) ou dos 2 lados menores que formam esse ângulo reto. Além disso a soma dos 2 lados menores ao quadrado é igual a área do quadrado oposto do ângulo reto, sendo representado Pela fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

É notável que o aluno tem um conhecimento sobre as definições e as propriedades relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Por esse motivo, ele está classificado no nível de Dedução informal, pois consegue definir o teorema informalmente.

5.3.2 Turma B

No quadro 28, são apresentados os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (B21 – B30) nas questões 1 e 2, baseadas no nível 0, do questionário Tipo 3.

Quadro 28 - Níveis de pensamentos geométricos identificados nas questões 1 e 2

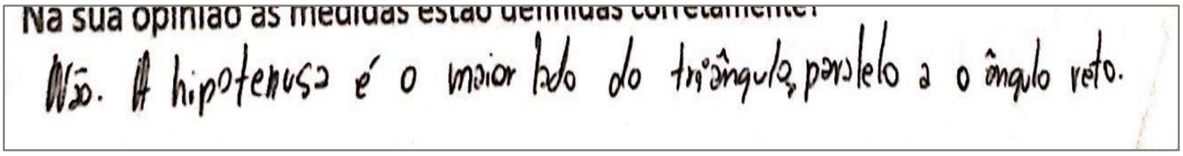
	QUESTÃO 1	**QUESTÃO 2**
B21	Visualização	Visualização
B22	Visualização	Visualização
B23	Visualização	Visualização
B24	Visualização	Visualização
B25	Visualização	Visualização
B26	Visualização	Visualização
B27	Visualização	-
B28	Visualização	-
B29	Visualização	Visualização
B30	Visualização	Visualização

Fonte: A autora (2019).

Os dados apresentados no quadro 28 mostram que, na questão 1, todos os alunos foram classificados no nível de Visualização (nível base da questão).

Na questão 2, oito alunos foram classificados no nível de Visualização e dois alunos não alcançaram nenhum dos níveis apresentados. Destacamos as respostas dos alunos B22 (Figura 29) e B24 (Figura 30), nas questões 1 e 2, respectivamente. Na resposta do aluno B22, ele afirma que a resposta está incorreta e justifica sua resposta com definições exatas.

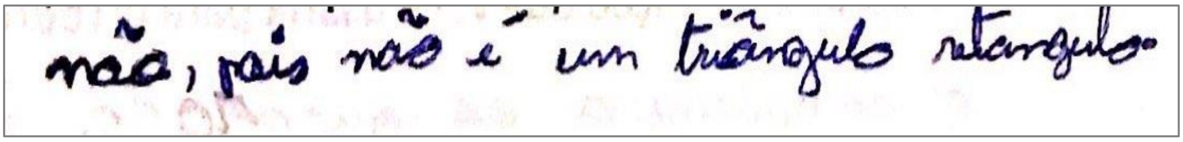
Figura 29 - Resposta do aluno B22 - Questão 1 - Tipo 3


Na sua opinião as medidas estão definidas corretamente?
Não. A hipotenusa é o maior lado do triângulo, paralelo a o ângulo reto.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Na resposta do aluno B24, o mesmo justifica sua resposta corretamente, afirmando que o triângulo proposto na questão não se trata de um triângulo retângulo.

Figura 30 - Resposta do aluno B24 - Questão 2 - Tipo 3


não, pois não é um triângulo retangulo.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 29, são apresentados os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (B21 – B30) nas questões 3 e 4, baseadas no nível 1, do questionário Tipo 3.

Quadro 29 - Níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 3 e 4

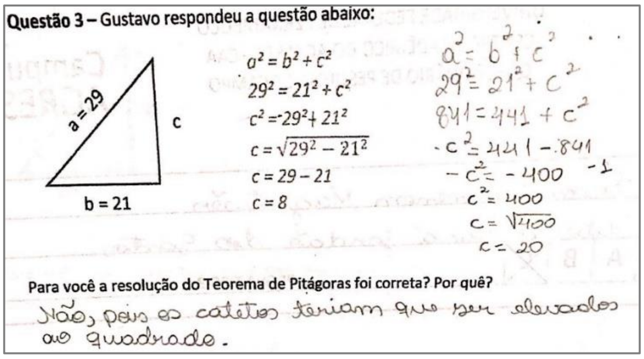
	QUESTÃO 3	**QUESTÃO 4**
B21	Visualização	Visualização
B22	Análise	Visualização
B23	Análise	Análise
B24	Análise	Análise
B25	Visualização	Análise
B26	Análise	Visualização
B27	Análise	Análise
B28	-	Análise
B29	Análise	-
B30	Visualização	Visualização

Fonte: A autora (2019).

Os dados apresentados no quadro 29 revelam que, na questão 3, três alunos foram classificados no nível de Visualização, seis alunos foram classificados no nível de Análise (nível base da questão) e um aluno não alcançou nenhum dos níveis apresentados.

Na questão 4, quatro alunos foram classificados no nível de Visualização, cinco alunos foram classificados no nível de Análise e um aluno não alcançou nenhum dos níveis apresentados. Destacamos a resposta do aluno B27 (Figura 31), na questão 3, que foi classificada no nível de Análise, pois, o aluno identifica o erro e justifica sua resposta, refazendo o cálculo de maneira correta (poucos alunos conseguiram responder de maneira correta a questão).

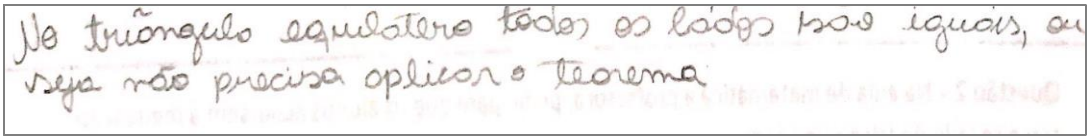
Figura 31 - Resposta do aluno B27 - Questão 3 - Tipo 3



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

A resposta do aluno B24 (Figura 32) na questão 4 foi classificada no nível de Análise, pois, o mesmo justifica que, no triângulo equilátero, todos os lados do triângulo têm a mesma medida, logo, não se faz necessário a aplicação do Teorema de Pitágoras nesse tipo de triângulo.

Figura 32 - Resposta do aluno B24 - Questão 4 - Tipo 3


No triângulo equilátero todos os lados são iguais, ou seja não precisa aplicar o teorema

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

No quadro 30, apresentamos os níveis de pensamento geométrico alcançados pelos alunos (B21 – B30) nas questões 5 e 6, baseadas no nível 2, do questionário Tipo 3.

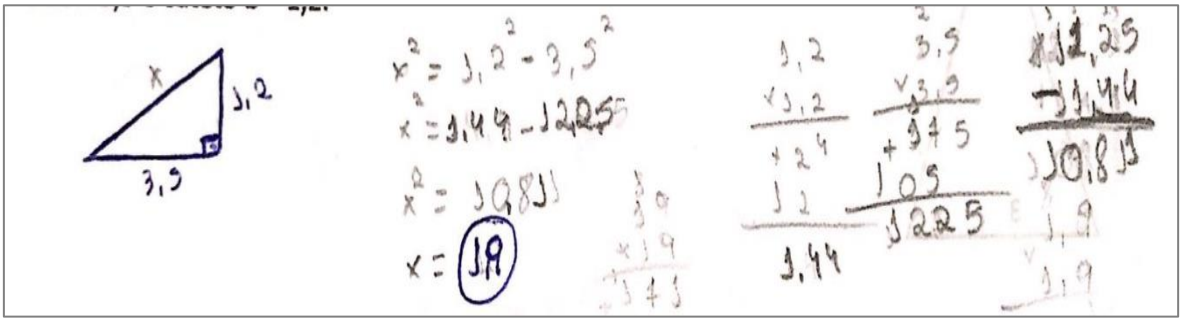
Quadro 30 - Níveis de pensamento geométrico identificados nas questões 5 e 6

	QUESTÃO 5	QUESTÃO 6
B21	Visualização	Análise
B22	Visualização	Visualização
B23	Análise	Visualização
B24	Análise	Visualização
B25	Análise	Análise
B26	Análise	Dedução informal
B27	Análise	Análise
B28	Visualização	Análise
B29	-	-
B30	Visualização	Dedução informal

Fonte: A autora (2019).

Observando os dados apresentados no quadro 30, identificamos que, na questão 5, quatro alunos foram classificados no nível de Visualização, cinco alunos foram classificados no nível de Análise e um aluno não alcançou nenhum dos níveis apresentados. Na questão 6, três alunos foram classificados no nível de Visualização, quatro alunos foram classificados no nível de Análise, dois alunos foram classificados no nível de Dedução informal (nível base da questão) e um aluno não alcançou nenhum dos níveis apresentados. Destacamos a resposta do aluno B24 (Figura 33), na questão 5, que foi classificada no nível de Análise, pois, o aluno fez um desenho seguindo corretamente as medidas propostas (catetos e hipotenusa). Todavia, não fez uso do instrumento (régua) esperado, por isso, não foi classificado no nível de Dedução informal. Não obstante, tentou demostrar o Teorema de Pitágoras, cometendo um erro na subtração final do processo.

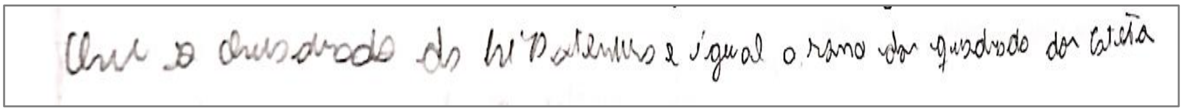
Figura 33 - Resposta do aluno B24 - Questão 5 -Tipo 3



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Destacamos também a resposta do aluno B26 (Figura 34), na questão 6, que foi classificado no nível de Dedução informal, pois foi o único que definiu o Teorema de Pitágoras, do modo que normalmente o teorema é definido em sala de aula: “que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”, o que nos dá a entender que, de alguma maneira, o aluno fixou algo do conteúdo abordado em sala de aula.

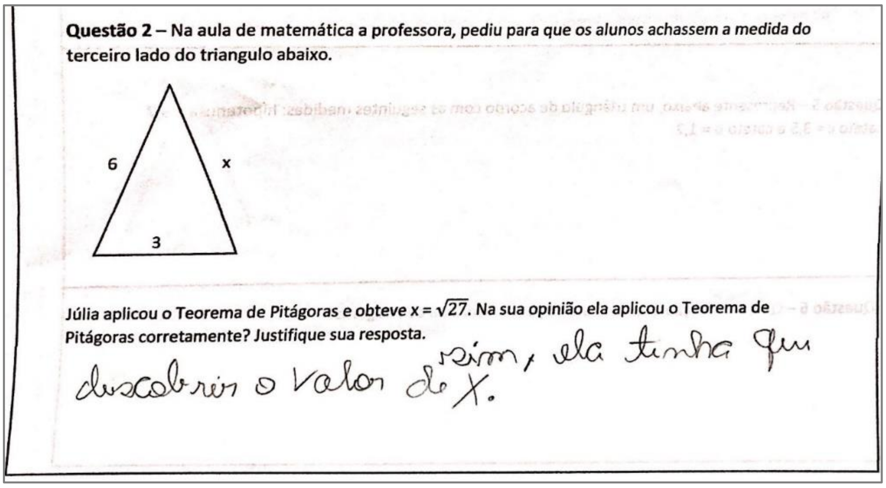
Figura 34 - Resposta do aluno B26 - Questão 6 - Tipo 3



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Ao analisar os erros cometidos, encontramos vários deles que podem ser relacionados aos erros citados por Berté (1995 apud BASTIAN, 2000), explicitado no capítulo 3. Exemplificando alguns erros cometidos, comparando-os com os erros cometidos por alunos franceses, apresentados por Annie Berté (1995), identificando que:

Figura 35 - Resposta do aluno A21 - Questão 1 - Tipo 3


Questão 2 – Na aula de matemática a professora, pediu para que os alunos achassem a medida do terceiro lado do triangulo abaixo.

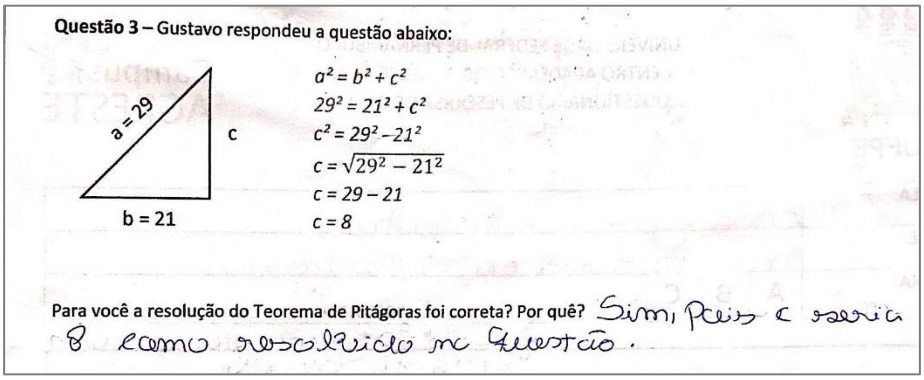
Júlia aplicou o Teorema de Pitágoras e obteve $x = \sqrt{27}$. Na sua opinião ela aplicou o Teorema de Pitágoras corretamente? Justifique sua resposta.

sim, ela tinha que descobrir o valor de X.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

O erro cometido pelo aluno A21, pode ser relacionado ao 1º erro citado por Berté, acerca da “utilização do teorema para calcular o terceiro lado de um triângulo não retângulo”. O aluno concorda com a utilização do teorema para descobrir a medida do terceiro lado de um triângulo isósceles.

Figura 36 - Resposta do aluno A30 - Questão 3 - Tipo 3



Questão 3 – Gustavo respondeu a questão abaixo:

a = 29, b = 21, c

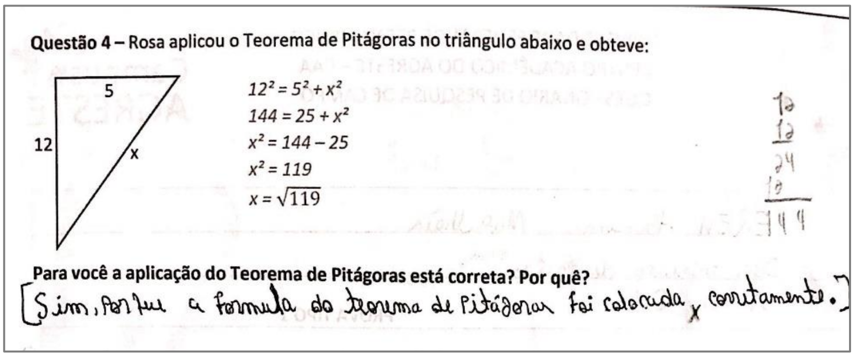
$a^2 = b^2 + c^2$
$29^2 = 21^2 + c^2$
$c^2 = 29^2 - 21^2$
$c = \sqrt{29^2 - 21^2}$
$c = 29 - 21$
$c = 8$

Para você a resolução do Teorema de Pitágoras foi correta? Por quê? Sim, Pois c seria 8 como resolvido na questão.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Podemos comparar o erro cometido pelo aluno A30, ao 2º erro citado por Berté, “sendo c o comprimento da hipotenusa e a e b catetos, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ = a + b, sem perceberem que essa conclusão contradiz a condição de existência de triângulo”. O aluno não consegue identificar esse erro, no qual $c = \sqrt{29^2 - 21^2} = 29 - 21$ e concorda com a resolução incorreta apresentada.

Figura 35 - Resposta do aluno A10 - Questão 4 - Tipo 1



Questão 4 – Rosa aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo abaixo e obteve:

5, 12, x

$12^2 = 5^2 + x^2$
$144 = 25 + x^2$
$x^2 = 144 - 25$
$x^2 = 119$
$x = \sqrt{119}$

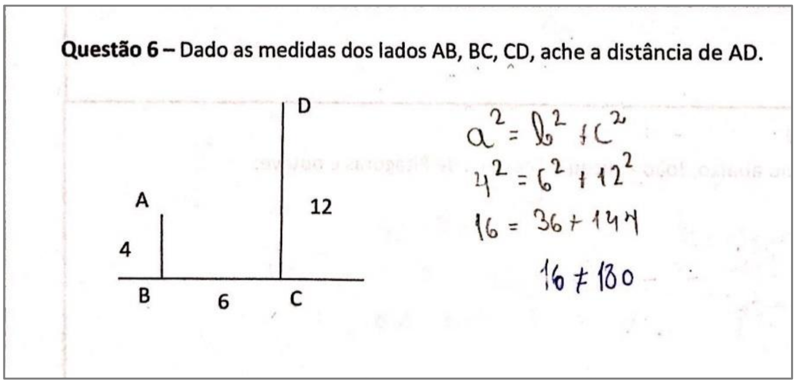
12
12
24
12
144

Para você a aplicação do Teorema de Pitágoras está correta? Por quê?
[Sim, Porque a formula do teorema de Pitágoras foi colocada corretamente.]

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

O erro apresentado na questão 4 pode ser comparado ao 3º erro citado por Berté, “ao calcular um dos catetos, alguns alunos escrevem que o quadrado desse lado é igual à soma dos quadrados da hipotenusa e do outro cateto”. O referido aluno não foi capaz de identificar que ao resolver a questão, Rosa considerou a hipotenusa como cateto.

Figura 36 - Resposta do aluno A30 - Questão 6 - Tipo 2



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

O erro do aluno A30 pode ser relacionado ao 6º erro citado por Berté (1995), “em classe do 3ème (alunos com aproximadamente 14 anos, o correspondente a nossa 8a série do Ensino Fundamental), foi proposto o seguinte exercício: “Dados AD, AB e BC, calcular DC”. Erro encontrado: segundo o Teorema de Pitágoras, $DC^2 = AD^2 + AB^2 + BC^2$. O aluno não consegue visualizar o triângulo retângulo na figura proposta. Berté (1995, p. 119 apud BASTIAN, 2000, p. 3) questiona: “é um mau emprego da analogia? Ou o aluno não “viu” o triângulo retângulo porque a projeção de D não figurava no desenho (...)?”.

De acordo com o que foi apresentado, foi possível analisar que o nível 0 (visualização) é o mais frequente. As questões foram todas elaboradas de acordo com o nível específico, aquelas que eram baseadas no nível 0 tinham como característica o nível de questão mais fácil. Já as questões baseadas no nível 1 eram características de nível médio. Por outro lado, as questões baseadas no nível 2 eram consideradas questões mais difíceis, ou mais elaboradas, podendo ser consideradas questões a nível de alunos do Ensino Médio, isto é, seriam aquelas questões que o aluno precisaria de um conhecimento geométrico mais aprimorado.

Nas questões de nível 0 (visualização), que eram as questões 1 e 2 de cada questionário, a maioria dos alunos conseguiram identificar o que estava sendo pedido, obtivendo uma grande maioria de acertos. Os aspectos analisados confirmam que, o nível 0, foi o nível mais frequente.

As questões de nível 1 (análise), que eram as questões 3 e 4 de cada questionário, tinham como proposta fazer uma análise do que estava sendo apresentado em cada uma delas, foram também as questões que mais tiveram erros. Muitas desses erros estiveram relacionados com resoluções incorretas prontas, porém, a maioria dos alunos não conseguiu identificar onde estava o erro apresentado em cada uma delas. Assim, apenas concordavam que o que estava sendo apresentado estava correto, sem nenhuma justificativa.

As questões de nível 2 (dedução informal) tiveram uma maior quantidade de questões em branco, ou seja, não foram respondidas. Nos quadros apresentados no decorrer deste trabalho, é possível notar que, uma quantidade mínima desses alunos foi classificada em Dedução informal, justamente por serem questões mais elaboradas, que se fazia necessário ter um conhecimento geométrico mais profundo, foi onde houve mais evasão de respostas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo geral, investigar o nível de pensamento geométricos dos alunos do 1º ano do Ensino Médio ao resolver questões relacionadas ao Teorema de Pitágoras, tendo como base os níveis de pensamentos geométricos de Van Hiele. Com isso, para tal investigação, pensamos em dois objetivos específicos: analisar as estratégias e os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras; e identificar os níveis de pensamento geométrico em que os alunos se encontravam.

Portanto, baseados nos três primeiros níveis de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele, construímos os três tipos de questionários. Todos os questionários foram compostos por 6 questões envolvendo o Teorema de Pitágoras, os instrumentos de coleta de dados foram aplicados em duas turmas do 1º ano do Ensino Médio. Ao decorrer da análise dos questionários, pudemos identificar estratégias e procedimentos utilizados pelos alunos, ao responderem e justificarem suas respostas, classificando-as em um dos níveis de pensamento geométrico da teoria considerada.

Ao analisar as respostas dos alunos, conseguimos identificar que, a maioria deles está classificada no nível 0 (Visualização), sendo que alguns alunos não conseguiram atingir nenhum dos níveis propostos, o que é considerado um nível muito inferior ao nível que os alunos do Ensino Médio deveriam se encontrar. Segundo Rodrigues (2015, p. 47) “os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno”. Ainda segundo o autor:

> É válido observar que, por vezes, um aluno pode estar situado em um determinado nível na aprendizagem dos conceitos geométricos segundo a teoria de van Hiele, mas domina algumas habilidades do nível seguinte, ou seja, as respostas no teste podem oscilar entre dois níveis (RODRIGUES, 2015, p. 63).

Um dos possíveis motivos para tal resultado pode ser revelado no estudo da Geometria, o qual está sendo omitido pelos professores, e também muito pouco abordado nos livros didáticos da Educação Básica. O Teorema de Pitágoras é um dos principais conteúdo da Geometria, incluso nos livros didáticos nas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, porém, como já dito, ainda fica a escolha do professor trabalhar ou não o conteúdo dentro da sala de aula, Nesse sentido, por vezes, o professor escolhe trabalhar com esses conteúdos apenas de maneira reduzida, não introduzindo o Teorema de Pitágoras como ferramenta para resolução de diferentes problemas em geometria, como também em outras áreas da matemática. Segundo Villiers (2010, p. 428),

> Uma das principais preocupações no ensino da geometria em todo o mundo é o contínuo baixo nível de raciocínio geométrico entre os próprios professores, e até que tal problema seja tratado adequadamente, provavelmente haverá pouco progresso na qualidade do ensino de geometria.

O não trabalho do professor com a Geometria em sala de aula, muitas vezes, pode ser compreendido pelo fato de que, o próprio professor não tenha um conhecimento concreto sobre o conteúdo, o que faz com que não se sinta à vontade ao trabalhar o mesmo em sala com os seus alunos. Por isso, podemos verificar através desses resultados também uma maneira de trabalhar nas formações iniciais dos professores de Matemática. Leivas (2012, p. 654), em sua pesquisa intitulada: "como os indivíduos concebem o enunciado do Teorema de Pitágoras e qual a forma geométrica concebida por eles sobre o teorema?" diz que,

> A pesquisa comprovou que os indivíduos envolvidos, embora quatro deles já sejam formados, não atingiram tal nível de maturidade matemática no conteúdo focado, pois sequer esboçaram algum tipo de ensaio que nos levasse a concluir que tinham algum conhecimento da validade do Teorema em casos mais gerais, o que é esperado, pelo menos, para professores universitários que participaram da pesquisa.

Portanto, ainda há muito que ser trabalhado na Educação Geométrica, para que possamos fazer com que os estudando da Educação Básica evoluam de acordo com os níveis de pensamento geométrico baseados na Teoria de Van Hiele. De acordo com Leivas (2012), acredita-se que, desenvolver habilidades de visualização e permitir diversas formas de representar um conceito matemático, é o caminho fundamental para atingir esse objetivo.

Com os resultados obtidos nessa pesquisa, consideramos de suma importância pensar na elaboração de novas metodologias de ensino voltadas para o desenvolvimento e avanço do pensamento geométrico, as podem contribuir positivamente nesse processo, não apenas com o conteúdo de Teorema de Pitágoras, mas com todos os demais que fazem parte do currículo dos anos finais da Geometria, uma vez que os mesmos são de extrema importância para o desenvolvimento do aluno nas demais áreas da matemática.

Sugerimos que, em futuras pesquisas, seja feita não apenas uma investigação acerca do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes, mas também uma investigação acerca dos níveis de pensamentos geométricos de estudantes licenciado/licenciando em matemática, na qual os mesmos respondam e discutam questões elaboradas com base nos diferentes níveis da Teoria de Van Hiele, a fim de verificar se podem ser classificados como pensadores de níveis maiores ou menores do que os níveis de raciocínio dos alunos do ensino básico.

REFERÊNCIAS

BASTIAN, Irma Verri. ALMOULOUD, Saddo. O Teorema de Pitágoras: Uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. **Educação Matemática**, São Carlos-SP, n.14, p.45-56, agosto, 2003.

BASTIAN I. V. **O Teorema de Pítágoras.** Mestrado em Educação Básica. Pontifícia Universidade de São Paulo - PUC-SP, 2000.

BENTO, A. Investigação quantitativa e qualitativa: Dicotomia ou complementaridade? **Revista JA** (Associação Académica da Universidade da Madeira), nº 64, ano VII (pp. 40-43), abril, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF,2016.

BULOS, A. M. M.. **O Ensino da Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. In: XIII CIAEM – IACME, Recife, Brasil, 2011.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.) **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.

KAMERS F. **Pitágoras de Samos e o teorema de Pitágoras.** Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

LEIVAS J. C. P. Pitágoras e Van Hiele: Uma possibilidade de conexão. In: **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 643-655, 2012.

LUZ A. A. B. S.; OLIVEIRA J. P. F.; JACON M. L.; LUNA N. S.; ALVES S. P. S. **A Geometria na disciplina de Matemática: A abordagem dos livros didáticos.** Universidade Federal do Paraná, 2007.

RABAIOLLI L. L.; STROHSCHOEN A. A. G.; GIONGO I. M. **O Ensino de Geometria nos anos iniciais da Educação Básica.** 2008. Disponível em: https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2013/o_ensino_de_geometria_nos_anos_iniciais_da_educacao_basica_.pdf. Acesso em: 14/06/2019.

RODRIGUES S. S. A. **A teoria de Van Hiele aplicada aos Triângulos:** uma sequência Didática para o 8º ano do Ensino Fundamental. Universidade Estadual Do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2015.

SANTOS M. C.; SILVA F. L. T.; LINS A. F. Demonstrações do teorema de Pitágoras na perspectiva do professor de matemática. **Encontro Nacional de Educação, Ciência e Tecnologia**/UEPB, 2012.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILLIERS M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.12, n.3, pp. 400-431, 2010.

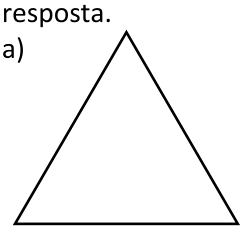
APÊNDICE A: QUESTIONÁRIO - TIPO 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE – CAA
QUESTIONÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO

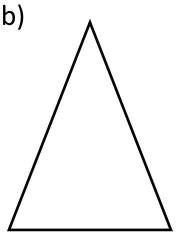
ESCOLA:				
NOME:				
TURMA:	A	B	C	**PROVA TIPO 1**

Questão 1 – Identifique em qual dos triângulos abaixo podemos aplicar o teorema de Pitágoras? Justifique sua resposta.

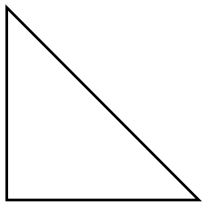
a)



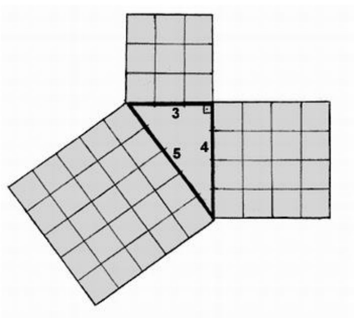
b)



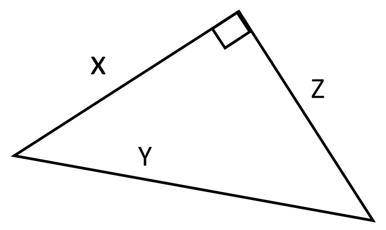
c)



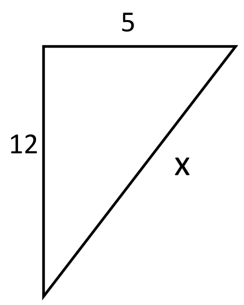
Questão 2 – Observe a imagem e verifique se a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual a areá do quadrado da hipotenusa.



Questão 3 – Aplique o Teorema de Pitágoras no triangulo abaixo:



Questão 4 – Rosa aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo abaixo e obteve:



$12^2 = 5^2 + x^2$

$144 = 25 + x^2$

$x^2 = 144 - 25$

$x^2 = 119$

$x = \sqrt{119}$

Para você a aplicação do Teorema de Pitágoras está correta? Por quê?

Questão 5 – Marcos aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo isósceles de medidas 9,9,3 e observou:

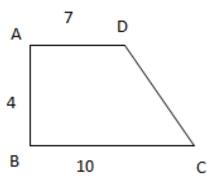
$9^2 = 9^2 + 3^3$

$81 = 81 + 9$

$81 \neq 90$

O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo isósceles?

Questão 6 - Dados AD, AB e BC, calcular DC.

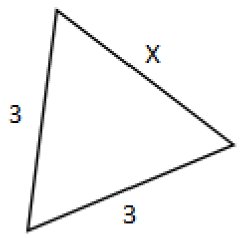


APÊNDICE B: QUESTIONÁRIO - TIPO 2

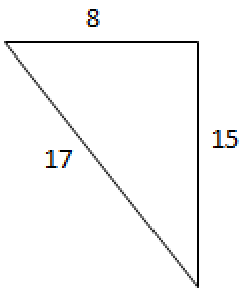
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE – CAA
QUESTIONÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO

ESCOLA:				
NOME:				
TURMA:	A	B	C	**PROVA TIPO 2**

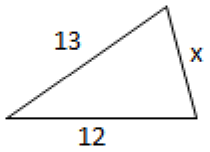
Questão 1 – Maria aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo abaixo e obteve x = 0. Para você, Maria aplicou o teorema corretamente? Por quê?



Questão 2 – Claudia observou o triângulo abaixo e aplicou o Teorema de Pitágoras, considerando a = 8, b= 15, c = 17. Na sua opinião, as medidas consideradas por Claudia estão corretas?



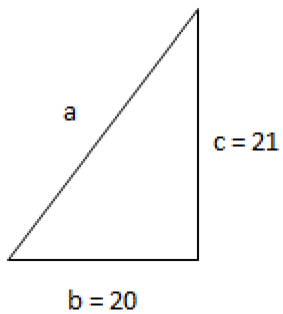
Questão 3 – Observando o triângulo abaixo, João aplicou o Teorema de Pitágoras e obteve:



$$13^2 = x^2 + 12^2$$
$$x^2 = 13^2 - 12^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5$$

Para você, a aplicação do Teorema de Pitágoras foi correta? Por quê?

Questão 4 – Fábio respondeu à questão abaixo:



$$21^2 = 20^2 + a^2$$
$$441 = 400 + a^2$$
$$a^2 = 441 - 400$$
$$a^2 = 41$$
$$a = \sqrt{41}$$

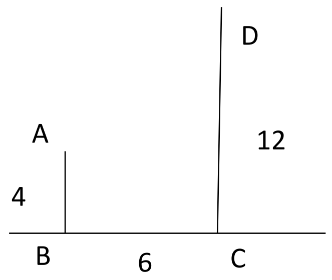
O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras feita por Fábio?

Questão 5 – Márcio aplicou o Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero e observou:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$6^2 = 6^2 + 6^2$$
$$36 = 36 + 36$$
$$36 \neq 72$$

O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero?

Questão 6 – Dadas as medidas dos lados AB, BC, CD, ache a distância de AD.

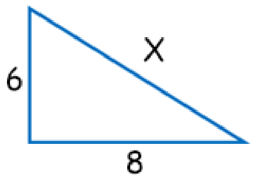


APÊNDICE C: QUESTIONÁRIO - TIPO 3

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE – CAA
QUESTIONÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO

ESCOLA:				
NOME:				
TURMA:	A	B	C	**PROVA TIPO 3**

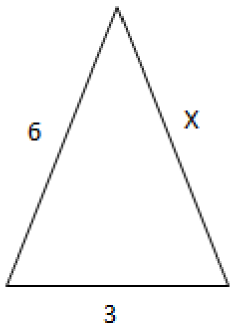
Questão 1 – Observando o triângulo abaixo. Lucas definiu de acordo com o Teorema de Pitágoras as seguintes medidas



6 = hipotenusa
8 , x = catetos

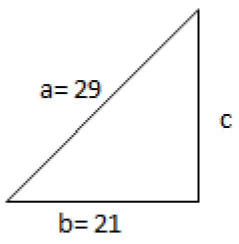
Na sua opinião as medidas estão definidas corretamente?

Questão 2 – Na aula de matemática a professora, pediu para que os alunos achassem a medida do terceiro lado do triangulo abaixo.



Júlia aplicou o Teorema de Pitágoras e obteve x = $\sqrt{27}$. Na sua opinião, ela aplicou o Teorema de Pitágoras corretamente? Justifique sua resposta.

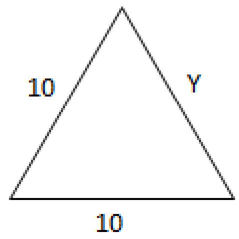
Questão 3 – Gustavo respondeu à questão abaixo:



$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$29^2 = 21^2 + c^2$$
$$c^2 = 29^2 - 21^2$$
$$c = \sqrt{29^2 - 21^2}$$
$$c = 29 - 21$$
$$c = 8$$

Para você, a resolução do Teorema de Pitágoras foi correta? Por quê?

Questão 4 – Caio ao tenta resolver uma questão que envolve um triângulo equilátero, representado na imagem abaixo. Para tanto, aplicou o Teorema de Pitágoras da seguinte maneira:



$$10^2 = 10^2 + y^2$$
$$100 = 100 + y^2$$
$$y^2 = 100 - 100$$
$$y = 0$$

O que podemos afirmar sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo equilátero?

Questão 5 – Represente, abaixo, um triângulo de acordo com as seguintes medidas: hipotenusa = 3,7, cateto c = 3,5 e cateto b = 1,2.

Questão 6 – Qual a definição que você usaria para o Teorema de Pitágoras?