UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

RÚBEN FÉLIX DA SILVA

CUBO DE RUBIK E ESTRUTURAS ALGÉBRICAS: uma intervenção sobre Teoria dos Grupos em licenciandos de Matemática

CARUARU, 2018

RÚBEN FÉLIX DA SILVA

CUBO DE RUBIK E ESTRUTURAS ALGÉBRICAS: uma intervenção sobre Teoria dos Grupos em licenciandos de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Licenciatura em Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha

CARUARU, 2018

Catalogação na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

S586c Silva, Rúben Félix da.
Cubo de Rubik e estruturas algébricas: uma intervenção sobre teoria dos Grupos em licenciandos de matemática. / Rúben Félix da Silva. – 2018.
70 f. il. : 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Coorientador: Marcílio Ferreira dos Santos
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2018.
Inclui Referências.

1. Cubo mágico. 2. Álgebra – Estudo e ensino. 3. Teoria dos grupos. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Santos, Marcílio Ferreira dos (Coorientador). III. Título.

CDD 371.12 (23. ed.) UFPE (CAA 2018-377)

RÚBEN FÉLIX DA SILVA

CUBO DE RUBIK E ESTRUTURAS ALGÉBRICAS: uma intervenção sobre Teoria dos Grupos em licenciandos de Matemática

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco.

Aprovada em: 17/12/2018

BANCA EXAMINADORA

____

Profº. Cristiane de Arimatéa Rocha
(Orientadora)

____

Profº. Marcílio Ferreira dos Santos
(Examinador Interno)

____

Profº. Everton Henrique Cardoso de Lira
(Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, meus primeiros e melhores professores, meu porto seguro, que sempre acreditaram em mim e foram os primeiros responsáveis pela minha paixão por Matemática.

À minha namorada, Mariana Carolayne, pela paciência em ouvir minhas lamentações diárias e pelas dicas textuais sobre um tema que não era sua área (e pelas fotos).

À minha orientadora, Cristiane Rocha, ao meu Co-Orientador, Marcílio Ferreira e ao meu amigo, Pedro Santos, meu “Co-co-orientador”, pelas dicas e conselhos em relação à construção do trabalho.

Aos meus professores Elizabeth Lacerda, Maria do Desterro, Cleiton Ricardo e Gilcênio Rodrigues, por me mostrarem que a Matemática é muito mais do que apenas cálculos.

Aos meus amigos, Diego Jonata, Gilvaneide Evelyn, Edivanilson Edmilson, Matheus Jerônimo e todos os outros que me fizeram sorrir mesmo em tempo de provas e seminários.

Enfim, à todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a minha formação como professor de Matemática, muito obrigado.

RESUMO

A disciplina de Estruturas Algébricas é conhecida por ser uma das mais difíceis da graduação em Licenciatura em Matemática. Parte da sua dificuldade está relacionado com a abstração dos conteúdos e com a carência de exemplos práticos dos seus conceitos. Sendo assim, a nossa pesquisa tem como objetivo principal analisar se o Cubo Mágico serve de instrumento didático para o ensino de Teoria dos Grupos, e como específico, temos analisar a relação dos licenciandos com a notação utilizada na oficina, investigar a opinião dos estudantes com relação ao Cubo Mágico como instrumento didático, e por fim, analisar as diferentes aprendizagens que seriam construídas, tanto dos licenciandos que já cursaram a disciplina quanto os que ainda iriam cursar. Como subsídio para obtenção dos dados da nossa pesquisa, aplicamos um questionário afim de identificar possíveis erros conceituais referentes à disciplina, em seguida ministramos uma oficina com a finalidade de ensinar conceitos de Estruturas Algébricas com o auxílio do Cubo Mágico, e em seguida aplicamos um segundo questionário com o intuito de verificar se o Cubo foi capaz de criar imagens conceituais coerentes. Nossa pesquisa mostrou que de fato existem erros conceituais por parte dos licenciandos, sobretudo em relação a estruturas não-comutativas e que o Cubo Mágico foi útil para corrigir tais erros, porém apresentou limitações devido à linguagem empregada na Oficina.

Palavras-chave: Cubo Mágico; Imagens conceituais; Estruturas Algébricas.

ABSTRACT

The discipline of Algebraic Structures is known to be one of the most difficult of undergraduate degrees in Mathematics. Part of its difficulty is related to the abstraction of contents and to the lack of practical examples of its concepts. Thus, our research has as main objective to analyze if the Rubik Cube its useful as a didactic tool for the teaching of Groups Theory, and as specific, we have to analyze the relation of the licenciandos with the notation used in the workshop and, finally, analyze different learning that would be built, both of the graduates who have already studied the discipline and those who would still attend. As a subsidy to obtain the data of our research, we applied a questionnaire in order to identify possible conceptual errors related to the discipline, then we gave a workshop with the purpose of teaching concepts of Algebraic Structures with the aid of the Rubik Cube, and then applied a second questionnaire in order to verify if the Cube was able to create coherent concept images. Our research has shown that there are in fact conceptual errors on the part of licensees, especially in relation to non-commutative structures and that the Rubiks Cube was useful to correct such errors, but presented limitations due to the language used in the Workshop.

Keywords: Rubik Cube; Concept images; Algebraic Structures; Permutation Groups.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de Estruturas Algébricas (EA) está presente no currículo de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e é geralmente conhecida por ser uma das mais difíceis disciplinas de toda a graduação. O motivo dessa dificuldade se deve ao fato da disciplina conter muitas definições não triviais, e principalmente pelo fato de ser difícil imaginar possíveis exemplificações de um determinado conceito. Ao estudar uma equação do segundo grau, por exemplo, podemos pensar sobre o conceito de diversas formas, como o gráfico de uma função específica, o cálculo do discriminante delta, o vértice da parábola, etc. Porém, ao estudar grupos cíclicos, um dos conteúdos de EA, não conseguimos pensar tão facilmente em um exemplo e muito menos pensar no conceito de grupos cíclicos a partir de diversas perspectivas.

Quando eu cursei a disciplina de EA, pude sentir as mesmas dificuldades que outros estudantes relatavam, pois também não fui capaz de compreender as primeiras definições da disciplina, o que acarretou a mesma dificuldade em outros tópicos derivados dessas primeiras definições. No decorrer do curso, eu descobri que o Cubo Mágico era um exemplo de grupo de permutação, e como tenho bastante familiaridade com o brinquedo, decidi fazer minha pesquisa nessa área.

No que diz respeito à nossa justificativa, devemos considerar dois fatos. O primeiro é que a disciplina de EA é considerada difícil por muitos alunos. Esse fato pode ser constatado na tese de Kluth (2005) quando a autora afirma que estudantes de licenciatura sentem dificuldades na compreensão de conceitos algébricos fundamentais, de interpretar ideias principais dos textos matemáticos (demonstrações e/ou definições matemáticas) e de percepção de elementos que sistematizam uma teoria.

O segundo fato é que o Cubo Mágico *é* um exemplo de aplicação do conceito de grupo, como Grimm (2016) verifica em sua dissertação de mestrado, onde ele mostrou que, definindo corretamente o conjunto e a operação, o Cubo possuía estrutura associativa, apresentava elemento neutro e todo elemento possuía um inverso. Por outro lado, para entender como o Cubo Mágico se comporta como grupo, é necessário estabelecer uma notação comum, onde optamos pela notação oficial da World Cube Association (WCA), que poderia ser confusa para os alunos que nunca tiveram contato com ela.

Dessa forma, visto que a disciplina é considerada difícil para muitos e o Cubo é um exemplo de um dos principais conceitos abordados nela, consideramos no mínimo razoável investigar se ele poderia servir como objeto didático no ensino de Teoria dos Grupos.

Levando em conta a importância da disciplina para o curso de graduação, o presente trabalho teve como objetivo principal analisar se o Cubo Mágico serve de instrumento didático para o ensino de Teoria dos Grupos, para licenciandos. Também estávamos particularmente interessados nos seguintes objetivos específicos: analisar a relação dos licenciandos com a notação utilizada na oficina e, ainda, analisar diferentes aprendizagens que seriam construídas, tanto dos licenciandos que já cursaram EA quanto os que ainda iriam cursar.

Como referencial teórico para nossa pesquisa, adotamos os trabalhos de David Tall e Shlomo Vinner (1981) sobre imagens conceituais. De acordo com os autores, o termo *imagem conceitual* é usado para denotar toda estrutura cognitiva associada a certo conceito, podendo estar de acordo com a definição formal matemática ou não.

Tendo em vista o ramo da matemática sobre o qual estamos fazendo nossa pesquisa, dedicamos, para fins de consulta, um capítulo para apresentar algumas definições, proposições e teoremas sobre Estruturas Algébricas.

O capítulo seguinte consiste em falar sobre as diferentes abordagens que podem ser feitas utilizando o Cubo Mágico. Para isso, falamos brevemente sobre a origem da Teoria dos Grupos, em seguida apresentamos um apanhado histórico sobre o Cubo Mágico e apresentamos a notação que foi utilizada na oficina. Em seguida, abordamos vários tópicos de Teoria dos Grupos e explicamos como o Cubo poderia ser útil para exemplificar alguns conceitos.

No capítulo referente ao desenvolvimento de nossa pesquisa, trouxemos o percurso metodológico, juntamente com sua categorização. Apresentamos as etapas em que se deu nosso trabalho, falando sobre os assuntos abordados nos questionários e sobre como aconteceu a oficina.

No tocante à nossa análise, procuramos responder nossos objetivos da seguinte forma: primeiramente procuramos identificar erros conceituais nas respostas do primeiro questionário, e em seguida analisamos como esses erros conceituais não se repetiram ao final da oficina. Em seguida, observamos outras questões a fim de identificar possíveis erros causados pela linguagem utilizada. Por fim, analisamos outras questões com o intuito de verificar as diferentes aprendizagens dos alunos bem como suas respectivas opiniões acerca do Cubo Mágico como instrumento didático.

2 BREVE ABORDAGEM SOBRE IMAGENS CONCEITUAIS

Nossa pesquisa foi baseada nas contribuições de David Tall e Shlomo Vinner (1981) *sobre imagem conceitual* e *definição conceitual*, dando ênfase na dificuldade de compreender um conceito com poucas imagens conceituais.

O nome completo da teoria é na verdade “Imagem Conceitual e Definição conceitual em Matemática com ênfase em Limites e Continuidade”, isto é, ela é a princípio voltada para a compreensão do Cálculo Diferencial, porém acreditamos que a mesma também se aplica a outras áreas da Matemática, como Estruturas Algébricas (EA).

Os autores sustentam a ideia de que a definição formal não deva ser a primeira informação acerca de um conceito, mas que exista primeiramente certo vínculo com o conceito em questão, para que quando a definição formal seja apresentada, ela possa ser totalmente compreendida. Segundo os autores:

> O cérebro humano não é uma entidade puramente lógica. A maneira complexa com que ele funciona está muitas vezes em desacordo com a lógica da matemática. Nem sempre é a lógica pura que nos dá discernimento, nem é o acaso que nos leva a cometer erros. Para entender como esses processos ocorrem, tanto com êxito quanto erroneamente, devemos formular uma distinção entre os conceitos matemáticos como formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais eles são concebidos. (TALL; VINNER, 1981, p.151, tradução nossa).

A Matemática é uma linguagem bastante rígida do ponto de vista das definições. Essa rigidez é necessária, pois estão enunciadas de um jeito que evitam contradições, tecendo assim as teias das relações matemáticas. Vejamos por exemplo a definição de Máximo Divisor Comum.

De acordo com Plínio (1988), se d é o Máximo Divisor Comum de a então $d|a$ e se existe f tal que $f|a$ então $f < d$. Perceba que da forma como está definida não existe possibilidade de ambiguidades. Por outro lado, ao usarmos apenas nossas memórias para dar a definição de um conceito, corremos o risco de apresentar uma definição que permita ambiguidades, como, por exemplo, a definição de elemento inverso.

Uma caracterização cognitiva para elemento inverso pode ser "Um elemento que quando multiplicado pelo inverso resulta em 1". Essa frase está correta apenas se considerarmos a operação *multiplicação* e o conjunto dos números reais (ou racionais). A frase não faria sentido, por exemplo, dentro do conjunto das matrizes de ordem 2, pois o seu elemento neutro é a matriz identidade e não o número 1.

De acordo com Tall e Vinner (1981), uma *imagem conceitual* é toda estrutura cognitiva associada a um conceito, podendo ser desde visualizações mentais e propriedades à qualquer processo associado. Uma imagem conceitual é gerada ao longo dos anos através de experiências relacionadas ao conceito, podendo mudar à medida que aprende algo novo.

Os autores definem ainda *Definição conceitual* como sendo

> [...] a forma que as palavras foram utilizadas para especificar aquele conceito. Ele pode ser aprendido por um sujeito de uma forma rotineira ou aprendido mais significativamente e relacionado, em maior ou menor grau, com o conceito. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante de uma definição (TALL & VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Não é difícil concluir que quanto mais imagens conceituais o indivíduo possuir sobre um conceito, e o quão bem estruturadas essas imagens conceituais estão em relação à definição formal, melhor será a compreensão do conceito. Porém como vimos, uma imagem conceitual não precisa ser totalmente coerente com a definição formal, isto é, o indivíduo pode ter uma imagem conceitual equivocada.

As imagens conceituais são de fato um artifício bastante eficiente do cérebro, pois permite que tenhamos acesso apenas a uma parte específica de um conceito, e não perdendo tempo em lembrar-se de todas as informações relacionadas a ele. Porém existe um problema relacionado a isso. À medida que uma imagem conceitual vai se desenvolvendo, ela não precisa ser coerente em todo momento. Os autores especificam que

> A entrada sensorial excita certas vias neuronais e inibe outras. Desta forma, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual, desenvolvendo-os de uma forma que não precisa ser coerente como um todo (TALL; VINNER, 1981, p.152, tradução nossa).

Chamaremos essa parte da imagem conceitual de *imagem do conceito evocada.* Em diferentes momentos, aparentemente algumas imagens conflitantes podem ser evocadas. Somente quando as imagens conceituais são evocadas *simultaneamente* é que sentimos uma sensação de confusão. Se não fosse por tal confusão, não seria possível identificar o equívoco na imagem conceitual. Esses conflitos podem ser sutis, podendo nem ao mesmo serem percebidos conscientemente, mas mesmo assim, nessas situações onde o indivíduo não percebe que as imagens conceituais estão em desacordo, ele naturalmente irá cometer erros.

Ilustraremos esse fato com o exemplo de grupo cíclico. Em EA, dados $m \in \mathbb{Z}$, $g \in G$, denota-se por

$$g^m = \begin{cases} e, & m = 0, \\ g^{m-1} * g, & m \geq 1, \\ (g^{-1})^m, & m < 0, \end{cases}$$

onde e é o elemento neutro e $*$ é uma operação binária genérica. Essa notação já é conhecida, pois é a mesma utilizada quando a operação binária for a multiplicação. Porém, em EA, essa notação é generalizada para todas as operações, incluindo a soma, isto é, é conveniente as vezes representar $5 + 5 + 5$ por 5^3 em vez de $3 \cdot 5$. Essa notação pode ser bastante confusa quando usada para exemplificar grupos cíclicos.

De acordo com a definição formal, um grupo é dito *cíclico* se ele for gerado por um único elemento. Um dos primeiros exemplos de grupos cíclicos é o $(\mathbb{Z}, +)$, onde $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$, porém, de acordo com a notação, temos que $\langle 1 \rangle = \{1^m \in \mathbb{Z}\,; m \in \mathbb{Z}\}$, onde estamos acostumados a concluir que $1^m = 1, \forall\, m \in \mathbb{Z}$.

A notação utilizada não foi a causa da confusão, tão pouco a noção de grupo cíclico, porém, quando as duas imagens conceituais são evocadas ao mesmo tempo, é possível perceber o conflito. Chamaremos essas imagens conceituais que podem causar conflitos com outras de *potencial fator de conflito.*

Tall e Vinner (1981) consideram a *definição de conceito* como sendo “um conjunto de palavras usadas para especificar tal conceito”. A definição de conceito pode ser adquirida a partir da memorização mecânica ou aprendida de uma forma mais significativa. Em todo caso, a definição de conceito é o conjunto de palavras que o aluno usa para sua própria explicação de um determinado conceito.

A definição de conceito, assim como a imagem conceitual como um todo vai sendo moldada com o passar das experiências, ficando cada vez mais refinada. Segundo os autores, somente quando a definição de conceito está madura o suficiente é que se deve apresentar a definição formal, porém não é isso que ocorre sempre.

Em EA, é comum que a definição formal de um conceito seja apresentada antes que qualquer noção sobre o tema, o que é exatamente o oposto do que os autores propõem. Acreditamos que isso possa influenciar negativamente na compreensão do assunto.

Podemos usar como exemplo o conceito de operação binária. Por definição formal, uma *operação binária* é uma aplicação $*: A \times A \to A$ que a cada par de elementos em $A \times A$ associa um elemento em A.

Essa definição pode ser difícil de interpretar a primeira vista, ou até mesmo causar conclusões equivocadas, porém se antes de apresenta-la usarmos o exemplo da soma $(+)$ no conjunto dos inteiros, que combina dois números inteiros e o resultado é outro número inteiro, fica mais fácil de aceitar a definição formal e até mesmo de generalizá-la.

Dentre os diferentes tipos de fatores de conflito, o mais sério é um na qual a imagem conceitual está em desacordo com a definição formal do conceito em si. Segundo os autores,

> Tais fatores podem impedir seriamente o aprendizado de uma teoria formal, pois eles não podem se tornar reais fatores de conflito cognitivo a menos que a definição formal do conceito desenvolva uma imagem conceitual que produza um conflito cognitivo. Alunos que possuem tais fatores de conflitos em potencial nas suas imagens conceituais podem estar tão seguros em suas próprias interpretações das noções, que simplesmente consideram a teoria formal como inoperante e supérflua. (TALL; VINNER, 1981, p.154, tradução nossa).

É de se concordar que se fosse possível estimular imagens conceituais de definição formal o índice de confusões diminuiria. É exatamente isso que estamos tentando fazer: utilizar o Cubo Mágico para criar imagens conceituais coerentes com as definições formais de EA.

3 DEFINIÇÕES, NOTAÇÕES E RESULTADOS DE TEORIA DOS GRUPOS

No decorrer da nossa pesquisa, sobretudo no próximo capítulo, faremos diversas menções a elementos abstratos de Teoria dos Grupos, dessa forma, neste capítulo apresentaremos as definições mais recorrentes para fins de consulta. Estas definições foram retiradas do livro de Garcia e Lequain (2001).

Definição. Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação binária $*$, isto é

$$*: G \times G \to G$$
$$*\ (a, b) \longmapsto a * b$$

Dizemos que o par $(G,*)$ é um grupo, se as seguintes condições forem verificadas:

i. A operação é associativa, isto é,

$$(a * b) * c = a * (b * c), \ \ \forall a, b, c \in G$$

ii. Existe um elemento neutro, isto é,

$\exists e \in G$ tal que $e * a = a * e = a, \ \forall a \in G$

iii. Todo elemento possui um inverso, isto é,

$\forall a \in G, \exists b \in G$ tal que $a * b = e$

Dizemos ainda que $(G,*)$ é um grupo comutativo (ou abeliano), se

iv. A operação $*$ é comutativa, isto é,

$$a * b = b * a\ , \forall a, b \in G$$

Observação. O elemento neutro é único. De fato, supondo que e, e' são elementos neutros de G, então

$$e = e * e' = e'$$

Observação. O inverso de um elemento é único. De fato, seja $a \in G$. Supondo que $b, b' \in G$ são ambos elementos inversos de a, temos

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'$$

Representaremos o inverso de a por a^{-1}.

3.1 Subgrupos

Definição. Seja $(G,*)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizemos que H é um subgrupo de G, quando for um grupo em relação à operação de G, isto é,

0) $\mathrm{h}_1 * h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$
i) $(h_1 * h_2) * h_3 = h_1 * (h_2 * h_3), \quad \forall h_1, h_2, h_3 \in H$
ii) $\exists e_H \in H$ tal que $e_H * h = h * e_H = h, \quad \forall h \in H$
iii) Para cada $h \in H$, existe $k \in H$ tal que $h * k = k * h = e_H$

Observação. A condição 0) e i) sempre serão satisfeitas, pois como $H \subset G,$ temos que $h_1, h_2, h_3 \in G$.
Observação. O elemento neutro do subgrupo é o mesmo do grupo, isto é $e_H = e$. De fato, dado $h \in H \subset G$, temos que $e_H * h = e * h \Longrightarrow e_H * (h * h^{-1}) = e * (h * h^{-1}) \Longrightarrow e_H * e = e * e \Longrightarrow e_H = e$.
Observação. O inverso de h em H é o mesmo de h em G, pois o inverso é único.

Proposição. Seja H um subconjunto não-vazio G. Então H é subgrupo de G se, e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

i. $h_1 * h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$

ii. $h^{-1} \in H, \forall h \in H$.

3.1.1 Subgrupo Gerado por um Conjunto

Por questões de notação, se H é um subgrupo de G, denotamos por H^{-1} o conjunto $\{h^{-1} \mid h \in H\}$. Se S é um subconjunto não vazio de G, o conjunto $\{s_1 s_2 s_3 \dots s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S \; ou \; s_i \in S^{-1}\}$ é denotado por $\langle S \rangle$ e chamamos o conjunto *gerado* por S. Se S for finito, digamos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ utiliza-se a notação $\langle s_1, s_2, \dots, s_k \rangle$ para indicar $\langle \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \rangle$. Note que se $g \in G$, então $\langle g \rangle = \{\dots, (g^{-1})^2, g^{-1}, e, g, g^2, \dots\}$, e se denotarmos por g^{-k} o elemento $(g^{-1})^k$, temos que $\langle g \rangle = \{g^t \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

Proposição._Seja G um grupo e S um subconjunto não-vazio de G. Então o conjunto $\langle S \rangle$, munido da operação em G é um subgrupo de G.

Proposição. Seja G um grupo e S um conjunto não vazio de G. Então $\langle S \rangle$ é o subgrupo *gerado* por S.

Definição. O subgrupo $\langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle$ é chamado de *subgrupo dos comutadores,* e denotado por G'.

Observação. G é abeliano, se e somente se, $G' = \{e\}$.

Definição. Seja G um grupo e $x, y \in G$. Diremos que x e y são conjugados em G se existe $g \in G$ tal que $y = gxg^{-1}$, e escrevemos $gxg^{-1} = x \wedge g$.

3.2 Grupos de Permutação

Definição. Seja A um conjunto não vazio. Definimos a estrutura

$$S_A = \{f: A \to A | f \text{ é } bijeção \}$$

Munido da operação *composição de funções*. Podemos denotar S_A também por $P(A)$.

Definição. Em S_A, se denotarmos $A = I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, o grupo S_{I_n} será denotado por S_n e será chamado de grupo simétrico de grau n.

Definição. Todo elemento de S_n é chamado de permutação e S_n é chamado de grupo das permutações de n elementos.

Definição. Uma permutação $\alpha \in S_n$ é denominada um $r - ciclo$ se existem elementos distintos $a_1, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $\alpha(a_1) = a_2, \alpha(a_2) = a_3, \ldots, \alpha(a_{r-1}) = a_r, \alpha(a_r) = a_1$, e tais que $\alpha\left(a_j\right) = j, \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$; Tal $r - ciclo$ será denotado por $(a_1 \ldots a_r)$; O número r é chamado de *comprimento do ciclo.* Os $2 - cliclos$ são também chamados de *transposições.*

Definição. Seja $\alpha \in S_n$ um $r - ciclo$. O número mínimo de aplicações, a ele mesmo, necessário para que o ciclo retorne à sua posição original, isto é, a identidade (I) será denotado de ordem de α ($\mathcal{O}(\alpha)$).

Definição. Seja $\alpha \in S_n$ um $r - ciclo$ e seja $\beta \in S_n$ um $s = ciclo$; As permutações α e β são disjuntas se nenhum elemento de $\{1, \ldots, n\}$ é movido por ambas, isto é, $\forall a \in \{1, \ldots, n\}$, temos que $\alpha(a) = a$ ou $\beta(a) = a$.

Proposição. Seja $\alpha \in S_n$, $\alpha \neq id$. Então a permutação α é igual a um produto de ciclos disjuntos de comprimentos ≥ 2; tal fatoração é única menos da ordem dos fatores.

Proposição. a) Todo elemento de S_n é um produto de transposições, isto é, $S_n = \langle\{transposições\}\rangle$.
b) $S_n = \langle(1,2), (1,3), \ldots, (1, n)\rangle$
c) $S_n = \langle(1,2), (2,3), \ldots (n-1, n)\rangle$

Definição. Um elemento $\alpha \in S_n$ é uma permutação *par* quando α se escreve como um produto de um número par de transposições. Um elemento $\alpha \in S_n$ é uma permutação *ímpar* quando α se escreve como um produto de um número ímpar de transposições.

Definição. Seja $A_n = \{\alpha \in S_n | \alpha \text{ é } permutação\ par\}$. Então A_n é um subgrupo de S_n, denominado *Grupo Alternante.*

Essas definições e resultados podem ser utilizados ao longo das próximas discussões.

4 A UTILIZAÇÃO DO CUBO MÁGICO COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO NO ENSINO DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Uma das coisas mais bonitas na Matemática é o fato dela conseguir conectar um tópico com outro tópico completamente diferente. O Cubo Mágico é um quebra-cabeças em 3D que é conhecido por ser um brinquedo altamente difícil de se resolver. Porém, existe um ramo da Matemática, hoje chamado de Teoria dos Grupos, que permite uma solução eficiente do Cubo utilizando conceitos de Grupos de Permutação.

De acordo com Lyra (2016, p.1), a Teoria dos Grupos "[…] possui um papel fundamental na estrutura formal da matemática, assim como possui diversas aplicações práticas em outras áreas do saber". Como exemplos, o autor afirma que a teoria é aplicada em trabalhos relacionados com áreas bastante distintas como a Antropologia (SIMIS, 1977), a Genética (JUNIOR, 2003) e a Mecânica Quântica (AMARAL et. al., 2011).

Esse ramo é fundamental para o de estudo das raízes de polinômios, física de partículas elementares, criptografia e claro, o Cubo Mágico. Surpreendentemente, é possível verificar que é possível usar noções de grupos de permutação, comutadores e conjugados.

Neste capítulo falaremos sobre o Cubo Mágico, sua origem e principalmente as notações utilizadas para executar movimentos nele. Em seguida apresentaremos exemplos de aplicações de Teoria dos Grupos no Cubo Mágico.

4.1 Conhecendo O Cubo

A fim de entender melhor como o Cubo Mágico pode ajudar na criação de imagens conceituais, neste capítulo iremos apresentá-lo de forma mais detalhada para formalizar alguns conceitos. Utilizaremos a mesma notação estabelecida pela *World Cube Association* (*WCA, 2018*)[1].

[1] A World Cube Association é uma organização que regula competições de quebra-cabeças mecânicos que são chamados comumente de "twisty puzzles", e dentre eles, o mais famoso é o "Rubik's Cube" (Cubo Mágico). A World Cube Association organiza competições em todo o mundo e é apoiada por organizações regionais, responsáveis por organizar competições em seus países.

O Cubo Mágico (ou Cubo de Rubik) é um quebra-cabeça tridimensional, inventado pelo húngaro Ernö Rubik em 1974. Segundo David Joyer (2008), Erno nasceu no abrigo antiaéreo de um hospital de Budapeste durante Segunda Guerra Mundial. Sua mãe era poeta e seu pai engenheiro. Rubik estudou arquitetura e design na *Academy of Applied Arts and Design*, permanecendo lá como professor, ensinando design de interiores. Em 1974 ele criou o famoso quebra-cabeça em forma de cubo para ensinar seus alunos o conceito de terceira dimensão e que desde então vem desafiando a imaginação de milhões de pessoas em todo o mundo.

Ele é composto por seis faces de cores distintas, totalizando 26 peças, dentre as quais, 12 são chamados de meios (edges), 8 são os cantos (corners) e 6 são os centros (centers). Os meios são as peças constituídas por duas cores, os cantos são as peças com três cores e os centros são as peças que possuem uma única cor.

Figura 1 - Peças do cubo 3x3x3

FONTE: Renan Cerpe (2006)

Os centros de um cubo não se movem. Isso acontece devido ao mecanismo interno que os interligam. Isso é muito útil, pois é a partir dos centros que sabemos exatamente para onde cada peça tem que ir. Por exemplo, o *meio* azul-vermelho deve estar entre os centros azul e vermelho, e o *canto* branco-verde-vermelho deve estar entre os centros branco, verde e vermelho.

Como bem aponta David Singmaster (1981), as seis cores utilizadas no Cubo possuem todas as letras iniciais em inglês (blue, green, Orange, red, White, yellow), então poderíamos usar essa notação para identificar cada face, porém, o arranjo das cores varia de cubo para cubo, por isso escolheu-se uma notação que independe das cores e de uma posição fixa. Sendo assim, a WCA representa cada face do cubo pela primeira letra de suas respectivas posições em inglês: **F**ront, **B**ack, **R**ight, **L**eft, **U**pper e **D**own. Assim, se alguém segura o cubo com a cor amarelo para cima, essa passa a ser sua camada Upper, e se em seguida ele girar o cubo e a cor amarelo ficar na direita, então a camada amarela passa a ser a camada Right.

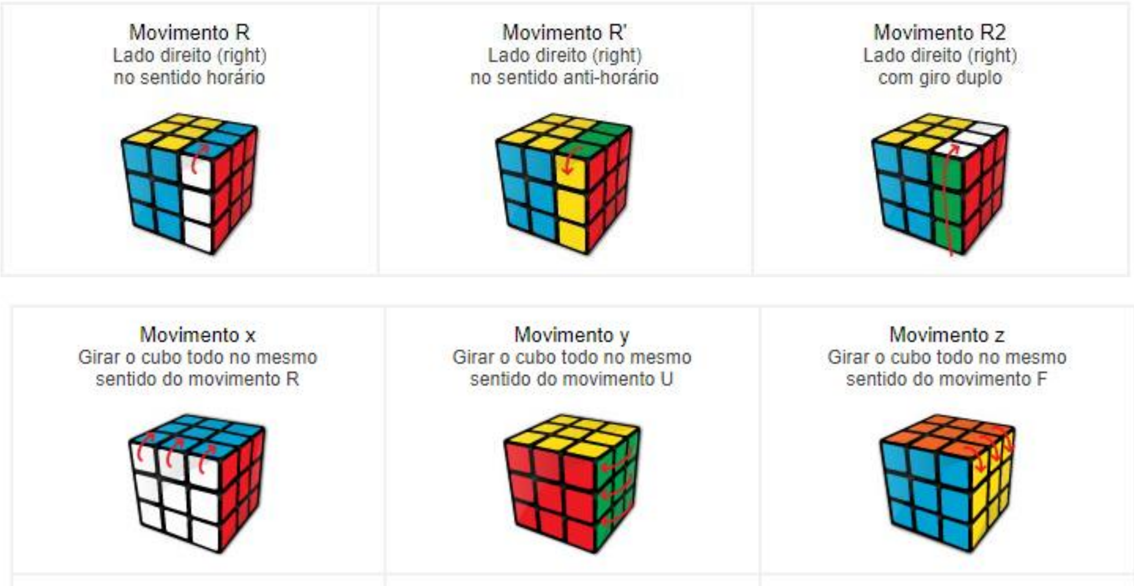
Tabela 1 - Nomenclatura das faces do cubo

Português	**Inglês**	**Notação**
Frente	*Front*	F
Atrás	*Back*	B
Direita	*Right*	R
Esquerda	*Left*	L
Cima	*Upper*	U
Baixo	*Down*	D

Fonte: O autor (2017)

Veremos agora como essa notação é utilizada para movimentar o Cubo. Define-se por *movimento* o ato de girar um quarto de volta no sentido horário ou anti-horário uma determinada camada. Indicamos um movimento no sentido horário pela primeira letra em inglês da camada que se deseja mover, e indicamos um movimento no sentido anti-horário pela primeira letra em inglês da camada que se deseja mover, acrescida de um apóstrofo. Também indicamos a sequência de dois movimentos iguais pela sua letra, acrescida de um “2” e convencionamos como sendo apenas um único movimento. Também consideramos a ação de girar o cubo todo como um tipo especial de movimento. A figura abaixo ilustra os tipos de movimento possíveis.

Figura 2 - Movimentos do cubo



Fonte: Renan Cerpe (2006)

4.1.1 Nomenclatura, Posição e Orientação das Peças

Para facilitar a localização e locomoção das peças, vamos estabelecer uma nomenclatura baseada na tabela de notação. Uma peça será definida pela interseção das faces em que ela se encontra. Por exemplo, a peça que está na interseção das faces F e R recebe o nome de FR, e a peça que está na interseção das faces U, L e B recebe o nome de ULB. Essa nomenclatura serve para se referir tanto a uma peça quanto a posição que esta deve ir. É imediato concluir que as peças representadas por duas letras simbolizam meios, enquanto as peças que são definidas por três letras representam cantos.

Por questões de simplicidade, não faremos distinção entre a ordem com que a peça é escrita. Por exemplo, UFR, RFU e FUR referem-se a mesma peça, porém, dispostas de maneiras diferentes. Tal maneira está relacionada com a orientação da peça.

Definimos posição como o local onde a peça se encontra em relação ao cubo, e definimos orientação como a configuração que as cores estão dispostas em relação ao cubo. Nesse sentido, a notação UF e FU refere-se à mesma posição da peça, mas com orientações diferentes.

4.1.2 Algoritmos

Define-se por algoritmo uma sequência finita de dois ou mais movimentos no cubo que trocam suas peças de lugar. Assim, por exemplo, executar o algoritmo $A = R\ U\ D'$ significa mover a camada da direita no sentido horário, em seguida mover a camada de cima no sentido horário, e por fim mover a camada de baixo no sentido anti-horário, movendo assim todas as peças dessas respectivas camadas.

Os algoritmos, se empregados da maneira certa, são essenciais para a resolução do cubo, pois eles movem apenas um número pequeno de peças que se deseja, não alterando as demais. Isso é especialmente útil quando o cubo estiver quase montado.

É importante ressaltar que dois algoritmos distintos podem produzir a mesma configuração no cubo. Por exemplo, $X = M2\ U'\ M\ U2\ M'\ U'\ M2$ e $Y = F2\ U\ M'\ U2\ M\ U\ F2$ permutam as mesmas peças, apesar de serem algoritmos diferentes.

4.1.3 O que é Resolver um Cubo?

Se denotarmos por I a configuração de um cubo resolvido, embaralha-lo significa aplicar uma sequência relativamente longa de movimentos aleatórios X, de modo que não seja possível restaurá-lo facilmente. Nesse sentido, resolver o cubo é encontrar um algoritmo Y, da forma $Y = Y_1 Y_2 \ldots Y_k$, de modo que $XY = I$.

Atualmente existem diversos métodos de se resolver o Cubo Mágico, que variam de dificuldade. Em geral, quanto mais algoritmos se aprende, mais rápido se monta. Com o método mais simples, chamado método de camadas, é possível montar o cubo com apenas 6 algoritmos. O método, como o nome já diz, consiste em resolver o cubo camada por camada, começando pela camada de baixo. Com o método de camadas, é possível montar o cubo em até 50 segundos.

Também existe o método intermediário, que como o nome também sugere, é uma extensão do método de camadas e é o meio termo entre o iniciante e o avançado. Nesse método acrescenta-se novos algoritmos, e com a prática é possível resolver o cubo em até 30 segundos.

Por fim tem-se o método avançado, chamado método Fridrich, em homenagem a Jéssica Fridrich, sua inventora. Neste método é preciso aprender 119 algoritmos, porém com dedicação suficiente, o método permite resolver o cubo em tempos como 5 segundos ou até menos. Atualmente o recorde mundial é do australiano Feliks Zemdegs de 4.22 segundos[2].

Existem ainda métodos bastante diferentes dos apresentados, que são próprios para modalidades específicas, como o método Old Pochmann para resolver de olhos vendados e o método dos Comutadores para resolver o cubo no menor número de movimentos possível. Esse último em particular utiliza fortemente conceitos de EA, que são os subgrupos dos comutadores e o subgrupo dos conjugados (por isso o nome do método).

4.2 O Cubo Mágico Como Criador de Imagens Conceituais

Nesta sessão mostraremos como o Cubo Mágico pode ser utilizado para explicar conceitos relacionados a Grupos. Vimos na sessão anterior como se originou o Cubo Mágico, e que o mesmo possui uma linguagem que tem o objetivo de facilitar a comunicação entre cubistas. Tal linguagem é definida pela primeira letra em inglês da camada observada. Utilizaremos essa notação para exemplificar os conceitos relacionados a Grupos de um modo geral.

Como queremos utilizar o Cubo como instrumento didático, vamos primeiramente mostrar que ele é de fato um grupo. Definimos, $\mathcal{R} = \langle R, L, U, D, F, B \rangle$, como sendo todas as configurações que podem ser feitas através dos movimentos, e definimos a operação "fazer um movimento ou não fazer nada", e representaremos por " $\circ$ " , pois é fácil por meios dos movimentos perceber que ela se comporta como a operação composição. Vamos mostrar que, nestas condições, $(\mathcal{R}, \circ)$ é grupo. De fato, vamos verificar para os movimentos R, U, L (a verificação para os demais movimentos é análoga):

[2] https://www.youtube.com/watch?v=NevGDFBfQGw

- **Associatividade:**

Basta denotarmos dois ou mais movimentos entre parênteses que essa propriedade se torna trivial. Com efeito, é claro que a velocidade com que um movimento é executado não alterará na configuração final.

- **Elemento neutro:**

Denotamos o movimento "não fazer nada" por I, e o associamos com a configuração do cubo montado. Dessa forma, novamente, com o auxílio do cubo torna-se elementar verificar que mover alguma camada e em seguida não fazer nenhum movimento, é o mesmo que não fazer nenhum movimento e em seguida mover alguma camada, que por sua vez é o mesmo que simplesmente mover a camada.

- **Elemento inverso:**

Definindo o elemento inverso como "o movimento necessário para fazer o cubo voltar a configuração I", mais uma vez é bastante simples ver que $R^{-1} = R'$, $L^{-1} = L'$, $U^{-1} = U'$, e assim para as demais camadas.

Como as três condições foram verificadas, concluímos que $(\mathcal{R}, \circ)$ é de fato um grupo, e o chamaremos de *grupo de Rubik*. Na oficina utilizada para a coleta de dados, também demonstramos o fato acima. Nossa análise mostrou que até mesmo a prova da existência de $\mathcal{R}$ já foi suficiente para facilitar a criação das imagens conceituais.

Uma das primeiras concepções que podem ser estudadas por meio do Cubo é a noção da unicidade do elemento neutro. Abordamos esse tema procurando uma falha na definição, e observando que os movimentos $R3, R7, R11, \ldots$ também se comportam como inversos de R, o que seria um absurdo, pois poderíamos concluir erroneamente que R possui infinitos inversos. Esse problema server para frisar a importância da rigidez das definições, e como poderia se originar uma imagem conceitual incoerente com a definição formal de elemento inverso. Contornamos esse problema definindo que dois movimentos quaisquer que movessem exatamente as mesmas peças seriam considerados iguais, dessa forma, compreendemos que $R3 = R7 = R11$.

O Cubo também pode ser útil para explicar o conceito de não comutatividade. No questionário 1 mostramos que alguns participantes adotavam notações inadequadas para tratar de elementos não comutativos, o que acarretou em respostas erradas. Com o auxílio do Cubo Magico, fazendo os movimentos RU e UR é possível verificar visualmente que as configurações formadas são diferentes.

Podemos também verificar a seguinte proposição encontrada em Garcia e Lequain (2001):

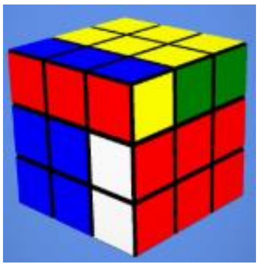
i. $(a^{-1})^{-1} = a$

ii. $(a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$

Tais afirmações não são difíceis de serem demonstradas utilizando linguagem matemática, porém, acreditamos que as imagens conceituais ficam mais coerentes com a definição formal se for possível verificar visualmente o porquê que as igualdades acima são verdadeiras.

A verificação de i. é exatamente a mesma verificação da existência de elemento inverso, enquanto que para visualizar ii, podemos considerar o movimento RU, como ilustrado abaixo

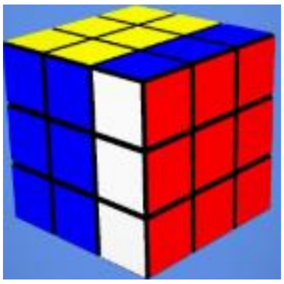
Figura 3- movimento RU



FONTE: O Autor (2018)

Note que para que o Cubo volte a posição inicial, devemos primeiramente desfazer o último movimento, pois qualquer outra camada movimentada embaralhará ainda mais o cubo, isto é, devemos executar U', ficando

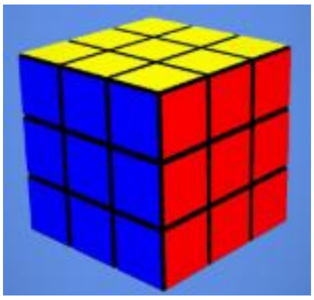
Figura 4 - movimento RUU'



FONTE: O Autor (2018)

Evidentemente, para que o cubo volte a posição montada é necessário executar o movimento R'

Figura 5 - Movimento RUU'R'



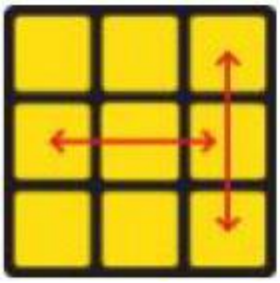
FONTE: O Autor (2018)

logo, de fato temos que $(RU)^{-1} = U^{-1}R^{-1}$.

Mais exemplos envolvendo grupos de um modo geral podem ser explicados com o Cubo Mágico, como subgrupos, e dentre eles podemos citar o grupo G' dos comutadores, e subgrupo gerado, presente na notação do conjunto $\mathcal{R}$. Porém, como o Cubo Mágico é um tipo de Grupo de Permutação, veremos agora como estimular a criação de novas imagens conceituais relacionadas a esse conceito.

Primeiramente, podemos utilizar o Cubo para definir uma permutação. Nos grupos de permutação, cada elemento é uma função bijetiva de um conjunto nele mesmo. Quando o conjunto em questão é finito, chamamos a bijeção de *permutação*. Podemos entender uma permutação como uma reorganização de elementos, e podemos exemplificá-la usando, por exemplo a permutação $Tperm = R\ U\ R'\ U'\ R'\ F\ R2\ U'R'U'R\ U\ R'F'$.

Figura 6 - T-perm



FONTE: Renan Cerpe (2006)

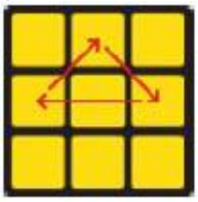
Note também que as permutações do cubo facilitam a compreensão da notação matricial. De fato, com base na nomenclatura das peças vistas na sessão anterior, podemos representar a permutação acima por

$$Tperm = \begin{pmatrix} UR & UL & URF & URB \\ UL & UR & URB & URF \end{pmatrix}$$

Ou, simplesmente, por $(UR\ \ UL)(URF\ \ URB)$.

Outro aspecto que também pode ser abordado é a noção de $r - ciclo$. A definição formal desse conceito pode ser bastante complexa para um estudante que não tem muita intimidade com a linguagem matemática, aumentando os riscos de uma imagem conceitual incoerente. O Cubo Mágico apresenta permutações que possuem as mesmas propriedades de $r - ciclo$, portanto podemos usá-las para abordar o conceito. A sequência de movimentos $Uperm = R'\ U\ R'\ U'\ R'\ U'\ R'\ U\ R\ U\ R2$ é um $3 - ciclo$, pois temos que $Uperm(UR) = UL$;$Uperm(UL) = UB$ e $Uperm(UB) = UR$, ou, mais simplificado, $(UR\ \ UL\ \ UB)$

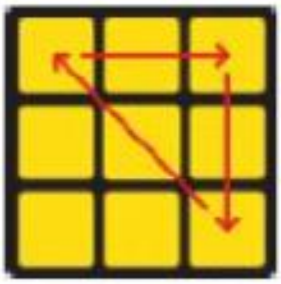
Figura 7 - U-perm



AUTOR: Renan Cerpe (2006)

Em Grupos de Permutação vemos também o conceito de ordem de uma permutação. Os exercícios utilizados para exemplificar a noção de ordem são longos e enfadonhos, porém podemos utilizar o $3 - ciclo$ $Aperm = R'F\ R'B2\ R\ F'R'B2\ R2$ para mostrar que se α é um $r - ciclo$ então a ordem de $\alpha = r$, por exemplo.

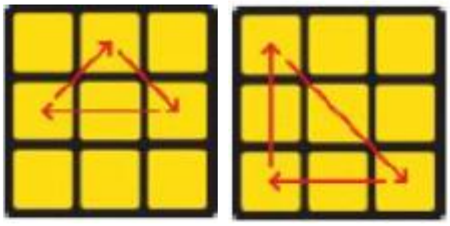
Figura 8 - A-perm



AUTOR: Renan Cerpe (2006)

Também foi possível utilizar o Cubo para explicar o que são permutações disjuntas. Novamente, se levarmos em consideração apenas a definição formal de permutação disjunta, é muito provável que haja confusão por conta da notação abstrata. Ao mover camadas opostas no cubo, verificamos imediatamente que estas são disjuntas, e podemos também verificar que duas permutações disjuntas comutam. Para verificar esse resultado com o Cubo, basta considerarmos as permutações $Uperm$ e $Aperm$, já mencionadas anteriormente.

Figura 9 - U-perm e A-perm



AUTOR: Renan Cerpe (2006)

É possível ver que ambas são disjuntas, pois uma só permuta meios enquanto a outra só permuta cantos. Basta então executar primeiro um movimento e em seguida o outro e então inverter a ordem para verificar que o resultado final é o mesmo.

Existem outros conceitos que também podem (e foram) ser exemplificados como Cubo, como fatoração única e paridade de permutações. Todavia existem limitações ao se utilizar o brinquedo, como o conceito de subgrupo normal por exemplo. Por se tratar de um grupo simples, o Cubo Mágico não possui nenhum subgrupo normal.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo relataremos como aconteceu a oficina e discutiremos sobre o instrumento de coleta de dados a fim de alcançar nosso objetivo. Falaremos ainda da caracterização da pesquisa e dos seus sujeitos.

Uma vez que os nossos objetivos era analisar se o Cubo Mágico serve de instrumento didático para o estudo de Teoria dos Grupos no curso de Licenciatura em Matemática na UFPE-CAA, o presente trabalho realizou um estudo qualitativo das respostas dos entrevistados, pois segundo Minayo (2015) esse tipo de estudo corresponde a um método de investigação cientifica focado no caráter subjetivo do objeto analisado, preocupando-se em compreender relações, valores e representações e a partir desse conjunto compreender e interpretar a realidade.

O instrumento escolhido para a coleta de dados foram dois questionários, aplicados antes e depois da oficina. As perguntas dos questionários eram essencialmente compostas por perguntar abertas, pois esperávamos que os participantes ficassem livres para responderem com suas próprias palavras, para que pudéssemos tirar conclusões acerca das suas imagens conceituais evocadas.

5.1 Critérios para seleção dos participantes da Pesquisa

Inicialmente estevávamos interessados em alunos que já haviam tido algum contato com EA, porém suspeitávamos, com base em uma oficina aplicada no EMAP (2017) também sobre Cubo Mágico e EA, que alunos que nunca tinham tido contato com EA também poderiam aprender pelo menos as primeiras definições de Teoria dos Grupos, dessa forma, o único critério considerado era ser estudante de Licenciatura em Matemática. Participaram ao total 26 alunos.

5.2 A aplicação da Oficina

Apresentamos nossa oficina no dia 22/08/2018 no LEMAPE das 16h às 18h. Neste dia foram recolhidos 18 questionários, porém parte dos alunos interessados não pode comparecer a oficina, então decidimos aplicar uma segunda oficina, idêntica a primeira, no dia 20/09/2018, também no LEMAPE das 19h às 21h.

A oficina foi dividida em três momentos: o primeiro questionário, a oficina e o segundo questionário. Os primeiros 20 minutos da oficina foram dedicados ao primeiro questionário, que tinha o intuito de verificar a familiaridade do aluno com o Cubo Mágico e com EA.

Na oficina propriamente dita, iniciamos com uma breve apresentação do cubo, explicando suas peças e como são definidos os movimentos. Utilizamos a notação oficial da WCA e foram mostrados alguns exemplos de algoritmos. Em seguida, introduzimos o assunto de Teoria dos Grupos. Começamos definindo grupo, falando das três condições necessárias para sua existência e em seguida apresentamos alguns exemplos, dentre eles o grupo de Rubik, que vem a ser o grupo das configurações do cubo.

Para poder começar a usar o cubo como instrumento didático, mostramos que o cubo de fato é um grupo, e em seguida começamos a utilizá-lo nas definições seguintes. Abordamos brevemente o conceito de subgrupo gerado, e da proposição da condição de existência de subgrupo. Em seguida falamos sobre subgrupo gerado, e verificamos uma proposição sobre o tema.

Falamos brevemente sobre o subgrupo dos comutadores e conjugados, elementos de EA que são pouco explorados mas que apresentam uma enorme importância para a resolução do cubo, bem como outros quebra-cabeças semelhantes. Também falamos sobre grupos normais, e frisamos o por que do Cubo Mágico não poder ajudar a visualizar esses tipos de grupos.

Em seguida, entramos no tópico onde o Cubo Mágico pode ser mais utilizado na criação de imagens conceituais: Grupos de Permutação. Começamos definindo o grupo das bijeções e em seguida falamos sobre Permutação, representação matricial de uma permutação, $r - ciclo$, ordem, ciclos disjuntos, dentre outros tópicos. Para cada tópico utilizávamos um algoritmo do cubo para servir como exemplo.

Por fim, encerramos a disciplina abordando a importância da Teoria dos Grupos na Matemática, dando ênfase ao estudo de homomorfismos.

Finalizamos a oficina resolvendo um truque de mágica que foi utilizado como motivação para ir a oficina.

Finalmente, após a oficina, aplicamos o segundo questionário com o intuito de analisar o desempenho dos participantes. A seguir, falaremos mais detalhadamente sobre a natureza dos questionários.

5.3 A constituição dos instrumentos de coleta: Questionários

O primeiro questionário foi composto por seis questões, onde buscávamos ver a familiaridade do aluno tanto com o Cubo Mágico como com EA. Apenas a primeira questão falava sobre o Cubo. Nela, queríamos saber se o aluno sabia montar, se já soube e esqueceu ou simplesmente nunca tentou resolver. Acreditávamos que um aluno que já tivesse um conhecimento prévio do brinquedo iria ter mais facilidade de entender os conceitos apresentados na oficina.

Na segunda e na terceira questão estávamos interessados em ver se o aluno conseguia expressar corretamente a relação entre elemento neutro e elemento inverso. Estávamos esperando que as respostas viessem mais na forma de exemplos do que apresentando a definição formal.

Na quarta questão usamos um exemplo que envolve multiplicação de matrizes. Estávamos interessados em verificar se os alunos tinham facilidade em operar elementos não-comutativos.

Por fim, nas duas últimas fiemos perguntas sobre o conteúdo de grupo propriamente dito. Na quinta questão apresentamos duas estruturas e perguntamos se eram grupos, e na sexta, perguntamos a definição de um conceito que só é estudado em Grupo de Permutações, por isso queríamos saber se o aluno já havia estudado esse assunto.

É importante mencionar que os participantes que não cursaram a disciplina de EA, não tiveram como responder as perguntas estritamente voltadas para Teoria dos Grupos, portanto na nossa análise veremos várias perguntas em branco no primeiro questionário. Esses alunos foram aconselhados a responderem que não tinham visto o assunto, pois também estamos interessados em analisar o desempenho de alunos que nunca pagaram a disciplina.

O segundo questionário foi composto por sete questões, onde estávamos interessados em verificar o desempenho dos alunos. Nele, queríamos essencialmente saber se o participante era capaz de responder corretamente um problema relacionado ao Cubo Mágico bastante semelhante a pergunta quatro do primeiro questionário. Todavia, também estávamos interessados em analisar outras informações.

Na primeira questão estávamos querendo saber se o participante entendeu a notação matricial utilizando o cubo. Foi solicitado que escrevesse três permutações na notação utilizada na oficina.

Na segunda questão perguntamos se o Cubo Mágico foi útil para a compreensão de algum conceito de EA, e em caso afirmativo, justificar. Nas questões três e quatro, utilizamos a escala de comparação de 0 a 5 para que os alunos indicassem a dificuldade da disciplina EA e o quanto o Cubo Mágico ajudou a entender seus conceitos, respectivamente.

A quinta questão apresentava um embaralhamento e era solicitado que o participante apresentasse uma solução para uma equação dada. Essa era a principal pergunta do segundo questionário, pois era nessa onde foi possível analisar a maior parte do desempenho da turma.

As duas últimas questões indagavam sobre as possíveis dificuldades na relação Cubo-Conteúdo e sobre as dificuldades de se estudar Teoria dos Grupos em si.

5.4 Sobre os Critérios de Análise

Para a análise dos questionários, buscamos, além da análise individual de cada indivíduo, comparar as respostas de grupos diferentes de participantes. Buscamos comparar as respostas dos participantes que já haviam cursado EA com os que ainda não haviam visto, com o objetivo de verificar se o fato de algumas pessoas já terem o conhecimento prévio do assunto foi um fator muito decisivo. Também compararmos as respostas dos participantes que já tinham um conhecimento prévio do cubo com os que nunca tiveram nenhum contato.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos os dados colhidos nos questionários aplicados na oficina e suas respectivas considerações. A análise das respostas será feita com base na comparação dos dois questionários à luz da teoria de Tall e Vinner (1981), buscando informações para responder nossos objetivos de pesquisa, que eram analisar se o Cubo Mágico serve de instrumento didático para o ensino de Teoria dos Grupos; verificar se a notação utilizada poderia vir a ser um fator conflitante; verificar as diferentes aprendizagens dos estudantes sobre as propriedades relativas a Teoria dos Grupos e por fim, investigar a opinião dos estudantes com relação ao Cubo Mágico como instrumento didático. O capítulo será dividido em quatro sessões, cada uma analisando um objetivo diferente.

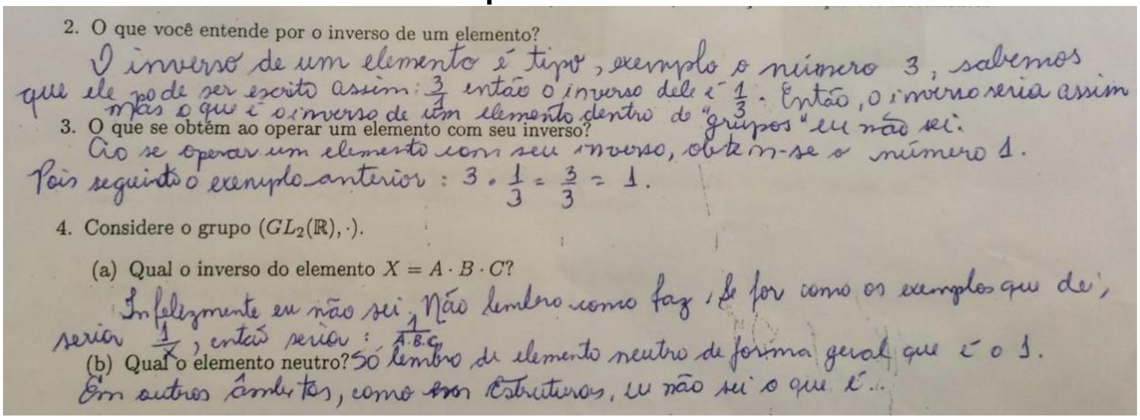
6.1 O Cubo Mágico como Auxiliador na Criação de Imagens Conceituais

Hipotetizamos que alguns alunos que já cursaram a disciplina de Estruturas Algébricas ou não possuíam imagens conceituais coerentes com as concepções de grupos não comutativos, ou simplesmente não possuíam imagens conceituais nenhuma, dessa forma, um dos objetivos do primeiro questionário era verificar se realmente existia essa carência no que diz respeito a estruturas não-abelianas. Acreditávamos que devido à falta de prática com questões dessa natureza, os entrevistados iriam utilizar as propriedades e notações de números reais.

De fato, notamos que seis entrevistados cometeram um erro semelhante, que era utilizar propriedades referentes aos números reais no grupo de matrizes invertíveis de ordem 2.

Podemos tomar como exemplo o aluno a_{26}.

Figura 10 - Resposta do aluno a26 na questão 4 a) do primeiro questionário



2. O que você entende por o inverso de um elemento?

O inverso de um elemento é tipo, exemplo o número 3, sabemos que ele pode ser escrito assim: $\frac{3}{1}$ então o inverso dele é $\frac{1}{3}$. Então, o inverso seria assim. Mas o que é o inverso de um elemento dentro de "grupos" eu não sei.

3. O que se obtém ao operar um elemento com seu inverso?

Ao se operar um elemento com seu inverso, obtém-se o número 1. Pois seguindo o exemplo anterior: $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

4. Considere o grupo $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

(a) Qual o inverso do elemento $X = A \cdot B \cdot C$?

Infelizmente eu não sei. Não lembro como faz, se for como os exemplos que dei, seria $\frac{1}{X}$, então seria: $\frac{1}{A.B.C}$

(b) Qual o elemento neutro? Só lembro de elemento neutro de forma geral que é o 1. Em outros âmbitos, como em Estruturas, eu não sei o que é...

FONTE: O autor (2018)

Ao ser indagado na questão 2 sobre o que se entende pelo inverso de um elemento, ele exemplifica utilizando (corretamente) os números reais com a multiplicação, porém acreditamos que na parte, “mas o que é o inverso de um elemento dentro de ‘grupos’ eu não sei”, o aluno trata o exemplo que acabou de dar como algo que não tem ligação com Teoria dos Grupos ou pelo menos não é capaz de estender o conceito de elemento inverso para outros grupos.

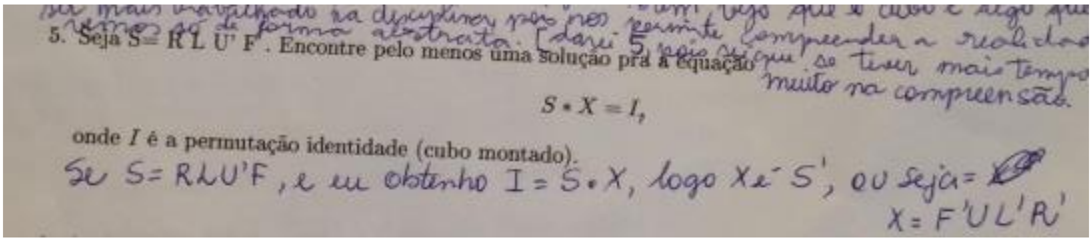
Na terceira questão, novamente o aluno entende que no contexto dos números reais com a multiplicação, o inverso de 3 é $\frac{1}{3}$ e que ambos operados resultam em 1, porém é possível notar que tanto na parte onde ele fala “ao se operar um elemento com seu inverso, obtém-se 1” quanto na operação “$1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$”, em nenhum momento o aluno se refere ao número 1 como sendo o elemento neutro, o que nos leva a acreditar que o entrevistado não está seguro do que o número 1 simboliza no contexto dos números reais com a multiplicação.

Ao observar a questão 4 a fica evidente que suas concepções de elemento inverso estão restritas a grupos específicos e não à definição formal de elemento inverso, pois ao ser indagado sobre o elemento inverso de uma matriz ele fala “Infelizmente eu não sei; não lembro como faz”. Como sua única imagem conceitual referente a elemento inverso está relacionada aos números reais, ele fala ”se for como nos exemplos que dei, seria $\frac{1}{X}$, então seria $\frac{1}{ABC}$”. É possível observar ainda que na questão anterior ele utiliza a notação de fração ao se referir ao inverso de 3 como sendo $\frac{1}{3}$ e não 3^{-1}. Essa notação, que está correta no contexto dos números reais, não faz sentido no contexto das matrizes, pois, a grosso modo, não se pode dividir uma matriz por outra.

Outro fator que justifica nossa hipótese, pode ser observado na letra b da questão 4, pois ao ser perguntado qual seria o elemento neutro do grupo das matrizes, o aluno responde ”Só lembro de elemento neutro de forma geral que é o 1”, e novamente, é possível perceber que ele é incapaz de generalizar o exemplo de elemento inverso para outros grupos, pois ele fala que “Em outros âmbitos, como Estruturas, eu não sei o que é [elemento inverso]”.

Ao analisar a resposta do aluno na quinta questão do segundo questionário, podemos observar sua evolução no que diz respeito ao erro conceitual exposto acima.

Figura 11 - Resposta do aluno a26 na questão 5 do segundo questionário


5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

$$S * X = I,$$

onde I é a permutação identidade (cubo montado).

Se S= RLU'F, e eu obtenho I = S∗X, logo X é S', ou seja=
X= F'UL'R'

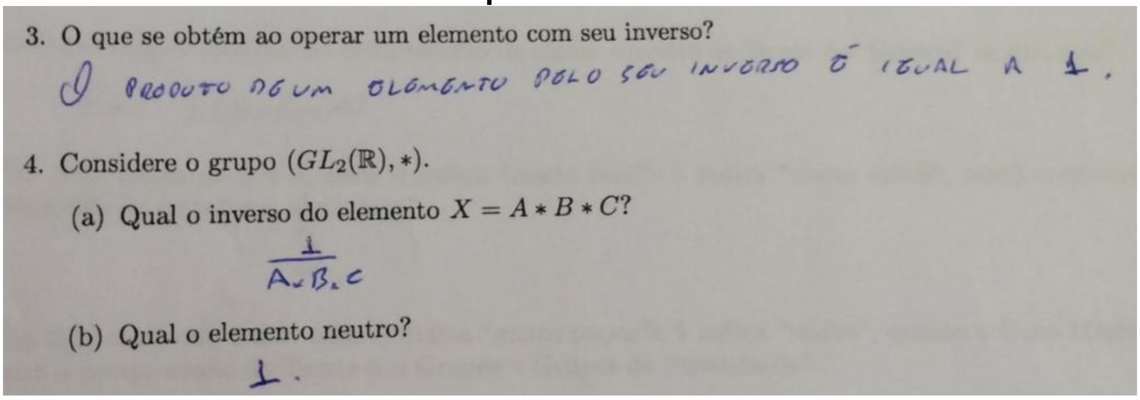
FONTE: O autor (2018)

A abordagem utilizada nas questões é diferente. Enquanto na questão 4 a) do primeiro era solicitado que fosse encontrado o inverso de uma matriz da forma $X = ABC$, na questão 5 do segundo questionário era dado uma permutação e pedia-se um movimento X que satisfizesse a igualdade $S * X = I$, onde I é o cubo montado. Mesmo sendo questões envolvendo grupos diferentes, elas possuem semelhanças, pois em ambas a solução era exprimir o inverso do elemento dado, além de ambos os grupos não serem comutativos.

Observando a questão é possível notar que o aluno compreendeu que se tratava do elemento inverso e não mais utilizou a notação de fração, mas sim utilizou a notação abordada na oficina, onde foi definido que $R^{-1} = R'$, $L = L'$, $(U')^{-1} = U$ e $F^{-1} = F'$.

A mesma análise também pode ser feita para alunos que ainda não cursaram a disciplina, como o aluno a_{16}.

Figura 12 - Resposta do aluno a16 na questão 4 a) do primeiro questionário



3. O que se obtém ao operar um elemento com seu inverso?

O PRODUTO DE UM ELEMENTO PELO SEU INVERSO É IGUAL A 1.

4. Considere o grupo $(GL_2(\mathbb{R}), *)$.

(a) Qual o inverso do elemento $X = A * B * C$?

$\frac{1}{A.B.C}$

(b) Qual o elemento neutro?

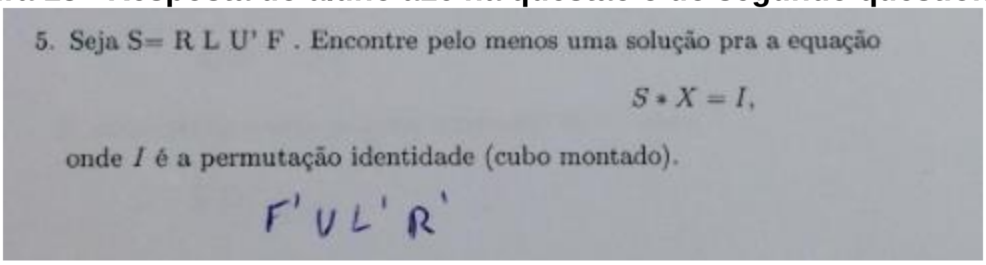
1.

FONTE: O autor (2018)

Vemos que na questão 3 ele também se refere ao elemento neutro como sendo simplesmente 1, assim como tenta exprimir o inverso do elemento X como uma fração, e ainda afirma que o elemento neutro das matrizes também será o 1.

Ao analisar sua resposta no segundo questionário vemos que mesmo não tendo cursado a disciplina, ele foi capaz de responder corretamente.

Figura 13 - Resposta do aluno a16 na questão 5 do segundo questionário



5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

$$S * X = I,$$

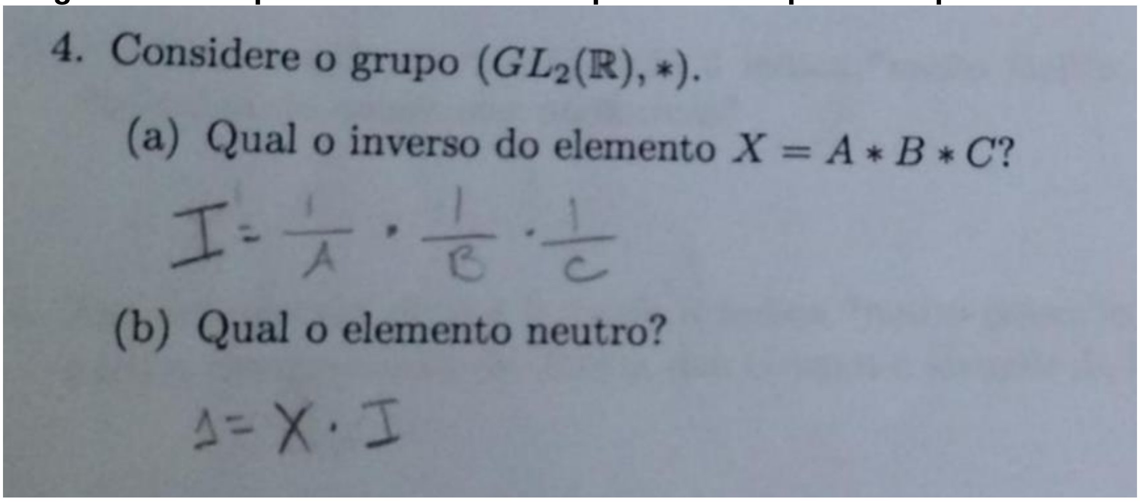
onde I é a permutação identidade (cubo montado).

F' U L' R'

FONTE: O autor (2018)

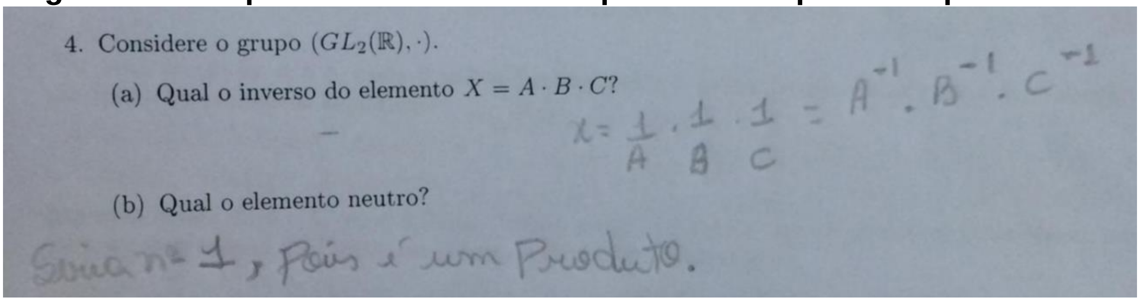
Outro erro relacionado com a notação dos números reais foi em relação a não-comutatividade. Dos 26 entrevistados, 6 apresentaram esse tipo de equívoco, enquanto apenas 2 responderam corretamente (os demais entrevistados afirmaram que ou não sabiam, ou não tinham pago a disciplina ainda ou deram respostas que não nos permitiu afirmar nada). Como exemplo dos equívocos em relação a não-comutatividade, podemos observar as respostas dos alunos a_9, a_{11} e a_{12}.

Figura 14 - Resposta do aluno a9 na questão 4 do primeiro questionário



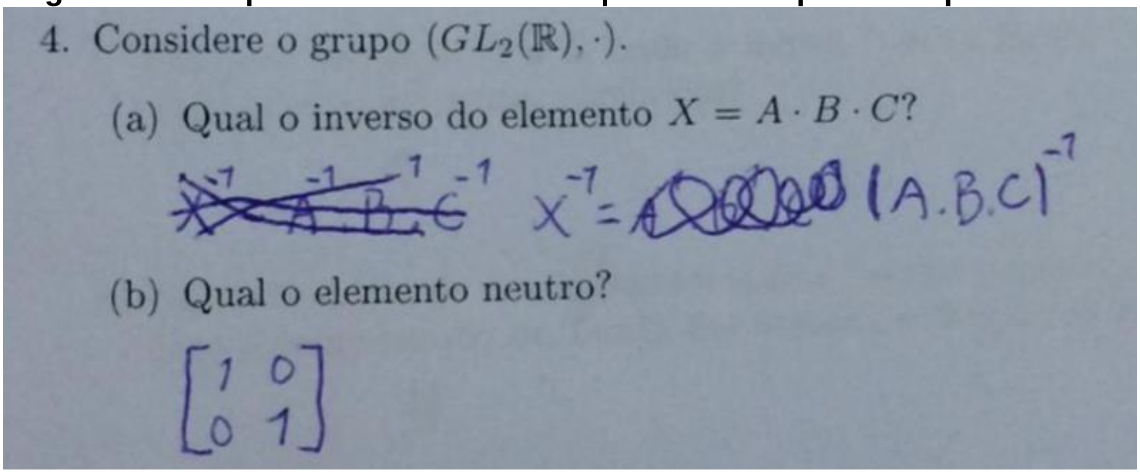
FONTE: O autor (2018)

Figura 15 - Resposta do aluno a11 na questão 4 do primeiro questionário



FONTE: O autor (2018)

Figura 16 - Resposta do aluno a12 na questão 4 do primeiro questionário



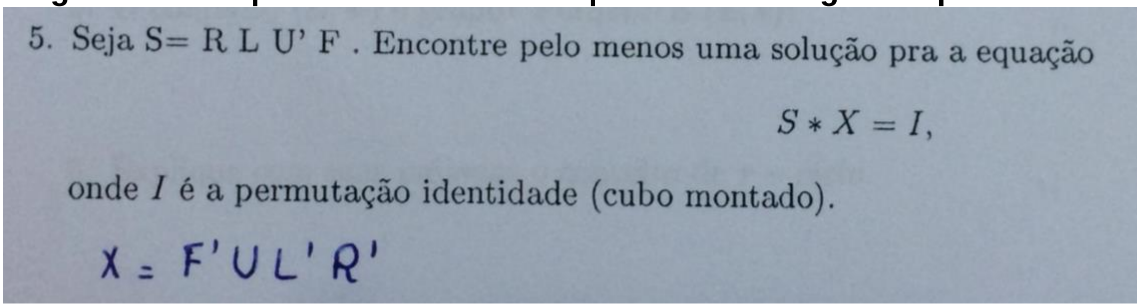
FONTE: O autor (2018)

Os alunos a_9 e a_{11}, além de também utilizarem a notação de fração e reconhecerem como sendo 1 o elemento neutro, denotaram o elemento inverso como sendo o inverso de cada uma das matrizes na mesma ordem que elas estão dispostas. Novamente, no contexto dos números reais, ambas respostas estariam certas, porém por se tratar de um grupo de matrizes com a multiplicação, a não-comutatividade deveria ser respeitada.

No caso do entrevistado a_{12}, é possível observar que ele mesmo acertando a letra b), ele comete o mesmo equívoco dos entrevistados acima, porém risca sua resposta e escreve $X^{-1} = (ABC)^{-1}$, onde, apesar de não estar errado, não é possível saber se ele estava ciente da ordem dos elementos.

Após a oficina, podemos observar que os três entrevistados responderam corretamente à questão 5 do segundo questionário (respeitando a não comutatividade).

Figura 17 - Resposta do aluno a9 na questão 5 do segundo questionário


5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

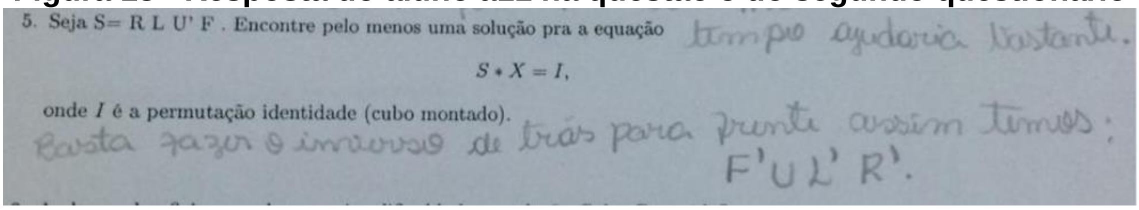
$$S * X = I,$$

onde I é a permutação identidade (cubo montado).

X = F'UL'R'

FONTE: O autor (2018)

Figura 18 - Resposta do aluno a11 na questão 5 do segundo questionário


5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

$$S * X = I,$$

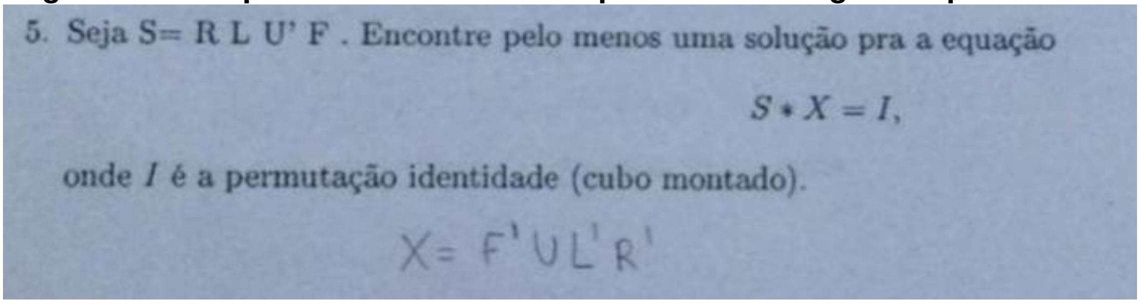
onde I é a permutação identidade (cubo montado).

tempo ajudaria bastante.

Basta fazer o inverso de trás para frente assim temos: F'UL'R'.

FONTE: O autor (2018)

Figura 19 - Resposta do aluno a12 na questão 5 do segundo questionário



5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

$$S * X = I,$$

onde I é a permutação identidade (cubo montado).

X= F' U L' R'

FONTE: O autor (2018)

Diante do exposto, podemos ver que de fato existem erros conceituais no que se refere a grupos não comutativos. A tabelas abaixo mostram os tipos de respostas juntamente com a frequência com que se repetiam.

Tabela 2 - Questão 4 letra a) do primeiro questionário

Tipo de resposta	Quantidade	
	Não cursou a disciplina	**Já cursou a disciplina**
Não respeitou a não-comutatividade e expressou o inverso em notação de fração	1	4
Não respeitou a não-comutatividade		2
Em branco/não soube responder/não lembra	12	4
Respondeu corretamente		2
Outras respostas		1

FONTE: O autor (2018)

Tabela 3 - Questão 4 letra b) do primeiro questionário

Tipo de resposta	**Quantidade**	
	Não cursou a disciplina	**Já cursou a disciplina**
Escreveu que o elemento neutro era 1	2	2
Respondeu corretamente		4
Em branco/não soube responder/não lembra	10	3
Escreveu uma matriz diferente da identidade		1
Outras respostas	1	3

FONTE: O autor (2018)

Após a oficina, foi possível perceber que houve uma diminuição nos erros relacionados à notação e a não-comutatividade tanto dos estudantes que já haviam cursado a disciplina quanto dos que ainda não cursaram. A tabela a seguir mostra as respostas dos entrevistados na questão 5 do segundo questionário.

Tabela 4 - Questão 5 do segundo questionário

Tipo de resposta	**Quantidade**	
	Não cursou a disciplina	**Já cursou a disciplina**
Respondeu corretamente	9	11
Em branco/não sabe	3	
Não respeitou a não-comutatividade	1	2

FONTE: O Autor (2018)

6.2 Considerações Acerca da Linguagem Empregada

Um outro objetivo nosso era analisar como os alunos iriam reagir acerca da notação empregada na oficina. Mais especificamente, estávamos interessados em saber se o fato de alguns não conhecerem a notação viria a ser um potencial fator de conflito, e aos que já conheciam a notação, se se sairiam melhores em relação aos outros.

Para responder isso, analisaremos as respostas das questões 1 e 5 do segundo questionário, levando em conta a relação dos estudantes que já tinham familiaridade com a notação e os que estavam vendo pela primeira vez, que pode ser constatada na tabela abaixo sobre as respostas da primeira questão do primeiro questionário.

Tabela 5 - Primeira questão do primeiro questionário

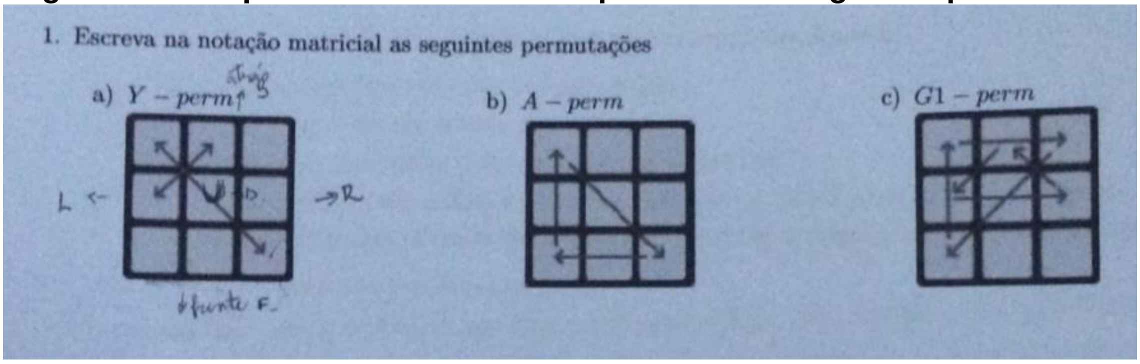
Familiaridade com o Cubo Mágico	**Quantidade**
Não sabe absolutamente nada do Cubo	5
Conseguia montar uma única cor	11
Sabe montar pelo método básico mas não conhece a notação	2
Sabe montar e conhece a notação	8

FONTE: O autor (2018)

Começaremos analisando as respostas dos entrevistados que não possuem qualquer familiaridade com o Cubo Magico nem com a notação utilizada. Das cinco pessoas que não possuíam intimidade com o cubo, apenas uma foi capaz de responder a primeira questão do segundo questionário. A questão pedia para escrever na notação matricial três permutações do Cubo Mágico.

Acreditávamos que devido ao pouco tempo da oficina, as pessoas que não conheciam a notação sentiriam dificuldades em aprender em menos de uma hora e colocar em prática, pois essa notação pode ser confusa até para quem está aprendendo a montar o Cubo Mágico. De fato, podemos observar suas respostas abaixo, como é o caso do aluno a_{22}.

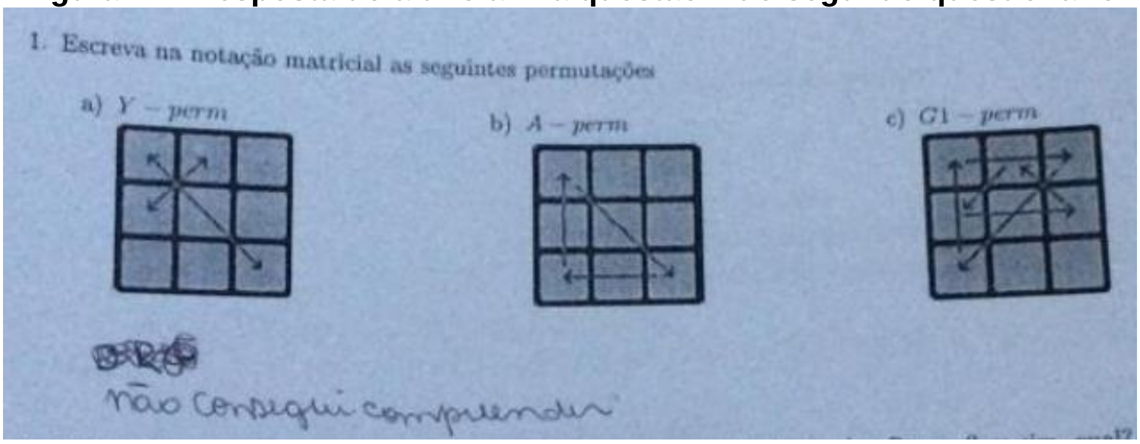
Figura 20 - Resposta do aluno a22 na questão 1 do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

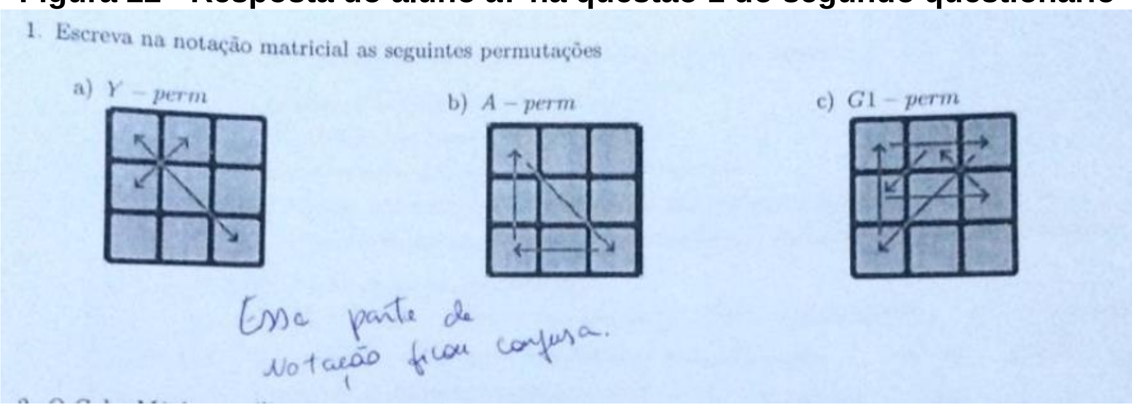
Percebemos que na letra a) o aluno nomeia cada uma das faces (de forma correta), mas não é capaz de escrever a permutação, deixando todas as alternativas em branco. Essa dificuldade também pode ser realçada com as respostas dos entrevistados a_2 e a_7.

Figura 21 - Resposta do aluno a2 na questão 1 do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

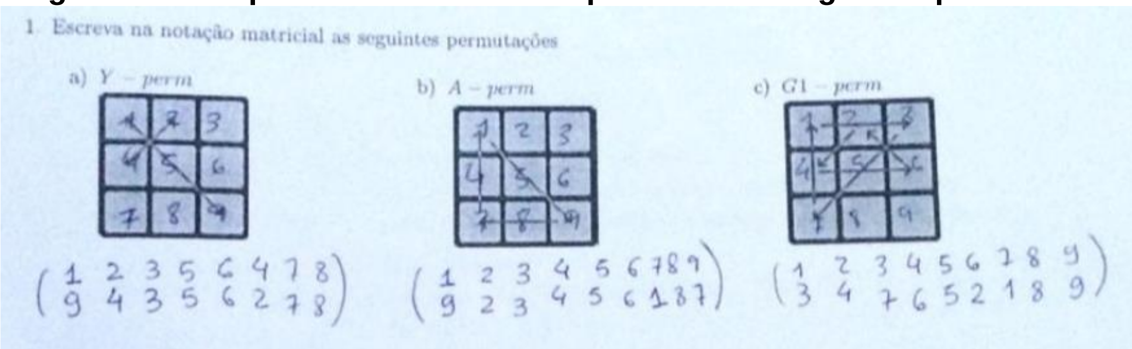
Figura 22 - Resposta do aluno a7 na questão 1 do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

Acreditamos que para os estudantes que não conheciam a nomenclatura (segundo a WCA) das peças certamente sentiu dificuldades pois o único aluno que não conhecia a notação e respondeu corretamente, utilizou uma notação numérica, como podemos observar abaixo.

Figura 23 - Resposta do aluno a7 na questão 1 do segundo questionário

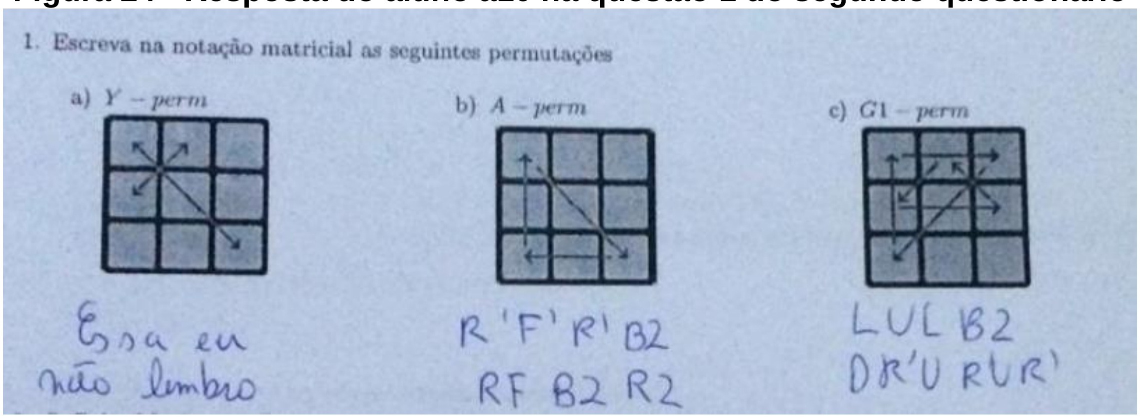


FONTE: O autor (2018)

Notamos que ela trocou a nomenclatura utilizada na oficina, e enumerou cada uma das peças começando pela posição UBR. Apesar da nomenclatura tratar como iguais os tipos de peças, isto não influenciou na resposta, pois ela foi capaz de utilizar a notação matricial de maneira correta.

Com relação aos 11 alunos que tem habilidade de montar pelo menos um lado, 7 deixaram em branco, 2 não compreenderam o que a questão queria e escreveram a fórmula que soluciona a permutação, um respondeu apenas a letra a) corretamente e apenas um respondeu as três letras corretamente. A foto a seguir mostra um dos alunos que escreveu a fórmula da permutação ao invés da representação em notação matricial.

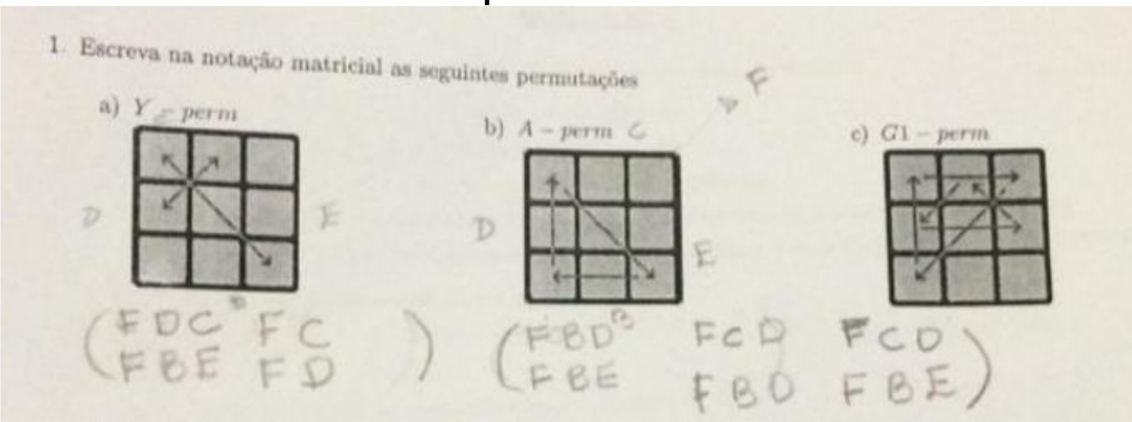
Figura 24 - Resposta do aluno a10 na questão 1 do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

Acreditamos que esse tipo de equívoco aconteceu por que na oficina utilizamos essas permutações para explicar conceitos de Grupos de Permutação, então o aluno viu na apostila que esses movimentos estavam relacionados com as permutações, achou que eles eram a resposta para a pergunta.

Figura 25 - Resposta do aluno a11 na primeira questão do segundo questionário



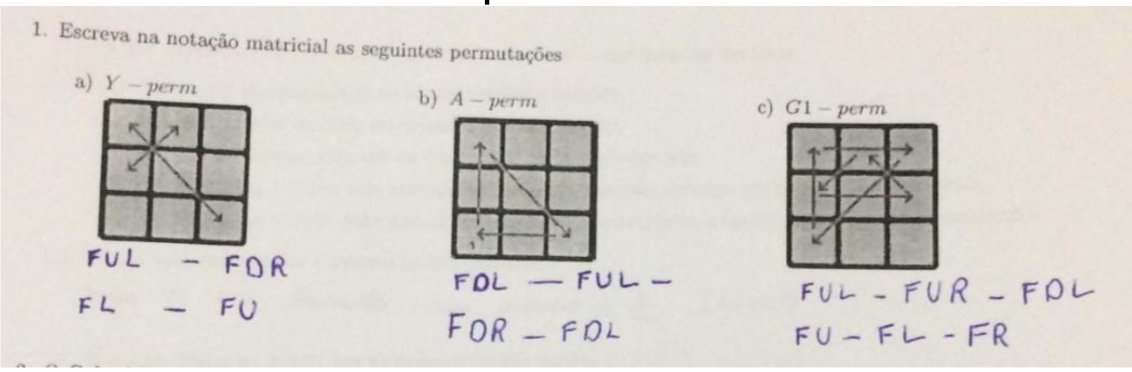
FONTE: O autor (2018)

O aluno a_{11} ainda foi capaz de responder a letra a) quase corretamente, porém preferiu modificar a notação. Originalmente, as imagens referem-se a vista de cima do cubo, logo as imagens simbolizam a camada U, porém o aluno trata a camada U como sendo a F, e dessa forma as outras camadas também são modificadas, ficando a face de trás em cima (C), a da esquerda permanece na esquerda, porém ela chama de D, e a da direita permanece na direita, porém ela chama de E (acreditamos que ela se confundiu) e a face da frente em baixo (B). O aluno também misturou a notação matricial com a notação reduzida. Ele estava ciente das peças que eram permutadas porém a notação matricial deveria ter sido da forma

$$\begin{pmatrix} FDC & FBE & FC & FD \\ FBE & FDC & FD & FC \end{pmatrix}.$$

Temos ainda o aluno a_4, que também entendeu o que a questão pedia, porém optou por usar uma linguagem própria.

Figura 26 - Resposta do aluno a4 na primeira questão do segundo questionário



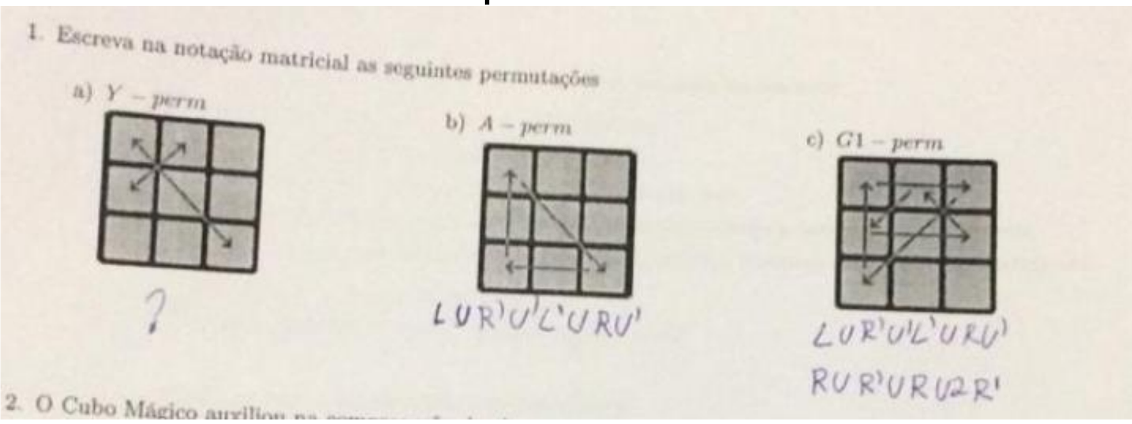
FONTE: O autor (2018)

É possível notar que o aluno utilizou a nomenclatura corretamente, porém indicou as permutações por traços. Na letra a), a linha de cima indica a permutação dos cantos enquanto a de baixo representa a permutação dos meios. Na letra b) ele percebe que a permutação se trata de um 3-ciclo e finaliza a linha com um traço para indicar continuidade. Ele ainda repete a primeira peça na última posição para indicar o fim do ciclo. Na letra c), novamente ele utiliza a linha de cima para indicar a permutação dos cantos e a linha de baixo para indicar a permutação dos meios.

Essas respostas mostram que a nomenclatura ficou confusa até para quem sabe montar uma face, mas não sabe montar o cubo todo. Veremos agora como se saíram os alunos que sabiam montar o cubo, porém sem conhecer a notação.

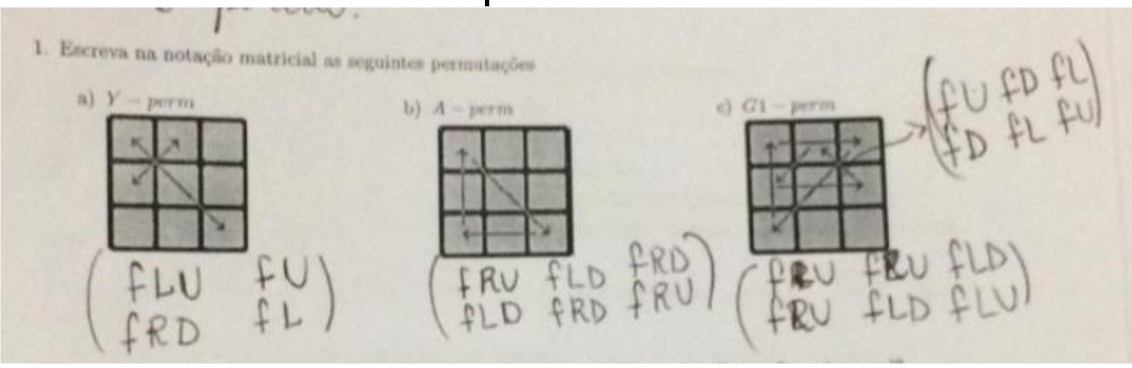
Dos dois alunos que sabiam montar o cubo porém não conheciam a notação, um cometeu o mesmo equívoco de escrever a fórmula da permutação ao invés da notação matricial, e o outro respondeu corretamente as letras b) e c) na notação matricial e utilizou a notação simplificada na letra a), como podemos observar a seguir.

Figura 27 - Resposta do aluno a5 na primeira questão do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

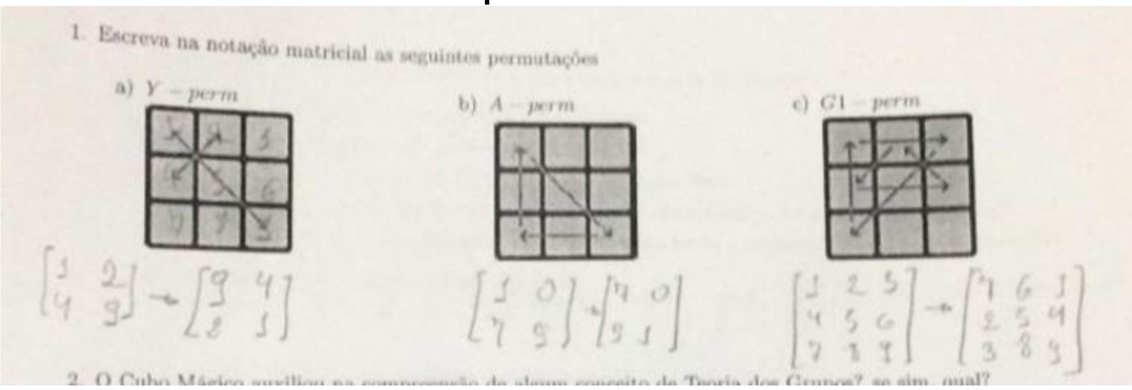
Figura 28 - Resposta do aluno a8 na primeira questão do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

Por fim, veremos como responderam os 8 alunos que já sabiam montar o cubo e já conheciam a notação antes da oficina. Dos 8 alunos, dois deixaram em branco, um escreveu a fórmula da permutação e não a notação matricial, como foi o caso dos alunos a_{10} e a_5, um utilizou uma notação própria, um optou por transformar cada peça em um número e utilizou a notação corretamente, e três utilizaram a notação vista na oficina e de forma correta. Falaremos um pouco sobre cada caso.

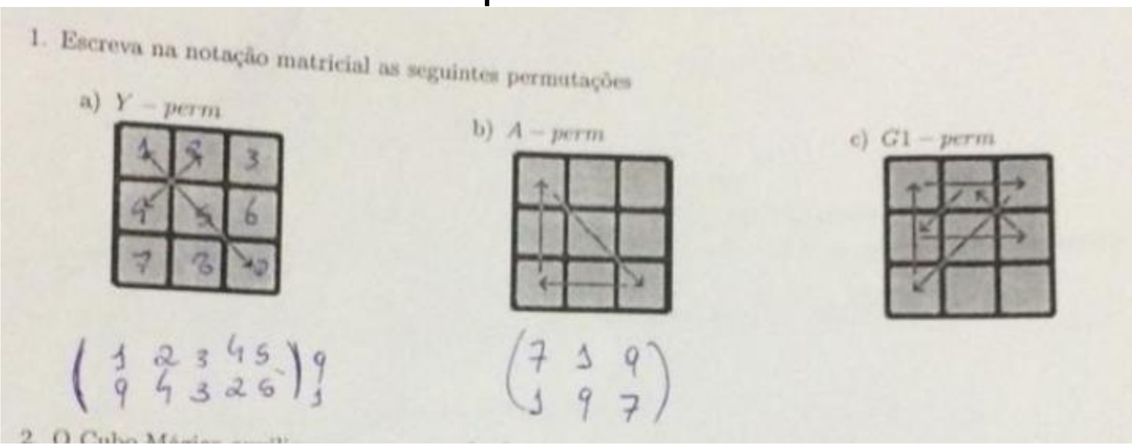
Figura 29 - Resposta do aluno a6 na primeira questão do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

Observando a resposta do aluno a_6, é possível perceber que ele entendeu do que se tratava a questão, porém para expressar a permutação ele converteu cada peça em um número, e escreveu uma matriz representando as peças no lugar e em seguida outra matriz representando o estado que as peças se encontram após a permutação.

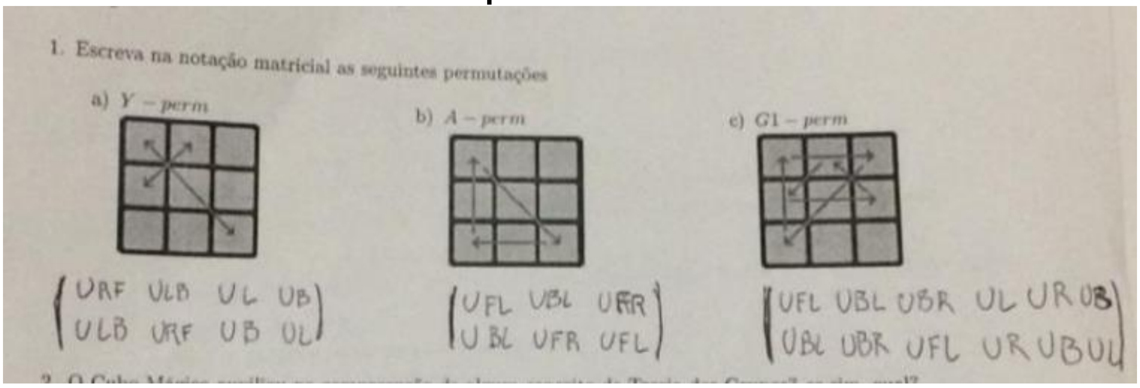
Figura 30 - Resposta do aluno a13 na primeira questão do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

O aluno a_{13}por sua vez, também transforma cada peça em um número, porém utiliza a notação matricial corretamente. Mesmo não respondendo a letra c), acreditamos que ele não fez por que não sabia, mas por que julgou desnecessário, visto que respondeu as duas primeiras alternativas corretamente.

Figura 31 - Resposta do aluno a6 na primeira questão do segundo questionário



FONTE: O autor (2018)

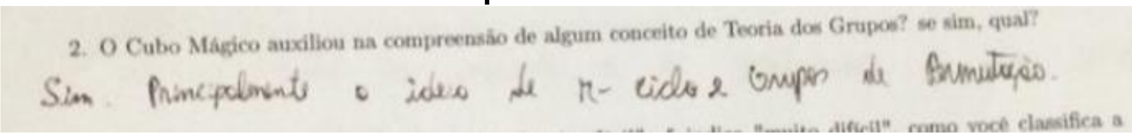
Por fim, em relação aos três alunos que utilizaram a notação matricial corretamente e também utilizaram a nomenclatura vista na oficina, tomamos como exemplo o aluno a_{12}, que respondeu as três alternativas.

Com base na análise foi possível perceber que a oficina não foi muito eficaz para abordar a notação matricial. Acreditamos que esse problema se deve à falta de tempo de explicar com mais detalhes o conceito.

6.3 Diferentes Aprendizagens dos Estudantes Sobre Teoria Dos Grupos

Nossa pesquisa também teve como objetivo verificar as demais aprendizagens relacionadas a Teoria dos Grupos. Para isso, analisamos a segunda questão do segundo questionário, que perguntava se o Cubo ajudou na compreensão de algum conceito. A aula ministrada na oficina foi dividida em três partes. Na primeira, apresentamos sobre o Cubo Mágico e suas notações, em seguida fizemos uma rápida introdução a teoria dos grupos, e por fim falamos sobre um tipo particular de grupos, os grupos de permutações. Dessa maneira, como um terço da oficina foi dedicado especialmente para grupos de permutações, achávamos que a maior parte das aprendizagens seriam sobre esse tema, porém nossos resultados mostram que um outro conceito foi mais recorrente nas respostas. Dos vinte e seis entrevistados, seis responderam falando que o Cubo ajudou a entender conceitos de Grupos de Permutação como podemos ver como exemplo os alunos a_{20} e a_{23}.

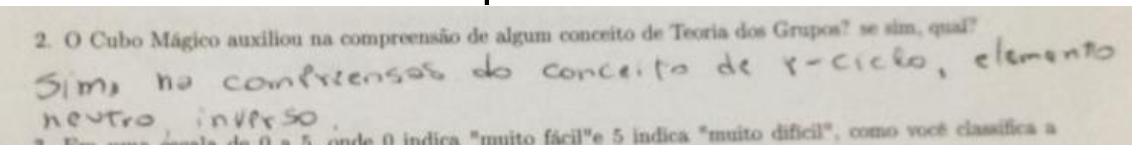
Figura 32 - Resposta do aluno a20 na segunda questão do segundo questionário


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?

Sim. Principalmente a ideia de r-ciclo e Grupos de Permutação.

FONTE: O autor (2018).

Figura 33 - Resposta do aluno a23 na segunda questão do segundo questionário


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?

Sim, na compreensão do conceito de r-ciclo, elemento neutro, inverso.

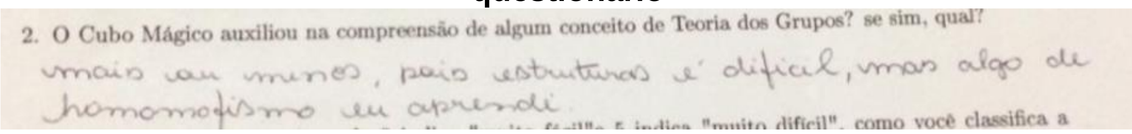
3. Em uma escala de 0 a 5, onde 0 indica "muito fácil"e 5 indica "muito difícil", como você classifica a

FONTE: O autor (2018).

Dentro do conceito de Grupos de Permutações, comprovamos que a ideia de r-ciclo foi a mais recorrente. De fato, na oficina definimos r-ciclo usando o Cubo para ilustrar, e verificamos duas propriedades que envolviam r-ciclo.

Ao final da oficina, falamos brevemente sobre o conceito de homomorfismo. Não chegamos a apresentar a definição formal, apenas utilizamos dois cubos diferentes a título de motivação, porém três alunos responderam que o Cubo foi útil para entender o conceito de homomorfismo.

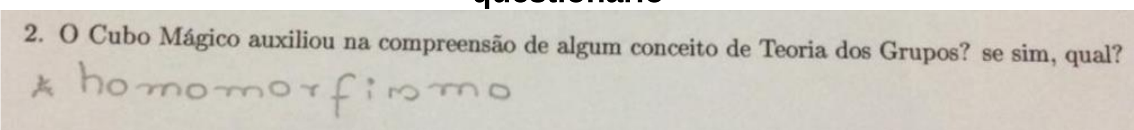
Figura 34 - Resposta do aluno a21 na segunda questão do segundo questionário


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?

mais ou menos, pois estruturas é difícil, mas algo de homomorfismo eu aprendi

FONTE: O autor (2018).

Figura 35 - Resposta do aluno a19 na segunda questão do segundo questionário


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?

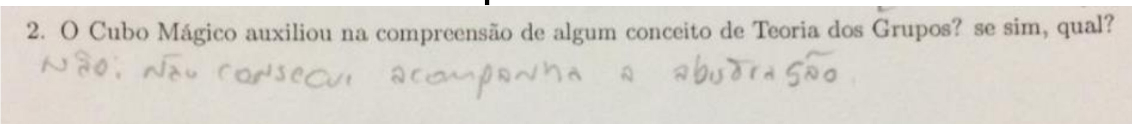
A homomorfismo

FONTE: O autor (2018).

Acreditamos que o assunto de homomorfismo também pode ser explicado usando o Cubo como instrumento didático, porém devido ao tempo não foi possível se aprofundar no assunto.

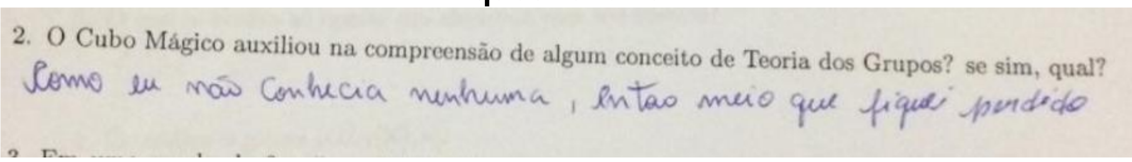
Tivemos, contudo, alguns *feedbacks* negativos quanto a oficina. Dois alunos deixaram em branco, e mais dois alegaram que o assunto era muito difícil para entender, como mostra as figuras abaixo.

Figura 36 - Resposta do aluno a6 na segunda questão do segundo questionário


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?
Não. Não consegui acompanha a abstração.

FONTE: O autor (2018)

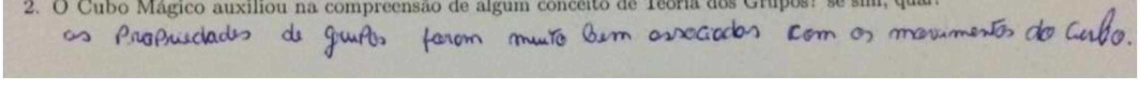
Figura 37 - Resposta do aluno a17 na segunda questão do segundo questionário


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?
Como eu não conhecia nenhuma, então meio que fiquei perdido

FONTE: O autor (2018)

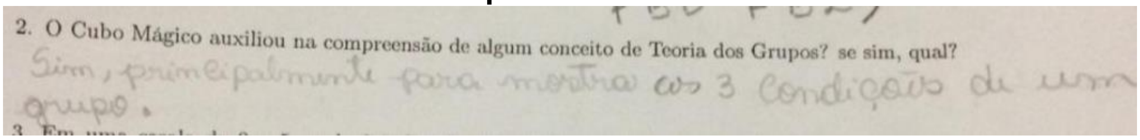
Todavia a maioria das respostas foram referentes ao conceito geral de grupo. Na oficina, após provar que o Cubo Mágico é um grupo, utilizamos ele como exemplo para explicar as três condições de existência de grupo, e segundo nossa análise, esse foi o conceito em que o Cubo mais ajudou na compreensão, pois dez entrevistados responderam essa opção, como vemos a seguir.

Figura 38 - Respostas do aluno a4 na segunda questão do segundo questionário


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?
os Propriedades de grupos foram muito bem associados com os movimentos do Cubo.

FONTE: O autor (2018)

Figura 39 - Respostas do aluno a11 na segunda questão do segundo questionário

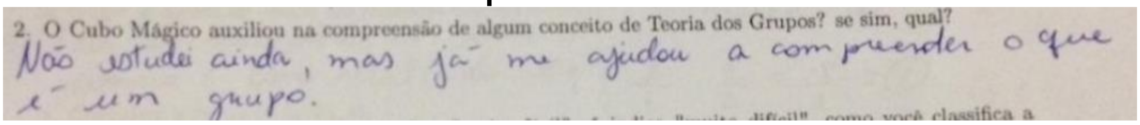


2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?
Sim, principalmente para mostrar as 3 condições de um grupo.

FONTE: O autor (2018)

Vale ressaltar que o algumas dessas respostas são de alunos que nem se quer pagaram a disciplina de Estruturas Algébricas, como é o caso do aluno a_2.

Figura 40 - Respostas do aluno a2 na segunda questão do segundo questionário



2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?
Não estudei ainda, mas já me ajudou a compreender o que é um grupo.

FONTE: O autor (2018)

De modo geral, constatamos que a maior parte dos alunos foi capaz de apresentar diferentes aprendizagens em relação a Teoria dos Grupos, e a tabela abaixo apresenta os diferentes tipos de respostas.

Tabela 6 - Segunda questão do segundo questionário

Tipo de resposta	**Quantidade**	
	Não cursou a disciplina	**Já cursou a disciplina**
Condições de existência de grupo	8	2
Grupos de permutação		2
Grupos cíclicos		1
Grupos, subgrupos e grupos de permutação	1	2
r −ciclo e grupos de permutação		1
Homomorfismo	1	2
Não auxiliou/em branco	1	3
Outras respostas	2	

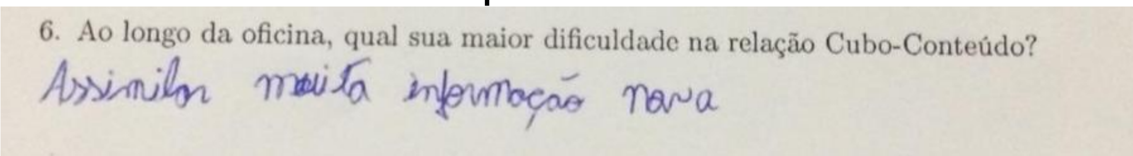
FONTE: O autor (2018)

6.4 Opinião dos Estudantes com Relação ao Cubo Mágico como Instrumento Didático

Por fim, nosso último objetivo era saber a opinião dos alunos a respeito da utilização do Cubo Mágico como instrumento didático no ensino de Estruturas Algébricas. Para isso, analisamos a questão quatro, que pedia para indicar uma nota de 0 a 5 sobre como o Cubo ajudou a entender conceitos, e a questão seis, que pergunta sobre a maior dificuldade na relação Cubo-Conteúdo. Apresentaremos a seguir as respostas mais pertinentes.

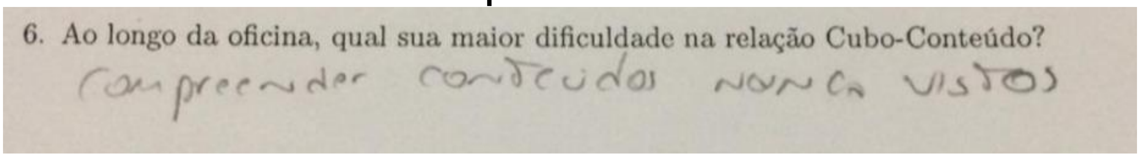
Dois alunos foram bastante gerais e falaram que tiveram dificuldade durante todo o processo, e dois especificaram que o motivo é se dá pelo fato de ser muito assunto, nunca antes visto, e de uma só vez.

Figura 41 - Resposta do aluno a1 na sexta questão do segundo questionário


6. Ao longo da oficina, qual sua maior dificuldade na relação Cubo-Conteúdo?
Assimilar muita informação nova

FONTE: O autor (2018)

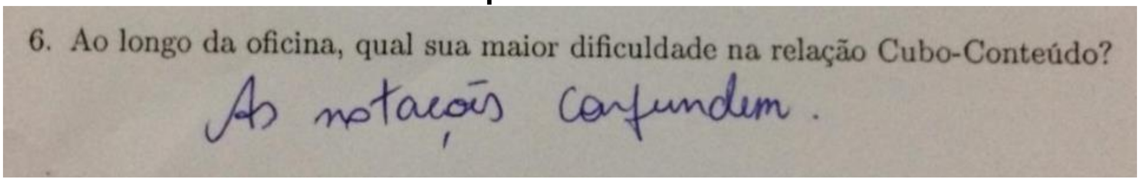
Figura 42 - Resposta do aluno a6 na sexta questão do segundo questionário


6. Ao longo da oficina, qual sua maior dificuldade na relação Cubo-Conteúdo?
Compreender conteúdos nunca vistos

FONTE: O autor (2018)

A dificuldade mais recorrente se deu pela falta de familiaridade com a notação. Como hipotetizamos, devido ao fato da oficina ter sido relativamente rápida, acreditávamos que a maior dificuldade seria entender a notação. De fato, dez pessoas afirmaram que a falta e conhecimento do cubo favoreceu para que parte do assunto ficasse confuso. Como exemplo, temos os alunos a_2 e a_{18} e a_{22}.

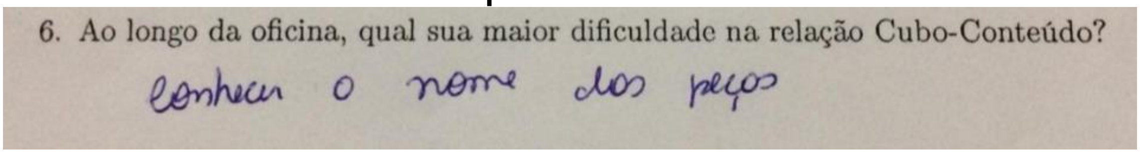
Figura 43 - Resposta do aluno a2 na sexta questão do segundo questionário


6. Ao longo da oficina, qual sua maior dificuldade na relação Cubo-Conteúdo?

As notações confundem.

FONTE: O autor (2018)

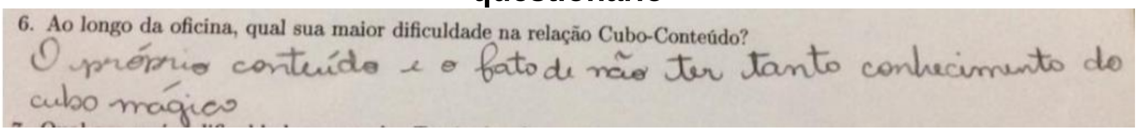
Figura 44 - Resposta do aluno a18 na sexta questão do segundo questionário


6. Ao longo da oficina, qual sua maior dificuldade na relação Cubo-Conteúdo?

Conhecer o nome das peças

FONTE: O autor (2018)

Figura 45 - Resposta do aluno a22 na sexta questão do segundo questionário

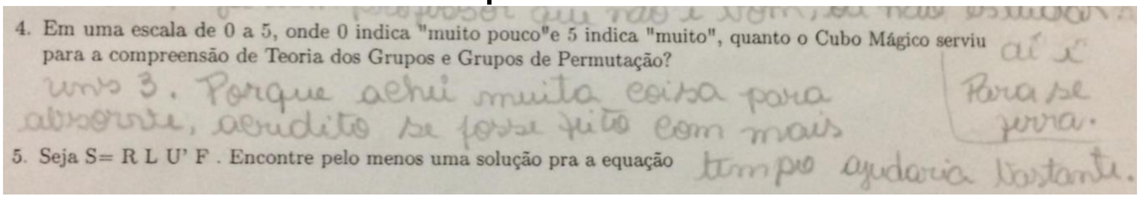

6. Ao longo da oficina, qual sua maior dificuldade na relação Cubo-Conteúdo?

O próprio conteúdo e o fato de não ter tanto conhecimento do cubo mágico

FONTE: O autor (2018)

Um fator que não apareceu com muita frequência, mas que consideramos pertinente foi a questão do tempo na oficina. A oficina teve em média 1h30min, onde parte desse tempo foi dedicado a ensinar a notação do cubo, e o resto foi utilizado para explicar os principais conceitos de Teoria dos Grupos e Grupos de Permutação, assuntos que geralmente demoram todo um período para ser visto. Acreditávamos portanto que se a oficina fosse mais longa, a aprendizagem seria mais efetiva e usamos como exemplo o aluno a_{11} na questão quatro do segundo questionário.

Figura 46 - Resposta do aluno a11 na quarta questão do segundo questionário


4. Em uma escala de 0 a 5, onde 0 indica "muito pouco"e 5 indica "muito", quanto o Cubo Mágico serviu para a compreensão de Teoria dos Grupos e Grupos de Permutação?

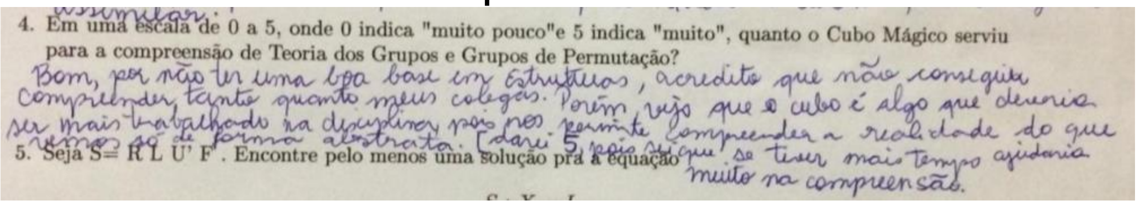
uns 3. Porque achei muita coisa para absorver, acredito se fosse feito com mais tempo ajudaria bastante.

5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

FONTE: O autor (2018)

Por fim, decidimos usar a resposta do aluno a_{26} para enfatizar o uso do Cubo Mágico na disciplina de Estruturas Algébricas.

Figura 47 - Resposta do aluno a26 na sexta questão do segundo questionário


4. Em uma escala de 0 a 5, onde 0 indica "muito pouco"e 5 indica "muito", quanto o Cubo Mágico serviu para a compreensão de Teoria dos Grupos e Grupos de Permutação?

Bom, por não ter uma boa base em Estruturas, acredito que não consegui compreender tanto quanto meus colegas. Porém vejo que o cubo é algo que deveria ser mais trabalhado na disciplina pois nos permite compreender a realidade do que vemos de forma abstrata. Darei 5, pois acho que se tiver mais tempo ajudaria muito na compreensão.

5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

FONTE: O autor (2018)

O aluno já havia cursado disciplina e assumiu que não teve uma boa base quando cursou a matéria, por isso não conseguiu entender muito bem, porém ele afirma que o Cubo deveria ser utilizado em sala de aula pois ele permite que vemos conceitos abstratos. Da mesma forma que o aluno anterior, ele ainda finaliza falando que se a oficina tivesse mais tempo a compreensão seria maior.

A seguir, apresentamos duas tabelas que classificam as respostas das questões quatro e seis, respectivamente.

Tabela 7- Questão 4 do segundo questionário

Tipo de resposta	Quantidade	
	Não cursou a disciplina	Já cursou a disciplina
“1”		
“2”	1	1
“3”	4	5
“4”	3	3
“5”	2	4
Em branco	3	

FONTE: O autor (2018)

Tabela 8 - Questão 6 do segundo questionário

Dificuldades na relação Cubo-Conteúdo	**Quantidade**	
	Não cursou a disciplina	**Já cursou a disciplina**
Falta de conhecimento do assunto	4	4
Falta de conhecimento do Cubo	3	3
Notação das peças	2	3
Tudo	3	
Não sentiu dificuldade		2
Outras respostas	1	1

FONTE: O autor (2018)

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo analisar se o Cubo Mágico poderia servir de instrumento didático para o ensino de Teoria dos Grupos, e acreditamos que ele foi alcançado.

A apuração dos nossos resultados nos permitiu compreender um pouco sobre o porquê de certos erros serem tão recorrentes. A aplicação do primeiro questionário foi de grande importância para que fosse possível enxergar a carência de imagens conceituais coerentes referentes a conceitos como elemento neutro, inverso e operações com elementos não-comutativos. Já com segundo questionário, foi possível verificar que após a oficina, a maioria dos alunos não estavam mais cometendo os mesmos equívocos.

Um fator que consideramos pertinente comentar é sobre a falta de tempo de abordar os assuntos mais profundamente. A nossa análise mostrou que a oficina trouxe resultados positivos, porém é importante levarmos em conta que abordamos ao longo de oficina de uma hora e meia uma quantidade de conteúdos que geralmente é visto em meses de curso, portanto, acreditamos que os resultados poderiam ser mais satisfatórios se tivéssemos mais tempo, como alguns alunos ressaltaram.

Com relação as aprendizagens estimuladas, ficamos surpresos ao ver que a maioria dos alunos afirmou que o Cubo foi útil para a explicação das condições de existência de grupo. Antes da oficina, esperávamos que, como o Cubo é um exemplo de Grupo de Permutação, este seria o assunto em que os alunos mais sentiriam facilidade em aprender, todavia nossa análise mostrou que o conceito geral de grupo foi melhor compreendido.

Consideramos essa surpresa como sendo positiva, pois mesmo o assunto de Grupos de Permutação sendo bastante importante, ele é pouco explorado na graduação, então ficamos felizes em saber que o Cubo também pode ser usado em outros temas de EA.

Também julgamos pertinente comentar sobre as dificuldades relacionadas à linguagem empregada na oficina. Vimos que apenas os alunos (e nem todos) que já sabiam montar o cubo e conheciam a notação dos movimentos puderam se expressar com facilidade, enquanto os outros entrevistados empregavam linguagens diferentes, muitas vezes sujeitas a erros de interpretação.

Recomendamos que, caso algum professor venha a utilizar o cubo nas aulas de EA disponha de outra notação, como a notação numérica padrão adotada por Garcia e Lequain (2001, ou então dedique mais tempo na explicação, a fim de evitar os erros cometidos nos questionários.

Embora tenhamos atingido os nossos objetivos, podemos sugerir outros temas de pesquisa envolvendo o Cubo Mágico e Estruturas Algébricas. Como mencionamos anteriormente na nossa análise, ao final da oficina fizemos uma breve introdução sobre o conceito de homomorfismo, e mesmo não sendo o foco da oficina, houveram alunos que responderam que o cubo ajudou a entender o conceito de homomorfismo, quando indagamos na questão dois do segundo questionário. Um estudo sobre esse tema poderia ser feito fazendo a comparação do Cubo Mágico com outros quebra-cabeças de formatos diferentes e explorando as simetrias entre eles.

Um outro tema que sugerimos é o aprofundamento em Grupos de Permutação e abordar tópicos como a paridade de permutações e grupos alternantes. Esse tema exploraria assuntos mais complexos do cubo, como por exemplo a explicação do porquê não é possível girar apenas uma peça do cubo permutar apenas duas peças.

Pesquisas podem serem feitas ainda para investigar outras aplicações dos subgrupos dos comutadores e de elementos conjugados. Sugerimos uma análise aprofundada do ponto de vista matemático do método Old Pochmann, que é utilizado para montar o Cubo de olhos fechados. Diferente do método usual de camadas, o método OP resume-se em resolver primeiro as peças de meio e em seguida as peças de canto, e com isso faz uso muito mais explícito dos conceitos de comutadores e conjugados.

Esperamos que nossa pesquisa possa servir como subsídio para outras investigações acerca desse ramo da Matemática que é tão bela e rica em aplicações, mas tão pouco explorada na graduação.

REFERÊNCIAS

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics. Amsterdam: North-Holland, v.12, n.2, 1981. p. 151-169.

SANTOS, J. P. O. **Introdução a teoria dos números.** Coleção Matemática universitária. SBM, 1998.

GARCIA, A; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra.** Projeto euclides. 2001.

LIRA, E. H. C. **Um breve desenvolvimento histórico da teoria dos grupos;** II seminário cearense de história da Matemática – 17 e 18 de março, 2016.

SIMIS, A. **Introdução á Álgebra.** – 2ª Ed. – Rio de Janeiro, IMPA, 1977.

JÚNIOR, F. M. A. **Grupos Finitos e Quebra de Simetria no Código Genético.** São Paulo, 2003. – São Paulo. (Tese de Doutorado em Matemática Aplicada).

AMARAL, B; BARAVIERA, A. T.; CUNHA, M. O. T. **Mecânica Quântica para Matemáticos em Formação.** Publicações do 28º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, 2011. – Rio de Janeiro: IMPA; 2011.

JOYNER, D. **Adventures in group theory –** Rubick's cube, Merlin's & other mathematical toys – 2ªEd. – Baltimore, Maryland.

WCA Guidelines. Los Angeles, WCA, 2018 Disponivel em <https://www.worldcubeassociation.org/>

SINGMASTER, D. **Notes on Rubik's magic cube.** 5ª Ed. London, England.

MINAYO, M.C. de S. (Org.) **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 22 ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2003.

KLUTH, Verilda Speridião. **Estruturas da álgebra**: **investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento.** 2005. vii, 192 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102165>.

GRIMM, L. G. H. M. **Cubo mágico: propriedades e resoluções envolvendo Álgebra e Teoria dos Grupos.** 2016. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2016.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO 1

Questionário 1

Aluno:
Período:

1. No que se refere ao Cubo Mágico, assinale a alternativa que mais lhe descreve
   (a) Eu não sei absolutamente nada sobre o Cubo Mágico.
   (b) Eu sabia montar quando era criança, mas me esqueci.
   (c) Eu consigo montar uma cor do Cubo, mas nada mais que isso.
   (d) Eu sei montar o Cubo pelo método de camadas, mas não conheço a notação dos movimentos.
   (e) Eu sei montar o Cubo pelo método de camadas/intermediário, e conheço a notação dos movimentos.
2. O que você entende por o inverso de um elemento?
3. O que se obtém ao operar um elemento com seu inverso?
4. Considere o grupo $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$.
   (a) Qual o inverso do elemento $X = A \cdot B \cdot C$?
   (b) Qual o elemento neutro?
5. O conjunto $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo? Porquê? E $(\mathbb{Z}, \cdot)$?
6. Explique com suas palavras o conceito de $r - ciclo$.

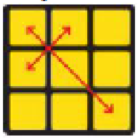
APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 2

Questionário 2

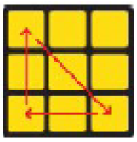
Aluno:
Período:

1. Escreva na notação matricial as seguintes permutações

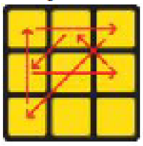
a) $Y - perm$



b) $A - perm$



c) $G1 - perm$



2. O Cubo Mágico auxiliou na compreensão de algum conceito de Teoria dos Grupos? se sim, qual?

3. Em uma escala de **0** a **5**, onde **0** indica "muito fácil"e **5** indica "muito difícil", como você classifica a disciplina de estruturas algébricas?

4. Em uma escala de **0** a **5**, onde **0** indica "muito pouco"e **5** indica "muito", quanto o Cubo Mágico serviu para a compreensão de Teoria dos Grupos e Grupos de Permutação?

5. Seja S= R L U' F . Encontre pelo menos uma solução pra a equação

$$S * X = I,$$

onde I é a permutação identidade (cubo montado).

6. Ao longo da oficina, qual sua maior dificuldade na relação Cubo-Conteúdo?

7. Qual sua maior dificuldade ao estudar Teoria dos Grupos?

APÊNDICE C – OFICINA

1 Conhecendo o cubo

O Cubo Mágico é um quebra-cabeça tridimensional, inventado pelo húngaro Ernő Rubik em 1974. Ele é composto por seis faces de cores distintas, totalizando 26 peças, dentre as quais, 12 são os meios, 8 são os cantos e 6 são os centros.

- Centros: peças que possuem uma cor;
- Meios: peças que possuem duas cores;
- Quinas: peças que possuem três cores.

1.1 Notação utilizada

Por questão de convenção, representamos cada face e camada do cubo pela primeira letra de suas respectivas posições em inglês: Front, Back, Right, Left, Upper e Down.

Potuguês	Inglês	Notação
Frente	Front	F
Atrás	Back	B
Direita	Right	R
Esquerda	left	L
Cima	Upper	U
Baixo	Down	D

Para facilitar a localização e locomoção das peças, vamos estabelecer uma nomenclatura baseada na tabela de notação. Uma peça será definida pela interseção das faces em que ela se encontra. Por exemplo, a peça que está na interseção das faces F e R recebe o nome de FR, e a peça que está na interseção das faces U, L e B recebe o nome de ULB. Essa nomenclatura serve para se referir tanto a uma peça quanto a posição que esta deve ir.

Observação. *É imediato concluir que as peças representadas por duas letras simbolizam meios, enquanto as peças que são definidas por três letras representam quinas.*

Define-se movimento como o ato de girar um quarto de volta no sentido horário ou anti-horário uma determinada camada. Indicamos um movimento no sentido horário pela primeira letra em inglês da camada que deseja-se mover, e indicamos um movimento no sentido anti-horário pela primeira letra em inglês da camada que deseja-se mover, acrescida de um apóstrofo. Também indicamos a sequência de dois movimentos iguais pela sua letra, acrescida de um "2".

2 Teoria dos Grupos

2.1 Grupos

Definição. *Um conjunto G não vazio com uma operação*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

é um grupo se as condições seguintes são satisfeitas:

- *A operação é associativa, isto é*

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in G.$$

- *Existe um elemento neutro, isto é,*

$$\exists e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \forall a \in G.$$

- *Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,*

$$\forall a \in G, \exists b = a^{-1} \in G \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a =$$

Se a comutatividade for verificada, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a = \forall a, b \in G,$$

Dizemos que o grupo é comutativo ou abeliano.

Observação. *O elemento neutro é único. De fato, se $e, e' \in G$ são elementos neutros, de G, então*

$$\begin{array}{rcll} e & = & e \cdot e' & \text{pois } e' \text{ é elemento neutro.} \\ & = & e' & \text{pois } e \text{ é elemento neutro.} \end{array}$$

Observação. *O elemento inverso é único. De fato, seja $a \in G$, e sejam $b, b' \in G$ dois elementos inversos de a; temos:*

$$\begin{array}{rcll} b & = & b \cdot e = b \cdot (a \cdot b') & \text{pois } b' \text{ é inverso de } a \\ & = & (b \cdot a) \cdot b' = e \cdot b' = b' & \text{pois } b \text{ é inverso de } a \end{array}$$

Exemplos de grupos

1. $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano infinito.
2. $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ são grupos (Aditivos) abelianos.
3. $(\mathcal{R}, \circ)$, onde $\mathcal{R}$ é o conjunto de todas as configurações possíveis do cubo mágico e $\circ$ é a operação composição, é um grupo não-abeliano.

O grupo de Rubik

A fim de utilizar o Cubo como instrumento didático, vamos primeiramente mostrar que ele é de fato um grupo. Para isso, seja $\mathcal{R} = \langle R, L, U, D, F, B \rangle$, isto é, todas as configurações que podem ser feitas através dos movimentos, e definimos a operação "fazer um movimento ou não fazer nada", e representaremos por $\circ$, pois pode-se verificar que ela se comporta como a operação *composição*. Vamos mostrar que, nestas condições, $(\mathcal{R}, \circ)$ é grupo. De fato, vamos verificar para os movimentos R, U, L (a verificação para os demais movimentos é análoga):

- Associatividade:
  Para fins de compreensão, um conjunto de movimentos que estão entre parenteses será executado mais rapidamente. Com isso, é trivial verificar que $(RU)L = R(UL)$.
- Elemento neutro:
  Denotaremos o movimento "não fazer nada"por I. Sua existência (e unicidade) também são facilmente verificáveis. De fato, temos que $RI = IR = R$, ou seja, fazer um movimento e depois não fazer nada, é o mesmo que não fazer nada e depois fazer o movimento que é o mesmo que fazer apenas o movimento.
- No conjunto $\mathcal{R}$, entendemos como elemento inverso o movimento necessário para fazer o cubo voltar a sua posição inicial. Dessa forma, temos que $R^{-1} = R', L^{-1} = L', U^{-1} = U', D^{-1} = D', F^{-1} = F', B^{-1} = B'$. Para uma sequência de dois ou mais movimentos, podemos associar I com o cubo montado, assim, mostrar que uma sequência de movimentos possui inverso é o mesmo que resolver o cubo.

Como as três condições foram verificadas, temos que $(\mathcal{R}, \circ)$ é grupo, e o chamamos de *grupo de Rubik*, em homenagem ao seu criador. A partir de agora nos referiremos a $(\mathcal{R}, \circ)$ simplesmente por $\mathcal{R}$.

Observação. *Vimos anteriormente que o elemento inverso de um grupo é único, mas é possível fazer, por exemplo,* $R \circ R' = I$ *e* $R \circ R3 = I$. *Para contornar esse problema, dizemos que dois movimentos são iguais se moverem exatamente as mesmas peças. Dessa forma, temos que* $R' = R3$, *logo o inverso de um movimento de fato é único.*

Observação. *Note que* $\mathcal{R}$ *não é comutativo, isto é, inverter a ordem de dois movimentos resulta em configurações diferentes. Em particular, é esse fato que torna o cubo mágico um brinquedo difícil de se resolver.*

Uma vez mostrado que podemos observar o cubo mágico como um objeto matemático, podemos usá-lo para entender melhor certos conceitos relacionados a grupos, em particular, Grupos de Permutação.

2.2 Subgrupos

Definição. *Seja* $(G, \cdot)$ *um grupo. Um subconjunto não-vazio* H *de* G *é um subgrupo de* G *(denotamos* $H < G$*) quando, com a operação de* G, *o conjunto* H *é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:*

- $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H.$
- $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3, \forall h_1, h_2, h_3 \in H.$
- $\exists e_H \in H$ *tal que* $e_H \cdot h = h \cdot e_H = h, \forall h \in H.$
- *Para cada* $h \in H$, *existe* $k \in H$ *tal que* $h \cdot k = k \cdot h = e_H$.

Proposição. *Seja* H *um subconjunto não vazio do grupo* G. *Então* H *é subgrupo de* G *se, e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas*

1) $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H.$

2) $h^{-1} \in H, \forall h \in H.$

Verificação. *Verificaremos essa proposição usando o subgrupo* $\langle R, U \rangle$.

- *Note que como qualquer sequência de movimentos é uma configuração do cubo, a associatividade sempre será verdade, e podemos verificar isso utilizando os movimentos R U R', por exemplo.*
- *Como R'* $\in \langle R, U \rangle$, *podemos fazer* $R \cdot R' = I$, *ou seja, se todo elemento possuir o inverso, podemos obter o elemento neutro a partir dele.*

As demais condições são exatamente as condições da proposição.

2.2.1 Subgrupo gerado por um conjunto

Se H e K são subconjuntos de um grupo G, o conjunto $\{hk | h \in H$ e $k \in K\}$ será denotado por HK, e o conjunto $\{h^{-1} | h \in H\}$ será denotado por H^{-1}. Se S é um subconjunto não-vazio de G, o conjunto $\{a_1 a_2 ... a_n | n \in \mathbb{N}, a_i \in S$ ou $a_i \in S^{-1}\}$ sera denotado por $\langle S \rangle$. Quando o conjunto é finito, digamos $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$, utilizaremos a notação $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \rangle$.

Proposição. *Sejam* G *um grupo e* S *um subconjunto não-vazio de* G. *Então o conjunto* $\langle S \rangle$ *é um subgrupo de* G.

Verificação. *A verificação dessa proposição é análoga a anterior, pois utilizamos um subgrupo gerado.*

Definição. *Sejam* G *um grupo e* S *um subconjunto não-vazio de* G. *Então* $\langle S \rangle$ *é o subgrupo gerado por* S.

Exemplo. *O subconjunto* $\langle R, U\rangle$, *isto é, todos os movimentos que pode-se obter a partir dos movimentos R e U formam um subgrupo. Podemos usar* $\langle R, U\rangle$ *tanto para entender o conceito de subgrupo quanto para entender o conceito de subgrupo gerado.*

Definição. *O subgrupo* $\left(\{xyx^{-1}y^{-1}|x, y \in G\}\right)$ *é o subgrupo dos comutadores do grupo G; Ele será denotado por* G'. *Note que G é abeliano se e somente se* $G' = \{e\}$. *Denotamos um comutador como* $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Definição. *Sejam* $x, y \in G$. *Dizemos que* x *e* y *são conjugados, se existe* $g \in G$ *tal que* $g \cdot x \cdot g^{-1} = y$, *e utilizamos a notação* $g \cdot x \cdot g^{-1} = x \wedge g$.

Observação. *Esses subgrupos são fundamentais para a criação de algoritmos para o cubo. O algoritmo F R U R' U' F', por exemplo, é utilizado em todos os métodos de resolução (básico e avançado). Note que*

$$F\ R\ U\ R'\ U'\ F' = [R, U] \wedge F$$

2.3 Grupos normais

Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Sobre G, defina a relação de equivalência $y \sim x \Leftrightarrow \exists h \in H$ tal que $y = xh$.
Por definição, a classe de equivalência que contém x é o conjunto $\{y \in G | y \sim x\} = \{xh | h \in H\}$; Denotaremos esse conjunto por xH e o chamaremos de classe lateral à esquerda de H em G que contém x.

Proposição. *Seja H um subgrupo de um grupo G. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) A operação induzida sobre as classes laterais à esquerda de H em G é bem definida;

(ii) $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$;

(iii) $gH = Hg, \forall g \in G$.

Definição. *Um subgrupo H é um subgrupo normal de G (e escrevemos* $H \lhd G$*) se ele satisfaz as afirmações equivalentes da proposição anterior. Neste caso, as classes laterais à esquerda de H são iguais às classes laterais à direita de H; vamos chamá-las de classes laterais de H.*

Definição. *Um grupo G é dito simples se seus únicos subgrupos normais são o trivial e ele próprio.*

Infelizmente, não podemos citar exemplos de subgrupos normais no grupo $\mathcal{R}$, pois este é um grupo simples.

2.4 Grupos de Permutação

Definição. *(Grupo das bijeções-Permutações). Seja A um conjunto não vazio. Definimos a estrutura*

$$S_A = \{f : A \to A | f \text{ é bijeção}\}$$

Munido da operação composição de funções. Podemos denotar S_A *também por* $P(A)$.

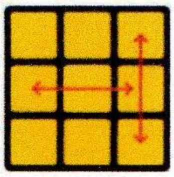
Definição. *(Grupo simétrico de grau n). Em* S_A, *se denotarmos* $A = I_n = \{1, 2, ..., n\}$ *o grupo* S_{I_n} *será denotado por* S_n *e será chamado de grupo simétrico de grau n.*

Definição. *(Permutação). Todo elemento de* S_n *é chamado de permutação e* S_n *é chamado de grupo das permutações de n elementos.*

Se $\alpha \in S_n$, podemos escreve-la na forma matricial como

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & ... & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

Exemplo. *A sequência de movimentos Tperm= R U R' U' R' F R2 U' R' U' R U R' F' é um exemplo de permutação, que troca de posição os elementos representados na figura abaixo*



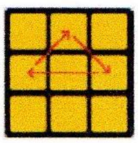
Podemos representa-la então por

$$Tperm = \begin{pmatrix} UR & UL & URF & URB \\ UL & UR & URB & URF \end{pmatrix}$$

ou, simplesmente, por (UR UL)(URF URB).

Definição. *Uma permutação* $\alpha \in S_n$ *é denominada um* $r-$ *ciclo se existem elementos distintos* $a_1, ...a_n \in \{1, ..., n\}$ *tais que* $\alpha(a_1) = a_2, \alpha(a_2) = a_3, ..., \alpha(a_{r-1}) = a_r, \alpha(a_r) = a_1$, *e tais que* $\alpha(j) = j, \forall j \in \{1, ..., n\} \setminus \{a_1, ..., a_r\}$; *tal* $r-$*ciclo será denotado por* $(a_1...a_r)$; *o número r é chamado o comprimento do ciclo. Os* $2-$*ciclos são também chamados de transposições.*

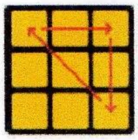
Exemplo. *A sequência de movimentos Uperm= R' U R' U' R' U' R' U R U R2 é um* $3-$ *ciclo, pois temos que* $Uperm(UR) = UL, Uperm(UL) = UB$ *e* $Uperm(UB) = UR$, *ou, mais simplificado,* $(UR\ UL\ UB)$



Definição. *Seja* $\alpha \in S_n$ *um* $r-$ *ciclo. O número mínimo de aplicações, a ele mesmo, necessário para que o ciclo retorne à sua posição original, isto é, a identidade (I) será denotado de ordem de* α $(\mathcal{O}(\alpha))$.

Exercício. *Seja $\alpha \in S_n$ um $r-$ciclo. Verifique que a ordem de $\alpha = r$.*

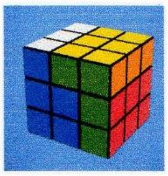
Verificação. *A permutação Aperm = R' F R' B2 R F' R' B2 R2 é um exemplo de um 3-ciclo, e move as peças representadas abaixo*



É possível ver que se aplicarmos esse algoritmo três vezes o cubo irá voltar ao seu estado original.

Exercício. *Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_t \in S_n$ ciclos disjuntos de comprimentos $r_1, ..., r_t$, respectivamente. Verifique que o produto $\alpha_t \cdot, ..., \cdot \alpha_1$ tem ordem igual a $MMC\{r_1, ..., r_t\}$.*

Verificação. *Usaremos a permutação $S = R2U2$. Perceba que podemos representa-la na notação de ciclos da seguinte forma: $S = (DRF\ \ ULF\ \ URB)(DRB\ \ ULB\ \ URF)$ $(DR\ \ UL\ \ UR)(UF\ \ UB)(RF\ \ RB)$, isto é, S pode ser representada como três $3-$ciclos e dois $2-$ciclos de ordens 3 e 2, respectivamente.*

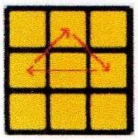
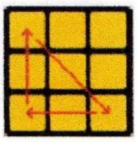


Perceba que se aplicarmos a sequência duas vezes, os $2-$ciclos retornarão ao estado original, mas não os $3-$ciclos, e se aplicarmos a sequência três vezes, os $3-$ciclos voltarão ao estado original, mas não os $2-$ciclos, porém se aplicarmos $MMC\{2, 3\} = 6$, todas as peças voltam ao estado original.

Definição. *Seja $\alpha \in S_n$ um $r-$ciclo e seja $\beta \in S_n$ um $s-$ciclo; as permutações α e β são disjuntas se nenhum elemento de $\{1, 2, ..., n\}$ é movido por ambas, isto é, $\forall a \in \{1, 2, ..., n\}$, temos que $\alpha(a) = a$ ou $\beta(a) = a$.*

Exercício. *Sejam $\alpha, \beta \in S_n$ dois ciclos disjuntos. Verifique que eles comutam, isso é, $\alpha\beta = \beta\alpha$.*

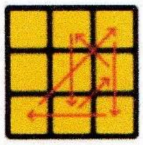
Verificação. *As permutações Uperm= R' U R' U' R' U' R' U R U R2 e Aperm = R' F R' B2 R F' R' B2 R2 são disjuntas, pois Uperm move apenas os meios e Aperm move apenas os cantos.*

Se aplicarmos primeiro Uperm e depois Aperm, podemos ver que o resultado vai ser o mesmo de se aplicar primeiro Aperm e depois Uperm.

Proposição. *Seja $\alpha \in S_n$, $\alpha \neq id$. Então a permutação α é igual a um produto de ciclos disjuntos de comprimentos ≥ 2; tal fatoração é única a menos da ordem dos fatores.*

Verificação. *Utilizaremos a permutação Gperm = L U L' B2 D' R U' R' U R' u R2, que move as seguintes peças indicadas na figura abaixo*



A permutação move várias peças, a princípio aleatoriamente, mas note que se trata de dois $3-$ciclos, um de cantos e um de meios, logo podemos escrevê-la como $Gperm = (UF\ \ UR\ \ UB)(UFR\ \ UFL\ \ URB)$.

Proposição. *a) Todo elemento de S_n é um produto de transposições, isto é, $S_n = \langle\{transposições\ \}\rangle$.*

b) $S_n = \langle (1, 2), (1, 3), \cdots (1, n) \rangle$.

c) $S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \cdots (n-1, n) \rangle$.

Verificação. *Ainda utilizando o exemplo anterior, podemos escrever Gperm como $(UF\ \ UR)(UR\ \ UB)(URF\ \ UFL)(UFL\ \ URB)$.*

Definição. *Um elemento $\alpha \in S_n$ é uma permutação par quando α se escreve como produto de um número par de transposições. Um elemento $\alpha \in S_n$ é uma permutação ímpar quando α se escreve como produto de um número ímpar de transposições.*

Definição. *Seja $A_n = \{\alpha \in S_n | \alpha$ é permutação par $\}$ Então A_n é um subgrupo de S_n, denominado Grupo Alternante.*

Verificação. *Este fato já vem sendo verificado, pois $\mathcal{R}$ é na verdade um grupo formado apenas por permutações pares. De fato, basta verificar que qualquer movimento simples, digamos R = (URF BRU DRB FRD)(UR BR DR FR) = (URF BRU)(BRU DRB)(DRB FRD)(FRD URF)(UR BR)(BR DR)(DR FR)(FR UR) pode ser decomposto em um número par de transposições. Além disso, o produto de duas permutações pares é uma permutação par, ou seja, qualquer configuração do cubo gerada por movimentos, é uma permutação par.*