

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA – LICENCIATURA

MONALISA SILVA MELO

**CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A
PROBABILIDADE CONDICIONAL E SEU ENSINO**

CARUARU, 2018

MONALISA SILVA MELO

CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A
PROBABILIDADE CONDICIONAL E SEU ENSINO

Trabalho de Conclusão de Curso,
apresentado(a) ao Curso de Graduação em
Matemática - Licenciatura da Universidade
Federal de Pernambuco, como requisito parcial
para a graduação em Licenciatura em
Matemática.

Área de concentração: Ensino/ Matemática

Orientador: Prof.º Dr.º José Ivanildo Felisberto
de Carvalho

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4-1242

M528c Melo, Monalisa Silva.
 Conhecimento de professores de matemática sobre a probabilidade condicional e seu ensino. / Monalisa Silva Melo. – 2018.
 46f. ; il. : 30 cm.

 Orientador: José Ivanildo Felisberto de Carvalho.
 Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2018.
 Inclui Referências.

 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Probabilidade. 3. Professores de matemática. 4. Ensino médio. I. Carvalho, José Ivanildo Felisberto de (Orientador). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.)
UFPE (CAA 2018-158)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática - Licenciatura



CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE A PROBABILIDADE CONDICIONAL E SEU ENSINO

MONALISA SILVA MELO

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e _____ em 04 de julho de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ivanildo Felisberto de Carvalho
(Orientador)

Prof. César Diogo Bezerra da Silva
(Examinador Externo)

Profa. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos
(Examinadora Interna)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, centro do meu universo, por sempre conduzir meus caminhos e permitir concretizar mais esta etapa.

As mulheres da minha vida, minha mãe Izanita (in memoriam), minha irmã Rosana e minha avó Josefa (in memoriam), grandes mulheres que sempre tomei como exemplo e inspiração, e que são o motivo de eu ter chegado até aqui, foi pra elas e por elas.

A minha família, em especial ao meu tio José Tenório, por ter sido tão presente em minha vida e ter sido como um pai pra mim.

Ao meu orientador, Ivanildo Carvalho, pelas orientações realizadas na elaboração e construção deste trabalho, por toda ajuda e compreensão.

Ao meu noivo João, por toda paciência, por estar sempre ao meu lado nos momentos felizes e tristes desta caminhada.

A professora Cristiane Rocha, pelas contribuições dadas durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso I.

Ao professor Valdir pela ajuda na construção deste trabalho, nas disciplinas de Metodologia da pesquisa e incentivo durante o curso.

A todos os meus professores e minhas professoras, pelas contribuições durante minha formação, e por serem exemplos de profissionais comprometidos para uma educação de qualidade.

A todos os meus colegas que compartilharam tristezas e alegrias desde o início do curso até agora, em especial a Karolina Araujo, Anderson Maike, Anyla Laíse, Marina Juliana, Thiago Gomes, Mazinho Rocha, Letícia Nascimento e Emanuel Vasconcelos, pelo incentivo, ombro amigo e pela ajuda prestada durante todo este percurso.

A minha amiga e companheira de viagem, Cristiane Silva, que tornou minhas viagens menos cansativas e mais descontraída, pelo incentivo, conversas, risadas e pelo ombro amigo.

É que tem mais chão nos meus olhos do que
cansaço nas minhas pernas, mais esperança
nos meus passos do que tristeza nos meus
ombros, mais estrada no meu coração do que
medo na minha cabeça.

Cora Coralina

RESUMO

O presente estudo tem por objetivo investigar os conhecimentos de professores do Ensino Médio concernente a probabilidade condicional e seu ensino. A mesma foi realizada com seis professores de matemática do nível de escolaridade do Ensino Médio brasileiro (estudantes de 15/16 até 17/18 anos de idade) de escolas da rede pública de ensino do município de Santa Cruz do Capibaribe-PE. A literatura atual e os documentos curriculares apontam para a importância da abordagem das noções de condicionalidade e independência com os estudantes do Ensino Médio. Identificamos estudos que abordam os conhecimentos necessários para ensinar matemática, e também pesquisas que analisam vieses frequentes no entendimento da probabilidade condicional. Utilizamos como procedimento metodológico a aplicação de um questionário com três itens e uma entrevista estruturada realizada individualmente com cada professor. Na análise dos resultados, percebemos que este grupo de professores apresentam lacunas no conhecimento sobre o conteúdo de probabilidade; entretanto nos itens que os professores puderam tecer reflexões, os mesmos, apontam relações entre a probabilidade e estatística e possíveis caminhos para a abordagem da probabilidade nas turmas de matemática, constituindo-se como um fato positivo com relação ao ensino dos referidos conteúdos.

Palavras-chave: Matemática. Probabilidade Condicional. Professores. Ensino Médio.

RESUMEN

El presente estudio tiene por objetivo investigar los conocimientos de profesores de la Enseñanza Media concerniente a la probabilidad condicional y su enseñanza. La misma fue realizada con seis profesores de matemáticas del nivel de escolaridad de la Enseñanza Media brasileña (estudiantes de 15/16 a 17/18 años de edad) de escuelas de la red pública de enseñanza del municipio de *Santa Cruz do Capibaribe-PE*. La literatura actual y los documentos curriculares apuntan a la importancia del abordaje de las nociones de condicionalidad e independencia con los estudiantes de la Enseñanza Media. Identificamos estudios que abordan los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas, y también investigaciones que analizan sesgos frecuentes en el entendimiento de la probabilidad condicional. Utilizamos como procedimiento metodológico la aplicación de un cuestionario con tres ítems y una entrevista estructurada realizada individualmente con cada profesor. En el análisis de los resultados, percibimos que este grupo de profesores presentan lagunas en el conocimiento sobre el contenido de probabilidad; sin embargo en los ítems que los profesores pudieron tejer reflexiones, los mismos, apuntan relaciones entre la probabilidad y estadística y posibles caminos para el abordaje de la probabilidad en las clases de matemáticas, constituyéndose como un hecho positivo con relación a la enseñanza de dichos contenidos.

Contraseñas: Matemáticas. Probabilidad condicional. Profesores. Enseñanza Media.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino.....	13
Figura 2 - Diagrama das Dimensões do Conhecimento Didático – Matemático.....	15
Figura 3 – Exemplo de situação de probabilidade condicional.....	26
Figura 4 – Exemplo de situação de probabilidade condicional.....	27
Figura 5 – Exemplo de situação de probabilidade da interseção dos eventos.....	28
Figura 6 – Exemplo de situação de Eventos independentes.....	28
Figura 7 – Exemplo de situação de Eventos independentes.....	29
Figura 8 – Item 1 das situações problemas do questionário.....	33
Figura 9 – Item 2 das situações problemas do questionário.....	34
Figura 10 – Protocolo de Resolução do professor.....	36
Figura 11 – Item 3 das situações problemas do questionário.....	37
Figura 12 – Perguntas reflexivas da entrevista.....	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS AO PROFESSOR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA	12
3	UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE	17
4	A PROBABILIDADE NOS DOCUMENTOS CURRICULARES	21
5	PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA: DEFINIÇÃO E PROBLEMAS	25
6	MÉTODO	30
7	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	32
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

Percebemos, em nosso dia a dia, diversas situações que requerem da sociedade o desenvolvimento de habilidades e pensamentos para compreender as diversas informações que são expostas. E, é durante a última etapa da Educação Básica, que os jovens devem estar preparados para desenvolver tais pensamentos e resolver certos conflitos existentes no mundo. Corroborando com a afirmação, as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio), na última etapa de escolarização, o Ensino Médio “contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional” (BRASIL, 2002, p. 111).

A abordagem da Estatística e da Probabilidade com os estudantes na Educação Básica deve possibilitar o desenvolvimento de competências para a compreensão sobre informações estatísticas. Tomar decisões sobre os eventos do nosso cotidiano envolve a relação entre as ideias estatísticas, incluindo a probabilidade.

Borba, Souza e Felisberto de Carvalho (2018) apresentam motivos para inclusão dos conteúdos relacionados com a combinatória, a estatística e a probabilidade na Educação Básica. Particularmente, com o conceito de probabilidade os autores apontam que as dificuldades de compreensão sobre probabilidade e as noções que sustentam esse conceito, como a aleatoriedade, não é exclusiva das crianças. Borba, Souza e Felisberto de Carvalho (2018) destacam ainda que um dos desafios para o ensino e aprendizagem da probabilidade na Educação Básica, versa sobre a formação dos professores da Educação Básica e o conhecimento sobre probabilidade e sua didática. Com relação a esse desafio, os autores ressaltam que há claramente a identificação de que os professores que lecionam em distintos níveis escolares, não contam com conhecimentos adequados sobre probabilidade e sua didática que os permitam desempenhar de maneira exitosa o ensino de probabilidade.

Diante desta problemática nos interessou investigar os conhecimentos dos professores de matemática que já estão em exercício em turmas do Ensino Médio. Apresentamos nossos objetivos:

Objetivo Geral:

- Investigar os conhecimentos de professores do Ensino Médio quanto a probabilidade condicional e seu ensino.

Objetivos Específicos:

- Analisar os conhecimentos de professores de Matemática do Ensino Médio na resolução de situações problemas de probabilidade condicional;
- Analisar os conhecimentos dos professores de matemática sobre o ensino de probabilidade condicional.

Desta forma, o presente trabalho apresenta, no segundo capítulo, uma breve síntese de três teorias que nos dão suporte para investigar os referidos conhecimentos, tanto do ponto de vista do conteúdo como do ensino deste conteúdo.

No terceiro capítulo, intitulado “Uma breve discussão sobre o Ensino e Aprendizagem de Probabilidade” traremos alguns estudos que falam sobre o Ensino de Probabilidade e algumas dificuldades relacionadas ao Ensino e Aprendizagem de Probabilidade Condicional.

No quarto capítulo, iremos expor como os conteúdos da probabilidade são abordados nos principais documentos curriculares a nível nacional e estadual e quais são as competências desejadas de acordo com estes documentos.

No quinto capítulo, trataremos da Probabilidade Condicional e de Eventos Independentes, trazendo a definição matemática desses conceitos e alguns exemplos de problemas envolvendo a probabilidade condicional e a independência de eventos.

O objetivo do sexto capítulo é apresentar a Metodologia, descrevendo os participantes, o local onde foi realizada a aplicação, quais instrumentos que foram utilizados para construção de dados da pesquisa, os procedimentos de construção e análise dos dados.

No sétimo capítulo, iremos discutir sobre a análise dos dados obtidos que foram observados, esboçando cada etapa de nossa pesquisa.

No último capítulo realizaremos reflexões acerca das análises realizadas, entendendo as possíveis considerações sobre esta pesquisa bem como, sua importância da Probabilidade, proporcionando possíveis questionamentos para pesquisas futuras de acordo com os resultados obtidos.

2 CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS AO PROFESSOR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Como o nosso estudo investiga os conhecimentos dos professores em exercício sobre um campo específico da matemática, que é o da probabilidade, achamos pertinente incluir uma breve síntese de três teorias que nos dão suporte para investigar os referidos conhecimentos, tanto do ponto de vista do conteúdo como do ensino deste conteúdo. Vale salientar que a apresentação destas teorias tem como objetivo situar o leitor em uma discussão inicial, não utilizaremos as categorias explicitamente em nosso estudo. Entretanto, o interesse de investigar o conhecimento do professor é respaldado pelas noções teóricas que apresentaremos a seguir.

Os conhecimentos necessários para a docência vão além dos conteúdos vistos ao longo da formação acadêmica, os conhecimentos adquiridos na licenciatura nem sempre são suficientes para o professor ter de forma completa competências necessárias para ensinar. Ensinar matemática requer mais que o domínio do conteúdo.

Por vezes, a matemática é vista pelos alunos da educação básica como uma ciência e/ou uma disciplina desconectada da realidade, isso se dá pela maneira como ela é ensinada, e consequentemente isso reflete na formação do professor. Se o professor tiver uma formação mecanizada, provavelmente ele ensinará também de uma forma mecanizada. D'Ambrosio [s.a. p.1] diz que: "...há um risco de desaparecimento da Matemática, como vem sendo praticada atualmente no currículo, como disciplina autônoma dos sistemas escolares, pois ela se mostra, na sua maior parte, obsoleta, inútil e desinteressante".

Várias pesquisas dedicam atenção à formação do professor (SHULMAN, 1986 e 1987; BALL, THAMES E PHELPS, 2008; GODINO E PINO-FAN, 2015). Esses trabalhos sinalizam para o fato de que a formação do professor na academia não faz com que ele tenha as habilidades necessárias para ensinar.

Um dos primeiros a estudar sobre este assunto foi Shulman (1986). Ele traz em seu estudo três categorias para o conhecimento do professor: o conhecimento do conteúdo, que se refere ao conteúdo da matéria que o professor leciona, o conhecimento pedagógico do conteúdo é o conhecimento do conteúdo para o ensino, são as maneiras que torna o assunto mais compreensível para os alunos e o conhecimento curricular.

Shulman (1987) amplia suas ideias e apresenta sete categoria para o conhecimento do professor, que ele chama de "categorias de base do conhecimento": 1) conhecimento do conteúdo; 2) conhecimentos gerais pedagógicos, diz respeito aos princípios e estratégias de gestão e organização da sala, que faz transcender o conteúdo; 3) conhecimento do currículo, é

um domínio de materiais e programas que servem como ferramenta de trabalho para o ensino; 4) conhecimento pedagógico do conteúdo, é uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma especial de conhecimento profissional; 5) conhecimento dos estudantes e suas características; 6) conhecimento dos contextos educativos; 7) conhecimentos dos objetivos, metas e valores educativos e suas bases filosóficas e históricas. (SHULMAN 1987)

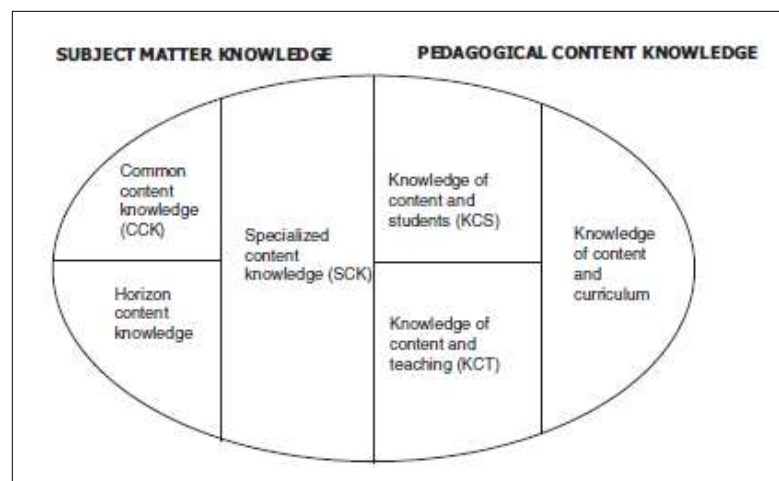
Para Shulman a categoria do conhecimento pedagógico do conteúdo adquire interesse particular pelo fato de fazer a distinção de conhecimento para ensino, Shulman (1987) diz que essa categoria de conhecimento:

Representa a mistura entre a matéria e o ensino para que você obtenha uma compreensão de como determinados temas e problemas se organizam, se representam e se adaptam aos diversos interesses e capacidades dos alunos, e se expõe para o seu ensino. O conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria que, com maior probabilidade, permite distinguir entre a compreensão do especialista em uma área do saber e a compreensão do pedagogo. (SHULMAN, 1987, p.11)

Nesta mesma perspectiva, Ball, Thames e Phelps (2008) em seu trabalho trazem alguns conhecimentos imprescindíveis do professor de matemática, eles contam com as ideias de Shulman, especificamente as noções de conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo, e propõem o modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT). Esse modelo é específico para o ensino de Matemática, e é composto por duas grandes categorias, o *Conhecimento do Conteúdo* e o *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*, e cada uma delas é formada por outras subcategorias de conhecimento.

Na figura 1 podemos ver de uma forma mais clara, os domínios do conhecimento matemático para o ensino, proposto por Ball, Thames e Phelps (2008):

Figura 1 – Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino



Fonte: BALL, THAMES e PHELPS (2008 p. 403)

O *conhecimento comum do conteúdo* (CCK) é descrito pelos autores como o conhecimento e habilidades matemáticas usados em cenários além do ensino, esse conhecimento é tal que permite resolver problemas matemáticos.

O *conhecimento especializado do conteúdo* (SCK) é segundo Ball, Thames e Phelps (2008, p. 400): “o conhecimento matemático e habilidades unicamente para ensinar”. É portanto um domínio ligado ao ensino.

O *conhecimento horizontal do conteúdo*, diz respeito a relação com as outras disciplinas e as conexões interdisciplinares.

O *conhecimento do conteúdo e estudantes* (KCS), combina o conhecimento sobre o ensino e os alunos que fazem parte desse ensino, ou seja, o conhecimento de como os alunos aprendem determinados conteúdos.

O *conhecimento do conteúdo e ensino* (KCT), combina conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre matemática, ou seja, é o resultado da integração do conteúdo matemático e do ensino desse conteúdo.

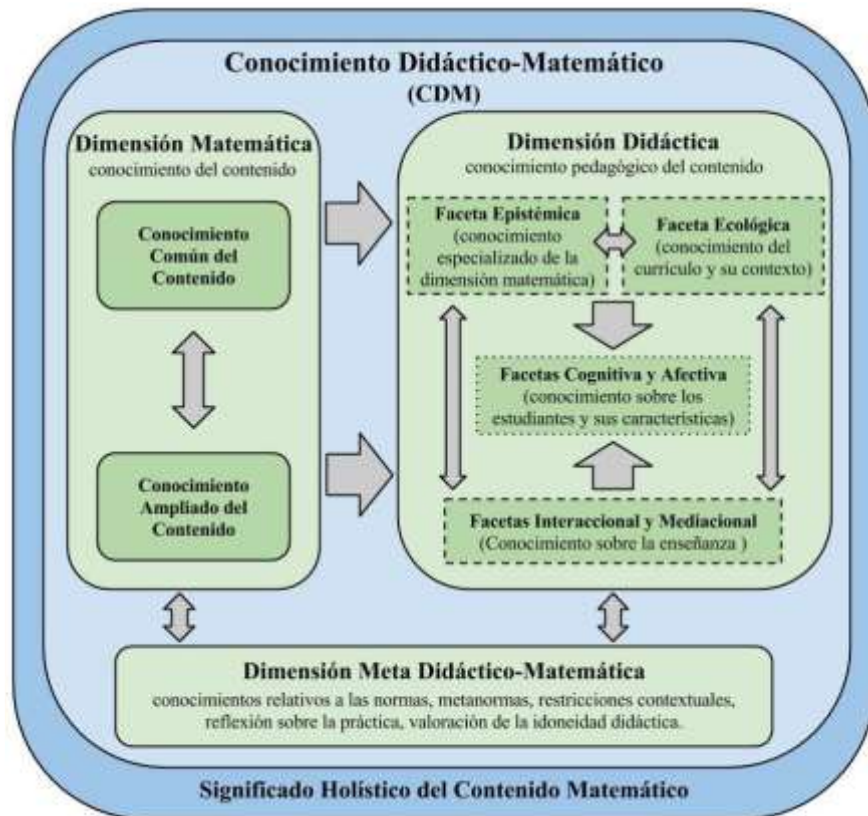
O *conhecimento do conteúdo e currículo*, é o entendimento dos programas curriculares para um determinado conteúdo.

Nessa mesma linha de pensamento, Godino e Pino-Fan (2015) buscaram em sua pesquisa identificar e descrever os elementos do conhecimento que os professores de matemática devem ter para executar com competência a sua prática e facilitar a aprendizagem dos alunos. Eles propõem em seu trabalho o modelo do Conhecimento Didático - Matemático do Professor (CDM). Felisberto de Carvalho et al (2015) diz em seu trabalho que:

O modelo do conhecimento didático – matemático do professor (CDM), subjacente à Teoria do Enfoque Onto-semiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), propõe ferramentas para discutir, identificar e classificar os conhecimentos requeridos para o ensino de matemática tornando-se útil não só em um processo de estudo em sala de aula como também em programas de formação de professores. Este modelo é uma ampliação das noções já discutidas no modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) de Ball, Thames e Phelps (2008). (FELISBERTO DE CARVALHO, 2015, p.3)

O modelo do Conhecimento Didático – Matemático que Godino e Pino-Fan (2015) propõem, caracteriza o conhecimento dos professores à partir de três dimensões, são elas: Dimensão Matemática, Dimensão Didática e a Dimensão Meta Didática – Matemática. E cada uma delas, por sua vez, é composta por outras subcategorias de conhecimento. A figura 2 mostra com clareza o modelo de conhecimento proposto por Godino e Pino-Fan (2015):

Figura 2 - Diagrama das Dimensões do Conhecimento Didático – Matemático



Fonte: GODINO E PINO-FAN (2015, p. 98)

A Dimensão Didática é formada por duas subcategorias, a do *conhecimento comum do conteúdo*, que refere-se ao conhecimento de um conteúdo específico de matemática, trata-se de um conhecimento que é compartilhado entre professores e alunos, e o *conhecimento expandido do conteúdo*, é o conhecimento que fornece ao professor as bases matemáticas necessárias para levantar novos desafios matemáticos em sala de aula, e que liga o objeto matemático em estudo com outras noções matemáticas (GODINO E PINO-FAN 2015).

A Dimensão Didática trata-se do conhecimento pedagógico do conteúdo e é constituída pelas seguintes facetas:

A *faceta epistêmica*, que inclui o conhecimento especializado da dimensão matemática, de modo que, o professor deve ser capaz de apresentar várias representações de um mesmo objeto matemático, resolver problemas através de processos diferentes e fazer ligações entre os conteúdos matemáticos diferentes.

A *faceta cognitiva e afetiva* refere-se ao conhecimento que o professor de matemática deve ter sobre os estudantes e suas características, referente a maneira de pensar, aprender, agir e sentir. O aspecto cognitivo é o conhecimento do progresso dos significados matemáticos pessoais alcançados pelos estudantes, o grau de dificuldade na aproximação destes significados

aos significados pretendidos. O aspecto afetivo é o conhecimento que permite entender a distribuição temporal dos estados afetivos de cada aluno em relação com os objetos matemáticos e com o processo de aprendizagem.

A *faceta interacional* segundo Godino e Pino-Fan (2015, p. 101): “... envolve o conhecimento necessário para antecipar, implementar e avaliar sequências de interações, entre os agentes que participam no processo de ensino e aprendizagem...”. Essas interações são entre professor e alunos e também entre os alunos (aluno - aluno).

A *faceta mediacional* diz respeito ao conhecimento que o professor deve ter no uso adequado dos recursos materiais e tecnológicos necessários para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

A *faceta ecológica* por sua vez é o conhecimento do currículo da educação matemática, sua relação com outros currículos e o conhecimento do contexto.

Por fim, a Dimensão Meta Didática – Matemática aborda o conhecimento das normas, meta normas, restrições contextuais, reflexões sobre a prática e a valorização da competência de ensino.

Assim, esses três modelos trazem os conhecimentos necessários para a docência, e em especial os trabalhos de Ball (2008) e Godino (2015) que falam especificamente dos conhecimentos do professor de matemática. Os trabalhos chamam atenção para o fato de que ensinar matemática não se resume a saber todos os conteúdos matemáticos, mas sim saber fazer conexões com outros conteúdos ou até mesmo outras disciplinas, é importante o professor conhecer sua sala de aula, conhecer o contexto de seus alunos e ter uma boa relação com os mesmos. Ensinar requer mais que conhecimento do conteúdo.

3 UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE

Lopes (2011) defende que o professor não chegue em sala de aula logo com as definições, os conceitos formais e as fórmulas de probabilidade, mas que faça o aluno adquirir esses conhecimentos através de experimentos, simulações e questões problemas onde o aluno pensa nos possíveis resultados sem o uso de fórmula, pelo menos de início. Lopes (2011) diz que:

A associação do jogo com a resolução de problemas torna as aulas mais atraentes e participativas, os alunos tornam-se ativos na construção de seu próprio conhecimento. O que buscamos é o desenvolvimento do raciocínio dedutivo do aluno, e não a memorização. A memorização pode ser temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio e a apreensão o conhecimento são para toda vida. (LOPES, 2011, p. 626)

Nesta mesma perspectiva Rezende, Lopes e Teodoro (2011) relatam em seu trabalho uma nova proposta para o ensino de probabilidade, utilizando um jogo de dados (inspirado em Game of Kasje), associado à resolução de problemas. Além disso, os autores buscaram propor que o uso das fórmulas só fosse feito no fim das atividades. Essa proposta de ensino foi aplicada por três professoras em quatro turmas do segundo ano do Ensino Médio, no terceiro bimestre de 2008, em uma escola pública de uma pequena cidade do noroeste paulista. Os participantes desta investigação foram 103 alunos, dispostos em duas turmas no período da noite, uma no período da manhã e outra no período da tarde. Primeiramente foi elaborado um questionário com 12 problemas que envolviam os conceitos básicos de probabilidade. O questionário foi aplicado antes das professoras abordarem o assunto na sala de aula, como sendo um pré-teste, com o intuito de verificar os conhecimentos prévios dos alunos, em relação aos problemas de probabilidade. Em seguida as professoras iniciaram as aulas sobre probabilidade, com a realização dos jogos, de forma que a cada rodada, as professoras levantavam alguns questionamentos. Ao finalizar as aulas aplicaram novamente o mesmo questionário, como sendo um pós-teste. Foi constatado que com relação ao pré-teste e pós-teste nas quatro turmas, na grande maioria das questões os acertos aumentaram no pós-teste, ou seja, após as aulas serem sistematizadas. Os resultados indicam que a utilização dessa proposta de ensino pode favorecer a aprendizagem e torna as aulas mais prazerosas e participativas para os alunos. Estes se tornam ativos no desenvolvimento de seu próprio conhecimento.

Realizar atividades matemáticas nas salas de aula requer do professor a maturidade diante das estratégias de ensino, bem como o domínio do conteúdo ministrado.

Neste sentido, algumas pesquisas (PIETROPAOLO et al 2015; FELISBERTO DE CARVALHO, 2015) tem apontado dificuldades e/ou lacunas que licenciandos e professores em matemática apresentam em relação aos conhecimentos probabilístico.

Pietropaolo et al. (2015) realizaram um estudo que teve a finalidade de investigar os conhecimentos de um grupo de professores de Matemática para ensinar probabilidade nos anos finais do ensino fundamental e as concepções desses professores sobre ensino. Esta investigação foi realizada no âmbito do Observatório da Educação – projeto de formação e pesquisa da UNIAN/Capes. Para obter os dados Pietropaolo et al. (2015) realizaram questionários e entrevistas com os professores participantes da pesquisa. Os resultados mostraram uma incerteza em relação ao domínio de conhecimentos relativos a probabilidade. Os autores sugerem que aconteçam discussões nos cursos de formação inicial e/ou continuada, sobre a relevância das noções de probabilidades, das dificuldades que os alunos do ensino básico apresentam e sobre importância do seu estudo em todas as etapas da escolaridade.

Em relação a probabilidade condicional, este conceito traz uma interpretação subjetiva dos dados, nos tratamentos *à priori* e *à posteriori*, e isso pode dificultar a aprendizagem do aluno. Fernandes e Fernandes (2010) buscaram em seu trabalho analisar as respostas e os raciocínios de alunos sobre a probabilidade condicional, tal como a influência que o ensino desse conceito realiza sobre essas respostas. Os autores investigaram cinco turmas do 12º ano, um total de 155 alunos. Para obter os dados foi aplicado um teste com questões que envolviam a probabilidade condicional, aplicado em dois momentos distintos, o primeiro momento foi antes do ensino do tema de probabilidade condicional, no pré-ensino, e depois de ter lecionado o tema, no pós-ensino. Os resultados desse estudo mostraram que o conceito de probabilidade condicional se mostrou um conceito difícil para estes alunos, quer antes do ensino do conceito quanto depois. Desse modo o ensino do conceito em sala de aula de nada colaborou para que o número de acertos aumentasse no pós-ensino, com isso Fernandes e Fernandes (2010) afirmam que:

Por um lado, o facto do ensino da probabilidade condicionada não se ter repercutido num melhor desempenho dos alunos constitui um resultado problemático do presente estudo e, por outro lado, o facto de Gras e Totohasina (1995) considerarem difícil o ensino dos conceitos de probabilidade condicionada e independência mostram a importância de estudar como decorreu o ensino deste conceito na sala de aula, tendo em vista descobrir razões que expliquem tão baixo impacto do ensino nas suas aprendizagens. (FERNANDES E FERNANDES, 2010, p. 328)

Felisberto de Carvalho (2015) investigou um grupo de alunos de um curso de matemática-licenciatura, que participavam da disciplina de Estatística e Probabilidade. Para

isso o autor aplicou um jogo chamado *jogo das três fichas*, o jogo foi sistematizado com base no Paradoxo das Caixas de Bertrand, este jogo tinha como objetivo aflorar nos professores alguns conhecimentos matemáticos e didáticos sobre a probabilidade condicional. Ao investigar esses estudantes, Felisberto de Carvalho (2015) percebeu lacunas nos conhecimentos comum e especializado de probabilidade condicional. Estes resultados são motivo de preocupação, pois mostra que esses licenciandos tenderão a falhar no ensino de probabilidade. Para que isto não ocorra, Felisberto de Carvalho (2015) defende que:

[...] os licenciandos devem na sua formação inicial entrar em contato com atividades que mobilizem e avancem os conhecimentos necessários para os processos de construção do conceito de probabilidade. Devem dominar os diferentes significados de probabilidade, da probabilidade condicional e das noções que sustentam este conhecimento. (FELISBERTO DE CARVALHO, 2015, p. 195)

Figueiredo (2000) em sua pesquisa de mestrado com estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e Ciências da Computação, objetivou introduzir o conceito de probabilidade condicional, com estes participantes. Os dados foram obtidos por meio de uma sequência de ensino levando em consideração os princípios de Engenharia Didática. Os resultados apontaram que a maioria dos alunos diante de questões que envolvam a Probabilidade Condicional os estudantes diferenciavam esta da Probabilidade da Interseção de Eventos e o Cálculo da $P(A | B)$ do de $P(B | A)$, desde que se apresente nas perguntas em linguagem natural, porém quando as questões eram apresentadas na linguagem simbólica, muitos estudantes mostraram dificuldades em resolvê-las.

Falk, 1996; Díaz e De la fuente 2005; Estrada, Díaz e De la fuente, 2006, assim como algumas pesquisas recentes em probabilidade condicional, mostram a existência de vieses de raciocínio e erros de compreensão e aplicação desse conceito.

Estrada, Díaz e De la fuente (2006) em um estudo feito com estudantes de Matemática e de Psicologia indicam que uma das dificuldades destes estudantes é discriminar adequadamente as duas direções da probabilidade condicional $P(A | B)$ e $P(B | A)$, o que Falk (1986) denomina como *falácia da condicional transposta*, ibidem (1986) relata que esta confusão na ordem é muito comum entre estudantes e profissionais em todos os níveis, e ocorre frequentemente em contextos médicos.

No entanto é preciso ter atenção, pois este erro pode acarretar em graves consequências, como no exemplo trazido por Batanero et al. (2012 p. 8) “a confusão entre a probabilidade de que uma criança afetada com síndrome de Down dê uma amniocentesis pré-natal positiva, que

é alta e o fato de que, sendo o diagnóstico positivo a criança realmente tenha síndrome de Down, que é muito menor”. Na mesma linha Díaz e De la fuente (2005) afirmam que:

Essa mesma confusão também foi encontrada na interpretação de tabelas de contingência por parte dos estudantes onde, segundo Batanero et al. (1996) em torno de 20% dos alunos do curso pré-universitário em seu trabalho confundem “Porcentagens de fumantes que contraem câncer de pulmão” com “porcentagens de pessoas com câncer de pulmão que fumam”. (Díaz e De la fuente, 2005, p. 6)

Outra dificuldade exposta no estudo feito por Estrada, Díaz e De la fuente (2006), envolvendo futuros professores e estudantes de psicologia, é a resolução de problemas de probabilidade condicional quando a sequência temporal dos eventos não coincide com a ordem dada no condicionamento, ou seja quando o eixo temporal é invertido. Um problema utilizado por Falk (1986) nos mostra como alguns estudantes e professores tem dificuldade quando o eixo do tempo é invertido:

Uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas. Nós extraímos cegamente duas bolas da urna, uma após a outra, sem reposição.

- 1) Qual é a probabilidade de extrair uma bola preta em segundo lugar, tendo extraído uma bola preta em primeiro lugar? $P(N2 | N1)$
- 2) Qual é a probabilidade de extrair uma bola preta em primeiro lugar tendo extraído uma bola preta em segundo lugar? $P(N1 | N2)$ (FALK, 1986 p. 292).

Na primeira questão os alunos de Falk (1986) não tiveram dificuldade em resolver o problema, pois os eventos seguem uma ordem temporal, entretanto para o segundo problema muitos disseram não encontrar a solução, ou que a segunda extração não poderia influenciar na primeira, para Díaz e De la fuente (2005):

Este tipo de resposta recusando-se a considerar a evidência que ocorreu após o evento que julgamos, é conhecido como *a falácia do eixo temporal* e consiste em assumir que o evento determinante na probabilidade condicional deve preceder temporariamente o condicionado. (DÍAZ E DE LA FUENTE, 2005, p. 5)

Neste exemplo utilizado por Falk (1986) o resultado da segunda extração depende do resultado da primeira extração, o que não acontece ao contrário, todavia conhecer o resultado da segunda extração afeta o resultado da primeira, pois o espaço amostral irá ter uma redução, já que temos conhecimento de que uma bola preta já foi retirada em segundo lugar, com isso a probabilidade de sair uma bola preta na primeira extração passa a ser de $1/3$.

4 A PROBABILIDADE NOS DOCUMENTOS CURRICULARES

A fim de saber as recomendações do MEC para o Ensino de Probabilidade, tanto no Ensino Fundamental como também no Ensino Médio, fizemos uma busca nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (2002) e também na Base Nacional Comum Curricular (2018), em seguida concluímos com os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), (PCN) do Ensino Fundamental, os conteúdos são organizados em blocos, dentre os blocos encontra-se o de Tratamento da Informação, integram este bloco os estudos relacionados a Probabilidade, Estatística e Contagem. O PCN destaca a necessidade de trabalhar esses conteúdos já no Ensino Fundamental para atender à demanda social. No tocante à probabilidade:

a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p. 52)

No 3º ciclo do ensino fundamental (6º e 7º anos), os conceitos e procedimentos esperados pelos alunos a respeito à Probabilidade são, segundo Brasil (1998, p. 74-75):

- Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.
- Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão.

No 4º ciclo do ensino fundamental (8º e 9º anos), os conceitos e procedimentos esperados pelos alunos a respeito à Probabilidade são, para Brasil (1998, p. 90):

- Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

Os PCN (1998) destacam a importância das representações como da tabela de dupla entrada e o diagrama de árvore para auxiliar os alunos na construção do espaço amostral.

Os PCN do Ensino Médio (2002) dividem os seus conteúdos em três eixos, entre eles encontramos o eixo Análise de Dados, que aborda três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade, esse eixo deve além da descrição e representação de dados, atingir a investigação sobre os dados e a tomada de decisões, com isso:

A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente. (BRASIL, 2002, p. 126)

Os PCN do Ensino Médio, para o ensino de probabilidade, indicam que os conteúdos desta unidade temática devem ser vistos apenas no 3º ano, de uma maneira mais geral os objetivos são:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
 - Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas de conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
 - Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.
- (BRASIL, 2002, p. 127-128)

O discurso referente ao ensino de Matemática, no PCN do Ensino Médio, deixa claro a importância dos professores trabalharem com seus alunos a “Análise de Dados”, devido à sua aplicação no mundo atual, no entanto esse documento não traz subsídios relativos aos possíveis conteúdos e nem sugestões de como trabalhar, além de trazer os objetivos de uma maneira superficial.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC, para o Ensino Fundamental, elaborada pelo MEC e homologada em 2018, traz os conteúdos divididos em unidades temáticas, a incerteza e o tratamento de dados são abordados na unidade temática Probabilidade e Estatística.

A BNCC (2018) propõe o estudo de probabilidade no Ensino Fundamental, e defende a inserção da probabilidade desde os anos iniciais, e que nesta etapa o objetivo é possibilitar o entendimento que nem todos os fenômenos são determinísticos, para isso Brasil (2018) diz que:

o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nesta fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. (BRASIL, 2018, p.272)

Nos anos finais do Ensino Fundamental o estudo de probabilidade deve ser ampliado e aprofundado, de maneira que, os alunos façam simulações e experimentos para comparar com os resultados encontrados com a probabilidade teórica. (BRASIL, 2018)

A BNCC (2018) do Ensino Fundamental traz os objetos de conhecimento e habilidades bem organizados, indicando os objetos de conhecimento e as habilidades para cada turma, orientando os professores como abordar os conteúdos de probabilidade em cada ano do Ensino Fundamental.

Destacamos as orientações da BNCC para o 9º ano do Ensino Fundamental onde aparece o conceito de eventos independentes, para Brasil (2018, p. 316) os objetos de conhecimento para o 9º ano deve ser: Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes. E as habilidades para este objeto de conhecimento Ibidem (2018, p. 317) devem ser: Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência nos dois casos.

Outro documento que deverá orientar professores para o conteúdo a ser desenvolvido no Ensino Fundamental e Médio são os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012). Nele é incluído o bloco de Tratamento da Informação, nesse bloco são propostos conteúdos de estatística, probabilidade e combinatória.

Para que o cidadão interprete as informações e dados da realidade cotidiana, é importante que em sala de aula o professor não trabalhe apenas com construção de gráficos e tabelas, é necessário que haja: formulações de questões que envolvam a obtenção de dados; coleta, organização e apresentação de informações; observação e interpretação de fenômenos. (PERNAMBUCO, 2012)

Do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, Pernambuco (2012, p. 98) diz que:

A construção da ideia de probabilidade deve apoiar-se em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e realizar simulações. Dessa maneira, em etapas posteriores, o estudante poderá estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento.

Vamos destacar alguns objetivos do 6º ao 9º ano, em relação ao ensino de probabilidade, trazidos por Pernambuco (2012):

- Identificar situações do cotidiano dos estudantes nas quais se emprega a probabilidade.
- Discutir intuitivamente probabilidade, utilizando palavras como certo, provável, pouco provável, igualmente provável e impossível.
- Identificar situações do cotidiano dos estudantes nas quais a probabilidade é empregada.
- Representar a probabilidade de ocorrência de um evento por meio de uma fração ou de uma porcentagem.

- Descrever com precisão a probabilidade de ocorrer um evento usando números ou palavras.

Para o Ensino Médio, Pernambuco (2012, p. 126) evidencia que:

A ideia de probabilidade deve ser ampliada durante o Ensino Médio, de forma que o estudante, ao fim desta etapa, seja capaz de estabelecer o modelo matemático que permite determinar a probabilidade de ocorrência de um evento. O conceito pode ser ampliado também para situações em que seja necessário identificar a probabilidade da união e da interseção de eventos, os eventos disjuntos e o conceito de independência de eventos.

Para o 10º ao 12º ano do Ensino Médio, Pernambuco (2012) traz os seguintes objetivos para ensino de probabilidade:

- Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento, explorando representações diversas.
- Determinar a probabilidade da união de dois eventos, explorando representações diversas.
- Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento.
- Determinar a probabilidade da união de dois eventos.
- Determinar a probabilidade da união e da intersecção de eventos.
- Determinar a probabilidade condicional.

É possível perceber que todos os documentos curriculares aqui abordados, trazem de uma maneira ou outra a importância do ensino de probabilidade para a interpretação de dados em nossa sociedade, para a tomada de decisões.

Além disso, deixam claro a importância de se trabalhar em sala de aula com a realização de experimentos e simulações, para a melhor compreensão dos conteúdos. Dentre todas as propostas, pouquíssimas se referem à Probabilidade Condicional.

5 PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA: DEFINIÇÃO E PROBLEMAS

A probabilidade condicional é indispensável nas aplicações estatísticas, uma vez que, ela realiza mudanças em nosso grau de crença quando recebemos novas informações sobre eventos aleatórios. (DIAZ E DE LA FUENTE, 2005). Além disso é um importante tema da matemática que permite conexões com outras disciplinas, sendo essencial no ensino de matemática como também em outras profissões.

A probabilidade condicional é denominada pela probabilidade de acontecer o evento B tendo o conhecimento que aconteceu o evento A e podemos simbolizar por, $P(B | A)$.

Quando se fala de probabilidade condicional de ocorrer um evento B, sabendo que já ocorreu A, haverá uma restrição no espaço amostral original, pois sabe-se que o evento A já aconteceu. (JULIANELLI, DASSIE E LIMA, 2009). Sejam A e B eventos de S finito e não vazio, em que S representa o espaço amostral a probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu A é definida formalmente pela fórmula no quadro abaixo:

QUADRO 1: DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

$$P(B | A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

$$P(B | A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Por fim, dividimos o numerador e o denominador do segundo membro desta igualdade por $n(S)$, teremos:

$$P(B | A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} \text{ e daí: } P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\text{ou ainda, } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Fonte: Julianelli, Dassie e Lima (2009, p. 102)

Onde $P(B | A)$ representa a probabilidade de ocorrer B dado que ocorreu o evento A, $P(A \cap B)$ representa a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos A e B (ou a probabilidade da interseção de A com B) e a $P(A)$ que representa a probabilidade de ocorrer o evento B.

Essa definição é uma boa motivação para que o leitor tenha, também, uma visão da probabilidade condicional por meio de uma linguagem matemática. Ela pode ser ampliada para situações em que o espaço amostral não é necessariamente enumerável ou equiprovável. Entretanto, este não é o foco do nosso trabalho e essa definição supre as nossas necessidades aqui.

Sobre a definição de probabilidade condicional exposta no quadro 1, Julianelli, Dassie e Lima fazem a seguinte observação:

É claro que as questões sobre probabilidade condicional, na maioria das vezes não precisam do uso da fórmula acima determinada basta que façamos no conjunto Universo as restrições necessárias ao fato de que só estamos interessados na ocorrência do evento B, sabendo que já ocorreu o evento A. (JULIANELLI, DASSIE E LIMA, 2009, p. 102).

O que os autores ressaltam é muito importante, pois a fórmula não é o único meio de resolução, com isso é importante que os alunos do ensino básico ao resolverem problemas de probabilidade consigam utilizar este raciocínio e não fiquem detidos apenas ao uso da fórmula, para tal é fundamental que os professores não exponham de início as definições, conceitos formais e fórmulas, mas que faça os alunos adquirir esses conhecimentos através de simulações e questões problemas, como defende Lopes (2011).

Destacamos a seguir, alguns exemplos de situações problemas que envolvem a probabilidade condicional.

Figura 3 – Exemplo de situação de probabilidade condicional

Exemplo1: Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um “às vermelho” sabendo que ela é de “copas”?

Fonte: Dante (2006, p.132)

Para resolver este problema podemos utilizar a fórmula apresentada no quadro 1, assim sendo, sabemos que o baralho é composto por 52 cartas, logo, $n(S) = 52$. Estas 52 cartas são distribuídas em quatro naipes: espadas (naipe preto), paus (naipe preto), copas (naipe vermelho) e ouros (naipe vermelho). Neste caso temos:

Evento A - sair copas

Evento B - sair às vermelho

O problema pede a $P(B | A)$, isto é, a probabilidade de sair às vermelho sabendo que saiu uma carta de copas, portanto:

Evento A = {carta de copas} $\rightarrow n(A) = 13$

Evento B = {às de copas, às de ouros} = {às vermelho}

$$A \cap B = \{\text{ás de copas}\} \rightarrow n(A \cap B) = 1$$

Logo, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ e a $P(A) = \frac{13}{52}$, portanto:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}.$$

Podemos também ao invés de utilizar a fórmula, fazer a restrição conveniente do conjunto Universo. Veja:

O espaço amostral inicial é o conjunto (S) composto pelas 52 cartas do baralho, observe que o problema nos dá uma informação que irá restringir este espaço. O problema diz que a carta é de copas, assim iremos trabalhar agora ao invés de 52 cartas com 13 cartas, visto que, cada naipe tem 13 cartas e o problema já assegura que a carta retirada é de copas. O baralho tem um ás em cada naipe, logo, a probabilidade de sair um ás vermelho sabendo que ele é de copas, nesse espaço amostral é de $\frac{1}{13}$.

Figura 4 – Exemplo de situação de probabilidade condicional

Exemplo 2: Em uma urna foram colocadas 10 fichas numeradas de 1 a 10. Retirando-se ao acaso uma dessas fichas, calcule:

- a) A probabilidade de o número ser par, sabendo que ele é maior que 7.
- b) A probabilidade de o número ser maior que 7, dado que ele é par.

Julianelli, Dassie, Lima (2009, p. 102)

Resolução:

- a) Utilizando a fórmula do quadro 1 temos:

$$n(S) = 10$$

Evento A – o número é maior que 7 $\rightarrow$ Evento A = {8, 9, 10} $\rightarrow n(A) = 3$

Evento B – o número é par $\rightarrow$ Evento B = {2, 4, 6, 8, 10}

$$A \cap B = \{8, 10\} \rightarrow n(A \cap B) = 2$$

Logo, $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$ e a $P(A) = \frac{3}{10}$, portanto:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}.$$

- b) Sem fazer o uso da fórmula podemos fazer a redução conveniente do espaço amostral. Temos a informação de que o número retirado é par então o novo espaço amostral é: $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $n(S) = 5$. E o problema pede a probabilidade desse

número ser maior que 7, portanto a probabilidade desse número ser maior que 7 sabendo que ele é par será $\frac{2}{5}$.

Figura 5 – Exemplo de situação de probabilidade da interseção dos eventos

Exemplo 3: Em uma bolsa há 2 cubos vermelhos e 4 cubos azuis. Se dois cubos são selecionados ao acaso, um de cada vez, e o primeiro cubo retirado não é repostado na bolsa, calcular a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos.

Fonte: Leonardo (2013, p.286)

O problema pede a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos, isto é, devemos calcular a probabilidade de interseção dos eventos A e B, denotada por: $P(A \cap B)$. Temos:

Evento A – o primeiro cubo é vermelho $\rightarrow P(A) = \frac{2}{6}$

Evento B – o segundo cubo é vermelho. Se o primeiro cubo retirado for vermelho restará apenas um cubo vermelho entre os cinco que restaram na bolsa, com isso a $P(B | A) = \frac{1}{5}$. Agora faremos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

Um conceito relacionado com a probabilidade condicional é o de independência, Leonardo (2013) diz que:

“Dois eventos, A e B, são eventos independentes se a ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro, isto é, se: $P(B | A) = P(B)$ e $P(A | B) = P(A)$. Para a ocorrência simultânea dos dois eventos independentes, substituímos $P(A | B)$ por $P(A)$ em $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$ e temos: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.” (LEONARDO, 2013, p. 287).

A definição de independência é simples, do ponto de vista matemático, uma vez que não requer cálculos complexos. Mas do ponto de vista psicológico e didático, não é tão simples assim, principalmente quando aplicado na resolução de problemas e tomada de decisão, como também é difícil, em muitos casos, saber se dois eventos são ou não independentes. (DÍAZ E DE LAFUENTE, 2005).

Vejamos a seguir alguns problemas envolvendo o conceito de independência:

Figura 6 – Exemplo de situação de Eventos independentes

Exemplo 4: Uma moeda perfeita é lançada duas vezes. Considerando os eventos A: sair cara na 1ª jogada e B: sair cara na 2ª jogada, demonstre que os eventos A e B são independentes.

Fonte: Dante (2006, p.135)

Temos o espaço amostral $S = \{\text{cara cara, cara coroa, coroa cara, coroa coroa}\}$, com isso $n(S) = 4$.

$$\text{Evento } A = \{\text{cara cara, cara coroa}\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Evento } B = \{\text{cara cara, coroa cara}\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{\text{coroa, coroa}\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Como } P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Concluimos que os eventos A e B são independentes.

Figura 7 – Exemplo de situação de Eventos independentes

Exemplo 4: São realizados dois lançamentos sucessivos de um dado perfeito. Qual é a probabilidade de ocorrer, nos dois casos, o número 5?

Fonte: Dante (2006, p.136)

$$\text{Evento } A = \{\text{sair 5 no primeiro lançamento}\} \rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Evento } B = \{\text{sair 5 no segundo lançamento}\} \rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

O problema quer saber a probabilidade de nos dois lançamentos sair o número 5, ou seja, $P(A \cap B)$. Além disso, os eventos A e B são independentes, pois sair o número 5 no primeiro lançamento não influencia sair o número 5 no segundo lançamento. Portanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

6 MÉTODO

A presente pesquisa é de caráter qualitativo, pois a mesma, segundo Oliveira (2008, p. 68), nos permite conhecer melhor a dinâmica da realidade, estabelecendo uma reflexão significativa e crítica do que desejamos investigar. A pesquisa numa perspectiva qualitativa ao esclarecer, se configura numa devolutiva propositiva, pois

a pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como sendo um estudo detalhado de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou ator social e fenômenos da realidade. Esse procedimento visa buscar informações fidedignas para se explicar em profundidade o significado e as características de cada contexto, em que encontra cada objeto de pesquisa. (OLIVEIRA, 2008, p.68)

Esta pesquisa teve como objetivo investigar os conhecimentos de professores do Ensino Médio quanto a probabilidade condicional e seu ensino.

Buscando alcançar nossos objetivos, o processo de coleta de dados foi dividido em 3 partes. Na 1ª parte os participantes responderam a um questionário, contendo perguntas de caracterização dos participantes, para obtermos o perfil dos mesmos.

Na 2ª parte, considerando o primeiro objetivo específico que é o de analisar os conhecimentos de professores de Matemática do Ensino Médio na resolução de situações problemas de probabilidade condicional, trouxemos 3 situações problemas envolvendo probabilidade condicional, para que os participantes respondessem, de modo que, eles deveriam assinalar a alternativa considerada por eles correta, e também fazer a justificativa de cada problema, que foi registrada em áudio através de um gravador de voz. Consideramos a justificativa importante para sabermos quais as estratégias e os conhecimentos que os participantes utilizaram para responder cada questão, por ser uma pesquisa qualitativa se os participantes apenas assinalasse a alternativa, não teríamos como analisar qualitativamente os dados. Além de revelar possíveis dificuldades que os professores têm em relação ao raciocínio condicional.

Vale ressaltar que na aplicação do questionário optamos por entregar aos participantes uma questão problema de cada vez, de maneira que, eles respondiam e já faziam a justificativa. Deixamos um espaço em branco abaixo de cada questão para caso eles quisessem registrar algum cálculo ou outras informações.

Para o segundo objetivo específico que é analisar os conhecimentos dos professores de matemática sobre o ensino de probabilidade condicional optamos por fazer uma entrevista estruturada, a 3ª parte da coleta de dados, contendo três perguntas reflexivas sobre as situações

problemas vistas na 2ª etapa, para que cada participante nos falasse sobre os seus pontos de vista com relação ao ensino de probabilidade condicional.

O estudo foi realizado com seis professores de matemática do Ensino Médio, no município de Santa Cruz do Capibaribe- PE, tendo em vista que os conteúdos de probabilidade condicional são abordados geralmente de uma maneira efetiva no Ensino Médio (PERNAMBUCO, 2012). Entramos em contato com alguns professores da cidade, convidando-os para participar da pesquisa, todos os professores que fizemos contato aceitaram colaborar com nosso estudo. De acordo com a disponibilidade de cada participante marcamos um lugar e horário para a realização da coleta, vale destacar que a coleta foi feita individual, fizemos com um professor por vez, e não com todos em um mesmo momento.

As situações problemas contidas no questionário foram selecionadas e adaptadas dos estudos de Díaz e De la fuente (2005), Estrada, Díaz e De la fuente (2006) e Batanero, Contreras e Díaz (2012), estas pesquisas buscaram analisar os vieses no raciocínio condicional de estudantes de psicologia e futuros professores de matemática.

Traremos o questionário com as situações problemas e com as perguntas da entrevista no capítulo de análise e discussão dos resultados, no qual faremos uma explanação das situações problemas para a melhor compreensão do leitor.

7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos os dados obtidos e nossas considerações acerca das análises realizadas. Inicialmente mostramos o perfil dos participantes da pesquisa, em seguida trazemos os resultados das situações problemas e uma discussão sobre as justificativas dadas pelos professores. Por fim apresentamos as análises e discussões das perguntas reflexivas.

A coleta de dados foi realizada com 6 professores de matemática do Ensino Médio, que atuam em escolas do município de Santa Cruz do Capibaribe – PE, todos os participantes são graduados em Licenciatura em Matemática, dentre todos apenas 1 professor possui especialização. O ano de conclusão do curso entre os professores variou de do ano de 2010 a 2017. Dos 6 professores, 4 fizeram sua graduação em instituições públicas, os demais em instituição privada. O tempo de ensino entre os professores na rede pública variou de 1 a 13 anos, esses dados são importantes para sabermos a quanto tempo os professores estão atuando em sala de aula.

Dos 6 participantes, 5 são homens e 1 é mulher, e suas idades variam de 24 a 33 anos, fazendo a média aritmética obtemos 28,33 anos. Para não revelar os nomes dos participantes, nomeamos os mesmos com as siglas P1, P2, ..., P6.

Sobre as 3 situações problemas faremos primeiramente uma análise mais geral, em seguida detalharemos cada questão analisando as estratégias de resolução e as justificativas dadas pelos professores.

Dos 6 participantes da pesquisa, 3 deles não acertaram nenhuma das situações problemas, em porcentagem 50% dos professores erraram todas as questões. Os outros 3 professores acertaram apenas 1 questão cada, ou seja, o P3 acertou o problema 1, o P2 acertou o problema 2 e o P6 acertou o problema 3, portanto nenhum dos professores acertou mais de uma questão problema, nenhum professor apresentou nenhuma fórmula para a resolução das questões, no geral tivemos apenas 1 acerto por cada questão.

A partir de agora faremos uma análise mais detalhada das questões, fazendo uma discussão das justificativas apresentadas pelos professores, traremos questão por questão. Como já foi dito na metodologia, as questões utilizadas em nossa pesquisa foram selecionadas e adaptadas de alguns estudos sobre probabilidade condicional (ESTRADA, DÍAZ E DE LA FUENTE, 2006 E BATANERO, CONTRERAS E DÍAZ, 2012).

A questão 1, traz uma situação comum em contextos médicos, e envolve o conceito de probabilidade condicional. Queremos saber com este problema se os participantes diferenciam

adequadamente a $P(A | B)$ da $P(B | A)$, ou se eles entendem que estas probabilidades são iguais. Vejamos a questão 1 a seguir:

Figura 8 – item 1 das situações problemas do questionário

2.1. Um teste diagnóstico de câncer foi administrado a todos os residentes de uma cidade grande. Um resultado positivo no teste é indicativo de câncer e um resultado negativo é indicativo de ausência de câncer. Em qual das seguintes previsões você tem mais confiança?

- a) Prever que uma pessoa tem câncer se tiver testado positivo para o diagnóstico.
- b) Prever um resultado positivo no teste diagnóstico, se a pessoa tiver câncer.
- c) Eu tenho a mesma confiança em ambas as previsões.

Fonte: A autora (2018)

A resposta correta para esta questão é a letra b) Prever um resultado positivo no teste diagnóstico, se a pessoa tiver câncer. A probabilidade de uma pessoa ter câncer se tiver testado positivo para o diagnóstico não tem a mesma probabilidade de um resultado dar positivo se a pessoa tiver câncer.

Isto porque, um teste diagnóstico é projetado para detectar uma determinada doença, com isso a probabilidade de um doente receber um resultado positivo é muito alto e a probabilidade de uma pessoa saudável receber um resultado positivo no teste é muito pequeno, mas não impossível e o elevado número de pessoas saudáveis na população faz com que a probabilidade de estar doente se o teste tiver sido positivo, não é, em geral, muito alto. (ESTRADA, DÍAZ E DE LA FUENTE, 2006).

Ao analisar as respostas do problema 1, pudemos constatar que dentre todos os participantes, apenas 1 professor assinalou a alternativa correta, 2 professores assinalaram a letra a e 3 acham que alternativa correta é a letra c. A fala a seguir é referente a resposta e a justificativa dada pelo professor que acertou o problema:

P3: Ah, a pergunta é, qual você tem mais confiança? Então a letra b, prever um resultado positivo no teste diagnóstico, se a pessoa tiver câncer. Então, o mais confiável é esse. A letra a também poderia ser, só que é o que eu tenho mais confiança, a letra b. Eu ia colocar nos dois, só que como a pergunta é, qual tem mais confiança, até porque pode dá, qualquer teste pode dá erro né.

Em outro momento de nossa pesquisa, o P3, volta a falar da situação problema 1, e diz:

P3: No primeiro problema, é uma questão de confiança, nos métodos estatísticos. Que confiança eu tenho nos métodos utilizados?

Em sua resposta podemos perceber que o P3, nesta questão problema, conseguiu perceber e distinguir a diferença entre a $P(A | B)$ da $P(B | A)$, em suas palavras é possível

perceber que o mesmo tem o conhecimento de que todo e qualquer teste diagnóstico tem possibilidade de erros.

Para os professores que marcaram a alternativa c, que inclusive foram a maioria, deixaram claro em suas respostas que não há diferença entre as alternativas a e b, isso indica que eles não diferenciam adequadamente as duas direções da probabilidade condicional $P(A | B)$ da $P(B | A)$, este tipo de erro é denominado por Falk (1986) como falácia da condicional transposta. Vejamos a seguir as falas de dois professores que assinalaram a letra c como correta:

P4: Então, eu marco a letra c, eu tenho a mesma confiança em ambas as previsões. Porque se a pessoa tiver câncer vai ter um resultado positivo e se tiver um resultado positivo é porque tem câncer, uma coisa implica na outra, uma implicação direta, é um se somente se.

P5: Se a pessoa tiver câncer vai dar positivo e se der negativo, então quer dizer que ela não tem câncer, é um indicativo que ela não tem câncer. Então se ela tiver câncer, logo eu vou prever que vai dar um resultado positivo. É bem confuso mesmo, mas eu acho que tenho a mesma confiança nos dois.

Além disso, os professores descartam a possibilidade de um evento pouco provável acontecer, o resultado falso positivo, que é uma característica da aleatoriedade. Dizer que um evento é pouco provável não impede que ele aconteça.

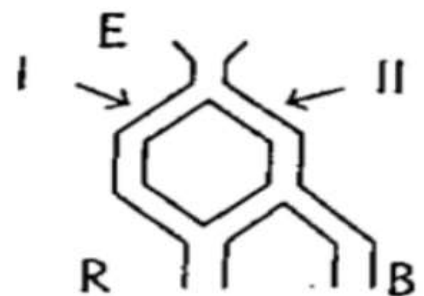
Diante disso, a resposta mais frequente é a letra c, ter a mesma confiança em ambas as previsões, indicando a falácia da condicional transposta. Estes resultados estão consoante aos obtidos por Estrada, Díaz e De la fuente (2006) e Batanero, Contreras e Díaz (2012).

A questão 2, exposta na figura 7, é um problema também de probabilidade condicional, onde o evento sair por R é o evento condicionante, e quer saber a probabilidade de que esta bola tenha passado por o caminho I.

Figura 9 – item 2 das situações problemas do questionário

2.2. Uma bola é liberada em E. Se sair por R, qual é a probabilidade de que ela tenha passado pelo canal I?

- a) 0,50
- b) 0,66
- c) 0,33
- d) Não é possível calcular



Fonte: A autora (2018)

Essa questão requer atenção devido o evento condicionante acontecer depois da probabilidade avaliada, isto é, a sequência temporal dos eventos nesta situação não coincide com a ordem dado no condicionamento, sair por R é um acontecimento posterior ao evento passar por I.

No entanto, para resolvermos esta questão não é necessário o uso de fórmulas ou de cálculos grandiosos, se observarmos, sair por R é um evento que já aconteceu, buscamos a probabilidade dessa bola ter vindo por I, é importante não descartar as possibilidades de sair por B. Observando o desenho quando a bola é liberada em E, ela tem dois caminhos I e II, se a bola passar pelo canal II ela pode sair em R ou B, se a bola passar pelo canal I ela só pode cair em R, então temos as possibilidades (I,R), (II,R), (II,B), com as respectivas probabilidades: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$; sabendo que caiu em R a probabilidade da bola ter vindo por I é o dobro da probabilidade de ter vindo por II, assim $P(I | R) = \frac{2}{3} = 0,66$, logo a resposta correta é a letra b.

Entre os participantes apenas o P2 marcou a letra c, apesar de ter acertado a questão, sua justificativa nos deixa indícios de que ele se refere a probabilidade de sair por R, uma probabilidade simples, veja abaixo:

P2: sessenta e seis por cento. Bom, não acho tão necessário. Ela pode ir pelo caminho um, pelo caminho dois, então eu tenho duas chances pelo caminho dois e apenas uma chance pra o caminho um.

Ele verifica os caminhos que a bola pode passar, e evidencia de quantas maneiras a bola pode sair por R, fazendo assim o cálculo da probabilidade da bola sair por R, onde na verdade queríamos saber a probabilidade da bola descer por I sabendo que ela saiu em R.

Todos os outros professores marcaram erroneamente a alternativa a. Em suas justificativas os professores não levam em consideração a saída da bola por B, a seguir traremos algumas justificativas:

P1: Pode ser uma pegadinha, mas pra mim é cinquenta por cento de chance. É cinquenta por cento. A justificativa seria que, seria praticamente impossível ela entrar por E passar pelo canal II e voltar, sair pelo canal B, não contaria como alternativa. Então ela vai entrar por I, uma chance, vai entrar por aqui canal II, e sair por R mais uma outra chance, negar a situação de sair pelo canal B. Cinquenta por cento.

P5: Ela tem duas formas de sair, ela tem três caminhos aqui, ela pode, se ela sair por R, ou ela passa pelo caminho um ou ela passa pelo caminho dois, cinquenta por cento. Porque para ela sair por R, ela só tem duas possibilidades, ou ela foi pelo caminho um, ou ela foi pelo caminho dois, porque eu tenho que anular esse B, porque ela obrigatoriamente ela saiu por R.

P6: Assim, só tem dois caminhos, direita ou esquerda, um ou dois, então a probabilidade é cinquenta por cento.

Na fala do P3 ele entende que deve levar em consideração a possibilidade de sair pelo buraco B, porém não consegue concluir seu pensamento.

P3: Uma bola é liberada em E, então ela tem cinquenta por cento para o caminho I e cinquenta por cento para o caminho II, ou o lado I ou o lado II, então $\frac{1}{2}$ pra cada um, se ela cair em R. Se ela vir pelo canal II, quando chegar aqui ela tem $\frac{1}{2}$ para R e $\frac{1}{2}$ pra B, que vai dar $\frac{1}{2}$ vezes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Só que de passar por R vai ser 1 menos $\frac{1}{4}$ é o complementar, mas não tem a resposta então. Ou é $\frac{1}{2}$ ou não tem como calcular. Mas eu vou arriscar $\frac{1}{2}$ então.

Entre os participantes que erraram a questão 2, apenas 1 fez algum registro escrito no espaço destinado para resolução do problema, o P4 faz a resolução por meio da árvore de possibilidades, para identificar o espaço amostral, e acerta o diagrama, no entanto quando vai calcular a probabilidade, assim como os demais não considera a saída por B, como podemos observar na figura 8.

Figura 10 – Protocolo de Resolução do professor 4

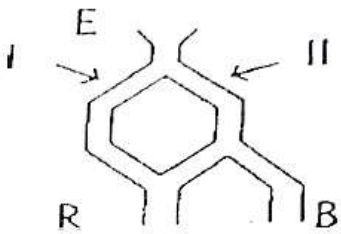
2.2. Uma bola é liberada em E. Se sair por R, qual é a probabilidade de que ela tenha passado pelo canal I?

☒ a) 0,50

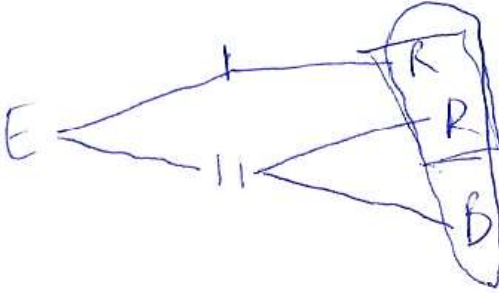
b) 0,66

c) 0,33

d) Não é possível calcular



2 I e II



$$\frac{1}{2} = 0,50$$

Fonte: A autora (2018)

A sequência temporal dificulta a identificação correta do espaço amostral, fazendo com a maioria das pessoas achem que o correto é 0,50, por não considerar as bolas que caem no buraco B. (ESTRADA, DÍAZ E DE LA FUENTE, 2006). Esta confusão na ordem temporal dos eventos é denominada por Falk (1986) como falácia do eixo temporal.

Os resultados deste item também se assemelham com os resultados obtidos por Estrada, Díaz e De la fuente (2006) e Batanero, Contreras e Díaz (2012), onde a maior parte dos participantes marcam a letra a por não considerar as bolas que saem por B.

Por fim analisamos a situação problema 3, que envolve um conceito importante na probabilidade condicional, o conceito de independência, e quer saber se os eventos A e B são independentes. Na figura 11 trazemos a questão 3:

Figura 11 – item 3 das situações problemas do questionário

2.3. Uma carta é retirada aleatoriamente de um baralho comum (composto por 52 cartas, distribuídos em quatro naipes: espadas, paus, copas e ouro. Cada naipe possui 13 cartas, numeradas de 2 a 10, além de um Às, um Valete, uma Rainha e um Rei).

Considere os seguintes eventos (sucessos):

A = se retira uma carta de ouros

B = se retira um rei

Os eventos A e B são independentes?

- a) Não são independentes, porque no baralho há um rei de ouro.
- b) Somente se tirarmos primeiro uma carta para ver se é rei e depois devolver ao baralho, em seguida tirarmos a segunda carta para ver se é ouro.
- c) Sim, porque $P(\text{rei de ouro}) = P(\text{rei}) \times P(\text{ouro})$
- d) Não, porque $P(\text{rei} | \text{ouro}) \neq P(\text{rei})$

Fonte: A autora (2018)

Dois eventos A e B são independentes quando a ocorrência de um não depende da ocorrência do outro, de uma maneira mais formal, dado dois eventos A e B, a probabilidade da interseção desses eventos é igual ao produto das probabilidades de A e B, segue a fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Para resolvermos esta questão faremos uso da definição formal de eventos independentes citada anteriormente, para isso basta calcular a $P(A \cap B)$ (probabilidade da

interseção dos eventos A e B) que é $P(\text{rei de ouro})$ igual a $\frac{1}{52}$, a $P(\text{ouro}) = \frac{1}{4}$ e a $P(\text{rei}) = \frac{1}{13}$, então $\frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13}$, portanto os eventos A e B são independentes, a alternativa correta é a letra c.

Ao analisar as respostas dos participantes vimos que apenas 1 professor acertou esta questão marcando a alternativa c, todos os demais erraram, dos que erraram, 2 professores marcaram a letra a, 1 marcou a letra b, 1 escolheu a alternativa d e 1 professor optou por deixar em branco. Nenhum dos professores falou sobre a definição formal de eventos independentes usando a regra do produto. Trazemos abaixo a justificativa dada pelo professor que acertou esta questão, o mesmo não mostrou clareza em sua explicação, ele não faz nenhuma relação com a definição formal que está explícita na alternativa assinalada:

P6: A partir do momento que a gente tira uma carta e o primeiro evento é uma carta de ouro, consequentemente ela pode ser um rei, por isso eu acho que A e B são eventos independentes, porque essa carta pode ser de ouro.

A resposta não é clara, porque não é só o fato de que a carta pode ser um rei, dado que foi de ouro, mas sim, se saber que de ouro, afeta ou não a probabilidade de ser um rei.

Abaixo temos a justificativa dada por um dos professores que marcou a letra a como resposta correta, o professor 1 afirma que:

P1: Bom, ele tá dizendo aqui né, num baralho comum considere os seguintes eventos, primeiro foi retirado uma carta de ouros, então vão ser 13 chances de sair cartas de ouro, inclusive 1 rei, então. Se eles são independentes? Não, porque vai acontecer uma interseção aí, a carta além de ser rei pode ser de ouros, então, eles não são independentes, no caso, letra a.

O professor que marcou a letra b, justifica a escolha dessa alternativa da seguinte maneira:

P5: Porque tem um rei de ouro né, então, eles só vão ser independentes se eu tirar uma carta pra ver se ele é o de rei de ouro, eu acho que é isso.

Sobre a situação problema 3 e suas alternativas de resposta Sánchez (1996, apud Estrada, Díaz e De la fuente, 2006, p. 3) diz que:

A resposta a) indica a confusão entre eventos independentes e eventos mutuamente exclusivos, o que é uma ideia incorreta, porque precisamente dois eventos excludentes são dependentes, pois um deles não pode ocorrer quando o outro ocorre. A resposta b) indica a crença incorreta de que dois eventos em tempos simultâneos não podem ser independentes.

O professor que marcou a letra d, em sua fala, nos deu a entender que marcou só por marcar, pois na verdade não sabia ao certo o que são eventos independentes, ao ler a questão veja o que o P3 falou:

P3: O que são eventos independentes? Um não depende. Não precisa que um ocorra pra que o outro aconteça, né isso? Eu tenho que lembrar o que são eventos independentes.

Depois disso o P3 apenas marcou a letra d. Pedi para o mesmo justificar sua resposta e ele disse:

P3: Não, é porque eu esqueci o que são independentes, independentes é a mesma coisa que disjuntos? É porque as vezes eu posso usar outra palavra, em vez de independentes, entendesse?

O outro professor não lembrava o que são eventos independentes e optou por deixar em branco, vejamos o que ele falou ao ler a questão 3:

P2: Eu lá me lembro mais. Se eu te dizer que eu não saberei responder essa pergunta agora? Posso deixar em branco? Não lembro da fórmula, nem do conceito de independência. É, vou deixar em branco, e prefiro depois pesquisar.

As respostas nos indicam que temos professores há anos em sala de aula, que mostram não saber assuntos que os mesmos ensinam no Ensino Médio, estes participantes sentem dificuldades na visualização do espaço amostral, na identificação do fator condicionante na probabilidade condicional, e alguns deles não conseguem lembrar o conceito e/ou a fórmula de probabilidade condicional que leva também a definição formal de independência de eventos.

A partir de agora iremos fazer as análises da terceira parte desta pesquisa, que se deu através de uma entrevista estruturada contendo 3 perguntas reflexivas, descritas na figura 12, sobre as situações problemas que os participantes tinham acabado de resolver.

Figura 12 – perguntas reflexivas da entrevista

3. Reflexões

3.1 Quais os conceitos que você percebe nos três problemas?

3.2 Você aplicaria as referidas situações em alguma turma sua? Em qual? Por que? Incluiria algum outro ano escolar?

3.3 Em sua opinião, quais as dificuldades que os estudantes podem encontrar na vivência dessas atividades?

Fonte: A autora (2018)

Para sabermos os conhecimentos dos professores sobre o ensino de probabilidade condicional, iniciamos nossa entrevista perguntando-os sobre os conceitos existentes nas três situações problemas.

Foi possível perceber que todos os professores percebem a probabilidade na 2ª situação, alguns dizem que a 1ª situação envolveu lógica matemática, iremos destacar a seguir as respostas de alguns professores:

P1: Uma primeira, na primeira situação, a do teste, acredito que mais uma questão de lógica matemática. A segunda envolveu probabilidade. E a terceira, probabilidade também.

P3: No primeiro problema, é a questão de confiança né, nos métodos estatísticos. Que confiança eu tenho nos métodos que são utilizados? O segundo é a questão de probabilidade, probabilidade de acontecer. E o terceiro também é uma questão de probabilidade, sendo que é mais elaborado, porque não é perguntando a probabilidade de acontecer o evento, mas envolve mais, que surgiu minha dúvida. O que são eventos independentes? Que eu sei o que são eventos disjuntos, mas pode ser que eu use outra palavra.

P5: Probabilidade, na primeira se o evento é determinístico ou não é determinístico. Probabilidade, consigo enxergar muita probabilidade aqui. Aleatoriedade, deixa eu ver mais, acho que é mais por aí essas coisinhas mesmo, condicional ou não condicional, é isso.

Os professores percebem a probabilidade nas situações problema, principalmente na segunda questão, já que a pergunta deixa claro do que se trata, mas os participantes citam a probabilidade de uma maneira mais geral, apenas um professor que foi o P5 fala sobre condicionalidade, e apenas o professor 3 diz que a terceira questão envolveu o conceito de independência de eventos.

A segunda pergunta é subdividida em outras quatro e quer saber se os professores acham interessante trabalhar com as situações problemas na educação básica, se eles levariam as situações problemas para suas turmas e saber deles qual ou quais turmas estas questões podem ser abordadas e por quê.

No geral, todos os professores acham relevante levar todas as situações problemas para suas salas de aula, apenas o P3 disse que levaria apenas a situação 1, para o professor 3 as outras questões são difíceis de compreender da maneira que estão postas:

P3: Exatamente esses problemas a gente trabalha mais, trabalharia mais o primeiro que é uma questão de mostrar, né, que na probabilidade é pra ver qual é a chance, mas mesmo se tiver, mas que pode dar errado. Agora a questão dos outros dois, dessa forma eu não trabalharia, procuraria colocar de uma maneira que eles entendessem mais

A maioria dos professores julgam que o ideal é que essas questões sejam vistas apenas no Ensino Médio, alguns estendem para o Ensino Fundamental, o professor 2 em sua fala concorda que pode-se trabalhar até nos anos iniciais, no entanto com um abordagem diferente.

P2: Sem necessariamente seguir a regra de calcular porcentagem, mas, mas como uma forma lúdica, dá pra trabalhar até com os anos iniciais inclusive.

Um ponto importante é que, mesmo percebendo a probabilidade nas atividades utilizadas nessa pesquisa, os professores apresentaram dificuldades ao tentar resolvê-las, o que revela dificuldades na compreensão de alguns tipos de problemas que envolvem o conceito de probabilidade.

O professor 4 também acha importante trabalhar situações problemas como essa não só no Ensino Médio. Quando perguntado se incluiria em outro ano escolar, o mesmo responde:

P4: Sim, no Ensino Fundamental, no 7º ano e 8º ano, até porque o maior reforço de matemática que se deve dar hoje em dia, na minha visão como professor, é no Ensino Fundamental.

Dentre as respostas destacamos também a do professor 5, que informou que o interessante seria levar essas questões para turmas do 3º ano. Ao perguntar se o mesmo incluiria outro ano escolar para vivenciar essas atividades, o mesmo respondeu:

P5: Não. Só se for numa turma muito aplicada, por aí de 8º ano, agora que uns exemplos desses, uns casos desses, você poderia levar ele sem ser no papel, podia levar eles, fazer lá, mostrar um material concreto e fazer lá com os alunos dos anos finais do fundamental, antes dos anos finais, impossível, 8º ou só 9º ano.

Quando ele se referiu em levar o material concreto e utilizar com os alunos, entendemos que seria mais para a 2ª questão, para o uso de experimentações e simulações.

A maioria dos professores justificam, a escolha das turmas que devem ser trabalhadas questões como essa, através de como os conteúdos estão organizados no currículo.

P6: Porque é onde o conteúdo de probabilidade e análise é trabalhado, trabalhamos análise e probabilidade no 2º ano.

P5: Porque eu acho que no Ensino Médio eles tem que ser preparados pra isso, pra pensar, o que eu queria da educação, fazer o sujeito pensar, e probabilidade são situações cotidianas, então é interessante fazerem eles pensarem sobre essas situações cotidianas.

Destacamos a fala do P3 que em sua justificativa falou um pouco da proposta dos Parâmetros Nacionais da Educação de Pernambuco, vejamos a seguir:

P3: Porque são as turmas que eu trabalho esses conteúdos, principalmente a gente trabalha muito essa questão de como são realizadas as pesquisas, tanto no Ensino Fundamental 2, como no Ensino Médio, a importância dessas pesquisas também.

Pelo menos no Estado né, eles veem o mesmo conteúdo todos os anos, só que de uma forma cada vez que passa, vai colocando mais elaborada, então daria pra trabalhar no 2º, no 3º ano do Ensino Médio, já que o programa do Estado de Pernambuco, ele sempre, ver, abrange todos os eixos da matemática só que cada ano vai sendo mais aprofundado digamos assim, então poderia aplicar no 2º, 3º ano.

É possível perceber que os professores dizem se basear nos documentos curriculares e ter conhecimento dos mesmos, organizando os conteúdos com base nestes documentos, e dizem na maioria das vezes que o conteúdo de Probabilidade é trabalhado apenas no Ensino Médio, mas, alguns dos participantes entendem que é importante sim levar situações problemas como essas para turmas do Ensino Fundamental, levar por exemplo a situação 1, para promover uma discussão com os alunos, como cita o professor 3. Ficou claro também que o professor 3 difere dos demais por citar os Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco, evidenciando que todos os eixos devem ser vistos a cada ano, inclusive o que trata do Ensino de Probabilidade, claro que, a cada ano com um objetivo diferente, a fala do P3 condiz com nossa análise no capítulo 4, sobre os Documentos Curriculares.

Para finalizarmos nossa entrevista realizamos uma pergunta que se referia as possíveis dificuldades que os estudantes podem ter na realização dessas atividades, do ponto de vista dos professores.

Grande parte dos entrevistados concordam que as dificuldades que os alunos podem encontrar é na interpretação da questão, na leitura, já que muitos não tem o hábito de ler a questão, a linguagem matemática como está posta, a falta de contextualização das questões. Trazemos a seguir algumas das falas dos professores:

P1: Acredito que a maioria das dificuldades é conseguir fazer com que eles visualizem isso no seu dia a dia, a maioria dos conteúdos eles tem uma facilidade, dá pra você contextualizar de forma que eles vivenciem, mas alguns são bem mais difíceis. Então quando dá pra coincidir isso então acho que é bem mais legal, e mais fácil.

P4: As dificuldades que podem ser encontradas pode esta relacionadas a linguagem matemática e a interpretação da situação problema, relacionado com a resolução de problemas que eles vão sempre realizando pra poder tá, ter uma certa facilidade pra poder pegar problemas como esse.

A única resposta que se distanciou um pouco das demais foi a do professor 2 que disse:

P2: Pelo que a gente conhece dos nossos alunos principalmente a questão de conversão pra, pelo menos eu falo, porque depende muito, mas ai vai entrar a questão de converter pra decimal, pra porcentagem, eles trabalham muito pouco porcentagem, eles tem muita dificuldade. As vezes até a própria interpretação, é, basicamente isso.

Portanto, diante das falas dos professores, as possíveis dificuldades que os alunos podem ter é em relação a interpretação, os mesmos acham as questões de difícil entendimento, além de não se aproximar da realidade dos alunos, os professores veem que muitos alunos não tem o hábito de ler as questões, de refletir e já querem ir para o resultado, todos estes são

possíveis dificuldades que os alunos do Ensino Básico podem encontrar em situações problemas como estas, segundo os professores.

Infelizmente alguns professores julgaram estas questões como situações distantes da realidade dos alunos, no entanto estas questões são importantíssimas na tomada de decisões. A situação problema 1, por exemplo, traz uma situação comum em contextos médicos, e é importante que seja trabalhada com os alunos, para que os mesmos percebam que a probabilidade de uma pessoa ter câncer se tiver testado positivo para o diagnóstico não tem a mesma probabilidade de um resultado dar positivo se a pessoa tiver câncer, não conseguir diferenciar essas probabilidades pode levar a sérias consequências como traz Batanero, Contreras e Díaz (2012).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nosso trabalho teve como objetivo investigar os conhecimentos dos professores de matemática em exercício sobre o conceito probabilidade condicional. A literatura atual e os documentos curriculares apontam para a importância da abordagem das noções de condicionalidade e independência com os estudantes do Ensino Médio.

Concernente aos conhecimentos do grupo de professores investigados foi possível identificar lacunas no conhecimento sobre o conteúdo de probabilidade; entretanto nos itens que os professores puderam tecer reflexões, os mesmos, apontam relações entre a probabilidade e estatística e possíveis caminhos para a abordagem da probabilidade nas turmas de matemática.

Um estudo que pode dar continuidade a esta investigação é observar os conhecimentos que emergem em um processo de ensino e aprendizagem com professores desta etapa de escolaridade. Além disto, utilizar as teorias que envolvem o conhecimento para o ensino de matemática, com suas categorias, também poderá ser fruto de estudos futuros.

REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.

BATANERO, C., CONTRERAS, J. M. e DÍAZ, C. (2012). Sesgos em el razonamiento sobre probabilidade condicional e implicaciones para la enseñanza. **Revista Digital Matemática Educación e Internet**, Costa Rica, v. 12, n. 2, 2012. Disponível em: < <http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1673/1529> > Acesso em 10 de abril de 2018.

BORBA, R., SOUZA, L., FELISBERTO DE CARVALHO, J. I. Desafios do Ensino na Educação Básica de Combinatória, Estatística e Probabilidade. **Em teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife (PE) v. 9, n. 1, 2018. Disponível em: < <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/231908/pdf> > Acesso em 10 de abril de 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)**. Brasília, DF: SEF/MEC, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Secretaria da Educação Básica, 2018.

_____. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Por que se ensina matemática? [s.a.]

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: livro do aluno, volume 3, Ática**, 1ª edição, São Paulo, 2004.

DÍAZ, C. ; DE LA FUENTE, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.

ESTRADA, A., DÍAZ,, C. e DE LA FUENTE, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo e T. Sierra (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV* (p. 271-280). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

FALK, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (p. 292–297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

FELISBERTO DE CARVALHO, J. I.. Conhecimentos de futuros professores de matemática sobre probabilidade condicional por meio do jogo das três fichas. In: 2º Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidade y Combinatória, 2015, Granada. **Anais da 2ª Jornadas Virtuales**, 2015. Disponível em: < <http://www.estadis.net/3/actas/COM/11.%20Conhecimentos%20de%20futuros%20%20pro+f>

[essores%20Probabilidade%20Condicional%20REVISADO.pdf](#) >. Acesso em 20 de setembro de 2016.

FELISBERTO DE CARVALHO, J. I.; PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS M. M. T. Discussão de um Diagnóstico Inicial sobre Noções Probabilísticas na Perspectiva do Conhecimento Didático – Matemático. **VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Pirenópolis – GO, 15 a 19 de novembro de 2015.

FIGUEIREDO, A. C. (2000). **Probabilidade condicional**: Um enfoque de seu ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

GODINO, J. D.; PINO-FAN, L. R. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Vol. XXXVI, nº 1, junho de 2015, p. 87-109.

JULIANELLI, J. R., DASSIE, B. A., LIMA, M. L. D.. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna , 2009.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. Obra em 3 v. Ensino Médio, Moderna, 2ª edição, São Paulo, 2013.

LOPES, J. M.. Uma Proposta Didático-Pedagógica para o Estudo da Concepção Clássica de Probabilidade. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 39, p. 607-628, ago. 2011. Disponível em: < <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5110/4026> >. Acesso em: 15 de abril de 2016.

OLIVEIRA, M. M. Como fazer pesquisa qualitativa. 3 ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife, 2012. 141p.

PIETROPAOLO, R. C.; SILVA, A. F. G. ; CAMPOS, T. M. M. ; FELISBERTO DE CARVALHO, J. I. . Conhecimentos de professores para ensinar probabilidade nos anos finais do Ensino fundamental. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, v. 8, p. 126-156, 2015.

REZENDE, J. C.; LOPES, J. M.; TEODORO J.V.. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetiké**, São Paulo, v. 19, n. 36, p. 75-93, 2011. Disponível em: < <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/3998/3317> >. Acesso em: 15 de abril de 2016.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

_____. Those who understand: Knowledge growth inteaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14, 1986.