

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

RISONEIDE MARIA DE MÉLO

**COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: discussões sobre problemas,
representações e panoramas a partir da análise de livros didáticos.**

CARUARU, 2018

RISONEIDE MARIA DE MÉLO

COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: discussões sobre problemas, representações e panoramas a partir da análise de livros didáticos.

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciada em Matemática.

Área de Concentração: Ensino (Matemática)

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha

**CARUARU/PE
2018**

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier CRB/4 - 1242

M528c Mélo, Risoneide Maria de.
Combinatória no ensino médio: discussões sobre problemas, representações e panoramas a partir da análise de livros didáticos. / Risoneide Maria de Mélo. – 2018. 46f. ; il. : 30 cm.

Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2018.
Inclui Referências.

1. Análise combinatória. 2. Livros didáticos. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Ensino médio. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Título.

371.12 CDD (23. ed.)

UFPE (CAA 2018-020)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Formação Docente
Curso de Matemática - Licenciatura



**COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: discussões sobre problemas,
representações e panoramas a partir da análise de livros didáticos.**

RISONEIDE MARIA DE MÉLO

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e **aprovada** em 07 de março de 2018.

Banca Examinadora:

Profa. Cristiane de Arimatéa Rocha

(Orientadora)

Prof. José Jefferson da Silva

(Examinador Externo)

Profa. Lidiane Pereira de Carvalho

(Examinadora Externa)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo *Analisar os diferentes aspectos de Combinatória dos livros didáticos do Ensino Médio*. Nessa perspectiva, consideramos os diferentes tipos de problemas combinatórios, procedimentos das resoluções, panoramas e contextos utilizados pelos livros didáticos. Para isso escolheu-se dois livros de Matemática do 2º ano do Ensino Médio que foram adotados em uma escola estadual de Caruaru. O foco da análise proposta se deu tanto em relação à introdução dos conteúdos quanto as atividades resolvidas, problemas propostos e exercícios. Para identificar os panoramas propostos pelos problemas classificamos com base na pesquisa Coutinho e Barbosa (2015). Com relação aos tipos de problemas combinatórios, utilizamos a classificação proposta pelos livros didáticos escolhidos, categorizados em Formalista, Instrumental, Ilustrativo e Comparativo para comunicar o conceito de Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutação, Arranjo Simples e Combinação Simples. Foram analisados 171 atividades no livro de Souza(2013) e 159 atividades no livro de Dante (2016) dos conteúdos de Fatorial, Permutação, Arranjo e Combinação. Nos capítulos observados constatou-se que não há consenso na distribuição desses conteúdos, ficando a cargo de cada autor a determinação do tipo de problema mais frequente. Com relação aos panoramas observamos que os autores enfatizam o instrumental nos problemas de arranjo e combinação, enquanto que nos problemas de permutação o formalista é priorizado por ambos os autores. Verificou-se nos livros analisados propostas que possibilitam o trabalho com mais de um panorama, a ênfase foi bem maior no livro de Souza (2013). O panorama menos trabalhado em todos os conceitos foi o comparativo, defende-se que a comparação entre problemas combinatórios, pode promover conhecimentos sobre a diferenciação dos problemas a partir de propriedades que podem ser evidenciadas.

Palavras-Chave: Análise Combinatória. Livros didáticos de Matemática. Ensino Médio. Panoramas

ABSTRACT

This work aims to analyze the different aspects of Combinatory of high school textbooks. In this perspective, we consider the different types of combinatorial problems, procedures of the resolutions, panoramas and contexts used by textbooks. For that, two Mathematics books of the 2nd year of High School were chosen that were adopted in a state school of Caruaru. The focus of the proposed analysis was as much in relation to the introduction of the contents as the solved activities, proposed problems and exercises. To identify the scenarios proposed by the problems we classify based on the research Coutinho and Barbosa (2015). With regard to the types of combinatorial problems, we used the classification proposed by the chosen textbooks, categorized in Formalist, Instrumental, Illustrative and Comparative, to communicate the concept of Fundamental Principle of Counting, Factorial, Permutation, Simple Arrangement and Simple Combination. We analyzed 171 activities in the book of Souza (2013) of the contents of Factorial, simple permutation, Simple Arrangement and Combination. In the observed chapters it was verified that there is no consensus on the distribution of these contents, being the responsibility of each author to determine the most frequent type of problem. Regarding the scenarios we observed that the authors emphasize the instrumental in the problems of arrangement and combination, whereas in the problems of permutation the formalist is prioritized by both authors. The books analyzed presented proposals that make possible the work with more than one panorama, the emphasis was much greater in the book of Souza (2013). The least worked out picture in all the concepts was the comparative one, it is defended that the comparison between combinatorial problems, can promote knowledge on the differentiation of the problems from properties that can be evidenced.

Keywords: Combinatorial Analysis. Mathematics textbooks. High school. Panoramas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
2 LIVRO DIDÁTICO COMO RECURSO UTILIZADO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	10
3 ASPECTOS HISTÓRICOS, DIDÁTICOS E CURRICULARES DA COMBINATÓRIA	14
3.1 <i>Ensino-aprendizagem de Combinatória</i>	15
4 METODOLOGIA	28
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	30
5.1 <i>Categorização de aspectos gerais da Combinatória apresentada nos Livros Didáticos analisados</i>	30
5.2 <i>Categorização de panoramas dos conceitos da Combinatória apresentados nos Livros Didáticos analisados</i>	31
5.3 <i>Categorização de procedimentos de resolução de problemas combinatórios apresentada nos Livros Didáticos analisados</i>	33
5.4 <i>Resultados da análise do livro de Souza e Dante tipos combinatória</i>	37
5.5 <i>Discussão comparativa dos capítulos de Combinatória na introdução dos conceitos nos Livros Didáticos analisados</i>	38
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
REFERÊNCIAS.....	43

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o currículo de matemática (como de outras disciplinas da Educação Básica) vem sofrendo alterações, em diferentes instâncias do sistema educacional sejam perspectivas internacionais, nacionais, estaduais e municipais. Algumas dessas mudanças chegam ao professor tardiamente, como o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que mesmo após quase duas décadas de sua publicação, percebe-se ainda o desconhecimento de sua proposta por muitos professores, principalmente em relação à prática em sala de aula. Os recursos utilizados o livro didático, configura ainda nos dias de hoje, como um dos recursos mais utilizados na sala de aula, principalmente após o Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) que além da avaliação desse recurso, promove a distribuição de livros para as escolas municipais e estaduais brasileiras inclusive no ensino médio.

Na *Conferência Internacional em Livros Didáticos Escolares de Matemática (International Conference on School Mathematics Textbooks – ICSMT) em 2014*, o livro didático teve um espaço internacional para se discutir sobre diferentes tipos de pesquisas, sejam aquelas que tratam dos conceitos, métodos e direcionamentos apresentados nos livros; ou as relacionadas a análise de conteúdos ou métodos de ensino apresentados por eles; aquelas referentes a comparação ou estudos históricos relativos ao recurso; as que abordam seu uso por professores ou estudantes; da produção e /ou desenvolvimento desse recurso; a inserção de Tecnologias da Informação ou Comunicação (TIC) presentes neles, e ainda, a presença de relações entre matemática e outras disciplinas em livros de matemática ou em livros de outras disciplinas. (ICSMT. 2014)

Com base no exposto, podemos perceber a importância de analisar um livro didático, tanto para professores possibilitando um bom uso, quanto para os pesquisadores, para entender o movimento que perpassa a sala de aula.

Nesse trabalho tratamos especificamente da análise da abordagem da Combinatória no livro didático do Ensino Médio, tal como o segundo item apresentado pelo ICSMT. A escolha desse conteúdo, parte da premissa de que as experiências vivenciadas em sala de aula com esse conteúdo, alguns alunos, até mesmo de Ensino Médio, parecem não compreender as diferenças entre os

problemas de combinatória, apresentando também algumas dificuldades nos procedimentos de cálculos (ROA, 2000; PESSOA, 2009). Além disso, professores de diferentes níveis de ensino também possuem algumas dificuldades no ensino e aprendizagem desse conteúdo (ROCHA, 2011).

Em nossas experiências com estudantes do Ensino Médio, muitos alunos que prestam essas provas, comentam a respeito dos problemas combinatórios e suas dificuldades. Dessa forma, geram alguns questionamentos: os conteúdos de Combinatória estão muito além da percepção cognitiva dos alunos? Os alunos tiveram uma aprendizagem da matemática comprometida diante da resolução de problemas? A Educação Matemática se preocupa com questões assim, pesquisas são desenvolvidas para apontar alguns caminhos a ser seguidos.

Investigações como a apresentada por Borba (2010, 2013, 2016) afirmam que o ensino de Combinatória deve ser iniciado antes do Ensino Médio, priorizando para o amplo raciocínio combinatório, diferentes propriedades dos problemas combinatórios, variadas representações e/ou procedimentos de resolução, a elaboração de estratégias próprias de resolução, e ainda apontam, corroborando com autores como Fischbein (1975), Batanero, Godino, Navarro-Pelayo (1996) que alunos dos anos iniciais, finais do Ensino Fundamental como também do Ensino Médio, podem dispor dessas estratégias, desde que haja uma proposta adequada ao nível proposto de ensino e aprendizagem de Combinatória.

Dessa forma, nos questionamos sobre que elementos da Combinatória são elencados pelos livros didáticos do Ensino Médio? Será que existem indicações e/ou sugestões desse trabalho para que o professor possa desenvolver suas estratégias em sala de aula junto com os alunos na compreensão e no desenvolvimento dos cálculos como forma de fixação desse conteúdo? Que aspectos/propriedades são priorizados por esses recursos no ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio?

Sabemos que apesar do que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontarem o trabalho com Combinatória desde os anos iniciais de Ensino Fundamental, esse apenas ocorre efetivamente, no Ensino Médio, especificamente o segundo ano (BRASIL, 1997).

A partir dessa discussão, a problemática gerada neste trabalho consiste em saber, *Como os livros didáticos de matemática do Ensino Médio apresentam problemas, procedimentos de resolução e panoramas de ensino e aprendizagem no*

capítulo de Combinatória?

Quanto ao Objetivo Geral deste trabalho, o mesmo consiste: *Analisar os diferentes aspectos de Combinatória dos livros didáticos do Ensino Médio*. Como forma de identificar como são propostos os problemas e suas resoluções.

- Analisar os panoramas de ensino para a Combinatória no Ensino Médio são apresentados nos livros didáticos;
- Identificar a frequência dos diferentes tipos de problemas combinatórios nos livros do Ensino Médio;
- Analisar os procedimentos de resolução sugeridos nas atividades do livro do ensino médio;

A monografia está assim apresentada. No próximo capítulo apresenta-se uma discussão sobre livro didático, Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a importância do livro para norteamento do professor.

No terceiro capítulo discutem-se aspectos históricos, curriculares como também do ensino e aprendizagem de Combinatória, apresentando os panoramas de ensino e aprendizagem, procedimentos de resolução e tipos de problemas combinatórios.

O quarto capítulo foi dedicado a metodologia da monografia. No quinto capítulo foram desenvolvidas algumas tabelas com quantitativos e percentuais para possibilitar a discussão do trabalho dentro da proposta da análise do livro didático de Souza(2013) e Dante (2016)

2 LIVRO DIDÁTICO COMO RECURSO UTILIZADO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

O livro didático vem se desenvolvendo desde a história da educação escolar como recurso de grande importância para o ensino/aprendizagem, é o que relata Bittencourt (2004, p. 1) “investigações variadas, identificam a importância desse instrumento de comunicação, de produção e transmissão de conhecimento, integrante de tradição escolar.” Contudo, existem alguns professores que não demonstram essa preocupação sobre a escolha do livro didático, por exemplo, uma avaliação minuciosa dos conteúdos de combinatória, as resoluções de problemas contextualizados. Disposição de uma variada gama de exercícios dentro da Análise Combinatória.

Mas com o passar dos anos surgiram novos olhares no que se refere a mudanças nos livros didáticos, e hoje se procura adequá-los para uma escola contemporânea. “No caso brasileiro, os investimentos realizados pelas políticas públicas nos últimos anos transformaram o Programa Nacional de Livro Didático (PNLD) no maior programa de livro didático do mundo”. (BITTENCOURT, 2004, p. 1).

No ensino de conceitos matemáticos, o livro didático auxilia na prática docente por conter um currículo elaborado por autores matemáticos e ao se fazer a leitura além de possibilitar ao ensino enriquece o linguajar matemático, facilitando com um amplo vocabulário, para então ser repassado para os estudantes.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções [...]” (BRASIL, 1997, p. 19). Em contraponto com Sousa (2010) afirma que em algumas práticas pedagógicas, as aulas são silenciosas, não há comunicação, pois são dadas para os alunos as regras de como resolver os problemas matemáticos de certo assunto e através de um algoritmo, fazem exercícios de fixação.

Na perspectiva da alfabetização matemática, este tipo de ensino é extremamente deficiente de significado, afinal, a utilidade da linguagem matemática, neste caso, fica restrita aos exercícios que se propõe retirando a possibilidade do aluno de ler, escrever e interpretar a linguagem matemática fora do contexto escolar

e afastando-o, ainda mais, deste instrumento fundamental para a interpretação, representação e compreensão da realidade (SOUSA, 2010, p. 4).

Por isso é preciso trabalhar com o auxílio dos livros didáticos, incentivando também os alunos a fazerem a leitura do conteúdo no livro, para que eles não se restrinjam apenas a fala do professor. Promovendo assim uma interação entre professor, aluno e o livro. Com essa ligação, fica mais fácil desenvolver o ensino-aprendizagem, uma vez que ambos se apoiam para uma melhor compreensão na linguagem matemática. O docente nesse sentido deve estar preparado e sempre em suas aulas expressar, falar matematicamente com coerência, mesmo aqueles termos complicados considerados difíceis até mesmo de pronunciá-los.

No estudo de Borba, Azevedo e Bittar (2016, p.2), observaram que

[...] nos manuais do professor dos livros didáticos devem ser apresentados pressupostos teórico-metodológicos referentes ao que se concebe como processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, bem como devem ser detalhadas as atividades propostas no livro do aluno – deixando claro ao professor quais as intenções de cada situação apresentada e como a mesma pode propiciar avanços nos conhecimentos matemáticos dos estudantes. (BORBA et. al. 2016, p. 2)

Como já foi citado anteriormente o livro didático é um recurso fundamental indispensável para formalizar conceitos. Mas existem outros recursos a favor do ensino aprendizagem da combinatória, como por exemplo: jogos, software, resolução de problemas através de representações simbólicas, manuseio de materiais concretos para demonstração da combinatória. Todos estes recursos são importantes para o processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório. Com a utilização de diferentes estratégias de resolução dos problemas combinatórios facilita nesse processo. “Diversos autores ressaltam a importância da estratégia de resolução de problemas na construção do conhecimento matemático e afirmam que a atividade de resolver problemas está no cerne da ciência Matemática” (PERNAMBUCO, 2012, p. 26).

O livro didático como recurso em sala de aula, faz-se necessário conhecer previamente toda a sua abordagem e o método utilizados para trabalhar determinados conceitos e conteúdos de matemática. Por este motivo, é preciso analisar as características dos livros buscando conhecer sua estrutura e possibilidades de trabalho.

Para Tardif e Raymond (2000) afirmam que o saber docente se constitui no

conjunto de "saberes" que fundamentam as ações do professor em sala de aula, englobando os conhecimentos, as atitudes e as habilidades dos professores.

Nesse contexto, por entende-se que o livro didático deve ser visto como um instrumento auxiliar do processo ensino-aprendizagem e não como fim do processo, Para que se possa realizar e respeitar o desenvolvimento cognitivo do aluno, para que não reduza a matemática a um conjunto de regras e definições sem ligação lógica entre si.

Dessa forma, acredita-se que, na maioria dos casos, o processo de escolha e utilização do livro didático é feito de acordo com o que o professor discorre sobre o ensino/aprendizagem da Matemática, no que pesa a escolha do livro didático de Matemática.

Com isso, a relação do livro didático com o professor passa a ser estruturada diante de um exemplar específico para o professor, não contendo apenas a resolução dos exercícios, mas trazendo em seu plano de curso a estruturação para o planejamento de suas aulas,

Machado (1997) afirma que a estrutura de um livro didático:

[...] de um modo geral, poucas vezes consegue escapar da apresentação convencional, que distingue com nitidez o momento da teoria do momento dos exercícios de aplicação, este por sua vez, quase sempre limita-se a problemas estereotipados, onde também se distingue com nitidez os dados (sempre necessários e suficientes para a resolução) dos pedidos, a serem destinados com a utilização dos dados.(MACHADO, 1997, p.120).

De acordo com o autor, quase não é possível conceber as teorias e as práticas de conteúdos expressos no livro didático. Uns apresentam uma linguagem mais rebuscada, que alguns autores utilizam essa linguagem fugindo da realidade do aluno devido ao seu contexto social.

Sabe-se que a escolha dos livros didáticos fica sob a responsabilidade dos professores de cada escola. Em conformidade com a Resolução CD FNDE nº 42/2012, competindo às escolas e às secretarias de educação garantir que o professor da escola participe do processo de escolha do livro didático de forma democrática.

O PNLD reafirma a importância do papel do professor na escolha do livro e na sua adequação do uso no ensino e aprendizagem de matemáticas, sendo necessário levar em conta o contexto em que ele é utilizado, respeitando as

limitações e contradições do meio.

Por isso, tanto na escolha quanto no uso do livro, o PCN alerta.

O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 67)

De acordo com o enunciado acima, o analisar livros didáticos é possível perceber a existência de algumas falhas em sua composição, algumas delas na forma de apresentação do conteúdo, nas atividades propostas, no desenvolvimento dos conceitos no decorrer das páginas, até mesmo na inadequação à realidade local, em relação às práticas sociais do grupo escolar em questão. Por esse motivo destaca-se a importância de utilizar diversos livros, mas, também, variados recursos pedagógicos, para oferecer ao aluno uma vasta fonte de informações.

3 ASPECTOS HISTÓRICOS, DIDÁTICOS E CURRICULARES DA COMBINATÓRIA

A Combinatória, assim como diferentes conteúdos matemáticos, possui especificidades advindas de aspectos históricos, curriculares e didáticos. Tais aspectos promovem contribuições para o ensino e aprendizagem da Combinatória, trazendo alguns sentidos e significados.

Autores como Wieleitner (1932), Biggs (1979), Berge (1971) discutem e apresentam perspectivas sobre a história da Combinatória, discutindo que sua construção se desenvolveu dentro de uma situação, com o surgimento de algumas construções lógicas.

Biggs (1979) discute que essa história é um pouco difícil de ser pontuada pelo fato “[...] das regras serem consideradas evidentes não se espera encontrá-las mencionadas explicitamente” (BIGGS, 1979, p.110, tradução nossa). Esse autor apresenta uma série de problemas combinatórios datados de diferentes épocas nos países do Egito, China, Índia, relacionados com tratados médicos, canções de ninar, construções de alfabetos, jogos e quebra-cabeças, o que pode representar o conhecimento de métodos de contagem em outras civilizações e em diferentes épocas.

Wieleitner (1932) concebe que um dos problemas mais antigo relacionado a Combinatória é o da formação dos quadrados mágicos. Tal problema se trata de um quadrado mágicos de ordem n no qual temos que organizar os números de 1 a n de forma que cada linha, coluna ou diagonal possua a mesma soma. Berge. (1971) relata de que a ideia dos quadrados mágicos foi transmitida aos árabes pelos chineses e que o primeiro quadrado mágico, conhecido por LoShu, pode ter sido escrito por volta de 2000 a.C.

Por sua vez, no século XVII, motivados por problemas ligados a jogos e loterias, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Fermat (1601-1665), sistematizaram a Combinatória por meio de seus trabalhos. Rocha (2011, p. 48) afirma que “A aplicabilidade da Combinatória aos problemas de Probabilidade finita foi ainda mais acrescida pela troca de correspondências” entre esses matemáticos. Biggs (1979) acrescenta que o crescimento da importância da Combinatória e justifica pela “[...] variedade de usos, tanto na ciência pura quanto aplicada, e, conseqüentemente, tornou-se parte do fluxo principal da matemática moderna”

(BIGGS, 1979, p. 133). Batanero et. al. (1996) adicionam aplicações da Combinatória a outras áreas do conhecimento tais como a Química, a Física, a Biologia, entre outras. Bastos (2013) discute sobre a perspectiva de inserção da História como recurso para o ensino de Combinatória, dessa forma defende que “com um pouco de história as aulas ficam mais humanizadas, cria-se um clima amistoso em sala de aula, enfim, um ambiente propício ao ensino da Matemática” (BASTOS, 2013, p. 6).

O autor considera ainda que esse recurso traz aspectos de motivação de aprendizagem e contribuindo para compreensão de diferentes conceitos, apresentando os processos de transformação sofrida por esses instrumentos ao longo do tempo. Nessa perspectiva, apresentamos outras discussões para que tenhamos mais pistas para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem de combinatória nas próximas seções.

3.1 Ensino-aprendizagem de Combinatória

A Combinatória no Ensino Médio tem se constituído em um desafio para a maioria dos alunos desta etapa de escolarização por não saberem resolver problemas combinatórios que podem exigir habilidades intuitiva e dedutiva tal como, discutido por Navarro-Pelayo, Batanero, Godino (1996), Roa (2000), Pessoa (2009), Conceição, Pereira e Santos(2016), dentre outros. O mesmo ocorre em certa medida para o ensino de combinatória nesse nível, por causa de professores que necessitam vislumbrar experiências diferenciadas para esse fim, tal como, afirma pesquisas de Rocha (2011).

Nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PCPE), encontramos um bloco denominado “Estatística e Probabilidade (Tratamento da Informação)” no qual são discutidos os conteúdos de estatística, probabilidade e combinatória. Nesse bloco, a combinatória é abordada como “Matemática do discreto, que lida com a combinatória e suas ferramentas teóricas para a contagem sistemática de conjuntos discretos e com outros campos de conhecimento envolvendo estruturas de tais conjuntos” (PERNAMBUCO, 2012, p.

31).

De acordo com os PCN dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 52). Aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades. (BRASIL 1998, p. 52)

Nesse caso, torna-se enfática a necessidade do princípio multiplicativo para o desenvolvimento do ensino de Combinatória nesse nível de escolarização. Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001) sobre os problemas de combinatória afirma que:

Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias. (ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001, p. 1)

De acordo com os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio os estudos acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória tem uma proposta de ensino, para ser desenvolvidas junto aos alunos do Ensino Médio. Além de aspectos curriculares, as pesquisas podem ser uma fonte de conhecimentos para professores dos diferentes níveis, inclusive do Ensino Médio.

Lima (2016), em sua pesquisa, teve como objetivo analisar conhecimentos docentes sobre o ensino de Combinatória em turmas do 2º ano do Ensino Médio. Dessa forma, realizou observações de aulas e entrevistas com professores para identificar que conhecimentos eles viabilizam na prática Participaram de sua pesquisa dois professores licenciados em matemática escola da rede pública de ensino da região metropolitana de Recife.

Em relação aos resultados apresentados da pesquisa Lima (2016) observa que existem dificuldades dos professores no trabalho com tipos de problemas combinatórios e os invariantes, posto que:

[...] professores não trabalham os invariantes de forma explícita, há dificuldades quanto à explicação e organização das características dos problemas, pouco exploram diferentes representações e as tentativas que fizeram não foram esgotadas, não possibilitando encontrar os resultados dos problemas, assim a resolução do problema era direcionada à utilização da fórmula. (LIMA, 2016, p.8)

Essas dificuldades podem ser justificadas de várias maneiras, inclusive pelo não destaque atribuído a Combinatória nos cursos de licenciatura em matemática. Souza (2010) afirma que a formação do professor sofre influências de [...] “outras práticas sob as quais o formando vive a sua existência, quais sejam as práticas especificamente econômicas, políticas, institucionais, juvenis, sociais, numa expressão, suas experiências culturais” (SOUZA, 2010, p. 28). Portanto, outros fatores, devem ser associados ao ensino e aprendizagem de combinatória, como outras fontes de experiências que possam ampliar o leque de conhecimentos dos professores que assumem esse compromisso.

No entanto, concordamos com Fischbein (1975, p. 115, tradução nossa), quando ressalta que “mesmo no nível de operações formais, técnicas combinatórias não são adquiridas espontaneamente. Instrução é necessária”. Esse autor se contrapõe ao estabelecido por pesquisadores como Piaget e Inhelder(1951) que acreditavam que no nível das operações formais os alunos conseguiam entender as operações combinatórias.

Navarro-Pelayo, Batanero, Godino (1996) apontaram alguns erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas combinatórios, dentre os quais destacamos o erro de ordem, ou seja, a confusão dos problemas de arranjo e combinação; o erro de repetição, nesse caso, quando não identificam pelo enunciado da questão se cabe ou não repetição de elementos; o erro de enumeração não sistemática ocasionando esquecimento de possibilidades; o erro de utilização de fórmulas incorretas, entre outras.

Pessoa (2009), em sua tese, discute o desenvolvimento do raciocínio combinatório em estudantes do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, e aplicou um teste de oito problemas combinatórios em 568 estudantes desses níveis. A autora classifica as estratégias utilizadas pelos estudantes em quinze diferentes tipos, dentre elas destacamos, a árvore de possibilidades, desenhos, listagem de possibilidades, uso adequado e inadequado de fórmulas, princípio fundamental da contagem e percepção ou busca da regularidade. Apresentando, que mesmo alguns alunos sem ter um ensino específico de combinatória, conseguem, em certa medida, resolver problemas combinatórios, se não corretamente, podem elaborar alguma estratégia pessoal para esse fim.

O ensino de Combinatória, então, poderia promover a variação de estratégias pessoais de resolução de problemas combinatórios. Valorizando criações próprias

para esse fim, ao invés do uso irrestrito de fórmulas, posto que, alguns alunos do Ensino Médio, a depender da escola, de professores, não tiveram experiências relacionadas a Combinatória ao longo do Ensino Fundamental, ou tiveram poucas, o que dificulta em muito a sua compreensão e associação das diferentes fórmulas para a resolução dos problemas em Combinatória, quando ensinadas apenas no Ensino Médio. Bastos (2013) complementando essa afirmação comenta que:

O ensino da Análise Combinatória na escola de ensino médio foi considerado um dos assuntos mais difíceis de entendimento, pois geralmente se fazia de maneira mecânica, em situações padronizadas, ou ainda como um monte de fórmulas complicadas, quando não raramente era deixado de lado por professores (BASTOS, 2013, p.1).

Conceição, Pereira, Santos (2016) realizaram uma pesquisa com 79 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de escola pública de Belém do Pará sobre problemas combinatórios e aspectos metodológicos de professores no ensino de Combinatória. Dentre as doze questões presentes em um questionário sobre atitudes dos professores relativas a essa atividade apresentadas pelos alunos, os autores apontam que na pergunta sobre o que os professores usam para fixar o conteúdo estudado, 40,5% dos estudantes:

[...] indicaram a resposta “mandava resolver os exercícios do livro didático”, revelando que os professores desta escola depositavam ao aluno a responsabilidade de resolver exercícios ao chegar em casa ou durante as aulas visto que os livros didáticos da escola dispõem de material insuficiente para fixação de conteúdo (CONCEIÇÃO et al, 2016, p.9).

A afirmação dos autores é deveras preocupante, trazendo alguns questionamentos. Como o livro didático tem material insuficiente para que alunos aprendam a Combinatória? O que deveria constar em um livro didático? Será que eles afirmam a necessidade de outras metodologias? Acreditamos que a crítica realizada pelos autores se direciona mais as práticas voltadas a um ensino mecanizado tal como discutem no extrato abaixo:

A proposta desta pesquisa está na contramão de um ensino mecanizado. Estimula o educador como ponte para o conhecimento, e não as fórmulas ou decoreba como fins. [...] Apesar de ser mais difícil, com o desenvolvimento do raciocínio lógico a partir do princípio da contagem pelos alunos na resolução de problemas da Análise Combinatória, o aluno estará apto para resolver qualquer

problema, utilizando apenas a lógica. Assim sendo, dando autonomia e propondo a autoaprendizagem, é possível que o rendimento melhore e a educação torne-se plena para o alunado. (CONCEIÇÃO et al 2016, p.7).

De acordo com os PCN dos anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) e a pesquisa de Lima (2015) o ensino de Combinatória pode ganhar uma alternativa para o uso fórmulas, denominada, o princípio da contagem ou o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Tal princípio pode auxiliar o aluno no desenvolvimento da lógica e da melhorar seu rendimento nos anos finais Ensino Fundamental e no Ensino Médio. De acordo com Lima (2015) o PFC não é um conteúdo de Combinatória, e sim um procedimento para diversas soluções em análise combinatórias, inclusive de diferentes tipos.

Em sua pesquisa Lima (2015) procurou investigar os conhecimentos que professores de Matemática mobilizam sobre como o PFC pode ser usado em problemas combinatórios. Para isso utilizou um teste composto por oito problemas, sendo dois envolvendo cada um dos tipos de problemas combinatórios em grupos diferentes de professores do ensino médio e ensino fundamental, além de alunos dos diferentes níveis de escolarização. Como resultado a autora indicou que “os professores do Ensino Médio melhor reconhecem o uso do PFC, quando comparados com os professores do Ensino Fundamental” (LIMA, 2015, p.7). Outro resultado apontado pela autora ressalta uma preocupação com relação ao uso do PFC, sobre o qual apresenta que “

O reconhecimento do PFC dos professores do Ensino Médio é muito superior ao dos alunos deste nível de ensino, o que pode indicar que os professores parecem não estar ressaltando este princípio no ensino junto a seus alunos. (LIMA, 2015, p.7).

Vergnaud (1996, p. 184 apud AZEVEDO; BORBA, BITTAR, 2016). Enfatiza que “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”. Ao comparar tais representações o estudante estará pensando sobre estratégias para resolver o problema proposto desenvolvendo também assim, o raciocínio combinatório.

O raciocínio combinatório pode ser definido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar seus elementos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos

elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010, p. 02).

Para um bom desenvolvimento do raciocínio combinatório as escolhas realizadas pelo docente podem refletir na aprendizagem dos alunos, para além do domínio do conteúdo se faz necessário buscar métodos que desenvolvam o interesse dos alunos, tentando assim, conquista-los para essa proposta.

Borba, Rocha e Azevedo (2015) apontam que se faz necessária como proposta do estudo a formação continuada, focalizando os diferentes domínios de conhecimentos, inserindo reflexões, tanto com relação ao conhecimento especializado, como também, conhecimento relativo ao ensino de Combinatória.

Borba, et al (2015, p. 5) afirmam que “apresentar os quatro tipos de problemas combinatórios (Produto cartesiano, Arranjo, Combinação e Permutação) desde os anos iniciais aos alunos, possibilita um maior desenvolvimento do raciocínio combinatório”. Nessa pesquisa Borba, et al (2015, p. 10) defendem que “[...] para proporcionar um desenvolvimento mais amplo do raciocínio combinatório, é necessária a utilização de diferentes situações, com seus invariantes correspondentes, e o uso de diversificadas representações simbólicas”.

Na combinatória o uso de representações simbólicas procura mostrar de forma clara como e para que esse ramo da matemática é trabalhado. Então a presença de questões apresentadas no livro com indicação de resolução a partir dessas representações é um forte atrativo para o interesse dos estudantes em resolver os problemas combinatórios como indica Azevedo, Borba, Bittar (2016, p. 2):

A Combinatória, como um ramo da Matemática, consiste no estudo da contagem de elementos de um conjunto em que podem ser utilizados diferentes tipos de representações, desde as mais intuitivas, como listagens e desenhos, passando por tabelas, quadros, árvores de possibilidades, até chegar às representações formais da Matemática como o princípio fundamental da contagem e fórmulas. (BORBA et. al. 2016, p. 2)

Essas representações são conversões feitas a partir da linguagem natural e da compreensão do texto matemático. Cada conversão tem seu grau de dificuldade.

Da linguagem natural para a representação simbólica utilizando-se de listagem, os autores acima citados, observaram na pesquisa deles feita com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental que ocorreram poucos erros na resolução dos

problemas, enquanto na conversão para representação numérica, o erro sempre ocorria.

Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p. 125) definem o Princípio Fundamental da Contagem como, “Se uma decisão D1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual a pq ”. Esta definição pode ser ampliada para outras decisões, D3, D4, D5 e assim por diante. De tal modo, o PFC pode ser aplicado ao diferentes tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação), sejam estes problemas simples ou que apresentem algum tipo de condição para sua resolução.

Borba e Braz (2012) afirmam que o PFC é uma estratégia válida para resolução de diferentes situações, como, por exemplo, condições de ordem, de proximidade, de escolha implícita ou explícita de elementos. As autoras ressaltam, ainda, que o uso de fórmulas, nestes casos, pode ser um dificultador para a resolução de problemas combinatórios quando os mesmos apresentam algum tipo de condição para sua resolução.

Para esclarecer melhor essa situação Lima (2015) desenvolveu uma tabela onde através de um quadro a mesma demonstra vários tipos de conteúdos em combinatória que pode ser resolvido através do PFC.

Quadro 1 - Aplicações do Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

TIPO	PROBLEMAS	REPRESENTAÇÃO USANDO O PFC
PRODUTO CARTESIANO	Joaquim foi à livraria comprar seu material escolar. Para montar seu kit a livraria lhe ofereceu: 3 modelos de caderno, 4 modelos de lápis, 8 modelos de borracha e 2 modelos de caneta azul. De quantas formas diferentes Joaquim pode montar seu kit?	$3 \times 4 \times 8 \times 2$ Quantidade de modelos possíveis (QMP) de cadernos X QMP de lápis X QMP de borracha X QMP de canetas.
ARRANJO	Na final do campeonato de judô, 5 meninas estão disputando os 3 primeiros lugares do torneio. De quantas formas diferentes podemos ter os três primeiros colocados?	$5 \times 4 \times 3$ Quantidade de meninas que podem ocupar o 1º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 2º lugar X Quantidade de meninas que podem ocupar o 3º lugar.
PERMUTAÇÃO	De quantos modos distintos 5 pessoas podem se posicionar em um banco de 5 lugares?	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ Quantidade de pessoas que podem ocupar a 1ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 2ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 3ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 4ª posição X Quantidade de pessoas que podem ocupar a 5ª posição.
COMBINAÇÃO	Um técnico tem que escolher, dentre 12 atletas, 5 para compor a equipe titular de um time de basquete. Qual o total de possibilidades que o técnico tem para montar sua equipe?	$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ Quantidade de escolhas para o 1º atleta X quantidade de escolhas para o 2º atleta X quantidade de escolhas para o 3º atleta X quantidade de escolhas para o 4º atleta X quantidade de escolhas para o 5º atleta. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 5 atletas.
ARRANJO CONDICIONAL	Ana, Júlia, Marcos, Pedro e Laís estão participando de uma corrida. De quantos modos diferentes podemos ter os 3 primeiros colocados se Julia sempre chegar em primeiro lugar?	$1 \times 4 \times 3$ 1º lugar ocupado por Júlia X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar.
COMBINAÇÃO CONDICIONAL	Marta precisa escolher entre seus 8 amigos (Tiago, Simone, Daniele, Jéssica, Pedro, Amanda, Rafael e Felipe), 4 para ir ao cinema com ela. De quantas formas diferentes Marta pode escolher esses quatro amigos desde que Jéssica sempre esteja entre os escolhidos?	$\frac{1 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ 1º lugar ocupado por Jéssica X quantidade de participantes que podem ocupar o 2º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 3º lugar X quantidade de participantes que podem ocupar o 4º lugar. Após, divide-se pela permutação dos elementos repetidos, no caso dos 4 amigos.

Fonte: Lima(2015)

Como visto na tabela acima se faz necessário que o professor nas aulas de combinatória aproveite as diversas estratégias na resolução de problemas combinatórios pelos alunos utilizando-se de: Operações aritméticas, desenhos, listagens e diagramas - e gradativamente vá se construindo procedimentos mais

formais para resolução deste tipo de problema. Borba (2010) defende que, a partir de estratégias mais intuitivas, pode-se construir o uso do PFC e, a partir deste, pode-se dar a construção das fórmulas da Combinatória.

Além de conhecimento de alunos e professores sobre Combinatória a respeito dos tipos de problemas, e procedimentos de resolução desses problemas, tais como o PFC, ou mesmo os invariantes (propriedades) apresentados pelos diferentes autores, Coutinho e Barbosa (2015) apresentam uma discussão sobre a diversidade de panoramas e realizações que possam trazer os conceitos de Combinação. Os autores definem esses termos como:

[...] as *realizações* são as diversas associações (definições, algoritmos, analogias, metáforas, imagens, aplicações, gestos) que são utilizadas para dar sentido a certo conceito matemático, na tarefa específica de ensinar, e os *panoramas* são as observações das relações entre as *realizações*, são as organizações de listas de *realizações* que apresentam características semelhantes e possíveis contrastes o ensino e aprendizagem de Combinatória nos diferentes níveis de escolarização (COUTINHO; BARBOSA, 2015, p. 8)

Com base nessa discussão os autores propõe uma organização para os panoramas relacionados ao ensino do conceito de combinação simples, os quais descrevem em um quadro, no qual apresentam e definem quatro tipos de panoramas: Formalista, Instrumental, Ilustrativo e Comparativo, o qual se apresenta a seguir:

Quadro 2 – Panoramas para o ensino do conceito de Combinação apresentados por Coutinho; Barbosa(2015)

Panorama	Realizações originárias
Formalista	Definição formal
Instrumental	Fórmula
Ilustrativo	Diagrama de árvore das possibilidades; Desenho; Listagem; Tabela; Objetos concretos ou virtuais.
Comparativo	Ordenação irrelevante; Comparação com arranjo simples.

Fonte: Coutinho; Barbosa (2015, p.9).

Os autores ainda apresentam que esses panoramas podem ser conhecidos por professores quando afirmam que “Conhecer esse modelo também possibilita ao professor compreender e explorar as formas de comunicação que os alunos utilizam ao mobilizar o conceito de combinação simples” (COUTINHO; BARBOSA, 2015, p. 21). Coutinho e Barbosa (2015) afirmam ainda que esses panoramas existem em

diferentes instrumentos

[...] a Matemática mobilizada para o ensino do conceito de combinação simples pode ser observada em diversos contextos como livros didáticos, documentos oficiais de orientações, salas de aula, curso com professores, entre outros. (COUTINHO; BARBOSA, 2015, p. 21).

Quando abordamos o ensino-aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio, podemos ter em consideração os vários aspectos que podem gerar as dificuldades apresentadas pelas diferentes pesquisas previamente discutidas.

Geralmente, a combinatória é abordada por meio da resolução de problemas, mas algumas práticas como o uso de fórmulas ainda estão sendo utilizada, como afirma Lima (2016). Além disso, os problemas combinatórios no Ensino Médio tornam-se mais elaborados apresentando condições, restrições, e até mesmo um maior número de possibilidades para a resolução das atividades sugeridas no livro.

Com problemas combinatórios mais elaborados, as dificuldades encontradas nas diferentes pesquisas podem ser ampliadas, cabendo ao professor muitas vezes desenvolver várias estratégias para que o aluno possa assimilar conceitos de Análise Combinatória.

Geralmente o capítulo destinado à Combinatória nos livros didáticos do Ensino Médio se subdivide em Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutação simples, Combinação e Arranjos simples. Assim, adotamos essa nomenclatura para classificar os tipos de problemas combinatórios no ensino médio.

Com relação aos panoramas que podem ser utilizados pelos autores dos livros didáticos, nos baseamos em Coutinho e Barbosa (2015) conforme discute-se no Quadro 2.

Quadro 3 – Conceituação dos panoramas dos conceitos combinatórios

Panorama	Conceituação
Formalista	Apresentam definições formais para os conceitos dos diferentes problemas combinatórios
Instrumental	Apresentam dias diversas fórmulas para os tipos de problemas combinatórios.
Ilustrativo	Utilizam diferentes tipos de procedimentos para enumeração, tais como: diagrama de árvore das possibilidades, Desenho, listagem, tabelas, objetos concretos ou virtuais.
Comparativo	Ocorrem a partir da comparação entre problemas combinatórios diferentes, mas especificamente para as ordenações irrelevantes, ou seja, a comparação com arranjo simples proposta por ambos os autores.

Fonte: Coutinho; Barbosa (2015)

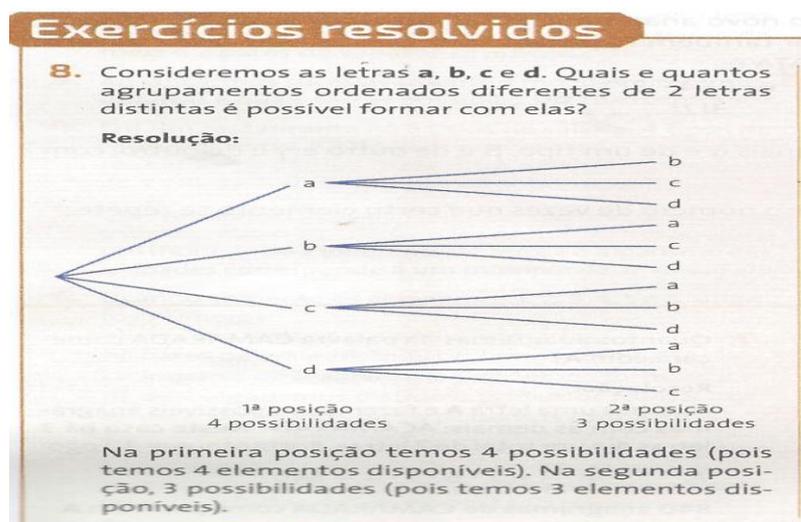
Para exemplificar melhor tais problemas e panoramas seleccionaram-se alguns recortes dos livros analisados, que serão apresentados a seguir.

Pessoa e Borba (2010, p. 5), apresenta uma definição para combinação pode que pode ser considerada como um exemplo do panorama formalista.

“Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais; a ordem dos elementos não gera novas possibilidades”. (grifo nosso)

Na figura 1 apresenta-se um exemplo do panorama ilustrativo do conceito de arranjo disponibilizado nos problemas resolvidos e apresenta um exemplo de diagrama de árvore.

Figura 1 - Exemplo de panorama ilustrativo



Fonte: Souza (2013, p. 221)

Nesse panorama instrumental do conceito de Arranjo simples a atividade pode ser resolvida através do diagrama de árvore, mas nesse panorama a ênfase é na fórmula de arranjo, apresentado na introdução do conteúdo. A fórmula passa a ter sentido quando se observa o amplo número de possibilidades, mas não deve ser a única estratégia e procedimento utilizado.

Figura 2 - Exemplo de panorama instrumental

Arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p , com $n \geq p$, é todo agrupamento ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados.

A quantidade total de agrupamentos é indicada por $A_{n,p}$ ou A_n^p , e calculada por:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot [n-(p-1)] \text{ ou } A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Sendo $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$, calcule:

▪ $A_{n,0}$ ▪ $A_{0,0}$

Exemplos

▪ $A_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72$ ou $A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$

▪ $A_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ ou $A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$

Fonte: Dante (2016, p.223)

No panorama comparativo, a realização de combinação simples como ordenação irrelevante ou comparativo com arranjo simples tem como propósito contrastar essas duas técnicas de contagem, arranjos e combinações, bem como perceber que mudanças nas ordens dos elementos em questão não geram novas possibilidades (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTTI; FERREIRA, 2013, VEGA; BORBA, 2014).

Figura 3 – Exemplo de Panorama Comparativo

5 Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos. Observe com atenção estes dois exemplos:

a) Ane, Elisa, Rosana, Felipe e Gustavo formam uma equipe. Dois deles precisam representar a equipe em uma apresentação. Quais e quantas são as possibilidades?

Representemos por A: Ane; E: Elisa; R: Rosana; F: Felipe; e G: Gustavo. Precisamos determinar todos os subconjuntos de 2 elementos do conjunto de 5 elementos $\{A, E, R, F, G\}$. A ordem em que os elementos aparecem nesses subconjuntos não importa, pois Ane-Elisa, por exemplo, é a mesma dupla que Elisa-Ane. Então, os subconjuntos de 2 elementos são: $\{A, E\}$, $\{A, R\}$, $\{A, F\}$, $\{A, G\}$, $\{E, R\}$, $\{E, F\}$, $\{E, G\}$, $\{R, F\}$, $\{R, G\}$, $\{F, G\}$.

A esses subconjuntos chamamos **combinações simples** de 5 elementos tomados com 2 elementos, ou tomados 2 a 2, e escrevemos: $C_{5,2}$. Como o número total dessas combinações é 10, escrevemos $C_{5,2} = 10$.

Fonte: Dante (2016, p 215)

Defende-se que tais Panoramas podem ser apresentados por livros didáticos de Ensino Médio e por vezes podem ser encontrados nos conceitos de arranjo, permutação e outros problemas combinatórios. O panorama comparativo poderia também ser observado entre problemas de arranjo e permutação, ou mesmo

combinação e os outros problemas combinatórios, já que todos eles possuem diferentes representações.

4 METODOLOGIA

Esse trabalho monográfico se fundamenta na análise de livros didáticos, para os quais analisaremos de modo quantitativo e critérios qualitativos relativos aos problemas combinatórios. Minayo (2001) atesta que a pesquisa quantitativa tem suas raízes no pensamento positivista lógico, tende a enfatizar o raciocínio dedutivo, as regras da lógica e os atributos mensuráveis da experiência humana, portanto a partir de quantidades relativas aos tipos de problemas combinatórios, procedimentos de resolução e panoramas apresentados nos livros didáticos, podem apontar caminhos para o ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio.

Minayo (2001) afirma que a pesquisa qualitativa se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais, no nosso caso, relativo as considerações relativas ao ensino e aprendizagem de Combinatória que pode ser subsidiado pelos livros didáticos analisados. Por outro lado, a pesquisa qualitativa tende a “salientar os aspectos dinâmicos, holísticos e individuais da experiência humana, para apreender a totalidade no contexto daqueles que estão vivenciando o fenômeno” (POLIT; BECKER; HUNGLER, 2004, p. 201). Desse modo, complementos posteriores a esse trabalho podem ser realizados para evidenciar aspectos práticos desse uso.

Para a concretização do trabalho foi realizada a análise do capítulo de Combinatória de dois livros didáticos de matemática do 2º ano do Ensino Médio, ambos do professor. A escolha destes livros se deu pela experiência vivenciada numa escola de rede pública, atuando no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), onde tivemos a oportunidade de trabalhar com o manual do professor do PNLD 2015 utilizados pela Escola neste período e outro manual do PNLD 2018, candidato à escolha pela Escola. A fim de responder a problemática anteriormente anunciada: *Como os livros didáticos de matemática do Ensino Médio apresentam problemas, procedimentos de resolução e panoramas de ensino e aprendizagem no capítulo de Combinatória?*

Partindo deste princípio, delimitaram-se algumas características para cada variável a ser observada no trabalho. Com relação aos tipos de problemas combinatórios utilizaram-se os tópicos ou subtópicos apresentados nos livros didáticos analisados (Souza, 2013; Dante, 2016) além da pesquisa de Pessoa e

Borba (2010). Como referências, a saber: Princípio fundamental da contagem, Fatorial, Arranjo Simples, Permutação Simples e Combinação Simples.

Outra variável analisada, panoramas de conceitos combinatórios, baseada na pesquisa de Coutinho e Barbosa (2015), os quais se caracterizaram em Formalista, Instrumental, Ilustrativo e Comparativo, observando as diferentes atividades propostas no livro didático.

Com relação aos procedimentos utilizados nos fundamentamos nas discussões de registros de representações discutidos por Azevedo, Borba e Bittar (2016), além da discussão de Lima (2015), Rocha (2011) e aquelas apresentadas pelos livros didáticos, nos quais conseguimos observar as seguintes categorias: Diagrama, Diagrama de árvore de possibilidade, Tabela de dupla entrada, PFC, Fórmula, Subconjuntos, Algoritmo, Objeto concreto¹ ou virtual e Listagem. Para quantificar tais categorias consideramos as resoluções de todas as atividades propostas nos livros didáticos para utilizar as estratégias de resolução de acordo com o manual do professor.

No livro de Souza (2013), o conteúdo Análise Combinatória se encontra no capítulo 8 que compreende a página 214 a 233. Contabilizou-se 171 atividades propostas diferenciadas as quais foram classificadas de acordo com a apresentação no livro didático em: (1) Introdução do Conteúdo, (2) Atividades Resolvidas, (3) Problemas e (4) Exercícios. No livro de Dante (2016) o conteúdo Análise Combinatória se encontra no capítulo 9 que compreende a página 204 a 221. Quantificou-se 159 atividades propostas diferenciadas que formaram classificadas igualmente ao outro livro.

¹ Manuseio de materiais concretos para demonstração da combinatória. Como exemplo, calcular em calculadoras.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Foram analisados em cada livro dos autores, todos os panoramas dos tipos de combinatória do livro do Ensino Médio do 2º ano, livro do professor. Também foram analisados todos os exercícios dos conteúdos que Em Souza (2013) constitui em 171 atividades e no de Dante 159 atividades.

Vários problemas foram abordados para cada tipo de combinatória prevalecendo mais o panorama formalista e a representação de solução através das fórmulas principalmente em Dante (2016) Em ambos os autores os procedimentos de resolução são satisfatórios, pois, em algumas questões já vem a representação da solução e também na pagina das resoluções.

5.1 Categorização de aspectos gerais da Combinatória apresentada nos Livros Didáticos analisados

Nos capítulos de livros quando da análise dos tipos de atividades descrevemos no quadro abaixo o quantitativo de atividades referentes a introdução do conceito, problemas, atividades resolvidas e exercícios propostos, organizou-se a tabela 1.

Tabela 1 - Número de atividades analisadas por tipo por livro

TIPOS DE ATIVIDADES	Souza (2013)	%	Dante (2016)	%
Introdução do Conceito	10	3,7	14	8,8
Problemas	81	47,4	74	46,5
Atividades Resolvidas	16	9,4	40	25,2
Exercícios	64	37,4	31	19,5
Total	171		159	

Fonte: A autora (2018)

Na comparação dos tipos de atividades observa-se que a maioria das atividades são Problemas, mas observamos ainda a diferença entre os livros já que os números de exercícios apresentados em Souza (2013) aproximadamente dobram o número apresentado em Dante (2016), como também o número reduzido de

atividades resolvidas apresentado apenas 9% do total de atividades. Para caracterizar ainda mais os capítulos descrevemos o quantitativos de tipos de conceitos, panoramas e procedimentos observados.

Tabela 2 - Número de conceitos combinatórios por livro

TIPOS DE CONCEITOS COMBINATORIOS	Souza (2013)	%	Dante (2016)	%
Fatorial	25	14,6	12	7,5
Arranjo Simples	38	22,2	52	32,7
Permutação	34	19,9	40	25,2
Combinação	48	28,1	49	30,8
Produto Cartesiano	26	15,2	6	3,8
Total	171		159	

Fonte: A autora (2018)

Analisando os conceitos combinatórios, em fatorial o livro de Souza (2013) apresenta maior porcentagem de atividades em relação ao livro de Dante (2016) Contudo nos outros tipos de conceitos combinatórios Dante(2016) se sobressai em relação ao Souza(2013). Mas não há um consenso entre os dois livros sobre a distribuição dos tipos de conceitos combinatórios que devam ser enfatizados.

5.2 Categorização de panoramas dos conceitos da Combinatória apresentados nos Livros Didáticos analisados

Nos tópicos de fatorial em combinatória foram analisados os diversos panoramas utilizados por ambos os autores pesquisados o que se chegou ao gráfico abaixo com suas descrições.

Tabela 3 - Números de panoramas nos tópicos de fatorial

TIPOS DE PANORAMAS EM FATORIAL	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%
Instrumental	-		8	47,1
Ilustrativo	5	20,0	-	-
Formalista	-		4	23,5
Formalista/instrumental	19	76,0	5	29,4
Ilustrativo/formalista	1	4,0	-	-
Total	25	100,0	17	100,0

Fonte: A autora (2018)

Nos tópicos de fatorial referentes aos panoramas, em Souza (2013), não foi detectado nenhum panorama instrumental da mesma forma no panorama formalista. Enquanto que em Dante (2016) não foram encontrados nenhum panorama ilustrativo e também ilustrativo/formalista. Foram observado nos panoramas formalista/instrumental Souza(2013) apresenta 76% das atividades.

Já com relação aos problemas de Arranjo, organizamos a seguinte tabela comparativa.

Tabela 4 - Números de panoramas nos tópicos de Arranjo

TIPOS DE PANORAMAS EM ARRANJO	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%
Instrumental	27	71,1	37	72,5
Ilustrativo	7	18,4	2	3,9
Formalista	1	2,6	-	-
Formalista/ilustrativo	3	7,9	-	-
Formalista/instrumental	-		11	21,6
Comparativo	-		1	2,0
TOTAL	38	100,0	51	100,0

Fonte: A autora (2018)

Dante (2016) não apresentou nenhum tipo de atividade que permeasse nesse conceito os panoramas formalista, formalista/ ilustrativo e formalista instrumental. Enquanto que Souza (2013) não apresentou os panoramas Formalista/instrumental e comparativo. Verificamos que no caso de arranjo, o panorama mais frequente nos dois livros é o instrumental, que utiliza aspectos relacionados a fórmula.

Tabela 5 – Números de panoramas em Permutação

TIPOS DE PANORAMAS EM PERMUTAÇÃO S	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%
Formalista	23	67,6	21	51,2
Instrumental	6	17,6	15	36,6
Ilustrativo	1	2,9	4	9,8
Comparativo	2	5,9	-	-
Comp/Form/Inst	2	5,9	-	-
Form/Inst	-	-	1	2,4
TOTAL	34	100,0	41	100,0

Nesta tabela observa-se que Souza (2013) e Dante (2016) preteriram o

panorama formalista, seguido pelo instrumental para o conceito de Permutação. Observa-se ainda que a ênfase dada ao formalista é percentualmente maior no livro de Souza(2013). Verifica-se uma maior variedade de panoramas no livro de Souza(2013)

Tabela 6 – Números de panoramas em Combinação

TIPOS DE PANORAMAS EM COMBINAÇÃO	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%
Instrumental	37	77,1	37	72,5
Ilustrativo	7	14,6	2	3,9
Comparativo	-	-	1	2,0
Form/inst.	-	-	11	21,6
Formalista	3	6,3	-	-
Ilust/comp/form/inst.	1	2,1	-	-
TOTAL	48	100,0	51	100,0

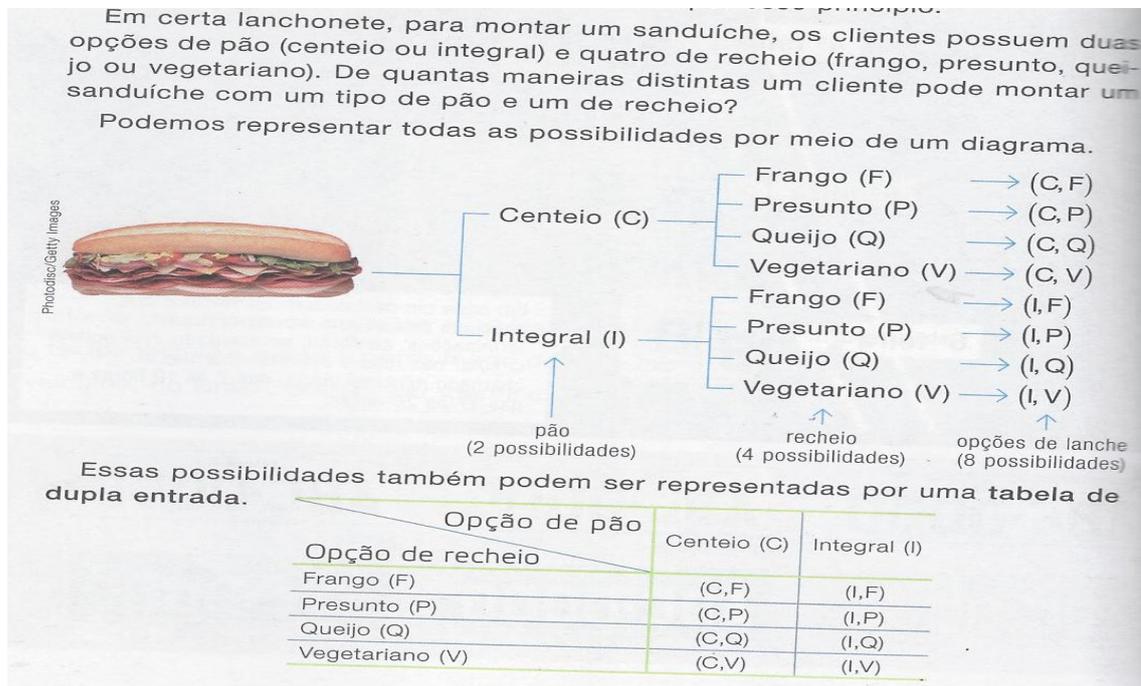
Fonte: Autora(2018)

Analisando a esta tabela logo se apercebe que sou Souza(2013) não apresenta atividades em combinação simples nos panoramas comparativo e form/instrumental enquanto que Dante também não apresenta atividades nos panoramas formalistas e Ilust/comp/form/inst. O destaque fica no panorama ilustrativo em Souza(2013) que apresenta 14,6% das atividades contra 3,9% do livro de Dante(2016). No geral nesta tabela o quantitativo de atividades praticamente são os mesmos

5.3 Categorização de procedimentos de resolução de problemas combinatórios apresentada nos Livros Didáticos analisados

Em Combinatória o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), aparece em ambos os livros pesquisados, e ora é trabalhado como conceito, mas também como estratégia de resolução de diferentes tipos de problemas combinatórios por ambos autores dos livros didáticos observados. Além do PFC foram observados outros tipos de procedimentos de resolução de problemas combinatórios como diagrama de árvores e tabela de dupla entrada como é apresentado na figura abaixo.

Figura 4 – Diagrama de árvore e tabela de dupla entrada.



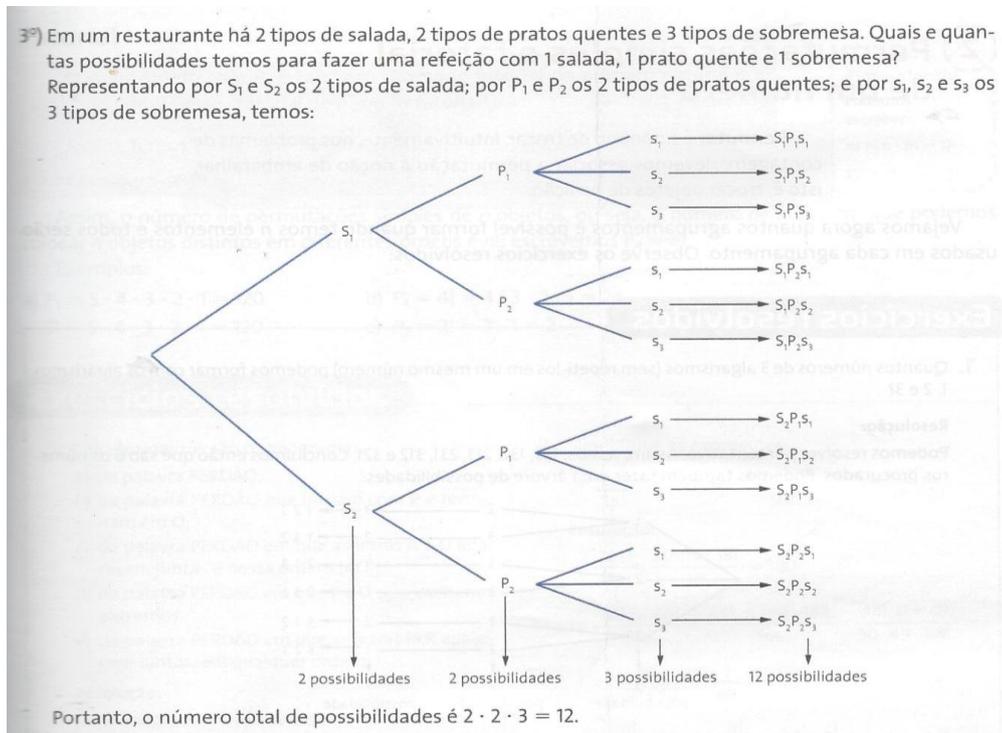
Fonte: Souza (2013, p. 214)

Nesse caso específico, no panorama ilustrativo podemos observar a resolução do problema com mais de um procedimento de resolução, no caso específico diagrama de árvores (ou árvores de possibilidades) e tabela de dupla entrada.

Analogamente no livro de Dante (2016) observamos um problema ser resolvido por meio da árvore de possibilidades e PFC, caracterizando o panorama ilustrativo.

Nos dois casos a ideia de enumeração das possibilidades é trabalhada na parte introdutória dos capítulos com os problemas classificados por Pessoa e Borba (2009) como problemas de produto cartesiano, geralmente apresentado antes mesmo dos outros problemas. Para ser possível a enumeração geralmente são trazidos problemas com menor número de possibilidades inicialmente.

Figura 5 - Panorama ilustrativo com árvore de possibilidade e PFC



Fonte: Dante(2016, p. 205)

Para a resolução das apresentações em combinatória se faz necessário desenvolver algumas estratégias para solucionar as atividades propostas nos livros de Souza(2013) e Dante(2016). Portanto, será demonstrado o quantitativo dessas representações em cada livro analisado.

Tabela 7 – Números de Representações em Fatorial

TIPOS DE REPRESENTAÇÕES EM FATORIAL	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%2
Fórmula	15	60,0	6	35,3
Algoritmo	4	16,0	-	-
Objeto concreto/virtual	6	24,0	-	-
PFC	-	-	11	64,7
TOTAL	25	100,0	17	100,0

Fonte a Autora (2018)

De acordo com a tabela acima, Souza(2013) apresenta 25 atividades e 60% dessas atividades são solucionadas através de fórmulas $n!$, não apresenta nenhuma resolução através de princípio fundamental da contagem. Por sua vez, Dante

apresenta 64,7% de suas atividades pelo princípio fundamental da contagem. Quanto ao objeto concreto e virtual através de ferramentas com, por exemplo, a calculadora científica.

Tabela 8 – Números de Representações Arranjo simples

TIPOS DE REPRESENTAÇÕES EM ARRANJO SIMPLES	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%
Fórmula	21	56,8	11	26,8
Algoritmo	4	10,8	6	14,6
Objeto concreto/virtual	6	16,2	-	-
Diagrama de árvore	2	5,4	2	4,9
Fórmula e algoritmo	3	8,1	-	-
PFC	1	2,7	22	53,7
TOTAL	37	100	41	100

Fonte: A autora(2018)

Na análise das representações em Arranjo simples, foram analisadas 37 atividades em Souza e 41 atividades em Dante. Quando Souza propõe em seu livro 56,8% através das fórmulas. Dante propõe as resoluções através do PFC que representa 53% das atividades.

Tabela 9 – Números de Representações em Permutações simples

TIPOS DE REPRESENTAÇÕES EM PERMUTAÇÃO SIMPLES	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%
Fórmula	29	87,9	14	38,9
Objeto concreto e virtual	1	3,0	-	
Diagrama de venn (subconjuntos)	1	3,0	-	
PFC	-	-	19	52,8
Diagrama de árvore	-	-	1	2,8
Algoritmo	2	6,1	2	5,6
	33	100,0	36	100,0

Fonte: A autora (2018)

Analisando esta tabela, percebe-se que a quantidade de representações em ambos os autores estão quase equivalente. Contudo, nas representações por representações Souza infere a 87,9% das atividades através de fórmulas. Pelos enunciados. Em relação a Dante. Enquanto que Dante utiliza-se de 52,8% das resoluções através do princípio fundamental da contagem.

Tabela 10 – Números de Representações Combinação simples

TIPOS DE REPRESENTAÇÕES EM COMBINAÇÃO SIMPLES	SOUZA (2013)	%	DANTE (2016)	%
Fórmula	31	68,9	39	81,3
Algoritmo	4	8,9	2	4,2
Objeto concreto e virtual	6	13,3	-	-
Subconjunto e fórmulas	1	2,2	-	-
Diagrama	3	6,7	3	6,3
Tabela e algoritmo	-	-	1	2,1
Listagem/subconjunto/fórmulas	-	-	3	6,3
	45	100,0	48	100,0

Fonte: a Autora (2018)

Nesta tabela os autores tiveram seus quantitativos de representações para a solução das atividades contidas no livro através de fórmulas. Porém, Souza através do uso de objetos concretos, enquanto que algumas representações não foram vistas tanto em Dante(2016) quanto Souza(2013).

5.4 Resultados da análise do livro de Souza e Dante tipos combinatória

Foram analisadas 171 atividades no livro de Souza (2013) dos conteúdos de Fatorial, permutação simples, Arranjo e Combinação simples. Onde também foram analisados os diversos panoramas e representações do livro do professor do 2º ano do ensino médio

Foram analisadas 159 atividades no livro de Dante (2016), referente aos conteúdos combinatórios de Fatorial, permutação simples, Arranjo e Combinação simples. Diversos panoramas e representações foram analisados do livro do professor do 2º ano do ensino médio

Considerações, ambos os livros são de ótima qualidade e atende os requisitos de escolha do livro conforme o PNLD. Recomendamos aos graduandos em Matemática inferir-se na formação continuada nos diversos conteúdos de matemático incluindo-se análise combinatória, já que no ensino médio a matemática é generalista.

Em ambos os livros analisados no tocante aos tipos de combinatória os panoramas que mais apareceram foram os formalista nos tipos de combinatória tanto em Souza (2013) Quanto em Dante (2016) e as representações quanto em também utilizadas foram a fórmulas através

5.5 Discussão comparativa dos capítulos de Combinatória na introdução dos conceitos nos Livros Didáticos analisados

Dentro destas circunstâncias, observa-se que os contextos dos exercícios propostos tanto em Souza (2013) como em Dante (2016) são diferentes mais os panoramas e representações para a solução dos exercícios/problemas propostos no livro do professor são solucionados através das mesmas representações. E em alguns são através do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio multiplicativo.

Na análise comparativa entre os livros, escolheram-se alguns exercícios de Análise combinatória relativo ao princípio da contagem, fatorial, arranjos simples, permutação simples e Combinação simples. Quando serão avaliados os panoramas de formalista, instrumental e ilustrativo.

Para melhor compreender esses panoramas, segundo Pessoa e Borba (2009, p. 116) e Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, p. 609) citam a definição utilizada por Merayo (2001) quando, a partir de um conjunto formado por m elementos, define combinação de ordem n desses elementos como: :

[...] cada grupo formado por n elementos tomado dos m , tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que dois agrupamentos são iguais se contém os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem. (PESSOA e BORBA, 2009, P 116).

Para os autores, demonstram que no PFC dois grupos mesmo que estejam iguais e em posições distintas essa ordem não influi nesses agrupamentos o que iremos ver nos exercícios proposto. Tanto no princípio da contagem quando no fatorial, permutação simples arranjo simples e combinação.

Seção 1	
Souza	Dante
Princípio da contagem	Princípio da contagem
Calcular quantas possibilidades você pode com dois tipos de pães e quatro receitas pode se chegar a quantidade de possibilidades quando neste caso o autor usou o panorama ilustrativo que pelos cálculos chega-se a $2 \times 4 = 8$ possibilidades diferentes	A partir de um Roteiro saindo de Recife para Porto Alegre passando por São Paulo havendo 5 roteiros de diferentes de Recife a São Paulo e de São Paulo para Porto Alegre apenas 4 roteiros. O autor apresenta um panorama ilustrativo com diagrama de árvore e que chega a resolução de $5 \times 4 = 20$

Analisando ambas as propostas dos autores aos problemas de contagem se

dão em contextos diferentes. Quando se utilizaram do panorama ilustrativo que faz uma diferença muito grande para a compreensão do aluno na resolução desse tipo de problema. Os problemas foram escolhidos quando da análise dos livros dentro dos mesmo tipos de combinatória.

Seção 2	
Souza	Dante
Fatorial	Fatorial
Souza antes do exercício define o conceito de fatorial abrangendo os panoramas formalista e instrumental para a resolução de fatorial como visto na pagina 26 deste trabalho	O autor também se apresenta dentro do panorama formalista e instrumental para a resolução dos problemas apresentado na pagina 30 deste trabalho

Analisando essa proposta não temos como diferenciar um do outro. Pois, ambos usam os mesmos panoramas para a resolução dos problemas descritos nas paginas 27 e 31 deste trabalho.

Seção 3	
Souza	Dante
Arranjo simples	Arranjo simples
No primeiro exercício o autor apresenta um panorama ilustrativo enquanto que no segundo exercício o autor utiliza-se do panorama instrumental paginas 26 e 27 deste trabalho	Os exercícios apresentado por Dante na página 31 deste trabalho apresentam os três panoramas formalista, instrumental e ilustrativo.

Nesta situação Dante(2016) em sua proposta apresenta os três panoramas o que facilita em muito a concepção do aluno. Pois, alguns compreendem mais uma situação que outra. Isto não quer dizer que na proposta de Souza (2013) por ter utilizado apenas dois panoramas o aluno não vá aprender. Vai depender de como o professor ao utilizar os livros didáticos desses autores irá repassar esses conteúdos de forma clara e objetiva.

Seção 4	
Souza	Dante
Permutação simples	Permutação simples
Neste tipo de combinatória o autor apresenta os panoramas formalistas e instrumental para resolução de permutação simples conforma a pagina 27 deste trabalho.	No exercício proposto da pagina 31, o autor apresenta os três panoramas para a resolução de permutação simples. Que facilita em muito a compreensão do aluno como estratégia de ensino/aprendizagem.

Aqui cada um apresenta quase os mesmos panoramas para a resolução de permutação simples o importante nessa situação é de que o professor no ensino de combinatória ao se deparar com esse cenário deve utilizar-se dos panoramas e também desenvolver várias situações problemas com permutação simples para que o aluno não só possa compreender os conceitos mais também desenvolver a permutação simples em vários cenários

Seção 5	
Souza	Dante
Combinação simples	Combinação simples
Antes de apresentar o problema o autor descreve o conceito de combinação e na ilustração do livro ele apresenta os três panoramas	Mesmo em contextos diferente os autores foram bem similares na resolução de problema de combinatória para os exercícios de combinação simples.

Nestas condições mesmo apresentando contextos distintos os autores utilizaram os mesmo panoramas para a resolução de combinatória. Cabendo ao professor utilizar-se desses panoramas e realizar bastante os exercícios com os alunos para que eles possam resolver problemas de combinação simples.

Com isso, no capítulo de combinatória, os indícios apresentados indicam que os dois livros analisado tem uma boa qualidade. Ambos os livros didáticos são de excelente qualidade e que nas páginas distintas para os exercícios encontra-se bastantes exercícios inclusive com alguns que já foram colocados em provas do ENEM e concursos públicos cabendo o professor explora essa situações junto aos alunos do 2º ano do ensino médio.

De forma que os conceitos de combinatória apresentado aos alunos em ambos os livros possam criar um processo de construção, bem formadas e concebidas pelos professores de Matemática. Quando nessa construção esses conteúdos de combinatória serão construída pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos nesse processo de ensino aprendizagem reflitam ativamente sobre elas e as testem através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer.

Dessa forma, consideramos importantes as discussões, em grupos de trabalho, com os alunos. Quanto mais condições são dadas aos alunos para pensar e testar uma ideia emergente, maior é a chance de essa ideia ser correta e integrada numa rica teia de compreensão relacional na aprendizagem de combinatória.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de combinatória tem sido um grande desafio para o ensino aprendizagem de combinatória. Cujas dificuldades ficam nas formas de abordagem do professor como também na compreensão do aluno que muitas vezes chegam ao ensino médio sem dominar as quatro operações matemáticas principalmente a multiplicação e divisão. Que são muitos solicitados na resolução de problemas no ensino/aprendizagem de combinatória.

Cabe ao professor nesse sentido desenvolver algumas estratégias e dentre estas se encontra os panoramas formalistas, instrumentalista e ilustrativo para a solução dos problemas de combinatória. Sabendo-se que em uma sala de aula uma parte dos alunos são mais desenvolvidos que outros principalmente em termos de raciocínio combinatório de matemático e nos cálculos mentais.

Nesse sentido ao analisarmos os livros didáticos de Dante e Souza que são utilizados como base pedagógica para o ensino de matemática no 2º ano do médio, Logo, se verifica que desde o princípio da contagem utilização as propriedade multiplicativa para se chegar aos resultados proferidos. Mas também, além do conceito formalista pode-se fazer o diagrama de árvore para melhor compreensão, já que muitos alunos não irão compreende a contextualização do conceito e muito menos as fórmulas devido a compreensão de saber que é “n” ou quem é “p”. Cuja dificuldade remete-se as séries finais do ensino fundamental. Quando esses conteúdos na maioria das escolas não são apresentados aos alunos.

Ambos os livros são muito bons, muito embora Dante seja mais direto aplicando mais o instrumentalismo dentro de suas abordagens que Souza. Isto não quer dizer que Dante não aplica outros panoramas. Como fica configurado na análise de suas abordagens de combinatória.

Após a análise dos livros didáticos de Matemática dedicados ao 2º ano do ensino médio, foi possível verificar a importância do cuidado ao escolher um livro. Com o objetivo de verificar a aplicabilidade dos livros didático no ensino médio regular, identificou-se o livro, em seguida analisou-se a abordagem introdutória dos conteúdos que estavam distribuídos em capítulos, e dentro de dois capítulos distintos verificou-se como era feita a introdução dos conteúdos, a abordagem conceitual e também os exercícios propostos. Essa análise deve servir para a utilização adequada do livro didático em sala de aula, de forma a ser usado como

uma ferramenta de ensino, e não para a simples reprodução. A própria ficha de avaliação criada pelo MEC ajuda a verificar a abordagem dos conteúdos.

Quando recomendamos que os conteúdos de combinatória abordada na sala de aula devam ser apresentados de forma que os alunos percebam a sua vinculação com a realidade. Cabe ao professor no ensino de combinatória desenvolver os vários panoramas sob a ótica de um bom projeto educacional que exige um professor mais atuante e contemporizado

REFERÊNCIAS

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. **História da educação** / Maria Lúcia de Arruda Aranha. - 2ª ed. rev. e atual. - São Paulo: Moderna, 1996.

AZEVEDO, J.; BORBA, R; BITTAR, M. **A Identificação de Conversões em Situações Combinatórias por alunos de Anos Iniciais**. X Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática 18 e 19 / agosto /2016.

BASTOS, A.C. O Ensino da Análise Combinatória em Sala de Aula, a Partir de Situações Problema e sob uma Abordagem Histórica. In: EBRAPEM, 17, 2013. **Anais...**Vitoria, ES: 2013 p. 1-8.

BATANERO, C.; GODINO, J. D; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BITTENCOURT, C. M. F. Em foco: História, produção e memória do livro didático. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 471-473, set./dez. 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S1517-97022004000300007>>. Acesso em: 16 de abr. 2017.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**. Vol 6. 1979

BERGE, C. **Principles of Combinatorics**. Vol 72. New York: Academic Press,1971.

BORBA, Rute Elizabete de Sousa Rosa. ANTES QUE SEJA TARDE: aprendendo Combinatória desde o início da escolarização *Before it's too late: learning Combinatorics since early schooling*. Em Teia | **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - ISSN: 2177-9309**, [S.l.], v. 7, n. 1, set. 2016. ISSN 2177-9309. Disponível em: <<http://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/3883>>. Acesso em: 10 out. 2017.

_____. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. Anais... Curitiba: SBEM, 2013.p.1-16.

_____. O raciocínio combinatorio na educação básica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.p.1-13.

BORBA, R.; ROCHA, C.; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigação e prática de Ensino na Educação Básica. **Bolema**, Rio claro (SP). V. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez. 2015. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n53/1980-4415-bolema-29-53-1348.pdf> .

Acessado em 29 Dez. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p. 1. Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática: Ensino de primeira à quarta série. I. Título. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> >. Acesso em : 16 abr. 2017.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p. 1. Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática: Ensino de quinta a oitava séries. I. Título.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho; PEREIRA, Ducival Carvalho; SANTOS, Maria de Lourdes Silva. O Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória: o desempenho de alunos de Belém do Pará. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016.p.1-12.

CORREIA, Paulo Ferreira; FERNANDES, José Antônio. Estratégias Intuitivas de Alunos do 9.º Ano de Escolaridade na Resolução de Problemas de Combinatória. In: BARCA, A.; PERALBO, M.; PORTO, A.; Duarte da Silva, B. e Almeida, L. (Org.). **Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagogía**. A.Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 2007,

COUTINHO, Jean Lázaro da Encarnação; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Uma matemática para o ensino do conceito de combinação simples a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** [S.l.], v. 6, n. 2, set. 2015. Disponível em: <<https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/viewFile/2259/1826>> Acesso em : 03/03/2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contextos e aplicações**. Manual do professor. 2º ano do Ensino médio. 3ª edição. Editora Ática. São Paulo: 2016

FISCHBEIN, Ephraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel. Dordrecht,1975.

INHELDER, B; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976.

ICSMT. **International Conference on Mathematics Textbook Research and Development** 2014. University of Southampton, UK, 29-31 July 2014. Disponível em: <http://blog.soton.ac.uk/icmtrd2014/>. Acessado em: 27 DEZ 2017.

GONÇALVES, R.R.S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. Dissertação. 111 f. Programa de Mestrado Profissional Em Matemática. IMPA. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/rafaela_goncalves.pdf Acesso em 27 Dez 2017

LIMA, A.P.B. **Princípio Fundamental da Contagem**: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações Combinatórias. Dissertação. 138f. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE. Recife, 2015. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/18810/ANA%20PAULA%20LIMA%20DISSERTA%C3%87%C3%83O%20VERS%C3%83O%20FINAL.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acessado em: 29 Dez 2017.

LIMA, I.B. **Aulas de Combinatória no Ensino Médio**: como estão ocorrendo. Dissertação. 114f. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - EDUMATEC, UFPE. Recife, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/17751/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Itatiane%20Borges%20Lima.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acessado em: 29 Dez 2017.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria. **Educación Matemática**, México. 1996. v.8 (1), p. 26-39. Disponível em : <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf>.

PESSOA, C. **Quem dança com quem**: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Tese. f Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife:UFPE, 2009. Disponível em: http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/4189/arquivo925_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acessado em: 19 Dez. 2017.

ROA, R. **Razonamiento Combinatorio em estudiantes con preparaci3n matemática avanzada**.2000. 196 f. Tese. Universidade de Granada, Granada.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

ROCHA, C.A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios**: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 191f. Dissertação. Pós-graduação em

Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE, 2011. Disponível em http://repositorio.ufpe.br:8080/bitstream/handle/123456789/3774/arquivo2888_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y . Acessado em: 29 Dez 2017.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar Matemática**. 2 ano Ensino médio. 2ª Edição. Editora FTD. São Paulo. 2013

SOUSA, Kátia do Nascimento Venerando. **ALFABETIZAÇÃO MATEMÁTICA: Considerações sobre a teoria e a prática**. 2010. Revista de Iniciação Científica da FFC. Disponível em < <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/view/273/259> >. Acesso em 16 de abr. 2017.

VERGNAUD, Gérard. A teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didática das matemáticas**. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.

WILSON, R.; WATKINS, J.J. **Combinatorics**: ancient e modern. United Kingdon: Oxford University Press, 2013.

WIELEITNER, H. **Historia de la Matematica**. Barcelona: Labor. 1932