



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

GILVANEIDE EVELYN SILVA ARAÚJO

**INVESTIGANDO O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO
GEOMÉTRICO DURANTE A DISCIPLINA FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA
PLANA**

CARUARU

2018

GILVANEIDE EVELYN SILVA ARAÚJO

**INVESTIGANDO O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO
GEOMÉTRICO DURANTE A DISCIPLINA FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA
PLANA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Matemática-Licenciatura do
Centro Acadêmico do Agreste da
Universidade Federal de Pernambuco para
obtenção do título de Licenciada em
Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof^a. Ma. Cristiane de Arimatéa Rocha

CARUARU

2018

Catálogo na fonte:
Bibliotecária – Simone Xavier - CRB/4 - 1242

A663i Araújo, Gilvaneide Evelyn Silva.
 Investigando o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico durante a
disciplina Fundamentos da geometria plana. / Gilvaneide Evelyn Silva Araújo. – 2018.
76 f. : 30 cm.

 Orientadora: Cristiane de Arimatéa Rocha.
 Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de
Pernambuco, CAA, Licenciatura em Matemática, 2018.
 Inclui Referências.

 1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Congruências. 3. Geometria plana. 4.
Licenciatura. I. Rocha, Cristiane de Arimatéa (Orientadora). II. Título.

CDD 371.12 (23. ed.)

UFPE (CAA 2018-404)

**INVESTIGANDO O NÍVEL DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO
GEOMÉTRICO DURANTE A DISCIPLINA FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA
PLANA**

GILVANEIDE EVELYN SILVA ARAÚJO

Monografia submetida ao Corpo Docente do Curso de MATEMÁTICA - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco e _____ em 10 de dezembro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof^a. Cristiane de Arimatéa Rocha
(Orientadora)

Prof^a. Simone Moura Queiroz
(Examinadora Interna)

Prof^o. Cleiton de Lima Ricardo
(Examinador Interno)

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, por me conceder paz, saúde e forças para superar os obstáculos que surgiram ao longo dessa jornada.

Aos meus pais, Maria Helena da Silva Araújo e Gilvan Lins Santana de Araújo pelo apoio e incentivo em todas as etapas da minha vida acadêmica.

A minha orientadora, Cristiane de Arimatéa Rocha, pela paciência, compreensão e momentos de aprendizagem. Sua competência, ideias e sugestões foram fundamentais para construção desta pesquisa.

Ao meu namorado, Lázaro Rangel, por toda ajuda durante o curso, por estar sempre ao meu lado me incentivando e acreditando em mim e por me fazer imensamente feliz. Obrigada por fazer parte da minha vida.

Aos meus amigos, Diego Jonata, Rúben Félix e Edivanilson Silva, por estarem comigo durante todo o curso, pelas longas conversas, pelos momentos de aprendizagem e principalmente de diversão que certamente foi o que marcou a nossa amizade. Vocês são os melhores.

Por fim, quero expressar a minha gratidão a todos que de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

A pouca atenção dada ao ensino da Geometria na escolarização básica é um fator que pode justificar a dificuldade de alguns alunos que ingressam no Ensino Superior, em especial no curso de Licenciatura em Matemática. Ao estudarmos Geometria, desenvolvemos o raciocínio geométrico e nos tornamos capazes de resolver situações geométricas com mais facilidade. O presente trabalho teve como objetivo investigar o nível de pensamento geométrico de alguns alunos do curso de Licenciatura em Matemática antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana, tendo como foco a congruência de triângulos. O principal referencial teórico utilizado na nossa pesquisa foi a Teoria de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele. Para coleta de dados elaboramos dois questionários que foram aplicados no início e no final do semestre, ambos compostos por questões envolvendo congruência de triângulos e apontando para os diferentes níveis de pensamento geométrico da teoria utilizada. Participaram da pesquisa dezoito estudantes matriculados na disciplina Fundamentos da Geometria Plana. A análise dos dados constatou que alguns estudantes se encontram no nível de Visualização e Análise com relação ao conteúdo de Congruência de triângulos mesmo depois do pós-teste aplicado. Podemos pensar em justificativas para esse resultado, quando observamos respostas em branco, o que pode ser considerado como dificuldades dos licenciandos, ou com o conteúdo dos questionários, ou com o número de questões pedidas. Outro fator que pode ter contribuído para esse resultado é que tanto a ementa da disciplina, quanto a metodologia adotada pela mesma, não tem como objetivo focalizar a discussão no pensamento geométrico de Van Hiele. Consideramos ainda que o fato de pensar um conteúdo geométrico nos quatro níveis de pensamento geométrico originou aprendizagens relativas à congruência de triângulos, assim como nos permitiu observar o nível de pensamento geométrico que foi desenvolvido/apresentado gerando discussões que podem ser aproveitadas na formação inicial de professores de matemática a fim de minimizar as dificuldades encontradas no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Palavras-chave: Geometria. Congruência de Triângulos. Pensamento Geométrico. Licenciandos em Matemática.

ABSTRACT

The little attention given to the teaching of Geometry in basic schooling is a factor that may justify the difficulty of some students when of entering Higher Education, especially in the degree course in Mathematics. When we study Geometry, we develop geometric reasoning and become able to solve geometric situations more easily. The present work had as objective to investigate the level of geometric thinking of some students of the Degree in Mathematics before and after studying the discipline Fundamentals of Flat Geometry, focusing on the congruence of triangles. The main theoretical reference used in our research was Van Hiele's Theory of Geometric Thought Development. For data collection, we developed two questionnaires that were applied at the beginning and at the end of the semester, both composed of questions involving congruence of triangles and pointing to the different levels of geometric thinking of the theory used. Participated in the study, eighteen students matriculated in the discipline Fundamentals of Flat Geometry. The analysis of the data found that some students are in the level of Visualization and Analysis with respect to the content of Congruence of triangles even after the applied post-test. We can think of justifications for this result when we observe blank answers, which can be considered as difficulties of the students, or with the content of the questionnaires, or with the number of questions asked. Another factor that may have contributed to this result is that both the syllabus of the discipline and the methodology adopted by it do not aim to focus the discussion on Van Hiele's geometric thinking. We also consider that the fact of thinking a geometric content in the four levels of geometric thought originated learning related to the congruence of triangles, as well as allowed us to observe the level of geometric thinking that was developed/presented generating discussions that can be used in the initial teacher training of mathematics in order to minimize the difficulties encountered in the development of geometric thinking.

Keywords: Geometry. Congruence of Triangles. Geometric Thinking. Graduating in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação de um triângulo.....	22
Figura 2: Triângulo equilátero.....	23
Figura 3: Triângulo isósceles.....	23
Figura 4: Triângulo escaleno	24
Figura 5: Triângulo acutângulo	24
Figura 6: Triângulo retângulo.....	24
Figura 7: Triângulo obtusângulo	25
Figura 8: Triângulos congruentes	25
Figura 9: Triângulos congruentes pelo caso LAL	26
Figura 10: Triângulos congruentes pelo caso ALA	26
Figura 11: Triângulos congruentes pelo caso LLL.....	27
Figura 12: Resposta do estudante A11 - Questão 1 - Pré-teste	37
Figura 13: Resposta do estudante A14 - Questão 1 - Pré-teste	37
Figura 14: Resposta do estudante A9 - Questão 1 - Pós-teste.....	38
Figura 15: Resposta do estudante A4 - Questão 1 - Pós-teste.....	38
Figura 16: Resposta do estudante A8 - Questão 2: item a - Pré-teste.....	39
Figura 17: Resposta do estudante A11 - Questão 2: item b - Pré-teste.....	40
Figura 18: Resposta do estudante A9 - Questão 2: item a - Pós-teste	40
Figura 19: Resposta do estudante A3 - Questão 2: item b - Pós-teste	41
Figura 20: Resposta do estudante A6 - Questão 3 - Pré-teste	42
Figura 21: Resposta do estudante A1 - Questão 3 - Pré-teste	42
Figura 22: Resposta do estudante A12 - Questão 3 - Pós-teste.....	43
Figura 23: Resposta do estudante A15 - Questão 3 - Pós-teste.....	43
Figura 24: Resposta do estudante A1 - Questão 4: item a - Pré-teste.....	45
Figura 25: Resposta do estudante A9 - Questão 4: item b - Pré-teste	45
Figura 26: Resposta do estudante A14 - Questão 4: item b - Pós-teste	45
Figura 27: Resposta do estudante A2 - Questão 5 - Pré-teste	47
Figura 28: Resposta do estudante A9 - Questão 5 - Pré-teste	47
Figura 29: Resposta do estudante A6 - Questão 5 - Pós-teste.....	48
Figura 30: Resposta do estudante A16 - Questão 5 - Pós-teste.....	48
Figura 31: Resposta do estudante A6 - Questão 6 - Pré-teste	49
Figura 32: Resposta do estudante A16 - Questão 6 - Pré-teste	50

Figura 33: Resposta do estudante A2 - Questão 6 - Pós-teste.....	50
Figura 34: Resposta do estudante A4 - Questão 6 - Pós-teste.....	51
Figura 35: Resposta do estudante A13 - Questão 7 - Pré-teste	52
Figura 36: Resposta do estudante A11 - Questão 7 - Pré-teste	53
Figura 37: Resposta do estudante A13 - Questão 7 - Pós-teste.....	53
Figura 38: Resposta do estudante A6 - Questão 8: item a - Pré-teste.....	55
Figura 39: Resposta do estudante A7 - Questão 8: item b - Pré-teste	56
Figura 40: Resposta do estudante A3 - Questão 8: item c - Pós-teste	56
Figura 41: Resposta do estudante A16 - Questão 8: item d - Pós-teste	57

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Questões 1 do pré-teste e do pós-teste.....	30
Quadro 2: Questão 2 do pré-teste e do pós-teste	31
Quadro 3: Questão 3 do pré-teste e do pós-teste	31
Quadro 4: Questão 4 do pré-teste e do pós-teste	32
Quadro 5: Questões 5 do pré-teste e do pós-teste.....	33
Quadro 6: Questões 6 do pré-teste e do pós-teste.....	33
Quadro 7: Questões 7 do pré-teste e do pós-teste.....	34
Quadro 8: Questões 8 do pré-teste e do pós-teste.....	34
Quadro 9: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 1 do pré-teste e do pós-teste	36
Quadro 10: Níveis de pensamento geométrico identificados nos itens a e b da questão 2 presente no pré-teste e no pós-teste	39
Quadro 11: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 3 do pré-teste e do pós-teste.....	41
Quadro 12: Número de acertos e erros identificados no item a e níveis de pensamento geométrico identificados no item b da questão 4 presente no pré-teste e no pós-teste.....	44
Quadro 13: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 5 do pré-teste e do pós-teste.....	46
Quadro 14: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 6 do pré-teste e nos itens a e b da questão 6 do pós-teste	49
Quadro 15: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 7 do pré-teste e do pós-teste.....	51
Quadro 16: Níveis de pensamento geométrico identificados nos itens a, b, c e d da questão 8 do pré-teste e do pós-teste	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Quantidade individual e frequência dos níveis de pensamento geométrico identificados nas respostas do pré-teste	58
Tabela 2: Quantidade individual e frequência dos níveis de pensamento geométrico identificados nas respostas do pós-teste.....	58
Tabela 3: Visão geral dos níveis de pensamento geométrico identificados nas questões do pré-teste e do pós-teste	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	O ENSINO DE GEOMETRIA.....	14
3	O MODELO VAN HIELE DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO	17
3.3	Os Níveis de Raciocínio	18
3.3.1	Nível 0: Visualização.....	18
3.3.2	Nível 1: Análise	18
3.3.3	Nível 2: Dedução Informal	19
3.3.4	Nível 3: Dedução Formal	19
3.3.5	Nível 4: Rigor.....	20
4	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E SUA RELAÇÃO COM OS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE	21
4.1	O Estudo de Triângulos e os Níveis do Pensamento Geométrico de Van Hiele	22
4.1.1	Triângulos.....	22
4.1.2	Classificação dos Triângulos.....	23
4.1.3	Definição de Congruência	25
4.1.4	Casos de Congruência.....	26
5	ASPECTOS METODOLÓGICOS	28
5.1	Os instrumentos de coleta de dados	29
6	ANÁLISE, DISCUSSÃO E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS	36
6.1	Análise da Questão 1.....	36
6.2	Análise da Questão 2.....	38
6.3	Análise da Questão 3.....	41
6.4	Análise da Questão 4.....	43
6.5	Análise da Questão 5.....	46
6.6	Análise da Questão 6.....	48
6.7	Análise da Questão 7.....	51
6.8	Análise da Questão 8.....	53
6.9	Classificação das Respostas Frequentes e Comparação entre o Pré-teste e o Pós-teste	57
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
	REFERÊNCIAS	65
	APÊNDICE A: PRÉ-TESTE	67
	APÊNDICE B: PÓS-TESTE.....	72

1 INTRODUÇÃO

A Geometria, uma das áreas mais antigas da Matemática, se faz presente em inúmeras ocasiões do dia-a-dia e é de grande importância em diversos aspectos do mundo em que vivemos. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a geometria deve ser trabalhada por todo o Ensino Fundamental e Ensino Médio, não devendo ser abordada de forma isolada, mas sim, relacionada com outras áreas do conhecimento.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 51)

Embora o ensino de Geometria seja considerado bastante importante, tamanha importância não se reflete em sala de aula, pois alguns professores dão maior prioridade ao ensino de Aritmética e Álgebra. (LIMA, 2014).

No entanto, pudemos encontrar no estudo de Lorenzato (1995), que são muitas as causas que levam à omissão do ensino da Geometria na Educação Básica, dentre elas podemos citar a má formação dos professores que por não possuírem conhecimento geométrico suficiente, não ensinam a Geometria ou o fazem de maneira superficial; a grande importância atribuída ao livro didático, seja pela falta de tempo do professor ou pela maneira que o conteúdo Geometria é abordado nos livros; o Movimento da Matemática Moderna que também contribuiu para a diminuição ou exclusão da Geometria no Ensino Básico.

A grande dificuldade apresentada pelos alunos ao cursarem a disciplina de Fundamentos da Geometria Plana, presente na grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática, é um fator preocupante. No último ano, especificamente nos períodos 2017.1 e 2017.2, o índice de reprovação foi de 50% no primeiro semestre e 53,33% no segundo semestre, conforme mostrado no documento fornecido pela secretaria do curso. Esses estudantes não conseguiram atingir a média mínima para a aprovação ou simplesmente desistiram de cursar a disciplina.

Um dos fatores que pode justificar tamanha dificuldade é que Fundamentos da Geometria Plana é a primeira disciplina de caráter demonstrativo do curso. De acordo com sua ementa, a mesma propicia ao futuro professor de Matemática uma visão mais ampla daquilo que será ensinado por ele na Educação Básica, apresentando de forma axiomática a

Geometria Euclidiana Plana, enfatizando os teoremas centrais e a resolução de problemas, recorrendo às construções geométricas. Além disso, alguns dos principais objetivos da disciplina são: desenvolver o pensamento geométrico, enfatizando as operações e transformações de objetos geométricos e a resolução de problemas envolvendo figuras planas; desenvolver o pensamento dedutivo e a argumentação em geometria, enfatizando as relações de implicação e equivalência entre axiomas e teoremas e a distinção entre os objetos geométricos idealizados e os objetos materiais que os evocam.

O modelo de Van Hiele de pensamento geométrico consiste em cinco níveis de raciocínio e aprendizagem em geometria: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. O mesmo pode ser usado tanto para orientar a formação quanto para avaliar as habilidades dos alunos em geometria. Dessa maneira, levantamos a seguinte questão: Em que nível de desenvolvimento do pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele encontram-se os alunos antes e depois de cursarem a disciplina de Fundamentos da Geometria Plana?

De acordo com o plano da disciplina do semestre 2018.1, pudemos observar que o principal livro adotado pelo professor foi “Geometria Euclidiana Plana” de Barbosa (2012). Em uma breve análise, verificamos que Congruência de Triângulos é o conteúdo que tem maior destaque, pois os resultados apresentados no capítulo, servem de suporte tanto para compreensão da maioria dos conteúdos denotados nos capítulos seguintes, quanto para resolução de grande parte dos exercícios propostos pelo livro.

Diante do que foi exposto e com a finalidade de responder o problema de pesquisa apresentado, o presente trabalho teve como objetivo geral *investigar o nível de pensamento geométrico de alguns alunos do curso de Licenciatura em Matemática antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana, tendo como foco a congruência de triângulos*. De maneira mais específica, os nossos objetivos foram:

- Verificar os procedimentos dos alunos apresentados na resolução de problemas de congruência de triângulos;
- Identificar os níveis de pensamento geométrico em que alunos participantes da pesquisa se encontram, antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana;
- Verificar as mudanças no nível de pensamento geométrico dos alunos sobre congruência de triângulos.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA

A carência do ensino da Geometria, no que diz respeito às etapas da escolarização básica, justifica a grande dificuldade de muitos alunos que ingressam no Ensino Superior, em especial no curso de Licenciatura em Matemática, como aponta Lima (2014),

[...] muitos dos alunos que chegam ao Ensino Superior possuem uma formação fragilizada quanto à fase de escolarização da Educação Básica, de modo que determinados conteúdos nunca tenham sido vistos por eles. Isso dificulta a aprendizagem em relação aos conteúdos que são ministrados no curso de Licenciatura em Matemática, nesse caso em específico, a Geometria (p. 14).

Lorenzato (1995) evidencia que muitas são as causas que levam à omissão do ensino da Geometria, porém, duas delas estão diretamente ligadas à sala de aula: a primeira é o fato de que muitos professores não possuem conhecimento geométrico necessários para que sejam capazes de exercer suas práticas pedagógicas, por não conhecerem o conteúdo, desconhecem o poder, a beleza e a importância da Geometria no que diz respeito à formação de futuros cidadãos, tudo indica que tais professores vivem um dilema entre tentar ensinar ou simplesmente não ensinar a Geometria; a segunda causa origina-se da grande importância atrelada ao livro didático, seja pela má formação ou pela grande jornada de trabalho a qual os professores estão submetidos.

Com relação à abordagem do conteúdo Geometria nos livros didáticos,

[...] infelizmente em muitos deles a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo (LORENZATO, 1995, p. 4).

O Movimento da Matemática Moderna (MMM), ocorrido na década de 1960, reformulou e modernizou o currículo escolar especialmente no nível ginásial e secundário, hoje denominados Ensino Fundamental e Ensino Médio, respectivamente. Tais mudanças na Educação Matemática do Brasil também contribuíram para a ausência do ensino da Geometria.

O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcadamente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática

Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje (LORENZATO, 1995, p. 4).

Embora as causas da omissão do ensino da Geometria sejam relevantes, o professor possui um papel essencial no ensino em sala de aula, uma vez que é ele quem decide quais conteúdos devem ser trabalhados e se devem ser mais aprofundados ou não. Dessa maneira, é evidente que professores com pouco conhecimento em Geometria irão priorizar conteúdos com os quais possuam um domínio maior.

Lima (2014) fez um trabalho em que realiza uma investigação nas ementas e grades curriculares do conteúdo de Geometria no curso de Licenciatura em Matemática de algumas Instituições de Ensino Superior. Partindo do pressuposto de que os estudantes ingressam no curso de Licenciatura em Matemática com pouco ou nenhum conhecimento em Geometria e que, após se formarem, precisarão ensinar esses conteúdos, a autora considerou importante analisar o que está sendo ensinado em tais cursos e comparar com o que está estabelecido para ser ensinado no Ensino Fundamental e Ensino Médio em relação ao conteúdo Geometria.

Segundo Lima (2014), embora as Instituições de Ensino Superior (IES) pesquisadas ofereçam as disciplinas de Geometria, trabalhando os conteúdos propostos pelos Documentos Oficiais, para serem ensinados no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, ainda existem lacunas relacionadas ao conhecimento geométrico nos alunos. Sendo assim, a autora ressalta a necessidade dos formadores de futuros professores trabalharem a Geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática de maneira suficiente e adequada, com a certeza de que tais profissionais estão capacitados para exercerem sua profissão.

Em seu estudo, Lorenzato (1995) chama a atenção para a necessidade do ensino da Geometria nas escolas, com o argumento de que há um desenvolvimento do pensamento geométrico e do raciocínio visual por parte dos alunos ao estudarem Geometria. Tornando-se mais fácil a resolução de situações geometrizadas que poderão ocorrer no cotidiano, além de que poderão se utilizar da Geometria como uma ferramenta de fácil compreensão e resoluções de questões relacionadas a outras áreas do conhecimento.

Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. A Geometria está por toda parte, desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la... Mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área,

volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria (LORENZATO, 1995, p. 5, grifo do autor).

Partindo do pressuposto evidenciado pelo autor no que diz respeito à existência do desenvolvimento do pensamento geométrico ao estudarmos geometria, consideramos como outra abordagem ressaltar a Teoria de Van Hiele, a qual foi estabelecida como aporte teórico para nossa pesquisa. Essa teoria propicia um estudo detalhado da forma como os pensamentos são processados no contexto geométrico, além de fornecer um modelo com cinco níveis de raciocínio que servem para ser usados tanto para a orientação quanto para avaliação das habilidades dos estudantes em geometria.

3 O MODELO VAN HIELE DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

O autor Van de Walle (2009) afirma que todos nós possuímos a capacidade de desenvolver habilidades de pensamento em contextos geométricos, no entanto, a forma como as pessoas pensam sobre ideias geométricas são distintas, uma vez que somos todos diferentes. “A pesquisa de dois educadores holandeses, Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, tem fornecido *insights* quanto às diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças são estabelecidas” (p. 439, grifo do autor).

De acordo com Crowley (1994), a teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele originou-se das teses de doutorado do casal holandês Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, que na Universidade de Utrecht no ano de 1957, apresentaram um modelo de ensino e aprendizagem de geometria. Com o falecimento de Dina pouco tempo depois, Pierre se encarregou de esclarecer, aperfeiçoar e promover a teoria. Embora na década de 1960 o currículo de Geometria da União Soviética tenha sido reformulado a fim de adaptar-se ao modelo de Van Hiele, foi somente na década de 1970 que o modelo obteve o interesse dos Estados Unidos, que se tornou crescente a partir de traduções para o inglês de alguns dos principais trabalhos do casal, na década de 1980.

Podendo ser usado tanto para orientar a formação quanto para avaliar as habilidades dos alunos em geometria, o modelo Van Hiele consiste em cinco níveis de raciocínio e aprendizagem de conteúdos geométricos, todos com linguagem e características específicas. São eles: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

Cada um dos cinco níveis descreve os processos de pensamento usados em contextos geométricos. Os níveis descrevem como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos mais do que a quantidade de conhecimento ou de informação que temos a cada nível. (VAN DE WALLE, 2009, p. 440)

Além das características particulares de cada nível de raciocínio, os Van Hiele identificaram cinco propriedades globais que caracterizam o modelo, são elas: sequencial, avanço, intrínseco e extrínseco, linguística e combinação inadequada. Segundo Crowley (1994, p. 4), “[...] essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino”. Nesse sentido, não se faz necessário descrever tais propriedades, uma vez que o nosso estudo não está interessado em orientar a formação dos estudantes em geometria.

Crowley (1994, p. 6) ressalta que “[...] os Van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da idade ou da maturidade.” Assim, o casal propôs cinco fases sequenciais de aprendizado com o intuito de promover a aquisição de cada um dos níveis, são elas: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Tendo em vista que o nosso estudo está interessado em avaliar os níveis de raciocínio da Teoria de Van Hiele mobilizados pelos estudantes, não consideramos relevante descrever as referidas fases do aprendizado.

3.3 Os Níveis de Raciocínio

Os cinco níveis de raciocínio da Teoria de Van Hiele estão enumerados de 0 a 4 e serão apresentados nos tópicos a seguir, tomando como base os estudos de Crowley (1994) e Van de Walle (2009).

3.3.1 Nível 0: Visualização

Neste nível, de acordo com Crowley (1994), os alunos percebem as formas geométricas como um todo, ou seja, se baseiam exclusivamente na aparência, nas características mais gerais e visuais das formas geométricas, sendo capazes de reconhecê-las, nomeá-las e reproduzi-las. No entanto, não reconhecem propriedades das figuras, por exemplo, ângulos retos e lados opostos paralelos. Van de Walle (2009, p. 440) afirma que “os estudantes nesse nível irão agrupar e classificar as formas, baseados em suas aparências [...]”. Com o seu foco na aparência das formas, os alunos são capazes de perceber como as formas são parecidas e diferentes”. As propriedades das formas, apesar de estarem inclusas nesse nível, não desempenham um papel explícito no processo de identificação, uma vez que as figuras geométricas são descritas com base em seus aspectos físicos, de uma maneira totalmente observacional.

3.3.2 Nível 1: Análise

É neste nível que os alunos começam a distinguir as características das formas geométricas, sendo capazes de aplicar as propriedades de tais formas. No Nível 1, as figuras são analisadas de maneira única, os estudantes conseguem considerar todas as formas dentro de uma classe, usam as características conhecidas de uma determinada figura e associam o nome específico a ela, dentre várias semelhantes.

Os estudantes operando no Nível 1 podem ser capazes de listar todas as propriedades de quadrados, retângulos e paralelogramos, mas não percebem que esses são subclasses de outra classe, que todos os quadrados são retângulos e todos os retângulos são paralelogramos (VAN DE WALLE, 2009, p. 441).

A maior parte da atenção dos pensadores do Nível 1 está voltada para as propriedades que classificam as formas. Desse modo é comum que, ao definirem uma forma, os estudantes listem várias propriedades da mesma, uma vez que ainda não são capazes de visualizar uma quantidade mínima de propriedades suficientes para identificar uma figura geométrica específica.

3.3.3 Nível 2: Dedução Informal

Segundo Van de Walle (2009), no Nível 2 os estudantes tornam-se capazes de estabelecer inter-relações de propriedades dentro de uma figura geométrica e assim reconhecer classes de figuras, uma vez que não estão mais restringidos a uma figura particular. Crowley (1994) evidencia que, ao desenvolverem relações entre as propriedades observadas, os alunos descobrem generalizações e regras que foram previamente aprendidas, desse modo, começam a dar significado às definições e desenvolvem argumentos informais a fim de provar que tais propriedades são verdadeiras. Apesar de formularem argumentos informais, os estudantes não compreendem o real significado da dedução e embora sejam capazes de acompanhar demonstrações, não conseguem construir uma prova formal.

3.3.4 Nível 3: Dedução Formal

Neste nível, de acordo com Crowley (1994), os alunos são capazes de diferenciar e inter-relacionar axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados, uma vez que no Nível 3, não examinam apenas as propriedades das formas. Os estudantes conseguem construir demonstrações formais e entendem que há diferentes maneiras de fazê-la, pois compreendem quais condições são necessárias e suficientes para tal.

Os estudantes começam a apreciar a necessidade de um sistema lógico fundamentado sobre um conjunto mínimo de suposições e do qual, outras verdades possam ser derivadas. O estudante neste Nível é capaz de trabalhar com *sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas* e estabelecer conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição (VAN DE WALLE, 2009, p. 443, grifo do autor).

Van de Walle (2009) destaca ainda que os pensadores do Nível 3 reconhecem a necessidade de elaborar uma prova baseando-se em argumentos puramente dedutivos e fazem uso de um raciocínio lógico claramente articulado.

3.3.5 Nível 4: Rigor

No Nível 4, segundo Crowley (1994), os estudantes são capazes de ver a geometria no plano abstrato e estudam sistemas axiomáticos distintos do usual, como as geometrias não euclidianas. Conseguem trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos fazendo comparações e confrontos entre eles. Van de Walle (2009, p. 443) afirma que “este é geralmente o nível de um especialista em matemática no ensino superior que esteja estudando geometria como um ramo da ciência matemática”. De acordo com Nagata (2016), apesar do Nível 4 ser essencial em diversas situações, é necessário ter em mente que poucos alunos conseguem alcançá-lo. Uma vez que o processo de aprendizagem neste nível é bastante irregular, o próprio Van Hiele evidencia que falar sobre aprendizagem neste nível é de fato, complicado.

4 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E SUA RELAÇÃO COM OS NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

A parte da gramática que estuda a história ou a origem das palavras e justifica seu significado por meio de uma análise dos elementos que a constitui, é chamada de etimologia. De acordo com Melo (2015), um estudo etimológico das palavras que compõe determinado conceito, sobretudo conceitos matemáticos, é de grande importância para aprendizagem e compreensão do mesmo. “Estudar a etimologia das palavras que são usadas na matemática amplia o entendimento dos conceitos que nelas está intrínseco. A etimologia da palavra e o contexto onde é aplicado auxiliam a formação do conceito” (p. 293).

As palavras “congruente” e “semelhante” são sinônimas, ou seja, apresentam o mesmo significado entre si. No entanto, na Geometria, especialmente no estudo de triângulos, dizer que dois triângulos são semelhantes, não significa dizer que eles são congruentes, pois, nesse contexto, tais palavras possuem conceitos distintos. Diante disso, decidimos fazer um estudo etimológico das palavras destacadas para uma melhor compreensão.

O termo “congruente” deriva do latim “*congruens*”, palavra que se originou de “*congruere*”, a qual significa “combinar, concordar, coincidir, estar de acordo”. Já o termo “semelhante”, deriva do latim “*similis*”, que significa “tal qual, como”. Assim, no contexto geométrico, para que duas figuras sejam congruentes, os elementos que a compõem precisam coincidir, ser iguais. No mesmo contexto, para que duas figuras sejam semelhantes, é suficiente que sejam uma como a outra, parecidas, não necessariamente iguais.

Gomes (2016) destaca que dois conjuntos de pontos pertencentes à um plano são ditos congruentes, se e somente se, um puder ser transformado no outro fazendo o uso de isometria, ou seja, fazendo uma combinação de translações, rotações e reflexões. “De maneira mais geral, de um modo intuitivo, duas figuras planas serão ditas congruentes se uma delas puder ser deslocada, sem que haja modificação em sua forma ou suas medidas, até que passe a coincidir com outra em todos os seus elementos” (p. 22).

O estudo de triângulos, em especial a congruência de triângulos, foi o conteúdo escolhido para contribuir com a nossa pesquisa e assim, consideramos relevante trazer uma breve apresentação do mesmo, como também fazer relações com a teoria adotada.

4.1 O Estudo de Triângulos e os Níveis do Pensamento Geométrico de Van Hiele

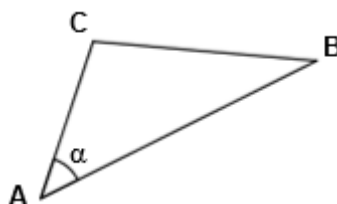
Como mencionado no capítulo anterior, a teoria de Van Hiele estabelece cinco níveis hierárquicos de raciocínio geométrico: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Embora todos tenham sido descritos anteriormente, julgamos importante estabelecer uma correspondência entre esses níveis e o estudo de triângulo na Geometria, em especial, os elementos que compõem o triângulo, sua classificação quanto à medida dos lados e dos ângulos, bem como a definição formal e os casos de congruência.

4.1.1 Triângulos

O triângulo, evidentemente, está entre as figuras geométricas de maior relevância. Apesar da aparência simples, dispõe de uma vasta quantidade de características e propriedades matemáticas que merecem ser exploradas desde os anos iniciais da escolaridade. Além disso, é considerado um elemento básico na construção de diversas figuras geométricas que compõem os estudos da Geometria.

A definição de triângulo é simples e bastante conhecida. Inicialmente, tomemos três pontos A, B e C, que não estão na mesma reta. Depois, ligamos os pontos a fim de formar os segmentos de reta AB, BC e CA. Chamamos de triângulo, a reunião dos três segmentos e a parcela do plano formada por eles. Na Figura 1, é possível observar que dois segmentos quaisquer no triângulo, possuem apenas suas extremidades em comum (LIMA; CARVALHO, 2010).

Figura 1: Representação de um triângulo



Fonte: autoria própria (2018)

Ainda na Figura 1, notamos os elementos que constituem um triângulo. Os pontos A, B e C são seus vértices, os segmentos AB, BC e CA representam os seus lados e o ângulo α em destaque, representa um dos ângulos internos do triângulo.

Conforme descrito no capítulo anterior, as características mais evidentes que um pensador do Nível 0 (visualização) da teoria de Van Hiele apresenta, é o fato de se basearem na aparência global das figuras geométricas, bem como a identificação, comparação e nomenclatura das mesmas. Dessa maneira, acreditamos que ao conhecer a representação do triângulo, assim como os elementos que o compõe, o aluno encontra-se nesse nível de raciocínio, tendo em vista que para compreender o que foi apresentado, a visualização foi de extrema importância.

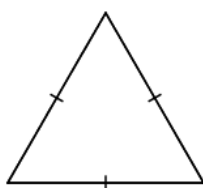
4.1.2 Classificação dos Triângulos

De acordo com Dolce e Pompeo (2005), a classificação dos triângulos baseia-se em dois critérios: o primeiro refere-se ao comprimento de seus lados; e o segundo, diz respeito à medida de seus ângulos. A seguir, denotaremos os tipos de triângulos que integram esses critérios de classificação e traremos exemplos através de imagens.

Com base no comprimento dos lados, podemos classificar os triângulos em três tipos distintos: equilátero, isósceles e escaleno.

O triângulo equilátero, conforme mostrado no exemplo da Figura 2, caracteriza-se por possuir a mesma medida em todos os seus lados.

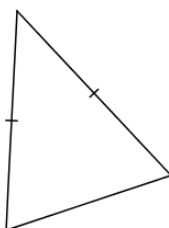
Figura 2: Triângulo equilátero



Fonte: autoria própria (2018)

O triângulo isósceles especifica-se por apresentar a mesma medida em apenas dois de seus lados, como exemplificado na Figura 3.

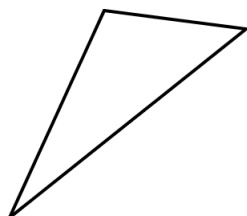
Figura 3: Triângulo isósceles



Fonte: autoria própria (2018)

O triângulo escaleno, segundo mostra o exemplo na Figura 4, individualiza-se por ter todos os seus lados possuindo medidas diferentes.

Figura 4: Triângulo escaleno

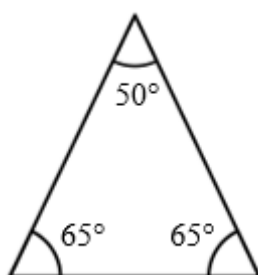


Fonte: autoria própria (2018)

Quanto a classificação dos triângulos com base na medida dos ângulos, podemos categorizá-los em três diferentes tipos: acutângulo, retângulo e obtusângulo.

O triângulo acutângulo, conforme mostrado no exemplo da Figura 5, caracteriza-se por possuir todos os seus ângulos agudos, ou seja, com medidas menores que 90° .

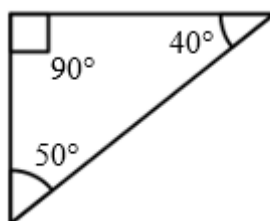
Figura 5: Triângulo acutângulo



Fonte: autoria própria (2018)

O triângulo retângulo especifica-se por apresentar um ângulo reto, ou seja, com medida igual a 90° , como exemplificado na Figura 6.

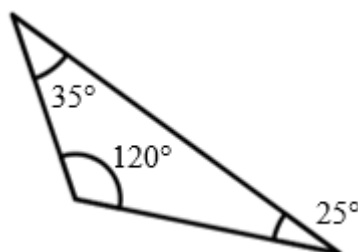
Figura 6: Triângulo retângulo



Fonte: autoria própria (2018)

O triângulo obtusângulo, segundo mostra o exemplo na Figura 7, individualiza-se por ter um ângulo obtuso, ou seja, com medida maior que 90° .

Figura 7: Triângulo obtusângulo



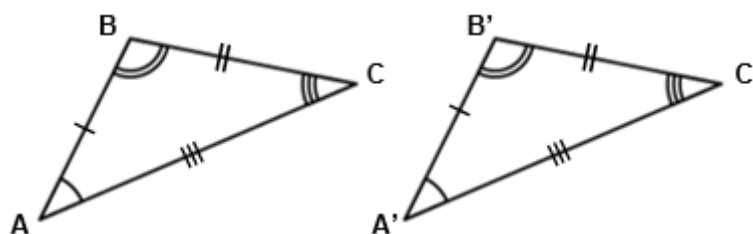
Fonte: autoria própria (2018)

Analisar os componentes de uma figura geométrica, reconhecer suas propriedades e usá-las para resolver problemas são as principais características que um pensador do Nível 1 (análise) da teoria de Van Hiele possui, segundo descrevemos no capítulo anterior. Assim sendo, consideramos que o aluno, ao reconhecer as características que classificam os triângulos quanto ao comprimento dos lados e as medidas dos ângulos, está inserido nesse nível de raciocínio, uma vez que para diagnosticar o tipo de triângulo o qual está lidando, o aluno precisa analisar as figuras e reconhecer as propriedades que a elas pertencem.

4.1.3 Definição de Congruência

Conforme definido formalmente por Dolce e Pompeo (2005), dois triângulos são congruentes (simbolicamente representado por $\equiv$) se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, de maneira que os lados e os ângulos de um dos triângulos sejam ordenadamente congruentes aos lados e ângulos do outro. Na Figura 8, os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes ($\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$), portanto, seus lados e ângulos correspondentes possuem a mesma medida.

Figura 8: Triângulos congruentes



Fonte: autoria própria (2018)

Em concordância com o que foi descrito no capítulo anterior, perceber que uma propriedade pode decorrer de outra, reconhecer a inclusão de classes, atribuir significado às definições e formular argumentos informais são as características mais relevantes atribuídas a um pensador do Nível 2 (dedução informal) da teoria de Van Hiele. Desse modo, julgamos

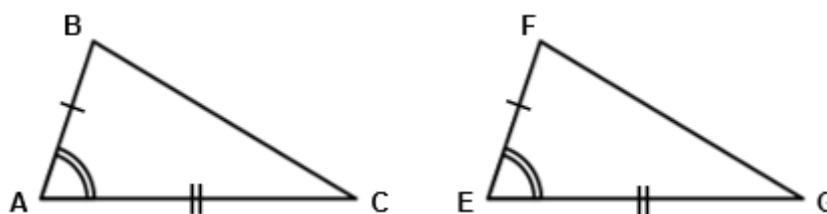
que o aluno, tendo capacidade para compreender a definição de congruência apresentada, bem como as condições necessárias para que dois triângulos sejam congruentes, está incluído nesse nível de raciocínio. Além disso, ele pode ser capaz de deduzir, por exemplo, argumentando informalmente que “um triângulo equilátero também é isósceles, pois quaisquer dois lados seus possuem a mesma medida”, provando assim que o aluno reconhece que uma propriedade decorre de outra.

4.1.4 Casos de Congruência

Dolce e Pompeo (2005) afirmam que na definição de congruência de triângulos são apresentadas as condições totais que dois triângulos devem satisfazer para que sejam considerados congruentes. No entanto, para concluir se há congruência entre dois triângulos não é necessário verificar todas essas condições, pois existem requisitos mínimos que provam tal fato e os chamamos de casos ou critérios de congruência.

1º caso – Lado, ângulo, lado (LAL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes. Conforme exemplificado na Figura 9, o $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$, pois $AB \equiv EF$, $AC \equiv EG$ e $\hat{A} \equiv \hat{E}$.

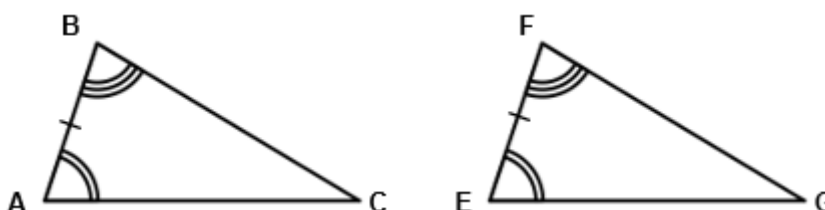
Figura 9: Triângulos congruentes pelo caso LAL



Fonte: autoria própria (2018)

2º caso – Ângulo, lado, ângulo (ALA): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes. Como mostra o exemplo na Figura 10, o $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$, pois $AB \equiv EF$, $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$.

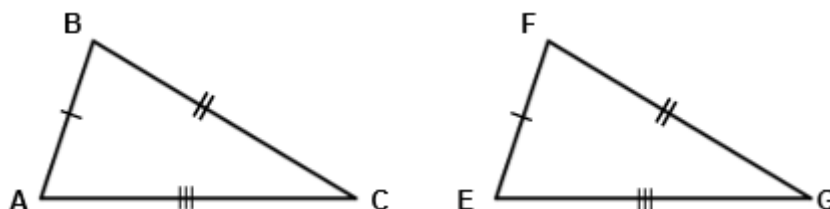
Figura 10: Triângulos congruentes pelo caso ALA



Fonte: autoria própria (2018)

3º caso – Lado, lado, lado (LLL): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes. No exemplo da Figura 11, temos que o $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$, pois $AB \equiv EF$, $BC \equiv FG$ e $AC \equiv EG$.

Figura 11: Triângulos congruentes pelo caso LLL



Fonte: autoria própria (2018)

De acordo com o que foi descrito no capítulo anterior, reconhecer as condições necessárias e suficientes e dominar o processo dedutivo e de demonstração, são as características mais evidentes que um pensador do Nível 3 (dedução formal) da Teoria de Van Hiele possui. Dessa forma, acreditamos que o aluno, ao tomar conhecimento das condições mínimas que provam a congruência entre dois triângulos e fazer o uso delas para demonstrar de maneira formal, por exemplo, uma propriedade dos quadriláteros, está claramente encaixado nesse nível de raciocínio.

Em consequência da nossa pesquisa ocorrer na graduação, não correlacionamos o Nível 4 (rigor) com o estudo de triângulos, uma vez que às exigências para que um pensador esteja raciocinando nesse nível requer um conhecimento geométrico bastante avançado.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentaremos os aspectos metodológicos da nossa pesquisa, os participantes e o local onde ocorreu a investigação. Também apresentaremos os instrumentos de coleta de dados utilizados com o intuito de alcançar nosso principal objetivo.

Desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa, tendo em vista que um dos principais objetivos do nosso estudo é verificar as estratégias e procedimentos que os estudantes usaram ao responder determinadas questões. Algumas características relevantes para que uma pesquisa venha a ser qualitativa são apresentadas por Bogdan e Biklen (1994), esses autores evidenciam que, em pesquisas dessa natureza, os dados coletados são provenientes do ambiente natural dos sujeitos, é uma investigação descritiva e os pesquisadores estão mais interessados no processo do que simplesmente no produto ou resultado final.

Segundo Lankshear e Knobel (2008), a forma como as pessoas entendem e interpretam determinadas situações são fatores de interesse principal na pesquisa qualitativa. Além disso, os pesquisadores qualitativos preferem que os dados coletados sejam contextualizados e atribuem muita importância a esses dados. Ao identificarmos os níveis de pensamento geométricos nas respostas dos alunos participantes do estudo tomando como referência a Teoria de Van Hiele, estaríamos ao mesmo tempo descrevendo suas características, nesse caso, as particularidades dos níveis os quais esses estudantes pertencem.

Diante disto, classificamos a nossa pesquisa como descritiva, pois de acordo com Gil (2002), esse tipo de pesquisa objetiva principalmente a descrição das características de determinado grupo ou fenômenos. Vários estudos podem ser classificados como pesquisa descritiva, tendo como característica significativa a utilização de questionários, bem como o uso de outras técnicas padronizadas para coletar dados.

Nesse sentido, para que consigamos atingir os objetivos do nosso estudo, decidimos utilizar o questionário como instrumento de coleta de dados. Oliveira (2014, p. 83) aponta que “[...] os questionários têm como principal objetivo descrever as características de uma pessoa ou de determinados grupos sociais”, o que nos mostra que o instrumento escolhido é o que melhor se adequa a nossa pesquisa.

Inicialmente, com o intuito de identificar os níveis de pensamento geométrico dos alunos participantes, elaboramos, com base nos níveis de desenvolvimento de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele, dois tipos de questionários, os quais chamamos de “pré-teste” e “pós-teste”. Tais testes foram aplicados aos estudantes, respectivamente, antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana.

O campo de pesquisa escolhido foi o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco no Centro Acadêmico do Agreste - CAA no município de Caruaru-PE, tal escolha ocorreu pelo fato do curso ofertar a disciplina de principal interesse do nosso estudo. Participaram da pesquisa 18 estudantes matriculados na disciplina Fundamentos da Geometria Plana e que estavam presentes no início do semestre, quando o pré-teste foi aplicado, e no final do semestre, durante a aplicação do pós-teste.

A aplicação do pré-teste ocorreu no início do semestre letivo 2018.1, período em que a maioria dos alunos matriculados estava tendo um primeiro contato com a disciplina e ainda não haviam realizado a primeira avaliação. O pós-teste foi aplicado ao fim do semestre, época a qual acreditamos que algumas habilidades de pensamento geométrico já haviam sido desenvolvidas pelos estudantes.

Durante a análise de dados da pesquisa, verificamos os procedimentos e as estratégias utilizadas pelos alunos ao responderem as questões presentes no pré-teste e no pós-teste com o intuito de classificar as respostas em um dos níveis de pensamento geométrico, tomando como base as características de cada nível explicitado pela Teoria de Van Hiele. Comparamos os resultados identificados em ambos os testes de cada estudante a fim de verificar o comportamento do nível de pensamento geométrico desses estudantes e com o propósito de atingir os objetivos de pesquisa.

5.1 Os instrumentos de coleta de dados

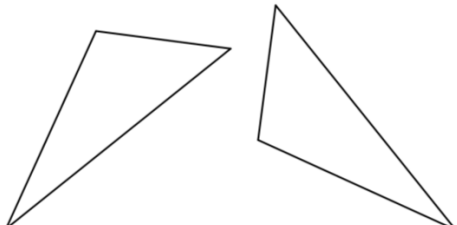
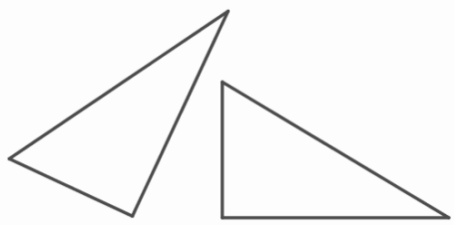
Tendo em vista que o nosso objetivo era investigar o nível de pensamento geométrico de alguns estudantes do curso de Licenciatura em Matemática antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana tendo como foco a congruência de triângulos, elaboramos dois questionários que foram aplicados aos alunos que estavam cursando a disciplina. O primeiro questionário chamamos de pré-teste, pelo fato de o mesmo ter sido aplicado no início do semestre letivo, quando os estudantes ainda estavam começando a

cursar a disciplina. Já o segundo questionário chamamos de pós-teste, uma vez que foi aplicado no fim do semestre letivo, quando os alunos já haviam cursado a disciplina.

Os questionários foram compostos por oito questões relacionadas a congruência de triângulos e apontando para os diferentes níveis de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele. Tomamos como referência para elaboração dos testes, estudos que descrevem as características desses níveis de compreensões (CROWLEY, 1994; VAN DE WALLE, 2009) e que trazem exemplos dos tipos de atividades, dentro do contexto geométrico, que estão classificadas em tais níveis.

Ressaltamos que tanto o pré-teste quanto o pós-teste foram aplicados individualmente e que ambos são compostos por oito questões, das quais três fazem parte dos dois questionários, enquanto as outras cinco, são apenas parecidas e compartilham do mesmo objetivo, conforme serão apresentadas a seguir.

Quadro 1: Questões 1 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 1	
Pré-teste	Pós-teste
Observe as figuras abaixo:  É possível afirmar que os triângulos são congruentes? Justifique.	Observe as figuras abaixo:  É possível afirmar que os triângulos são congruentes? Justifique.

FONTE: autoria própria, 2018

Tanto a questão 1 do pré-teste quanto a questão 1 do pós-teste foram elaboradas com base no Nível 0 (visualização) da Teoria de Van Hiele e tinham como objetivo principal identificar se os estudantes aceitariam ou não, apenas a imagem, ou seja, apenas o que estava sendo visualizado por eles, como uma fonte de informação suficiente para afirmar a congruência dos triângulos. Ressaltamos que ambos os pares de triângulos trazidos pelas questões eram congruentes, no entanto, as figuras foram dispostas de forma que esse fato não ficasse tão evidente, a fim de dificultar a percepção da congruência por parte dos estudantes.

Quadro 2: Questão 2 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 2
Pré-teste e Pós-teste
Com base no seu conhecimento, como você explicaria o que são triângulos congruentes: a) Para uma turma do ensino fundamental? b) Para uma turma de universitários?

FONTE: autoria própria, 2018

A questão 2 estava presente no pré-teste e no pós-teste, sua elaboração não foi embasada em nenhum nível específico de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele, no entanto, a linguagem utilizada pelos alunos ao responderem as perguntas dos itens a) e b), poderia nos fornecer indicações acerca do nível que eles estariam pensando. O objetivo era verificar se os estudantes atribuíam respostas diferentes para os dois itens, pois, era esperado que a resposta do item a) fosse mais simplória do que a do item b) por se tratar de níveis diferentes de escolaridade.

Quadro 3: Questão 3 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 3
Pré-teste e Pós-teste
Escolha UM dos casos de congruência de triângulo e enuncie:

FONTE: autoria própria, 2018

A questão 3 também estava presente em ambos os questionários e não foi elaborada com base em um nível específico de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele, porém, tais níveis foram identificados com a análise da linguagem que os estudantes utilizaram para enunciarem o que se pedia. Nessa questão o principal objetivo era verificar se os estudantes conheciam e sabiam descrever ao menos um dos casos de congruência de triângulo.

Quadro 4: Questão 4 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 4																			
Pré-teste e Pós-teste																			
Observe os triângulos a seguir:																			
a) Preencha a tabela abaixo com os pares de triângulos congruentes que obedecem aos respectivos casos de congruência: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr style="background-color: #d9ead3;"> <th style="padding: 5px;">Casos de Congruência</th> <th style="padding: 5px;">1º Par</th> <th style="padding: 5px;">2º Par</th> <th style="padding: 5px;">3º Par</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">LLL</td> <td style="height: 20px;"></td> <td style="height: 20px;"></td> <td style="height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">LAL</td> <td style="height: 20px;"></td> <td style="height: 20px;"></td> <td style="height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">ALA</td> <td style="height: 20px;"></td> <td style="height: 20px;"></td> <td style="height: 20px;"></td> </tr> </tbody> </table>				Casos de Congruência	1º Par	2º Par	3º Par	LLL				LAL				ALA			
Casos de Congruência	1º Par	2º Par	3º Par																
LLL																			
LAL																			
ALA																			
b) Escolha um dos pares de triângulos congruentes que você escreveu na tabela anterior e justifique o caso de congruência escolhido:																			

FONTE: autoria própria, 2018

A questão 4 foi elaborada com base no Nível 1 (análise) da Teoria de Van Hiele e estava presente no pré-teste e no pós-teste, seu objetivo principal era verificar se os alunos seriam capazes de identificar, por meio da observação e algumas informações, os pares de triângulos congruentes como também o caso de congruência que tornava válida a afirmação. A tabela do item a) não precisava ser totalmente preenchida e um par de triângulos poderia obedecer a mais de um caso de congruência, desde que as informações fornecidas nas figuras fossem suficientes para tal. Através das justificativas apresentadas no item b), foi possível identificar os níveis de pensamento geométrico mobilizados pelos estudantes.

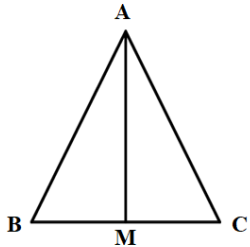
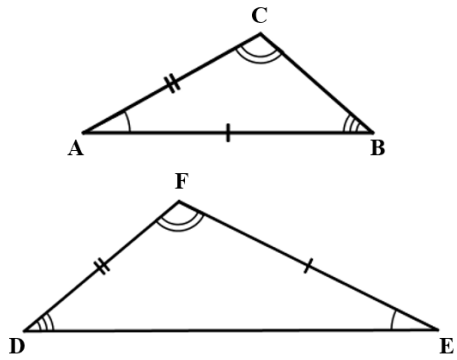
Quadro 5: Questões 5 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 5	
Pré-teste	Pós-teste
Mostre, com um contraexemplo, que se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\hat{C} = \hat{C'}$ não se pode afirmar que os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.	Mostre, com um contraexemplo, que se o triângulo ABC tem um lado e dois ângulos congruentes a um lado e dois ângulos do triângulo A'B'C', não se pode afirmar que os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

FONTE: autoria própria, 2018

A questão 5 do pré-teste estava presente no livro “Geometria Euclidiana Por Meio da Resolução de Problemas” de Tinoco (2011), enquanto a questão 5 do pós-teste foi elaborada tomando como referência a mesma questão do livro citado. Ambas as questões pertencem ao Nível 2 (dedução informal) da Teoria de Van Hiele e tinham como objetivo verificar se os estudantes seriam capazes de apresentar argumentos no mínimo informais para justificar que os triângulos descritos não eram congruentes, reconhecendo que as informações do enunciado não eram suficientes para afirmar a congruência entre dois triângulos quaisquer.

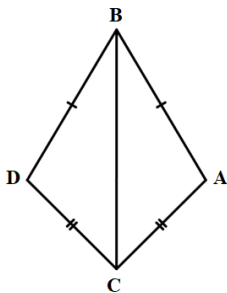
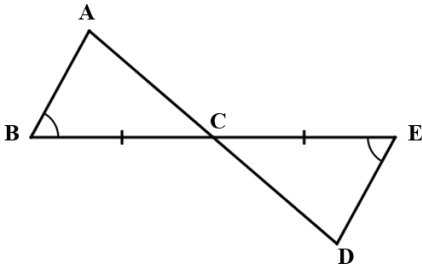
Quadro 6: Questões 6 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 6	
Pré-teste	Pós-teste
O triângulo ABC abaixo é isósceles, pois tem dois lados congruentes: $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja M o ponto médio de BC, e AM a mediana relativa à base BC.  Os triângulos AMB e AMC são congruentes? Por quê?	Observe os triângulos ABC e DEF abaixo:  a) Quantos pares de elementos congruentes têm os dois triângulos? b) Os triângulos ABC e DEF são congruentes? Justifique.

FONTE: autoria própria, 2018

A questão 6 de ambos os questionários foram adaptadas do livro “Geometria na Era da Imagem e do Movimento” de Lopes e Nasser (1996) e pertencem ao Nível 2 (dedução informal) da Teoria de Van Hiele. Tanto no pré-teste quanto no pós-teste o objetivo era verificar se os alunos seriam capazes de apresentar argumentos no mínimo informais para afirmar se os dois triângulos mostrados em cada uma das questões seriam ou não congruentes, uma vez que com a grande quantidade de informações expostas nos enunciados e nas figuras de ambas as questões, acreditamos que as justificativas apresentadas seriam mais simplórias, com um linguagem geométrica mais informal.

Quadro 7: Questões 7 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 7	
Pré-teste	Pós-teste
Seja a figura a seguir. Sabendo que $\overline{BA} = \overline{BD}$ e que $\overline{AC} = \overline{DC}$, prove que $\hat{A} = \hat{D}$. 	Seja a figura a seguir. Sabendo que $\overline{BC} = \overline{CE}$ e que $\hat{B} = \hat{E}$, prove que $\overline{AC} = \overline{CD}$. 

FONTE: autoria própria, 2018

A questão 7 de ambos os questionários pertencem ao Nível 3 (dedução formal) da Teoria de Van Hiele e foram adaptadas do livro “Matemática Bianchini” de Bianchini (2015). O objetivo de ambas as questões era verificar se os alunos realizariam uma prova formal e identificavam as informações implícitas trazidas pelas figuras as quais serviriam de argumento para mostrar a congruência dos triângulos, fato que tornava mais simples a conclusão da demonstração.

Quadro 8: Questões 8 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 8	
Pré-teste	Pós-teste
Sejam T_1 e T_2 dois triângulos retângulos. Em cada um dos itens abaixo, decida se a afirmação é verdadeira (neste caso, demonstre-a) ou falsa (dê um contraexemplo).	Sejam T_1 e T_2 dois triângulos retângulos. Em cada um dos itens abaixo, decida se a afirmação é verdadeira (neste caso, demonstre-a) ou falsa (dê um contraexemplo).

a) () Se os catetos de T_1 são congruentes aos catetos de T_2 então $T_1 = T_2$. b) () Se um dos catetos e a hipotenusa de T_1 são respectivamente congruentes a um dos catetos e a hipotenusa de T_2, então $T_1 = T_2$. c) () Se dois dos lados de T_1 são congruentes a dois dos lados de T_2, então $T_1 = T_2$. d) () Se um dos catetos de T_1 e seu ângulo agudo adjacente são respectivamente congruentes a um dos catetos de T_2 e seu ângulo agudo adjacente então $T_1 = T_2$.	a) () Se um dos catetos de T_1 e seu ângulo oposto são respectivamente congruentes a um dos catetos de T_2 e seu ângulo oposto, então $T_1 = T_2$. b) () Se um dos catetos e um ângulo agudo de T_1 são respectivamente congruentes a um dos catetos e um ângulo agudo de T_2, então $T_1 = T_2$. c) () Se a hipotenusa e um ângulo agudo de T_1 são respectivamente congruentes a hipotenusa e um ângulo agudo de T_2, então $T_1 = T_2$. d) () Se um dos lados e um ângulo agudo de T_1 são respectivamente congruentes a um dos lados e um ângulo agudo de T_2, então $T_1 = T_2$.
--	---

FONTE: autoria própria, 2018

A questão 8 do pré-teste e do pós-teste foram adaptadas do livro “Geometria Euclidiana Por Meio da Resolução de Problemas” de Tinoco (2011), ambas pertenciam ao Nível 3 (dedução formal) da Teoria de Van Hiele e cada uma era composta por quatro itens. O objetivo das questões era verificar se os estudantes realizariam provas formais, caso o item fosse verdadeiro e se seriam capazes de apresentar contraexemplos, caso o item fosse falso. Além disso, a hipótese de que os triângulos são retângulos é um fator que influencia bastante em como a demonstração ou contraexemplo será construído, pois esse tipo de triângulo possui propriedades específicas que devem ser consideradas e utilizadas a favor do que se quer provar.

6 ANÁLISE, DISCUSSÃO E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos e discutimos os dados obtidos nas questões respondidas pelos participantes da pesquisa, assim como suas referentes análises. Primeiramente, realizamos uma análise qualitativa das respostas atribuídas pelos estudantes em ambos os questionários à luz da teoria de Van Hiele e apresentamos uma comparação entre os resultados alcançados nos questionários (pré-teste e pós teste) , a fim de tentar responder o nosso problema de pesquisa, a saber: Em que nível de pensamento geométrico estão alguns alunos do curso de Licenciatura em Matemática antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana, tendo como foco a congruência de triângulos?

6.1 Análise da Questão 1

Tanto na questão 1 do pré-teste quanto na questão 1 do pós-teste, a visualização era a principal fonte de informação disponível, apesar dos pares de triângulos apresentados em cada uma delas serem congruentes, alteramos a disposição para que os elementos a serem comparados não estivessem na posição prototípica. É importante destacar que ambas as questões foram fundamentadas no Nível 0 (visualização) da teoria de Van Hiele.

Com as justificativas apresentadas pelos estudantes a respeito da congruência ou da não congruência dos triângulos expostos, foi possível identificar qual nível de pensamento geométrico cada um deles estaria pensando no momento em que responderam as questões. Os níveis identificados nas respostas de cada aluno estão dispostos na tabela a seguir. Destacamos que tanto no Quadro 9 quanto em todas as tabelas seguintes, a presença do “-” indica que o estudante deixou a questão em branco.

Quadro 9: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 1 do pré-teste e do pós-teste

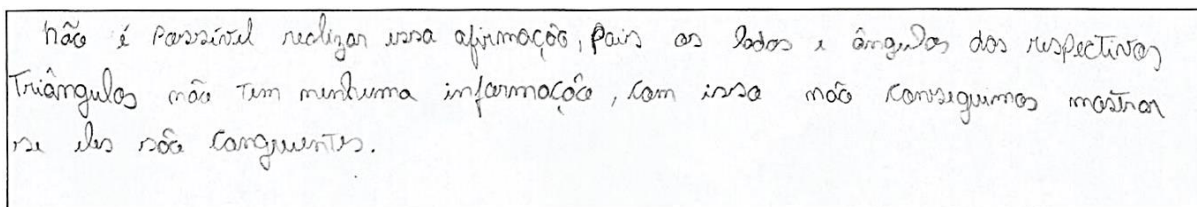
QUESTÃO 1		
	Pré-teste	Pós-teste
A1	Dedução informal	Dedução informal
A2	Análise	Análise
A3	Análise	Dedução informal
A4	Análise	Dedução informal
A5	Visualização	-
A6	Análise	Análise
A7	Análise	Dedução formal
A8	Análise	Análise
A9	Análise	Análise
A10	Dedução informal	Análise

A11	Análise	Dedução informal
A12	Análise	Análise
A13	Dedução informal	Dedução informal
A14	Dedução informal	Análise
A15	Análise	Análise
A16	Análise	Análise
A17	Análise	Dedução informal
A18	Análise	Visualização

FONTE: autoria própria, 2018

Com os dados mostrados no Quadro 9 é possível notar que no pré-teste apenas a resposta de um aluno foi classificada no nível Visualização, treze no nível Análise e três no nível Dedução Informal. Para exemplificar as justificativas mais apresentadas temos a resposta do aluno A11 (Figura 12) que está classificada no nível Análise, uma vez que o mesmo não considera a visualização como única fonte de informação. Na Figura 13, apresentamos a justificativa do aluno A14 o qual classificamos no nível da Dedução Informal, pois o mesmo busca a utilização de instrumentos (o uso da régua) para argumentar a congruência dos triângulos.

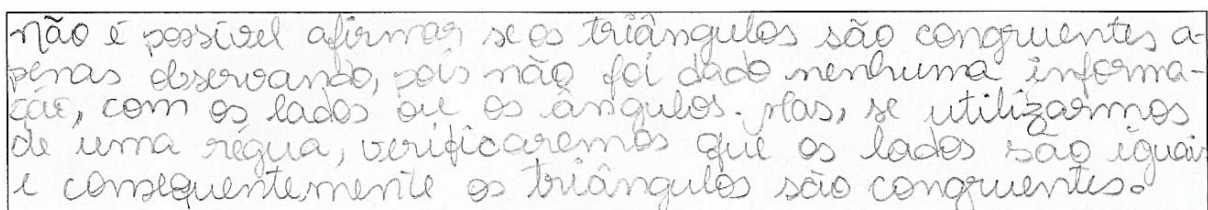
Figura 12: Resposta do estudante A11 - Questão 1 - Pré-teste



não é possível realizar uma afirmação, pois os lados e ângulos dos respectivos Triângulos não tem nenhuma informação, com isso não conseguimos mostrar se eles são congruentes.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Figura 13: Resposta do estudante A14 - Questão 1 - Pré-teste



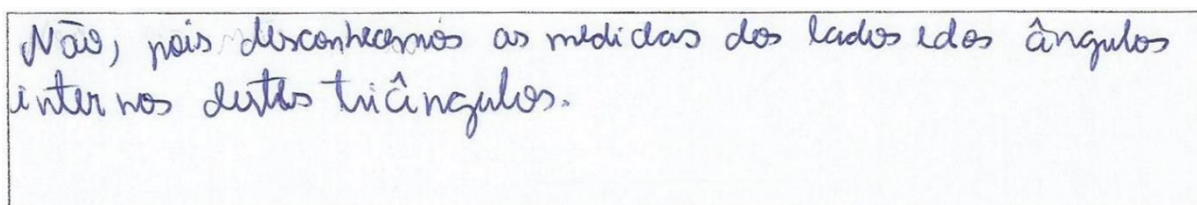
não é possível afirmar se os triângulos são congruentes apenas observando, pois não foi dada nenhuma informação, com os lados ou os ângulos. Mas, se utilizarmos de uma régua, verificaremos que os lados são iguais e consequentemente os triângulos são congruentes.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Notamos ainda no Quadro 9 que no pós-teste a resposta de um aluno foi classificada no nível Visualização, nove no nível Análise, cinco no nível Dedução Informal e uma no nível Dedução Formal. Para exemplificar a justificativa mais comum destacamos a resposta do aluno A9 (Figura 14) classificada no nível Análise, pois o mesmo deixa claro a sua necessidade de informações além da visualização. Evidenciamos a resposta do aluno A4

(Figura 15) classificada como Dedução Informal, pois apesar de usar erroneamente o termo “propriedades de congruência”, ele cita os casos de congruência e reconhece a demonstração através dos mesmos como uma condição necessária para justificar se os triângulos são congruentes.

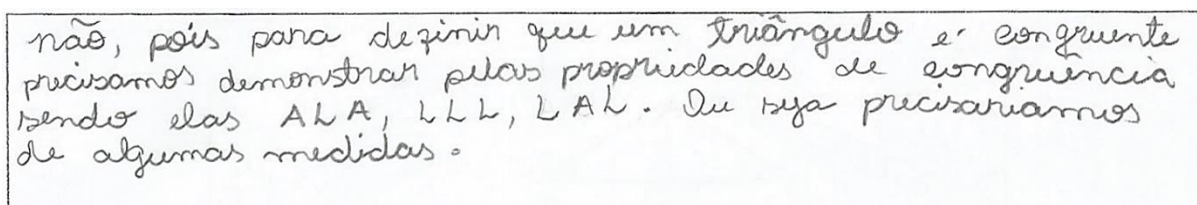
Figura 14: Resposta do estudante A9 - Questão 1 - Pós-teste



Não, pois desconhecemos as medidas dos lados e dos ângulos internos destes triângulos.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Figura 15: Resposta do estudante A4 - Questão 1 - Pós-teste



não, pois para definir que um triângulo é congruente precisamos demonstrar pelas propriedades de congruência sendo elas A L A, L L L, L A L. Ou seja precisamos de algumas medidas.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No Quadro 9 ainda é possível fazer uma comparação entre os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele identificados nas respostas do pré-teste e nas respostas do pós-teste. Assim, notamos que dez alunos mantiveram o nível de suas respostas, quatro aumentaram e três diminuíram, quando comparadas individualmente as respostas de ambos os questionários.

6.2 Análise da Questão 2

A questão 2 era comum aos dois questionários, a sua elaboração não se baseou em nenhum nível específico da teoria de Van Hiele. No item a, esperávamos que os participantes utilizassem uma linguagem geométrica adequada para os alunos do ensino fundamental, já no item b, o esperado era que a linguagem geométrica utilizada pelos estudantes fosse mais formal, adequada para alunos do ensino superior. A identificação dos níveis de pensamento geométrico decorreu justamente com a análise da linguagem utilizada pelos estudantes nas respostas de ambos os itens da questão, tais níveis estão expostos no quadro a seguir.

Destacamos que tanto no Quadro 10 quanto em todos os quadros seguintes, a presença do “n/d” indica que o nível não foi definido, pois o estudante apresentou uma

resposta a qual não havia indícios que foi pensada no contexto geométrico ou respondeu de maneira confusa, nos impossibilitando de entender como ou por qual motivo aquela resposta foi atribuída.

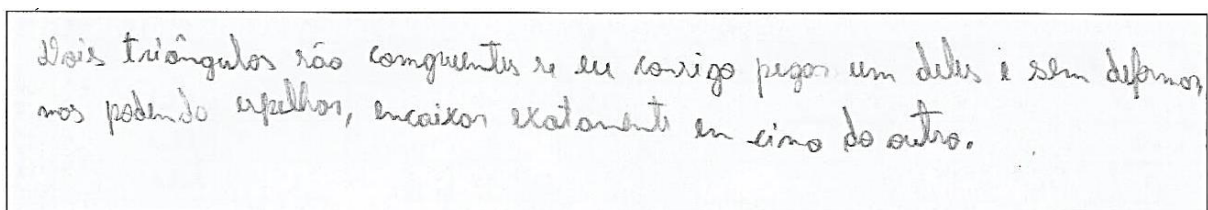
Quadro 10: Níveis de pensamento geométrico identificados nos itens a e b da questão 2 presente no pré-teste e no pós-teste

QUESTÃO 2				
Pré-teste			Pós-teste	
	Item a	Item b	Item a	Item b
A1	Análise	Análise	Análise	Análise
A2	Análise	Análise	Análise	Análise
A3	Dedução informal	Dedução informal	Dedução informal	Dedução informal
A4	Análise	Análise	Análise	n/d
A5	Análise	Dedução informal	Dedução informal	Dedução informal
A6	Dedução informal	Dedução informal	Análise	-
A7	Dedução informal	Dedução informal	Análise	Dedução informal
A8	Visualização	Dedução informal	Visualização	Análise
A9	Análise	Dedução informal	Análise	Dedução informal
A10	Análise	Análise	Análise	Análise
A11	Dedução informal	Dedução informal	Análise	Dedução informal
A12	Análise	Análise	Dedução informal	n/d
A13	Análise	Análise	Análise	Dedução informal
A14	Análise	Análise	Dedução informal	Análise
A15	Dedução informal	Dedução informal	Análise	Dedução informal
A16	Dedução informal	Análise	-	Análise
A17	Dedução informal	Dedução informal	Dedução informal	Dedução informal
A18	Análise	n/d	Análise	n/d

FONTE: autoria própria, 2018

Observando os dados do Quadro 10, notamos que no item a do pré-teste, a resposta de um aluno foi classificada no nível Visualização, dez no nível Análise e sete no nível Dedução Informal. Apesar da resposta do aluno A8 (Figura 16) ser a única classificada no nível Visualização, ela merece destaque, pois mostra que a congruência de triângulos pode ser explicada de maneira correta mesmo no menor nível da teoria de Van Hiele.

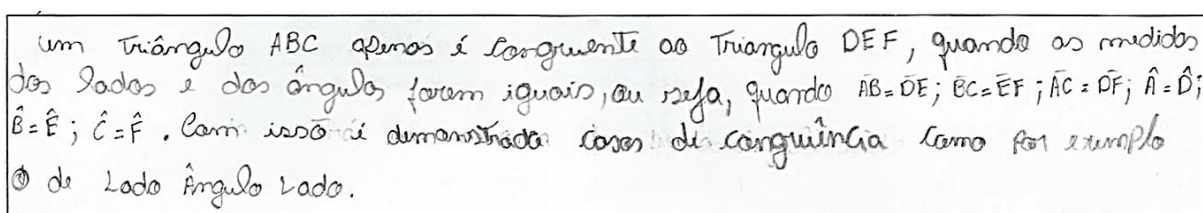
Figura 16: Resposta do estudante A8 - Questão 2: item a - Pré-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No item b do pré-teste os dados do Quadro 10 mostram que as respostas de oito alunos foram classificadas no nível Análise e nove no nível Dedução Informal. A resposta do aluno A11 (Figura 17) é um exemplo das mais frequentes e se classifica no nível Dedução Informal, pois nela está definida corretamente a congruência de triângulos, mesmo com uma linguagem mais informal, nota-se que o aluno explicitou todos os pares de elementos congruentes e correspondentes, além de apresentar a necessidade de demonstração dos casos de congruência, por se tratar de uma explicação sobre a definição de triângulos congruentes para uma turma do ensino superior.

Figura 17: Resposta do estudante A11 - Questão 2: item b - Pré-teste

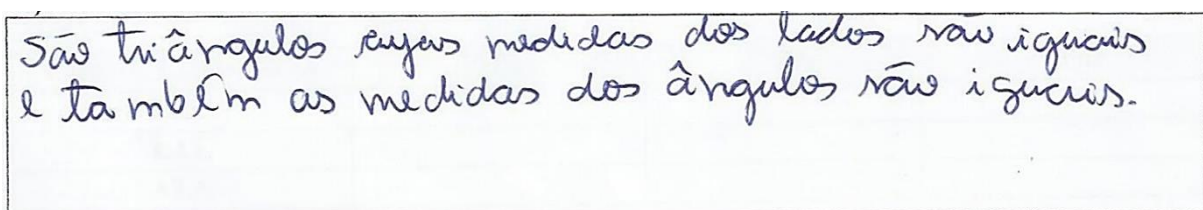


Um triângulo ABC apenas é congruente ao triângulo DEF, quando as medidas dos lados e dos ângulos forem iguais, ou seja, quando $AB=DE$; $BC=EF$; $AC=DF$; $\hat{A}=\hat{D}$; $\hat{B}=\hat{E}$; $\hat{C}=\hat{F}$. Com isso é demonstrada a congruência como por exemplo de Lado Ângulo Lado.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Ainda no Quadro 10 notamos que no pós-teste, especificamente no item a, a resposta de um aluno foi classificada no nível Visualização, onze no nível Análise e cinco no nível Dedução Informal. A resposta do aluno A9 (Figura 18), uma das mais frequentes, classificamos no nível Análise, pois o estudante não leva em consideração a correspondência dos lados e dos ângulos ao definir triângulos congruentes. No item a do pré-teste foram encontradas respostas semelhantes.

Figura 18: Resposta do estudante A9 - Questão 2: item a - Pós-teste



São triângulos cujas medidas dos lados são iguais e também as medidas dos ângulos são iguais.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Observando o item b do pós-teste no Quadro 10, vimos que seis alunos tiveram suas respostas classificadas no nível Análise e sete no nível Dedução Informal. A resposta do aluno A11 (Figura 19) foi uma das mais frequentes e está classificada no nível Dedução Informal, pois mesmo em uma linguagem informal, foram explicitados os pares de elementos congruentes e correspondentes, tornando válida a definição de congruência.

Figura 19: Resposta do estudante A3 - Questão 2: item b - Pós-teste

Seja ABC e DEF triângulos, com os lados $AB=DE$, $BC=EF$ e $AC=DF$ e os ângulos $\hat{A}=\hat{D}$, $\hat{B}=\hat{E}$ e $\hat{C}=\hat{F}$, podemos dizer que eles são congruentes.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No Quadro 10, ao compararmos individualmente as respostas dos estudantes do item a, no pré-teste, com as respostas do item a, no pós-teste, observamos que os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele foram mantidos por dez alunos, três aumentaram e apenas um diminuiu. Na comparação com as respostas do item b, no pré-teste, com as respostas do item b, no pós-teste, notamos que os níveis das foram mantidos por doze alunos, um aumentou e um diminuiu.

6.3 Análise da Questão 3

A questão 3, comum aos dois questionários, não foi elaborada com base em um nível específico de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele. Tais níveis foram identificados por meio da análise da linguagem utilizada nas respostas atribuídas pelos estudantes ao escolherem e enunciarem um dos casos de congruência de triângulo, conforme era proposto na questão. Os níveis designados no pré-teste e no pós-teste estão dispostos no Quadro 11 a seguir.

Quadro 11: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 3 do pré-teste e do pós-teste

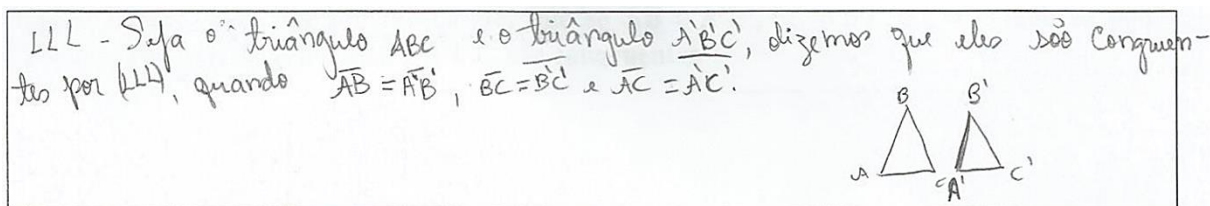
QUESTÃO 3		
	Pré-teste	Pós-teste
A1	Análise	Dedução informal
A2	Análise	Dedução formal
A3	Dedução formal	Dedução formal
A4	Análise	n/d
A5	n/d	Análise
A6	Dedução formal	Dedução informal
A7	Dedução formal	Análise
A8	Dedução formal	Dedução formal
A9	Dedução formal	Dedução formal
A10	n/d	n/d
A11	n/d	Dedução formal
A12	Dedução formal	Dedução formal
A13	Dedução formal	Análise
A14	-	Análise

A15	Dedução informal	Dedução informal
A16	Dedução informal	Análise
A17	Dedução informal	Dedução formal
A18	n/d	n/d

FONTE: autoria própria, 2018

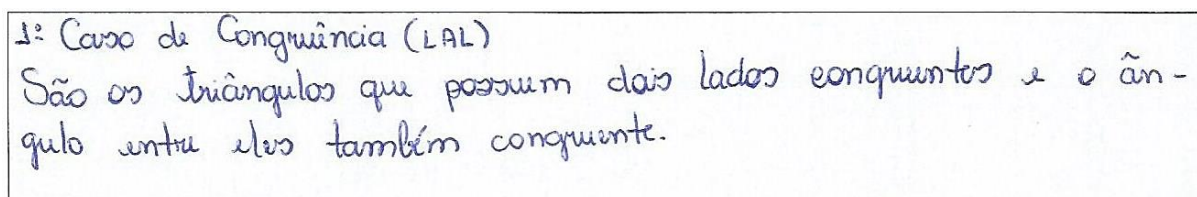
É possível notar com os dados mostrados no Quadro 11 que no pré-teste a resposta de três alunos foram classificadas no nível Análise, três no nível Dedução Informal e sete no nível Dedução Formal. Como exemplo do caso de congruência mais escolhido para ser enunciado temos a resposta do aluno A6 (Figura 20) que está classificada no nível Dedução Formal, pois o mesmo apresenta um desenho e utilizando uma linguagem geométrica formal, explicita as correspondências e faz uso correto nas notações. Destacamos também a resposta do aluno A1 (Figura 21) classificada no nível Análise, uma vez que a forma como o caso foi enunciado gera certa confusão com as propriedades do triângulo isósceles. Esse fato ocorreu com todas as respostas classificadas nesse nível de pensamento geométrico.

Figura 20: Resposta do estudante A6 - Questão 3 - Pré-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Figura 21: Resposta do estudante A1 - Questão 3 - Pré-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Notamos ainda no Quadro 11 que no pós-teste a resposta de cinco alunos foram classificadas no nível Análise, três no nível Dedução Informal e sete no nível Dedução Formal. A resposta do aluno A12 (Figura 22) é uma das mais corriqueiras e está classificada no nível Dedução Formal, uma vez que a linguagem geométrica utilizada é formal, as notações usadas estão corretas e as correspondências estão sendo explicitadas. Já a resposta do aluno A15 (Figura 23) está classificada no nível Dedução Informal, pois apesar de ter enunciado o caso de congruência escolhido de maneira correta, não faz uso de notações

geométricas e a linguagem utilizada para explicar a disposição dos elementos congruentes é totalmente informal.

Figura 22: Resposta do estudante A12 - Questão 3 - Pós-teste

Ângulo, lado, ângulo - (A, L, A) - sejam ABC e DEF dois triângulos, se $\hat{A} = \hat{D}$, $\overline{AB} = \overline{DE}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então eles são congruentes.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Figura 23: Resposta do estudante A15 - Questão 3 - Pós-teste

LAL: SE DOIS TRIÂNGULOS POSSUEM, DOIS LADOS CORRESPONDENTES E O ÂNGULO ENTRE ELÊS CONGRUENTES, ENTÃO SÃO CONGRUENTES.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Ao fazermos uma comparação individual entre os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele identificados nas respostas do pré-teste e nas respostas do pós-teste, conforme mostrado no Quadro 11, foi possível observar que cinco alunos mantiveram o nível de suas respostas, três aumentaram e quatro diminuíram.

6.4 Análise da Questão 4

A questão 4 fazia parte dos dois questionários e foi elaborada com base no Nível 1 (análise) da teoria de Van Hiele. Os triângulos apresentados, que serviriam de apoio para as respostas dos itens a e b, continham informações tais como a medida de alguns lados e de alguns ângulos. No item a era esperado que os alunos, por meio das informações fornecidas, preenchessem uma tabela indicando os pares de triângulos congruentes identificados por eles no caso que justificava a congruência daquele par. No item b, um dos pares de triângulos identificados como congruentes deveria ser selecionado pelos estudantes para que fosse justificado o caso de congruência escolhido. Foi por meio das justificativas apresentadas nesse item que identificamos os níveis de pensamento geométricos que estavam sendo mobilizados pelos alunos e os dispomos no quadro a seguir.

Quadro 12: Número de acertos e erros identificados no item a e níveis de pensamento geométrico identificados no item b da questão 4 presente no pré-teste e no pós-teste

	QUESTÃO 4					
	Pré-teste			Pós-teste		
	Item a		Item b	Item a		Item b
	Acertos	Erros		Acertos	Erros	
A1	6	3	Dedução informal	1	0	-
A2	4	2	Dedução informal	5	3	Análise
A3	6	3	Análise	5	4	Análise
A4	3	5	Análise	3	3	Análise
A5	4	5	-	5	4	n/d
A6	4	1	-	2	2	Dedução informal
A7	1	0	Análise	1	0	Dedução informal
A8	1	0	Análise	0	0	-
A9	3	1	Dedução informal	0	0	-
A10	2	7	Visualização	5	4	Análise
A11	3	1	Dedução informal	4	1	Dedução informal
A12	2	0	-	5	0	Visualização
A13	1	1	Dedução informal	4	2	Visualização
A14	4	2	Análise	1	2	Análise
A15	1	0	Dedução informal	1	0	Dedução informal
A16	2	5	Visualização	5	2	Análise
A17	2	7	Análise	3	6	Dedução informal
A18	4	5	Análise	3	6	Visualização

FONTE: autoria própria, 2018

Conforme mostrado no Quadro 12, o item a do pré-teste apresenta um total de cinquenta e três acertos, que indica a quantidade de pares de triângulos congruentes que obedecem ao caso de congruência escolhido de maneira correta, já os quarenta e oito erros contabilizados correspondem aos pares de triângulos identificados que não são congruentes ou que não têm sua congruência justificada pelo caso escolhido. Já no item a do pós-teste foram apresentados um total de cinquenta e três acertos e trinta e nove erros.

A tabela preenchida pelo aluno A1 (Figura 24) serve para exemplificar diversas situações encontradas nas respostas do item a) de ambos os questionários. Notamos que o aluno repetiu alguns pares de triângulos congruentes, algo que poderia ser feito, desde que as informações fornecidas fossem suficientes para tal, como foi o caso dos triângulos B e E, ambos congruentes tanto pelo caso Lado, Lado, Lado, quanto pelo caso Ângulo, Lado, Ângulo. Já os triângulos K e O não continham informações suficientes que justificasse a sua congruência pelo caso Lado, Ângulo, Lado. Por fim, o par F e J não eram formados por triângulos congruentes, portanto, não deveria estar fazendo parte da tabela.

Figura 24: Resposta do estudante A1 - Questão 4: item a - Pré-teste

Casos de Congruência	1º Par	2º Par	3º Par
LLL	$B \equiv E$	$K \equiv O$	$A \equiv I$
LAL	$K \equiv O$	$D \equiv M$	$G \equiv N$
ALA	$A \equiv I$	$F \equiv J$	$B \equiv E$

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Ainda no Quadro 12 notamos que no item b do pré-teste, as respostas de dois alunos foram classificadas no nível Visualização, sete no nível análise e seis no nível Dedução Informal. Destacamos a resposta do aluno A9 (Figura 25) que está classificada no nível Dedução informal, pois o mesmo leva em consideração a correspondência dos ângulos e do lado, mesmo utilizando uma linguagem informal para explicar a disposição dos elementos, justifica corretamente o caso de congruência.

Figura 25: Resposta do estudante A9 - Questão 4: item b - Pré-teste

A₂ I não congruentes, pois possuem ângulos de 65° correspondentes, ângulos de 35° correspondentes e lados de 3,5 cm entre eles. Logo, por SHA eles não congruentes.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No item b do pós-teste, as informações do Quadro 12 nos mostram que as respostas de três alunos foram classificadas no nível Visualização, seis no nível Análise e cinco no nível Dedução Informal. A resposta do aluno A14 (Figura 26) está classificada no nível Análise, uma vez que o estudante faz uma afirmação equivocada que parece ter sido comprovada empiricamente, ou seja, através da observação de triângulos congruentes, pois nesses, quando dois lados correspondentes possuem medidas iguais, os ângulos correspondentes e compreendidos entre eles também têm as medidas iguais. Os triângulos K e O não poderiam ser congruentes pelo caso Lado, Ângulo, Lado, pois nenhuma informação foi dada acerca de seus ângulos.

Figura 26: Resposta do estudante A14 - Questão 4: item b - Pós-teste

Os triângulos K e O
Pelo caso, lado-ângulo-lado.
Lado 3cm comum;
Lado 2cm comum;
Como os lados são iguais, o ângulo formado por eles é igual.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No Quadro 12, ao fazermos uma comparação individual entre as justificativas apresentadas pelos alunos no item b do pré-teste com as justificativas apresentadas no item b do pós-teste, observamos que os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele foram mantidos por cinco alunos, três aumentaram e quatro diminuíram.

6.5 Análise da Questão 5

Tanto a questão 5 do pré-teste quanto a questão 5 do pós-teste pertenciam ao Nível 2 (dedução informal) da teoria de Van Hiele, apesar dos enunciados serem diferentes, o objetivo era o mesmo. Ambas continham algumas informações a respeito de dois triângulos quaisquer, porém essas não eram suficientes para afirmar a congruência deles. Ao ser pedido um contraexemplo para provar que, de fato, os triângulos não poderiam ser congruentes, esperava-se que os alunos apresentassem argumentos no mínimo informais, reconhecendo que as informações dispostas eram insuficientes. Os níveis de pensamento geométrico identificados nas respostas dos estudantes estão organizados no quadro a seguir.

Quadro 13: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 5 do pré-teste e do pós-teste

	QUESTÃO 5	
	Pré-teste	Pós-teste
A1	-	-
A2	Visualização	Visualização
A3	-	-
A4	Visualização	Visualização
A5	-	-
A6	-	Análise
A7	Visualização	-
A8	Dedução informal	Análise
A9	Dedução formal	Dedução Informal
A10	Dedução informal	-
A11	-	-
A12	-	Análise
A13	Visualização	-
A14	-	Visualização
A15	Visualização	Visualização
A16	Análise	Dedução Informal
A17	Visualização	Análise
A18	Visualização	Visualização

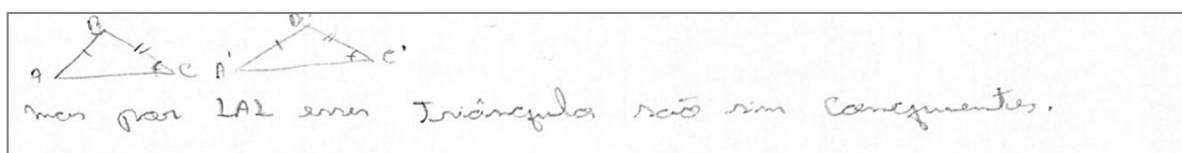
FONTE: autoria própria, 2018

É evidente a grande quantidade de estudantes que não atribuíram respostas as questões 5 de ambos os questionários, conforme mostrado no quadro acima. A dificuldade de

interpretação do enunciado e a falta de familiarização com questões deste tipo são alguns dos fatores que podem justificar essa ausência de respostas.

Com os dados mostrados no Quadro 13 é possível notar que no pré-teste as respostas de sete alunos foram classificadas no nível Visualização, uma no nível análise, duas no nível Dedução Informal e uma no nível Dedução Formal. A resposta do aluno A2 (Figura 27) está classificada no nível Visualização, pois o desenho representado é um caso particular dos triângulos imaginados por ele. Percebemos ainda que ao afirmar a congruência dos triângulos pelo caso Lado, Ângulo, Lado, o estudante não leva em consideração a correspondência entre os elementos congruentes.

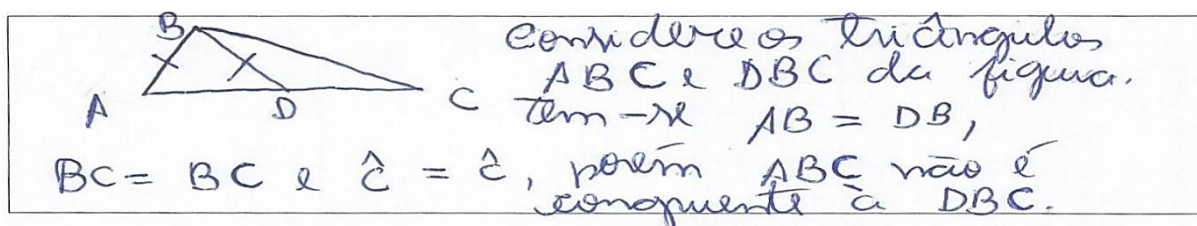
Figura 27: Resposta do estudante A2 - Questão 5 - Pré-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Ainda no pré-teste, destacamos a resposta do aluno A9 (Figura 28) que foi a única classificada no nível Dedução Formal, uma vez que o estudante apresentou seu contraexemplo usando uma linguagem geométrica formal, elaborou um desenho interessante, explicitou a correspondência dos elementos e mostrou ter conhecimento das condições necessárias e suficientes para a congruência entre dois triângulos.

Figura 28: Resposta do estudante A9 - Questão 5 - Pré-teste

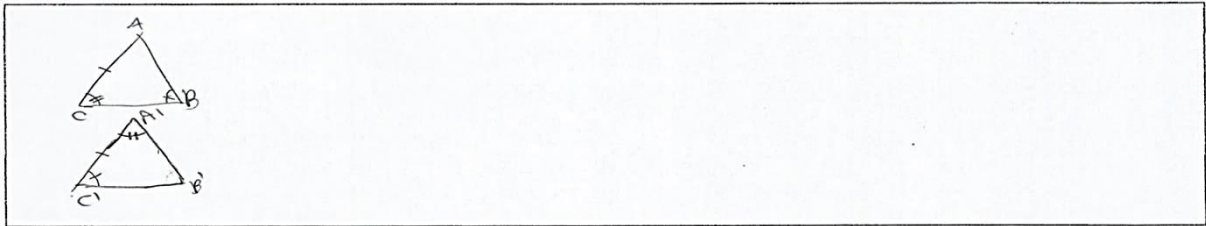


Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Notamos ainda no Quadro 13 que no pós-teste as respostas de cinco alunos foram classificadas no nível Visualização, quatro no nível Análise e duas no nível Dedução Informal. Evidenciamos a resposta do aluno A6 (Figura 29) que está classificada no nível Análise, pois acreditamos que provavelmente através da observação e da experimentação, o estudante conseguiu esboçar corretamente um contraexemplo em desenho, explicitando informações que caracterizam a não congruência dos triângulos. Já a resposta do aluno A16

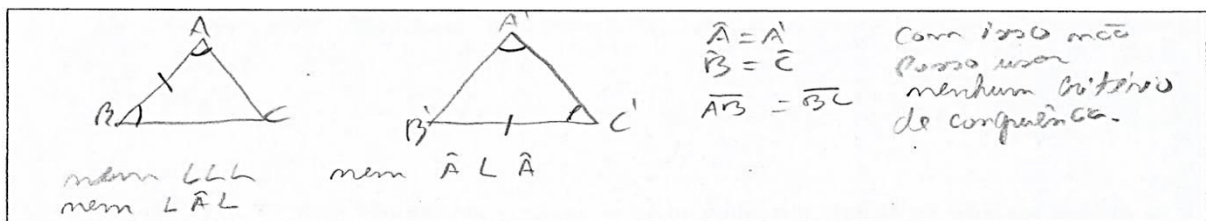
(Figura 30) está classificada no nível Dedução Informal, pois além de apresentar um contraexemplo em desenho, faz uso correto das notações geométricas e deixa claro, em uma linguagem informal, que as informações fornecidas pela questão não são suficientes para provar que os triângulos são congruentes por um dos casos de congruência.

Figura 29: Resposta do estudante A6 - Questão 5 - Pós-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Figura 30: Resposta do estudante A16 - Questão 5 - Pós-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No Quadro 13, ao compararmos individualmente as respostas atribuídas pelos estudantes na questão 5 do pré-teste com as respostas atribuídas pelos mesmos na questão 5 do pós-teste, observamos que os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele foram mantidos por quatro alunos, dois aumentaram e dois diminuíram.

6.6 Análise da Questão 6

A questão 6 de ambos os questionários pertenciam ao Nível 2 (dedução Informal) da teoria de Van Hiele, no entanto eram bem diferentes. No pré-teste esperava-se que na questão 6 o estudante usasse as informações fornecidas pelo enunciado para provar a congruência dos triângulos presentes na figura utilizando uma linguagem no mínimo informal, pois pelo fato da questão trazer muitas informações não era esperado argumentos muito formais. A questão 6 do pós-teste era composta pelo item a, que visava saber o número dos pares de elementos congruentes identificado pelos alunos na figura, e pelo item b, no qual era esperado uma justificativa no mínimo informal, da não congruência dos triângulos expostos. Os níveis de pensamento geométrico foram identificados através da análise da questão 6 do pré-teste e do item b) da questão 6 do pós-teste, tais níveis estão dispostos no quadro a seguir.

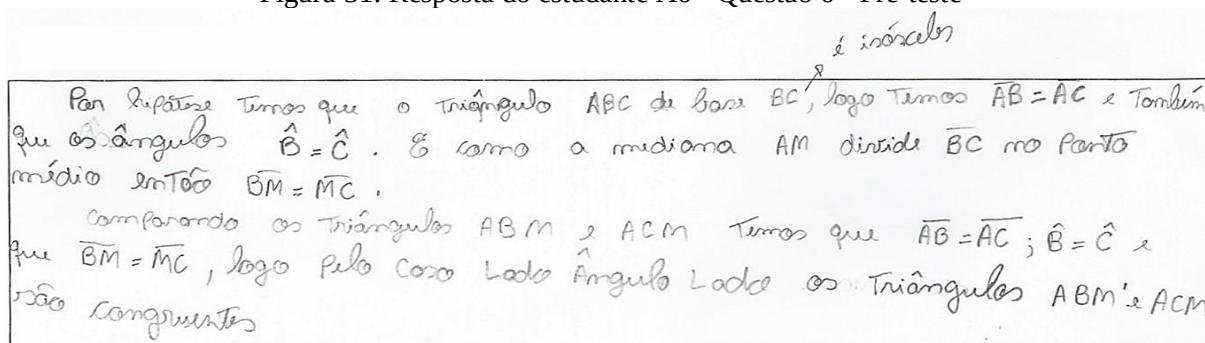
Quadro 14: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 6 do pré-teste e nos itens a e b da questão 6 do pós-teste

QUESTÃO 6			
	Pré-teste	Pós-teste	
		Item a	Item b
A1	Dedução formal	-	Dedução informal
A2	Dedução formal	5 pares	Dedução informal
A3	Dedução formal	5 pares	Dedução informal
A4	Dedução informal	5 pares	Análise
A5	Dedução formal	3 pares	Análise
A6	Dedução informal	-	-
A7	Dedução formal	5 pares	Dedução informal
A8	Dedução formal	0 par	Visualização
A9	Dedução formal	5 pares	Visualização
A10	Dedução informal	2 pares	Visualização
A11	Dedução formal	6 pares	Dedução informal
A12	Dedução formal	3 pares	Visualização
A13	Dedução formal	5 pares	Dedução informal
A14	Dedução formal	3 pares	Dedução informal
A15	Dedução informal	5 pares	Dedução informal
A16	Dedução informal	2 pares	Visualização
A17	Análise	4 pares	Dedução informal
A18	Análise	4 pares	Visualização

FONTE: autoria própria, 2018

No Quadro 14 é possível notar que na questão 6 do pré-teste, as respostas de dois alunos foram classificadas no nível Análise, cinco no nível Dedução Informal e onze no nível Dedução Formal. Como exemplo das justificativas mais apresentadas, temos a resposta do aluno A6 (Figura 31) que está classificada no nível Dedução Formal, pois o estudante utiliza uma linguagem geométrica formal para construir a sua demonstração, explicita as correspondências dos elementos e justifica o caso de congruência Lado, Ângulo, Lado, usando apenas as informações suficientes.

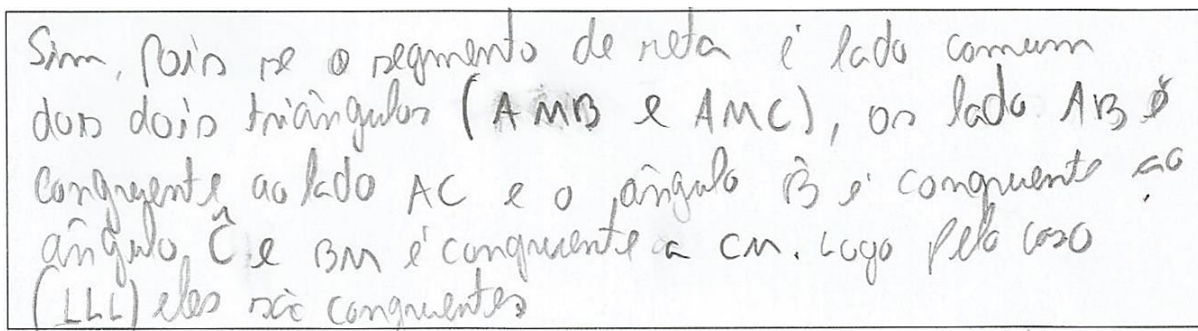
Figura 31: Resposta do estudante A6 - Questão 6 - Pré-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Destacamos a resposta do aluno A16 (Figura 32) que está classificada no nível Dedução Informal, uma vez que o estudante além de usar uma linguagem geométrica mais informal, expõe em sua demonstração lados e ângulos congruentes mas acaba usando o caso Lado, Lado, Lado para justificar a congruência nos fazendo acreditar, portanto, que ele não reconhece as condições suficientes para que dois triângulos sejam congruentes.

Figura 32: Resposta do estudante A16 - Questão 6 - Pré-teste

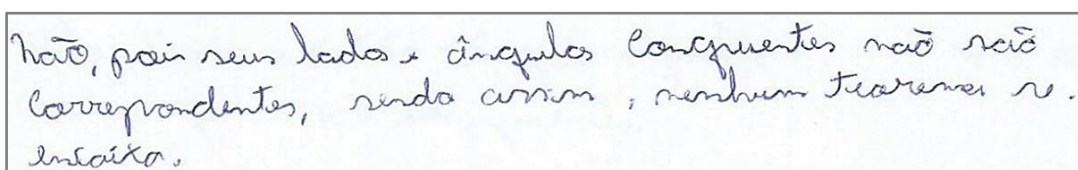


Sim, pois se o segmento de reta é lado comum dos dois triângulos (AMB e AMC), os lados AB e AC são congruentes ao lado AC e o ângulo B é congruente ao ângulo C e BM é congruente a CM. Logo pelo caso (LL) eles são congruentes.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Sobre o item a da questão 6 do pós-teste, o Quadro 14 nos mostra que sete alunos responderam 5 pares e, portanto, acertaram o número de pares congruentes entre os dois triângulos exibidos. Com relação ao item b, notamos que seis alunos tiveram suas respostas classificadas no nível Visualização, duas no nível Análise e nove no nível Dedução Informal. A resposta do aluno A2 (Figura 33) é um exemplo das justificativas mais encontradas e está classificada no nível Dedução Informal, pois o estudante explica informalmente que os triângulos exibidos na questão, apesar de possuírem pares de elementos congruentes eles não são correspondentes, tornando impossível fazer uso dos casos de congruência para provar que os triângulos são congruentes. Já a resposta do aluno A4 (Figura 34) está classificada no nível Análise, pois está claro que o estudante não leva em consideração a correspondência dos elementos congruentes e erroneamente, justifica a congruência dos triângulos pelo caso Lado, Ângulo, Lado.

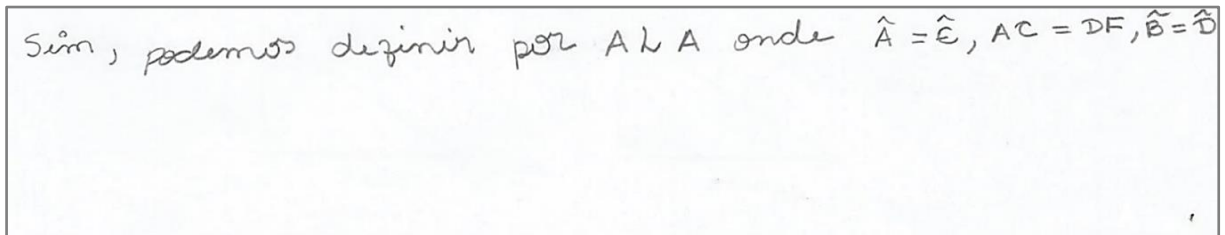
Figura 33: Resposta do estudante A2 - Questão 6 - Pós-teste



Não, pois seus lados e ângulos congruentes não são correspondentes, sendo assim, nenhum teorema se aplica.

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Figura 34: Resposta do estudante A4 - Questão 6 - Pós-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Ainda no Quadro 14, ao compararmos individualmente as respostas atribuídas pelos estudantes na questão 6 do pré-teste com as respostas atribuídas pelos mesmos no item b da questão 6 do pós-teste, observamos que os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele foram mantidos por um aluno, um aumentou e quinze diminuíram. Acreditamos que esse regresso numeroso está relacionado ao fato de que no pré-teste a forma com que a questão 6 exibe o problema é bastante comum em sala de aula como também no livro utilizado pelo professor, enquanto a questão 6 do pós-teste aborda uma perspectiva relativamente nova para os estudantes, pois não se assemelha as questões presentes no livro e provavelmente também não faz parte das discussões em sala.

6.7 Análise da Questão 7

A questão 7 do pré-teste e a questão 7 do pós-teste pertenciam ao Nível 3 (dedução formal) da teoria de Van Hiele e eram bastante parecidas, ambas apresentavam um problema geométrico que deveria ser demonstrado através das informações evidenciadas no enunciado e também implícitas nas figuras expostas. No quadro a seguir estão dispostos os níveis de pensamento geométrico identificados nas respostas dos estudantes nas questões 7 de ambos os questionários.

Quadro 15: Níveis de pensamento geométrico identificados na questão 7 do pré-teste e do pós-teste

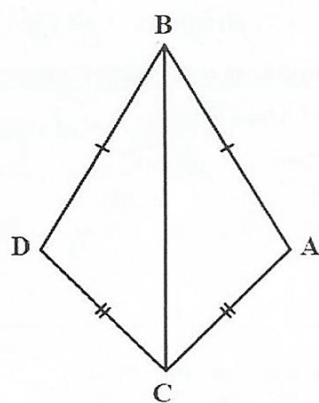
	QUESTÃO 7	
	Pré-teste	Pós-teste
A1	Dedução formal	Dedução formal
A2	Dedução formal	Dedução formal
A3	Dedução formal	Dedução formal
A4	Dedução informal	Dedução formal
A5	Dedução informal	Análise
A6	Dedução formal	Dedução formal
A7	Dedução formal	-
A8	Dedução informal	Análise
A9	Dedução formal	Dedução formal

A10	Dedução informal	-
A11	Dedução formal	Dedução formal
A12	Dedução formal	Dedução formal
A13	Dedução formal	Dedução formal
A14	Análise	Dedução formal
A15	Dedução formal	Dedução formal
A16	Análise	Dedução formal
A17	Dedução formal	Dedução formal
A18	-	Dedução formal

FONTE: autoria própria, 2018

Observando os dados no Quadro 15 notamos que no pré-teste a resposta de dois alunos foram classificadas no nível Análise, quatro no nível Dedução Informal e onze no nível Dedução Formal. Como exemplo das demonstrações mais apresentadas temos a resposta do aluno A13 (Figura 35) que está classificada no nível Dedução Formal, pois o estudante constrói a sua demonstração com uma linguagem geométrica formal, identifica a informação implícita do lado comum, justifica a congruência dos triângulos com base no caso Lado, Lado, Lado e utiliza a definição de congruência para concluir a sua prova.

Figura 35: Resposta do estudante A13 - Questão 7 - Pré-teste

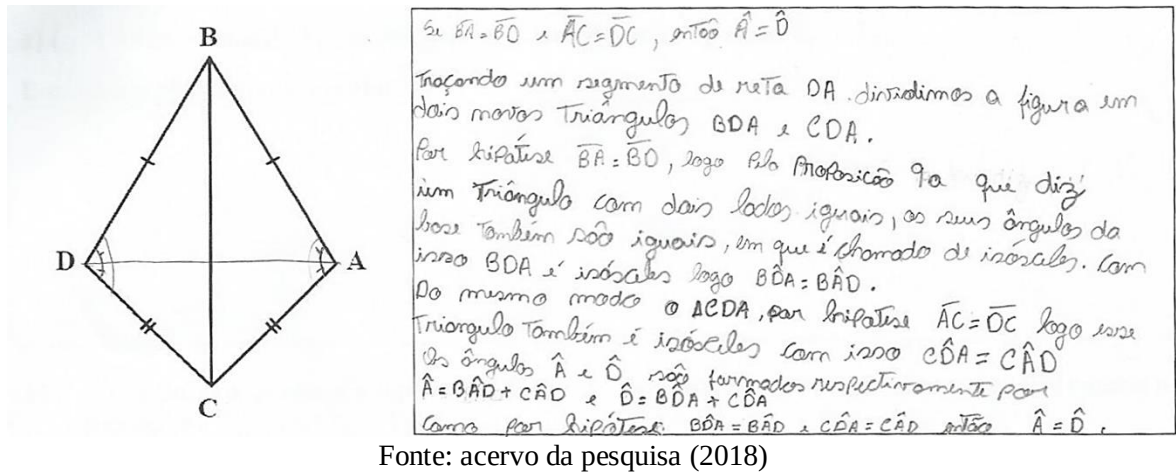


Dados os triângulos BDC e BAC que aparecem na figura ao lado, temos por Hipótese que $\overline{BA} = \overline{BD}$, $\overline{AC} = \overline{DC}$ e como podemos notar, o lado BC é comum para os dois triângulos, logo por LLL $BDC \equiv BAC$, portanto, pela definição de congruência seus ângulos também são congruentes, então $\hat{A} = \hat{D}$ como queríamos provar. ▮

Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No pré-teste destacamos ainda a resposta do aluno A11 (Figura 36) que também está classificada no nível Dedução Formal, o estudante construiu uma demonstração diferente das demais, estrategicamente traçou um segmento de reta dividindo a figura em dois novos triângulos e usou a definição e uma propriedade de triângulos isósceles para justificar a congruência dos ângulos, conforme pedido no enunciado.

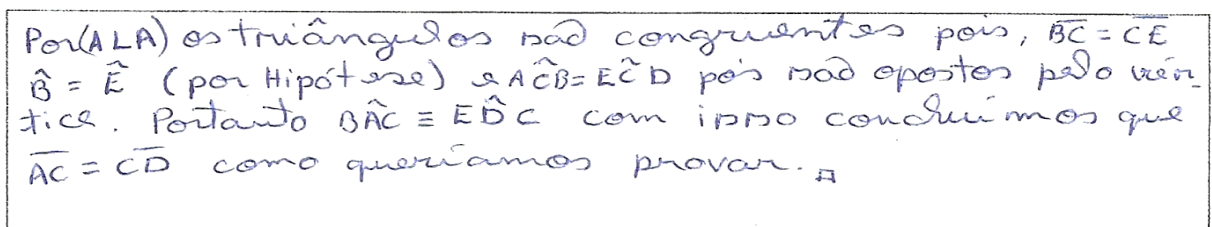
Figura 36: Resposta do estudante A11 - Questão 7 - Pré-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Com os dados mostrados no Quadro 15 é possível notar que no pós-teste as respostas de dois estudantes foram classificadas no nível Análise e catorze no nível Dedução Formal. Para exemplificar a maioria das demonstrações apresentadas, temos a resposta do aluno A13 (Figura 37) que está classificada no nível Dedução Formal, uma vez que o estudante usa uma linguagem geométrica formal para construir sua demonstração, justifica a congruência dos triângulos com base no caso Lado, Ângulo, Lado, identifica a informação implícita dos ângulos opostos pelo vértice e assim conclui a sua prova.

Figura 37: Resposta do estudante A13 - Questão 7 - Pós-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Ao compararmos individualmente os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele identificados nas demonstrações apresentadas pelos alunos na questão 7 do pré-teste e nas demonstrações apresentadas na questão 7 do pós-teste, conforme mostrado no Quadro 15, observamos que dez alunos mantiveram o nível se suas respostas, três aumentaram e quatro diminuíram.

6.8 Análise da Questão 8

Tanto a questão 8 do pré-teste quanto a questão 8 do pós-teste pertenciam ao Nível 3 (dedução formal) da teoria de Van Hiele, ambas tinham como hipótese que os triângulos eram

retângulos e apesar de terem o mesmo enunciado, os itens a, b, c e d presentes em cada uma delas eram diferentes e deveriam ser classificados como verdadeiro ou falso. Caso a afirmação contida no item fosse falsa, um contraexemplo deveria ser apresentado e se fosse verdadeira, deveria ser demonstrada. No quadro a seguir estão dispostos os níveis de pensamento geométrico identificado nas respostas dos estudantes.

Quadro 16: Níveis de pensamento geométrico identificados nos itens a, b, c e d da questão 8 do pré-teste e do pós-teste

QUESTÃO 8								
	Pré-teste				Pós-teste			
	Item a	Item b	Item c	Item d	Item a	Item b	Item c	Item d
A1	Dedução formal	-	-	Dedução formal	Dedução formal	-	Dedução formal	-
A2	Dedução formal	Dedução informal	Análise	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal
A3	-	-	-	-	Dedução informal	-	Dedução formal	-
A4	Dedução informal	Dedução informal	-	-	Dedução informal	Análise	Análise	Visualização
A5	Dedução informal	-	Dedução informal	-	-	-	-	-
A6	Dedução formal	Dedução informal	Dedução informal	Dedução formal	Dedução informal	Visualização	Visualização	Visualização
A7	Dedução formal	Dedução formal	-	Dedução formal	-	-	-	-
A8	Dedução formal	Dedução formal	Análise	Dedução informal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução informal
A9	Dedução formal	Dedução formal	Análise	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal	Análise
A10	Dedução formal	Dedução informal	Dedução informal	-	-	-	-	-
A11	-	-	-	-	-	-	-	-
A12	-	-	-	-	Dedução formal	n/d	Dedução formal	Dedução formal
A13	Dedução formal	n/d	n/d	Dedução informal	-	-	-	-
A14	-	-	-	-	Dedução informal	Dedução informal	Dedução informal	Dedução informal
A15	Dedução formal	Dedução formal	Dedução informal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução informal	Dedução formal	Dedução informal
A16	Análise	-	-	-	Dedução informal	Dedução informal	Análise	Análise
A17	Dedução informal	n/d	Análise	Dedução informal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal	Dedução formal
A18	Análise	Dedução informal	Análise	Dedução informal	n/d	-	-	-

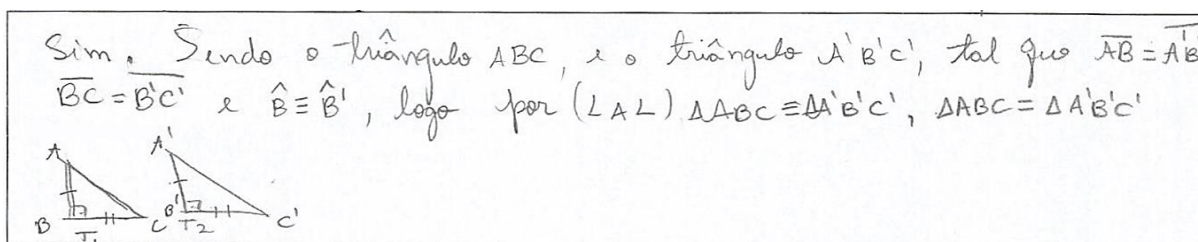
FONTE: autoria própria, 2018

É notável a grande quantidade de estudantes que não atribuíram respostas a todos ou a alguns itens das questões 8 de ambos os questionários, conforme mostrado na tabela acima. A falta de familiarização com questões deste tipo é um dos fatores que podem justificar essa ausência de respostas, como também a falta de vontade por parte dos estudantes, uma vez que se tratava da última questão de um questionário relativamente longo.

Conforme mostrado no Quadro 16, no item a do pré-teste as respostas de dois alunos foram classificadas no nível Análise, três no nível Dedução Informal e nove no nível Dedução formal. Já no item b, cinco respostas foram classificadas como Dedução informal e quatro como Dedução Formal. No item c do mesmo questionário, as respostas de cinco alunos foram classificadas no nível Análise, quatro no nível Dedução Informal e cinco no nível Dedução Formal. Por fim, no item d, quatro respostas foram classificadas como Dedução Informal e seis no nível Dedução Formal.

A resposta do aluno A6 (Figura 38) no item a segue o padrão das provas mais comuns analisadas no pré-teste e está classificada no nível Dedução Formal, pois o estudante usa uma linguagem geométrica formal para construir a sua demonstração, exibe um desenho coerente com o que está sendo escrito, explicita a correspondência dos elementos e justifica pelo caso Lado, Ângulo, Lado a congruência dos triângulos retângulos.

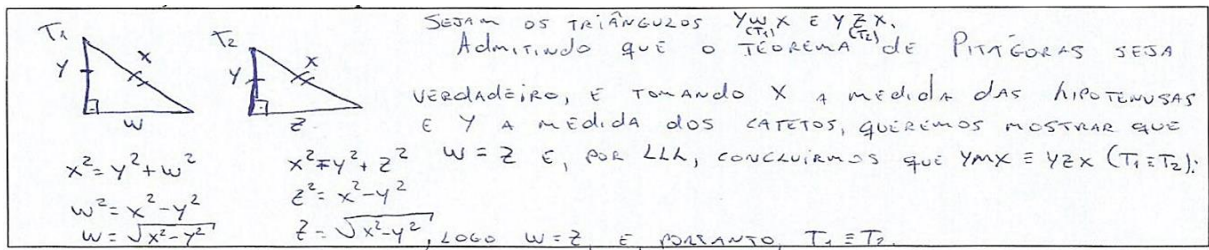
Figura 38: Resposta do estudante A6 - Questão 8: item a - Pré-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

No item b ressaltamos a resposta do aluno A7 (Figura 39) que está classificada também no nível Dedução Formal. O estudante exibiu uma demonstração muito diferente das demais encontradas no pré-teste, pois atribuiu medidas para os lados dos triângulos retângulos e usando o Teorema de Pitágoras, provou que os triângulos são congruentes pelo caso Lado, Lado, Lado.

Figura 39: Resposta do estudante A7 - Questão 8: item b - Pré-teste

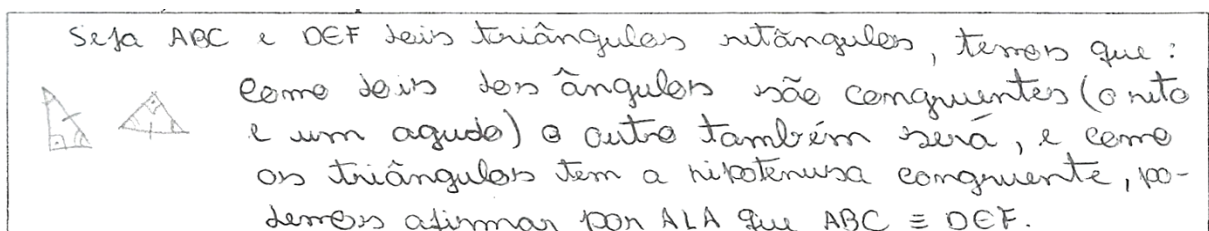


Fonte: acervo da pesquisa (2018)

O Quadro 16 nos mostra ainda que no item a do pós-teste as respostas de cinco alunos foram classificadas como Dedução Informal e sete no nível Dedução Formal. No item b, uma resposta foi classificada no nível Visualização, uma no nível Análise, três no nível Dedução Informal e quatro no nível Dedução Formal. No item c do mesmo questionário, a resposta de um aluno foi classificada como Visualização, duas no nível Análise, uma no nível Dedução Informal e oito no nível Dedução Formal. Por fim, no item d, duas respostas foram classificadas no nível Visualização, duas no nível Análise, três no nível Dedução Informal e três no nível Dedução Formal.

A resposta do aluno A3 (Figura 40) no item c é um exemplo de demonstrações mais frequentes analisadas no pós-teste e está classificada no nível Dedução Formal, pois o estudante consegue expressar seu pensamento de maneira formal, reconhece a informação implícita de que os triângulos possuem os três ângulos correspondentes congruentes e utiliza o caso Ângulo, Lado, Ângulo para justificar a congruência dos triângulos retângulos.

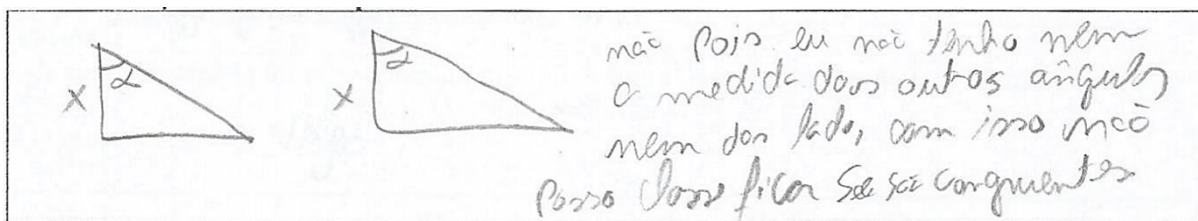
Figura 40: Resposta do estudante A3 - Questão 8: item c - Pós-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Já no item d do pós-teste destacamos a resposta do aluno A16 (Figura 41) que está classificada no nível Análise, pois o estudante sente a necessidade de mais informações acerca dos lados e ângulos do triângulo, não reconhecendo, portanto, as informações implícitas decorrentes do fato de que os triângulos são retângulos.

Figura 41: Resposta do estudante A16 - Questão 8: item d - Pós-teste



Fonte: acervo da pesquisa (2018)

Com os dados do Quadro 16 pudemos observar os níveis de pensamento geométrico identificados que mais se repetiam ao analisarmos de maneira geral todos os itens da questão 8 de cada questionário. Assim, concluímos que nos itens da questão 8 do pré-teste um aluno teve a maioria de suas respostas classificadas no nível Análise, cinco alunos no nível Dedução Informal e oito alunos no nível Dedução Formal. Já nos itens da questão 8 do pós-teste, um aluno teve a maioria de suas respostas classificadas no nível Visualização, um aluno no nível Análise, dois alunos no nível Dedução Informal e oito alunos no nível Dedução Formal. Dessa maneira, foi possível comparar as questões de ambos os questionários e observar que os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele foram mantidos por cinco alunos, dois avançaram e dois diminuíram.

6.9 Classificação das Respostas Frequentes e Comparação entre o Pré-teste e o Pós-teste

Como mostrado anteriormente, oito questões integravam o pré-teste e o pós-teste, algumas eram compostas por dois ou mais itens e como consequência disso, doze respostas de cada questionário poderiam ser categorizadas em um dos níveis da teoria de Van Hiele. As tabelas 1 e 2 expostas a seguir, mostram o número de respostas classificadas nos níveis de pensamento geométrico que cada aluno atingiu, os níveis mais frequentes caracterizam-se por serem identificados na maioria das respostas, não significando, portanto, que o aluno é um pensador do nível que ele atingiu com mais frequência nos questionários.

Tanto na Tabela 1 quanto na Tabela 2 é evidente que alguns alunos apresentaram um número menor que as doze respostas esperadas em cada um dos questionários, esse fato justifica-se pela grande quantidade de questões em branco ou questões com respostas impossíveis de serem classificadas em algum nível de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele, no entanto, isso não nos impediu de verificar o nível que maior predominava nas respostas das questões respondidas.

Tabela 1: Quantidade individual e frequência dos níveis de pensamento geométrico identificados nas respostas do pré-teste

	PRÉ-TESTE				
	Visualização	Análise	Dedução Informal	Dedução Formal	Nível Frequente
A1	0	3	2	4	Dedução Formal
A2	1	5	2	4	Análise
A3	0	2	2	3	Dedução Formal
A4	1	5	4	0	Análise
A5	1	1	4	1	Dedução Informal
A6	0	1	5	4	Dedução Informal
A7	1	2	2	6	Dedução Formal
A8	1	3	4	4	Dedução Informal Dedução Formal
A9	0	3	3	6	Dedução Formal
A10	1	2	6	1	Dedução Informal
A11	0	1	3	2	Dedução Informal
A12	0	3	0	3	Análise Dedução Formal
A13	1	2	3	4	Dedução Formal
A14	0	4	1	1	Análise
A15	1	1	6	4	Dedução Informal
A16	1	5	3	0	Análise
A17	1	4	5	1	Dedução Informal
A18	1	6	2	0	Análise

FONTE: autoria própria, 2018

Notamos na Tabela 1 que no pré-teste, questionário aplicado no início da disciplina Fundamentos da Geometria Plana, as respostas de cinco alunos foram classificadas com maior frequência no nível Análise, as respostas de seis alunos no nível Dedução Informal e as respostas de cinco alunos, no nível Dedução Formal. Observamos ainda que dois estudantes obtiveram a mesma quantidade de respostas classificadas em níveis diferentes e, portanto, os níveis mais frequentes de seus questionários foram estabelecidos da seguinte forma: o questionário do aluno A8 nos níveis Dedução Informal e Dedução Formal e o questionário do aluno A12 nos níveis Análise e Dedução Formal.

Tabela 2: Quantidade individual e frequência dos níveis de pensamento geométrico identificados nas respostas do pós-teste

	PÓS-TESTE				
	Visualização	Análise	Dedução Informal	Dedução Formal	Nível Frequente
A1	0	2	3	3	Dedução Informal Dedução Formal
A2	1	4	1	6	Dedução Formal
A3	0	1	5	3	Dedução Informal

A4	2	5	2	1	Análise
A5	0	3	2	0	Análise
A6	3	3	3	1	Visualização Análise Dedução Informal
A7	0	2	3	1	Dedução Informal
A8	2	4	1	4	Análise Dedução Formal
A9	1	3	2	5	Dedução Formal
A10	1	4	0	0	Análise
A11	0	1	4	2	Dedução Informal
A12	2	2	1	5	Dedução Formal
A13	1	2	3	1	Dedução Informal
A14	1	4	6	1	Dedução Informal
A15	1	2	6	3	Dedução Informal
A16	1	6	3	1	Análise
A17	0	1	5	6	Dedução Formal
A18	4	1	0	1	Visualização

FONTE: autoria própria, 2018

Com os dados da Tabela 2 notamos que no pós-teste, questionário aplicado no final da disciplina Fundamentos da Geometria Plana, as respostas de um aluno foram classificadas com maior frequência no nível Visualização, as respostas de quatro alunos no nível Análise, as respostas de seis alunos no nível Dedução Informal e as respostas de quatro alunos, no nível Dedução Formal. Ainda é possível observar que três estudantes obtiveram a mesma quantidade de respostas classificadas em níveis diferentes e como consequência, os níveis mais frequentes de seus questionários foram estabelecidos da seguinte maneira: o questionário do aluno A1 nos níveis Dedução Informal e Dedução Informal, o questionário do aluno A6 nos níveis Visualização, Análise e Dedução Informal e o questionário do aluno A8 nos níveis Análise e Dedução Formal.

Além dos dados dispostos na Tabela 1 e na Tabela 2 que exibem os níveis mais frequentes identificados nas respostas dos estudantes, consideramos relevante construir a Tabela 3, a qual expõe de maneira geral e detalhada a classificação em um dos níveis da teoria de Van Hiele de todas as respostas atribuídas pelos alunos em ambos os questionários. Assim, torna-se possível fazer uma análise comparativa entre os níveis que apareceram com maior frequência no pré-teste e no pós-teste de cada aluno. Os números expostos na Tabela 3 a seguir correspondem aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico da teoria de Van Hiele, a saber: Nível 0 (Visualização), Nível 1 (Análise), Nível 2 (Dedução Informal) e Nível 3 (Rigor), conforme mostrado anteriormente.

Tabela 3: Visão geral dos níveis de pensamento geométrico identificados nas questões do pré-teste e do pós-teste

			Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Van Hiele																		
			Aluno																		
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Questões Pré-teste	Q1		2	1	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1	
	Q2	a	1	1	2	1	1	2	2	0	1	1	2	1	1	1	2	2	2	1	
		b	1	1	2	1	2	2	2	2	2	1	2	1	1	1	2	1	2	n/d	
	Q3		1	1	3	1	n/d	3	3	3	3	n/d	n/d	3	3	-	2	2	2	n/d	
	Q4	b	2	2	1	1	-	-	1	1	2	0	2	-	2	1	2	0	1	1	
	Q5		-	0	-	0	-	-	0	2	3	2	-	-	0	-	0	1	0	0	
	Q6	b	3	3	3	2	3	2	3	3	3	2	3	3	3	3	2	2	1	1	
	Q7		3	3	3	2	2	3	3	2	3	2	3	3	3	3	1	3	1	3	-
	Q8	a	3	3	-	2	2	3	3	3	3	3	-	-	3	-	3	1	2	1	
		b	-	2	-	2	-	2	3	3	3	2	-	-	n/d	-	3	-	n/d	2	
		c	-	1	-	-	2	2	-	1	1	2	-	-	n/d	-	2	-	1	1	
		d	3	3	-	-	-	3	3	2	3	-	-	-	2	-	3	-	2	2	
Questões Pós-teste	Q1		2	1	2	2	-	1	3	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	0	
	Q2	a	1	1	2	1	2	1	1	0	1	1	1	2	1	2	1	-	2	1	
		b	1	1	2	n/d	2	-	2	1	2	1	2	n/d	2	1	2	1	2	n/d	
	Q3		2	3	3	n/d	1	2	1	3	3	n/d	3	3	1	1	2	1	3	n/d	
	Q4	b	-	1	1	1	n/d	2	2	-	-	1	2	0	0	1	2	1	2	0	
	Q5		-	0	-	0	-	1	-	1	2	-	-	1	-	0	0	2	1	0	
	Q6	b	2	2	2	1	1	-	2	0	0	0	2	0	2	2	2	0	2	0	
	Q7		3	3	3	3	1	3	-	1	3	-	3	3	3	3	3	3	3	3	
	Q8	a	3	3	2	2	-	2	-	3	3	-	-	3	-	2	3	2	3	n/d	
		b	-	3	-	1	-	0	-	3	3	-	-	n/d	-	2	2	2	3	-	
		c	3	3	3	1	-	0	-	3	3	-	-	3	-	2	3	1	3	-	
		d	-	3	-	0	-	0	-	2	1	-	-	3	-	2	2	1	3	-	

FONTE: autoria própria, 2018

Os dados da Tabela 3 nos permite fazer algumas comparações, dentre elas, comparar o nível mais frequente das respostas do pré-teste com o nível mais frequente das respostas do pós-teste de cada estudante. Observamos, portanto, que oito alunos mantiveram o nível de seus questionários, ou seja, tanto no pré-teste quanto no pós-teste o nível mais frequente das respostas foi o mesmo. Apenas quatro alunos aumentaram o nível de seus questionários, ou seja, o nível frequente de suas respostas no pós-teste foi maior que o nível frequente das respostas do pré-teste. Seis alunos diminuíram de nível de seus questionários, ou seja, o nível

frequente de suas respostas no pós-teste foi menor que o nível frequente das respostas do pré-teste. É possível notar ainda que os estudantes que tiveram suas respostas frequentes classificadas em níveis mais altos no pós-teste do que no pré-teste estão entre os que mais se empenharam nas respostas, respondendo todas as questões como os alunos A2, A14 e A17, ou conseguindo responder mais questões no pós-teste do que no pré-teste como foi o caso do aluno A12.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do nosso trabalho foi investigar o nível de pensamento geométrico de alguns alunos do curso de Licenciatura em Matemática antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana, tendo como foco a congruência de triângulos. Para isso, pensamos em três objetivos específicos, a saber: verificar os procedimentos dos alunos apresentados na resolução de problemas de congruência de triângulos; identificar os níveis de pensamento geométrico em que alunos participantes da pesquisa se encontram, antes e após cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana; verificar as mudanças no nível de pensamento geométrico dos alunos sobre congruência de triângulos.

Para tanto, utilizamos os níveis de desenvolvimento de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele e elaboramos dois tipos de questionários, ambos compostos por oito questões relacionadas a congruência de triângulo. O pré-teste, primeiro questionário, foi aplicado antes dos estudantes cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana, enquanto o pós-teste, segundo questionário, foi aplicado após os estudantes cursarem a disciplina. Durante a análise dos questionários, verificamos os procedimentos e as estratégias utilizadas pelos alunos nas respostas das questões e as classificamos em um dos níveis da teoria utilizada.

Com as respostas apresentadas no pré-teste, identificamos que antes de cursarem a disciplina, as respostas de cinco alunos foram classificadas com maior frequência no nível Análise, as respostas de seis alunos no nível Dedução Informal e as respostas de cinco alunos, no nível Dedução Formal. Já no pós-teste, as respostas de um aluno foram classificadas com maior frequência no nível Visualização, as respostas de quatro alunos no nível Análise, as respostas de seis alunos no nível Dedução Informal e as respostas de quatro alunos, no nível Dedução Formal.

Ao compararmos os níveis de raciocínio da Teoria de Van Hiele apresentados no pré-teste com os níveis de raciocínio classificados no pós-teste, pudemos verificar algumas mudanças: oito alunos mantiveram o nível de seus questionários, apenas quatro alunos aumentaram o nível de seus questionários, e seis alunos diminuíram de nível de seus questionários.

Esperávamos, portanto, que os níveis das respostas fossem mantidos por alguns alunos, mas principalmente que a maioria dos estudantes alcançassem um nível maior de

raciocínio após cursarem a disciplina, uma vez que um dos principais objetivos de Fundamentos da Geometria Plana é desenvolver o pensamento geométrico. No entanto, houve uma quantidade relativamente alta de alunos que apresentaram respostas classificadas com maior frequência em níveis mais baixos no pós-teste, ou seja, ao final da disciplina e esse fato pode estar relacionado às questões deixadas em branco e as respostas que não foram definidas em um algum nível de pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele. Não atribuir resposta a determinadas questões não significa necessariamente que o aluno não sabia o conteúdo abordado ou que não conseguiu pensar a respeito, mas também pode indicar que o mesmo tenha sido indiferente à pesquisa, não dedicando-se como gostaríamos, ou então, o grande número de questões pode ter influenciado nesse resultado.

De maneira geral, apenas quatro dos estudantes participantes da pesquisa concluíram a disciplina tendo suas respostas mais frequentes classificadas no Nível 3 da Teoria de Van Hiele: dedução formal. Um dos objetivos de Fundamentos da Geometria Plana, conforme visto na ementa, é desenvolver o pensamento dedutivo e a argumentação em geometria, este propósito deixa claro, portanto, que é almejado que o nível Dedução Formal seja alcançado pela maioria dos alunos após cursarem a disciplina, principalmente com relação ao pensamento dedutivo. Esse objetivo, ao menos com relação a congruência de triângulos, não foi no geral alcançado, porém esse tipo de afirmação é variável, tendo em vista a grande quantidade de respostas deixadas em branco e outras não definidas, conforme mencionado anteriormente. O grande número de conteúdos a ser visitados na ementa também pode contribuir com essa realidade, afinal o semestre letivo com 60h pode ser realmente pouco tempo para modificar positivamente o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Outro fator capaz de justificar a quantidade de alunos que não tiveram suas respostas mais frequentes classificadas no nível esperado com relação a congruência de triângulos pode ser a metodologia adotada durante a disciplina, tendo em vista que a mesma não estava articulada com as propriedades do modelo, muito menos com as fases do aprendizado da Teoria de Van Hiele, as quais foram desenvolvidas com o objetivo de favorecer a aquisição de cada um dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico. Para Crowley (1994, p. 6), “o método e a organização do curso, assim como o conteúdo e o material usados, são importantes áreas de preocupação pedagógica”, uma vez que para progredir ao longo dos níveis, as instruções recebidas são de grande relevância.

Com os resultados dessa pesquisa consideramos importante pensar na elaboração de novas metodologias de ensino voltadas para o desenvolvimento e avanço do pensamento geométrico. Acreditamos que a aplicação e discussão de questões que atendam aos diferentes níveis da Teoria de Van Hiele, conforme as que foram elaboradas e adaptadas por nós para compor o pré-teste e o pós-teste, podem contribuir positivamente nesse processo, não apenas com o conteúdo congruência de triângulos, mas com toda a gama de conteúdos que fazem parte do currículo de Fundamentos da Geometria Plana, uma vez que os mesmos são de extrema importância para atuação do futuro professor em sala de aula.

Sugerimos em pesquisas futuras uma investigação acerca do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes que, durante a disciplina Fundamentos da Geometria Plana, como também ao longo do curso, responderam e discutiram questões elaboradas com base nos diferentes níveis da Teoria de Van Hiele, a fim de verificar se esses alunos se classificam como pensadores de níveis maiores ou menores do que os níveis de raciocínio dos alunos que não tiveram contato com questões dessa natureza.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273 p.
- BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015. 314 p.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p.
- BRASIL. Ministério da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.) **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. vol. 9. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005. 454 p.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- GOMES, I. **Algumas aplicações clássicas de congruência e semelhança de triângulos**. 2016. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, Dourados, 2016.
- LANKSHEAR, C; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008. 328 p.
- LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. P. F. Geometria. In: CARVALHO, J. B. P. F. (Coord.) **Matemática: ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 2010. p. 135-166.
- LIMA, E. M. B. **Um estudo sobre as disciplinas de Geometria em cursos de Licenciatura em Matemática**. 2014. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.
- LOPES, M. L. M. L.; NASSER, L. **Geometria na Era da Imagem e do Movimento**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996. 160 p.
- LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n. 4, p. 3-13, 1995.
- MELO, H. S. A aprendizagem de conceitos matemáticos fundamentados na sua etimologia e morfologia. In: GARRÃO, A. P.; DIAS, M. R.; TEIXEIRA, R. C. (Org.) **Investigar em Educação Matemática: Diálogos e conjunções numa perspectiva interdisciplinar**. Ponta Delgada: Letras Lavadas, 2015. p. 293-303.
- NAGATA, R. S. **Os Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: O Aprendizado do Conteúdo de Polígonos numa Perspectiva do Modelo Van Hiele**. 2016. 121 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 6 ed. Petrópolis: Vozes, 2014. 232 p.

TINOCO, L. A. A. **Geometria euclidiana por meio da resolução de problemas**. 3 ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, Projeto Fundação 2011. 182 p.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A: PRÉ-TESTE

UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

Estudante,

Ao responder o presente questionário, você estará contribuindo para a pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso de Gilvaneide Evelyn Silva Araújo, aluna do CAA/UFPE do 9º período do curso de Matemática-Licenciatura, que objetiva pesquisar sobre “o avanço no nível de pensamento geométrico de alguns alunos ao cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana”.

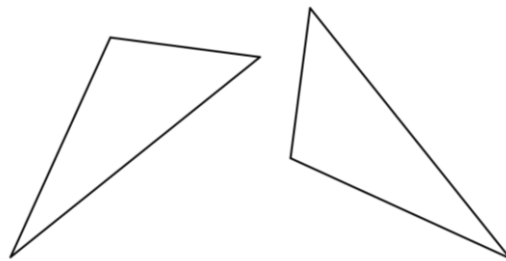
Ressaltamos que as informações obtidas serão utilizadas única e exclusivamente para fins acadêmicos e que garantiremos o anonimato do participante.

Nome: _____

Período: _____

PRÉ-TESTE

Q1 – Observe as figuras abaixo:



É possível afirmar que os triângulos são congruentes? Justifique.

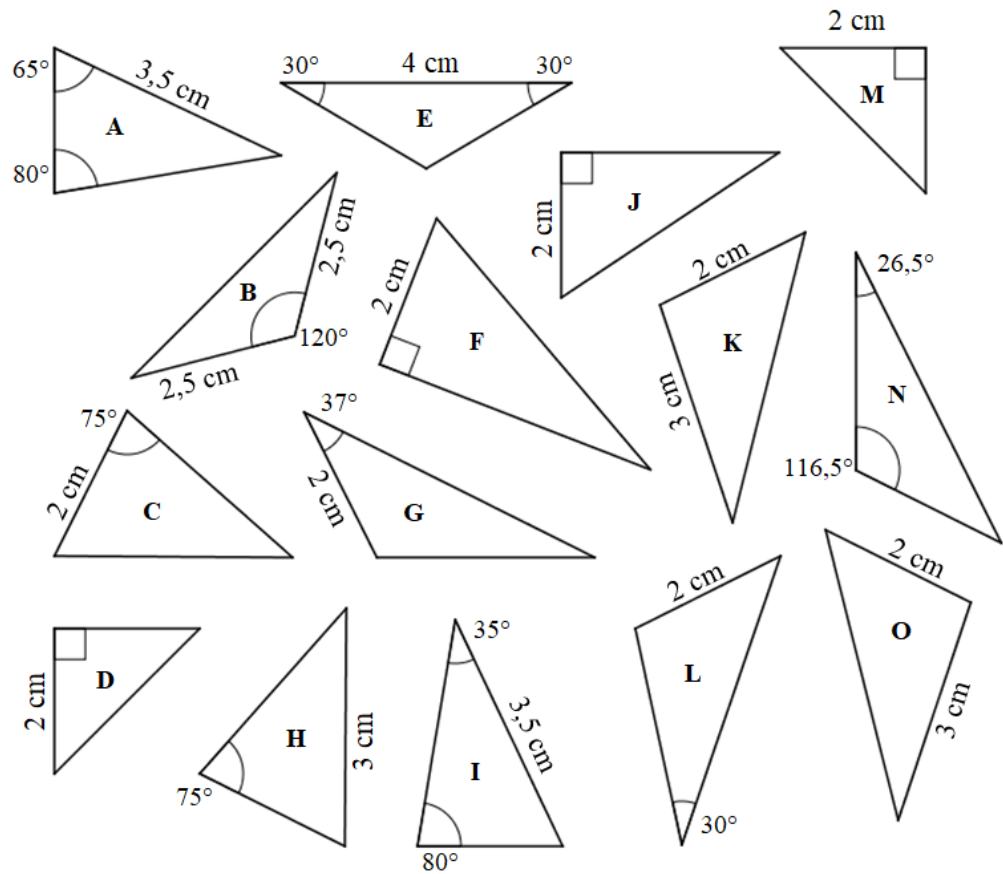
Q2 – Com base no seu conhecimento, como você explicaria o que são triângulos congruentes:

a) Para uma turma do ensino fundamental?

b) Para uma turma de universitários?

Q3 – Escolha UM dos casos de congruência de triângulo e enuncie:

Q4 – Observe os triângulos a seguir:



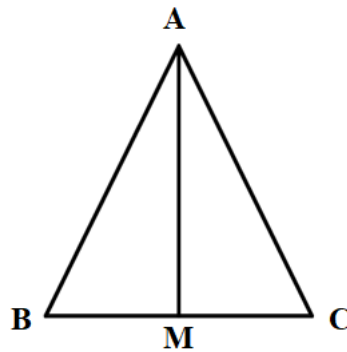
a) Preencha a tabela abaixo com os pares de triângulos congruentes que obedecem aos respectivos casos de congruência:

Casos de Congruência	1º Par	2º Par	3º Par
LLL			
LAL			
ALA			

b) Escolha um dos pares de triângulos congruentes que você escreveu na tabela anterior e justifique o caso de congruência escolhido:

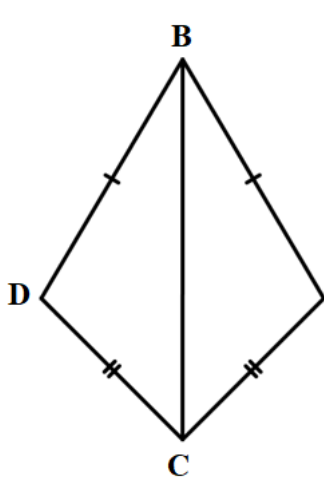
Q5 – Mostre, com um contraexemplo, que se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\hat{C} = \hat{C'}$ não se pode afirmar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

Q6 – O triângulo ABC abaixo é isósceles, pois tem dois lados congruentes: $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja M o ponto médio de BC, e AM a mediana relativa à base BC.



Os triângulos AMB e AMC são congruentes? Por quê?

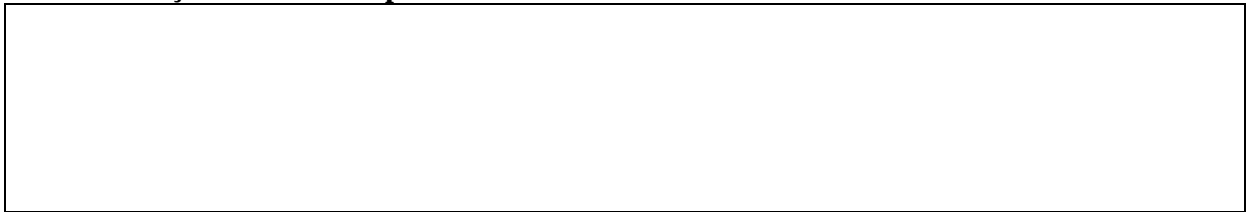
Q7 – Seja a figura a seguir. Sabendo que $\overline{BA} = \overline{BD}$ e que $\overline{AC} = \overline{DC}$, prove que $\hat{A} = \hat{D}$.



Q8 – Sejam T_1 e T_2 dois triângulos retângulos. Em cada um dos itens abaixo, decida se a afirmação é verdadeira (neste caso, demonstre-a) ou falsa (dê um contraexemplo).

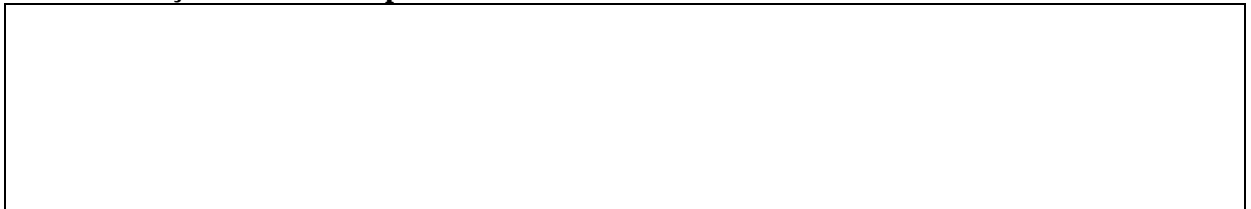
a) () Se os catetos de T_1 são congruentes aos catetos de T_2 então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:



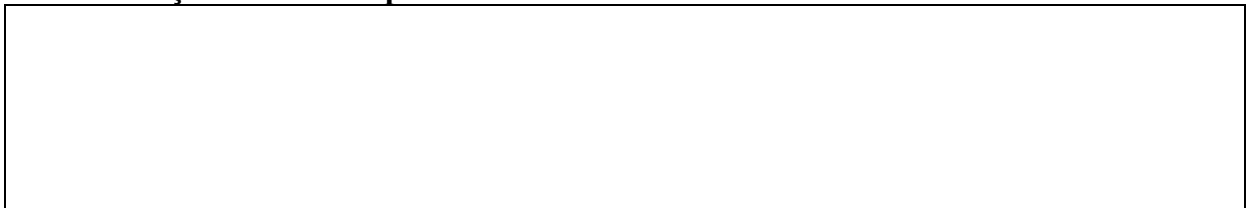
b) () Se um dos catetos e a hipotenusa de T_1 são respectivamente congruentes a um dos catetos e a hipotenusa de T_2 , então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:



c) () Se dois dos lados de T_1 são congruentes a dois dos lados de T_2 , então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:



d) () Se um dos catetos de T_1 e seu ângulo agudo adjacente são respectivamente congruentes a um dos catetos de T_2 e seu ângulo agudo adjacente então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:

Obrigada pela valiosa contribuição!

APÊNDICE B: PÓS-TESTE

UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO

Estudante,

Ao responder o presente questionário, você estará contribuindo para a pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso de Gilvaneide Evelyn Silva Araújo, aluna do CAA/UFPE do 9º período do curso de Matemática-Licenciatura, que objetiva pesquisar sobre “o avanço no nível de pensamento geométrico de alguns alunos ao cursarem a disciplina Fundamentos da Geometria Plana”.

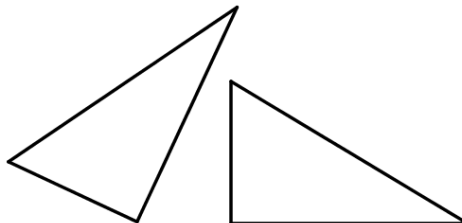
Ressaltamos que as informações obtidas serão utilizadas única e exclusivamente para fins acadêmicos e que garantiremos o anonimato do participante.

Nome: _____

Período: _____

PÓS-TESTE

Q1 – Observe as figuras abaixo:



É possível afirmar que os triângulos são congruentes? Justifique.

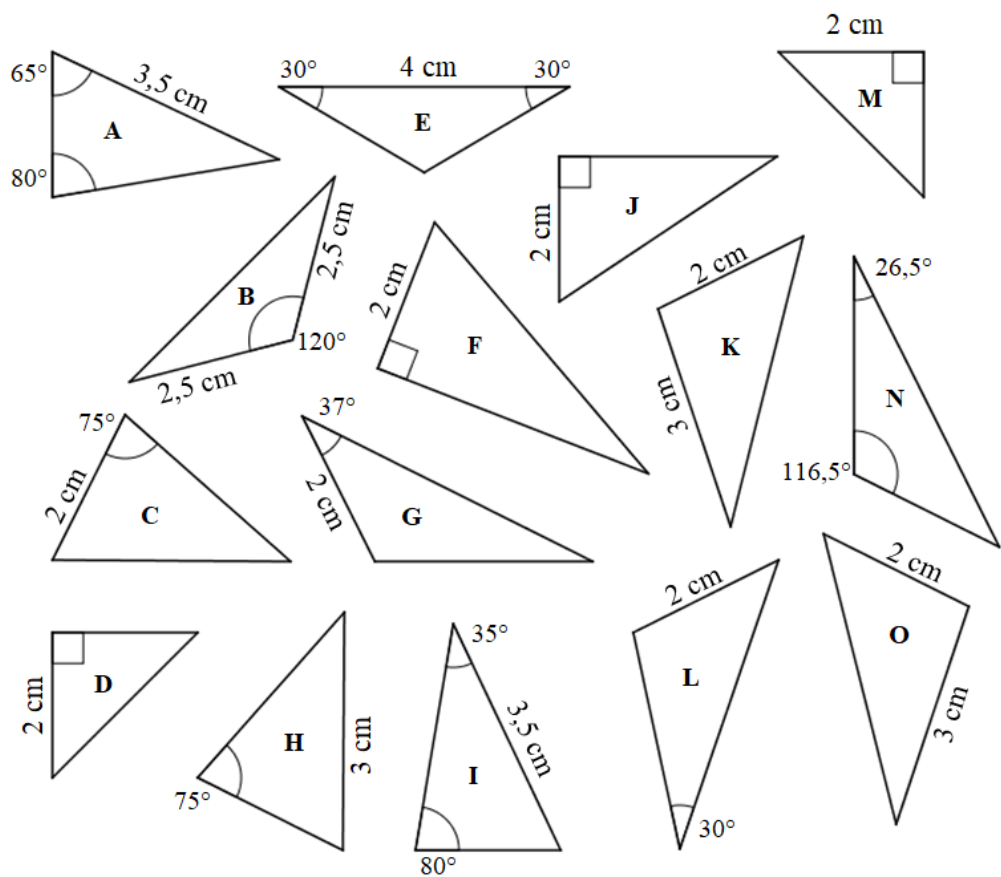
Q2 – Com base no seu conhecimento, como você explicaria o que são triângulos congruentes:

a) Para uma turma do ensino fundamental?

b) Para uma turma de universitários?

Q3 – Escolha UM dos casos de congruência de triângulo e enuncie:

Q4 – Observe os triângulos a seguir:



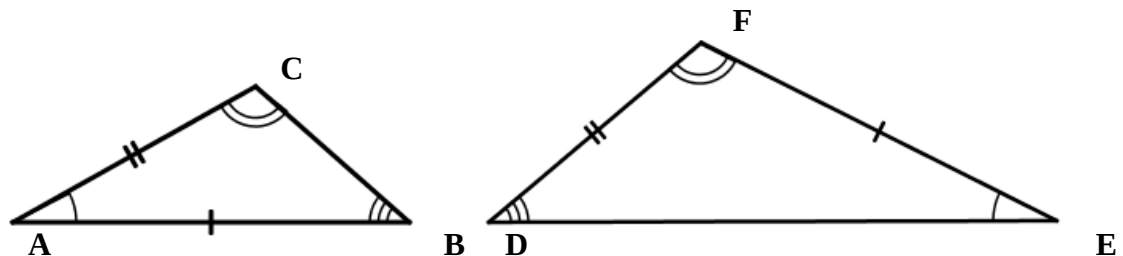
a) Preencha a tabela abaixo com os pares de triângulos congruentes que obedecem aos respectivos casos de congruência:

Casos de Congruência	1º Par	2º Par	3º Par
LLL			
LAL			
ALA			

b) Escolha um dos pares de triângulos congruentes que você escreveu na tabela anterior e justifique o caso de congruência escolhido:

Q5 – Mostre, com um contraexemplo, que se o triângulo ABC tem um lado e dois ângulos congruentes a um lado e dois ângulos do triângulo $A'B'C'$, não se pode afirmar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

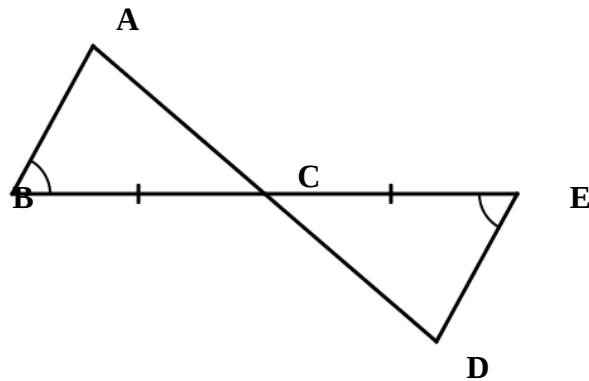
Q6 – Observe os triângulos ABC e DEF abaixo:



a) Quantos pares de elementos congruentes têm os dois triângulos?

b) Os triângulos ABC e DEF são congruentes? Justifique.

Q7 – Seja a figura a seguir. Sabendo que $\overline{BC} = \overline{CE}$ e que $\hat{B} = \hat{E}$, prove que $\overline{AC} = \overline{CD}$.



Q8 – Sejam T_1 e T_2 dois triângulos retângulos. Em cada um dos itens abaixo, decida se a afirmação é verdadeira (neste caso, demonstre-a) ou falsa (dê um contraexemplo).

a) () Se um dos catetos de T_1 e seu ângulo oposto são respectivamente congruentes a um dos catetos de T_2 e seu ângulo oposto, então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:

b) () Se um dos catetos e um ângulo agudo de T_1 são respectivamente congruentes a um dos catetos e um ângulo agudo de T_2 , então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:

c) () Se a hipotenusa e um ângulo agudo de T_1 são respectivamente congruentes a hipotenusa e um ângulo agudo de T_2 , então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:

d) () Se um dos lados e um ângulo agudo de T_1 são respectivamente congruentes a um dos lados e um ângulo agudo de T_2 , então $T_1 = T_2$.

Demonstração/contraexemplo:

Obrigada pela valiosa contribuição!