UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

VANESSA MOURA DA SILVA DANTAS

CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA ACERCA DO CONTEÚDO CONGRUÊNCIA MODULAR NA SUA PRÁTICA DOCENTE

Caruaru
2021

VANESSA MOURA DA SILVA DANTAS

CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA ACERCA DO CONTEÚDO CONGRUÊNCIA MODULAR NA SUA PRÁTICA DOCENTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientador: Profº. Dr. Marcos Luiz Henrique.

Coorientadora: Profª. M.ª Lidiane Pereira de Carvalho.

Caruaru

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Dantas, Vanessa Moura da Silva.
Concepções de licenciandos em matemática acerca do conteúdo Congruência Modular na sua prática docente / Vanessa Moura da Silva Dantas - 2021.
66f.: il.;30 cm.

Orientador(a): Profº Dr. Marcos Luiz Henrique
Cooorientador(a): Profª. M.ª Lidiane Pereira de Carvalho
TCC (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Matemática - Licenciatura, 2021.

1. Formação docente. 2. Congruência modular. 3. Aprendizagem matemática. 4. Aplicação. I. Henrique, Profº Dr. Marcos Luiz II. Carvalho, Profª. M.ª Lidiane Pereira de III. Título.

510 CDD (22.ed.)

VANESSA MOURA DA SILVA DANTAS

CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA ACERCA DO CONTEÚDO CONGRUÊNCIA MODULAR PARA A FORMAÇÃO DOCENTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovada em: 14/12/2021.

BANCA EXAMINADORA

____
Profº. Dr. Marcos Luiz Henrique (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profº. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____
Profª. Me. Luan Danilo Silva dos Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho a minha avó que foi quem me incentivou a cursar licenciatura em matemática, aos meus familiares, amigos e professores que estiveram comigo em toda essa caminhada, meu orientador e coorientadora, também meus colegas de classe com os quais passei e dividi alguns anos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me deu forças para terminar esse curso e sempre esteve presente, ao meu orientador Dr. Marcos Luiz Henrique e coorientadora M.ª Lidiane Pereira de Carvalho por tempo, dedicação, paciência comigo e os esclarecimentos de dúvidas e orientação para com o presente trabalho, aos meus colegas de classe e todos que contribuíram com a pesquisa respondendo e nos ajudando, também quero agradecer a todos os meus professores do curso que me deram ensinamentos e disciplinas lecionadas, além da disponibilidade dentro e fora da sala de aula.

Aos meus amigos do curso Allyson Rafael e Lucas Diego com quem dividi alguns anos de curso e se tornaram meus melhores amigos desde a primeira semana de curso quando nos conhecemos e nos tornamos inseparáveis em todas as aulas. Devido à pandemia e o ensino remoto nos afastamos, porém, todos estão passando por momentos difíceis.

Gostaria de agradecer a toda minha família por todo apoio dado e principalmente a minha avó Maria Helena que sempre me deu apoio e força quando eu mais precisei, a minha mãe que sempre me consolou nos meus maiores momentos de aflição. Minha família por parte de pai que são todos do Rio Grande do Norte e mesmo não estando presentes fisicamente, me dão apoio e conforto nos momentos em que mais preciso.

À todas as pessoas que direta ou indiretamente colaboraram com o trabalho, todas as pessoas que sempre estiveram torcendo mim e para o sucesso do trabalho, por fim quero agradecer a mim mesma, que mesmo com tudo me mantive forte e não desisti, mesmo quando, às vezes, pensava ser o melhor.

Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa (Albert Einstein).

RESUMO

Este trabalho objetivou investigar a concepção dos discentes de matemática da UFPE/CAA, que já cursaram ou estão cursando a disciplina Teoria dos Números, sobre o conteúdo Congruência Modular e como relaciona-lo com conteúdos fundamentados por ele na Educação Básica. Bem como se esses discentes se sentem mais preparados para ensinar na Educação Básica após estudarem a Congruência Modular no Ensino Superior. Considerando que o curso de Matemática-Licenciatura tem como objetivo a formação de professores de matemática, isto é, de profissionais que terão como tarefa educar através da matemática, é relevante conhecer como os estudantes do curso relacionam os conteúdos do Ensino Superior com a sua prática docente. Nesse sentido, foi proposta uma pesquisa qualitativa e descritiva, a fim de identificar essas concepções com uma amostra de estudantes do curso de Matemática-Licenciatura. Devido à pandemia por COVID-19 e ao confinamento social imposto como uma das ações de combate, a coleta de dados foi realizada através de questionário estruturado do Google Formulários. Os resultados deste trabalho apontam que o conteúdo é abordado no Ensino Superior de modo relacionado com os conteúdos da Educação Básica, e que, mesmo que uma parte dos estudantes participantes desta pesquisa ainda não atuem como docentes, há um reconhecimento, por parte deles, da importância de que sejam abordados, na formação de professores de matemática, temas que se aproximem da prática na Educação Básica.

Palavras-chave: Formação docente. Congruência modular. Aprendizagem matemática. Aplicação.

ABSTRACT

This work aimed to investigate the conception of mathematics students at UFPE/CAA, who have taken or are currently taking the Number Theory course, about the Modular Congruence content and how they relate it to the underlying foundations taught in Basic Education, as well as whether the students feel more prepared to teach such contents in Basic Education after studying Modular Congruence in Higher Education. Considering that the Mathematics degree we are referring to aims at training mathematics teachers, that is, professionals who will have the task of educating through mathematics, it is important to know how the students relate the contents of Higher Education with their practice as teachers. In this sense, a qualitative and descriptive research was proposed in order to identify these conceptions in mathematics students. Due to the COVID-19 pandemic and the social confinement imposed as one of the combat actions, data collection was carried out through a structured Google Forms questionnaire. The results of this work show that the content is approached in Higher Education in a way related to the contents of Basic Education, and that, even though a part of the participating students in this research still does not act as teachers, *they recognize the importance of addressing, in the training of mathematics teachers, topics that are close to the practice in Basic Education.

Keywords: Teacher training. Modular congruence. Mathematical learning. Application.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números estuda as propriedades dos números inteiros positivos e vem sendo construída com as contribuições de muitos matemáticos, dentre eles, Carl. F. Gauss, Leonhard Euler e Pierre de Fermat. A Teoria dos Números é dividida em três principais ramos: Teoria Algébrica que aborda o uso da álgebra e números complexos, Teoria Analítica voltada para o estudo dos resultados da análise real e complexa e Teoria Elementar estudo voltado para a Aritmética dos números inteiros. Neste trabalho abordaremos a Congruência Modular que faz parte da Teoria Elementar.

A congruência modular é uma parte importante da Teoria dos Números e está em várias situações do dia a dia, como no CPF, cartão de crédito, criptografia, códigos de barras, entre outras. Esse conteúdo é que estrutura alguns conteúdos da educação básica como algoritmo da divisão, divisibilidade, mínimo múltiplo comum (MMC) e máximo divisor comum (MDC), visto que ele tem aplicações no dia a dia, é importante que o professor consiga assimilar bem durante a sua formação e relacioná-lo com os conteúdos vistos na educação básica, além de que saiba das aplicações, pois esse é um tema que tem sido muito produzido nos trabalhos acadêmicos sobre a congruência modular.

Nesse contexto, é necessário que o professor em formação tenha experiências matemáticas no curso de formação de modo a relacioná-las àquilo que irá ensinar na educação básica, além de saber o que ensinar o futuro docente deve saber como irá ensinar, levando em consideração as especificidades de cada turma. Por esse fato, o referencial teórico irá se desenvolver através de Bertani e Zimmermann (2003), David e Moreira (2003), Manrique (2009) e Serrazina (2012) relacionados à formação e a prática docente na matemática e Alencar Filho (1981), Almeida (2015), Lozano, Mattos e Puggian (2012), Mendes (2015), Oliveira (2016), Santos (2018), relacionados a Teoria dos Números e mais especificamente a Congruência Modular, além de Resende (2007) que abrange os dois tópicos.

Ao longo da história da Teoria dos Números e da Congruência Modular, Carl F. Gauss foi o primeiro a propor a noção de congruência introduzida em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, em 1801. A ideia de congruência é trabalhar apenas com o resto das divisões, pois os números são menores, simplificando a solução. “Sejam a e b dois inteiros quaisquer e seja m um inteiro positivo fixo. Diz-se que a é congruente a *b* módulo *m* se e somente se *m* divide a diferença *a-b*" (ALENCAR FILHO, 1981, p. 148). Denotamos da seguinte forma: a ≡ b (mod *m*) e significa que *a* e *b* deixam o mesmo resto quando divididos por *m*.

O uso das propriedades e operações com inteiros são o que fundamentam a matemática na educação básica, a divisibilidade, o algoritmo da divisão, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum são conceitos muito abordados no ensino básico. No presente trabalho iremos tratar dos temas listados voltados para o ensino na educação básica trazendo suas definições e propriedades. No ensino básico se dá início às quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão, para que em seguida seja abordado o conceito de divisibilidade.

De forma simples, o conceito de divisibilidade é que um número é divisível por outro quando o resto da divisão entre eles é zero, ou seja, a divisão é exata. Dessa forma há alguns critérios de divisibilidade que serão abordados no capítulo 5. Temos que o algoritmo de Euclides (algoritmo da divisão euclidiana) é exposto no Ensino Fundamental da seguinte forma: Dividendo = Divisor · quociente + resto, onde D é o dividendo, d divisor, q quociente e r resto, D, d, q, r ∈ N, assim, temos: D = d · q + r, com r < d.

O MDC ou Máximo Divisor Comum é o maior divisor de seus divisores, ou seja, na divisão entre dois ou mais números naturais (maiores que zero) o Máximo Divisor Comum é o maior divisor entre eles. Isso acontece quando a divisão for exata. O menor divisor de um número será sempre o número 1, pois ele é divisor de qualquer número e o maior divisor de um número é o próprio número. Se um número é divisível apenas por 1 e por ele mesmo, esse número é chamado de número primo. O MMC ou Mínimo Múltiplo Comum de dois números é o menor inteiro positivo que é múltiplo de dois ou mais números inteiros positivos (diferentes de 0). A seguir iremos fazer um pequeno resumo sobre a divisão dos capítulos do trabalho.

O intuito do presente trabalho é apresentar resultados de uma pesquisa exploratória realizada na Universidade Federal de Pernambuco - Campus do Agreste, com alunos do curso de licenciatura em matemática que cursaram a disciplina de Teoria dos Números, onde é visto o conteúdo Congruência Modular. Nesse contexto, delimitou-se o seguinte problema de pesquisa: *Quais as concepções de licenciandos do curso de matemática da UFPE-CAA acerca do conteúdo congruência modular* *aplicado na disciplina teoria dos números com relação aos conteúdos da educação básica?*

Essa pesquisa também poderá servir de indicador para o futuro docente ou docente já atuante do ensino superior sobre a forma como são ensinados os conteúdos no ensino superior e a sua relação com alguns conteúdos da educação básica estruturados pela congruência modular. Além de trazer a aplicação de congruência modular no cotidiano como ferramenta para o ensino principalmente na educação básica.

Seu estudo se justifica por buscar compreender a relação entre a formação universitária do aluno e a prática docente fazendo um “retrato” sobre as concepções dos licenciandos acerca da congruência modular vista no curso e a sua relação com conteúdos da educação básica. Além de trazer as aplicações como possíveis aliadas para aprendizagem do conteúdo no ensino básico.

O trabalho está dividido em seis capítulos, nos três primeiros capítulos temos a introdução, justificativa e objetivos geral e específicos, no quarto capítulo temos a fundamentação teórica que dividimos em cinco partes, na primeira falamos um pouco sobre a formação acadêmica e a prática docente, na segunda um resumo sobre a história da teoria dos números trazendo seus precursores e mais especificamente traremos o foco para o conteúdo congruência modular e um pouco de sua história. Na terceira temos a revisão de literatura na qual temos estudos anteriores sobre o tema relacionado a pesquisas com licenciandos e professores sobre a congruência modular na educação básica. Na quarta parte temos os conceitos relacionados à congruência modular na educação básica e na quinta parte da fundamentação teórica temos os conteúdos as Educação Básica embasados em congruência modular e na sexta parte algumas aplicações de congruência modular no cotidiano.

No quinto capítulo serão abordados os aspectos metodológicos em que dividimos em três partes, na primeira temos a forma que fizemos a pesquisa, fizemos uma pesquisa qualitativa e exploratória, utilizamos o questionário estruturado para realização da pesquisa e os participantes da pesquisa foram licenciandos em matemática da Universidade Federal de Pernambuco – Campus Acadêmico do Agreste que já cursaram a disciplina teoria dos números. Na segunda parte temos os procedimentos realizados para a revisão de literatura e na terceira parte os procedimentos realizados para coleta e análise de dados.

No sexto capítulo abordamos a análise de resultados no qual temos os resultados encontrados com a pesquisa. E, por fim, temos o sétimo e último capítulo, em que serão apresentadas algumas considerações acerca do tema e o estudo realizado, contribuições, limitações e sugestões para pesquisas futuras. As considerações aqui apresentadas ressaltam o desenvolvimento da aritmética modular e sua relevância na atualidade, pois é uma área que traz grandes contribuições para tecnologia de informação. Ademais é um dos ramos da matemática mais antigos, portanto traz muitas explicações do que é ensinado em sala de aula atualmente para os alunos.

2 JUSTIFICATIVA

Alguns temas relacionados à congruência modular são tratados na educação básica como algoritmo da divisão euclidiana, divisibilidade, máximo divisor comum, entre outros. Esses temas são abordados desde o ensino fundamental sendo aprofundados de acordo com cada ano em que o aluno estuda a matemática. A congruência modular está em várias situações da vida cotidiana o que torna esse tema bastante relevante na atualidade, pois vários trabalhos acadêmicos trazem o tema, juntamente, com suas aplicações e a relevância no ensino básico. O estudo da congruência modular traz muitas contribuições no contexto das tecnologias de informação, tornando o tema muito abordado nos dias atuais.

Temos na licenciatura em matemática que a congruência modular traz algumas explicações de conteúdos vistos na educação básica, algumas demonstrações desses conteúdos que são a divisibilidade, a divisão euclidiana, e o máximo divisor comum, entre outros. Porém, esses temas muitas vezes não são voltados para a forma prática que seria na atuação de professor de matemática. O que pode ocasionar algumas dificuldades em alguns licenciados de modo que fique complicado relacionar o conteúdo visto na licenciatura com o conteúdo da prática docente. Por isso, vemos a relevância de trazer esse tema de trabalho, para saber como os alunos veem a relação entre esse conceito na licenciatura e o conceito de forma que terá que ensiná-lo na prática docente.

Há várias aplicações de congruência modular no cotidiano, como Cadastro de Pessoas Físicas, cartão de crédito, calendário e principalmente a criptografia que é onde há vários estudos atualmente trazendo contribuições para área de tecnologia de informação, porém muitas vezes esse conteúdo é ensinado como se não houvesse nenhuma relação com o nosso dia a dia, são ensinados apenas cálculos que para os alunos não fazem o menor sentido e isto faz com que os alunos cada vez mais se afastem da matemática, pois eles não sabem onde aquilo é utilizado, então podem não ver necessidade em aprender. De acordo com França, Santos e Santos (2007, p. 13):

> A pesquisadora SADOVSKY (2007, p. 15) relata que o baixo desempenho dos alunos em matemática é uma realidade em muitos países, não só no Brasil. Hoje o ensino de Matemática se resume em regras mecânicas oferecida pela escola, que ninguém sabe onde utilizar. Falta formação aos docentes para aprofundar os aspectos mais relevantes, aqueles que

> possibilitam considerar os conhecimentos prévios dos alunos, as situações e os novos saberes a construir.

A escolha desse tema se deu durante a experiência como aluna na disciplina de Teoria dos Números ofertada pelo curso de matemática-licenciatura que é onde vemos o conceito de congruência modular, pude perceber que muitos dos meus colegas tiveram dificuldades em aprender o conteúdo durante a disciplina, inclusive eu, e que poucos fazem relação entre o conteúdo que vemos no ensino superior e o ensinado na educação básica. No fim da disciplina o professor nos pediu que fizéssemos um artigo sobre as aplicações de congruência modular (ou congruência módulo m) e conhecer as aplicações me ajudou a entender melhor o conceito e a me interessar mais sobre o tema, além de conseguir relacionar melhor o tema aos conceitos que são vistos na educação básica.

Os conteúdos geralmente são pouco explorados no contexto do cotidiano dos alunos em sala de aula, mesmo que sua aplicação seja simples. Durante a nossa formação sempre buscamos maneiras de como trazer a matemática de maneira atrativa para os alunos, uma maneira atrativa é mostrar a relação do conteúdo com o cotidiano de modo que o aluno não pense que a matemática é algo surreal e que só existe no universo da sala de aula. De acordo com Ponte e Quaresma (2012, p. 2):

> Como ciência, a Matemática tem a sua linguagem própria, formalizada e impregnada de simbolismo. Os matemáticos têm um cuidado extremo nas definições dos objetos com que lidam procurando evitar toda a ambiguidade. Um raciocínio matemático só é aceite se for justificado por inferências logicamente válidas feitas a partir de definições e de propriedades dos objetos já anteriormente demonstradas ou assumidas como axiomas. Deste modo, a Matemática é um campo do saber autocontido que, à primeira vista, pode parecer nada ter a ver com a realidade extra-matemática[2].

A matemática foi criada a partir de uma necessidade humana, portanto é natural que ela esteja relacionada ao cotidiano e o aluno enxergá-la no cotidiano deve ser tido como algo excepcional.

Portanto, temos como intuito com esse trabalho fazer um estudo sobre o que os licenciandos que já cursaram a disciplina teoria dos números tem sobre a congruência modular, se a disciplina serviu para o amadurecimento de alguns conteúdos do ensino básico e se eles conseguem relacionar esses conteúdos com a congruência modular vista na universidade, se o licenciando considera que ficou mais preparado para estar em sala de aula após pagar a disciplina e se ao ensinar os conteúdos na educação básica o futuro docente pretende trazê-lo de forma aplicada ao cotidiano dos alunos.

Além de que ele pode servir de indicador, para o futuro docente ou docente já atuante, as contribuições, limitações ou dificuldades da disciplina teoria dos números vista na graduação mais especificamente do conteúdo congruência modular, como ferramenta de ensino para a prática docente.

3 OBJETIVOS

3.1 GERAL

Analisar as concepções dos licenciandos em matemática da UFPE-CAA com relação ao conteúdo congruência modular e sua importância para a prática docente dos conteúdos que ele fundamenta na educação básica.

3.2 ESPECÍFICOS

- Investigar as concepções dos estudantes em relação à congruência modular vista da licenciatura;
- Identificar quais conteúdos da educação básica os licenciandos relacionam com congruência modular;
- Verificar o que os licenciandos sabem sobre as aplicações do conteúdo congruência modular;
- Explorar se os estudantes consideram que o estudo de congruência modular auxiliou no sentimento de segurança para ensinar os conteúdos que são estruturados pela congruência modular na educação básica, como algoritmo da divisão, divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, entre outros.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 REVISÃO DE LITERATURA

O referencial teórico utilizado no trabalho foi baseado em Trabalhos de Conclusão de Curso, dissertações e artigos que abordam o tema congruência modular, a formação de professores, a prática docente e o ensino na educação básica.

A pesquisa foi realizada na plataforma “Google Acadêmico”, que é uma ferramenta muito utilizada que nos permite realizar pesquisas sobre trabalhos acadêmicos relacionados ao nosso, como também literatura escolar, artigos variados. Utilizamos primeiramente como palavras-chave as palavras: “Matemática”, “Congruência modular”, “Aritmética Modular” e “Ensino Básico”, com artigos desde 2000 até 2021, delimitação dos artigos de até 21 anos atrás. Depois, utilizamos também as palavras “Matemática”, “Formação docente” e “prática docente”, pois queríamos mais trabalhos relacionados à formação inicial de professores e/ou a atuação prática. Como critério de seleção para escolhas de todos os trabalhos foi realizada a análise dos títulos para ver quais realmente eram relacionados com o tema aqui abordado.

No quadro 01 explorou-se os materiais utilizados no presente trabalho:

Quadro 1 - Revisão de literatura

Fonte de Pesquisa: Livro Teoria Elementar dos Números. São Paulo: Nobel, 1981.		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Congruência Modular; Teoria dos Números.	ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números.** São Paulo: Nobel, 1981. 381 p.	Aborda a Teoria dos Números e a congruência modular de forma abstrata com demonstrações de teoremas e proposições, e cálculos matemáticos.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Congruência Modular; Aritmética, Aplicações.	ALMEIDA, Marcos André Pereira. et al. Aritmética modular aplicada aos semáforos. **Revista ciências exatas e tecnológicas**, Aracaju, v. 3, n. 1, p. 55-64, out. 2015.	O trabalho apresenta a aritmética modular aplicada no cotidiano em específico ao funcionamento dos semáforos, mostrando como o mesmo se comporta no dia a dia. Por meio das aplicações dos conceitos de congruência modular, para definir todos os horários, durante um dia, em que em determinados intervalos de tempo nós podemos passar pelo mesmo semáforo e encontrá-lo aberto ou fechado, dependendo apenas de alguns segundos, sabendo apenas

		o seu funcionamento (tempo aberto, tempo fechado).
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Formação Docente; Prática Docente; Matemática.	BERTANI, Januária Araújo. ZIMMERMANN, Erika. Um novo olhar sobre os cursos de formação de professores +*. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, v.20, n.1: 43-62, abr. 2003.	O trabalho tem o objetivo de debater e refletir sobre os Cursos de Formação dos Professores de Ciências e Matemática. De acordo com o texto há uma desarticulação entre a teoria e a prática nas disciplinas e esse fato reflete na construção do perfil profissional do docente.
Fonte de Pesquisa: Livro História da Matemática (Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974)		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
História da matemática; Teoria dos Números; Congruência Modular.	BOYER, B. C. História da matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.	O livro aborda a história da matemática, trazendo assim seus expoentes e suas contribuições para a matemática através dos séculos.
Fonte de Pesquisa: Portal do MEC (Ministério da Educação)		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2	Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)	Orientações curriculares de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias para os professores do ensino médio, de maneira que sirva como um instrumento de apoio à reflexão do professor a ser utilizado em favor do aprendizado com o intuito de oferecer uma educação básica de qualidade a todos.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Formação Docente; Prática Docente; Matemática.	DAVID, Maria Manuela Martins Soares; MOREIRA, Plinio Cavalcante. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 19, - Jan./Jun. 2003.	O trabalho pretende colocar em discussão o conjunto de significados que costuma ser identificado com o nome de matemática. No texto são analisadas as ideias de alguns autores retirando contribuições acerca da discussão sobre as relações entre os saberes trabalhados no processo de formação matemática do professor na licenciatura e os saberes efetivamente mobilizados no exercício profissional docente na escola básica.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Matemática; Ensino; Aplicações.	FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Josiel Almeida; SANTOS, Lúcia S. B. **Dificuldades na aprendizagem em matemática**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Centro Universitário Adventista de São Paulo. São Paulo, p. 41, 2007.	De maneira geral, o trabalho aborda o papel do professor no ensino de matemática e as dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem da disciplina. De início o trabalho aborda as evoluções da matemática, em seguida o baixo desempenho dos alunos nas avaliações de matemática e por fim trazem sugestões para melhorar o ensino desta disciplina.
Fonte de Pesquisa: Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas, 2002.		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**

Pesquisa; Metodologia.	GIL, Antônio Carlos. 1946 – Como elaborar projetos de pesquisa/Antônio Carlos Gil. – 4. ed. – São Paulo: Atlas, 2002.	O livro aborda conceitos de pesquisa e metodologia, de modo a orientar o pesquisador em sua pesquisa.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Aritmética Modular; Educação Básica.	LOZANO, Abel Rodolfo Garcia; MATTOS, Sérgio Ricardo Pereira de; PUGGIAN, Cleonice. Aritmética modular no ensino fundamental e médio: contribuições de uma pesquisa ensino. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3º, [2010?], Fortaleza: CE, 2012. p. 1-14.	A fim de explorar as potencialidades da aritmética modular junto a docentes da educação básica, e com o propósito de desafiar e motivar os alunos na aprendizagem do conceito de divisibilidade e do algoritmo da divisão, depois de análises constaram que a aritmética modular poderia ser abordada na educação básica, realizaram no ano de 2011 uma pesquisa-ensino com o objetivo de promover uma melhor compreensão dos conceitos elementares da Teoria dos Números (propriedades e operações com inteiros, algoritmo da divisão, relação de equivalência e divisibilidade), por meio de atividades investigativas baseadas no conceito da aritmética modular. Essa pesquisa foi realizada com docentes em formação continuada.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico / Periódicos Capes		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Formação Docente; Prática Docente; Matemática.	MANRIQUE, Ana Lúcia. Licenciatura em matemática: formação para a docência x formação específica. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.11, n.3, p. 515-534, 2009.	O trabalho discute dados de uma pesquisa realizada em uma amostra de projetos pedagógicos de cursos de licenciatura em matemática do Brasil. A análise considerou cinco eixos: Análise da suficiência da formação básica; Foco dos cursos; Homogeneidades e heterogeneidades; Fragilidades e Formação para a Docência versus Formação Específica.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Congruência Modular; Ensino Básico; Aplicações.	MENDES, L. **Os números do nosso dia a dia e algumas de suas aplicações no ensino básico.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas. Manaus, p. 60. 2015.	A dissertação aborda a divisibilidade, com suas propriedades e seus critérios, a divisão euclidiana e suas aplicações como benéficas para o ensino-aprendizagem na educação básica trazendo algumas resoluções de problemas no campo da aritmética. Além disso, é abordada a congruência modular e suas propriedades operacionais com suas classes residuais, seguido de suas aplicações.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Congruência modular; Aplicações.	OLIVEIRA, C. **Congruência modular e aplicações.** Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Núcleo de Formação à Distância, Departamento de Matemática e	O estudo aborda aplicações de congruência modular em sistemas de identificação e criptografia. Traz um pouco dos aspectos históricos da congruência modular e da teoria dos números como os matemáticos que fizeram parte de sua construção. Além

	Estatística, Universidade Federal de São João Del-Rei. São João Del-Rei, p. 48. 2016.	disso, traz oficinas como opções de ensino de aritmética modular para a educação básica e as aplicações da congruência modular, ressaltando a importância do conteúdo na atualidade e no cotidiano das pessoas.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico / Periódicos Capes		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Matemática; Ensino; Contextualização.	Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções, 22*, 196-216.	De modo geral, o trabalho discorre a relação entre a matemática e o cotidiano, tendo por base a noção de modelo matemático. Em que um modelo matemático é uma descrição simplificada de uma situação real, realizada através de conceitos, relações e representações matemáticas. Neste artigo foram analisados exemplos de resolução por alunos de tarefas com vários contextos, procurando identificar as suas implicações no processo de aprendizagem. Argumentando que na aprendizagem da Matemática os alunos precisam trabalhar em diversos contextos – realísticos, de semi-realidade e matemáticos. Tornando necessária a reflexão sobre a natureza e o papel dos contextos das tarefas no ensino desta disciplina.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico / Periódicos Capes / SciELO		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Teoria dos Números; Formação de Professores; Prática Docente; Matemática.	RESENDE, M. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 281. 2007.	O trabalho aborda a Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, voltado para a formação de professor da escola básica, o intuito é buscar possibilidades para ressignificar essa área nos currículos da licenciatura em matemática. Foram-se buscados referenciais teóricos para discutir o saber científico e o saber a ensinar, outros referenciais para discutir os saberes dos professores e outro para tratar a Teoria dos Números no ensino. Foram analisadas propostas curriculares de 12 universidades brasileiras que abordam Teoria dos Números no curso de licenciatura em matemática, 10 livros didáticos e 7 entrevistas semiestruturadas com professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou Educação Matemática. No trabalho se foi concluído que a Teoria dos Números na maioria das universidades pesquisadas é abordada de maneira axiomática e demonstrativa, sem a preocupação com a formação do professor para o ensino na educação básica, por outro lado ela pode ser ressignificada visto que alguns de seus conceitos são abordados na educação básica.
Fonte de Pesquisa: Anais do IX ENEM		

Palavra-chave	Identificação do Trabalho	O que aborda o trabalho?
Congruência modular, aplicações.	SÁ, Ilydio Pereira de. Tratamento da informação na educação básica: aritmética modular e os códigos de identificação do cotidiano. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais**. Belo Horizonte: UERJ, 2007. p. 1-17.	O estudo aborda as noções básicas de Aritmética Modular e algumas de suas aplicações que são diferentes códigos numéricos de identificação, como: códigos de barras, números de documentos de identificação, criptografia, calendários, entre outras.
Fonte de Pesquisa: Livro Introdução à teoria dos números (Coleção matemática universitária)		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Teoria dos Números; Congruência Modular.	SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números/** José Plínio de Oliveira Santos. – 3 ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 198 p.: il. (Coleção matemática universitária).	O livro aborda os conceitos e teorias acerca da Teoria dos Números. O objetivo principal é o estudo das propriedades dos números inteiros positivos. A Teoria dos Números se divide em Teoria Elementar, Teoria Analítica e Teoria Algébrica. O livro aborda apenas a teoria elementar.
Fonte de Pesquisa: Google Acadêmico / Periódicos Capes		
Palavra-chave	**Identificação do Trabalho**	**O que aborda o trabalho?**
Matemática; Ensino Básico; Formação Docente; Prática Docente.	SERRAZINA, Maria de Lurdes Marquês. Conhecimento matemático para ensinar: papel planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista eletrônica de educação**. São Carlos, SP. UFSCar, v. 6, no. 1, p. 266-283, mai. 2012.	O estudo discorre acerca da formação de professores e a prática docente, relatando que é necessário que o professor tenha oportunidade de ter experiências em sua formação do tipo que se espera que as proporcione aos seus alunos. Ele também aborda a formação continuada dos professores do ensino elementar, o papel da planificação da atividade letiva e a reflexão acerca das práticas no desenvolvimento do conhecimento profissional do professor.

Fonte: Os autores

Para a parte em que abordamos teoremas, proposições e conjecturas no presente trabalho utilizamos o livro Teoria Elementar dos Números de Alencar Filho (1981) e o livro Introdução à Teoria dos Números de Santos (2018), que abordam a Congruência modular de maneira a estudar seus teoremas e demonstrações. Além do livro História da Matemática de Boyer (1974), que é um livro que traz um pouco da história da matemática em diferentes períodos históricos, abordando a evolução da sociedade com a matemática. Também utilizamos três artigos referentes à Congruência Modular e algumas de suas aplicações, tanto no ensino básico como no ensino superior. Os autores dos artigos aqui referidos são Almeida e colaboradores (2015), Lozano, Mattos e Puggian (2012), e Sá (2007). Além destes utilizamos uma dissertação de Mendes (2015) e uma monografia de Oliveira (2016) também referentes a congruência modular, suas aplicações e o ensino.

Os trabalhos que utilizamos acerca da formação e a prática docente foram dos autores Bertani e Zimmermann (2003), David e Moreira (2003), Manrique (2009) e Serrazina (2012) que são artigos e a tese de Resende (2007), a tese aborda não só a formação e a prática docente como a disciplina Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, voltado para a formação de professor da escola básica. Juntamente com esses autores utilizamos França, Santos e Santos (2007), Ponte e Quaresma (2012), acerca do ensino de matemática, a educação básica e a contextualização.

4.2 A FORMAÇÃO E A PRÁTICA DOCENTE

Nos trabalhos acadêmicos que trazem como base a preparação do licenciando na formação docente é pouco abordado a relação entre as disciplinas de matemática do Ensino Superior e sua influência na prática docente por isso vemos a necessidade deste tema como pesquisa, pois o curso de licenciatura lida com professores em formação que devem aprender os conceitos aprendidos no curso para que no futuro consiga ensiná-los da forma como é abordado no ensino básico.

Discutir o ensino da matemática é algo muito complexo, pois depende de diversos fatores, porém há muito a se dizer sobre a relação entre a formação de professores de matemática e sobre as práticas em sala de aula. De acordo com Serrazina (2012, p. 267) “Que formação deve ter o professor para enfrentar todos os desafios que se lhe apresentam, é uma questão que merece a atenção de muitos formadores e investigadores, e para a qual não existe uma resposta única”.

Segundo Serrazina (2012, p. 267)

> Concordo com os que afirmam que o professor tem de ter oportunidades de viver experiências matemáticas do tipo das que se espera que proporcione aos seus alunos, pois só assim poderá cumprir uma das suas funções como professor de Matemática, a de fazer com que os seus alunos aprendam e apreciem a Matemática. Desta ideia resulta que, na formação de professores não basta pensar no que deve ser ensinado, é necessário também equacionar o como o ensinar.

É indispensável que o professor saiba o que ensinar, que saiba os conteúdos das disciplinas específicas, que os aprenda em sua formação, mas também é importante que o professor saiba como ensinar, apenas o conhecimento do conteúdo não é suficiente. O professor precisa tornar mais acessível aquilo que aprende em sua formação para ensinar aos alunos, de modo que os alunos possam compreendê-lo.

De acordo com Carvalho (2001), citado por Bertani e Zimmermann (2003, p. 44) “No caso da formação de professores nos cursos de licenciatura, em seus moldes tradicionais, a ênfase se dá aos conteúdos específicos da área nas disciplinas básicas sem quase nenhum relacionamento com a escola”. O que não torna muito possível a relação dos conteúdos vistos nas disciplinas com a realidade da prática docente. Há uma separação entre as disciplinas ditas específicas em que algumas delas são voltadas para área pura e as disciplinas de cunho pedagógico.

É necessário que, na licenciatura, haja a interação e união entre as disciplinas pedagógicas e as específicas para melhor entendimento do futuro professor de modo que ele seja bem preparado para a prática na sala de aula. Com isso não queremos dizer que ele estará preparado para qualquer situação que surja em sala de aula, mas sim que ele estará mais estruturado para resolver as situações e ensinar os conteúdos abordados no ensino básico.

Bertani e Zimmermann (2003, p. 48) ainda ressaltam que “É bom lembrar que, assim como o adolescente chega à sala de aula com um conjunto de conhecimentos empíricos já construídos, os futuros professores também apresentam um conjunto de conhecimentos empíricos de como se ensina e como se aprende”. Então muitos docentes da educação básica veem os seus professores da licenciatura como inspiração, porém deve se levar em consideração que os alunos da educação básica não têm o amadurecimento dos conteúdos como os licenciandos e que os professores da educação básica devem tornar acessíveis esses conteúdos para eles, ensinando em uma linguagem mais apropriada para que eles entendam.

Também é importante ressaltar que muitos dos professores das disciplinas específicas são bacharéis em matemática, ou seja, suas metodologias de ensino são voltadas para o Ensino Superior, então aplica-las no contexto da Educação Básica é um pouco arriscado, pois a maneira de ensino pode ser de difícil acesso para alunos do ensino fundamental.

Segundo Manrique (2009, p. 519)

> Para a década de 2000, o documento elaborado pela SBEM (2003) apresenta uma discussão pertinente a respeito das novas Diretrizes para a Formação de Professores de Matemática. O objetivo desse documento foi colaborar com as instituições de Ensino Superior na reestruturação do currículo da Licenciatura em Matemática de maneira objetiva e de modo que atenda às necessidades da formação de professores.

Como alguns cursos ainda são embasados nos moldes tradicionais, ainda há um distanciamento entre os conteúdos acadêmicos e a realidade da prática docente no ensino básico. Mesmo alguns livros do curso de licenciatura em matemática são voltados para área pura da matemática e não voltados para o ensino na educação básica.

Em alguns cursos de licenciatura a prática na sala de aula é basicamente apenas na parte em que há as disciplinas de estágio supervisionado, assim os docentes em formação não possuem uma visão muito razoável acerca da prática docente, apenas o que veem nos estágios onde muitas vezes são apenas observadores e muito pouco participantes. Os professores formadores que são das áreas específicas, geralmente também não possuem uma visão sobre a realidade da sala de aula, pois muitos deles têm seus estudos voltados para área da matemática pura e não tem uma vivência no contexto escolar principalmente na educação básica.

Para David e Moreira (2003, p. 64) “A prática do matemático se caracteriza pela produção de resultados originais “de fronteira”.” David e Moreira (2003, p. 65) também destacam que “Por sua vez, a prática do professor de matemática da escola básica desenvolve-se num contexto “educativo”, o que leva a uma visão fundamentalmente diferente.” Uma ideia ou objeto matemático pode ser diferente para o matemático e para o professor de matemática, pois eles têm pensamentos e finalidades diferentes para o tema, o matemático tem sua finalidade relativa à matemática abstrata, demonstrações e linguagem formal, enquanto o professor de matemática precisa trazer o conhecimento para o contexto educativo e muitas vezes para a prática do dia a dia para que o aluno consiga entender e associar melhor o conteúdo.

Para Manrique (2009, p. 523)

> Assim, um dos principais problemas da formação inicial está relacionado à formação pedagógica do professor, ou seja, a desarticulação entre os conhecimentos específicos e os pedagógicos, que são trabalhados de forma descontextualizada, sem significado para os futuros professores, não conseguindo, assim, conquistar os alunos para sua importância em suas futuras atividades docentes.

O conteúdo pode ser visto em sala de aula de maneira contextualizada abordando situações nas quais os alunos veem suas aplicações. Mostrando assim, que o conteúdo não é apenas cálculo e que há algo muito importante por trás de todos os cálculos.

De acordo com França, Santos e Santos (2007, p. 9)

> A Matemática não é uma ciência cristalizada e imóvel; ela está afetada por uma contínua expansão e revisão dos seus próprios conceitos. Não se deve apresentar a Matemática como uma disciplina fechada, homogênea, abstrata ou desligada da realidade.

Sabemos que a matemática não é uma ciência que surgiu e que é imóvel, ela está sendo construída, sempre em expansão, portanto é preciso que os docentes não apresentem a disciplina com seus conceitos fechados como se a partir do que se já foi construído, ela se torna imóvel e sem relação alguma com a realidade.

É importante destacar que a matemática vai sendo construída a partir das necessidades que vão surgindo e que ela está em constante revisão de seus conceitos. O docente de matemática tem um papel muito importante nessa relação, é necessário que o professor auxilie os alunos em sua aprendizagem ajudando assim que eles gostem da matemática e que mesmo com algumas dificuldades encontradas percebam que é uma disciplina em que seus conceitos são muito importantes no dia a dia de cada um deles.

De acordo com França, Santos e Santos (2007, p. 13) “Na verdade aprender matemática não é tarefa fácil, mas é preciso inovar o ensino mostrando cada vez mais a importância dessa área do conhecimento no dia-a-dia.” A matemática tem sua linguagem própria e os matemáticos a seguem rigorosamente, uma conjectura só é aceita depois de demonstrada. Por tanto, muitas vezes para algumas pessoas a matemática é tida como algo fora de nossa realidade. Porém a matemática está associada em nosso dia a dia até nas pequenas coisas, como ver as horas em um relógio.

É importante pensar não só o que é ensinado, mas como o conteúdo é ensinado, se o que é ensinado no curso corresponde às necessidades dos alunos em formação e para sua formação, os futuros docentes sabem o que ensinar e como irão ensinar? Portanto, é necessária uma reflexão acerca do tema.

Segundo Resende (2009, p. 26)

> Quanto à Teoria dos Números, Machado et. Al. (2005) afirmam que a Teoria Elementar dos Números tem um potencial formador que vem sendo negligenciado em todos os segmentos de escolaridade e indicam algumas potencialidades para o seu ensino.

O conteúdo Congruência Modular como parte relevante da Teoria dos Números deve ser parte essencial da formação docente na licenciatura em matemática, para isso devem ser buscados elementos que caracterizem a disciplina como uma disciplina a ensinar, relacionando os conteúdos vistos na disciplina com os conteúdos estudados na educação básica, pois proporciona ao futuro docente maior desenvolvimento dos conceitos matemáticos no ensino básico.

Pela perspectiva de David e Moreira (2003, p. 77)

> uma formação matemática profunda para o professor da escola básica deverá, antes de mais nada, reconhecer criticamente a matemática escolar, entendendo-a como produto da prática da educação escolar em matemática, incorporando, assim, tanto os saberes da experiência docente como também uma carência de saberes, dada a ver através dessa mesma experiência.

Se faz necessário pensar na prática docente durante a formação de professores, que o fim da formação é a prática docente e que para isso o futuro docente precisa estar devidamente preparado, como dito anteriormente com isso não queremos dizer que a formação irá formar o aluno para toda e qualquer situação presente na sala de aula, porém a formação deve ser voltada para esse fim de prática docente.

O curso não deve ser voltado apenas para disciplinas específicas, mas sim essas disciplinas precisam ser voltadas para a prática em sala de aula no ensino básico, trazendo atividades contextualizadas, aplicações dos conteúdos, entre outras atividades para que o futuro docente internalize e possa estabelecer relações com a disciplina que irá lecionar.

4.3 UM BREVE RESUMO SOBRE A TEORIA DOS NÚMEROS E O DESENVOLVIMENTO DA CONGRUÊNCIA MODULAR

A matemática é construída a partir de uma necessidade humana, ou seja, seus conceitos, objetos são construídos a partir das necessidades que iam surgindo para a civilização da época e vão surgindo até hoje, porém de formas diferentes, problemas a serem solucionados, dúvidas a serem respondidas e formas de sobrevivência. Para Oliveira (2016, p.11) “A matemática tem fascinado curiosos e pesquisadores desde a antiguidade, seja para a solução de problemas do cotidiano, para explicação de situações complexas, ou para demonstração de sua versatilidade”.

De acordo com Oliveira (2016, p. 14) “A teoria dos números, cuja aritmética é parte essencial, é o ramo da matemática responsável por estudar a estrutura dos números e as operações possíveis de serem estabelecidas entre eles”. Ela é utilizada muitas vezes até inconscientemente, pois é o ramo mais antigo da matemática utilizado para fazer contagem, calcular troco, realizar as operações básicas vistas desde a antiguidade para atender as necessidades da humanidade naquela época e assim foi-se construindo a partir do que se era necessário para sobrevivência da civilização da época como a necessidade de contar.

A noção de aritmética modular se refere ao resto da divisão, para Oliveira (2016, p. 16) "quando realizam divisões cujo resto é a resposta para seus questionamentos ou necessidades", na Aritmética Modular utilizamos o sinal de igualdade "=" já na Congruência Modular utilizamos o sinal de congruência denominado por "≡". O conceito de Congruência Modular foi abordado pela primeira vez por Gauss, ele observou que ao dividirmos números distintos por outro número distinto anterior a eles, alguns deles gerariam restos iguais, assim ele concluiu que esses números são iguais em termos de divisibilidade, ou seja, são congruentes. Para Boyer (1974, p. 371) "A notação que Gauss adotou foi a que se usa até hoje $b \equiv a\,(mod\,m)$ e ele passou a construir uma álgebra para relação denotada por $\equiv$ semelhante à familiar álgebra comum expressa na linguagem de igualdade".

Do dicionário congruente significa: coincidente ou correspondente em características, em propriedades etc.; conforme, concordante, harmônico. Segundo Oliveira (2016, p. 18):

> Trazendo esse conceito para a teoria dos números, pode-se entender que os números "congruentes" são aqueles que possuem o mesmo tamanho ou valor quando divididos por um terceiro número, já que gerará um mesmo resto nas divisões. Entretanto, não se pode dizer que eles são iguais já que individualmente eles possuem valores absolutos diferentes.

No presente estudo traremos a aritmética modular e a congruência modular como sinônimos, pois alguns trabalhos utilizados ora utilizam o termo aritmética, ora utilizam congruência modular.

No decorrer da história da matemática muitos estudiosos trouxeram contribuições para seu desenvolvimento, voltando essas contribuições para a Teoria dos Números os principais foram: Pierre de Fermat, Leonhard Euler e Carl. F. Gauss. Por suas contribuições em relação à matemática Gauss é denominado por muitos como "o príncipe da matemática", apenas após o trabalho de Gauss no século XIX que a Aritmética passou a ser chamada de Teoria dos Números.

Um dos precursores da Teoria dos Números foi Pierre de Fermat, ele nasceu em 1601 na França, Pierre de Fermat não era matemático profissional, ou seja, não recebia recursos financeiros para seu estudo, ele estudou direito em Toulouse, contudo ainda foi considerado um dos maiores matemáticos de seu tempo (Boyer, 1974, p. 253). Segundo Mattos, Puggian e Lozano (2012, p. 3):

> as comunicações científicas de Fermat eram feitas através de cartas que enviava aos amigos, geralmente sem demonstrações e de forma desafiante. Foi através de cartas enviadas a Mersenne e a outros matemáticos da época, que boa parte da obra de Fermat chegou até nós.

De acordo com Boyer (1974, p 254) Fermat não realizou muitas publicações de seus estudos em toda sua vida.

Dentre suas contribuições para Teoria dos Números vista como disciplina atualmente destaca-se o Pequeno Teorema de Fermat em que, se *p* é um primo e *a* um inteiro que não é divisível por *p*, então *p*, divide $a^{p-1} - 1$; e o Último Teorema de Fermat em que, se x, y e z são inteiros e $x^n + y^n = z^n$, onde n ≥ 3 , então x.y.z = 0 outra forma de enunciá-lo é não existem inteiros *x, y, z* e *n*, tal que, $x^n + y^n = z^n$, com n ≥ 3. Este Teorema enunciado por Fermat, porém se Fermat tinha essa demonstração não foi encontrada. Pois, Fermat afirmou que tinha tal demonstração, mas a margem do papel em que o enunciou era pequena para que o demonstrasse (Boyer, 1974, p. 259). Assim o teorema foi provado pelo matemático britânico Andrew Wiles em 1993 em uma Conferência no Instituto Isaac Newton - Cambridge, após anos de tentativa dele e de vários matemáticos, porém havia um erro em sua demonstração então ele se afasta por mais de um ano e faz a correção e reformulação da demonstração (Almeida, Castro, Manzine e Silva, 2014, p. 7).

Outro precursor foi o matemático Leonhard Euler nascido em Basileia na Suíça em 1707, de início seu pai que lhe ensinou o básico da matemática. Diferente de Fermat, Euler era matemático profissional e também físico, tendo a matemática como a atividade de sua vida. Na Teoria dos Números iniciou seus estudos a partir de suas trocas de correspondências com Christian Goldbach, matemático russo, através dele que Euler teve acesso aos estudos de Fermat, inicialmente não ouve muito interesse e após Goldbach insistir Euler passou a se interessar pelos estudos de Fermat provando muitos de seus enunciados (Mattos, Puggian e Lozano, 2012).

Em 1732 Euler conseguiu mostrar que a conjectura de Fermat em que dizia que inteiros da forma $2^{2^n} + 1$ são primos, é falsa para n igual a 5, pois $2^{2^5} + 1$ é composto devido sua facilidade em computação. Após quatro anos, em 1736 ele apresenta uma demonstração feita por indução do Pequeno Teorema de Fermat e em seguida amplia o resultado e prova a função $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$, que diz que se em que *a* é primo com *m*, então *m* divide $a^{\varphi(m)} - 1$, onde $\varphi(m)$ é estabelecida como o número de inteiros menores que *m* que são primos com *m*. (BOYER, 1974, p. 336).

Carl. F. Gauss também foi um dos principais precursores da época, trazendo o termo Congruência Modular pela primeira vez em sua obra o livro *Disquisitiones Arithmeticae*, em 1801. Gauss era um matemático Alemão que nasceu no dia 30 de abril de 1777 em Braunschweig na Alemanha. Além de matemático, ele também era astrônomo e contribuiu em várias áreas da ciência. Considerado muito rigoroso em suas demonstrações iniciou seus estudos através da análise matemática. Na Teoria dos Números inicialmente ele buscava erros nas provas e demonstrações realizadas pelos seus antecessores para corrigi-las ou complementá-las, caso necessário. Por suas grandes contribuições no estudo da Teoria dos Números Gauss ficou conhecido como o pai da Aritmética Modular (Mattos, Puggian e Lozano, 2012).

O livro *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss aborda a teoria das congruências, a teoria dos restos quadráticos e o estudo das equações binômias e suas ligações com a construção de polígonos regulares. Segundo Boyer (1974, p. 371) “Essa obra celebre é a principal responsável pelo desenvolvimento da linguagem e notação do ramo da teoria dos números conhecido como álgebra das congruências que fornece um exemplo de classes de equivalência”. A partir daí, boa parte das conjecturas passou a ser formulada através da congruência, como, $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ m)$ o Pequeno Teorema de Fermat e a função de Euler que pode ser expressa da forma $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$.

Para entendermos melhor a Congruência Modular iremos abordar o que é a teoria dos números e como é feito o cálculo que é chamado de congruência modular. A teoria dos números é o ramo da matemática que se refere aos números, às suas propriedades, em específico as propriedades dos números inteiros e o que está relacionado a eles. De acordo com Almeida, Alves, Santos e Silva (2015, p. 57):

> A teoria dos números tem como fator fundamental a aritmética modular que é trabalhada a partir de congruências. De acordo com o teorema da aritmética modular, toda congruência é a relação de dois números, tais que, divididos por um terceiro o resto de ambos serão iguais. A esse cálculo atribui-se o nome de congruência modular.

A congruência modular, por exemplo, é tida por muitos como um assunto abstrato, que não tem relação com o cotidiano, mas quando pesquisamos, vemos que há várias aplicações sobre este tema. No próximo capítulo traremos a Congruência Modular como é vista atualmente nos livros de licenciatura em matemática de maneira mais “pura” com seus conceitos abstratos.

4.4 CONGRUÊNCIA MODULAR NO ENSINO SUPERIOR

A Congruência Modular é um conceito muito importante da Teoria dos Números, que está relacionado à divisibilidade e os restos de uma divisão de números inteiros, além de Divisão Euclidiana, Máximo Divisor Comum, Números Primos, Mínimo Múltiplo Comum, pois todos esses conceitos estão relacionados entre si e são abordados no ensino básico. A ideia da Congruência é trabalhar apenas com os restos das divisões ao invés dos números com o intuito de facilitar o processo, pois esses restos são menores que os próprios números.

Temos duas definições de Congruência Modular de dois livros diferentes, mas que dizem o mesmo. “Sejam *a* e *b* dois inteiros quaisquer e seja *m* um inteiro positivo fixo. Diz-se que *a* é congruente a *b* módulo *m* se e somente se *m* divide a diferença *a-b*.” (ALENCAR FILHO, 1981, p. 148). De acordo com Santos (2018, p. 32) “Se *a* e *b* são inteiros dizemos que *a* é congruente a *b* módulo *m (m>0)* se *m*|*(a-b)*. Denotamos isto por $a \equiv b \ (mod\ m)$. Se *m não divide (a-b)* dizemos que *a* é incongruente a *b* módulo *m* e denotamos $a \equiv | \ b \ (mod\ m)$”. Dizer que *a* é congruente a *b* módulo *m*, é o mesmo que *a* e *b* deixam o mesmo resto quando divididos por *m*.

Exemplos:

Para m = 2, $11 \equiv 3 \ (mod\ m)$, pois 2 | (11 – 3).
Para m = 11, $25 \equiv |10 \ (mod\ m)$, pois 11 não divide (25 – 10).
Para m = 3, $10 \equiv 7 \ (mod\ m)$, pois 3 | (10 – 7).

Utilizando o primeiro exemplo, o número 11 é congruente ao número 3, módulo 2. Pois 11 e 3 deixam o mesmo resto da divisão por 2 que é o número 1, representamos esta congruência por:

$$11 \equiv 3 \ (mod\ 2)$$

Algoritmo da Divisão:

Imagem 1: divisão com restos iguais

11 | 2 → 1 5   3 | 2 → 1 1

Fonte: Os autores

A seguir veremos uma tabela para melhor compreensão acerca da noção de congruência modular, utilizaremos os restos da contínua divisão de números inteiros positivos pelo número 7.

Tabela 1 - restos da contínua divisão por 7

0 = 0 . 7 + 0	**7 = 1 . 7 + 0**	**14 = 2 . 7 + 0**	**21 = 3 . 7 + 0**
1 = 0 . 7 + 1	**8 = 1 . 7 + 1**	**15 = 2 . 7 + 1**	**22 = 3 . 7 + 1**
2 = 0 . 7 + 2	**9 = 1 . 7 + 2**	**16 = 2 . 7 + 2**	**23 = 3 . 7 + 2**
3 = 0 . 7 + 3	**10 = 1 . 7 + 3**	**17 = 2 . 7 + 3**	**24 = 3 . 7 + 3**
4 = 0 . 7 + 4	**11 = 1 . 7 + 4**	**18 = 2 . 7 + 4**	**25 = 3 . 7 + 4**
5 = 0 . 7 + 5	**12 = 1 . 7 + 5**	**19 = 2 . 7 + 5**	**26 = 3 . 7 + 5**
6 = 0 . 7 + 6	**13 = 1 . 7 + 6**	**20 = 2 . 7 + 6**	**...**

Fonte: Os autores.

A princípio podemos observar que os restos variam de 0 a 6. Também podemos notar que há números que quando o dividimos por 7, eles deixam o mesmo resto, como, por exemplo, 4, 11, 18 e 25, todos deixam o resto 4. Os elementos {4, 11, 18, 25, ...} são congruentes módulo 7, pois ao fazermos suas divisões por 7, todos deixam restos iguais que é o número 4. Todos esses números que fazem parte de cada um desses conjuntos são denominados como congruentes módulo 7.

4.4.1 Algumas Propriedades da Congruência Modular

Temos acima a definição de Congruência Modular, a seguir veremos algumas proposições e teoremas de acordo com o livro Introdução à Teoria dos Números de José Plínio de Oliveira Santos.

- Proposição. Se *a* e *b* são inteiros, temos que $a \equiv b \ (mod\ m)$ se, e somente se, existir um inteiro *k* tal que *a* = *b* + *km.*

(Vemos a relação com o algoritmo da divisão).

- Proposição. Se *a*, *b*, *m* e *d* são inteiros, *m>0*, as seguintes sentenças são verdadeiras:

  1. $a \equiv a \ (mod\ m)$
  2. Se $a \equiv b \ (mod\ m)$, então $b \equiv a \ (mod\ m)$
  3. Se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $b \equiv d \ (mod\ m)$, então $a \equiv d \ (mod\ m)$.

- Teorema. Se *a*, *b*, *c* e *m* são inteiros tais que $a \equiv b \ (mod\ m)$, então

  1. $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$
  2. $a - c \equiv b - c \ (mod\ m)$
  3. $ac \equiv bc \ (mod\ m)$

- Teorema. Se *a*, *b*, c, *d* e *m* são inteiros tais que $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$, então

  1. $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$
  2. $a - c \equiv b - c \ (mod\ m)$
  3. $ac \equiv bc \ (mod\ m)$

- Teorema. Se *a*, *b*, *c* e *m* são inteiros e $ac \equiv bc \ (mod\ m)$, então $ac \equiv bc \ (mod\ m)$, então $a \equiv b \ (mod\ m/d)$ onde *d=(c,m).*

  (Vemos a relação com máximo divisor comum, onde *d* é o mdc entre *c* e *m).*

As demonstrações destes enunciados podem ser encontradas no livro Introdução à Teoria dos Números de José Plínio de Oliveira Santos.

Há diferença entre a igualdade e a congruência, enquanto a igualdade indica números iguais, quantidades iguais, na comparação entre dois ou mais elementos, a congruência é entendida como uma equivalência de características, entendemos como números congruentes números que possuem o mesmo valor ou medida quando divididos por outro número deixam os mesmos restos.

4.5 TEMAS ESTRUTURADOS PELA CONGRUÊNCIA MODULAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA E A PRÁTICA DOCENTE

Neste tópico veremos alguns conceitos relacionados à Congruência Modular, porém eles serão vistos com direcionamento para a Educação Básica, de maneira simples e sem grandes demonstrações. Pois, o intuito da licenciatura é preparar o futuro docente para a prática docente inicialmente no ensino básico. É importante que os conceitos vistos na licenciatura sejam voltados para a Educação Básica e a prática docente, pois como futuros docentes os licenciandos estão aprendendo teorias que devem embasar sua prática na educação básica.

A Teoria dos Números como vista anteriormente é um dos ramos mais antigos da matemática, ela estuda os números em geral e mais especificamente os números inteiros, suas propriedades e problemas que surgem através deles.

Os Números Inteiros são formados por números positivos (+1,+2,+3,...), ou seja, os números Naturais, porém nos números inteiros o 0 faz parte, e os números negativos (-1,-2,-3,...), ou seja, números negativos simétricos aos naturais. Eles não apresentam parte decimal e no caso da teoria elementar dos números, nem o zero, pois são trabalhados números inteiros positivos. O conjunto dos números inteiros é indicado por Z, é infinito sendo representado da seguinte maneira Z = (..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...).

O conceito e a aplicação de Divisibilidade são muito comuns no Ensino Básico que é quando os discentes passam a conhecê-la por sua definição e propriedades na sala de aula e associá-la à situações de seu cotidiano. A divisão de um número inteiro por outro nem sempre é possível de maneira exata, ou seja, com resto 0, esta possibilidade é apresentada pela divisibilidade. Sejam a e b dois números inteiros, se a divisão de a por b é exata, dizemos que a é divisível por b ou a é múltiplo de b; b é divisor de a ou b é fator de a. De acordo com Santos (2018, p. 3) “Se a e b são inteiros, dizemos que a divide b, denotando $a \mid b$, se existir um inteiro c tal que b = ac”. A divisão é o inverso da multiplicação, ao multiplicarmos e dividirmos pelo mesmo número temos que as operações se anulam.

- O número 1 é o elemento neutro da divisão assim como na multiplicação, ao dividir um número por 1 temos que o resultado é o próprio número.
- O número 0 anula o resultado, quando dividido por qualquer número temos que o resultado é 0.
- Nenhum número real pode ser dividido por 0, os números inteiros estão inclusos nos reais, logo também não podem.
- Um número pode ser dividido por ele mesmo e o resultado é 1.

O Algoritmo da Divisão: Sejam *D* e *d* dois números inteiros e *d > 0*, existem apenas dois números inteiros q, r únicos, tais que

$$D = q.d + r, \text{ com } 0 \leq r < d \qquad (\, r = 0 \text{ se, e somente se } d \mid D)$$

Temos que *D*, *d*, *q* e *r*, representam:
D – Dividendo
d – Divisor
q – quociente
r – resto

Outra forma de representação:

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \underline{\text{ divisor}} \\ \text{Resto} & \text{Quociente} \end{array}$$

Exemplo:
Para D = 9 e d = 2, temos que q = 4 e r = 1, pois 9 = 4.2 + 1, ou

$$\begin{array}{l|l} 9 & \underline{\,2} \\ 1 & 4 \end{array}$$

Neste caso, houve resto, mas se a divisão for exata não haverá resto.

O Máximo Divisor Comum (MDC) é o maior valor numérico inteiro que divide dois ou mais números inteiros (diferentes de 0), sem deixar resto na divisão. Segundo

Santos (2018, p. 5) “Seja d o máximo divisor comum de a e b, então existem inteiros n_0 e m_0 tais que $d = n_0a + m_0b$”. O máximo divisor comum é o divisor positivo que é divisível por todo divisor comum.

Exemplo:

Calcule o Máximo Divisor Comum entre 48 e 30.

Veremos dois modos, o primeiro é por decomposição de fatores primos.

Primeiro decompomos os números em fatores primos e em seguida multiplicamos os fatores primos que dividirem os dois simultaneamente.

48 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3

30 = 2 x 3 x 5

O Máximo Divisor Comum é o produto dos fatores primos comuns 2 x 3 = 6.

Logo, m.d.c (48, 30) = 6.

Outra forma é pelo Algoritmo da divisão. De acordo com Santos (2018, p. 6) “Se *a* e *b* são inteiros e *a* = *q.b* + *r* onde *q* e *r* são inteiros, então (*a, b) = (b, r)*”.

Utilizaremos o Algoritmo da Divisão para dividir 48 por 30. Em seguida dividiremos 30 pelo resto de 18 e assim sucessivamente, até obtermos o resto 0.

48 = 1 x 30 + 18

30 = 1 x 18 + 12

18 = 1 x 12 + 6

12 = 2 x 6 + 0

O último resto não nulo é o máximo divisor comum entre os números, nesse caso temos o número 6.

Logo, m.d.c (48, 30) = 6.

Obs. Dois ou mais números são chamados de primos entre si, quando o MDC entre eles é o número 1.

Os Números Primos são constituídos por números inteiros maiores do que um e que só podem ser divididos por um ou ele mesmo, como por exemplo, os números

2, 3 e 5. O número 2 é o único número primo que é par. O conjunto dos números primos é infinito (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...).

De acordo com Santos (2018, p. 9) "Um número inteiro n(n > 1) possuindo somente dois divisores positivos n e 1 é chamado *primo*. Se n > 1 não é primo dizemos que n é *composto*". Podemos escrever um número que é chamado composto, ele é escrito como o produto de números primos ou fatores primos, utilizando o processo de fatoração. Com isso temos o Teorema Fundamental da Aritmética que faz parte da Teoria dos Números, o teorema afirma que todos os números inteiros maiores do que um, podem ser decompostos como um produto de fatores primos, sendo essa decomposição representada de maneira única.

O Mínimo Múltiplo Comum (MMC) é o menor valor numérico inteiro positivo que é múltiplo de dois ou mais números inteiros positivos (diferentes de 0). Segundo Santos (2018, p. 13) "O *Mínimo Múltiplo Comum* de dois inteiros positivos a e b é o menor inteiro positivo que é divisível por a e b. Vamos denotá-lo por [a, b]". Para encontrar os múltiplos de um número basta multiplicá-lo por números naturais, assim vemos que os múltiplos de um número são infinitos, pois os números naturais são infinitos. Ao multiplicarmos o MMC e o MDC de dois números inteiros positivos, temos que o resultado é o produto entre esses dois números.

Exemplo:

Calcule o Mínimo Múltiplo Comum entre 5 e 6. Utilizaremos a decomposição em fatores primos.

5, 6 | 2

5, 3 | 3

5, 1 | $\underline{5}$

1, 1 | 2 x 3 x 5 = 30

Logo, o m.m.c (5, 6) = 30.

4.6 APLICAÇÕES DO CONTEÚDO NO COTIDIANO

A fim de compreendermos melhor o tema, iniciaremos com uma citação de Lobachevsky (Jornal UFG, 2017) "Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real", por muitas vezes a matemática é abordada como se fosse apenas cálculos e demonstrações e não houvesse relação com o nosso dia a dia, mas ao estudarmos mais a fundo vemos que a matemática foi construída ao longo dos anos e surgiu de uma necessidade humana e até hoje continua por causa desta necessidade. A matemática está extremamente ligada ao nosso cotidiano, como em uma compra que fazemos, quando vemos as horas ou uma viagem que fazemos, pois o que percorremos é contado em quilômetros ou metros.

A cada dia são feitos novos procedimentos para compreender as necessidades que vão surgindo, por isso a matemática não é vista como algo acabado e sim algo que está em constante construção. Não quer dizer que o cálculo e suas demonstrações não são importantes, mas que eles não devem ser vistos separados de suas aplicações, pois um complementa o outro. Frequentemente a Matemática é vista por muitos como abstrata, pois geralmente é como ela é trabalhada em sala de aula, focando apenas em como é feito o cálculo e não nas aplicações presentes em nosso cotidiano.

Assim, a Matemática é vista de forma limitada o que pode comprometer a aprendizagem do aluno, pois, "É na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania" (BRASIL, 2006, p. 83). Portanto, as Orientações Curriculares Nacionais defendem esse uso de contextualização, pois com ela o aluno forma seu conhecimento com significado, portanto, é fundamental para a aprendizagem. Quando o aluno relaciona algo que está aprendendo com algo que já conhece, havendo a interação entre esses conhecimentos de modo que este novo conhecimento se fortaleça, há a aprendizagem significativa, por isso a contextualização é importante, ela trará o que o aluno já conhece, mesmo que o conhecimento não seja aprofundado e se unirá com o novo conhecimento, auxiliando assim para que o aluno construa conhecimento significativo.

De acordo com Sá (2007, p.1) "Diferentes códigos numéricos de identificação, como códigos de barras, números dos documentos de identidade, CPF, CNPJ, ISBN, ISSN, criptografia, calendários e diversos fenômenos periódicos estão diretamente ligados ao tema [...]". Logo, vemos que não faltam aplicações para contextualizar o conteúdo de forma que auxiliem na aprendizagem dos alunos e que o importante do tema não é apenas o cálculo, mas também onde este cálculo é utilizado e para quê é utilizado.

Com isso, é preciso que o docente reflita sobre sua prática pedagógica aplicada a este conceito, fazendo a escolha de uma metodologia diferente, que beneficie o seu ensino e a aprendizagem do aluno, induzindo-o a conhecer o conceito de forma aplicada, para que esse conceito tenha algum significado para o aluno e ele realmente o aprenda e não o decore como ocorre muitas vezes, devido aos alunos não entenderem o conteúdo de verdade e apenas estudá-los para não reprovar a disciplina. A seguir veremos algumas aplicações acerca do tema congruência modular.

4.6.1 Relógio Analógico

Segundo Mendes (2015) a aritmética do relógio trata-se de uma aritmética modular, o relógio tem como função contar o tempo, horas, minutos e segundos. Esse tempo no relógio analógico varia apenas de 0 a 12 horas, que são as horas marcadas no relógio, de meia noite às 12 horas. São casos de congruência modular, módulo 12 para horas $x \equiv y \ (mod\ 12)$, módulo 60 para minutos $x \equiv y \ (mod\ 60)$ e o mesmo para segundos. Note que 13 horas é congruente a 1 hora no módulo 12, pois ambos deixam resto 1 na divisão por 12, 14 horas é congruente a 2 horas módulo 12 e assim sucessivamente.

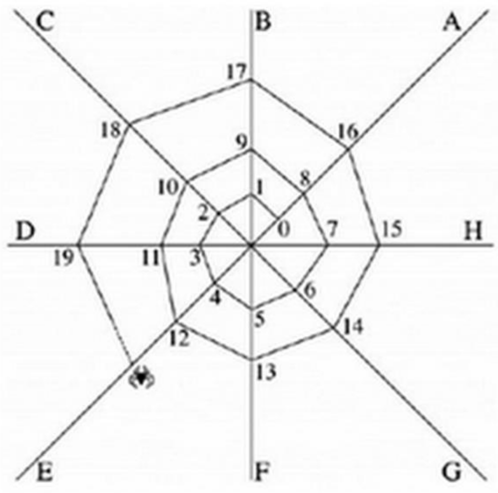
Exemplo: Em um relógio analógico, que horas estará marcando depois de passarem 54 horas, depois das 10 horas da manhã?

Solução: 54 + 10 = 64 horas, dividindo 64 por 12, é igual a 5 e tem resto 4. Assim, $64 \equiv 4 \ (mod\ 12)$. Como a questão diz 10 horas da manhã, ele estará marcando 4 horas da manhã, se dissesse 22 horas (10 horas da noite), então seriam 4 horas da tarde.

4.6.2 Teia de Aranha

A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118? Questão da OBMEP-2010 (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas)

Figura 1 - Teia de aranha



Fonte: OBMEP, 2010.

A) B B) D C) E D) G E) H

Podemos observar que são 8 fios de apoio, ou seja, os fios se repetem a cada 8 números tornando-se periódico, isso faz com que notemos que é uma progressão aritmética de razão 8, aumentando de 8 em 8. No caso do fio A são números que divididos por 8 deixam resto 0 ($8 . x, com\ x\ \in N$), no caso do fio B, números que divididos por 8 que deixam resto 1 ($8 . x + 1, com\ x\ \in N$), no fio C são números que divididos por 8 que deixam resto 2 ($8 . x + 2, com\ x\ \in N$)e assim até o fio H que são números que divididos por 8 deixam resto 7 ($8 . x + 7, com\ x\ \in N$).

Para saber em qual fio o número 118 estará faremos a divisão de 118 por 8 e veremos o resto, $x \equiv 118\ (mod\ 8)$, 118 = 14 . 8 + 6, fazendo a divisão, vemos que 118 dividido por 8 é igual a 14 e tem resto 6. Como o resto da divisão é 6, o número 118 estará no fio G. Os números do exemplo que estão no mesmo fio, ao serem divididos por 8 deixam os mesmos restos, portanto são denominados como congruentes entre si no módulo 8. Como por exemplo $x \equiv 14\ (mod\ 8)$, pois 14 = 1 . 8 + 6, 14 deixa o resto 6 na divisão por 8, que é o mesmo que o número 118, portanto 14 e 118 são congruentes entre si no módulo 8. Logo, por transitividade $118 \equiv 14\ (mod\ 8)$.

4.6.3 Cadastro de Pessoas Físicas (CPF)

Os dígitos de verificação ou algarismos de controle são utilizados como mecanismos de defesa para validar o código e evitar fraudes, ele verifica se o valor numérico está correto, é uma sequência de números em que geralmente o dígito verificador é o último algarismo, esse dígito serve para verificar a autenticação e validação do código. Ele é calculado a partir dos outros dígitos do código e ele pode variar de 0 a 9. Eles estão sempre presentes em nosso cotidiano como números de identificação, Cadastro de Pessoas Físicas (CPF), códigos de barras, cartão de crédito, Registro Geral (RG), entre outros. Neste trabalho iremos mostrar apenas a aplicação da congruência no cadastro de pessoas físicas que nesse caso são dois dígitos de verificação.

O Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) é um documento em que os números são números de identificação, de modo que cada pessoa tem uma sequência de números diferentes, cada um tem sua própria numeração. É um documento emitido pela Receita Federal Brasileira em que sua principal função é servir de identificação dos contribuintes no Imposto de Renda, porém ele é solicitado em cadastro para compras, aberturas de contas, pedir um cartão de crédito, entre outras. No CPF há 11 dígitos, em que os 8 primeiros dele são chamados de número-base, o nono é o dígito que determina a Região Fiscal e o décimo e o décimo primeiros são dígitos verificadores.

Assim, temos que os dígitos do CPF são representados da seguinte forma:

$$a_1a_2a_3.a_4a_5a_6.a_7a_8a_9 - a_{10}a_{11}$$

Onde $a_i \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i \in \{1, 2, . . . , 11\}$ e o a_9 é determinado pela tabela abaixo:

Quadro 2 - Dígito de Região Fiscal

Dígito	Região Fiscal
0	RS

1	DF, GO, MS, MT, TO
2	AC, AM, AP, PA, RO, RR
3	CE, MA, PI
4	AL,PB, PE, RN
5	BA, SE
6	MG
7	ES, RJ
8	SP
9	PR, SC

Para determinar os dígitos verificadores aplicamos a congruência módulo 11, pois temos 11 dígitos no CPF. Como temos dois dígitos verificadores nesse caso, iremos calcular primeiro o a_{10}. Seja S ∈ **Z**, temos que

$$S = \sum_{i=1}^{9} \quad i \,.\, a_i.$$

O número S que é o somatório do produto entre os 9 primeiros números $(a_1 a_2 a_3 . a_4 a_5 a_6 . a_7 a_8 a_9)$ e suas posições (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9), tudo isso menos o a_{10} deve ser divisível por 11, de modo que $11 \mid (S - \ a_{10})$. Assim, $a_{10} \ \equiv \ S \ (mod\ 11)$.

Para determinar o a_{11} que é o segundo dígito verificador faremos de forma semelhante, Seja S ∈ **Z**, temos que

$$S' = \sum_{i=1}^{10} \quad (i-1) \,.\, a_i.$$

O número S' que é o somatório do produto entre os 10 números anteriores a ele $(a_1 a_2 a_3 . a_4 a_5 a_6 . a_7 a_8 a_9 a_{10})$ e os números da base, porém nesse caso será de 0 a 9 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), tudo isso menos o a_{11} deve ser divisível por 11, de maneira que $11 \mid (S' - \ a_{11})$. Portanto, $a_{11} \ \equiv \ S' \ (mod\ 11)$.
Vale ressaltar que se o resto de S ou S' for 10, então o dígito verificador respectivo ao caso será 0, ou seja a_{10} ou a_{11} será 0.

Exemplo: Iremos determinar os dígitos verificadores do CPF hipotético gerado, 036.938.460- $a_{10}\, a_{11}$.

Primeiramente podemos observar que de acordo com o nono digito que é o da Região Fiscal, o CPF é do Rio Grande do Sul.
A seguir iremos determinar o dígito verificador a_{10}, temos que

$S = \sum_{i=1}^{9} \quad i \,.\, a_i$ = 1 . 0 + 2 . 3 + 3 . 6 + 4 . 9 + 5. 3 + 6 . 8 + 7 . 4 + 8 . 6 + 9 . 0 = 199.

Portanto,

$$a_{10} \equiv 199 \; (mod\ 11).$$

Como, 199 = 18 . 11 + 1, temos que $199 \equiv 1 \; (mod\ 11)$ e por transitividade temos que $a_{10} \equiv 1 \; (mod\ 11)$, dado que $0 \leq a_{10} \leq 9$, então $a_{10} = 1$.

Dispomos do CPF até o a_{10} 036.938.460-1 a_{11}

Vamos determinar o dígito a_{11}, temos que

$S' = \sum_{i=1}^{10} \quad (i-1) \,.\, a_i$ = 0 . 0 + 1 . 3 + 2 . 6 + 3 . 9 + 4 . 3 + 5 . 8 + 6 . 4 + 7 . 6 + 8 . 0 + 9 . 1 = 169.

Assim,

$$a_{11} \equiv 169 \; (mod\ 11).$$

Como, 169 = 15 . 11 + 4, temos que $169 \equiv 4 \; (mod\ 11)$ e por transitividade temos que $a_{11} \equiv 4 \; (mod\ 11)$, dado que $0 \leq a_{10} \leq 9$, então $a_{11} = 4$.
Logo, dispomos do CPF 036.938.460-14.

As considerações aqui apresentadas ressaltam o desenvolvimento da aritmética modular e sua relevância na atualidade, pois é uma área que traz grandes contribuições para tecnologia de informação. Além de que é um dos ramos da matemática mais antigos, portanto traz muitas explicações do que é ensinado em sala de aula atualmente para os alunos. A congruência modular assim como os temas relacionados a ela tem muitas outras aplicações, como semáforo, calendário, criptografia e dígito verificador do cartão de crédito, porém para que o trabalho não fique extenso apenas as aplicações acima foram abordadas.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo iremos tratar do método utilizado na pesquisa para sua realização. Será realizada uma pesquisa qualitativa e descritiva, pois segundo Gil (20102, p. 42), “São incluídas neste grupo as pesquisas que têm por objetivo levantar as opiniões, atitudes e crenças de uma população” e nessa pesquisa buscamos conhecer as concepções dos futuros docentes em matemática acerca de como é abordada a congruência modular no curso e se eles relacionam bem com os conteúdos da educação básica, já que preparar o licenciando para a prática na sala de aula é um dos motivos da formação acadêmica.

Devido à pandemia e para atingir os objetivos propostos, optamos por realizar a pesquisa através de questionário estruturado que foi realizado por meio do Google Forms.

A amostra da pesquisa foi composta por estudantes do curso de licenciatura em matemática da UFPE-CAA que estavam cursando ou já cursaram a disciplina teoria dos números em que o conteúdo congruência modular é estudado. O estudo buscou coletar dados através de questionário aplicado a uma amostra de licenciandos em matemática com o intuito de analisar a concepção dos alunos acerca da relação da congruência modular e conteúdos que tem ela como base na educação básica.

Esta pesquisa seguiu as seguintes etapas para o questionário:

- Elaboração do material que será utilizado (questionário);
- Aplicação do questionário para saber a concepção dos alunos acerca do tema aqui abordado;

5.1 PROCEDIMENTOS PARA COLETA DE ANÁLISE DE DADOS

O questionário utilizado foi estruturado e realizado através do *Google forms*, ele foi dividido em três partes em que na primeira parte busca investigar os dados de identificação dos alunos (nome, instituição de ensino, curso, período, etc.). Na segunda parte dados sobre a congruência modular na licenciatura em matemática, a abordagem do professor, a concepção do discente enquanto estudante dessa disciplina e a terceira parte aborda a concepção do licenciando enquanto professor da educação básica acerca do tema visto na licenciatura e os conteúdos relacionados a ele na educação básica.

A amostra do estudo é formada por docentes em formação do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal de Pernambuco – Campus Acadêmico do Agreste que cursam ou já cursaram a disciplina Teoria dos Números, onde é abordado a Congruência Modular no curso. E a pesquisa foi realizada de 12 até 24 de julho de 2021, totalizando 13 estudantes que responderam nosso questionário.

6 ANÁLISE DE RESULTADOS

A pesquisa foi realizada com 13 estudantes da Universidade Federal de Pernambuco do curso de matemática-licenciatura do Campus Acadêmico do Agreste sendo 5 deles do 9º período, 6 do 8º período, 1 do 7º e outro do 6º. Desses 13 estudantes, 12 deles já cursaram a disciplina Teoria dos Números e apenas 1 deles ainda está cursando, a Teoria dos números é uma disciplina apresentada no curso apenas no 6º período, portanto vemos que os dados analisados fazem sentido.

Abaixo veremos o quadro com as perguntas referentes ao questionário e as justificativas para cada pergunta, as respostas foram relatadas de forma anônima e para manter dessa forma os estudantes serão denominados por E1 até E13. O questionário foi elaborado com 14 perguntas das quais 2 delas eram relacionadas ao perfil do estudante, 11 relacionadas ao tema congruência modular no curso como conteúdo e a relação com o ensino na educação básica, a última foi uma questão extra na qual não era obrigatória a resposta, apenas um comentário sobre o questionário.

Quadro 3 - Perguntas do questionário

Perguntas	Justificativa de cada pergunta
1. Qual a metodologia utilizada pelo professor da disciplina com relação ao conteúdo Congruência Modular no período em que você cursou a Teoria dos Números?	O interesse dessa pergunta inicialmente foi saber qual a metodologia mais utilizada no ensino do conteúdo abordado.
2. O que você compreende sobre o conceito de Congruência Modular vista na disciplina teoria dos números?	O intuito desse questionamento é saber o que ficou para os alunos do tema abordado na disciplina, de maneira simples o que é a congruência modular.
3. Durante a disciplina Teoria dos Números o professor relacionou o conteúdo Congruência Modular	Saber como está sendo abordado o conteúdo no ensino superior, se o conteúdo é abordado de forma a relacionar com a prática na educação básica.

abordado com o conteúdo no ensino básico?	
4. Você já atuou ou atua na Educação Básica (Ensino Fundamental ou Ensino Médio)? Em caso positivo indique o nível.	Se os licenciandos já atuaram ou atuam na educação básica para que consigam fazer a relação com as questões posteriores e prática na sala de aula.
5. A ideia de congruência é trabalhar apenas com o resto das divisões, pois os números são menores, simplificando a solução. De acordo com esta ideia quais conteúdos da Educação Básica você relaciona com a congruência modular vista na disciplina Teoria dos Números na formação de professores de matemática?	O interesse dessa questão foi saber se os licenciandos conseguem relacionar o conteúdo visto no ensino superior com os conteúdos na educação básica, pois a congruência modular estrutura alguns desses conteúdos e o curso é voltado para formação de professores de matemática.
6. Na sua opinião tem alguma relevância o conteúdo Congruência modular que é visto na licenciatura ser relacionado com os conteúdos no ensino básico estruturados por ele? Por quê?	Saber a opinião dos licenciandos acerca da relevância, caso tenha, acerca do ensino do conteúdo Congruência Modular visto no ensino superior, ser relacionado com os conteúdos do Ensino básico.
7. Qual a sua opinião acerca do ensino de congruência modular visto na disciplina teoria dos números no curso, o conteúdo está sendo ou foi explanado de forma que se entenda a relação com os conteúdos na	Se essa relação do conteúdo com o ensino básico foi abordada durante a disciplina com o professor que a lecionou.

educação básica relacionados a ele?	
8. Depois de cursar a disciplina Teoria dos Números e mais especificamente o conteúdo congruência modular, você se sente mais bem preparado sobre o ensino dos conteúdos estruturados por ele na Educação Básica? De que maneira?	O interesse do questionamento é se aprofundar no sentimento dos licenciandos com relação à prática de ensinar o conteúdo que foi visto na licenciatura, se eles se sentem mais bem preparados após cursar a disciplina e estudar o conteúdo congruência modular.
9. Quando você cursou a disciplina Teoria dos Números o professor abordou as aplicações de Congruência Modular? Se sim, cite alguma?	Saber se o professor que lecionou a disciplina no ensino superior abordou suas aplicações.
10. Se você conhece aplicações de Congruência Modular poderia nos informar quais desses casos abaixo são aplicações?	Abordar se os licenciandos conhecem algumas das aplicações do conteúdo dando sugestões, pois esse é um tema que vem sendo muito trabalhado na atualidade.
11. Você considera que principalmente na Educação Básica é importante que o professor traga as aplicações deste conteúdo? Se sim, na sua opinião qual a relevância?	O principal interesse dessa pergunta seria perceber se para os discentes como futuros docentes há a importância de traçar um paralelo entre o conteúdo abordado e suas aplicações no ensino na educação básica e suas opiniões.

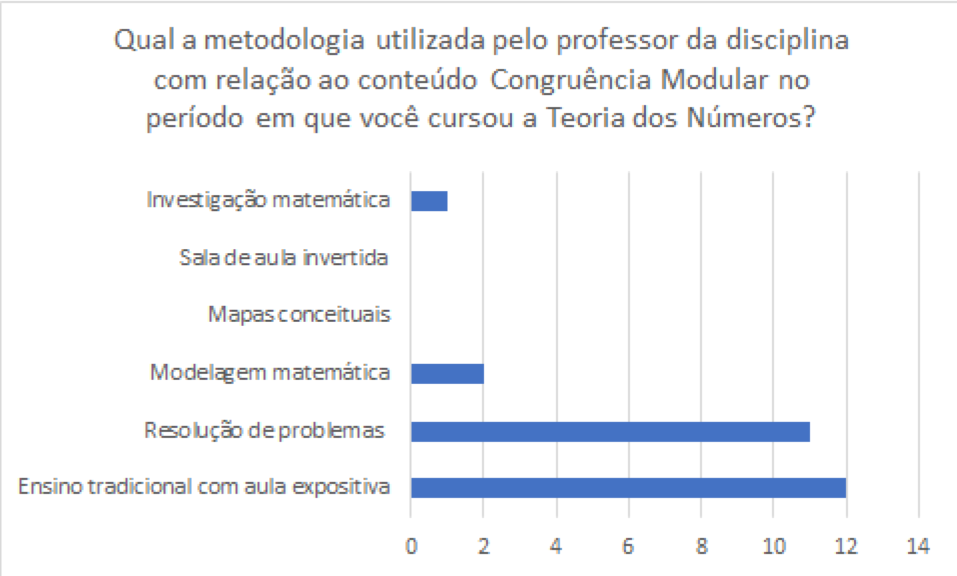
Fonte: Os autores

Análise da primeira questão

Nesta questão os estudantes puderam marcar mais de um item, portanto teremos mais que 13 respostas.

Doze alunos responderam que a metodologia utilizada para o ensino do conteúdo no curso enquanto eles cursaram a disciplina foi o Ensino tradicional com aula expositiva, vemos que o ensino tradicional é muito utilizado durante a formação. Em segundo lugar, tivemos a resolução de problema como uma das metodologias utilizadas, onze alunos disseram que enquanto eles cursaram a disciplina a resolução de problemas foi utilizada como metodologia para ensino do conteúdo o que nos sugere que a resolução de problemas está se fortificando como metodologia no ensino superior. O que mais nos surpreendeu foi a resposta de dois alunos que informaram que enquanto cursaram a disciplina o professor utilizou modelagem matemática e outro que informou que foi utilizada como metodologia a investigação matemática, mostrando que, gradualmente, estão sendo introduzidas no curso novas metodologias de ensino para que auxiliem na aprendizagem dos estudantes.

Gráfico 1 - Metodologia utilizada para o ensino de Congruência Modular



Fonte: Os autores

Como os participantes poderiam marcar mais de uma resposta, um participante informou que em suas aulas foram utilizadas três metodologias, Ensino Tradicional com aula expositiva, Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, outro informou que foram utilizadas três também Ensino Tradicional com aula expositiva, Resolução de Problemas e Investigação Matemática, oito participantes informaram que foram utilizadas duas metodologias Ensino Tradicional com aula expositiva e Resolução de problemas, um informou Resolução de Problemas e Modelagem Matemática e dois informaram que foi utilizado apenas Ensino Tradicional com aula expositiva. Vemos que apenas dois estudantes tiveram como metodologia apenas o ensino tradicional, os demais estudantes informaram que em suas aulas foram utilizadas metodologias ativas no auxílio do ensino do conteúdo na disciplina.

Análise da segunda questão

Sete dos estudantes trouxeram o conceito de congruência modular de maneira geral, simples e de fácil entendimento, uma das respostas que mais nos chamou atenção foi a do estudante E2 que traz o conceito utilizando números como exemplo, o que tornou simples entender o que ficou para ele acerca do tema Congruência modular após cursar a disciplina, temos a resposta abaixo a resposta do participante E2.

“12 é congruente a 2, módulo 5, pois, 12-2= 10 que é divisível por 5 ou também 5 divide 10. Além disse, 12 ao ser dividido por 5, o resto é 2. Outra forma, que se chega a congruência é (q.b+ r= a), ou seja, 12= 2. 5+ 2.”

Outro participante também deu uma resposta bem interessante e simples, porém em forma de texto, segue a resposta do participante E13 abaixo:

“De forma resumida, podemos dizer que um número x é congruente a y, quando são divididos por um n e o seus restos são iguais.”

Quatro estudantes trouxeram respostas um tanto quanto vagas, na qual sabiam do que se tratava, porém seria preciso um pouco mais de aprofundamento na explicação para maior entendimento, como, por exemplo, as duas respostas abaixo dos participantes E12 e E5, respectivamente.

“Trabalhar com o restos da divisão de dois numeros inteiros”

“Classe de números que possuem mesmo resto na divisão”

Essas quatro respostas trouxeram o assunto de divisão. Percebemos que o que mais ficou para esses estudantes foi a questão da divisão e os números inteiros.

O participante E3, nos respondeu da seguinte forma:

"Não muita coisa, pois já faz um tempo que paguei"

Vemos que a aprendizagem desse estudante acerca do conteúdo foi de maneira mais superficial, devido o mesmo informar que não compreende muito por já fazer um tempo que cursou a disciplina.

Em geral, concluímos que pela definição do conceito de Congruência Modular de acordo com Santos (2018, p. 32) "Se a e b são inteiros dizemos que a é congruente a b módulo m $(m>0)$ se $m|(a-b)$. Denotamos isto por $a \equiv b \pmod{m}$. Se m não divide (a-b) dizemos que a é incongruente a b módulo m e denotamos $a \equiv| \, b \pmod{m}$". Isso implica que a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m. Percebemos através de nossa análise que a maioria dos alunos utilizou essa questão de que a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m e o algoritmo de Euclides, utilizaram o significado de maneira geral para explicar o que entendiam por Congruência Modular. Porém, podemos notar que na definição é falado de dois números inteiros e nas respostas números naturais, não encontramos exemplos com números negativos, por exemplo.

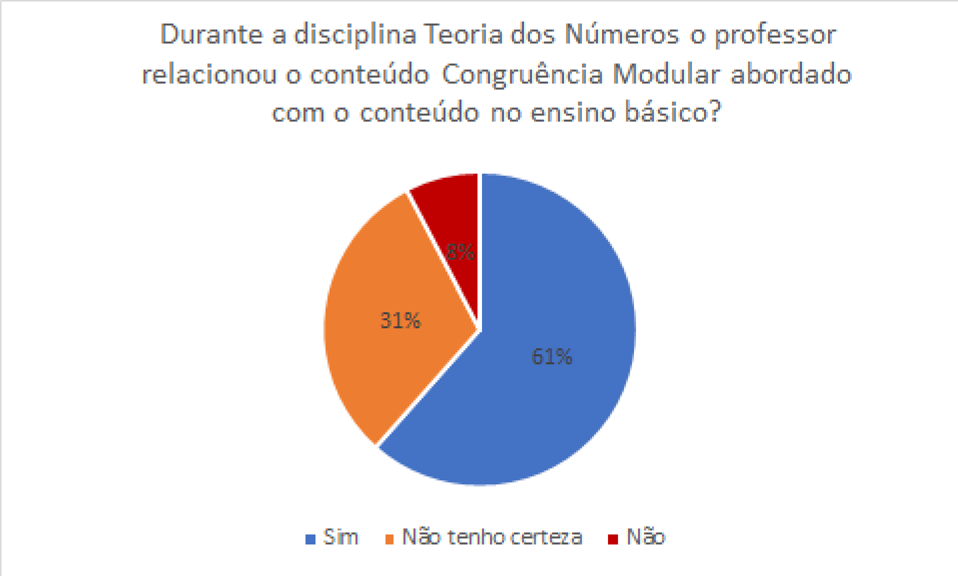
Análise da terceira questão

Oito dos treze alunos informaram que o professor da disciplina no curso abordou o conteúdo de forma a relacioná-lo com o conteúdo na educação básica, quatro informaram que não tem certeza se o conteúdo foi abordado dessa forma e um informou que o conteúdo não foi abordado pelo professor enquanto cursou a disciplina com o conteúdo relacionado a educação básica. De acordo com Serrazina (2012, p. 272):

> Para além de conhecer a matemática que ensina, o professor tem de conhecer o currículo a ensinar, não se limitando ao conhecimento do ano/ciclo onde está a trabalhar. Deve possuir uma visão global do currículo a ensinar no ensino fundamental e um conhecimento aprofundado do ciclo de ensino em que trabalha, de modo a que conheça como as ideias matemáticas se vão ampliando e como as relacionar.

Podemos observar de acordo com as respostas da maioria dos alunos no curso a disciplina está sendo abordada dessa maneira, de forma a relacionar o conteúdo e conhecimento do professor que é mais de que apenas o conteúdo que está sendo abordado naquele ano/ciclo e sim uma visão global.

Gráfico 2 - Relação entre Congruência Modular e o ensino básico



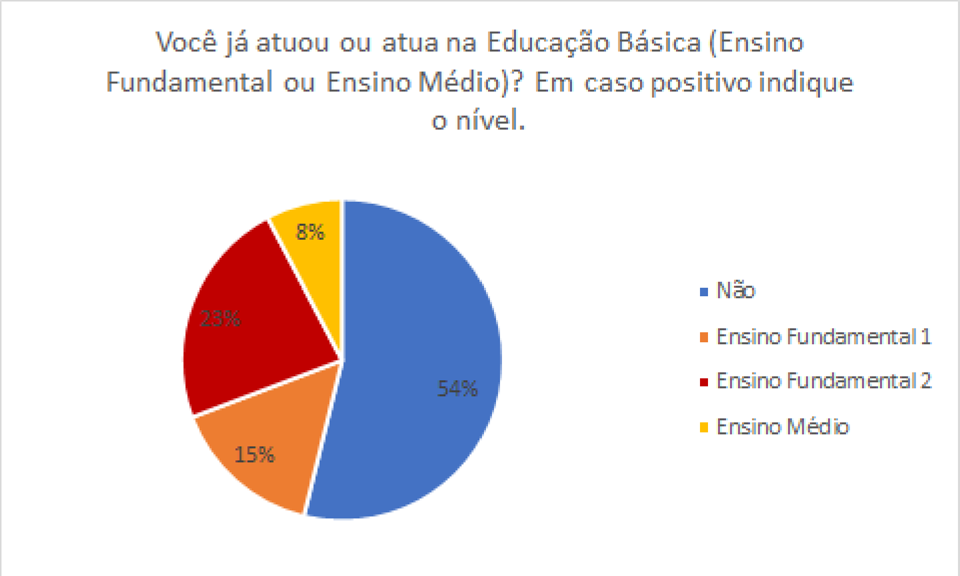
Fonte: Os autores

Análise da quarta questão

Sete dos treze estudantes informaram que não atuaram na educação básica, dois informaram que atuaram no Ensino Fundamental Anos Iniciais, três no Ensino Fundamental Anos Finais e um no Ensino Médio, vemos com os dados coletados que a maioria dos discentes ainda não atuaram na Educação Básica como docentes, porém ao relacionarmos com a sexta questão que fala sobre a relevância de o conteúdo Congruência modular que é visto na licenciatura ser relacionado com os conteúdos estruturados por ele no ensino básico, todos os participantes responderam que sim, ou seja, mesmo sem ter atuado ainda no ensino básico os estudantes da licenciatura veem essa relevância de um conteúdo que é visto na licenciatura seja relacionado com o ensino na educação básica já que na licenciatura estão sendo formados professores que a princípio atuarão na educação básica. De acordo com Serrazina (2021, p. 272):

> Para que o professor possa desempenhar os papéis explicitados antes é necessário que a sua formação seja pensada tendo em conta que, neste caso interessa o que se ensina, mas também o como se ensina, ou dito de outro modo, na formação de professores é importante o que estão a aprender mas também como o estão a aprender.

Gráfico 3 - Atuação na Educação Básica



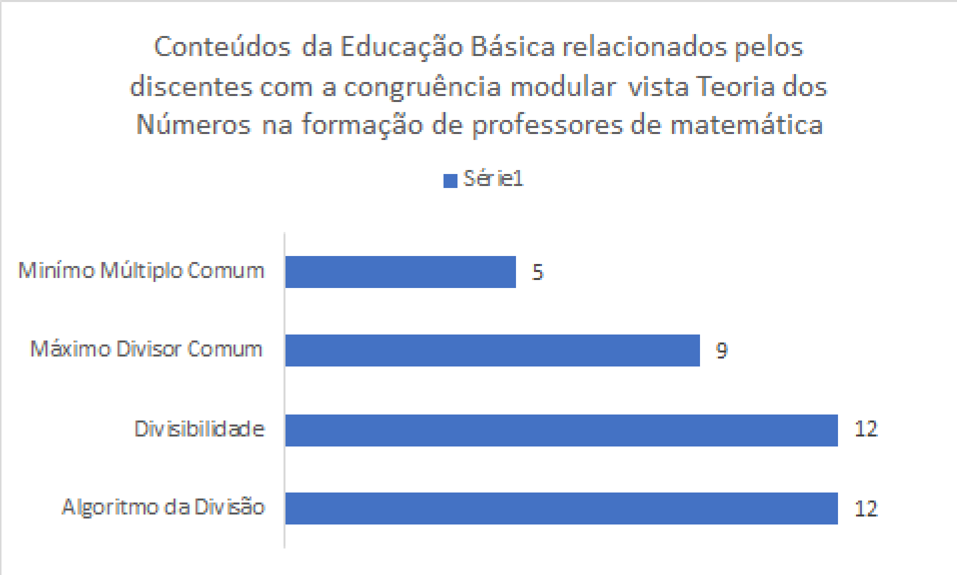
Fonte: Os autores

Análise da quinta questão

Nesta questão foi possível para os estudantes que pudessem marcar mais de um item, portanto serão mais de treze respostas.

Doze estudantes relacionaram o conteúdo Algoritmo da Divisão visto na educação básica com o conteúdo Congruência Modular, e também, doze estudantes relacionaram com a divisibilidade, nove relacionaram com o Máximo Divisor Comum e cinco com Mínimo Múltiplo Comum, vemos então que os estudantes conseguem fazer uma boa relação com o conteúdo da Educação Básica, trazendo como confirmação da questão terceira e sétima questão em que os estudantes afirmam que o professor da disciplina no curso abordou o conteúdo para relacioná-lo com o conteúdo na educação básica e o conteúdo Congruência Modular está sendo explanado de maneira que se entenda essa relação.

Gráfico 4 - Conteúdos da Educação Básica relacionados pelos discentes com a Congruência Modular



Fonte: Os autores

Análise da sexta questão

As treze respostas que obtivemos foram que sim, todos informaram que há relevância em o conteúdo Congruência modular que é visto na licenciatura ser relacionado com os conteúdos no ensino básico estruturados por ele. Uma das respostas que mais se destacou foi do participante E5 em que ele fala:

“Com certeza, a relação que os conteúdos do ensino básico podem ter com congruência modular de teoria dos números, podem despertar a compreensão da aritmética como um todo e suas aplicações na vida dos estudantes, como por exemplo, as horas de um relógio analógico, ou a criptografia do celular desses estudantes.”

Outra resposta que nos chamou atenção também foi participante E2 que tem o mesmo sentido da resposta do participante E5, vejamos abaixo:

“Acredito ser de grande importância, principalmente por estar relacionados a vários problemas, me lembro que quando estudamos, vimos a aplicação do conteúdo em outras áreas, foi pedida que fosse feita uma pesquisa sobre isso. Ou seja, o fato de estar relacionados a problemas aplicáveis, pode facilitar uma melhor compreensão por parte dos estudantes.”

Esse participante traz como aplicações do conteúdo o relógio analógico e a criptográfica colocando com enfoque o ensino contextualizado e a prática docente na forma do licenciando como futuro docente desses conteúdos.

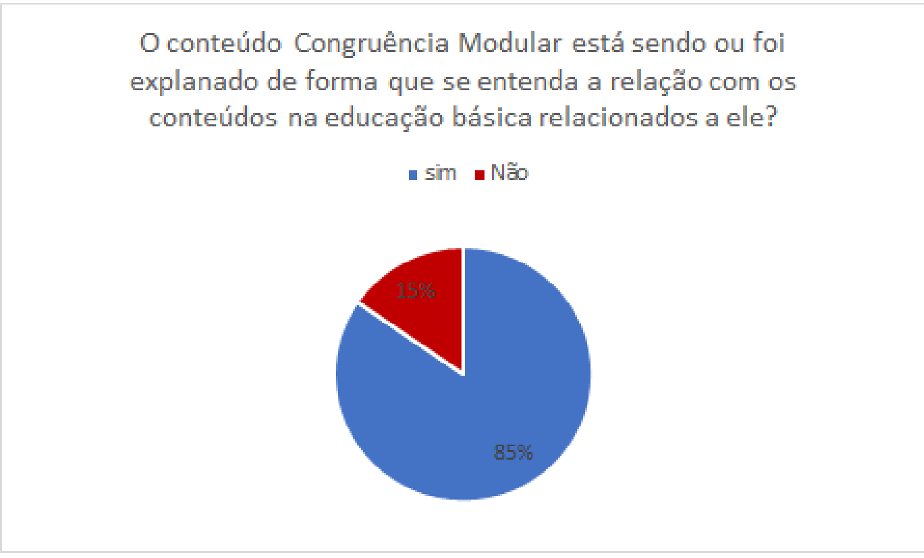
Já os participantes E1 e E7 respectivamente, trazem o foco mais para a formação docente como forma de o professor ter mais embasamento acerca do conteúdo e com isso ter uma bagagem maior como suporte. Vemos as duas respostas abaixo:

“Sim, porém no meu período ela serviu como uma forma aprofunda entre resolução é definições de teoremas sendo bem abstrato, porém serve como um meio de o professor o obter um conhecimento a mais para a sua formação.”
“Sim. Pois dá um suporte ao conteúdo da educação básica, para que possa ser melhor compreendida pelo professor”

Análise da Sétima questão

Onze estudantes informaram que o conteúdo Congruência Modular está sendo explanado de maneira que se entenda a relação com os conteúdos relacionados a ele na Educação Básica, apenas dois estudantes acreditam que o conteúdo não está sendo abordado dessa maneira.

Gráfico 5 - O conteúdo Congruência Modular está sendo abordado de forma que se entenda a relação com os conteúdos relacionados a ele na Educação Básica



Fonte: Os autores

A resposta está de acordo com as já indicadas nos itens anteriores. O conteúdo de congruência, bem como a disciplina de modo geral é indicado pelos estudantes como sendo relacionado com a Educação Básica.

Análise da oitava questão

Nove dos treze participantes, informaram que depois de cursar a disciplina Teoria dos Números e mais especificamente o conteúdo congruência modular ele se sentiu mais bem preparado sobre o ensino dos conteúdos estruturados por ele na educação básica. Ou seja, apenas 4 informaram que não se sentem mais seguros após cursar estudar o conteúdo. Uma das respostas que mais nos chamou atenção foi a resposta do participante E9:

“Sim. Me sinto mais confortável para desenvolver nos estudantes a capacidade de perceber a relação entre restos e divisibilidade, além de estar mais seguro para falar de conceitos como múltiplos, divisores e algoritmo da divisão.”

Já o participante E6 nos trouxe a seguinte resposta:

“Sim, pois digamos que a congruência modular permitiu compreender a "raiz" dos demais conteúdos trabalhados na educação básica.”

Três participantes informaram que não se sentem mais bem preparados, vejamos abaixo a resposta do participante E2, veja que o participante E2 na sétima questão informou que sim, o conteúdo Congruência Modular está sendo explanado de maneira que se entenda a relação com os conteúdos relacionados a ele na Educação Básica, porém nessa informou a seguinte resposta:

“Acredito que apesar de ter sido trabalhado de forma contextualizada, não seria suficiente para saber como trabalhar com esses conteúdos na educação básica, temos conhecimento de alguns conteúdos que estão relacionados, mas acredito na importância de um estudo mais detalhado sobre o tema.”.

O estudante aponta que o ensino contextualizado da disciplina não é suficiente para preparar o professor para sua docência, é necessário o estudo de metodologias de ensino, investigação de possíveis obstáculos para o aprendizado dos conteúdos. Essas discussões no curso costumam ser realizadas nas disciplinas de metodologias de ensino ou didática da matemática. Mas, as disciplinas de matemática também podem contribuir ao contextualizar o conteúdo com suas aplicações ou apresentando o contexto histórico de sua construção, por exemplo.

O participante E10 informou:

“não, nao consegui fazer relação com o ensino básico”

E na sétima questão também informou que não acha que o conteúdo está sendo explanada de forma que mostre essa relação.

O participante E13 informou:

“Não sei afirma se estou mais prepara para ensinar, mas compreendo que os estudos na disciplina de Teoria dos Números possibilitou uma nova perspectiva para ensinar alguns conteúdos matemáticos, como problemas algébricos mais complexos.”.

Fazendo a relação com a sétima questão, esse mesmo participante informou que sim, o conteúdo está sendo explanado na licenciatura de forma que se entenda a relação com os conteúdos relacionados a ele na educação básica.

Participante E3 informou na sétima e oitava questão que não, o conteúdo Congruência Modular não está sendo explanado de maneira que se entenda a relação com os conteúdos relacionados a ele na Educação Básica e não se sente mais bem preparado para ensinar o conteúdo relacionado a Congruência Modular após cursar a disciplina.

Análise da nona questão

Sete participantes informaram que sim, o professor abordou as aplicações do conteúdo durante a disciplina, uma resposta que nos chamou bastante atenção foi a resposta do participante E2:

“Abordou sim, pediu para que fizéssemos uma pesquisa, trouxe umas questões contextualizadas mas não me lembro direito, foi alguma questão do número de mortes de uns soldados, algo assim.”

Pois o estudante informa que foram abordadas aplicações, porém não lembra com clareza o que pode indicar que ele viu o exemplo da aplicação, mas talvez não tenha compreendido/aprendido de fato, já que esqueceu.

Outros participantes informaram que as aplicações eram sobre sistema binário e criptografia, CPF, MMC e MDC. 5 participantes informaram que não se recordam de o conteúdo ter sido abordado com aplicações e 1 informou que o conteúdo não foi abordado dessa forma.

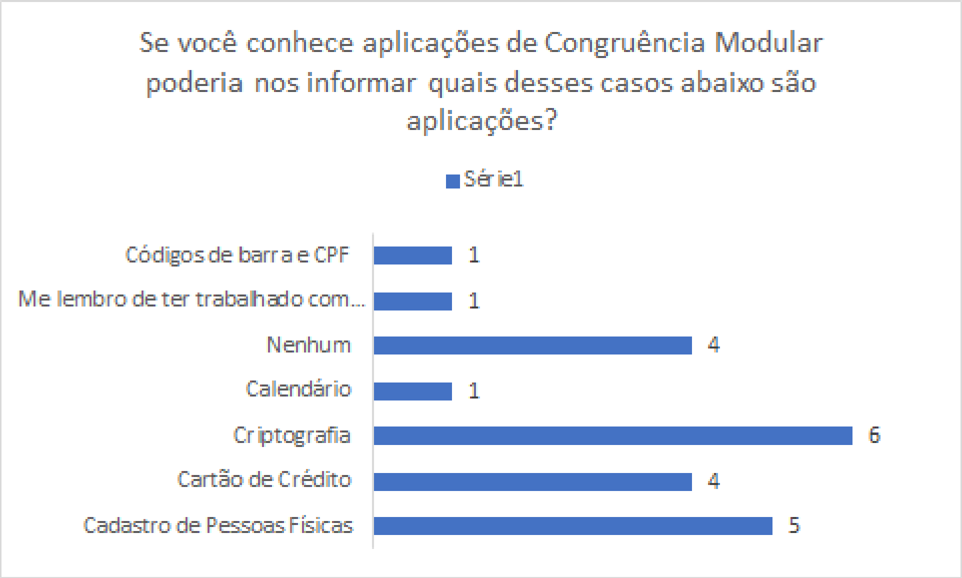
Análise da décima questão

Nesta questão foi possível para os estudantes que pudessem marcar mais de um item, portanto serão mais de 13 respostas.

Cinco estudantes informaram que conhecem o Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) como uma das aplicações do conteúdo Congruência Modular, quatro informaram que conhecem o Cartão de Crédito como aplicação, seis criptografia, um o calendário, quatro nenhuma das aplicações, um informou na resposta outro “Códigos de Barra e CPF” e um outro informou assim “me lembro de ter trabalhado com codificações”, ou seja, comparando com a nona questão em que cinco alunos informaram que não se recordam se as aplicações foram abordadas em sala de aula e um informou que não foi abordada, apenas quatro responderam que não conhecem nenhuma das aplicações do conteúdo, desses quatro, E3, E4, E9 e E10, informaram que não se recordam na nona questão e nenhum na décima questão, uma possibilidade é que essa diferença pode ser porque vendo a lista eles recordaram alguma aplicação vista em sala de aula ou porque conhecem uma aplicação, porém não viram essa aplicação na disciplina em si.

O participante E1, informou na nona questão que não se recorda se o professor abordou as aplicações do conteúdo, porém informou na décima que conhece o CPF, como aplicação do conteúdo. O participante E8, informou na nona questão que o professor não havia abordado as aplicações do conteúdo enquanto o participante cursou a disciplina, porém na questão décima questão informou que conhecia uma das aplicações que foi o calendário. Eles podem ter visto o assunto fora das aulas, ou terem visto a aplicação de forma rápida e não lembrar dela inicialmente.

Gráfico 6 - Aplicações de Congruência Modular



Fonte: Os autores

Análise da décima primeira questão

Dos treze estudantes, doze responderam que sim, principalmente na Educação Básica é importante que o professor traga as aplicações deste conteúdo, umas das respostas que nos chamaram mais atenção foram:

E2: “Sim, pois pode facilitar o entendimento do conceito por parte dos discentes.”

E4: “Muito importante. Principalmente para dar sentido ao que é visto em Matemática e responde a famosa pergunta "onde eu vou usar isso?"”

E6: “Sim, é muito importante, uma vez que as aplicações muitas vezes fazem parte do cotidiano dos educandos, o que vai permitir que eles façam associações.”

E8: “Sim, no entanto para cada ano em que for lecionado as aplicações devem ser adaptadas de acordo com o nível da turma, como a contagem do tempo em forma de calendário e ano bissexto”

E todas as outras respostas que afirmaram sim, foram nesse sentido, trazendo o estudante do ensino básico como foco e como facilitar a compreensão dos conteúdos com suas aplicações, trazendo a resposta do estudante E8, é importante levar em consideração a maturidade da turma acerca dos conteúdos matemáticos, as aplicações devem ser adaptadas de acordo com o nível de cada turma, pois algumas aplicações do conteúdo podem ser bem complexas.

O participante E10 informou que:

"e dificil opinar, pois nao recordo muito bem do assunto".

Vemos por outras respostas das questões anteriores que o participante E10, pode ter aprendido o conteúdo de forma mais superficial e sem muito aprofundamento, devido não se recordar muito bem do assunto como afirmou. Não ter certeza se o professor abordou o conteúdo de forma a relacioná-lo com os conteúdos do ensino básico, porém na quinta questão ele conseguiu fazer a relação com os conteúdos da Educação Básica.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa buscamos fazer um “retrato” de como estão saindo os estudantes formados no curso de licenciatura em matemática a respeito do conteúdo Congruência Modular na disciplina Teoria dos Números e a relação com o ensino dos conteúdos estruturados por ele na Educação Básica, na pesquisa buscamos relatar as concepções dos estudantes como futuros professores da Educação Básica acerca do tema através de suas respostas.

Os resultados da pesquisa apontaram que o Ensino Tradicional com aula expositiva ainda é o mais utilizado no ensino do conteúdo na disciplina Teoria dos Números no Curso de Licenciatura em matemática no campus acadêmico do agreste, porém outras metodologias de ensino estão sendo implementadas como resolução de problemas, investigação matemática e modelagem matemática. Todos os participantes apresentaram saber o conceito de Congruência Modular visto na licenciatura, porém uma parte deles sabe apenas de forma geral que envolve a divisão, aparentemente não de forma aprofundada seu conceito. Talvez esse aprendizado superficial seja devido ao fato de Congruência Modular ser vista em apenas uma disciplina.

De acordo com a maioria dos participantes o conteúdo é abordado no curso de maneira relacionada com os conteúdos matemáticos relacionados a ele na educação básica, o que é bom, visto que os licenciandos estão sendo formados para que no futuro próximo atuem nessa área, mesmo que alguns deles ainda não atuem no momento, as pesquisas relacionadas a área trazem a importância de se ver na licenciatura, atividades que aproximem da prática no ensino básico.

Como a maioria informou que o conteúdo é abordado no curso de maneira relacionada com os conteúdos matemáticos relacionados a ele na educação básica, não é surpresa que a maioria também conseguisse relacionar o conteúdo com as opções do ensino básico que demos na questão cinco, os conteúdos da educação básica relacionados pelos participantes foram algoritmo da divisão, divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, o que nos surpreendeu foi que mesmo alguns participantes informando que não o conteúdo não foi explanado dessa maneira, eles conheciam suas relações.

Os resultados da pesquisa de forma geral mostraram que o conteúdo está sendo ensinado relacionado com o ensino dos conteúdos estruturados por ele na educação básica, de acordo com os apontamentos dos estudantes do curso de licenciatura em matemática campus do agreste, os estudantes também apontaram que é relevante o conteúdo ser relacionado com os conteúdos no ensino básico estruturados por ele e maioria deles também informou que se sente mais seguro para lecionar os conteúdos relacionados no ensino básico após cursar a disciplina, o que é um ponto positivo pois esse é o campo de atuação para o qual estão sendo formados.

Outro ponto que a pesquisa nos trouxe foram os apontamentos dos estudantes acerca das aplicações do conteúdo. Os participantes apontaram algumas aplicações como as horas de um relógio analógico, calendário, ano bissexto ou criptografia, algo que pode ser bastante explorado em sala de aula, um dos participantes trouxe um fato importante como resposta, ao trazer essas aplicações para sala de aula, ao contextualizar, é preciso adequar a turma que se está lecionando.

Nesta pesquisa consideramos apenas um aspecto de infinitas possibilidades, nos limitamos aqui a concepção de estudantes tomando como base a disciplina do Ensino Superior Teoria dos Números, porém outras sugestões seriam as relações de outras disciplinas do ensino superior, como por exemplo o cálculo com as disciplinas do ensino básico. Sugerimos também a realização de novas pesquisas que possam acompanhar a concepção de estudantes de outras Universidades no curso de licenciatura em matemática, durante o processo de saída do ensino superior para a prática na escola.

Esse aprofundamento não nos cabe aqui e poderão ser desenvolvidos em outro momento.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números.** São Paulo: Nobel, 1981. 381 p.

ALMEIDA, Marcos André Pereira.et al. Aritmética modular aplicada aos semáforos. **Revista ciências exatas e tecnológicas**, Aracaju, v. 3, n. 1, p. 55-64, out. 2015.

ALMEIDA, Bruno Leandro.et al. O último Teorema de Fermat. **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica.** Universidade estadual de Campinas, p. 1-8, abr. 2014. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/TF1_M1_FM_2014.pdf> Acesso em: 04, jan. 2022.

BERTANI, Januária Araújo. ZIMMERMANN, Erika. Um novo olhar sobre os cursos de formação de professores +*. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, v.20, n.1: 43-62, abr. 2003.

BOYER, B. C. História da matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2)

DAVID, Maria Manuela Martins Soares; MOREIRA, Plinio Cavalcante. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 19, p. 53 – 78, Jan./Jun. 2003.

FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Josiel Almeida; SANTOS, Lúcia S. B. **Dificuldades na aprendizagem em matemática**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Centro Universitário Adventista de São Paulo. São Paulo, p. 41, 2007.

GIL, Antônio Carlos. 1946 – Como elaborar projetos de pesquisa/Antônio Carlos Gil. – 4. ed. – São Paulo: Atlas, 2002.

LOZANO, Abel Rodolfo Garcia; MATTOS, Sérgio Ricardo Pereira de; PUGGIAN, Cleonice. Aritmética modular no ensino fundamental e médio: contribuições de uma pesquisa ensino. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3º, [2010?], Fortaleza: CE, 2012. p. 1-14.

MANRIQUE, Ana Lúcia. Licenciatura em matemática: formação para a docência x formação específica. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.11, n.3, p. 515-534, 2009.

MENDES, L. **Os números do nosso dia a dia e algumas de suas aplicações no ensino básico.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas. Manaus, p. 60. 2015.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS - OBMEP. **Banco de questões 2010**, 2010. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco.htm> Acesso em: 05, Abril 2021.

OLIVEIRA, C. **Congruência modular e aplicações.** Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Núcleo de Formação à Distância, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João Del-Rei. São João Del-Rei, p. 48. 2016.

PIETERZACK, Mauricio. A matemática está onde menos esperamos. **Jornal UFG**, Goiás, 28 de set. de 2017. Disponível em: <https://jornal.ufg.br/n/100642-a-matematica-esta-onde-menos-esperamos>. Acesso em: 20 de abr. 2021.

PONTE, J. P; QUARESMA, M. O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Interacções***, v. 22*, p. 196-216, 2012. Disponível em: <O papel do contexto nas tarefas matemáticas | Interacções (rcaap.pt)>. Acesso em: 21 de abr. 2021.

RESENDE, M. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura.** 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SÁ, Ilydio Pereira de. Tratamento da informação na educação básica: aritmética modular e os códigos de identificação do cotidiano. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. **Anais**. Belo Horizonte: UERJ, 2007. p. 1-17.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números/** José Plínio de Oliveira Santos. – 3 ed. – Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 198 p.: il. (Coleção matemática universitária).

SERRAZINA, Maria de Lurdes Marquês. Conhecimento matemático para ensinar: papel planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista eletrônica de educação**. São Carlos, SP. UFSCar, v. 6, no.1, p. 266-283, maio 2012.