UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO MATEMÁTICA-LICENCIATURA

GABRIELLA FREITAS SILVA

ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR MEIO DA MODELAGEM DE PROBLEMAS DO TIPO PREDADOR-PRESA NA FORMAÇÃO DOCENTE

Caruaru
2021

GABRIELLA FREITAS SILVA

ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR MEIO DA MODELAGEM DE PROBLEMAS DO TIPO PREDADOR-PRESA NA FORMAÇÃO DOCENTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática)

Orientador: Profª. Drª. Veronica Gitirana Gomes Ferreira

Caruaru

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Gabriella Freitas.
Estudo de Equações Diferenciais Por Meio da Modelagem de Problemas do Tipo Predador-Presa na Formação Docente / Gabriella Freitas Silva - 2021.
78p.f.: il.;30 cm.

Orientador(a): Veronica Gitirana Gomes Ferreira
TCC (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Matemática - Licenciatura, 2021.
Inclui referências, apêndices.

1. Orquestração Instrumental. 2. Modelagem. 3. Formação de professores. 4. Equações Diferenciais. I. Ferreira, Veronica Gitirana Gomes II. Título.

370 CDD (22.ed.)

GABRIELLA FREITAS SILVA

ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR MEIO DA MODELAGEM DE PROBLEMAS DO TIPO PREDADOR-PRESA NA FORMAÇÃO DOCENTE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada/o em Matemática.

Aprovada em: ______/______/______.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Veronica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profº. Dr. Marcílio Ferreira dos Santos (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª. Drª. Rosilângela Maria de Lucena Scanoni Couto (Examinadora Externa)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho a minha mãe
por sempre acreditar na minha melhor versão.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiro a Deus que me guiou durante essa jornada e em todos os outros momentos da minha vida.

Agradeço com todo meu coração a minha mãe, Rute, que sonhou junto comigo cada momento da minha jornada, me encorajou nos momentos difíceis e não deixou que eu me abalasse com pequenos empecilhos, me fez forte e projetou toda sua esperança e sonhos em mim. Sonhamos juntas, realizamos juntas e assim estaremos por toda a eternidade.

Agradeço aos meus professores da educação básica, pessoas as quais me inspirei para me tornar a profissional que eu sou hoje. Em especial, Renato, Biu, Verônica e Dayane.

Agradeço aos meus professores do ensino superior, além dos ensinamentos matemáticos, mostraram-me que a educação se faz de forma coletiva, nutriram a esperança de uma jovem professora e cativaram em mim o olhar mais gentil para o cenário educacional. Destaco com carinho Marcílio, Carol, Jaqueline, Jefferson, Cleiton e Lidiane. Além disso, em especial, agradeço à minha orientadora Veronica Gitirana, por aceitar me guiar nessa jornada, pela paciência e ensinamentos, admiro muito sua forma revolucionária de lidar com a Matemática.

Agradeço às pessoas que caminharam junto comigo durante a graduação e me ajudaram e incentivaram de alguma forma: Jonatan, Robson, Igor, Henrique, Carine e Sarah.

Durante a graduação pude viver experiências inesquecíveis, uma delas foi o curso de verão no IMPA onde ganhei 3 irmãs: Marina, Amanda e Leticia, muito obrigada por se fazerem presentes mesmo de tão longe. Admiro muito a garra e inteligência de cada uma, acredito que a Matemática tem muito a ganhar com mentes tão brilhantes.

Obrigada, Joyce e Pedro, por sonharem junto comigo desde o Ensino Médio (e Joyce desde a quarta série). Vocês nunca deixaram com que eu desanimasse mesmo nos momentos mais difíceis, nos fortalecemos e entendemos fielmente o conceito de amizade. Fico feliz em compartilhar sonhos com vocês. Somos inabaláveis.

Agradeço com muito carinho a Laura, Stephany e Daniel por cada ajuda, cada risada e cada partilha. Nunca existiu competição entre nós, todos crescemos juntos e isso foi muito valioso e especial. Espero que o fim desse ciclo não signifique o fim de uma amizade tão pura e verdadeira. Superamos muita coisa juntos, vários perrengues universitários, mas foi em dificuldades que não envolviam a graduação que vocês mais se fizeram presentes. Estarei sempre aqui para aplaudir a conquista de todos vocês.

Obrigada, Marcelo, por dividir a beleza da Matemática e da vida comigo, por nunca me deixar desistir de um sonho que parecia impossível e por segurar minha mão quando precisava. Aprendo sempre algo muito divertido nas nossas discussões sobre teoremas e problemas malucos, sua forma de ver o mundo me inspira.

Agradeço a banca examinadora por se disporem a contribuir com meu trabalho com ensinamentos valiosos.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, mesmo não citadas aqui, contribuíram para a minha formação.

“Deixa eu me apresentar
Que eu acabei de chegar
Depois que me escutar
Você vai lembrar meu nome”
(Anavitória e Rita Lee, 2021).

RESUMO

Compreende-se que de forma recorrente os licenciandos não conseguem relacionar as disciplinas específicas de Matemática com sua atuação como futuros docentes na Educação Básica. Visto isso, essa pesquisa tem como objetivo construir e validar uma Orquestração Instrumental de Formação em torno da modelagem de uma situação do tipo Predador-Presa, por meio de Equações Diferenciais (ED), que possa contribuir com a aprendizagem dos conceitos de ED. Como aporte teórico para construção da OI, fundamentamos o Modelo (TROUCHE, 2005) a partir dos conceitos de situação, esquema (VERGNAUD, 1996, 2002) e gênese instrumental (RABARDEL, 1995). Com a finalidade de atingir nossos objetivos, construímos uma OI para uma oficina intitulada "Modelagem de Problemas do Tipo Predador-Presa na Formação Docente", vivenciada no formato remoto, em que partimos de situações envolvendo o problema do tipo Predador-Presa e a modelagem das equações de Lotka-Volterra, com auxílio de uma planilha como artefato principal. Sua aplicação contou com dois estudantes do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE/CAA que já tinham cursado a disciplina de ED. A coleta de dados foi realizada por meio de formulários disponibilizados para os participantes durante a oficina, bem como a gravação de tela desse momento. A partir da análise dos dados, percebemos que os participantes puderam refletir e realizar suposições sobre o modelo e compreender o que os cálculos significam no contexto real, trazendo significado para o que estava sendo estudado. Além disso, percebemos a importância de diversificar a abordagem dessa disciplina, bem como a necessidade de integrar tecnologias à sala de aula. Essa discussão possibilitou desenvolver uma abordagem que não enfoca a memorização de técnicas e resolução de exercícios, mas em trabalhar com as equações de maneira qualitativa para que se discuta o uso de Matemática na sociedade de forma crítica.

Palavras-chave: Orquestração Instrumental. Modelagem. Formação de professores. Equações Diferenciais.

ABSTRACT

We understand that regular students cannot relate the specific disciplines of Mathematics with their performance as to future teachers in Basic Education. Given this, this research aims to build and validate an Instrumental Orchestration (IO) of Training around the modeling of Predator-Prey situations through Differential Equations (DE), which motivates the undergraduate in Mathematics to learn Differential Equations. As a theoretical contribution to the construction of the IO, we base the Instrumentation Orchestration Model (TROUCHE, 2005) from the concepts of situation, scheme (VERGNAUD, 1996, 2002), and instrumental genesis (RABARDEL,1995). To achieve our goals, we built an IO for a workshop entitled "Predator-Prey Problem Modeling in Teacher Training", experienced in the remote format, where we present situations involving the Predator-Prey problem and the modeling of the Lotka-Volterra equations as possible with the aid of a spreadsheet as the main artifact, its application featured two students of the course Matemática-Licenciatura of UFPE/CAA who had already studied the discipline of DE. The data collection was carried out through forms made available to participants during the workshop and screen recording of that moment. From the data analysis, we noticed that the participants were can to reflect and make assumptions about the model and understand what calculations mean in your context, bringing meaning to what was studied. In addition, the importance of diversifying the approach of this discipline as well as the need to integrate technologies in the classroom. This discussion made it possible to develop a perspective that is not focused only on decorating techniques and solving exercises, but works with equations qualitatively so that the use of Mathematics in society for debated critically.

Keywords: Instrumental Orchestration. Modeling. Teacher training. Differential Equations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de Equações Diferenciais é uma parte de extrema relevância na área de Cálculo Diferencial, visto que possibilita conhecer ferramentas matemáticas importantes na resolução de problemas de várias áreas do conhecimento e encerra o ciclo de disciplinas dessa área. Boyce e Diprima (2015) citam que até as equações mais simples descrevem modelos realmente muito importantes e que esses modelos são enxergados em situações cotidianas clássicas.

Nossa experiência como discente no curso de Matemática-Licenciatura na Universidade Federal de Pernambuco - Centro Acadêmico do Agreste (UFPE/CAA) revela uma dificuldade considerável na disciplina de Equações Diferenciais, chegando a altos índices de reprovação. As dificuldades são apresentadas tanto no uso das diversas técnicas de resolução, quanto na produção de significados e entendimento dos conceitos. Além disso, muitos estudantes indagam o motivo da disciplina estar presente em sua grade curricular e a relevância da mesma em sua formação enquanto futuros docentes da Educação Básica.

Dullius (2011) fala que apesar das mudanças nos tipos de alunos, nas exigências do mercado de trabalho e nas ferramentas disponíveis; as aulas continuam com a mesma essência, é necessário repensar os currículos e levar em conta os avanços tecnológicos. Normalmente o foco das aulas continua na resolução exaustiva de problemas, memorização de métodos e fórmulas e, não no entendimento do conteúdo de forma crítica. Quanto a isso, Biembengut e Hein (2018) afirmam que,

> A Matemática, alicerce de quase todas as áreas do conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis cognitivo e criativo, tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, como meio para fazer emergir essa habilidade em criar, resolver problemas, modelar (BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p.9).

A construção de um modelo matemático é um processo que exige diversas etapas até sua conclusão. Com isso, faz com que se conheça o problema de maneira mais profunda e que busque ferramentas matemáticas para resolvê-lo. Para Ventuan e Almeida (2007, p.879 apud BIEMBENGUT, 2009, p.16) o uso de modelagem matemática potencializa a oportunidade "[...] para os alunos compreenderem os objetos matemáticos, conhecer e relacionar as várias representações destes objetos e utilizá-los para interpretar fatos da realidade". Assim, é possível ir além das resoluções e parar de reproduzir contas e processos analíticos que não possuem significado para o aluno e usar a modelagem para aguçar o senso crítico, como exemplifica Biembengut e Hein (2018).

Os problemas do tipo predador-presa retratam, na maioria das vezes, um modelo entre duas espécies que interagem por um suprimento que é comum a ambas ou outro recurso natural. Um dos principais interesses nesses estudos sobre dinâmica populacional é investigar o número de indivíduos ou a densidade dessa população. Diversos fatores influenciam no arranjo de uma população como os recursos disponíveis e condições do ambiente, história evolutiva, as taxas de mortalidade e natalidade, entre outros. Assim, a dinâmica populacional de determinada espécie terá influências de vários fatores, desde o ambiente onde vivem até membros de outras populações.

Os sistemas ecológicos são complexos e nem sempre pela análise visual de dados é possível descrever, com exatidão e de maneira detalhada, os padrões que ocorrem nele. Com intenção de detalhar caricaturas que façam entender como se dão os processos biológicos envolvidos no sistema, os modelos matemáticos são aplicados a partir da abstração desses biossistemas. Ter um modelo matemático que descreva interações das espécies é dar um caráter formal e rigoroso a esse sistema, buscando caracterizar suas dinâmicas, assim, quanto mais adicionarmos componentes, chamadas de parâmetros, essa descrição se torna mais fiel à realidade. Com esse estudo, poderíamos investigar padrões comportamentais entre espécies ou até verificar se o comportamento de um indivíduo se difere dos demais da mesma espécie.

A equação diferencial pode ser discretizada e se tornar uma sequência, tornando sua compreensão mais acessível para os alunos da Educação Básica. Sendo assim, podemos contornar o fato de não termos conhecimento de derivada e estudar de maneira qualitativa como se dá o fenômeno que é descrito por aquelas equações. O modelo predador-presa caracteriza como uma espécie predadora controla o tamanho populacional de outra espécie caracterizada no contexto como presa. Assim, entender esse modelo possibilita que os discentes compreendam melhor o conceito de equilíbrio ambiental e o porquê existem campanhas de conscientização sobre a caça ou pesca predatória. Com isso, evitamos que outras espécies importantes sócio-economicamente desapareçam da comunidade que depende delas.

Ao cursar as disciplinas específicas de Matemática no curso de Matemática-Licenciatura, é comum os licenciandos indagarem sobre onde serão utilizados os teoremas e demonstrações na nossa vivência profissional. Quando cursei[1] a disciplina de Equações Diferenciais não foi diferente, em meio a tantas técnicas de resoluções e fórmulas, não consegui relacionar muito do que foi visto em sala de aula com a minha atuação como futura professora do ensino básico. Além disso, pude perceber que alguns colegas que tiveram dificuldade de entender os assuntos durante a disciplina era, na maioria das vezes, porque não viam sentido naqueles conjuntos de símbolos e relações matemáticas.

Após cursar a disciplina, entrei no grupo de pesquisa chamado Estudos Avançados de Matemática e Aplicações para Licenciados sobre modelagem de epidemias e, desde então, pude perceber que o uso de modelagem trouxe sentido para o estudo de Equações Diferenciais a partir da formulação de problemas do cotidiano dos alunos, fazendo com que o estudante possa entender e reconhecer a presença da matemática na sociedade e seja uma pessoa crítica que discuta questões políticas, sociais, ambientais nas quais a matemática será um apoio tecnológico. Assim, levantei alguns questionamentos a respeito do ensino dessa disciplina e se o uso de modelagem matemática seria uma boa ferramenta para problematização de alguns de seus tópicos.

A partir disso, o problema de pesquisa foi pensado no intuito de pesquisarmos sobre a possibilidade de dar sentido ao estudo de Equações Diferenciais por meio da modelagem matemática dos problemas do tipo Predador-Presa e fazer uma relação com os conteúdos do ensino básico, buscando uma interdisciplinaridade entre a Matemática e outras ciências, para que o licenciando em matemática possa compreender a importância dessa disciplina em sua grade curricular.

Visto isso, podemos nos questionar como construir e validar uma Orquestração Instrumental de Formação em torno da modelagem de uma situação do tipo Predador-Presa, por meio de Equações Diferenciais (ED), que possa contribuir com a aprendizagem dos conceitos de ED?

A pesquisa está estruturada em oito capítulos, sendo o primeiro essa introdução onde consta os motivos para realizar esse trabalho, bem como a relevância de se abordar esse tema no contexto acadêmico e as possíveis contribuições para a formação docente. No segundo capítulo, apresentamos o objetivo geral e específicos que irão nortear os passos durante o percurso para que possamos atingi-los. No terceiro capítulo, apresentamos uma revisão de algumas pesquisas sobre o uso de modelagem e suas

[1] Em alguns momentos será utilizado o verbo na primeira pessoa do singular por se tratar de considerações pessoais da autora.

contribuições para o ensino de matemática e formação docente. No quarto capítulo apresentamos o modelo Predador-Presa e as equações de Lotka-Volterra, bem como as condições presentes nesse sistema. Em seguida, no quinto capítulo, fundamentamos o Modelo da Orquestração Instrumentação (TROUCHE, 2005) a partir dos conceitos de situação, esquema (VERGNAUD, 1996, 2002) e gênese instrumental (RABARDEL, 1995) que permitem um aporte teórico aos licenciandos na elaboração das aulas utilizando modelagem. No sexto capítulo, é exposto a metodologia do trabalho, apresentando uma visão geral da pesquisa, caracterizando os sujeitos, o processo da coleta de dados e a estruturação da análise deles. No sétimo capítulo, trazemos os resultados da nossa pesquisa e as discussões a respeito da análise dos dados coletados. Por fim, no último capítulo, trazemos nossas considerações finais e relatos que ocorreram durante a pesquisa e perspectivas para pesquisas futuras.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Construir e validar uma Orquestração Instrumental de Formação em torno da modelagem de uma situação do tipo Predador-Presa, por meio de Equações Diferenciais (ED), que possa contribuir com a aprendizagem dos conceitos de ED.

2.2 ESPECÍFICOS

- Caracterizar a gênese instrumental dos Licenciandos em relação à ED para construção de simulações por meio de uma planilha eletrônica;
- Investigar as possíveis dificuldades dos sujeitos com o objeto de conhecimento;
- Analisar a configuração didática e o modo de execução da orquestração de formação a partir da performance didática;
- Trazer contribuições para a possibilidade de vivenciar modelagem, com auxílio da OI, na Educação Básica.

3 A MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo iremos discutir sobre o modelo matemático, como os autores entendem as influências da modelagem matemática no ensino de matemática, principalmente, quando tratamos de Equações Diferenciais e os processos sobre essa metodologia de ensino para sala de aula. Essas discussões servirão como norteadores para o trabalho com a modelagem matemática na sala de aula, mostrando suas potencialidades e limitações.

3.1 O MODELO MATEMÁTICO

O modelo pode ser caracterizado como uma representação de algo, um padrão/ideal a ser alcançado ou um tipo particular dentro de um conjunto. Biembengut e Hein (2018), o comparam com um trabalho em argila, o qual um escultor com material, técnica, inovação e criatividade executa seu trabalho e representa alguma coisa por meio do seu modelo. Em toda nossa história buscamos representar as situações cotidianas naturais e sociais por meio de modelos,

> [...] o modelo é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido, efetuando deduções. (GRANGER, 1969 apud BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p.11).

O objetivo para criação de um modelo pode ser com a finalidade de explicar algum fenômeno, para fins pedagógicos ou até prever o comportamento de algo.

A utilização de modelos permite a compreensão das ideias de uma forma mais ampla, buscando características que contemplem aquele fenômeno de forma completa, atentando-se aos detalhes e buscando evidências que comprovem o que está sendo observado. A Biembengut (2009) comenta que:

> Os modelos são ferramentas que ajudam a pessoa a processar informações e estimular novas idéias e compreensões, prover de uma visão estruturada e global que inclui relações abstratas. Capacitam a observar e refletir sobre fenômenos complexos, e ainda a comunicar as idéias a outras. (BIEMBENGUT, 2009, p.20).

Como Biembengut e Hein (2018) pontuam que no cotidiano é fácil identificar problemas que envolvam matemática e, por sua vez, que envolvem algum modelo matemático também. A matemática envolvida nesses modelos pode variar de elementar, como o cálculo de juros, aos que necessitem de conhecimentos mais aprofundados a respeito do tema, como os modelos tratados neste trabalho. Em ambos os casos, é necessário o mesmo grau de formalidade e detalhes sobre esses modelos, assim, os símbolos e relações procuram traduzir a realidade para um contexto matemático, chamado de “modelo matemático”.

> [...] para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p.12).

> [...] o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas, enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo (BARBOSA, 2004a, p.3)

É importante ressaltar que quando o modelo de algum fenômeno é proposto, ele é proveniente de aproximações, na verdade retratam uma versão simplificada do real, como explicam Biembengut e Hein (2018).

Um modelo pode ser explorado em diversas áreas da Matemática, apesar de facilitar o processo de criação, ter um conhecimento matemático mais avançado, o modelo não está restrito à sofisticação matemática (BIEMBENGUT; HEIN, 2018). Os autores referidos também falam que é por meio da modelagem matemática que a realidade interage com a matemática e o fruto dessa interação é o modelo e, assim, usar do “ferramental” matemático para descrever fenômenos na sociedade. Para Barbosa (2004a), essa interação pode contribuir com a democracia,

> [...] Modelagem pode potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas (BARBOSA, 2004a, p.2).

Conforme Biembengut e Hein (2018) argumentam, a modelação pode ser uma facilitadora do ensino-aprendizagem em qualquer nível escolar, não existe restrições para seu uso, podendo ser explorada de diversas formas e em vários níveis de dificuldades.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

A Modelagem Matemática, vista como um ramo da Matemática Aplicada, ganhou espaço e relevância com maior força a partir da segunda guerra mundial, porém a forma como se concebe a Modelagem não é mais a mesma, principalmente ao que diz respeito ao ensino de matemática (Brandt, 2016).

> O debate sobre modelagem e aplicações na Educação Matemática no cenário internacional ocorre, em especial, na década de 1960, com um movimento chamado "utilitarista", definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade que impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema. (BIEMBENGUT, 2009, p.8).

Biembengut (2009) descreve o termo modelagem matemática como um processo de resolver alguma situação problema através da descrição, formulação e modelagem, além disso também fala que:

> [...] a modelagem pode contribuir não somente para aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática, como também para provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na contínua e necessária produção do conhecimento. (BIEMBENGUT, 2009, p.18).

Machado Júnior (2005) argumenta que o uso de modelagem matemática pode superar a crise no ensino, já que evidencia onde os conteúdos são usados no cotidiano, com isso, sendo capaz de responder a pergunta "Por que tenho que aprender isso?" e construindo o conhecimento de uma forma mais natural e próxima da realidade do aluno. Além disso, "[...] o trabalho de modelagem tem como objetivo principal criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos" (BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p.23) e, assim, promover autonomia dos alunos.

Os precursores dessa alternativa para o ensino de Matemática no Brasil, segundo Brandt (2016), foi um grupo de professores, mais especificamente, Ubiratan

D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi que produziram livros, cursos de especialização, artigos e orientaram trabalhos de conclusão de mestrado e doutorado que tinham temas nessa vertente. Biembengut (2009) cita Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, como referências singulares e pessoas fundamentais para que impulsionasse e consolidasse a modelagem matemática na Educação Matemática, conquistando adeptos por todo Brasil. Assim, pelo trabalho dos referidos pesquisadores, discussões e estudo de como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática ao mesmo tempo, surgiu uma linha de pesquisa em modelagem matemática no ensino brasileiro.

Embora a maioria consiga enxergar os benefícios do uso da modelagem, Machado Júnior (2005), ao citar Biembengut e Hein (2000), destaca questões por parte dos professores sobre do que se trata a modelagem e como tornar essa ferramenta uma metodologia de ensino, o que revela insegurança por parte dos professores ao trabalhar com essa ferramenta.

Dentre os principais aspectos, Barbosa (2004b) destaca três razões citadas pelos professores em não conduzir atividades de Modelagem em sala de aula:

> - falta clareza sobre a operacionalização dessas atividades no contexto escolar, onde, em geral, predomina programas pré-estabelecidos e cujas rotinas já estão estabelecidas;
> - dúvidas sobre os conhecimentos dos professores para conduzir as atividades;
> - não se sabe como os alunos, colegas de trabalho, coordenadores e pais reagirão à proposta (BARBOSA, 2004b, p.5).

Nos cursos de formação de professores, Biembengut (2009) cita que a legislação orienta que a grade curricular deve ter disciplinas que incentivem os discentes da licenciatura terem contato com o contexto sociocultural em que vão atuar, além de compreender a matemática e relacioná-la com outras áreas do conhecimento e, para isso, a modelagem matemática ganha protagonismo.

> Se o processo cognitivo se dá na forma de modelos mentais internos, os modelos externos, em particular os modelos matemáticos, podem contribuir para que os estudantes tenham melhor produção lingüística ao utilizar registros diferentes: verbal, vívido e algébrico" (BIEMBENGUT, 2009, p.20).

De maneira geral, observa-se que os discentes da licenciatura não conseguem fazer conexões entre o que está sendo visto nas disciplinas específicas de matemática com a sua atuação enquanto professor da escola básica, isso acaba desestimulando e acarretando dificuldades nessas disciplinas. Além disso, Biembengut (2009) comenta sobre a maioria dos currículos serem subdivididos em disciplinas que não possuem vínculo entre si, além de possuírem planos rígidos, metodologias de ensino e avaliações que predominam o modelo tradicional. A autora, ainda, intensifica falando que durante essas disciplinas específicas as aulas são totalmente expositivas, as aulas se concentram apenas na transposição do conteúdo, exercícios, técnicas, teoremas e demonstrações sem possuir objetos significativos. Portanto, se faz necessário um currículo que traga e estimule habilidades de pesquisa e investigação, fazendo com que as avaliações estejam alinhadas com as intenções e não apenas reproduzir habilidades mecânicas e de memorização.

Apesar do uso da modelagem contribuir para o entendimento dos conceitos, fórmulas e técnicas é importante entender que esse não deve ser o único foco do trabalho, é imprescindível também a discussão do uso da matemática na sociedade, bem como a ideologia da certeza[2] e o poder formador da matemática, pois caso não tratemos desses temas, estamos contribuindo para uma produção de matemática sem criticidade e reforçando o estereótipo de inquestionável que a matemática carrega. Por isso, Araújo (2009) sustenta uma abordagem de modelagem na educação matemática que não se preocupe, apenas em mostrar exemplo aos estudantes do conteúdo sendo aplicado na sua realidade, mas que também o faça analisar de uma maneira criteriosa a presença da matemática na sociedade.

Fazendo um recorte para o ensino e aprendizagem das Equações Diferenciais, os problemas listados anteriormente se confirmam nas pesquisas quando:

> [...] foram destacadas as seguintes dificuldades de ensino: esse vem acontecendo de modo que o foco é do desenvolvimento de soluções analíticas, obtidas a partir de manipulações algébricas sendo que emergem dificuldades de aprendizagem referentes à matemática básica, aos conceitos de derivada e integral e à interpretação de taxas de variação instantânea; em virtude de um modo em que é privilegiada a solução analítica, sem favorecer dessa forma a compreensão do conceito de equação diferencial, dificultando a aplicação das equações em problemas contextualizados que exigem interpretação [...] (OLIVEIRA; IGLIORI, 2013, p.18 apud IGLIORI; ALMEIDA, 2017, p.258).

---

[2]Borba e Skovsmose (1997), citado por Araújo (2009), definem ideologia da certeza da matemática como uma ideologia que acredita que os argumentos utilizados nela são definitivos em qualquer debate, assim, caracteriza seu uso como linguagem de poder.

Visto essas dificuldades, Oliveira e Igliori (2013) falam que os autores presentes nas pesquisas delas apontam como possibilidade para o ensino de Equações Diferenciais o estudo focado na parte qualitativa e que mantenha o equilíbrio entre abordagem analítica, numérica e gráfica. As autoras ainda ressaltam que a Modelagem Matemática associada a ferramentas computacionais apresenta resultados positivos.

Assim, o uso de modelagem pode contribuir para que os futuros professores façam conexões entre as disciplinas específicas da matemática com sua formação e identifiquem a importância dessas matérias de estarem presentes no currículo do curso, além de potencializar que o discente leve a modelação para sua atuação profissional no ensino básico, pois ter contato com essa metodologia na formação inicial é primordial.

3.3 CAMINHOS PARA O USO DE MODELAGEM NA SALA DE AULA

Para se trabalhar com modelagem matemática, é necessário levar em conta alguns fatores e fazer as adaptações necessárias, além disso, traçar objetivos que norteiam a aplicação para organização da prática docente:

> - aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;
> - enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;
> - despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;
> - melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
> - desenvolver a habilidade para resolver problemas; e
> - estimular a criatividade (BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p.18).

Biembengut e Hein (2018) confirmam isso quando dizem que é necessário considerar o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível para realizar esse trabalho, se será necessário tempo extraclasse, o programa a ser cumprido, o nível de confiança do professor que irá trabalhar essa metodologia e o apoio da comunidade escolar para realizar essa mudança. Além de se pensar como será a avaliação do processo e discussões posteriores, os recursos necessários para se aplicar a metodologia e se os alunos dispõem dos mesmos.

Todos esses fatores influenciam na tomada de decisão em usar ou não modelagem com os alunos, por isso, é importante que os discentes em formação tenham contato com a modelagem matemática desde a graduação. Isso irá conceder aos futuros professores uma maior segurança para trabalhar com os seus alunos e permitir uma abordagem crítica e interdisciplinar da matemática.

4 O MODELO PREDADOR-PRESA

Vamos abordar neste capítulo o modelo que será estudado no presente trabalho que ficou conhecido como Predador-Presa, mas especificamente as equações de Lotka-Volterra, são equações não-lineares de primeira ordem usadas para descrever dinâmicas nos sistemas biológicos. Para esse trabalho, concentramo-nos no modelo mais simples no qual as interações entre duas ou mais espécies ocorrem em um mesmo meio, porém já nos fornece boas condições sobre a relação de predação.

Existem diversas formas de interações entre as espécies, classificadas pela ecologia em duas categorias: interação harmônica e interação desarmônica. Na interação harmônica nenhuma das espécies fica em desvantagem, ou ambas se beneficiam ou uma é beneficiada e a outra é neutra. Já nas interações desarmônicas pelo menos uma das espécies têm algum prejuízo. A Tabela 1 descreve os principais tipos de interações entre espécies:

Tabela 1 – Tipos de interações entre espécies

Tipos	Espécie A	Espécie B	Descrição
Competição	-	-	uma população inibindo a outra.
Predação e Parasitismo	+	-	a população A (predador/presa) explora membros da população B (presa/hospedeiro).
Neutralismo	0	0	nenhuma população afeta a outra.
Mutualismo	+	+	interação favorável a ambas as espécies.
Comensalismo	+	0	a população A (comensal) beneficia-se ao passo que a população B (hospedeiro) não é afetada.
Amensalismo	-	0	a população A é inibida, porém a população B não é afetada.

Fonte: elaborado pela autora.

Como pode ser observado, exemplos de interações harmônicas são: mutualismo, comensalismo, onde há espécies que são beneficiadas com a interação, na primeira a relação é obrigatória para que haja sobrevivência da espécie, e neutralismo onde ambas as populações são neutras, sem haver benefícios ou prejuízos.

Para as relações desarmônicas, temos a competição que pode acontecer tanto entre indivíduos da mesma espécie (competição por território, mesma fonte de alimentos etc.) como também entre espécies diferentes quando dependem de fatores ambientais em comum. Além do parasitismo e predatismo, no primeiro caso uma espécie se instala na outra e extrai nutrientes para se desenvolver, já no predatismo o predador se alimenta da presa. Essa última interação é a que será levada em conta para estudarmos o modelo.

Modelos que descrevem essas interações têm como objetivo investigar a dinâmica populacional das espécies em questão, podendo ser aliados para controlar pragas ou prever desequilíbrios, o que é fundamental para combater a extinção de alguma espécie. Esses modelos são aplicados a partir de uma abstração desses ecossistemas, para isso acontecer, no modelo mais simples, consideramos algumas situações.

Sendo $x = x(t)$ uma função que dá o número de presas e $y = y(t)$ uma função que fornece o número de predadores, ambas no decorrer do tempo, a primeira situação trata-se de quando temos a extinção dos predadores, então a população de presas crescerá com uma taxa proporcional a população atual e pode ser descrita por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t)$$

com α sendo uma constante positiva, a população de presa aumentará pois é a única espécie no meio.

Outro caso é quando há extinção da população de presas, para esse modelo, se trata da única fonte de alimentos dos predadores, por consequência, a população de predadores tende a se extinguir também:

$$\frac{dy(t)}{dt} =- \gamma y(t)$$

com γ sendo uma constante positiva, assim, a população de predadores tende a diminuir por falta de alimento.

Quando ambas as espécies existem, temos que o número de encontros entre predadores e presas é proporcional ao produto das populações xy. Unindo com os casos anteriores, teremos o sistema de equações de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} =- \gamma y(t) + \theta x(t)y(t)$$

com b, θ constantes positivas. Portanto, pela equação, podemos perceber que a taxa de variação de presas é dada pelo seu crescimento $\alpha x(t)$ menos a sua captura pelos predadores que é representada na equação por $bx(t)y(t)$ que é a taxa de predação.

De forma análoga, a taxa de variação de predadores é dada pelo crescimento da população de predadores representada por $\theta x(t)y(t)$ menos o decréscimo causado pela ausência de presas $- \gamma y(y)$.

Usando a notação de Lagrange para derivadas, teremos as equações de Lotka-Volterra na forma:

$$x' = ax - bxy$$

$$y' =- \gamma y + \theta xy$$

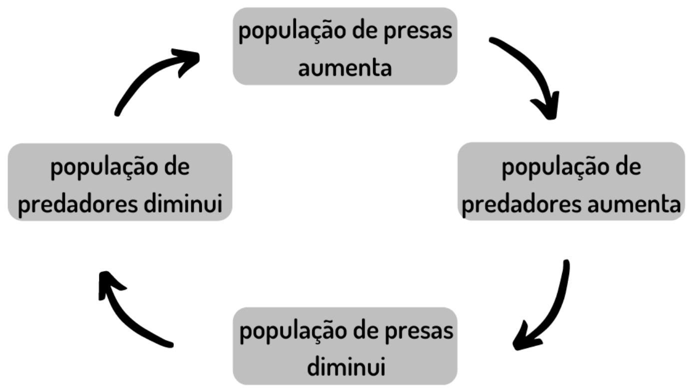
Desde que o número de predadores e presas seja diferente de zero, podemos visualizar essas equações de outra maneira, dividindo a taxa de variação de presas pelo número de presas e a taxa de variação de predadores pelo número de predadores. Logo, teremos o sistema:

$$\frac{x'}{x} = a - by$$

$$\frac{y'}{y} =- \gamma + \theta x$$

Para essas equações, como era esperado, podemos notar que a queda no número de presas decorre do fato da população de predadores aumentar. Além disso a taxa de reprodução das presas é algum a constante. Por outro lado, o aumento na quantidade de predadores é causado pelo crescimento na população de presas, pois uma vez alimentadas a condição de reprodução é melhor.

Figura 1 - Relação entre predador e presa



Fonte: elaborado pela autora.

Outros aspectos a serem analisados no sistema de Lotka-Volterra são os pontos de equilíbrio. Caracterizamos um ponto de equilíbrio quando não há variação nas taxas de presas e predadores, ou seja, a derivada será igual a zero:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow ax(t) - bx(t)y(t) = 0$$

Segue-se daí que ou $x = 0$ ou $y = \frac{\alpha}{b}$. Para a segunda equação:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\gamma y(t) + \theta x(t)y(t) = 0$$

E, portanto, $y = 0$ ou $y = \frac{\gamma}{\theta}$. Conseguimos assim dois pontos de equilíbrio $P(0,0)$ e $Q(\frac{\gamma}{\theta}, \frac{\alpha}{b})$. O ponto P é trivial onde não há variações pois não existem presas ou predadores, porém o ponto Q é o mais interessante para analisarmos o comportamento da solução nas suas proximidades já que possui uma população positiva. A fim de entender como as soluções se comportam iremos linearizar o sistema no ponto B.

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J(x', y') = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Obtendo as derivadas parciais, teremos:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \alpha - by$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y} =- bx$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \theta y$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} =- \gamma + \theta x$$

Assim, teremos a matriz Jacobiana referente ao sistema como:

$$J(x', y') = \begin{bmatrix} \alpha - by & - bx \\ \theta y & - \gamma + \theta x \end{bmatrix}$$

Substituindo o ponto de equilíbrio $Q(\frac{\gamma}{\theta}, \frac{\alpha}{b})$ na matriz Jacobiana teremos:

$$J(x', y') = \begin{bmatrix} \alpha - b\left(\frac{\alpha}{b}\right) & - b\left(\frac{\gamma}{\theta}\right) \\ \theta\left(\frac{\alpha}{b}\right) & - \gamma + \theta\left(\frac{\gamma}{\theta}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & - \frac{b\gamma}{\theta} \\ \frac{\theta\alpha}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Para o cálculo dos autovalores, usaremos $det\ (J - \lambda I) = 0$, onde I é a matriz identidade:

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & - \frac{b}{\theta} \\ \frac{\theta\alpha}{b} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \lambda & - \frac{b\gamma}{\theta} \\ \frac{\theta\alpha}{b} & - \lambda \end{bmatrix}$$

$$det\ (J - \lambda I) = 0$$

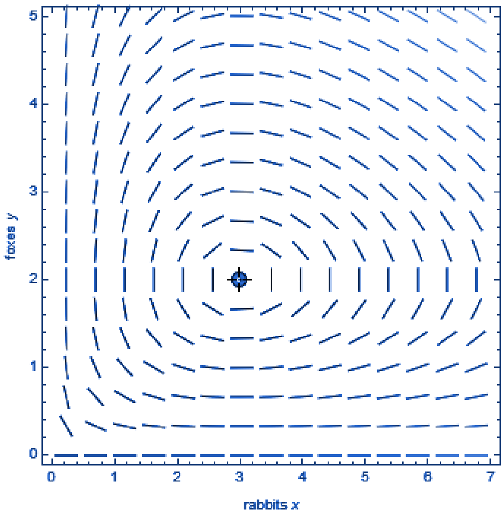
$$\lambda^2 + \gamma\alpha = 0$$

$$\lambda^2 = - \gamma\alpha$$

$$\lambda = \pm \sqrt{- \gamma\alpha}$$

Obtivemos dois autovalores complexos conjugados, assim o ponto é classificado como ponto de centro. Portanto, as curvas das soluções são curvas fechadas com centro no ponto de equilíbrio como é mostrado a seguir:

Figura 2 - Plano de Fases das equações: $\frac{dx}{dt} = x - 0.5xy$ e $\frac{dy}{dt} =- 0.75y + 0.25xy$ que relacionam coelhos e raposas



Fonte: elaborado pela autora com o *software Wolfram Alpha*.

Vimos que apesar de ser o modelo mais simples para interação de espécies do tipo predatismo, o sistema de equações de Lotka-Volterra permite uma abordagem para a disciplina de Equações Diferenciais que traga contribuições no estudo de ecossistemas. Com isso, aproximar a disciplina com assuntos que podem ser percebidos na realidade do licenciando, além disso, vincula o assunto com temas que aparecem de forma mais simples na Educação Básica, o que pode motivar o estudo da disciplina.

Os métodos para se trabalhar modelagem matemática na sala de aula de forma que contribuirá para o processo de aprendizagem dos alunos podem ter alicerce no Modelo de Orquestração Instrumental que iremos explanar no próximo capítulo, pois ele foi pensado na intenção de integrar tecnologias à sala de aula fazendo com que os artefatos disponíveis contribuam efetivamente na forma que os sujeitos irão resolver as situações propostas, organizando a prática docente e considerando todos esses fatores citados no capítulo 3 conforme Biembengut e Hein (2018) para uso de modelagem.

5 O MODELO DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

O Modelo de Orquestração Instrumental foi desenvolvido para auxiliar docentes sobre o uso de tecnologias em sala de aula, em especial no ensino de matemática, além de ter como proposta a integração de recursos tecnológicos no ambiente educacional e não apenas sua inserção. Ainda, ao incorporar a tecnologia em sua atividade docente, os "[...] professores em formação ou em serviço preferem focar no ensino da tecnologia em vez do uso dessa como instrumento para aprender e ensinar matemática." (LUCENA, 2018, p.27), por isso é necessário pensar como esses recursos contribuem (ou não) para a regência dos professores, valorizando suas possibilidades e limitações.

A Orquestração Instrumental (OI) é uma metáfora da sala de aula em comparação com uma orquestra, desenvolvida por Trouche (2005). Nesta, o professor é visto como maestro, os alunos são os músicos, a utilização das tecnologias são os instrumentos musicais e as situações de ensino o repertório musical.

Para compreender a OI, nas seções seguintes, teremos que conceituar Situação e Esquema (VERGNAUD, 1996) e Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), diferenciando instrumentação de instrumentalização que orienta o processo de Gênese Instrumental ao integrar tecnologias na sala de aula. Com isso, entendemos que a OI irá subsidiar o professor que desejar fazer uso de modelagem para suas aulas, principalmente no ensino de Equações Diferenciais, já que constrói toda uma estrutura pensando nos artefatos, sujeitos, situações e configurações visando alcançar os objetivos de ensino propostos.

5.1 SITUAÇÃO E ESQUEMA

Ao pensar na elaboração de uma OI, é de extrema importância definirmos uma situação de ensino, a partir disso será pensado a escolha dos artefatos e irá emergir uma relação entre artefato e indivíduo que busca resolver a situação proposta. O indivíduo, ao se deparar com uma situação mobiliza suas organizações mentais a fim de resolvê-la, o que é chamado de esquema.

Em contrapartida, um esquema não se limita apenas a uma estratégia de resolução, Vergnaud conceitua como "[...] uma totalidade dinâmica funcional, uma organização estável da atividade para uma classe de situações, e como tal, é uma unidade quase indivisível" (VERGNAUD, 2002, p.2).

Apesar de ser indivisível, não nos limita a estudar as suas componentes. Vergnaud (2002) organiza em quatro componentes, a primeira são os objetivos e os subobjetivos colocados pelo próprio aluno e as antecipações que sinalizam as etapas da atividade, essa componente é intencional. A segunda são as regras de ação que dão continuidade às ações do sujeito a partir da coleta de informação e de controle, sendo componente gerador. Já a terceira são os invariantes operatórios, componente epistêmico, ou seja, os conceitos e os teoremas (em ato) que possibilita selecionar as informações e escolher como tratá-las. Por fim, as possibilidades de inferência que são várias em toda atividade, mesmo que ela seja familiar.

Lucena (2018) traz as explicações de Vergnaud sobre esses conceitos:

> Para Vergnaud (1996), os teoremas em ação são proposições ou afirmações, conhecimentos operatórios dos esquemas, considerados como verdadeiros sobre a situação pelo sujeito, mas que podem ser verdadeiros ou falsos quando analisados do ponto de vista da área do conhecimento (como a matemática) e consistem no conhecimento matemático (ou do conhecimento em jogo) explorado durante a experiência. Já os conceitos em ação são objetos, predicados, ou categorias de pensamento tidos pelo sujeito como pertinentes, relevantes. Por não serem afirmações, proposições não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas. Os conceitos em ação são necessários ao processo de elaboração de proposições – teoremas em ação. Os conceitos em ação podem corresponder ou não aos conceitos matemáticos, mas a não correspondência não os fazem verdadeiros ou falsos: o teste de veracidade só existe em afirmações (LUCENA, 2018, p.37).

É importante discutir sobre esses conceitos pois a relação entre sujeito e artefato, instigada pela situação a ser resolvida, mobiliza os esquemas existentes no seu repertório ou até mesmo desenvolvidos baseado em situações semelhantes e permite ao pesquisador entender o processo de gênese instrumental do sujeito, como argumenta Lucena (2018).

O modo como Vergnaud (1996) conceitua situação concorda com a definição vinda da psicologia, esse conceito remete a duas ideias:

> 1 – a ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceptual, e as variáveis de situação são um meio de gerar de forma sistemática o conjunto das classes possíveis; 2 – a ideia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações susceptíveis de dar sentido

> aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1996, p. 171 apud LUCENA, 2018, p. 35).

Vergnaud (1996 apud Lucena, 2018) ressalta a importância de confrontar o indivíduo com diversas situações. Assim, a experiência de mobilizar estratégias de resolução das situações terá relevância na compreensão dos conceitos que as envolvem e, portanto, auxilia a lidar com situações inéditas. Quando fazemos um recorte para o ensino, a situação pode ser entendida como uma situação-problema, fundamental para a organização da OI já que visa a sua exploração mediante conteúdos abordados em aula.

Os esquemas que são mobilizados para a resolução podem se basear em conhecimentos prévios ou solicitar novos, já que o repertório do indivíduo é baseado em experiências. É fundamental garantir que o indivíduo tenha conhecimentos necessários para conseguir desenvolver estratégias de resolução da situação a partir de comportamentos automatizados, ou seja, utilizando esquemas já existentes ou testando novos quando se depararem com novas situações, ou ainda compor vários tipos de esquemas e se permitir explorá-los.

Vergnaud ainda comenta sobre o caráter flexível que o esquema assume, já que sua organização pode variar dependendo do sujeito, dos artefatos disponíveis, da exploração do artefato pelo sujeito, assim, podemos entender esquemas de uma forma subjetiva e que se adaptam às situações. Ao se adaptar ocorrem as inferências que denotam as aprendizagens. "O esquema não é nem um estereótipo, nem um automatismo, já que ele é o instrumento essencial da adaptação do sujeito às situações que ele encontra, mais ou menos familiares, mais ou menos novas" (VERGNAUD, 2002, p.3)"

Ao ser exposto a uma situação, quando o sujeito cria conexões entre os invariantes operatórios e o cálculo sobre objetivos, antecipações e regras temos a possibilidade de inferências, como argumenta Lucena (2018). Isso significa que o sujeito articula proposições já conhecidas e consegue fazer afirmações verdadeiras sobre novas proposições justificando as escolhas dos esquemas e suas ações.

Lucena (2018) também comenta sobre a dificuldade de investigar os esquemas, visto que nem sempre o sujeito os deixa visíveis. Para conseguir revelar a linha de pensamento dos sujeitos, seus esquemas, sobre uma situação é necessário confrontá-lo sobre suas ações.

Outro fato relevante a ser mencionado é que os esquemas podem não cumprir seus objetivos, mas isso não significa que eles não são eficazes já que o fracasso permite ao sujeito explorar outros esquemas ou modificá-lo e, assim, aprender com o processo. Assim, Vergnaud diferencia algoritmo de esquema: “Um algoritmo é um esquema, mas nem todo esquema é um algoritmo, pois nem todo esquema é efetivo” (LUCENA, 2018, p.37). O algoritmo garante que uma situação será resolvida, um exemplo de algoritmo é quando escrevemos um código de programação, compilamos e ele resolve a situação proposta, já as diversas tentativas anteriores antes de cumprir sua finalidade são apenas esquemas.

5.2 ENTENDENDO A GÊNESE INSTRUMENTAL

Ao ser confrontado com uma situação, o sujeito, a partir de suas vivências e experiências, desenvolve esquemas, podendo também fazer uso dos já existentes, para lidar com a situação. Quando esses esquemas ou parte deles são identificados pelo pesquisador torna-se possível inferir sobre o processo de gênese instrumental do indivíduo. Antes de conceituar a gênese instrumental, vamos discutir sobre as definições de artefato e instrumento, com isso entender os processos de instrumentação e instrumentalização. Esses conceitos foram introduzidos por Pierre Rabardel (1995) no quadro teórico sobre Abordagem Instrumental.

A caracterização de artefato por Rabardel (1995) é motivada pelo processo da utilização e não centrada especificamente no objeto, o autor entende que o artefato é um objeto a ser explorado pelo sujeito e assim ter conhecimento de seu funcionamento, possibilidades e limitações. Além disso, Rabardel (1995) comenta que os artefatos são passíveis de compartilhamento, seu significado vem junto à uma prática social.

> Cada artefato foi projetado para produzir uma classe de efeitos e sua implementação no trabalho, nas condições fornecidas pelos projetistas, possibilita a atualização desses efeitos. Em outras palavras, a cada artefato correspondem possibilidades de transformações objetos da atividade, que foram antecipados, deliberadamente procurados e que são provavelmente atualizados em uso. Nesse sentido, o artefato (seja material ou não) concretiza uma solução para um problema ou para uma classe de problemas socialmente colocados (RABARDEL, 1995, p. 49, tradução nossa).

Sendo assim, o artefato é um objeto de criação humana para um funcionamento determinado previamente, mas que pode mudar ao decorrer das necessidades e situações. “Um indivíduo que faça uso desse artefato imprime sobre ele seus esquemas mentais de uso, transformando-o em um instrumento seu” (LUCENA, 2018, p. 39).

O instrumento deve ser compreendido como “uma entidade mista formada por um artefato e um esquema” (RABARDEL, 1995, p. 47, tradução nossa), é fruto das vivências do sujeito, trazendo uma ideia subjetiva para seu conceito já que a maneira como o artefato será utilizado pode concordar ou não com a finalidade que ele foi criado. Portanto, o termo instrumento será utilizado quando nos referimos ao artefato em situação, em condição de uso.

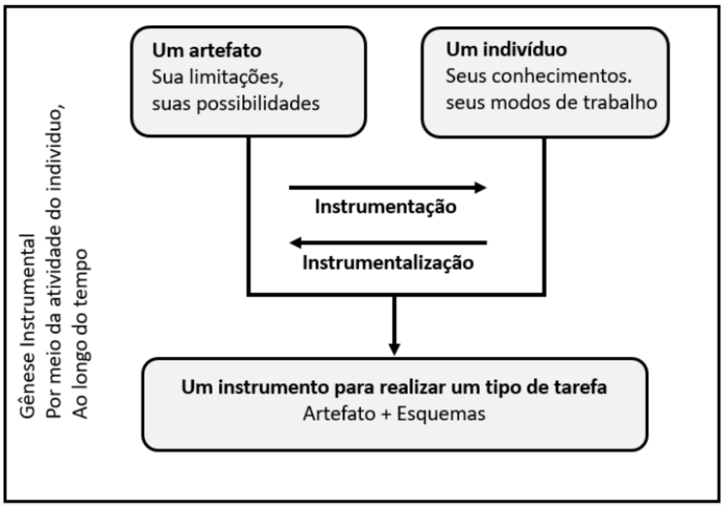
Conforme Rabardel (1995), a gênese instrumental é a transposição de artefato para instrumento, ou seja, o conjunto de esquemas por parte do sujeito que permite manusear o artefato, conhecer suas potencialidades e limitações e, o integra a sua prática, assim, passando a ser um instrumento para ele.

A disponibilidade de artefatos, por parte do professor, durante a exposição de uma situação-problema é fundamental para guiar o processo de gênese instrumental do aluno, pois Lucena (2018) comenta que resolver situações com ajuda do artefato permite que os alunos identifiquem como utilizá-lo e, enfim, cheguem na resolução do problema.

Duas definições vêm à tona a partir do processo de gênese instrumental: instrumentação e instrumentalização. A instrumentalização consiste na ação do sujeito em relação ao artefato, como o sujeito irá se adaptar às funcionalidades, como irá enriquecer as propriedades dos artefatos e como o sujeito irá transformar esse artefato. Já a instrumentação é a ação do artefato no sujeito, onde identificamos a evolução dos padrões de uso e como as funcionalidades do artefato influenciarão a tomada de decisão do sujeito, conforme discute Rabardel (1995).

A Figura 3 apresenta como o artefato se relaciona com o indivíduo durante o processo de gênese instrumental, ou seja, o resultado da interação do indivíduo com o artefato ao longo do tempo e como as características deles influem no processo de instrumentalização e instrumentação:

Figura 3 - Os dois componentes da gênese instrumental



Fonte: Trouche (2005 tradução Lucena, 2018, p.41)

Durante a aula, ambos os processos, instrumentalização e instrumentação, podem acontecer resultando na gênese instrumental do estudante. Para Lucena (2018), os professores precisam dominar bem o conhecimento específico presente na situação apresentada, além de ter um bom conhecimento quanto às tecnologias. Só assim o docente poderá auxiliar o aluno durante o procedimento, fazendo uma mediação que de fato favoreça a gênese instrumental dos envolvidos.

5.3 CONSTRUÇÃO DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

A orquestração instrumental pode ser entendida como a gestão da prática docente. A partir de uma situação proposta, pode-se planejar a: gestão dos artefatos, gestão do tempo; o espaço de atuação do aluno e do professor; e a gestão dos papéis e funções desses sujeitos. É composta das etapas de planejamento: configuração didática e modo de execução, descritas por Trouche (2005). Posteriormente, Drijvers, Doorman, Boon, Reed e Gravmeijer (2010) sentiram a necessidade de contemplar uma etapa de implementação: a performance didática, onde comenta sobre os registros de imprevistos durante a aplicação da OI e faz uma crítica a metáfora da orquestra, dizendo que a sala de aula se parece mais com uma banda de jazz (cheia de improvisos), por isso sente a necessidade de contemplá-los em sua teoria. Com isso, o professor tem condições de guiar o aluno no seu processo de gênese instrumental e auxiliar na utilização dos artefatos disponíveis.

Trouche (2005) define orquestração instrumental:

> Uma orquestração instrumental é um arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) e de um ambiente com a finalidade de implementar uma dada situação e, de forma mais geral, para guiar os alunos na sua gênese instrumental e na evolução e equilíbrio de seus sistemas de instrumentos (TROUCHE, 2005, p. 126, tradução nossa).

Para se construir uma OI, é importante levar em consideração o que será necessário para a fluidez do momento de aplicação, ou seja, o professor precisa deixar definido a situação-problema que será trabalhada, os objetivos, pensar sobre os sujeitos e a partir disso, escolher os artefatos (analisando suas limitações e potencialidades), o tempo de duração, a organização dos sujeitos e do ambiente, bem como a gestão do tempo. Fazendo isso, o professor estará na fase da configuração didática que pode ser definida como "[...] um arranjo de artefatos no ambiente, ou, em outras palavras, uma configuração do ambiente de ensino e dos artefatos envolvidos nele" (DRIJVERS et al., 2010, p. 215, tradução nossa).

Obtida uma configuração didática, as possibilidades de vivenciá-la compõem o modo de execução.

> [...] é a forma como o professor decide explorar uma configuração didática para o benefício de suas intenções didáticas. Isso inclui decisões sobre a forma como uma tarefa é apresentada e trabalhada, sobre as possíveis funções dos artefatos em jogo, e sobre os esquemas e técnicas a serem desenvolvidos e estabelecidos pelos alunos (DRIJVERS et al., 2010, p. 215, tradução nossa).

Podemos dizer que essa é a parte mais flexível da OI, pois pode ser alterada durante a vivência, contrariando o que foi planejado, porém isso será constatado posteriormente na performance didática. "Tal aspecto passa a ser evidenciado quando a configuração didática começa a ser executada e diferentes modos de execução surgem e se diferenciam do proposto pelo professor inicialmente" (LUCENA, 2018, p. 48).

Drijvers et al. (2010) comentam que sentiram a necessidade de acrescentar a performance didática como um terceiro componente, visto que a configuração didática tem um forte caráter preparatório e contemplava, na maioria das vezes, a parte de planejamento. Após a OI ser aplicada, a performance didática é uma análise das decisões tomadas pelos professores para lidarem com eventos que não estavam no planejamento, chamadas de decisões *ad hoc*, e com isso entender se essas decisões foram relevantes e trouxeram alguma contribuição para o sucesso da OI, Drijvers et al. (2010). “Os eventos imprevistos podem ser de diferentes naturezas: técnica, relativa ao artefato, ao conhecimento específico em jogo, à gestão da sala de aula, etc” (MORAIS; AZEVEDO, 2021, s/p).

Sendo assim, a performance didática fornece um aporte ao professor para verificar o processo de gênese instrumental dos seus alunos e como eles utilizaram dos artefatos para resolverem as situações, quais esquemas mobilizaram e quais conhecimentos foram necessários para tal. Uma reflexão sobre suas práticas é de extrema importância, pois permite que o professor avalie a eficácia da aplicação de sua orquestração e, mediante possíveis falhas, remodelar a organização da sua prática a fim de aperfeiçoar seu planejamento.

6 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos a metodologia utilizada em nossa pesquisa, trazendo os procedimentos metodológicos, as atividades que serão desenvolvidas, o contexto, os participantes e o processo de construção da Orquestração Instrumental (OI). A organização dessa metodologia foi pensada com o intuito de responder a nossa problemática: Como construir e validar uma Orquestração Instrumental de Formação em torno da modelagem de uma situação do tipo Predador-Presa, por meio de Equações Diferenciais (ED), que possa contribuir com a aprendizagem dos conceitos de ED?

Além disso, buscamos atender aos objetivos:

- Caracterizar a gênese instrumental dos Licenciandos em relação à ED para construção de simulações por meio de uma planilha eletrônica;
- Investigar as possíveis dificuldades dos sujeitos com o objeto de conhecimento;
- Analisar a configuração didática e o modo de execução da orquestração de formação a partir da performance didática;
- Trazer contribuições para a possibilidade de vivenciar modelagem, com auxílio da OI, na Educação Básica.

Para tanto, planejamos a execução da oficina na qual serão apresentadas situações-problema sobre o tema em questão e elaboramos os formulários para coleta dos dados. Após isso, elaboramos e colocamos em prática a OI, executada em formato de oficina com dois alunos do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE/CAA, sujeitos da pesquisa que já cursaram a disciplina de Equações Diferenciais. Por fim, a última fase consiste na análise dos resultados.

A coleta de dados foi realizada por meio de formulários disponibilizados para os participantes durante a oficina intitulada “Modelagem de Problemas do Tipo Predador-Presa na Formação Docente”, bem como a gravação de tela desse momento. No formulário, apenas se solicitava que eles enviassem uma foto da resolução deles das tarefas.

6.1 COMPONENTES DAS ORQUESTRAÇÕES INSTRUMENTAIS

Ao pensar na construção de uma OI, temos que arranjar os sujeitos e os artefatos que estarão à disposição de forma que ambos contribuam para a execução da atividade.

As duas situações pensadas para o momento da oficina tinham como finalidade trabalhar conceitos vivenciados na disciplina de ED por meio da modelagem das equações de Lotka-Volterra que caracterizam o predatismo, capacitando-os a relacioná-los com a futura atuação na Educação Básica de forma interdisciplinar.

Para isso, propomos essa abordagem com uma planilha que projeta dados e gráficos de um intervalo de tempo de 0 (zero) a 600 (seiscentos) sobre o modelo em questão no *Google* Planilhas como artefato principal. A fim de tornar mais simples o entendimento, as presas foram consideradas como coelhos e os predadores como lobos.

O quadro a seguir apresenta o roteiro que foi seguido durante a oficina com as subsituações executadas pelos participantes e as ações da ministrante (pesquisadora):

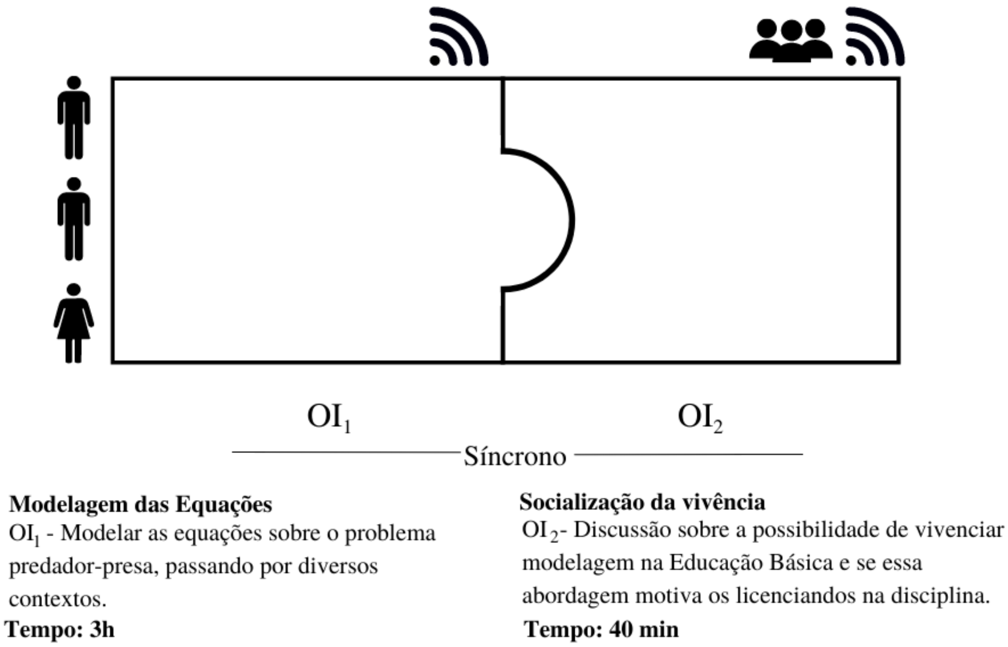
Quadro 1 - Roteiro da oficina.

MOMENTOS DA OFICINA	**AÇÕES DA MINISTRANTE**
1	Solicitar lápis e papel aos participantes; pedir que abram em outra guia do navegador o site do Google Planilhas; explicar de forma breve como será a vivência da oficina.
2	Caso não possuam familiaridade com o site Google Planilhas, explicar como fazer *upload* do arquivo e as funcionalidades necessárias para realizarem a atividade.
3	Explicar os principais tipos de interações entre espécies; como os modelos matemáticos podem ajudar a entender a dinâmica populacional descrevendo padrões comportamentais e compreender o conceito de equilíbrio ambiental.
4	Discutir sobre os parâmetros utilizados nesse modelo.
5	<u>T1</u>: Solicitar aos participantes que variem alguns dados na planilha e identifiquem padrões comportamentais nos gráficos.
6	<u>T2</u>: Utilizando a planilha, verificar o que acontece com os dados quando os predadores são extintos. Descrever o modelo que representa o comportamento da população de presas.
7	<u>T3</u>: Utilizando a planilha, alterar dados para verificar o que acontece quando as presas são extintas. Descrever o modelo que representa o comportamento da população de predadores.
8	<u>T4</u>: Com os dados disponíveis na planilha e baseado nos modelos encontrados nas tarefas anteriores, encontrar o modelo que descreva quando ambas as populações estão existindo.
9	Manusear dados na planilha e mostrar que para alguns casos a variação de coelhos e lobos com o tempo se estabilizam.
10	<u>T5</u>: A partir das equações encontradas na tarefa anterior, encontrar como os parâmetros se relacionam quando não há variação de coelhos e lobos.
11	<u>T6</u>: A partir dos parâmetros da tabela dos participantes, calcular qual a quantidade de coelhos e de lobos que equilibram o sistema.
12	Explicar sobre outras situações mais avançadas que podem ser trabalhadas com as equações do modelo Predador-Presa como: linearização e o comportamento gráfico das soluções no plano de fases.
13	Abrir a discussão para a possibilidade de vivenciar esse assunto na sala de aula da Educação Básica e discutir possíveis adaptações para isso.
14	Solicitar que os participantes registrem suas respostas por fotos e compartilhem com a pesquisadora através de um formulário, socializem sobre as experiências. A pesquisadora encerrará a atividade.

Fonte: elaborado pela autora.

Com isso, nossa proposta de intervenção ocorreu a partir de uma sequência de duas Orquestrações Instrumentais On-line (OI_1 e OI_2) como mostra o esquema geral abaixo:

Figura 4 - Esquema de configuração didática



Fonte: elaborado pela autora.

A Modelagem das Equações (OI_1) e a Socialização da vivência (OI_2) são orquestrações sequenciadas imediatas que foram vivenciadas no formato síncrono. A primeira é uma orquestração cooperativa onde os participantes realizam as subsituações (T1, T2, T3, T4, T5 e T6), já na segunda temos uma orquestração colaborativa em que socializamos experiências com a disciplina de ED e possibilidades para vivenciar o modelo predador-presa na Educação Básica.

6.2 CRIAÇÃO DAS ORQUESTRAÇÕES

Nesta seção iremos discutir sobre o processo de criação das OI_1 e OI_2 para oficina, acreditamos que essas orquestrações pensadas para trabalhar Modelagem Matemática com problemas do tipo predador-presa podem servir de exemplo para construção de outras orquestrações. Além disso, é importante para a pesquisa a discussão de como e o porquê os elementos foram pensados nesse formato abordado.

Para abordar essa temática, a escolha do público-alvo foi de extrema relevância, visto que as situações precisavam ser pensadas a partir de algumas características dos participantes. Planejar uma aula, nesse caso uma orquestração, para um público totalmente desconhecido é uma atividade bem complexa que demandaria mais tempo, inclusive. Por isso, decidimos que os participantes teriam que já ter cursado a disciplina de Equações Diferenciais. Com isso, conseguiríamos abordar as situações fazendo uso de algumas nomenclaturas, conceitos e tarefas as quais eles provavelmente tivessem alguma familiaridade, sem a necessidade de abordar o conteúdo desde o início.

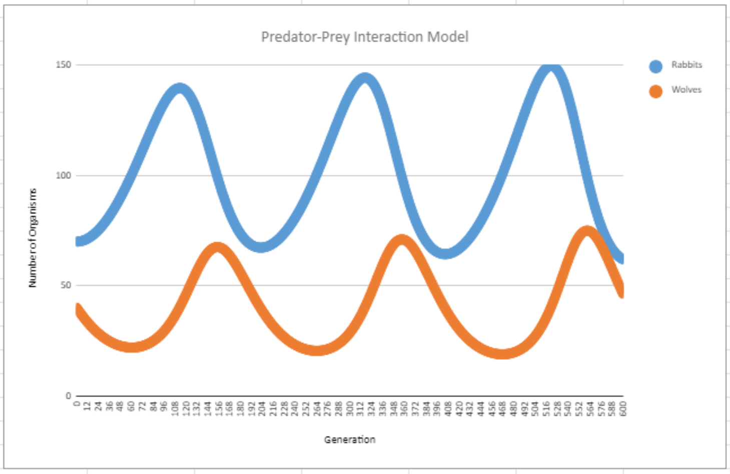
Outro ponto a ser citado é o nosso interesse em saber se o uso de Modelagem Matemática é motivador para o licenciando cursar disciplinas específicas do curso visando sua atuação docente, assim, já ter cursado a disciplina possibilita o participante fazer um comparativo com sua experiência anterior.

Durante as pesquisas e planejamentos para montar a OI_1, visamos encontrar um artefato que possibilitasse explorar o modelo predador-presa de formas diferentes e que permitisse aos participantes a compreensão de como os dados se comportam ao longo do tempo. Existem diversos *softwares* disponíveis com programas já prontos sobre esse modelo, alguns traziam de forma lúdica a variação de presa e predadores e outros focavam na construção de gráficos, como plano de fases, porém nenhum conversava com a nossa proposta. Além disso, alguns desses recursos necessitavam de habilidades de programação e, apesar de ser uma proposta interessante, esse não era o foco do nosso trabalho, por isso também foram descartados.

A planilha utilizada como artefato principal conta com os dados sobre o número de predadores e presas em um intervalo de tempo de 0 (zero) a 600 (seiscentos), permite projetar o gráfico desses dados e todas as informações podem ser editadas como: número de presa e predadores, taxas de reprodução e de morte, ao editar qualquer um desses dados todos os outros atualizam automaticamente, inclusive os gráficos. Isso permite observar mudanças ao longo do tempo em diversos ambientes e momentos, também conseguimos ter a leitura dos decrescimentos e crescimento das populações e, portanto, supor situações que podem estar provocando esses fenômenos.

Figura 5 - Planilha usada como artefato principal

Rabbit growth	Wolf growth	Wolf mortality
k1	k2	k3
0,02	0,0005	0,05
Time	Rabbits	Wolves
	r	w
0	70	40
1	70	39,4
2	70,021	38,809
3	70,06269751	38,22727249
4	70,12479854	37,65506178
5	70,2070177	37,09258551
6	70,30907815	36,54003613
7	70,43071159	35,99758246
8	70,57165814	35,46537101
9	70,73166629	34,94352748
10	70,91049265	34,43215806
11	71,10790186	33,93135081
12	71,32366631	33,44117685
13	71,55756597	32,96169167
14	71,80938808	32,4929363



Fonte: elaborado pela autora.

Apesar de precisar saber manusear apenas as funções básicas, nos preocupamos em questionar as habilidades dos participantes sobre as plataformas que foram utilizadas durante a oficina (*Google Forms*, *Google* Planilhas e *Google Meet*), pois caso apresentassem alguma dificuldade, parte da orquestração seria destinada a essa explicação. Além disso, por se tratar de um assunto que não é obrigatório ser mencionado durante a disciplina de ED, durante a oficina também introduzimos alguns dos conceitos de interação entre espécies para que os participantes tomassem ciência da importância de estudarmos o modelo predador-presa e qual o papel da Matemática nesse estudo.

A oficina transitou em momentos de explicação por parte da ministrante (a pesquisadora), construção das respostas por parte dos alunos e socialização dos resultados, visto que para a pesquisa também é significativo entender o caminho que levou o participante àquela solução. Além disso, as subsituações propostas na OI_1 se relacionam entre si e passar para a seguinte dependeria de uma boa compreensão da subsituação anterior, discutir o caminho da solução nos faria perceber se o participante entendeu ou apenas “chutou” a resposta.

Acreditamos que refletir sobre os possíveis eventos que poderiam acontecer contribuiu para que a oficina ocorresse sem imprevistos significativos que atrapalhasse o seu andamento. Conseguimos pensar previamente nos possíveis problemas e assim dispor de soluções, observamos que esse planejamento é fundamental para construção de uma orquestração pois tem imprevistos que podem comprometer o sucesso da orquestração caso não possuam uma solução pensada previamente ou uma decisão que possa ser tomada na hora.

Visto isso, ao pensar em integrar um recurso tecnológico na sala de aula, o professor deve se atentar aos diversos fatores citados acima para que os alunos consigam atingir os objetivos de aprendizagem e a utilização dessa tecnologia faça sentido para o contexto a qual será utilizada. Caso contrário, os artefatos inseridos à prática docente continuarão a ser artefatos não oferecendo diferencial que favoreça o ensino e a aprendizagem.

6.3 ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 1 (OI_1)

Essa orquestração foi elaborada com o intuito de trabalhar as equações de Lotka-Volterra que descrevem a dinâmica do modelo de predatismo mais simples, com isso a situação pensada para a OI_1 é a modelação dessas equações com suporte de uma planilha eletrônica. Para auxiliar os participantes, o artefato principal utilizado, a planilha eletrônica continha os dados sobre as espécies estudadas, permitindo que seus usuários simulassem as subsituações propostas para chegar aos seus respectivos modelos.

6.3.1 As subsituações da OI_1

Para atingir a situação principal, foram elaboradas subsituações com casos derivados do caso geral, para que os participantes compreendessem de forma gradual como se comportava o artefato e o modelo até chegarem nas equações finais. Ao final dessa OI_1, esperamos que os participantes alcancem os seguintes objetivos:

- Compreender como se comporta e modelar a equação da taxa de variação dos coelhos durante o tempo quando os lobos foram extintos do ambiente;
- Compreender como se comporta e modelar a equação da taxa de variação dos lobos durante o tempo quando os coelhos foram extintos do ambiente;
- Compreender como se comporta e modelar as equações da taxa de variação de coelhos e de lobos durante o tempo quando ambas as populações existem;
- Identificar a quantidade de coelhos e lobos que equilibram o sistema mediante as taxas presentes na planilha.

Para o primeiro objetivo, os participantes precisam compreender que a função que fornece o número de coelhos se comporta de forma exponencial crescente e a partir disso perceber como se comporta sua derivada.

Já para o segundo objetivo, os participantes podem fazer uma analogia com a subsituação anterior, mas vendo de forma contrária que a função que fornece o número de lobos se comporta de forma exponencial decrescente e, com isso, entender a derivada com o sinal negativo.

Durante a coexistência das duas espécies no mesmo ambiente, para cumprir o terceiro objetivo é necessário entender que o número de encontro entre duas espécies é proporcional ao produto das populações. Dessa forma, os encontros tendem a gerar morte da presa e alimentação dos predadores, é necessário entender como isso afeta as equações.

Por fim, para alcançarmos o último objetivo, os participantes precisam identificar mediante os parâmetros dispostos na planilha qual o número de lobos e coelhos que equilibram o sistema. Uma vez com as equações de Lotka-Volterra, basta igualar a zero e substituir os parâmetros para achar a solução.

6.3.2 Configuração didática

Ao elaborarmos as subsituações, levamos em consideração se os participantes desempenhavam familiaridade com o programa escolhido para usar a planilha e, por isso, antes da realização da oficina, foi enviado um questionário para saber se conheciam as principais finalidades do *software*, escolhemos o *Google* Planilhas para abrir a planilha que irá auxiliar a modelagem do problema, visto que não necessita de instalação e pode ser usado de forma *online*. Além disso, os participantes foram instruídos a usarem lápis e papel para fazer anotações, após isso foi solicitado anexar as imagens das resoluções em um formulário enviado durante a oficina.

A OI_1 da oficina foi vivenciada de forma remota no *Google Meet*, as instruções foram enviadas previamente por *email*. Os momentos de discussão intercalaram-se entre uma apresentação de *slides* (Apêndice) para explicações teóricas, discussões sobre os dados fornecidos na planilha, resolução das situações propostas e socialização desses resultados. Para a vivência da OI_1, foram destinadas 3 horas.

6.3.3 Modo de execução

O modo de execução dessa OI consiste em utilizar a planilha como artefato principal. Com isso, os participantes poderiam analisar o comportamento dos dados e dos gráficos, discutir entre si sobre o que significava matematicamente essas percepções, com isso, responder de forma colaborativa as subsituações.

A ministrante da oficina fica disponível para sanar possíveis dúvidas durante toda a duração da atividade. Além disso, deve promover a interação entre os participantes, sendo assim, mediadora da oficina.

Ressaltamos a importância do trabalho coletivo e de situações com modelos matemáticos presentes no cotidiano do aluno para que a aprendizagem ocorra de forma efetiva, promovendo autonomia e habilidades para resolução de problemas.

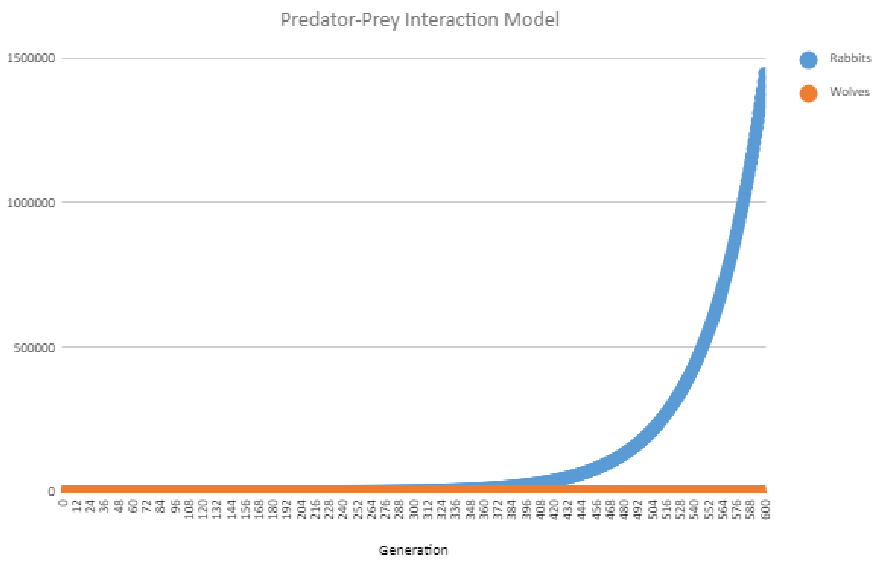
6.3.4 As análises *a priori* das subsituações

Durante o planejamento de uma orquestração instrumental, a etapa de análise *a priori* das situações que serão propostas nela tem papel fundamental nas decisões que serão tomadas a partir de eventos que ocorram no momento de execução dessa OI (decisões *ad hoc*), esses eventos podem atrapalhar ou não o decorrer da orquestração. Tentar prever possíveis erros ou dificuldades dos alunos durante a resolução das situações pode ajudar a entender se essas situações estão bem formuladas e se os artefatos disponíveis são úteis para a resolução do problema, pensando na gênese instrumental dos sujeitos.

Visto que a subsituação T1 tem o objetivo que os participantes apenas se habituem em mexer com os dados da tabela, começaremos a análise pela subsituação T2. Nessa subsituação, consideramos a saída dos predadores do ambiente estudado, ou seja, eles foram extintos e as presas não são mais caçadas. Para modelar a equação que descreve a taxa de variação de coelhos com o tempo $\frac{\partial r}{\partial t}$, os participantes precisam perceber pelos dados da planilha que ao passar do tempo a variação do número de coelhos cresce de forma proporcional.

Uma forma de perceber isso é pelo gráfico gerado na planilha do crescimento exponencial da população de coelhos ao longo do tempo:

Figura 6 - Gráfico do crescimento de coelhos quando a população de lobos foi extinta



Fonte: elaborado pela autora

Em azul temos a população de coelhos e em laranja a população de lobos. Se considerarmos $r(t)$ a função que fornece o número de coelhos ao passar do tempo, teremos que ela se comporta como $r(t) = c^t$ onde $c > 0$ e $c \neq 1$.Considerando que a taxa de crescimento da população de coelhos em relação ao tempo é a derivada de $r(t)$ teremos:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = c^t \ln c$$

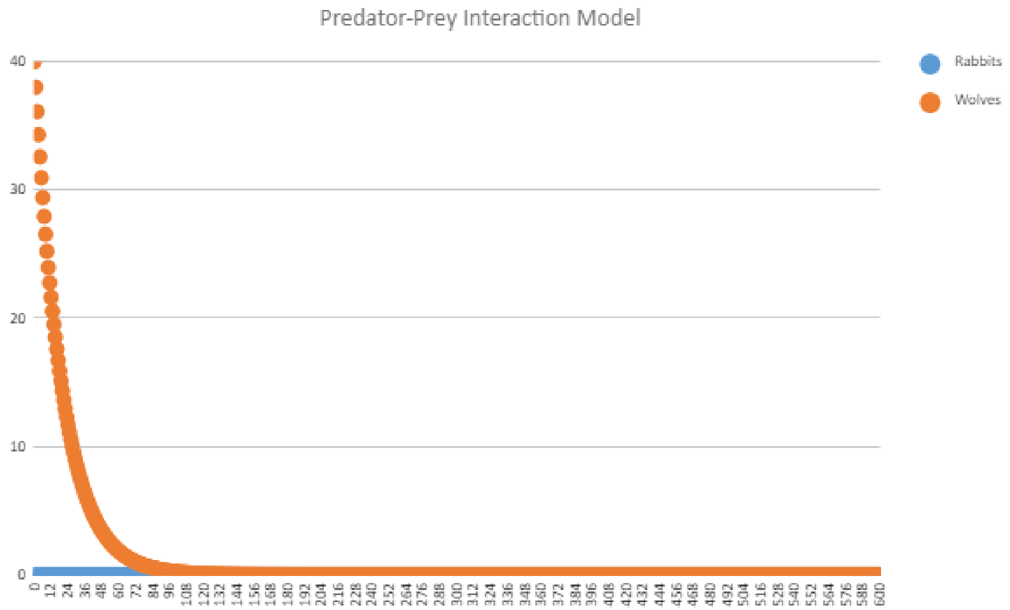
Podemos observar pelo gráfico fornecido que $r(t)$ é uma função crescente, logo, $c > 1$e o $\ln c > 0$. Chamando $\alpha = \ln c$ teremos a representação da equação para essa situação.

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \alpha r(t)$$

O participante pode ser conduzido ao erro nesse problema ao se deparar com o gráfico gerado na planilha e pensar que ele já representa a taxa de crescimento, com isso tentar modelar a partir dele.

A subsituação T3 considera que os coelhos foram extintos do ambiente e como uma das condições desse sistema é que os predadores se alimentam exclusivamente das presas em questão isso irá acarretar extinção também dos lobos por falta de alimento. O participante pode associar a subsituação T2 sendo dessa vez um decrescimento exponencial da população de lobos como é mostrado no gráfico:

Figura 7 - Gráfico do decrescimento de lobos quando a população de coelhos foi extinta



Fonte: elaborado pela autora.

Agora consideramos $w(t)$ a função que fornece o número de lobos com passar do tempo, pelo gráfico podemos perceber seu comportamento exponencial decrescente, assim, $w(t) = b^t$, onde $0 < b < 1$. Portanto, $\frac{\partial w}{\partial t} = b^t \ln b$ com $\ln b < 0$. Chamando $\ln b = -\gamma$, sendo γ uma constante positiva, iremos obter:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\gamma w(t)$$

Acreditamos que os possíveis erros são os mesmos da subsituação T2, porém uma vez compreendida a outra subsituação, essa seria de mais fácil compreensão.

A subsituação T3 considera que ambas as populações existam no ambiente. Para encontrar as os modelos que representem esse sistema os participantes teriam que relacionar que o número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das populações. Ou seja, quanto maior as populações, maior serão as possibilidades de encontro. Com isso, entende-se que a cada encontro o número de presas diminui e o de predadores aumenta.

Baseado nas equações encontradas anteriormente, teríamos que acrescentar uma parcela que diminuiria o número de presas e aumentaria o número de predadores:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \alpha r(t) - \beta r w$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\gamma w(t) + \theta r w$$

Onde β e θ são constantes positivas. Uma estratégia que levaria ao erro seria não compreender que as constantes são diferentes, β é a taxa de predação e θ é a conversão da caça em novos predadores, além disso os participantes podem apresentar dificuldade em entender como os encontros geram alterações nas populações.

Na subsituação T5, é trabalhado o conceito de equilíbrio do sistema, quando não há variação das populações. A resolução dessa atividade consiste em igualar as equações encontradas na atividade anterior a zero e manipular as equações para que uma taxa fique em função da outra, para isso é necessário lembrar que ambas as populações estão existindo e, logo, $r(t) \neq 0$ e $w(t) \neq 0$. Erros que podem aparecer nessa atividade são apenas operacionais.

Para encontrar a quantidade de coelhos e lobos que equilibram o sistema, como é pedido na subsituação T6, a planilha já dispõe das taxas α, β, γ, θ e basta substituir nas equações que equilibram o sistema vistas em T5. Também consideramos que os erros que podem aparecer nessa atividade são apenas operacionais.

6.4 ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL 2 (OI_2)

Durante a OI_2 propomos um momento de socialização das experiências dos participantes onde foi possível perceber se o uso de Modelagem Matemática contribui para a aprendizagem de Equações Diferenciais e se os participantes conseguem fazer relação entre os conceitos. Além disso, discutir possibilidades sobre vivenciar esse modelo na Educação Básica e se ter o contato com modelos durante as disciplinas específicas de Matemática durante o curso contribui para a formação docente de forma que traga sentido vivenciar a matéria durante um curso de licenciatura.

6.4.1 A situação de socialização da vivência

A situação proposta na OI_2 consiste na discussão entre os dois participantes da oficina junto com a mediadora da sistematização. Com isso, foi esperado a articulação da situação da OI_1 com suas vivências quando cursaram a disciplina de ED em outro momento para resultar em estratégias e argumentos que validem ou não a proposta de vivenciar a modelagem como ferramenta de ensino e aprendizagem. Para isso, era necessário que os participantes pensassem no contexto da sala de aula enquanto professores, também como alunos para que pudessem discutir sobre essa abordagem.

6.4.2 Configuração didática

Após cumprir as atividades propostas na situação da OI_1, vivenciamos um momento de discussão na OI_2. A ministrante realizou duas perguntas que nortearam as discussões:

1) Como pode ser vivenciado na educação básica?
2) Abordar modelagem na graduação durante as disciplinas de "matemática pura" iria motivar vocês a cursarem a disciplina pensando na Educação Básica?

Consideramos esse momento fundamental, pois os participantes puderam discutir as possibilidades e compartilhar ideias de aplicações, além disso, também pudemos socializar a relevância da proposta e do uso do artefato principal. O tempo destinado para essa proposta foi de 40 min. Os relatos ficaram gravados para análise posterior da ministrante.

6.4.3 Modo de execução

O modo de execução da OI_2 foi planejado para ser um momento de diálogo onde a ministrante fazia questionamentos sobre as percepções dos estudantes a respeito dos objetivos da situação. Assim, os participantes poderiam justificar suas ideias e compartilhar vivências que se relacionavam com o foco do trabalho.

6.5 ANÁLISE MICROGENÉTICA

Como já citados em outros momentos, os dados coletados durante a oficina que aconteceu de forma remota resultam da gravação de tela e dos registros das respostas dos participantes através de um formulário. Para análise desses dados, escolhemos o modelo da análise microgenética combinada com a videografia "um modelo de coleta de análise de dados que permite uma interpretação robusta e consistente dos mecanismos psicológicos subjacentes à atividade humana" (MEIRA, 1994, p.59).

A escolha desse tipo de análise se justifica, pois, a pesquisa busca acompanhar de forma detalhada o processo de gênese instrumental dos participantes, sendo assim, entender e dar significado às ações, processos mentais, estratégias de resolução e o uso dos artefatos feitos pelos mesmos. Esse entendimento será crucial para a validação da

OI. Meira (1994) ainda afirma que esse tipo de análise não busca entender de forma rígida como as ações emergiram, mas sim identificar significados entre as atividades e situações específicas.

Meira (1994) diz que o estudo dos dados através de vídeos permite o resgate da densidade de ações comunicativas e gestuais, isso é relevante pois podemos assistir ao acontecimento diversas vezes e a partir disso relacionar os eventos assistidos com questões da pesquisa.

Visto isso, buscamos seguir o roteiro descrito por Meira (1994) para análise dos nossos dados:

- Assistir aos vídeos por completo e sem interrupções, tomando nota de eventos associados ao problema de pesquisa;
- Listar os eventos que acontecem no vídeo (pode ser realizada em paralelo com a atividade anterior);
- Identificar os eventos que se relacionam com o problema de pesquisa;
- Transcrever de forma literal os eventos selecionados com o máximo de detalhe possível;
- Assistir repetidamente os eventos selecionados em conjunto com a análise minuciosa das transcrições;
- Divulgação dos resultados e apresentação das interpretações colhidas nos vídeos e transcrições.

Essa forma de organizar os dados permite um melhor entendimento do leitor e torna as etapas da pesquisa mais compreensíveis. Os dados em vídeos podem ser complementados com outros instrumentos (para essa pesquisa, será o registro escrito das respostas) para uma análise mais aprofundada e completa.

6.6 OS PARTICIPANTES

A pesquisa foi realizada com uma dupla de licenciandos em Matemática da UFPE/CAA, um deles cursando o 5º período e o outro 9º período do curso. O único critério para a escolha é que já tivessem cursado a disciplina de Equações Diferenciais, pois as subsituações propostas contavam com uma certa familiaridade com o objeto matemático em foco, ambos aceitaram participar da pesquisa a partir de uma consulta da pesquisadora. A ministrante da oficina foi a pesquisadora em questão, além disso, a oficina foi certificada com carga horária de 4 horas.

6.7 QUESTÕES ÉTICAS

Os experimentos propostos acima passaram por autorização dos participantes em fornecer seus dados produzidos durante a vivência da oficina, bem como disponibilizar seu registro e aprovar a divulgação. Explicamos no formulário de inscrição se tratar de uma pesquisa, salientamos que será garantido o sigilo e privacidade da identidade e informações dos participantes.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante esse capítulo iremos discutir e analisar os dados coletados durante a oficina, com isso, refletir sobre o processo de gênese instrumental dos estudantes. Para garantir o anonimato dos participantes, seguindo as questões éticas da pesquisa, utilizaremos a seguinte nomenclatura para nos referimos aos licenciandos: P1 e P2.

Ao propor utilizar Modelagem Matemática para o estudo das Equações Diferenciais visamos nos desvencilhar de propostas que abordam apenas técnicas de resolução e memorização de fórmulas, pois acreditamos que o estudo de Matemática por meio de conexões com o contexto que o aluno está inserido permite ir além do conhecimento matemático e exercitar a intuição e criatividade. Com isso, o aluno torna-se capaz de interpretar situações, selecionar, organizar e manipular informações fazendo com que a aprendizagem se torne mais dinâmica e efetiva.

Esse tipo de abordagem deve estar alinhado com o uso de tecnologias visto que existem diversos recursos facilitadores do ensino e da aprendizagem que podem auxiliar a modelação de situações. Desse modo, o modelo teórico utilizado na pesquisa permite integrar recursos tecnológicos ao ambiente educacional, pois se preocupa com todas as etapas do planejamento para que o recurso utilizado realmente seja efetivo no processo de aprendizagem do aluno.

Nesse sentido, para validar a nossa orquestração também consideramos a performance didática que envolve as decisões *ad hoc* tomadas e permite refletir se essas decisões influenciaram ou não o andamento da orquestração instrumental, os esquemas mobilizados pelos participantes e o *feedback* deles sobre os artefatos utilizados, como comenta Drijvers et. al. (2010).

7.1 DISCUSSÃO SOBRE AS ESTRATÉGIAS EM CADA SITUAÇÃO

Neste tópico iremos abordar como se deu o processo de construção do conhecimento dos participantes sobre Equações Diferenciais ao resolverem a situação que envolve modelagem do problema predador-presa. Para isso, iremos expor as principais estratégias e dificuldades que percebemos nos momentos de socialização e posteriormente analisar os registros coletados.

Dividiremos nossa análise em três momentos situados nas subseções abaixo. O primeiro momento trata das subsituações T1, T2 e T3 onde foi discutido o comportamento de uma espécie quando a outra está ausente do ambiente estudado. Já no segundo momento traremos reflexões sobre as equações de Lotka-Volterra e o equilíbrio das soluções presentes nas subsituações T4, T5 e T6. Por fim, sobre a OI_2, iremos falar sobre as possibilidades de vivenciar esse assunto na sala de aula da Educação Básica e também discutiremos como o uso de Modelagem Matemática pode facilitar a compreensão dos conteúdos das disciplinas específicas de Matemática durante o curso, criando possíveis conexões com a futura atuação profissional.

7.1.1 Presas ou predadores ausentes no ambiente

Para a subsituação T1 foi solicitado aos participantes que variassem alguns números da planilha diminuindo e/ou aumentando o número de coelhos e/ou lobos para que eles pudessem conhecer o funcionamento dos dados e gráficos presentes nela. Após isso, caso encontrassem algum comportamento interessante, os participantes poderiam socializar as experiências.

Ao variar os dados, o participante P1 tentou observar o tempo que os lobos acabariam morrendo quando a quantidade coelhos estivesse baixa:

Quadro 2 - Transcrição da fala do participante P1 na subsituação T1.

***P1**: A primeira coisa que eu estava olhando aqui é comparar qual seria mais ou menos a proporção se tivesse poucos coelhos o tempo que os lobos acabariam morrendo porque não tem presa suficiente…Sempre que um cresce, outro em seguida começa a diminuir.*

Fonte: acervo da autora.

De forma autônoma e antes de ter contato com as próximas subsituações, o participante P1 já consegue realizar suposições sobre o modelo quando não há alimento suficiente para os lobos.

Além disso, a partir da análise do gráfico disponível na planilha, também observou que uma população cresce enquanto a outra diminui. Trazendo para a realidade, é fácil notar a veracidade dessa informação pois conforme os lobos se alimentam a população de coelhos diminui, porém a população de lobos está favorável ao crescimento. Por outro lado, uma vez que crescida a população de lobos, começa a faltar alimentos e inicia o decrescimento do número de lobos, proporcionando a reprodução de coelhos, sendo assim, o fenômeno é periódico.

O participante P2 observa o fenômeno onde o número de coelhos e lobos é discrepante:

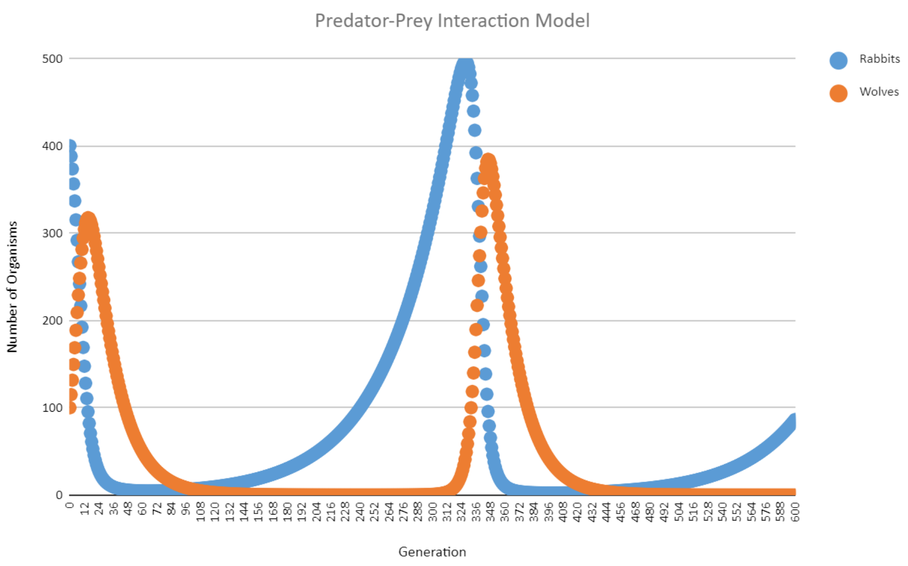
Quadro 3 - Transcrição da fala do participante P2 na subsituação T1.

P2: *Quando a quantidade relativa entre presas e predadores é bem discrepante, digamos assim, a quantidade de presas é bem maior do que a quantidade de predadores, você tem uma quantidade menor de picos também. Você passa uma grande parte com, por exemplo, predadores quase perto de zero e presa um pouco maior só que quando vai atingir o próximo pico vai demorar bastante tempo.*

Fonte: acervo da autora.

Para observar isso o participante P2 colocou o número inicial de coelhos igual a 400 e o de lobos igual a 100, o que resulta no gráfico a seguir:

Figura 8 - Gráfico do número de coelhos e lobos com população inicial r(t) = 400 e w(t) = 100 (em laranja o número de lobos e em azul o número de coelhos)



Fonte: elaborado pela autora.

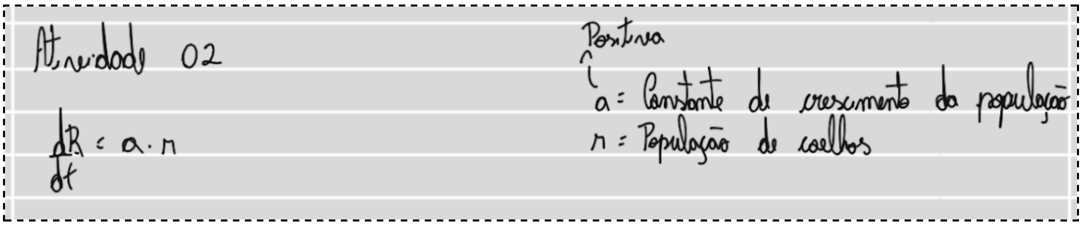
Discutimos sobre esse evento e conjecturamos que uma maior distância entre os picos pode ter relação com o maior tempo que os lobos levam para se reproduzirem, visto que, estão em quantidades menores.

Sendo $r = r(t)$ uma função que dá o número de coelhos e $w = w(t)$ uma função que fornece o número de lobos, ambas no decorrer do tempo. A subsituação T2 requer que os participantes percebam o que acontece com o número de coelhos quando os lobos são extintos e por consequência retirados do ambiente. Após compreenderem que a população de coelhos cresce exponencialmente, deveriam determinar a equação que descreve a taxa de variação de coelhos ao passar do tempo.

Os participantes sentiram dificuldade em descrever a taxa que estariam associadas ao problema. No entanto, para que a atividade não parasse, foi necessária a intervenção da ministrante no sentido de fornecer instruções para a resolução da questão, não necessariamente dando a resposta. A ministrante, a partir do gráfico gerado na planilha, chamou atenção para o comportamento da reta derivada.

Após isso, o participante P1 propôs como resposta:

Figura 9 - Registro da resposta de P1 para a subsituação T2


Atividade 02

$\frac{dR}{dt} = a.n$

Positiva

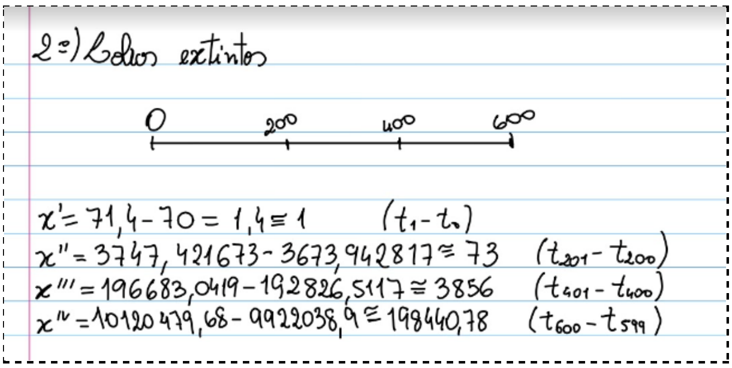
a = Constante de crescimento da população

n = População de coelhos

Fonte: acervo da autora.

Ao ser provocado pela ministrante sobre a resposta do participante P1, o participante P2 discorda inicialmente pois estava tomando dados da planilha e tentando encontrar padrões no crescimento, como é mostrado a seguir:

Figura 10 - Registro da primeira resposta de P2 para a subsituação T2


2º) Lobos extintos

0 200 400 600

$x' = 71,4 - 70 = 1,4 \cong 1 \quad (t_1 - t_0)$

$x'' = 3747,421673 - 3673,942817 \cong 73 \quad (t_{201} - t_{200})$

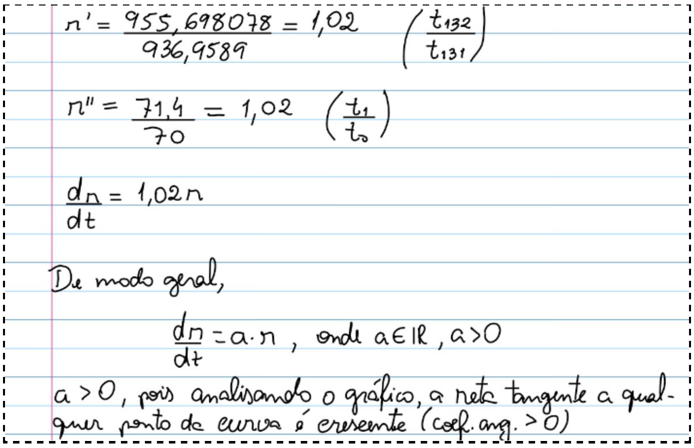
$x''' = 196683,0419 - 192826,5117 \cong 3856 \quad (t_{401} - t_{400})$

$x^{IV} = 10120479,68 - 9922038,9 \cong 198440,78 \quad (t_{600} - t_{599})$

Fonte: acervo da autora.

Ao socializar essa resposta, a ministrante propôs ao participante P2 que ao invés de subtrair, dividisse os valores para encontrar um padrão, após isso ele concorda com a resposta do participante P1. Mas, no entanto, constatamos que ele utilizou de forma equivocada a proporção encontrada como a taxa de reprodução dos coelhos.

Figura 11 - Registro da segunda resposta de P2 para a subsituação T2



$n' = \frac{955,698078}{936,9589} = 1,02 \quad \left(\frac{t_{132}}{t_{131}}\right)$

$n'' = \frac{71,4}{70} = 1,02 \quad \left(\frac{t_1}{t_0}\right)$

$\frac{dn}{dt} = 1,02n$

De modo geral,

$\frac{dn}{dt} = a \cdot n$, onde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$a > 0$, pois analisando o gráfico, a reta tangente a qualquer ponto da curva é crescente (coef. ang. > 0)

Fonte: acervo da autora.

Para a subsituação T3, é solicitado a taxa de variação dos lobos com o tempo, mas agora os coelhos foram extintos do ambiente. Vale ressaltar que para esse modelo os lobos se alimentam apenas dos coelhos, uma vez retirados do ambiente, a população de lobos também caminhará para extinção. A população de lobos decresce exponencialmente e isso pode ser notado através do gráfico disposto na planilha.

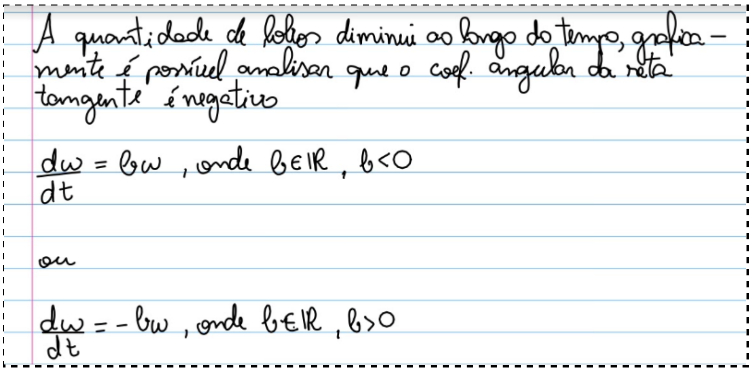
O participante P1 a princípio teve dificuldade em perceber a similaridade com o caso anterior e a ministrante alertou novamente sobre o comportamento da reta tangente para essa subsituação. Com isso, o participante P2 comenta:

Quadro 4 - Transcrição da fala do participante P2 e da ministrante na subsituação T3.

P2: *Eu usei o mesmo raciocínio do outro, no caso, seria uma constante negativa multiplicado pela quantidade de lobos* ***Ministrante:*** *O que tu fez pra entender que o sinal era negativo?* ***P2:*** *Pela representação gráfica dá pra chegar nesse resultado. Conforme você varia no tempo a quantidade diminui, significa que a inclinação da reta tangente é pra baixo.*

Fonte: acervo da autora.

Figura 12 - Registro da resposta de P2 para a subsituação T3



A quantidade de lobos diminui ao longo do tempo, graficamente é possível analisar que o coef. angular da reta tangente é negativo

$$\frac{dw}{dt} = bw \text{, onde } b \in \mathbb{R}\text{, } b<0$$

ou

$$\frac{dw}{dt} = -bw \text{, onde } b \in \mathbb{R}\text{, } b>0$$

Fonte: acervo da autora.

Assim, vimos que o participante P2 fez uma conexão com a subsituação (T2) anterior a partir da análise gráfica presente na planilha e isso fez com que chegasse na resposta correta. Logo após, o participante P1 diz que tinha chegado ao mesmo resultado simultaneamente.

Percebemos que a planilha se mostrou como um artefato eficaz para a análise gráfica e comportamento dos dados, o que possibilitou os participantes compreenderem a variação dos dados de ambas as populações e supor situações para dedução das equações. Assim, conseguiram transformá-la em um instrumento para resolução das subsituações.

7.1.2 As equações de Lotka-Volterra e o equilíbrio das soluções

Durante a subsituação T4, estamos considerando a condição geral onde presas e predadores estão vivendo no mesmo ambiente. Visto isso, foi solicitado descrever as equações que modelam a taxa de variação de coelhos com o tempo e a taxa de variação de lobos com o tempo, mais conhecidas como as equações de Lotka-Volterra. Para responder essa subsituação é necessário atentar-se a algumas condições desse modelo: um encontro entre presa e predador sempre leva a um ataque e o número de encontros entre predadores e presas é proporcional ao produto das populações.

Baseado nas equações anteriores onde uma população estava extinta, os participantes entenderam que da taxa de variação de coelhos precisaria ser retirada alguma parcela que representaria a caça do lobo. Já para a taxa de variação de lobos, iríamos somar algo à equação anterior representando o aumento de sua população por se alimentar.

Inicialmente os participantes ficaram confusos a respeito das taxas de encontros serem diferentes para cada fenômeno e não conseguiram interpretar matematicamente o que significava que o número de encontros é proporcional ao produto das populações.

Visto isso, ao socializar as ideias iniciais foi percebido que as constantes de proporcionalidade aos encontros precisam ser diferentes pois significam coisas distintas para as populações, uma das taxas está relacionada com o decrescimento das presas e a outra com o aumento no número de predadores, ou seja, convenção da caça em novos predadores.

Para dar continuidade ao andamento da oficina a ministrante intervém, uma decisão *ad hoc*, e dá um exemplo das possibilidades de encontros entre quatro animais sendo duas presas e dois predadores:

Figura 13 - Possibilidades de encontro entre duas presas e dois predadores

presas

predadores	a	b
c	ac	bc
d	ad	bd

Fonte: acervo da autora.

Com isso, os participantes puderam perceber que ao aumentar o número de presas e/ou predadores aumentaria as possibilidades de encontros. Após isso, o participante P2 expôs a sua resposta e o participante P1 concorda com a solução:

Figura 14 - Registro da resposta de P2 para a subsituação T4

$$\frac{dr}{dt} = ar - \beta wr \quad , \beta \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{dw}{dt} = -bw + \gamma wr \quad , \gamma \in \mathbb{R}^+$$

A diminuição ou aumento dependem da população tanto de coelhos quanto de lobos.

Fonte: acervo da autora.

Mediante as equações de Lotka-Volterra, a subsituação T5 tem como objetivo relacionar os parâmetros envolvidos no sistema quando não há variação de coelhos e lobos. Para resolver essa subsituação, os participantes precisavam considerar que $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, além disso, perceberem que $r(t) \neq 0$ e $w(t) \neq 0$ visto que estamos considerando ambas as populações existindo.

Figura 15 - Registro da resposta de P1 para a subsituação T5

Atividade 05

$$\frac{dR}{dt} = a \cdot r - C_1 W r = 0 \Rightarrow r(a - C_1 W) = 0 \qquad a = C_1 W$$

$$\frac{dW}{dt} = W \cdot b + C_2 w r = 0 \qquad W(b + C_2 r) = 0 \qquad b = C_2 r$$

Fonte: acervo da autora.

Figura 16 - Registro da resposta de P2 para a subsituação T5

$$ar - \beta w r = 0 \Rightarrow a = \frac{\beta w r}{r} = \beta w, \text{ pois } r \neq 0$$

$$-bw + \gamma w r = 0 \Rightarrow b = \frac{\gamma w r}{w} = \gamma r, \text{ pois } w \neq 0$$

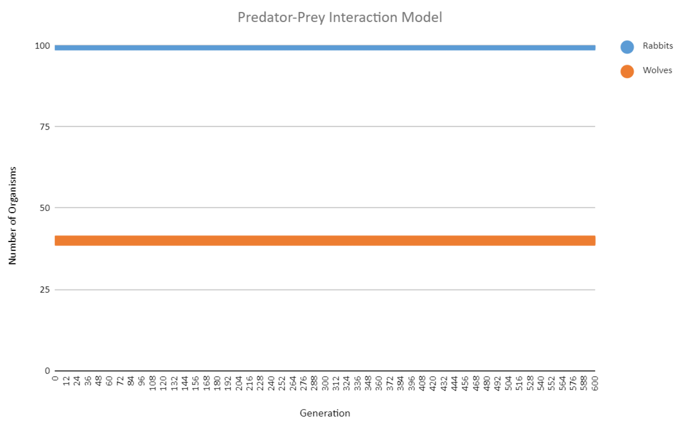
Fonte: acervo da autora.

A subsituação T6 pedia para encontrar o número de coelhos e lobos que equilibrassem o sistema mediante os parâmetros que estavam dispostos na planilha. Com as equações encontradas na T5 e com os seguintes dados da planilha:

- taxa de crescimento da população de coelhos: 0.02
- taxa de decrescimento da população de lobos: 0.05
- taxa de predação: 0.0005
- taxa de crescimento da população de lobos: 0.0005

os participantes chegaram à conclusão que $r(t) = 100$ e $w(t) = 40$ equilibram o sistema e também puderam visualizar na planilha ao atualizarem esses dados no número inicial de presa e predadores, gerando um gráfico:

Figura 17 - Gráfico do número de presas e predadores pelo tempo (em laranja o número de lobos e em azul o número de coelhos)



Fonte: elaborado pela autora.

Podemos perceber pelo gráfico que não há variação no número de presas e predadores ao longo do tempo. Visto o exposto acima, o modelo traz diversas semelhanças que podem ser enxergadas no ecossistema real e relacionadas com o contexto do aluno e, portanto, abrindo debates sobre alguns problemas ambientais, porém também possui algumas limitações por não considerar mais variáveis no sistema. À medida que consideramos mais parâmetros o sistema se torna mais complexo e fiel a realidade.

7.1.3 Possibilidades de vivenciar Modelagem Matemática como estratégia de ensino

Após a resolução das subsituações propostas na OI_1, na OI_2 discutimos a possibilidade de fazer alguma conexão com assuntos da Educação Básica buscando uma proposta interdisciplinar. Os participantes afirmam que usariam de forma adaptada o conteúdo e a proposta com modelagem com seus alunos, ambos apontam para a análise gráfica como um objeto de estudo na sua prática docente. A partir do questionamento "*Você acha válido, desde que seja adaptado para tal, usar modelagem do problema predador-presa na Educação Básica? Quais benefícios você pode citar?*" os participantes afirmam que:

Quadro 5 - Transcrição da fala do participante P1 sobre o uso de modelagem como ferramenta de ensino.

P1 no formulário: *Sim, acredito que utilizando a modelagem desse tipo de problema podemos trabalhar questões de gráficos com os alunos além de promover interdisciplinaridade, fazendo com que os conhecimentos não sejam abordados de forma individual em cada disciplina.* ***P1 durante a oficina:*** *Uma das coisas que os alunos mais reclamam é quando você pega uma coisa isolada e só trabalha matemática, só biologia ou qualquer outra disciplina.*

Fonte: acervo da autora.

Quadro 6 - Transcrição da fala do participante P2 sobre o uso de modelagem como ferramenta de ensino.

P2: *Sim. A análise gráfica, compreendendo que a população de lobos atinge seu ápice quando a população de coelhos está decrescendo, pode ser adaptado para a compreensão do comportamento do gráfico de uma função polinomial do 2º grau a partir de seus coeficientes (mais especificamente como o gráfico da função se comporta para o valor de b, onde* $f(x) = ax^2 + bx + c$*).*

Fonte: acervo da autora.

O participante P1 cita a interdisciplinaridade como benefício do uso do modelo, visto que muitas vezes o conteúdo é exposto de forma isolada e sem conexões, algo que incomoda os estudantes ao não conseguir perceber o sentido no que está sendo estudado. Já o participante P2 propõe uma adaptação desse modelo para um conteúdo já comum na grade curricular da Educação Básica.

Durante o curso de Matemática- Licenciatura na UFPE/CAA, os participantes relataram que não trabalharam com modelagem na disciplina de Equações Diferenciais, visto isso, a ministrante pergunta se vivenciar essa metodologia motivaria os licenciandos na visão dos participantes:

Quadro 7 - Diálogo entre ministrante e participantes da oficina.

Ministrante: *Abordar modelagem na graduação durante as disciplinas ditas "Matemática Pura" iria motivar vocês a cursarem a disciplina pensando na Educação Básica? Essa abordagem faz diferença no curso de licenciatura? Nos prepara para ter um conhecimento mais aprofundado quando for trabalhar com assuntos na educação básica?* ***P1:*** *Eu acredito que sim...Vou falar no caso que eu vivenciei em EDO: a gente basicamente resolveu exercício e não viu nenhuma aplicação e o nosso curso é pra gente dar aula no ensino básico, então, o argumento que o pessoal utiliza de "por que eu estou vendo isso?" faz sentido em certo ponto. Porque você resolver uma EDO, você não vai chegar no ensino médio e dizer: minha gente, vamos aqui resolver uma EDO. Eu acho que na verdade é fundamental você ver algo dessa forma.* ***P2:*** *Também acredito que motivaria o estudante de licenciatura, no caso, porque ele ficaria muito restrito se ele visse exatamente o que visto no ensino médio e não avançasse disso, só visse o suficiente para poder entender tudo aquilo. É necessário ter uma visão "mais acima do assunto" só que de fato essa conexão sendo feita simbolicamente, só resolvendo exercícios com certeza não motiva a maioria. Então, uma modelagem pode fazer esse link para motivação.* ***P1:*** *Até para trazer significado para o que você está aprendendo.*

Fonte: acervo da autora.

Com isso, podemos perceber que o ensino de ED apenas com exposição de conteúdos e resolução de exercícios não motiva o licenciando a uma reflexão sobre sua atuação docente, além disso, não traz significado para o que está sendo estudado e não está contextualizado com o momento tecnológico que estamos vivendo. Existe uma diversidade de artefatos que podem propiciar um melhor entendimento de sistemas com ED e com isso favorecer o processo de aprendizagem dos licenciandos.

Durante discussões sobre as experiências dos participantes ao cursarem a disciplina de ED, ambos tiveram dificuldade em relacionar conceitos vistos na oficina com conteúdos da disciplina. Com isso, entendemos mais uma problemática: o não cumprimento da ementa das disciplinas no curso. Ambos disseram que não tinha sido trabalhado pontos de equilíbrio das soluções, um dos principais assuntos da disciplina. Isso pode ocorrer pela grande quantidade de assuntos que precisam ser vistos em um curto período de tempo, porém acreditamos que prosseguir com lacunas é prejudicial ao aluno pois o conteúdo pode ser pré-requisito em outras disciplinas, atrapalhando o processo de aprendizagem.

Visto isso, o uso de Modelagem Matemática também pode promover o estudo de vários conceitos em um único modelo. Como mostrado no capítulo 4, o modelo predador-presa, além dos conteúdos trabalhados aqui, possibilita relacionar com conceitos específicos da disciplina de ED como a linearização de equações e o comportamento das soluções através do plano de fases. Assim, a possibilidade de criar uma orquestração voltada para conteúdos do ensino superior vinculando a planilha com outros artefatos promove uma abordagem mais completa sobre a disciplina.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo predador-presa permite investigar, com uso de Equações Diferenciais, uma interação desarmônica entre duas espécies no ambiente, sendo assim o estudo desse fenômeno possibilita compreender a dinâmica populacional de determinados ecossistemas através de padrões comportamentais das espécies. Com isso, é possível prever desequilíbrios e, com a intervenção humana, controlar pragas ou prevenir a extinção entre espécies. Sem o uso de derivadas, na Educação Básica podemos tratar esse modelo de uma forma qualitativa com uma abordagem interdisciplinar, fazendo com que o aluno tenha contato com o fenômeno e entenda a importância de estudá-lo.

É importante que o momento tecnológico convirja com as metodologias usadas na sala de aula, visto que existe uma variedade de artefatos que podem potencializar o ensino e a aprendizagem, permitindo um enfoque que converse com os interesses do aluno e não se concentre em métodos tradicionais, possibilitando dar significado ao conteúdo que está sendo estudado. Visto isso, buscamos uma proposta que abordasse modelagem de Equações Diferenciais (ED) com auxílio de uma planilha como artefato principal baseada no modelo de Orquestração Instrumental, além disso, também tivesse relação com a Educação Básica para que cursar a disciplina de ED promovesse ao licenciando uma reflexão sobre a sua prática docente.

Com isso, buscamos responder: como construir e validar uma Orquestração Instrumental de Formação em torno da modelagem de uma situação do tipo Predador-Presa, por meio de Equações Diferenciais (ED), que possa contribuir com a aprendizagem dos conceitos de ED?

Diante de um cenário de pandemia, ocasionado pela COVID-19, criamos uma oficina baseada nos elementos do Modelo de Orquestração Instrumental (OI) e intitulada “Modelagem de Problemas do Tipo Predador-Presa na Formação Docente” que foi vivenciada no formato remoto. Além disso, os dados foram coletados por meio de um formulário para anexar registros escritos das situações propostas na OI_1 durante a oficina, já para a OI_2 a gravação da tela foi fundamental para analisar a socialização das ideias sobre a atividade.

Acreditamos que vivenciar essa atividade no formato remoto fornece limitações como: dispor de aparelhos tecnológicos e uma boa conexão com a internet para acompanhar as atividades síncronas. Desde que o participante tivesse os aplicativos do *Google* Planilhas e do *Google Meet* instalados, a proposta também poderia ser vivenciada pelo *smartphone,* porém transitar entre as janelas poderia não ser tão eficaz quando usar o computador ou *notebook*.

Outro ponto a ser considerado na hora de planejar a OI é se os participantes dispõem de habilidades sobre os artefatos a serem utilizados, pois para favorecer o processo de gênese instrumental é preciso saber o quanto o sujeito entende, ainda que minimamente, sobre o funcionamento do artefato para que consiga utilizá-lo como suporte na resolução da situação, tornando o artefato em instrumento. Durante o processo de inscrição, os participantes preencheram um formulário informando suas habilidades sobre o artefato principal, ambos não tiveram dificuldades para manipular o mesmo. Com isso, destacamos a importância de pensar numa proposta que esteja de acordo com a turma que será aplicada, visto que a interação e participação são fundamentais durante o processo.

A partir da análise dos dados, percebemos que os participantes puderam refletir e realizar suposições sobre o modelo, organizar dados e detectar padrões, além de compreender o que os cálculos significam no contexto real por meio da socialização das respostas e análise gráfica, trazendo significado para o que estava sendo estudado. A planilha se mostrou importante para a compreensão do modelo, onde os participantes puderam variar dados e perceber mudanças nos gráficos e a partir disso fazerem interpretações do ecossistema. Durante a oficina também fizemos uso de novos artefatos, por exemplo, o quadro virtual onde a ministrante explicou sobre as possibilidades de encontros entre predadores e presas para que os participantes pudessem entender a proporcionalidade dos encontros com o número de seres de uma forma mais visual. Percebemos que ao usá-lo os participantes puderam compreender o que estava sendo pedido na subsituação e assim conseguiram respondê-la.

Além disso, os participantes também relataram que a abordagem da disciplina de ED feita de forma mecanizada não motiva os futuros docentes e que práticas com aplicações são fundamentais no curso para dar suporte à prática docente.

Através dessa pesquisa, podemos perceber a importância de durante a formação docente termos contato com diferentes recursos didáticos nas aulas de matemática, possibilitando a exploração destes em diversos contextos. Tão relevante quanto disponibilizar os recursos, é a discussão sobre a integração deles na prática docente e como deve ser feita a escolha deles para que os objetivos que o aluno deve alcançar sejam atingidos e até possibilitar a construção desses recursos para que os professores os adaptem a diferentes situações. diversos contextos

Consideramos essa pesquisa relevante para a área de Educação Matemática, pois abordamos um recurso para se trabalhar Modelagem Matemática em Equações Diferenciais com aporte na Orquestração Instrumental para sua estruturação e aplicação, permitindo assim uma abordagem do assunto na Educação Básica. Por fim, como indicações para pesquisas futuras, deixamos como sugestão a aplicação dessa proposta em um ambiente presencial pós-pandêmico podendo ser aliada à aplicação de uma OI adaptada para alunos do Ensino Médio a fim de investigar limitações e potencialidades de discutir o problema predador-presa com os esses estudantes.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.55-68, jul. 2009. ISSN 1982-5153.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati,** n. 4, p. 73- 80, 2004a.

BARBOSA, J. C. As relações dos professores com a Modelagem Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004b, Recife. **Anais** Recife: SBEM, 2004. 1 CD-ROM.

BIEMBENGUT, M.S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009. ISSN 1982-5153.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed., 5ª reimpressão. - São Paulo: Contexto, 2018. 127p. ISBN 978-85-7244-136-0.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 10. ed. rev. Rio de Janeiro: LTC, 2015, 28 cm. ISBN 978-85-216-2832-31.

BRANDT, C. F., BURAK, D. E KLÜBER, T. E., orgs. **Modelagem Matemática**: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações [online]. 2nd ed. rev. and enl. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. ISBN 978-85-7798-232-5. Available from: doi: 10.7476/9788577982325.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVMEIJER, K.; The Teacher and the Tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, Holanda, v. 75, n. 2, p. 213-234, 2010.

DULLIUS, M. M; ARAUJO, I. S; VEIT, E. A. **Ensino e aprendizagem de equações diferenciais com abordagem gráfica, numérica e analítica:** uma experiência em cursos de engenharia. **Bolema**, Rio Claro-SP, v.24, nº 38, p. 17-42, abr. 2011.

LUCENA, R. **Metaorquestração Instrumental**: um modelo para repensar a formação de professores de matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnologia). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MACHADO JÚNIOR, A. G.. **Modelagem matemática no ensino-aprendizagem e ações e resultados.** 2005. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

MARZZACCO, C. **Predator Prey Oscillation Simulation Using Excel**. [S. l.: s. n.], 31 julho 2012. 1 vídeo. 1 vídeo (6 min 42 s). Publicado pelo canal Charles Marzzacco.

Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gNr-0cyQdwo>. Acesso em: 27 out. 2021.

MEIRA, L. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. **Temas de Psicologia**. Ribeirão Preto. v. 2, n.3, p. 59-71, 1994.

MORAIS, C.; AZEVEDO, W. Webdoc: **O Modelo da Orquestração Instrumental no Contexto do Ensino Técnico**. Disponível em: <https://geregroup.site/webdocs/webdoc4/>. Acesso em: 11 jul. 2021.

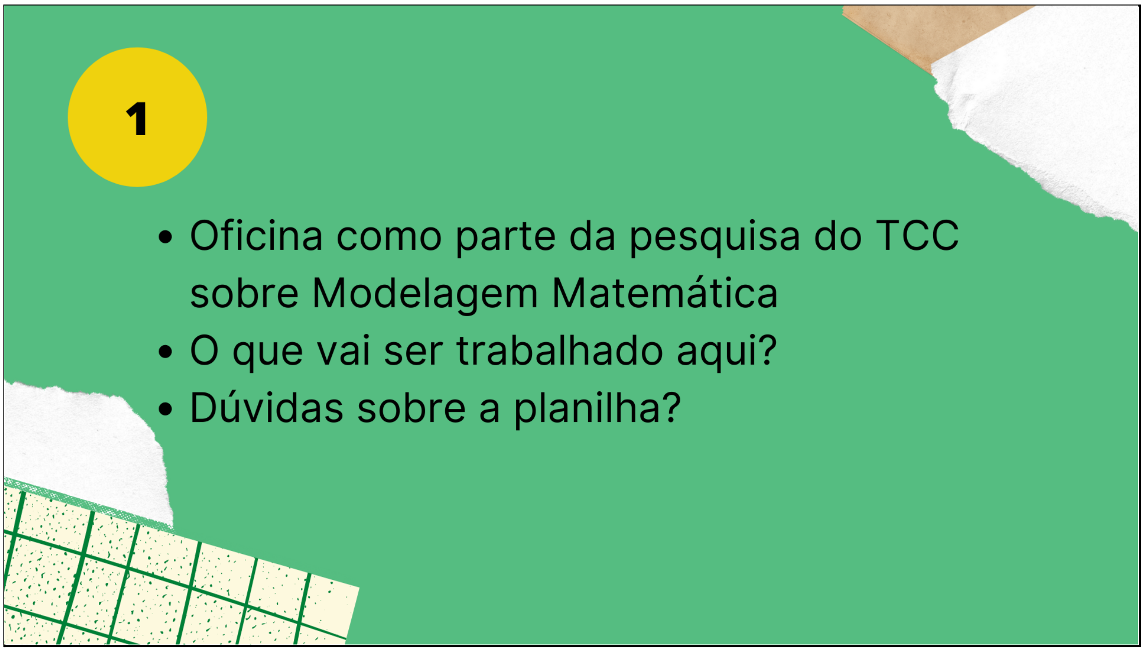
OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: Um levantamento preliminar da produção científica. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. vol. 4., nº 2, 2013. ISSN 2177-9309.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**: une approche cognitive des instruments contemporains. Paris, Armand Colin, 1995

TROUCHE, L. Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 25, nº 1, p. 91-138, 2005.

VERGNAUD, G. A Incorporação dos Professores na Teoria dos Campos Conceituais. In: A. Bessot (Ed.). Tradução de Camila Rassi. 2002. **Conférence à la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti.** Formation des enseignants et Étude Didatictique de l'Enseignant, Grenoble, p. 13-19.

APÊNDICE: MATERIAL ELABORADO PARA EXPOSIÇÃO DO CONTEÚDO NA OFICINA



interação de espécies:

2

tipo	espécie A	espécie B	descrição
competição	-	-	uma pop. inibindo a outra
predação e parasitismo	+	-	pop. A (predador/parasita) explora membros da pop. B (presa/hospedeiro)
neutralismo	0	0	nenhuma pop. afeta a outra
mutualismo	+	+	interação favorável a ambos
comensalismo	+	0	pop. A (comensal) beneficia-se ao passo que a pop. B (hospedeiro) não é afetada.
amensalismo	-	0	pop. A é inibida, mas a pop. B não é afetada.

modelo predador-presa:

2

- investigar a dinâmica populacional;
- os modelos matemáticos são aplicados a partir da abstração desses biossistemas;
- o estudo desses modelos podem ajudar a combater a extinção de espécies;
- fundamentar o porquê da caça descontrolada trazer más consequências ao ecossistema

3

observações importantes:

para esse modelo são consideradas algumas situações:

- o predador se alimenta apenas da presa em questão;
- os predadores consomem uma quantidade infinitas de presas
- o número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das populações.

tarefa 01:

mudem alguns dados na planilha e retratem o que aconteceu com o gráfico.

1) aumentar o número de presas
2) aumentar número de predadores
3) diminuir número de presas
4) diminuir número de predadores

4

5

tarefa 02:

usando a planilha, considere que os lobos foram extintos.

qual a equação que descreve a taxa de variação de coelhos em relação ao tempo?

tarefa 03:

considerando que os coelhos foram extintos, como se comporta a taxa de variação dos lobos?

6

7 ambas as populações existindo

lembrando que um encontro entre presa e predador sempre leva a um ataque.

- o número de encontros entre predador e presa é **proporcional** ao produto das populações.

o que acontece com a população de presas e com a de predadores a cada encontro?

tarefa 04:

usando as equações anteriores, quais equações descrevem essa situação?

8

equilíbrio das populações

9

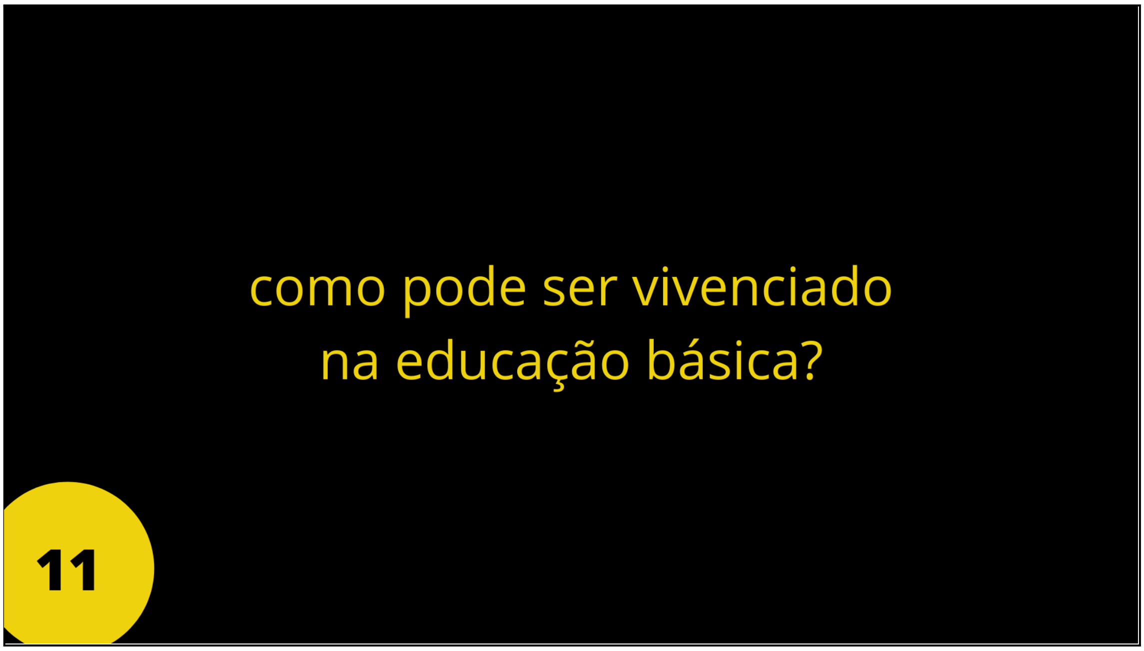
tarefa 05:

A partir das equações encontradas na tarefa anterior, encontrar como os parâmetros se relacionam quando não há variação de coelhos e lobos.

10

tarefa 06:

A partir dos parâmetros da tabela calcular qual a quantidade de coelhos e de lobos que equilibram o sistema.


como pode ser vivenciado
na educação básica?
11