



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE - CAA  
NUCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE - NFD  
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

SIVONALDO DE SOUZA LINS

**RECURSOS DO GEOGEBRA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MÉDIA  
ARITMÉTICA: uma análise com base nos significados, invariantes e  
representações apresentadas**

CARUARU

2022

SIVONALDO DE SOUZA LINS

**RECURSOS DO GEOGEBRA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MÉDIA  
ARITMÉTICA: uma análise com base nos significados, invariantes e  
representações apresentadas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração:** Ensino (Matemática).

**Orientadora:** Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Cristiane de Arimatéa Rocha.

CARUARU

2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Lins, Sivaldo de Souza.

Recursos do Geogebra para o Ensino e Aprendizagem de Média  
Aritmética: uma análise com base nos significados, invariantes e  
representações apresentadas / Sivaldo de Souza Lins - 2022.

50 p.f.: il.;30 cm.

Orientador(a): Cristiane de Arimatéa Rocha  
TCC (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, CAA, Matemática  
- Licenciatura, 2022.

1. Média Aritmética. 2. Applets. 3. GeoGebra. I. Rocha, Cristiane de  
Arimatéa II. Título.

510 CDD (22.ed.)

SIVONALDO DE SOUZA LINS

**RECURSOS DO GEOGEBRA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MÉDIA  
ARITMÉTICA: uma análise com base nos significados, invariantes e  
representações apresentadas**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 07/01/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof<sup>ª</sup>. Dra Cristiane de Arimatéa Rocha (Orientadora)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>º</sup>. Me. Luan Danilo Silva dos Santos (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Pernambuco

---

Prof<sup>ª</sup>. Ma. Lidiane Pereira Carvalho (Examinadora Externa)  
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho à Deus e à minha família, razão da minha existência.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cristiane de Arimatéa Rocha, pela paciência e grandes ensinamentos.

“Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”  
(CORALINA, 2007).

## RESUMO

Este estudo objetivou analisar o conceito de Média Aritmética apresentado pelos (*applets*) materiais didáticos disponibilizados no site GeoGebra. Especificamente discutimos sobre os significados, as representações e os invariantes de média aritmética que podem ser abordados nesses materiais didáticos tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud. Para esta pesquisa realizamos um levantamento de todos os *applets* que envolvem o conteúdo de média aritmética simples, dispostas no site do software GeoGebra. Ao fazermos o levantamento, encontramos onze *applets* relacionados a aplicabilidade de médias aritméticas no geral. Logo após o levantamento dos aplicativos realizamos a análise utilizando como base a discussão do campo conceitual de média aritmética discutido em pesquisas anteriores. A partir da análise dos *applets* no GeoGebra foi possível perceber o quanto esses recursos tecnológicos são importantes e podem ajudar na metodologia dos professores e facilitar o entendimento dos alunos em relação ao conceito da média aritmética simples, principalmente neste momento em que o ensino e aprendizagem está dependente do uso das tecnologias. Em síntese, por meio de toda análise e estudo realizado, além das sugestões levantadas para uma melhor aplicação dos *applets*, foi possível concluir que o uso do GeoGebra pode auxiliar e fomentar o processo de ensino-aprendizagem da estatística, especificamente da média aritmética simples, tornando as aulas mais dinâmicas e interativas.

**Palavras-chave:** Média aritmética. *Applets*. GeoGebra.

## ABSTRACT

This study aimed to analyze the concept of Arithmetic Mean presented by the (applets) teaching materials available on the GeoGebra website. Specifically, we discuss the meanings, representations and invariants of arithmetic mean that can be approached in these teaching materials based on the Theory of Conceptual Fields, by Gerard Vergnaud. For this research, we carried out a survey of all applets that involve the content of simple arithmetic mean, arranged on the GeoGebra software website. When doing the survey, we found eleven applets related to the applicability of arithmetic averages in general. After surveying the applications, we performed the analysis using as a basis the discussion of the conceptual field of arithmetic mean discussed in previous research. From the analysis of the applets in GeoGebra, it was possible to perceive how important these technological resources are and can help in the methodology of teachers and facilitate students' understanding of the concept of the simple arithmetic mean, especially at a time when teaching and learning is dependent on the use of technologies. In summary, through all the analysis and study carried out, in addition to the suggestions raised for a better application of applets, it was possible to conclude that the use of GeoGebra can help and encourage the teaching-learning process of statistics, specifically the simple arithmetic mean, making classes more dynamic and interactive.

**Keywords:** Arithmetic average. *Applets*. GeoGebra.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Interface do software GeoGebra .....	29
Figura 2 -	Busca de Média Aritmética nos materiais didáticos do GeoGebra .....	30
Figura 3 -	Resultados de <i>Applets</i> na busca sobre Média Aritmética nos materiais didáticos do GeoGebra .....	30
Figura 4 -	<i>Applet</i> Média Aritmética Simples .....	33
Figura 5 -	<i>Applet</i> Média aritmética Simples (ampliação) .....	34
Figura 6 -	<i>Applet</i> Média Aritmética Simples (ampliação) .....	34
Figura 7 -	<i>Applet</i> Média Aritmética Simples (ampliação) .....	35
Figura 8 -	<i>Applet</i> Média Aritmética Simples .....	35
Figura 9 -	<i>Applet</i> Média Aritmética Simples .....	36
Figura 10 -	<i>Applet 2</i> - Médias entre dois números - Representação Geométrica .....	38
Figura 11 -	<i>Applet 2</i> - Médias entre dois números - Representação Geométrica .....	39
Figura 12 -	<i>Applet 2</i> - Médias entre dois números - Representação Geométrica (ampliação) .....	39
Figura 13 -	<i>Applet 2</i> - Médias entre dois números - Representação Geométrica (ampliação) .....	40
Figura 14 -	Médias entre dois números - Representação Geométrica (ampliação) .....	42
Figura 15 -	Médias entre dois números - Representação Geométrica .....	43
Figura 16 -	Médias entre dois números - Representação Geométrica .....	44

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
1.1	OBJETIVO GERAL .....	15
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	15
<b>2</b>	<b>O ENSINO DE ESTATÍSTICA E AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL</b> <b>.....</b>	<b>17</b>
2.1	MÉDIA ARITMÉTICA E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS .....	20
<b>3</b>	<b>TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA .....</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DOS <i>APPLETS</i> QUE ENVOLVEM A MÉDIA ARITMÉTICA</b> <b>.....</b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>48</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O currículo de Estatística no Ensino Fundamental e Médio brasileiro vem ganhando destaque como um dos eixos do ensino de matemática, desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL, 1997;1998), na discussão sobre o Tratamento da Informação. Em 2018, a partir da publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tornou-se mais evidente quanto estabelece a Probabilidade e a Estatística como unidade temática (BRASIL, 2018).

Essa unidade temática situa, dentre outros objetivos para o ensino, que “todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos e tomar as decisões adequadas” (BRASIL, 2018, p. 274). Nessa perspectiva, a Educação Estatística vem sendo pesquisada em diferentes centros no mundo. No Brasil, o Grupo de Trabalho sobre Educação Estatística (GT12) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM define como objetivo discussões que envolvem:

[...] estudar e compreender como as pessoas ensinam e aprendem estatística, o que envolve os aspectos cognitivos e afetivos do ensino-aprendizagem, além da epistemologia dos conceitos estatísticos e o desenvolvimento de métodos e materiais de ensino etc., visando o desenvolvimento do letramento estatístico. Para tal, a Educação Estatística utiliza-se de recursos teórico-metodológicos de outras áreas, como Educação Matemática, Psicologia, Pedagogia, Filosofia e Matemática, além da própria Estatística (SBEM BRASIL).

Com base nessa problemática, o professor que ensina estatística nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio deve buscar metodologias que ajudem nas suas aulas, inovações que orientem os educandos a buscarem novas formas de ler e compreender o mundo, possibilitando o desenvolvimento de raciocínios que promovam a descrição, explicação e predição de fenômenos estatísticos.

Nessa perspectiva, a partir das considerações elencadas, percebemos que um dos papéis de educadores estatísticos é criar métodos e recursos para ensinar Estatística nos diferentes níveis. Acerca disso, Holmes *et al* (2005 apud LOPES, 2010, p. 60) destacam que:

A Estatística pode motivar a aprendizagem do núcleo de ideias matemáticas, tanto através da utilização e do desenvolvimento de habilidades matemáticas fundamentais, quanto pela demonstração de que há aplicativos úteis e interessantes da Matemática que auxiliam o entendimento e a solução de situações problemas em diversos contextos.

Nessa direção, essa área pode motivar os estudantes na aquisição de uma maior confiança na interação com as informações e conseqüentemente o interesse pelas aulas, proporcionando uma interação com a atividade proposta e os objetivos que o docente pretende atingir utilizando algum aplicativo dinâmico nas aulas.

Segundo o *Programme for International Student Assessment (PISA)*, uma prova internacional apresentou números quantitativos para exemplificar a situação dos conhecimentos matemáticos no Brasil. Em 2012, por exemplo, os estudantes brasileiros ocupavam 58ª posição dentre 65 países, o que assusta, e mais, 65% deles eram leigos em se tratando de letramento da matemática, ou seja, os estudantes brasileiros não conseguem alcançar um desempenho considerável no que deveriam.

A capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Além disso, o letramento em matemática ajuda os indivíduos a reconhecer a importância da matemática no mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos (PISA, 2012, p. 18).

Na mesma direção do letramento matemático, Carzola et al (2010, p. 23) entendem o letramento estatístico como “[...] a capacidade de uma pessoa interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, levando em consideração os argumentos relacionados aos dados ou aos fenômenos apresentados em qualquer contexto”. Essa capacidade também leva em consideração a habilidade de comunicação das informações contidas e interpretadas nas diferentes representações.

Nesse viés, os recursos tecnológicos constituem um auxílio eficaz no processo de ensino e aprendizagem, pois tornam o aluno ativo e capaz de interagir com o instrumento manuseado. Ainda, oportuniza ao estudante o amplo desenvolvimento de suas próprias habilidades e capacidades de aprendizagem, fazendo com que se sinta motivado nas aulas e com os conteúdos socializados. Desse modo, pode-se afirmar que:

[...] a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 1997, p. 19).

Isso implica em não somente usar o recurso tecnológico para chamar a atenção do estudante, mas leva-lo a questionar tal recurso usado, para que assim desperte a sua curiosidade diante do objeto usado pelo professor, e melhor, que ele perceba os benefícios em sala, para assimilação dos conteúdos socializados. Nessa compreensão, os PCN para o Ensino Médio (BRASIL, 2002, p. 44-45) já orientavam o uso de tecnologias no ensino de Estatística, como discorre a citação a seguir:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as idéias (sic) de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações de Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. [...] No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e o computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.

O presente trabalho, que visa promover a articulação entre a Estatística e as Tecnologias de Informação e Comunicação, também está orientado no que propõe a BNCC (BRASIL, 2018, p. 546), por meio da seguinte habilidade: “construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que interrelacionem estatística, geometria e álgebra”. Acerca disso, Batanero (2000), ao discutir o ensino de significados relacionados à Medida de Tendência Central, comenta sobre o uso de computadores no ensino de Estatística:

É claro que o ensino de estatística na escola usando computadores requer um planejamento cuidadoso. Frequentemente, os dados reais são muito complexos e é necessário obter versões simplificadas dos conjuntos de dados. Se quisermos mostrar uma determinada propriedade, às vezes será necessário manipular o conjunto de dados, por exemplo, para tornar o valor da média, mediana e moda marcadamente diferentes. O trabalho com computador deve também ser complementado com outras situações que visem familiarizar o aluno com as situações-problema, representações, tipos de práticas e propriedades das médias e o exercício da sua capacidade de argumentação (BATANERO, 2000, p. 10, tradução nossa).

Nesse sentido, um dos *softwares* que tem ganhado professores adeptos ao seu uso nas aulas de matemática é o GeoGebra, devido as múltiplas representações que o *software* apresenta dos diferentes elementos matemáticos (BORTOLOSSI, 2016).

Em um levantamento bibliográfico realizado por Ferreira, Miranda e Vargas (2019), nos Relatos de Experiência e Comunicações Científicas publicados no XII Encontro Nacional de Educação Matemática sobre trabalhos que envolvessem o GeoGebra, foram encontrados 34 trabalhos, e quase a metade deles eram direcionados ao ensino e aprendizagem de geometria plana, sendo pouquíssimos atribuídos ao ensino de Aritmética, Álgebra, Conjuntos e Trigonometria. Outra lacuna observada é que nenhum dos trabalhos encontrados versaram sobre o ensino de Estatística.

Laurindo (2019) apresentou em seu trabalho um recorte das pesquisas produzidas no Encontro Nacional de Educação Matemática (2013-2016), no Congresso Internacional de Ensino de Matemática – CIEM (2013 e 2017) e no banco de Teses e Dissertações da CAPES (2010 a 2018), artigos de revistas que trataram especificamente do Ensino de Estatística por meio do GeoGebra. Nesse estudo, a autora encontrou ao todo 23 trabalhos entre minicursos, comunicações, artigos e dissertações sobre o tema, chegando à conclusão que “[...] os estudos sobre a utilização do *software* no processo de ensino e aprendizagem de conceitos estatísticos são ainda relativamente recentes e que é pequeno o número de pesquisas sobre o tema” (LAURINDO, 2019, p. 67).

Marques, Guimarães e Gitirana (2011) investigaram a compreensão de alunos e professores sobre o conceito de média. Participaram da pesquisa 179 alunos e 31 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que foram submetidos a um teste. As autoras constataram algumas dificuldades em relação à compreensão desse conceito por parte dos professores e alunos investigados. Para superação dessa dificuldade e aquisição do conceito em estudo, as autoras sugeriram um trabalho com múltiplas representações.

A base teórica adotada pela presente pesquisa foi a Teoria dos Campos Conceituais- TCC, desenvolvida por Vergnaud (1991; 2009). Segundo essa teoria, para se construir um conceito é necessário que os estudantes atuem em campos conceituais. Dessa forma, Magina (2005, p. 3) afirma que “um campo conceitual é um conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos,

de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”. Nesse sentido, Vergnaud (1991; 2009) elenca três principais aspectos que alicerçam a construção de conceitos: Situações, Invariantes e Representações.

Tendo em vista o contexto atual, marcado pela pandemia da COVID-19, no qual as tecnologias se tornaram ferramentas de trabalho, esperamos contribuir para o ensino e a aprendizagem do conteúdo de Média Aritmética, visando experiências mais dinâmicas e digitais. Dessa forma, elencamos para problema da pesquisa: Quais aspectos conceituais podem ser observados nos materiais didáticos do site do GeoGebra sobre média aritmética?

A fim de delimitar nosso objeto de pesquisa, apresentamos a seguir os objetivos:

### 1.1 OBJETIVO GERAL

Analisar o conceito de Média Aritmética apresentado pelos (applets) materiais didáticos disponibilizados no site GeoGebra.

### 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Verificar os significados de Média Aritmética que podem ser abordados nesses materiais didáticos;
- Averiguar as representações utilizadas pelos materiais didáticos encontrados;
- Caracterizar os invariantes de Média Aritmética apresentados nos materiais didáticos.

Esta pesquisa está organizada em seis capítulos, os quais estão distribuídos da seguinte forma: o primeiro traz a introdução, o objetivo geral e objetivos específicos, a justificativa e o problema de pesquisa.

No segundo capítulo elucidamos sobre o ensino de estatística e as medidas de tendência central, abrindo discussão para o conceito de Média Aritmética, bem como, a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Vergnaud (1991; 2009), na qual a pesquisa está embasada.

No terceiro capítulo abordamos o uso das tecnologias no ensino de matemática e a importância desse recurso no processo de ensino-aprendizagem. No quarto capítulo temos a metodologia, na qual descrevemos todo o percurso para a realização da pesquisa. No quinto capítulo realizamos as análises dos *applets* que envolvem a média aritmética simples e que estão no *software* GeoGebra. No sexto capítulo trazemos as considerações finais e, por fim, as referências.

## 2 O ENSINO DE ESTATÍSTICA E AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Neste trabalho discutimos sobre o uso de *applets* do GeoGebra para o ensino-aprendizagem do conteúdo de Média Aritmética simples. Este capítulo foi dividido em duas seções, sendo discutido inicialmente o conceito do pensamento estatístico, do ensino da estatística e das medidas de tendências central. Em um segundo momento, conceituamos a Média Aritmética e a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1991).

A Estatística é a Ciência que interpreta informações. Herbert George Wells, escritor do século passado, escreveu no seu livro *Mankind in the Making*, de 1903, a seguinte citação: “No futuro, o pensamento estatístico será tão necessário para a cidadania eficiente como saber ler e escrever”. Apesar de mais de 100 anos dessa citação, temos visto como esse conhecimento é importante no mundo atual para entender e fazer críticas sobre as informações que recebemos das mais variadas fontes.

Corroborando com esse pensamento, Lopes (2010, p. 53) defende que o conhecimento de Estatística é essencial para todos os cidadãos e justifica a necessidade de “[...] ser crítico em relação a informação disponível na sociedade, para entender e comunicar com base nessa informação, mas também para tomar decisões”. Dessa forma, se faz necessário compreender um pouco mais sobre o que é esse pensamento estatístico. Nesse sentido, Morais (2006, p. 23) afirma que o pensamento estatístico:

[...] possibilita visualizar o processo como um todo com interação, justificção e compreensão do relacionamento dos dados, além da mensuração da variação presente. Assim é possível explorar os dados para além do que está prescrito no texto, de modo que gere novos questionamentos e tomadas de decisões conscientes e críticas.

Silva Júnior (2015) afirma que a Estatística possui um conjunto de métodos que visam organizar dados e, assim, evidenciar as principais características deles. Como bem nos asseguram Battisti e Battisti (2008), a Estatística é uma área de estudo na qual reunimos e manipulamos dados de acordo com algumas técnicas de estudo, fazendo registros para posteriormente analisarmos os resultados. Para Silva, Fernandes e Almeida (2015), a Estatística nos possibilita fazer um direcionamento,

por meio de uma análise comportamental minuciosa em um determinado estudo, para assim tomarmos decisões razoáveis:

Estatística permite >Decidir qual é o melhor plano experimental e amostral para a realização da Pesquisa. >Organizar e sumarizar dados obtidos por classificação, por contagem ou por mensuração. >Fazer inferência sobre populações de unidades (indivíduos, objetos, animais) quando apenas uma parte(amostra) é estudada (classificada, contida ou medida) (SILVA; FERNANDES; ALMEIDA, 2015, p. 9).

Como se pode verificar nessa citação, a Estatística se aplica em diversas áreas, tais como: setor financeiro, medicina, educação, entre outras. Evidentemente, essa área pode ser utilizada para analisarmos eventos passados e obtermos previsões de um possível evento futuro.

Apesar de nem sempre observarmos ou percebermos, a estatística nos rodeia diariamente. Geralmente, as pessoas atribuem à estatística apenas um conteúdo visto em sala de aula e que não tem serventia. Ao contrário desse pensamento, essa área do conhecimento nos auxilia em diversos aspectos cotidianos. Cita-se, como exemplo, a situação na qual recebemos o salário no final do mês, quando a primeira coisa que fazemos é dividir o dinheiro para fazer a liquidação de contas. Nessa divisão, conseguimos perceber e prever, em média, o quanto gastamos. Sobre a finalidade da Estatística, Silva, Fernandes e Almeida (2015) complementam que:

A estatística envolve técnicas para coletar, organizar, descrever, analisar e interpretar dados provenientes de estudos experimentais e de estudos observacionais. A análise estatística de dados geralmente tem por objetivo a tomada de decisões, resolução de problemas ou produção de conhecimentos. Novos conhecimentos em geral nos levam a novos problemas, resultando em um processo iterativo. Nesse sentido, a Estatística permite facilitar a interpretação de dados (SILVA; FERNANDES; ALMEIDA, 2015, p. 10).

Logo, é importante compreender que possuir um amplo pensamento estatístico é de suma importância para entender as informações e atuar conscientemente enquanto cidadão. No livro “Como mentir com a Estatística”, de Darrel Huff (2016), o autor discute vários equívocos presentes no dia-a-dia, ocasionados pela falta de compreensão sobre Estatística. Assim, o livro aborda desde resultados provocados por pesquisas realizadas em amostras tendenciosas, como também a *estatisticulação*, palavra que para o autor descreve o fenômeno de manipulação estatística, no qual o uso da estatística tem a intenção de enganar (HUFF, 2016).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 527), documento que norteia atualmente o currículo da educação básica brasileira, o ensino de Estatística deve possibilitar aos estudantes:

[...] oportunidades não apenas de interpretar estatísticas divulgadas pela mídia, mas, sobretudo, de planejar e executar pesquisa amostral, interpretando as medidas de tendência central, e de comunicar os resultados obtidos por meio de relatórios, incluindo representações gráficas adequadas.

O que significa que é necessário que o ensino e aprendizagem de Estatística possibilite a compreensão e análise das Medidas de Tendência Central de um conjunto de dados reais, pois esse elemento “[...] permite a construção de um ‘retrato’ dos dados tratados complementando as representações gráficas e tabulares” (COUTINHO; NOVAES, 2013 apud LAURINDO, 2019, p. 33).

As Medidas de Tendência Central são representações de um conjunto de dados em uma determinada pesquisa. Nesse contexto, para Borges-Andrade, Abbad e Mourão (2007), o uso dessas medidas possibilita ao pesquisador reunir os dados coletados e através deles obter com clareza os resultados da pesquisa. O mais importante, contudo, é analisar qual ou quais medidas podem ser usadas como referência para que se chegue o mais próximo possível da distribuição dos dados mostrados na pesquisa.

[...] Os dados estatísticos podem ser sintetizados por meio de quantidades chamadas de medidas. Estatisticamente temos medidas de assimetria, de dispersão e de posição. Essas últimas subdividem-se em ordenamento e tendência central. Chamam-se de "tendência central" as medidas cujos dados tendem a se juntarem em torno de valores centrais. Fazem parte dessas medidas a média, a moda e a mediana (MAGINA; FONSECA, 2016, p. 3).

Os autores deixam claro que os dados sintetizam uma determinada pesquisa, conforme citado acima. Diante disso, vale considerar que a divergência de opiniões é clara e evidencia que cada pesquisador faz um amplo estudo para a escolha das tendências centrais. É importante lembrarmos que as medidas são usadas de acordo com a necessidade de cada pesquisa. Espera-se, portanto, que as medidas de tendência central norteiem toda pesquisa, aliás, elas concretizam e facilitam a análise do estudo em questão.

Devemos estimular os alunos a vivenciarem uma pesquisa de várias maneiras, assim sendo, “acreditamos que se o desenvolvimento das atividades em sala de aula

estiver voltado somente para o algoritmo das medidas de tendência central de um conjunto de dados, os estudantes não serão estimulados de maneira suficiente para a compreensão desses conceitos” (JUSTO, 2018, p. 24).

Em tese, os autores citados se complementam, de modo que os primeiros encurtam os conceitos das medidas de tendência central e o segundo fala a respeito da insuficiência do aprendizado apenas da teoria em desfavor da estimulação dos discentes, conforme citado acima. Ou seja, devemos propiciar teoria e prática agregadas à inovação para uma melhoria no aprendizado (MAGINA; FONSECA, 2016).

É interessante, aliás, planejarmos novas metodologias para abordar o processo de ensino-aprendizagem das medidas de tendências central, mas há um fato que se sobrepõe: “o não conhecimento” de ferramentas específicas para tal. Mesmo assim, não parece haver razão para que não se recorra ao uso da tecnologia como fonte facilitadora, a exemplo do uso dos *applets* contidos no GeoGebra, que é uma excelente ferramenta para o professor usar em suas aulas para melhorar o ensino do conteúdo. Tendo em vista que o mesmo nos fornece um vasto conteúdo sobre a matemática, especialmente, o conteúdo de Média Aritmética, que é o nosso foco principal.

## 2.1 MÉDIA ARITMÉTICA E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dentre os dez capítulos dedicados a explicar cuidadosos meios de contestar e aplicar corretamente a Estatística, Huff (2016) discute sobre uma Média bem escolhida e discorre sobre alguns sentidos que a palavra média pode assumir, trabalhando especificamente com as medidas de tendência central e ainda, apresentando alguns exemplos nos quais a média aritmética pode não ser o melhor valor para representar uma série de dados. A média aritmética simples e/ou a ponderada, assim como a moda e a mediana, são medidas de centralidade da estatística e sua utilização visa sintetizar os dados contidos naquela pesquisa ou no campo de estudo em questão.

Feijoo (2010) relata que a média aritmética nos permite compreender e comparar o comportamento de dados em determinados grupos e focalizar nas variações tendenciais. Ainda segundo esse autor a utilização da média vem desde os

anos iniciais até os finais do Ensino Fundamental e, muitas vezes, passa despercebida por muitos alunos, por exemplo, a média obtida por meio das notas dos mesmos no decorrer do ano letivo, não sendo do conhecimento de todos os estudantes que esse cálculo é obtido a partir de uma média.

Desse modo, Laurindo (2019, p. 34) afirma que a média aritmética “apesar de ser uma expressão presente no cotidiano das pessoas, é um conceito de difícil entendimento, especialmente quanto ao seu significado quando inserida em determinado contexto”. Pode-se dizer que a média aritmética simples está presente tanto no contexto social quanto no ambiente escolar. Nesse contexto, para Carvalho (2011) não se pode escolher qual das medidas de tendência central pode ser considerada a melhor, porém devemos levar em consideração as vantagens em relação à média, pois a mesma engloba todos os valores. Por outro lado, fica difícil representar valores muito distantes.

Carvalho (2011), em sua pesquisa intitulada “Média Aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, fez uma análise nos livros que foram aprovados no PNLD, no ano de 2011. Assegurado pela Teoria dos Campos Conceituais, buscou compreender como o conceito de Média Aritmética é abordado nesses livros. O autor comparou duas coleções, a do PNLD 2008 com a do PNLD 2011, e percebeu que houve alterações em relação ao acréscimo e/ou retirada dos assuntos em questão.

Para a análise, assim como no presente estudo, Carvalho (2011) se baseiou na discussão de Strauss e Bichler (1988) sobre o conceito de média aritmética e utilizou a proposta dos autores para os invariantes do conceito. Com relação aos significados de média se baseou na discussão de Batanero(2000) e acrescentou alguns a partir da análise do livro didático e do estudo com Vergnaud. Por fim, ele percebeu que as representações gráficas e tabulares aparecem em poucas coleções e algumas delas nem trabalham com essas representações. Assim, o autor chegou à conclusão de que o conceito de média é insuficiente explorado para uma melhor compreensão desta como sendo uma medida de tendência central.

A TCC, proposta por Vergnaud (1991), afirma que existem três principais aspectos a serem considerados, geralmente denominados como S, I, R. Marques, Guimarães e Gitirana (2011, p. 728) definem esses aspectos como:

- S à refere-se ao conjunto das situações pelas quais se dá sentido ao conceito, ou seja, tornam o conceito significativo;
- I à diz respeito ao conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e utilizados pelos sujeitos para analisar e dominar essas situações;
- R à corresponde ao conjunto de representações simbólicas que podem ser utilizadas para pontuar e representar esses invariantes e, deste modo, representar as situações e os procedimentos para lidar com os mesmos.

Essas autoras, fundamentadas no estudo de Strauss e Bichler (1988), adotam como invariantes para o conceito de média:

1. a média está localizada entre os valores extremos;
2. a soma dos desvios a partir da média é zero;
3. a média é influenciada por cada um e por todos os valores;
4. a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;
5. a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, não corresponde a um valor possível da variável considerada;
6. o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
7. a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores (MARQUES; GUIMARÃES; GITIRANA, 2011, p. 727).

Nesse sentido, entendemos que assim como um teste pode propor situações que suscitem tais aspectos dos invariantes, um professor conhecendo esses invariantes do conceito de média e compreendendo os limites e possibilidades apresentados por *applets* disponibilizados nos materiais didáticos do GeoGebra, pode produzir questões para o trabalho com os diferentes invariantes aqui apresentados. Portanto, no caso da presente pesquisa, nos fundamentamos nos invariantes potenciais que podem ser observados/trabalhados por meio dos *applets*.

Marques, Guimarães e Gitirana (2011) apontam como significados para Média Aritmética, os elencados por Batanero (2000), a saber:

- a. estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida;
- b. obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme;
- c. aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados, cuja distribuição é aproximadamente simétrica;
- d. necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição (MARQUES; GUIMARÃES; GITIRANA, 2011, p. 727-728).

Em acréscimo ao estudo de Marques, Guimarães e Gitirana (2011), a investigação de Carvalho (2011) discute o conceito de média apresentado em livros didáticos e sugere um acréscimo à classificação de Batanero (2000), adicionando dois

outros significados para o conceito de média: “a média de uma amostra como uma boa estimativa para média de uma população” e ainda “a média como uma estimativa da variável para tempo futuro” (CARVALHO, 2011, p. 54-59). De modo análogo à discussão sobre os invariantes, na presente pesquisa verificaremos se existe a possibilidade do trabalho de diferentes significados nos *applets* apresentados pelo GeoGebra.

Com relação à representação simbólica do conceito de Média Aritmética, a pesquisa de Marques, Guimarães e Gitirana (2011) utiliza a linguagem natural e o gráfico de barras como duas representações para a média aritmética. Já a pesquisa de Carvalho (2011) utiliza como representações a linguagem materna (que pode ser compreendida como sinônimo de linguagem natural), a gráfica (nesse caso abrange o gráfico de barras, mas pode ocorrer outros gráficos) e a tabular (relativo a tabelas).

Acerca disso, Magina (2005, p. 2) afirma que “as representações matemáticas dos estudantes diferem das de seus professores, bem como as representações entre os professores variam bastante, de acordo com suas visões da Matemática e da sociedade”. Nesse sentido, a linguagem do próprio site do GeoGebra e suas diferentes janelas podem apresentar representações diferentes das indicadas pelos autores.

Com base no exposto, construímos o quadro 1, que apresenta sucintamente o campo conceitual de média aritmética.

**Quadro 1 – Campo conceitual de Média aritmética**

<b>Invariantes</b>	<b>Significados</b>	<b>Representações</b>
P1. a média está localizada entre os valores extremos; P2. a soma dos desvios a partir da média é zero; P3. a média é influenciada por cada um e por todos os valores; P4. a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem; P5. a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, não corresponde	A1. estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida; A2. obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme; A3. aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados, cuja distribuição é aproximadamente simétrica;	R1. Linguagem materna; R2. Gráfica; R3. Tabular.

<p>a um valor possível da variável considerada;</p> <p>P6. o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;</p> <p>P7. a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores.</p>	<p>A4. necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição.</p> <p>A5. a média de uma amostra como uma boa estimativa para média de uma população</p> <p>A6. a média como uma estimativa da variável para tempo futuro</p>	
---	--	--

Fonte: Adaptado de: Marques, Guimarães e Gitirana (2011) e Carvalho (2011).

Compreendemos que com relação as representações que podem ser utilizadas para a discussão do conceito de média podem ser ampliadas de outras representações como a própria fórmula para o cálculo de média ou outras que possam ser utilizadas nos diferentes recursos.

Dessa forma, discutiremos como o conceito de Média pode ser trabalhado por meio do uso do *software* GeoGebra, discutindo como a tecnologia atrelada à dinâmica do processo de construção desse conceito pode ser usado em turmas do Ensino Fundamental/anos finais, fazendo uma análise de *applets* que pertencem ao GeoGebra.

### 3 TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, discutimos sobre o uso das tecnologias para o ensino de matemática, conceituando o *software* GeoGebra e pontuando sua importância para o uso em sala de aula. Os recursos tecnológicos estão se expandindo e com eles percebemos grandes melhorias, principalmente na educação, de modo que professores e alunos interagem por meio das conexões que esses recursos oferecem. Documentos oficiais afirmam que a tecnologia deve ser inserida na educação para “[...] partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo” (BRASIL, 2018, p. 9).

Podemos afirmar que o uso dos recursos tecnológicos é essencial para que o ensino-aprendizagem flua de maneira satisfatória. Nesse contexto, para Perius (2012), a forma como aprendemos um determinado conteúdo depende da maneira que ele é apresentado para nós. Conforme explicado acima, o uso dos recursos tecnológicos é muito importante para facilitar a interação entre alunos e professores, pois eles viabilizam a construção do conhecimento. Podemos, também, atrelar a tecnologia ao ensino de matemática por meio de alguns *softwares* e programas, por exemplo, o conteúdo de uma das medidas de tendência central, a média aritmética simples, por meio do GeoGebra. Desse modo, analisamos mais adiante a funcionalidade e possibilidades priorizadas por esse recurso em relação à medida mencionada anteriormente.

(...) a matemática busca também estabelecer as conexões com as demais disciplinas, ampliando a oportunidade de compreender e utilizar conceitos, o trabalho em grupo ou em duplas é um grande aliado, já que permite discutir as diversas formas de solucionar problemas e questionar as estratégias. E aliados as tecnologias, esse processo favorece a autonomia, propicia a interlocução, dá condições de o aluno 'verificar' suas hipóteses, testá-las e reorganizar o seu pensamento, reelabora as conjecturas, buscar novos caminhos, testar novamente num processo de busca pela validação do que é construído (PERIUS, 2012, p. 31).

Portanto, torna-se evidente que a tecnologia precisa estar ligada ao ensino, especialmente aos conteúdos didáticos. Vê-se, pois, que os notebooks, celulares, tablets e outros recursos tecnológicos estão nos ajudando a propiciar novos conhecimentos por meios das ferramentas disponíveis nos mesmos. Logo, é indiscutível o quanto a tecnologia melhora as práticas metodológicas. Um bom exemplo de recurso tecnológico para o ensino de matemática é o GeoGebra. Esse

*software* de matemática foi criado por Markus Hohenwarter, no ano de 2001, na *Universität Salzburg* e, em 2002, prosseguiu em desenvolvimento na *Florida Atlantic University*, através da dissertação de mestrado do mesmo pesquisador.

O GeoGebra é um recurso dinâmico e foi pensado para os mais diversos níveis de ensino, abrangendo conteúdos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental ao Ensino Superior, contemplando a disciplina de matemática com diversas aplicações de conteúdos, tais como: geometria, álgebra, estatística, cálculos, etc. De acordo com Bortolossi (2016, p. 430):

Por meio de suas múltiplas janelas, o GeoGebra reúne, em um único ambiente, recursos gráficos, numéricos, simbólicos e de programação em Geometria, Aritmética, Álgebra, Funções, Estatística e Probabilidade (Figura 1). Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Existem versões do *software* para computadores *desktop* (Windows, Linux e Mac OS), *tablets* Android e iOS e, mais recentemente, para *smartphones* Android.

A partir dessa citação podemos observar que o ambiente virtual apresentado na interface do GeoGebra é bem dinâmico e interativo. Ao fazer uso desse *software* em sala de aula, o professor pode escolher utilizar uma ou várias das muitas janelas existentes que contêm recursos gráficos, simbólicos e numéricos. Esse recurso ainda permite que o professor possa trabalhar várias funções e conteúdos diferentes ao mesmo tempo, pois o GeoGebra permite minimizar e maximizar as janelas quando acharmos conveniente. Também podemos propor o auxílio desse *software* no processo de construção de conhecimentos matemáticos, assim como salienta Vaz (2012, p. 40):

No GeoGebra podemos contemplar geometria e álgebra dinamicamente, interagindo entre si na mesma tela, possibilitando o usuário relacionar as várias faces de um mesmo objeto matemático. Permite trabalhar conceitos matemáticos do ensino fundamental, médio e superior e realizar construções matemáticas diversificadas e alterá-las após a construção ser finalizada. Esse dinamismo possibilita que o aluno perceba diversas relações entre os objetos matemáticos, faça conjecturas e até mesmo formalize os resultados, de forma visual, no próprio *software*. Além das operações usuais o GeoGebra deriva, integra funções, oferece comandos diversos, entre eles, comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Seu uso tem sido extensamente explorado por diversos professores. Encontramos diversos relatos nas páginas da Internet, bem como diversos tipos de experiências educativas, sendo, portanto, fácil encontrar material para trabalhar em sala de aula e em laboratórios.

Esse recorte apresenta a abrangência de possibilidades do uso do GeoGebra nos diferentes níveis de ensino e nas diferentes funções. Além de diversificar as aulas,

essa ferramenta está em muitas plataformas de acessibilidade para o público, tais como computadores e celulares (nos diferentes sistemas IOS e ANDROID) e pode ser baixada e/ou acessada gratuitamente. O site do GeoGebra ainda possibilita o espaço “materiais didáticos”, no qual “usuários podem criar seus materiais e compartilhar com outros usuários criando um grande repositório de atividades gratuitas, simulações, exercícios, aulas e jogos” (LAURINDO, 2019, p. 48).

Existem alguns trabalhos em português sobre o GeoGebra, os quais têm como foco a análise e/ou o uso dos *softwares*, como Laurindo (2019), que em sua pesquisa intitulada “Estatística no GeoGebra: uma análise dos processos de Abstração Reflexionante sobre conceitos de medidas de tendência central”, investigou como o ensino e aprendizagem da estatística podem ser melhorados a partir do uso do GeoGebra. Essa autora baseou-se nas ideias de Abstração Reflexionante e o processo de Tomada de Consciência, de Jean Piaget, focando no processo de ensino-aprendizagem. Para aplicação da pesquisa foi elaborado um estudo a partir de registros obtidos em um conjunto de atividades realizadas anteriormente com estudantes do Ensino Médio, no qual a autora fez uso do GeoGebra com alguns estudantes. Na pesquisa, Laurindo (2019) constatou que a maioria dos alunos confundem as medidas de centralidade e que a partir do GeoGebra eles conseguiram abstrair melhor os conceitos de cada medida de tendência central.

Dando continuidade, Araújo e Abar (2019) apresentam os resultados de uma pesquisa de mestrado intitulada “Contribuições do GeoGebra para o estudo das medidas de tendência central”, na qual eles buscaram averiguar as possibilidades que esse *software* oferece para o estudo das medidas de centralidade. Para a pesquisa, os autores utilizaram como base a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau, para aplicação e análise de uma sequência didática. Com os resultados obtidos, eles perceberam que o uso do GeoGebra possui a vantagem didática de contribuir para o entendimento do conteúdo de Medidas de Tendência Central.

Por sua vez, Bortolossi (2016) em um estudo intitulado “O uso do *software* gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de Estatística e Probabilidade”, mostrou a importância do uso do GeoGebra ao fazer um panorama dos principais recursos e trazer algumas proposições exemplares que podem ser trabalhadas com essa tecnologia para o ensino-aprendizagem de Estatística e Probabilidade. O autor ainda elenca que o *software* pode ser usado de maneira integrada a outros recursos para os professores de matemática.

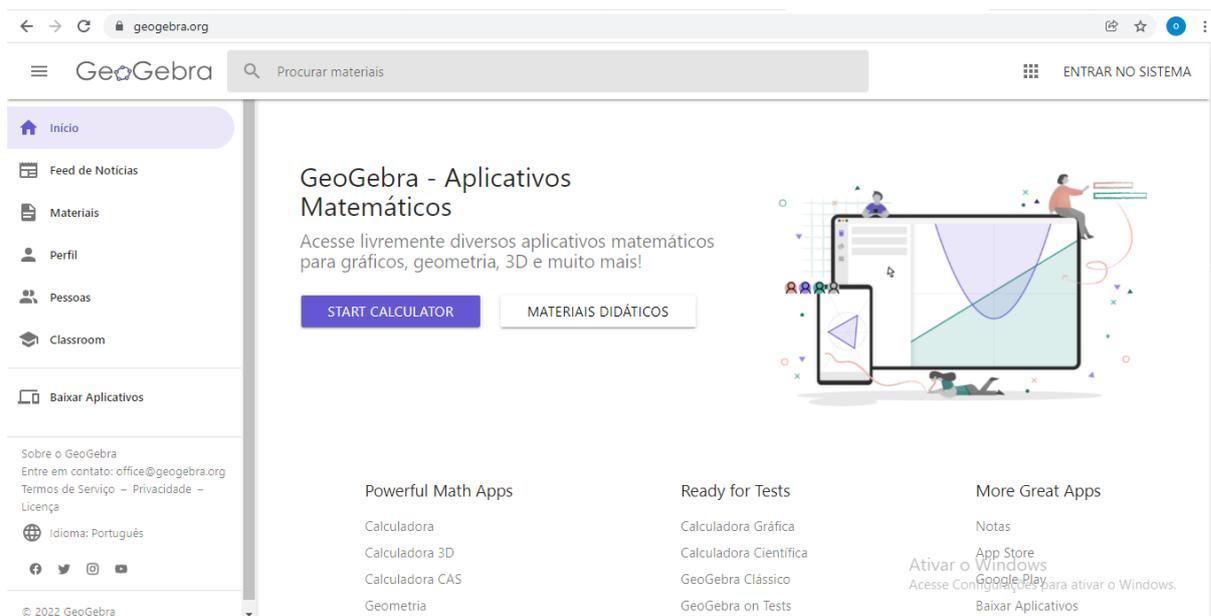
Ainda, Marques, Guimarães e Gitirana (2011) investigaram como alunos e professores do Ensino Fundamental/anos iniciais compreendem o conceito de Média Aritmética. Na pesquisa foi solicitado que os sujeitos da amostra respondessem a dois questionários, sendo que as invariantes e os significados eram similares nos dois questionários, porém as representações das questões eram diferentes, sendo elas com gráficos ou escrita. Nessa pesquisa, os autores perceberam que houve grande dificuldade no entendimento por parte dos alunos e também dos professores em relação às invariantes e significados, sobressaindo os professores, porém, não alcançando o esperado. Ao observarem isso, notaram que os significados foram os fatores mais influentes em relação às invariantes e concluíram que as representações exerceram influência, porém não foram determinantes.

## 4 METODOLOGIA

Esta pesquisa foi construída de maneira sucinta para atingirmos o nosso objetivo: analisar os materiais didáticos sobre Média Aritmética no site do GeoGebra por meio das situações, significados, invariantes e representações utilizadas. Lakatos e Marconi (2007) afirmam que a pesquisa é um processo rigoroso que envolve uma estruturação científica formal através de reflexões críticas para obtenção de novas descobertas.

Para isso, adotamos a Teoria dos Campos Conceituais, em especial, o campo conceitual de Média Aritmética para o estudo dos recursos disponibilizados no site do GeoGebra. A figura a seguir mostra a apresentação inicial da interface do *software* GeoGebra ao ser acessada através da internet.

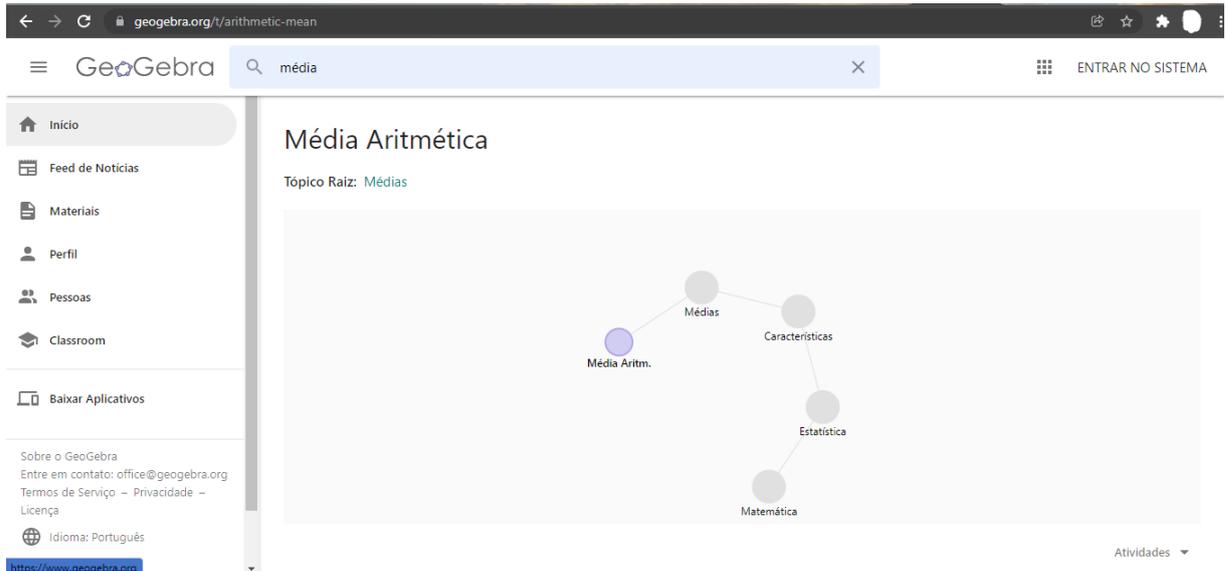
Figura 1 – Interface do *software* GeoGebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/>.

A busca foi realizada no sistema de buscas do próprio GeoGebra, na aba de Materiais Didáticos. O caminho percorrido encontra-se detalhado na figura 2, dentro de Estatística, Características, Médias e Médias Aritméticas.

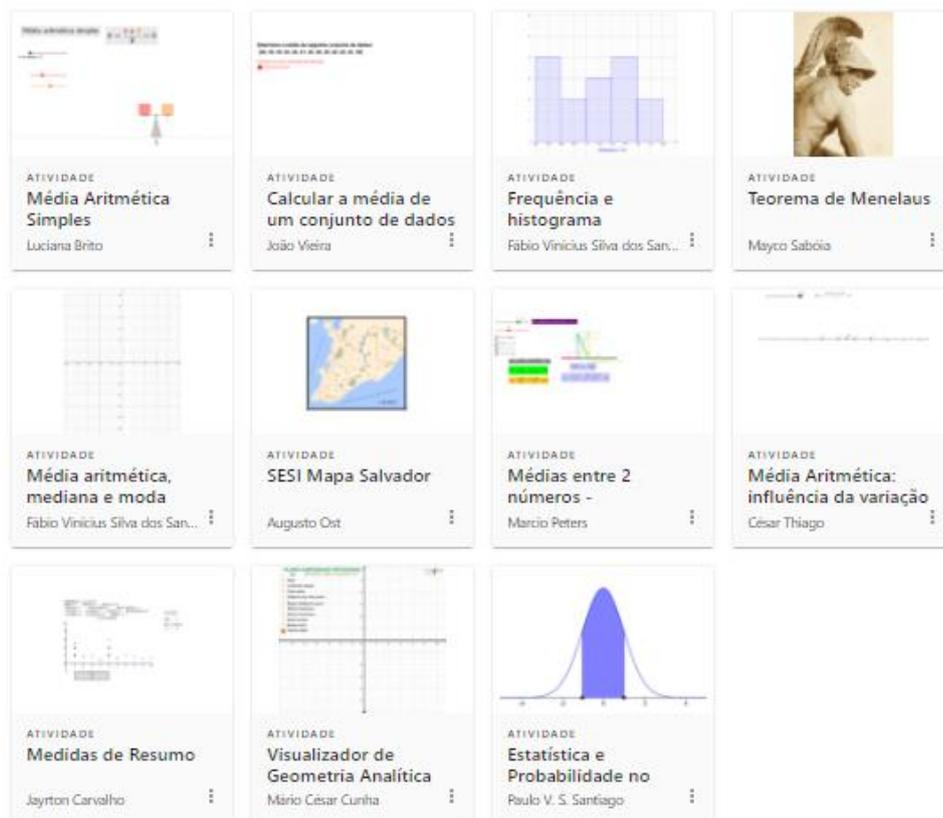
Figura 2 - Busca de Média Aritmética nos materiais didáticos do GeoGebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/t/arithmetic-mean>.

Após esse primeiro levantamento na aba Atividades foram encontrados 11 *applets*, apresentados na figura 3, a seguir.

Figura 3 - Resultados de *Applets* na busca sobre Média Aritmética nos materiais didáticos do GeoGebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/t/arithmetic-mean>.

Vale frisar que ao pesquisarmos o termo 'Média Aritmética', nos campos de busca do *software* encontramos onze *applets* relacionados a esse termo, porém nove deles não trazem conteúdo sobre a Média Aritmética Simples, sendo eles: Estatística e Probabilidade; Média Aritmética: Influência da Variação; Visualizador de Geometria Analítica; Medidas de Resumo; SESI Mapa Salvador; Média Aritmética, Mediana e Moda; Teorema de Menelaus; Frequência de Histograma; Calcular a Média de Um Conjunto de Dados.

Nesse contexto, como o objeto de estudo da presente pesquisa é a Média Aritmética Simples, selecionamos aqueles *applets* que abordam apenas esse subtema, selecionando: *Applet 1- Média Aritmética Simples*, da autora Luciana Brito e *Applet 2 - Médias entre Dois Números*, do autor Márcio Peters.

Como bem nos assegura Prodanov (2013), pode-se dizer que a pesquisa exploratória é um procedimento no qual o pesquisador se familiariza com o estudo em questão. Nesse contexto, percebe-se que a pesquisa pode proporcionar um conjunto de ideias, norteando os seus caminhos.

A pesquisa tem uma abordagem qualitativa, devido a ser uma análise e não coletar ou mensurar o tema, assim como bem nos assegura Tozzoni-Reis (2010, p. 30): “a pesquisa qualitativa defende a ideia de que, na produção de conhecimento sobre os fenômenos humanos e sociais, interessa muito mais compreender e interpretar seus conteúdos que descrevê-los”. O método de análise que escolhemos foi o hipotético-dedutivo, pois a pesquisa foi baseada em hipótese e problema, conforme citado acima.

O motivo da escolha pela análise dos *applets de média aritmética* no *software* GeoGebra, sem sua aplicação na sala de aula, deu-se devido à pandemia causada pela disseminação da Covid-19 e suas mutações momentâneas e oportunistas que não só o Brasil, mas o mundo está enfrentando ao decorrer de dois anos, a qual obrigou as pessoas a se isolarem e a ficarem dependentes das tecnologias. Na educação não está sendo diferente, os professores e alunos ainda estão receosos com a volta às aulas no formato presencial, devido ao contágio constante. Também por este motivo a pesquisa não foi realizada em campo.

Nesse contexto de aulas remotas, os professores tiveram que aprender e utilizar as tecnologias para ensino dos conteúdos didáticos e, para isso, precisaram buscar novos recursos que embasem os assuntos da melhor forma possível. Portanto, vimos a possibilidade de apresentar as contribuições que os *applets* do GeoGebra

podem proporcionar, para melhor exploração do conteúdo de Média Aritmética Simples para as turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

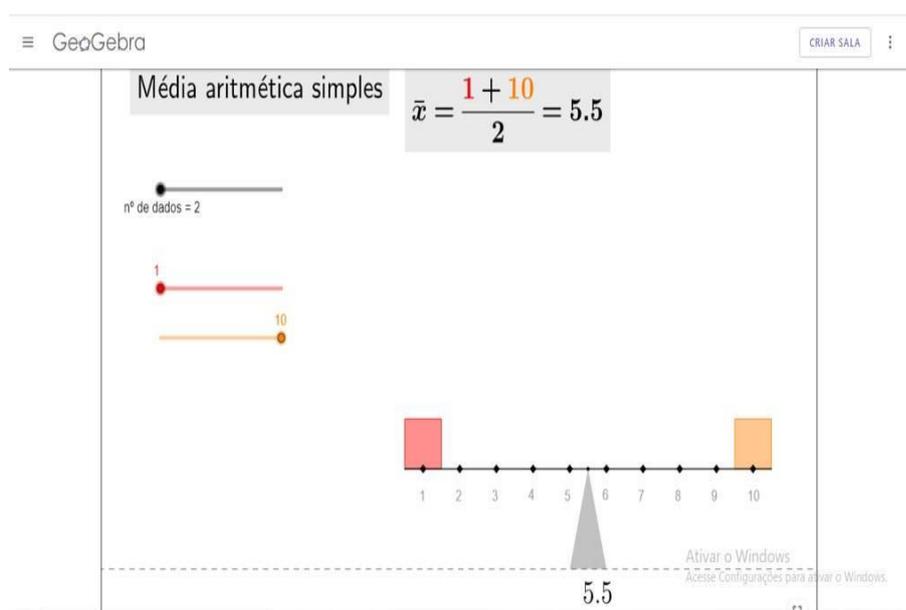
Para fundamentar a análise do conceito de Média Aritmética nesses *aplets* utilizamos especificamente os significados, invariantes e representações apresentados no Quadro 1 como critérios para identificar as potencialidades do trabalho desse conceito por meio dos *aplets*. No próximo capítulo apresentamos a análise dos *aplets*.

## 5 ANÁLISE DOS APPLETS QUE ENVOLVEM A MÉDIA ARITMÉTICA

Neste capítulo, discorreremos sobre a análise dos *applets* 1 - Média Aritmética Simples e 2 – Média entre dois números – representação geométrica. De início, apresentamos uma breve descrição de cada *applet*, depois apontamos as características sobre significados potenciais observados, invariantes potenciais observados e representações simbólicas observadas em cada *applet*.

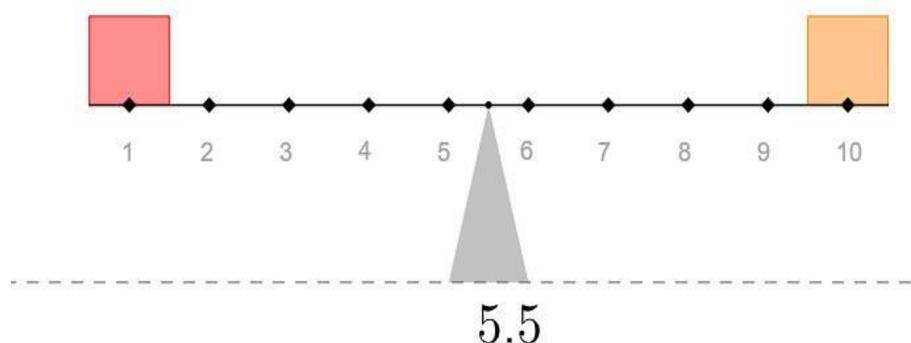
No *Applet* 1, denominado Média Aritmética Simples, presente no GeoGebra, apresenta uma interface acessível e intuitiva (Ver Figura 4).

Figura 4 - *Applet* Média Aritmética Simples



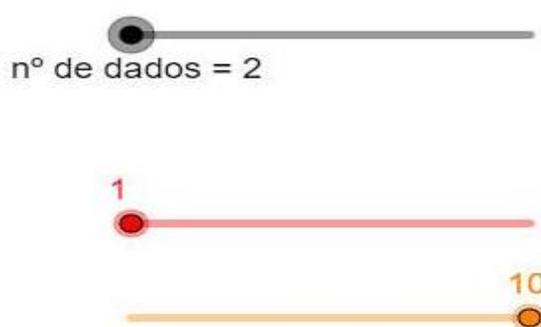
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/XhbWeYEY>.

Na figura 4 podemos observar como é mostrado o *applet* ao entrarmos no *software* para analisarmos como funciona. Nas figuras 5, 6 e 7 ampliamos todas as ferramentas apresentadas no *applet* para explicar os seus respectivos significados e como podem ser manipulados.

Figura 5 – *Applet* Média aritmética Simples (ampliação)

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/XhbWeYEY>.

Ao observarmos o recurso na figura 5, percebemos a existência de um ponto de equilíbrio em formato de um triângulo isósceles. Esse triângulo está fixado em apenas um ponto específico de um segmento de reta, sendo este ponto o resultado obtido a partir da soma de uma quantidade de  $n$  elementos escolhidos, dividido pela quantidade desses mesmos elementos. Cada elemento escolhido é representado por um bloco quadrado e equivale a uma unidade referente ao número escolhido, que variam entre os valores 1 e 10.

Figura 6 – *Applet* Média Aritmética Simples (ampliação)

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/XhbWeYEY>

Para manipularmos os valores nesse *applet*, precisamos escolher a quantidade de elementos que queremos trabalhar, sendo permitido apenas a escolha de valores entre  $2 \leq n \leq 5$  (dispostos no segmento de reta e representados na cor cinza). A depender da escolha, o recurso nos mostra segmentos de retas referentes à quantidade dos valores que foram escolhidos. Em cada elemento existem valores entre 1 e 10.



Fórmula da média Aritmética =>  $MA = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$

No caso abaixo =>  $M = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 / 5 = 1$ .

Propomos outra situação, representada na figura 9, na qual os valores escolhidos foram os seguintes: 3 elementos  $n$  em que o valor de  $n$  representou 4, 5 e 6 respectivamente. Nesta situação obtemos como média aritmética simples o valor de número 5.

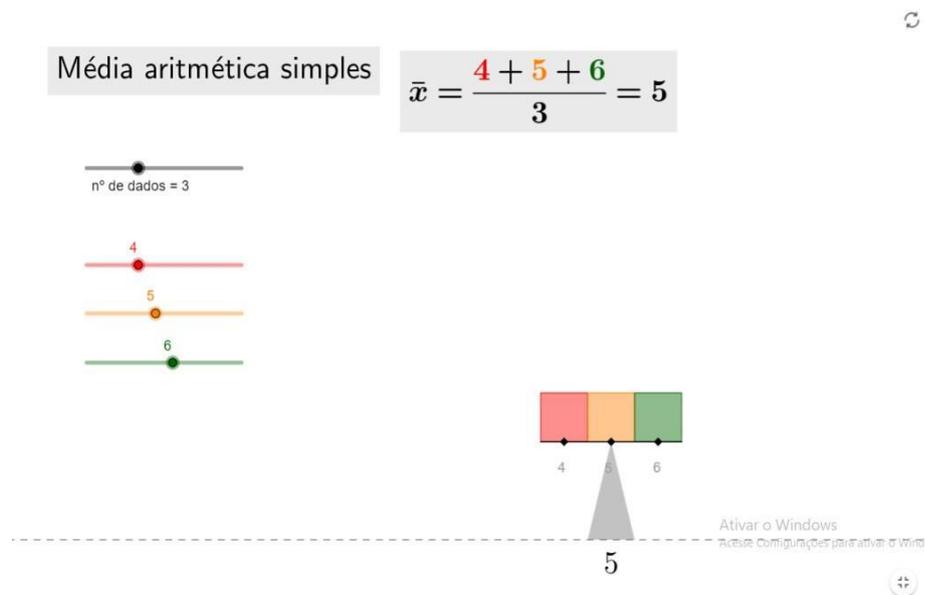
Número de elementos  $n = 3$

Valores dos elementos  $X_n = (4, 5, 6)$

Fórmula da média Aritmética =>  $MA = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$

No caso abaixo =>  $M = 4 + 5 + 6 / 3 = 5$ .

Figura 9 - Applet Média Aritmética Simples



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/XhbWeYEY>

Para análise desses *applets* utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, através das SIR (Situações, Invariantes e Representações) que pressupõem que a aquisição de conhecimentos é moldada por Situações, Problemas e ações em que o sujeito está presente.

### Análise Applet 1 – Média Aritmética Simples

Ao analisarmos o *applet 1 – Média Aritmética Simples* - percebemos que o mesmo, em relação às Invariantes, satisfaz cinco propriedades (ou invariantes), sendo elas:

- P1, pois a média fica entre os valores extremos;

Nesse caso, é fácil observar com pequenos ajustes nos controles deslizantes que o valor da média aritmética só pode assumir o valor mínimo de 1 (ver figura 8) e o valor máximo de 10, pois esses são os limites de valores apresentados no próprio applet. O professor por inclusive sugerir que os alunos encontrem o maior e o menor valor da média nesse conjunto de dados.

- P3, a média é influenciada por cada um e por todos os valores.

Esse invariante pode ser potencialmente discutido com o uso do controle deslizante, pois o professor pode sugerir situações que variem pouco a pouco o valor de um dos valores para ver como a média muda o valor. Por exemplo a média dos valores (1,1,1,1,10) é 2,8 notando como um valor (10) maior que os demais aumenta o valor da média.

- P4, a média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõem;

Com a mesma situação proposta acima pode ser discutido o fato de 2,8 não fazer parte do conjunto inicial dos valores para o cálculo de média, indicando que a média também obter valores que não estão entre aqueles expostos naquela situação.

- P7. a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.

Esse invariante pode ser trabalhado pela variação dos controles deslizantes, a ideia é que os alunos possam ir variando pouco a pouco o número de elementos e seus valores para compreender esse significado. Marques et al (2011) constataram em sua pesquisa que esse invariante não foi compreendido pelos estudantes de 3º e 5º ano dos anos iniciais e apontam como sendo um de maior dificuldade dentre os demais invariantes.

Observamos a ausência de alguns significados porque o applet 1 não se propõe a trabalhá-los, mas acreditamos que alguns acréscimos podem ser realizados para potencializar esse trabalho.

Para trabalhar com P5- a média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física, ou seja, não corresponde a um valor possível da variável considerada, sugerimos a criação de situações problemas contextualizadas. Veja um exemplo abaixo.

Imagine que três alunos possuem quantidade de doces e que juntando seus doces deu uma média de 9 doces por pessoa. Qual a quantidade de doces que cada um dos alunos pode ter? Nesse caso, os alunos teriam que alterar os valores de 3 controles deslizantes e identificar quais deles podem dar 9. Pode-se utilizar essa atividade para discutir porque não propor quantidades não inteiras. De modo análogo, pode-se propor situações na qual a média de doces não seja inteira, fazendo que eles reflitam o que pode ser 9,5 doces.

No invariante P6 que discute o cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos, nesse aplicativo não há possibilidades de trabalhar valores nulos ou negativos. O mesmo acontece com P2 que trata da soma dos desvios a partir da média é zero. Nesse caso, o professor para trabalhar com esses invariantes pode utilizar a planilha de Excel, a calculadora, ou outro recurso em conjunto.

No que se refere aos Significados, o *applet* satisfaz:

- A2, obtenção de uma quantidade equitativa a repartir para conseguir uma distribuição uniforme;

Algumas situações podem ser propostas para essa discussão, pois o *applet* ao calcular a média nos mostra um valor que foi dividido por igual;

- A3 aplicação de que a média serve de elemento representativo de um conjunto de valores dados, cuja distribuição é aproximadamente simétrica;

Nas figuras 7 e 9 a representação da média apresenta os elementos que são representativos de um conjunto de dados que são distribuídos de maneira simétrica em relação a média.

- A4. necessidade de conhecer o valor que se irá obter com maior probabilidade ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

Nesse caso o professor pode sugerir situações em que a média seja dada e alguns valores de elementos estejam faltando para que o estudante consiga identificar, propondo assim uma complementação para o aplicativo.

Os demais significados de média não foram observados A5 que indica que a média de uma amostra como uma boa estimativa para média de uma população e A6 que discute a média como uma estimativa da variável para tempo futuro, principalmente pela limitação apresentada pelo applet no que diz respeito aos valores de elementos. São valores bem restritos de 1 a 10 o que não permite a discussão de dados reais, mas que se torna uma boa discussão do conceito de média inclusive para os anos iniciais, haja vista o trabalho de Marques et al (2011).

Com relação ao significado A1- estimativa de uma quantidade desconhecida, em presença de erros de medida, como apresentação do valor da média é apresentado automaticamente a partir de qualquer alteração dos valores dos elementos, podem ser feitas alterações no controle para que essa fórmula só seja apresentada ao fim da discussão inicial. Portanto, para discutir melhor a estimativa de média em situações problemas para depois simular no *applet*.

No que concerne à Representação, o recurso não possibilita nenhuma das três propriedades, o que indica que os professores deverão procurar outros meios de trabalhar essas propriedades não favorecidas pelo *applet*. Mas observamos ainda a representação simbólica na qual representa a fórmula da média aritmética (ver figura 7) e uma representação figural que indica a média dos valores apresentados numa reta numerada com auxílio de um triângulo isósceles (ver figura 5).

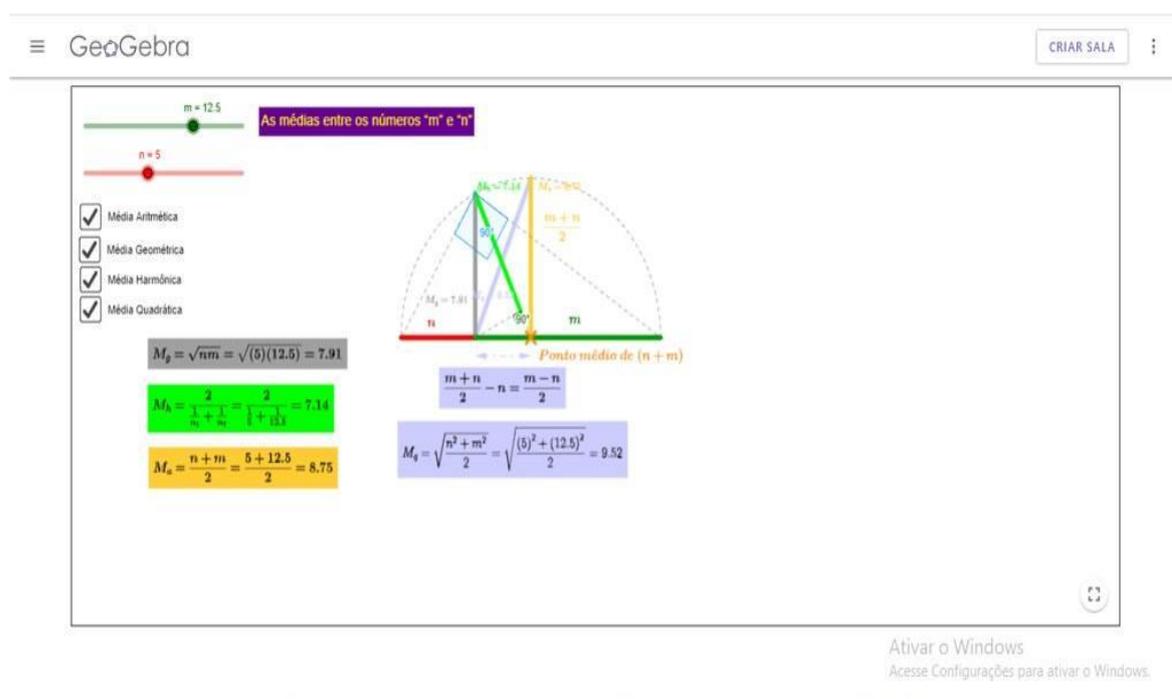
Nesse *applet* vemos a possibilidade de serem trabalhados os números localizados entre 1 e 10, com isso, ficamos limitados a valores pequenos. O *applet* não indica a série a ser trabalhada, porém percebemos que este pode ser trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, conforme a BNCC (BRASIL, 2018), devido ao conhecimento exigido ao manusearmos o *applet*.

Compreendemos ainda que para uma boa aula, o professor não deve apenas mostrar o *applet* como um novo recurso, pois o mesmo não funciona sozinho. Esse *applet* necessita de um conhecimento prévio sobre as médias aritméticas. Sugerimos que o professor direcione os alunos da seguinte forma: conceitue a Média Aritmética e suas propriedades, para que em seguida mostre ao aluno o recurso e como manuseá-lo. Elabore questões sobre médias, lembrando das limitações da tecnologia e peça ao aluno que resolva de acordo com o *applet*. O GeoGebra possibilita ao professor a criação de salas de aula e a possibilidade de alteração do applet acrescentando por exemplo situações para discutir o conceito de média. Assim, o

professor pode potencializar esse aplicativo, direcionando novas atividades ou estudos com números superiores aos que estão no recurso utilizado.

Vejamos agora a discussão sobre o Applet 2 – Médias entre dois números - Representação Geométrica.

Figura 10 – Applet 2 - Médias entre dois números - Representação Geométrica

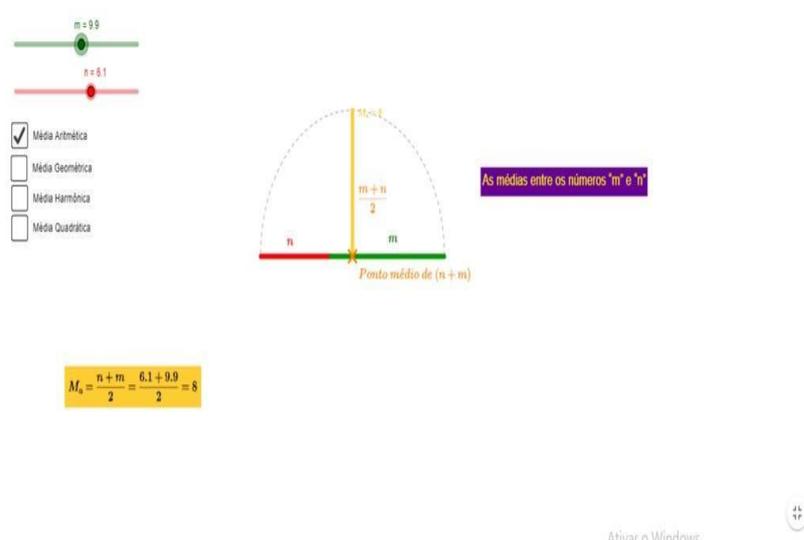


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/emyerhum>.

Ao acessar o Applet - Médias entre dois números (Representação Geométrica) no GeoGebra, nos deparamos com uma interface rebuscada e bem trabalhada, como podemos visualizar na figura 10. Vale ressaltar que o applet manipula quatro tipos de medidas tendenciais: a média aritmética, média geométrica, média harmônica e média quadrática. Porém, como nosso foco é a média aritmética, desmarcamos os outros tipos de médias.

Como podemos observar na figura 11, o recurso permite ao usuário trabalhar mais de um modelo de média, no entanto, daremos atenção apenas à média aritmética.

Figura 11 – *Applet 2* - Médias entre dois números - Representação Geométrica



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/emyerhum>.

O *applet* apresenta uma interface rebuscada e serve para mostrar o comportamento geométrico a partir do ponto médio representado na forma  $M = m + n / 2$  em que  $|0,4 \leq m \leq 18|$  e  $|0,1 \leq n \leq 17,9|$ . O ponto médio é proveniente do cálculo da média entre dois números.

Figura 12 – *Applet 2* - Médias entre dois números - Representação Geométrica (ampliação)

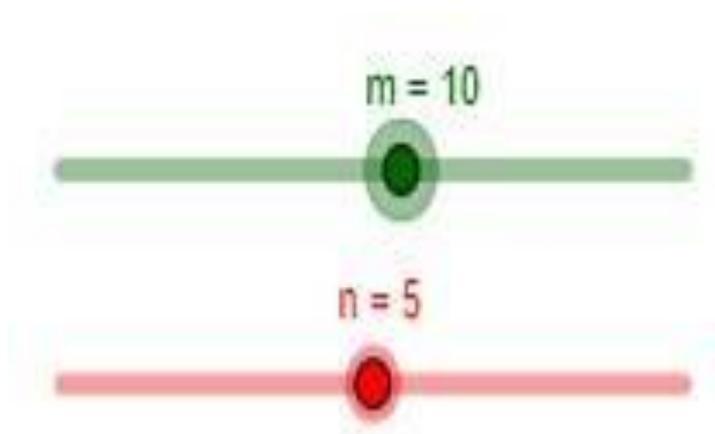


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/emyerhum>

Ao iniciarmos o *applet*, as caixas aparecem preenchidas nas quatro médias, como nos mostra a figura 12, indicando que podem ser usadas todas, simultaneamente, porém desmarcamos as que não iremos utilizar, que são elas: Média Geométrica, Média Harmônica e a Média Quadrática.

Como podemos observar, na figura 13, estão presentes nesse *applet* dois cursores que podem ser movimentados para a esquerda, reduzindo valores, e para direita os aumentando.

Figura 13 – *Applet* 2 - Médias entre dois números - Representação Geométrica (ampliação)

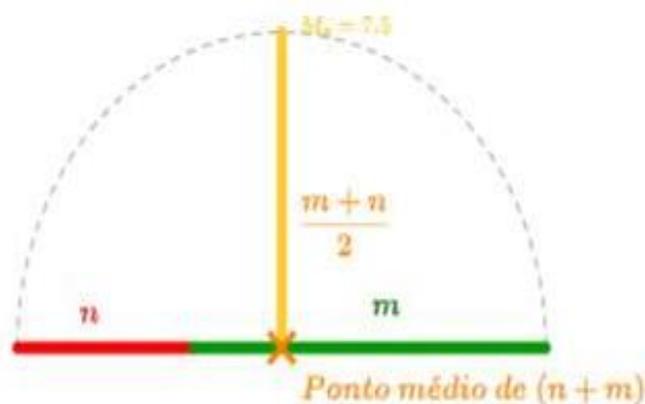


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/emyerhum>

Os botões  $m$  e  $n$  representam os números que podemos fazer a escolha. Eles variam, sendo  $|2 \leq m \leq 18|$  e  $|0,1 \leq n \leq 17,9|$ .

Como podemos observar, na figura 14, a representação gráfica deste *applet* é bem intuitiva e seu formato vai de acordo com os valores escolhidos para  $m$  e  $n$ .

Figura 14 – Médias entre dois números - Representação Geométrica (ampliação)



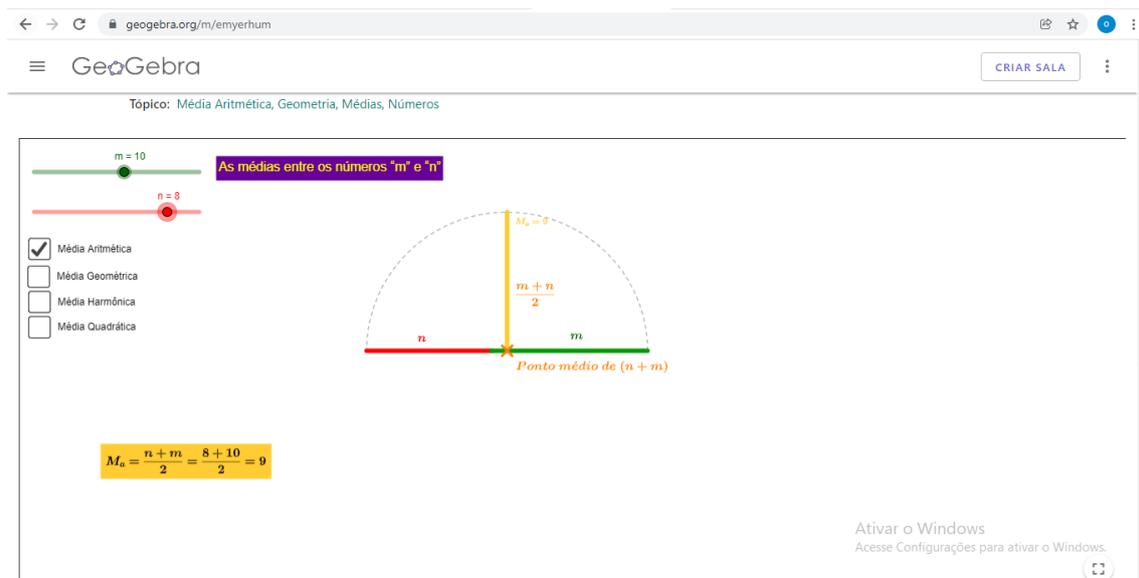
Fonte: <https://www.geogebra.org/m/emyerhum>

Nessa janela do *applet* temos um gráfico em formato de um semicírculo, no qual existe um ponto médio obtido pela soma de  $n + m$ . O gráfico se comporta de

acordo com a variação de  $n$  e  $m$ , respectivamente representados na cor vermelha e verde.

Na figura 15 foi proposta uma situação na qual escolhemos os valores para  $n = 8$  e para  $m = 10$ .

Figura 15 – Médias entre dois números - Representação Geométrica

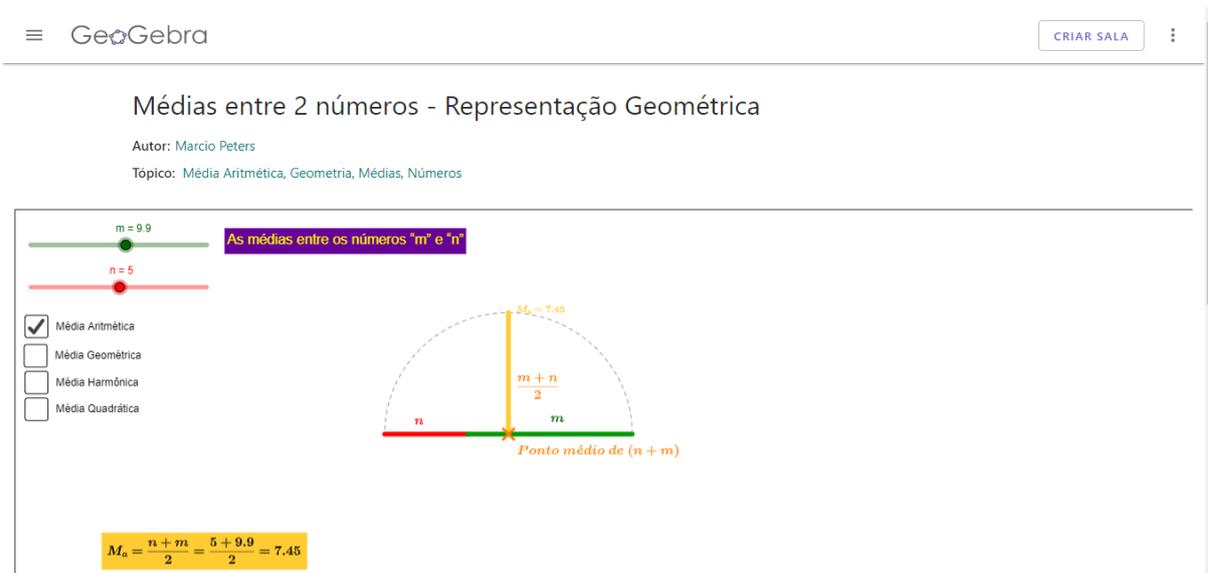


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/emyerhum>.

O *applet* nos deu como resultado a média aritmética  $M_a = 9$ . Percebemos que o *applet* nos mostrou como fica o gráfico em relação a essa escolha, como podemos observar na figura 15.

Como podemos observar na figura 16, foi proposto a seguinte situação: escolhemos os valores para  $n = 5$  e para  $m = 9,9$ .

Figura 16 – Médias entre dois números - Representação Geométrica



Para essa proposta obtivemos como média aritmética  $M_a = 7.45$  e o modelo do gráfico gerado pode ser visualizado na figura 16.

### Análise Applet 2 – Média Aritmética Simples

No aplicativo 2 – Médias entre dois números – Representação Geométrica, percebemos que satisfazem, em relação aos Invariantes, as seguintes propriedades:

- P1, pois os valores da média sempre estarão entre os números que estão localizados nos extremos;
- P3, porque a média pode ser influenciada por um ou mais valores;
- P4, dado que a média, nesse *applet*, a média não necessariamente coincide com os valores que estão naquele aplicativo;
- P5, devido o recurso calcular valores fracionados;
- P7, pois os valores são obtidos a partir dos números que foram calculados.

No que concerne aos Significados, o *applet 2* engloba as propriedades:

- A2, porque o *applet*, ao calcular a média obter um valor que foi distribuído igualmente

- A3, dado que os elementos representam, nesse *applet*, um conjunto de valores com distribuição similar.

A respeito das Representações, o *applet* nos mostra a representação geométrica de uma média aritmética, como sendo o ponto médio da soma de dois segmentos de reta, além da representação simbólica da fórmula de média, como observado na figura 16.

Esse recurso possibilita ao aluno manipular números entre 0,4 e 18, não sendo possível inserir os números manualmente, porém podem ser escolhidos por meio de movimentos da direita para esquerda ou da esquerda para a direita, através do cursor do mouse. Nesse caso específico, observados a possibilidade de trabalho com média de alguns números racionais.

O *applet* 2 está limitado apenas a média de dois números, por causa da sua relação com a geometria (soma de dois segmentos de reta), não podendo, assim, ser trabalhado ou manipulado com mais elementos. Percebemos uma grande similaridade entre esse *applet* com o primeiro, porém este apresenta um gráfico que é mostrado de acordo com o resultado da média, através dos números escolhidos.

O Recurso por si só não funciona, pois necessita de um mediador para que seja aplicado de forma mais eficiente, pois o mesmo trabalha com números fracionados e não mostra como pode ser usado para alcançar o ensino-aprendizagem sobre o conteúdo de Média Aritmética.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo permitiu uma análise de *applets* do *software* GeoGebra que trabalham com a Média Aritmética, visando avaliar e compreender os conceitos de Média Aritmética Simples que podem ser trabalhados em sala de aula, a partir da SIR (situações, invariantes e representações) elencada por Vergnaud, na Teoria dos Campos Conceituais.

Para a realização desta pesquisa e alcance dos objetivos, fizemos o levantamento de todos os *applets* relacionados ao conteúdo das Medidas de Tendência Central que estão disponíveis no site do GeoGebra, a partir daí escolhemos apenas os que envolvem a Média Aritmética Simples. Ao pesquisarmos pelo termo Média Aritmética Simples, encontramos 11 *applets* com esse tema, porém muitos desses *applets* não trabalham com a média aritmética diretamente e contém apenas o título relacionado a essa medida. Desses onze aplicativos fizemos a análise de dois *applets*: 1 - Média Aritmética Simples e 2 - Médias entre dois números.

Ao analisarmos esses *applets* percebemos que os mesmos não trazem informações nem instruções de como usar e para qual série é indicada, porém ao pesquisar nos documentos oficiais, como a BNCC (BRASIL, 2018), percebemos que esses *applets* podem ser trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, pois o tipo de linguagem abordada está relacionado as séries mencionadas.

Identificamos também, por meio da análise, que os *applets* não direcionam o seu foco de aprendizagem, ou seja, eles não especificam o que será abordado e de qual forma será abordado. Percebemos ainda que o *applet* não permite, na tela inicial, inserirmos atividades diretamente nele, porém podemos logar no site do próprio Geogebra e anexar atividades através da ferramenta *geobook*, a inserção de exercícios para resoluções extras, por esse motivo, reforçamos que o professor precisa estar presente para nortear e facilitar o entendimento dos alunos. Para a aplicação desses recursos, o professor precisa conceituar o conteúdo, pois verificamos que o aluno não consegue compreender como funciona aquela ferramenta, visto que eles não sabem os significados do que aparecem na tela.

Dessa forma, o professor é a peça fundamental na aplicação desse recurso, pois ele precisa fazer todo o planejamento pedagógico visando o melhor

aproveitamento das ferramentas que estão no GeoGebra para ad sala de aula. Assim, ele deve manipular o *applet* e ver as suas funcionalidades e limitações, para que a partir disso possa articular esse recurso com o conteúdo de Média, propondo situações, realizando exercícios e abrindo espaço para possíveis argumentações e dúvidas dos alunos.

Para a realização desta análise, trabalhamos com a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, que foi uma teoria importantíssima, pois nos aguçou a buscar e verificar o verdadeiro significado das propostas do *applets*, não apenas na aplicação dos mesmos, mas em como podemos trabalhar com eles a partir das SIR (Situações, Invariantes e Representações), que englobam as situações em que o aluno se depara no seu cotidiano, sendo que esses *applets* podem trazer significados aos conteúdos de matemática e, por conseguinte, fazer com que o estudante aprenda de forma prazerosa e autêntica.

Sendo assim, ressaltamos as contribuições desta pesquisa, por conseguir alcançar os objetivos buscados, identificando se os materiais do *software* GeoGebra apresentavam características da SIR (Situações, Invariantes e Representações); também percebemos que os *applets* precisam do acréscimo de algumas informações, haja vista que estas podem variar de acordo com a metodologia do professor, sendo este o responsável pelas informações que queiram acrescentar, de acordo com o objetivo a ser alcançado. Nesse caso, o professor precisa estudar e conhecer os *applets*, para que possa aplica-los da melhor maneira possível.

Em pesquisas futuras, que podem se apoiar nesta pesquisa, sugerimos estudar quais *applets* do GeoGebra podem ajudar na metodologia do professor de forma sequenciada, voltadas ao ensino das Medidas de Tendência Central.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. R.; ABAR, C. Contribuições do GeoGebra para o estudo das medidas de tendência central. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais**. Matogrosso, SBEM, 2019.

BATANERO, C. *Significado y Comprensión de las Medidas e Posición Central*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. **UNO**, v. 25, p. 41-58, 2000.

BATTISTI, I. D. E.; BATTISTI, G. **Métodos estatísticos**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2008.

BORGES-ANDRADE, J. E.; ABBAD, G. S.; MOURÃO, L. **Treinamento, desenvolvimento e educação em organizações e trabalho**. 2 ed. São Paulo: Artimed, 2007.

BORTOLOSSI, H. J. O uso do *software* gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de Estatística e Probabilidade. **VIDYA**, v. 36, n. 2, p. 429-440, jul./dez., 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**. Brasília, MEC/SEF/COEJA, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Relatório Nacional PISA 2012: Resultados brasileiros**. OCDE, 2012.

CARVALHO, J. I. F. **Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2011. 141f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2011.

CARZOLA, I.M.; KATAOCA, V.Y.; SILVA, C.B. Trajetória e perspectivas da Educação Estatística no Brasil: um olhar a partir do GT12. In. LOPES, C. E.; COUTINHO, C.Q.S.; AALMOULOU, S.S. (org.). **Estudos e Reflexões em Educação Estatística**. São Paulo, Campinas: Mercado de Letras, 2010. p.19-44.

CORALINA, C. Exaltação de Aninha (O Professor). In: CORALINA, C. **Vintém de Cobre: meias e confissões de Aninha**. 9 ed. São Paulo: Global, 2007.

FEIJOO, A. M. L. C. **A pesquisa e a estatística na psicologia e na educação** [online]. Rio de Janeiro: Centro Edelstein de Pesquisas Sociais, 2010. Disponível em: <https://static.scielo.org/scielobooks/yvnrwq/pdf/fejoo-9788579820489.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2021.

FERREIRA, A.; MIRANDA, P.; VARGAS, D. Uma análise dos trabalhos com o *software* Geogebra no XII Encontro Nacional de Educação Matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais**. Matogrosso, SBEM, 2019.

GRESSLER, L. A. **Introdução à pesquisa: projetos e relatórios**. 2 ed. rev. atual. São Paulo: Loyola, 2004.

HUFF, D. **Como mentir com Estatística**. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

JUSTO, A. O. R. P. **Ensino de estatística por meio de jogos**. 2018. 123f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. São Paulo, 2018.

LAURINDO, J. C. S. **Estatística no GeoGebra: uma análise dos processos de Abstração Reflexionante sobre conceitos de medidas de tendência central**. 2019. 206f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2019.

LOPES, C. E. Os desafios para educação estatística no currículo de matemática. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOU, S. A. (Orgs.) **Estudos e reflexões em educação estatística**. Campinas - SP: Mercado de letras, 2010.

MAGINA, S. A.; FONSECA, S. Aprendizagem da Média Aritmética Simples a partir de materiais didáticos distintos: uma comparação entre duas propostas de ensino. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 7, n. 1, 2016.

MAGINA, S. A. Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. In: Encontro Regional de Professores de Matemática. **Anais**. Campinas, 2005.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia científica: ciência e conhecimento científico, métodos científicos, teoria, hipóteses e variáveis**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MARQUES, M.; GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V. Compreensões de Alunos e Professores sobre média aritmética. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática, v. 24, p. 725 - 746, 2011.

MORAIS, T. M. R. **Um estudo sobre o pensamento estatístico: componentes e habilidades**. 2006. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PERIUS, A. A. B. **A tecnologia aliada ao ensino de Matemática**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Cerro Largo – RS, 2012.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2 ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SBEM. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Educação Estatística – GT 12**. Disponível em:

<http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/gt/gt-12>. Acesso em: 22 dez. 2021.

SILVA JÚNIOR, J. M. **Estatística: história e práticas didáticas no ensino contextualizado**. 2015. 71f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes – RJ, 2015.

SILVA, J. L. C.; FERNANDES, M. W.; ALMEIDA, R. L. F. **Estatística e probabilidade**. 3 ed. Fortaleza: EdUECE, 2015.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 1, p. 64-80, 1988.

TOZONI-REIS, M. F. C. **Metodologia da pesquisa científica**. Curitiba: IESDE Brasil. S. A., 2009.

VAZ, D. A. F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o GeoGebra. **Revista Educativa**. Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.

VERGNAUD, G. *La théorie des champs conceptuels*. **Récherches em Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, 1991.

VERGNAUD, G. *The Theory of Conceptual Fields*. **Human Development**, v. 52, p. 83-94, 2009.